PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Fernando da Silva Conceição Junior

Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Fernando da Silva Conceição Junior

Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini***

São Paulo

2011

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _______________________________________ **Local e Data:** ______________

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos Professores, e a todos que lutam pela melhoria do ensino em nosso País.

AGRADECIMENTO

À Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini pela paciência e dedicação durante a orientação desse trabalho e por ter me mostrado o que é ser um professor pesquisador.

Aos Professores Doutores Renata Rossini e Marcos Roberto Celestino, participantes da banca examinadora, por suas valiosas contribuições durante o exame de qualificação que ajudaram na finalização desse trabalho.

A todos os professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP por terem ajudado na mudança de minha prática profissional.

À minha esposa Rita pela compreensão durante todo o curso, cuidando com muito carinho de nosso tesouro (nossa filha Gabriela) para que eu pudesse concluir essa pesquisa.

Aos colegas do grupo de pesquisa: Adriana Tiago, Edson Eduardo Castro, Fernanda Ravazi, Claudia Theodoro, Yara, Emerson e Ana Lucia, pois todos vocês contribuiram de alguma forma na realização desse trabalho.

Aos meus amigos Professores Antonio Machado Veiga e Geraldo Vidal pelo incentivo e por todas as ricas discussões que temos todos os dias, que só me fazem crescer como pessoa.

A equipe técnica do colégio em que trabalho: Raquel, Reinaldo e Carolina, por todo o apoio que necessitei durante a elaboração e aplicação do instrumento diagnóstico desta pesquisa.

À professora Rita Ladeia e Marlene Mendes pelo incentivo e pela ajuda tanto no Inglês quanto no Português.

A todos os meus alunos, em especial os que estão na 3ª série do Ensino Médio em 2011, pela colaboração e aprendizagem que compartilhamos juntos.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES – pela concessão da bolsa de estudos durante dois dos três anos de curso, pois sem ela, seria impossível concluí-lo.

RESUMO

Essa pesquisa qualitativa foi realizada com alunos da 2ª série do ensino médio de uma instituição particular, localizada na zona sul da cidade de São Paulo. Procuramos responder as seguintes questões: Em que medida o ensino de inequações via uma abordagem funcional gráfica que envolva o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica, pode, ou não, favorecer o entendimento por parte dos alunos do assunto em questão? Quais as dificuldades encontradas? Quais os avanços percebidos em relação à coordenação desses registros?. Para tanto elaboramos, aplicamos e analisamos um instrumento diagnóstico composto de cinco atividades inspiradas em nossa experiência docente, nas análises dos livros didáticos utilizados pelos dos alunos e principalmente nas pesquisas de Traldi (2002), Fontalva (2006), Bianchini e Puga (2006) e Giusti (2008). Além disso, referenciamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval (2003) para elaborar e analisar as questões que formulamos. O instrumento diagnóstico aborda os tópicos inequações polinomiais do 1º grau, sistemas de inequações do 1º grau, inequações racionais, funções cujas expressões algébricas são representadas por radicais e inequações quociente, e as questões foram formulados de forma que possibilitassem em sua resolução a coordenação de mais de um registro de representação semiótica. Os sujeitos da pesquisa participaram de duas sessões para a resolução das mesmas atividades, sendo a primeira com o auxilio do *software* GeoGebra e a segunda sem o auxilio da tecnologia. Os resultados apontam que esse tipo de abordagem pode ser satisfatória na resolução de inequações, visto que percebemos um avanço nos conhecimentos matemáticos dos alunos da primeira para a segunda sessão, indicando que os alunos podem ter relacionado a resolução gráfica com a resolução algébrica. Contudo os alunos apresentaram dificuldades em explicar no registro da língua natural os procedimentos por eles utilizados na resolução dos problemas. Essa pesquisa acompanha um produto composto de nosso instrumento diagnóstico e nossas análises que está disponível para uso dos educadores interessados em utilizar esse tipo de abordagem em suas aulas.

Palavras-chave: Educação Algébrica, Inequação, Registro de Representação Semiótica, GeoGebra.

ABSTRACT

This qualitative research was conducted with students undergoing the second year if Senior High School in a private school in the south area of São Paulo. We looked for answers to the following questions: Up to what extent does the teaching of inequalities through a functional graphic approach, which involves the treatment and conversion of registers of semiotic representation, can or cannot favor the students' understanding of the subject in question? What are the difficulties faced? What are the advances realized concerning the coordination of these records? In order to do that, we elaborated, applied and analyzed a diagnosis instrument composed of five activities inspired by our teaching practice, by the analysis of textbooks used by the students and mainly by the research developed by Traldi (2002), Fontalva (2006), Bianchini e Puga (2006) and Giusti (2008). Besides that, we took as reference the theory of register of semiotic representation, developed by Durval (2003) to elaborate and analyze the issues raised by us.The diagnostic instrument covers the topics: polynomial inequalities in the first degree, systems of inequalities of the first degree, inequations rational, functions whose algebraic expressions are represented by radicals and inequalities quotient. The questions were reformulated in order to make possible the coordination of more than a record of semiotic representation in the solution process.The research subjects participated in two sessions for the resolution of the same activities, being the first with the help of the software GeoGebra and the second without the help of technology. The results show that this kind of approach may be satisfactory in solving inequalities, since we observed an improvement in the mathematical knowledge of students from the first to the second session, indicating that students may have related the graphics resolution to the algebraic resolution. Nevertheless, the students had difficulties in explaining, through natural language, the procedures used by them in solving problems. This research consists of a product composed of our diagnosis instrument and our analysis tools, which are available for use by educators interested in applying this approach in their classes.

Keywords: Algebraic education, inequalities, Register of Semiotic Representation, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

Introdução

Há 11 anos iniciamos nossa carreira de professor de Matemática, na época ainda éramos estudantes do 2º ano da Licenciatura em Matemática e, além do pouco domínio sobre conteúdo que ministrávamos, a maior parte do nosso trabalho era o de lecionar Física em uma escola na cidade de Itapevi, localizada na Grande São Paulo. Evoluímos profissionalmente e no ano de 2004 ingressamos em um tradicional colégio católico localizado no bairro da Liberdade em São Paulo, que no ano de 2011 completa 80 anos de atuação. Nessa Instituição, tivemos a oportunidade de ministrar aulas de Matemática para o ensino médio, e dessa forma estudamos muito os conteúdos que deveríamos ensinar, mas a forma de como esses conteúdos eram apresentados em sala de aula se baseavam, em grande parte, nos métodos utilizados por nossos professores da universidade, que em sua maioria ministravam seus conteúdos segundo métodos semelhantes a uma Tendência Tecnicista Mecanicista.

Segundo Fiorentini (1995), esta tendência procura reduzir a Matemática a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los. O tecnicismo mecanicista procura priorizar o fazer, deixando de lado outros aspectos importantes, como compreender e o refletir.

Por algum tempo acreditamos que esse método de trabalho, tomando como referência os procedimentos adotados pelos professores que participaram da nossa formação na universidade, seria eficaz com a maioria dos alunos, uma vez que tínhamos a impressão de que esse tipo de abordagem tinha sido satisfatória em nosso aprendizado. Porém com o passar dos anos fomos percebendo que essa abordagem fazia com que muito dos alunos decorassem regras e procedimentos que os levassem a resolver os problemas propostos, porém depois de algum tempo, diante de situações semelhantes em outras fases do curso, os alunos que a principio mostravam um domínio sobre o conteúdo, não sabiam mais como fazer e quando perguntados sobre o porquê não conseguiam mais resolver tais problemas, diziam que não lembravam mais de como se fazia aquilo, o que nos levou a perceber que deveríamos procurar outras abordagens que possibilitassem uma melhor compreensão dos alunos sobre os conteúdos de Matemática.

Começamos então a acreditar que o conhecimento não aparece como algo pronto, pois quando o tratamos assim, oferecemos uma única iniciativa a ser tomada no processo de aprendizagem por parte do aluno, que é internalizá-lo pelo recurso da memorização de procedimentos, regras e algoritmos. Passamos a acreditar, baseados na discussão de textos referentes ao tema em reuniões pedagógicas das Instituições em que trabalhamos e em nossas experiências, que o conhecimento deve ser construído. E nessa perspectiva o professor propõe situações em que os alunos possam construir os conhecimentos referentes a certos tópicos dando a eles boa parte de responsabilidade no processo de aprendizagem.

Em busca de pesquisar como as pessoas aprendem Matemática procuramos um curso de especialização em Educação Matemática, em período integral, mas apenas aos sábados, no qual realizamos uma pesquisa bibliográfica sobre a problemática do ensino de Trigonometria. Embora o curso tenha nos ajudado a compreender um pouco melhor sobre a função do professor de Matemática, sua contribuição não teve uma aplicabilidade imediata em nossa prática como imaginávamos, e continuamos tendo problemas na condução de alguns tópicos, que, ao longo do tempo, fomos tentando corrigi-los com auxilio de livros didáticos e a troca de idéias com colegas de profissão.

Segundo Ribeiro, R.M:

> O desenvolvimento profissional ao longo de toda a carreira é, hoje em dia, um aspecto marcante da profissão docente, combinando processos formais e informais. O professor deixa de ser objeto para passar a ser sujeito da formação e seu desenvolvimento profissional é, no essencial, decidido por ele. (2007, p. 2)

Motivados a melhorarmos nosso desempenho em sala de aula e também nossa compreensão a respeito da Matemática, no ano de 2008 ingressamos no programa de estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática por acreditarmos que o ambiente de alunos composto apenas por professores do ensino básico, um dos critérios para ingresso no curso, poderia ser favorável às nossas expectativas de melhoria de nossa prática profissional.

No segundo semestre de 2008, após sermos beneficiados com a concessão da bolsa CAPES, ingressamos no Grupo de Pesquisa em Educação

Algébrica – GPEA, coordenado pelas Professoras Dra. Silvia Dias Alcântara Machado, Dra. Maria Cristina S. de A. Maranhão e Dra. Barbara Lutaif Bianchini que tem como projeto direcionador das pesquisas “Qual a Álgebra que deve ser ensinada na formação do professor de Matemática?”

Um dos projetos ligados ao GPEA é “A aprendizagem da álgebra com a utilização de ferramentas tecnológicas”. O objetivo desse projeto é investigar na Educação Algébrica o papel da tecnologia, avaliar o impacto da tecnologia na Educação Algébrica e seus efeitos nos campos: institucional, docente e discente.

Nosso interesse por pesquisar sobre o ensino de inequações, utilizando a tecnologia foi despertado ao cursar a disciplina Tópicos de Cálculo, ministrada no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC-SP. A abordagem nesse curso privilegiava o uso de gráficos de funções para a resolução dos problemas relacionados ao Cálculo, dentre eles a resolução de inequações. Percebemos no momento em que cursávamos a disciplina que o entendimento que tínhamos sobre a resolução de inequações não era suficiente para ensinar nossos alunos, uma vez que nós mesmos não os tínhamos consolidados. O uso de um *software* para a construção dos gráficos e o aspecto visual deram sentido à resolução algébrica que estávamos acostumados a usar há alguns anos.

Conforme Gracias e Borba:

> Nas escolas o aspecto visual normalmente é deixado em segundo plano. O estudo das funções quadráticas é mais dominado pelo aspecto algébrico. Os exercícios propostos aos alunos envolvem, em geral, apenas manipulações algébricas e construções de gráficos por meio de uma tabela de pontos que satisfaçam a expressão analítica. (1999 apud Mariani, 2006, p. 2)

A afirmação de Gracias e Borba (1999 apud Mariani 2006) reflete a situação que ocorrera em nossa formação, incluindo o ensino básico. Em nossas aulas, até o inicio dessa pesquisa, nunca ocorrera a resolução de inequações envolvendo o aspecto visual, ou seja, utilizando o gráfico de funções para a resolução das mesmas.

Em buscas de trabalhos nacionais relacionados ao tema inequações ou temas correlatos, como desigualdades, por exemplo, percebemos que esse assunto tem recebido pouca atenção por parte dos pesquisadores em Educação Matemática do Brasil, quando comparados a outros temas predominantemente ministrados no ensino fundamental, e dessa forma não encontramos muitas sugestões para o ensino e aprendizagem desse assunto. Encontramos cinco dissertações de mestrado e uma tese de doutorado, sendo que apenas a tese, de Vera Helena Giusti (2008), intitulada “O uso de vários registros na resolução de inequações. Uma abordagem funcional gráfica”, trata do uso de gráficos na resolução de inequações utilizando como ferramenta um *software*. Na construção de nossa problemática, capítulo 2 desse trabalho, detalharemos os trabalhos relevantes a nossa pesquisa.

No ano de 2004, diversos pesquisadores se reuniram em um fórum – PME[1] 28 – para um debate sobre equações e inequações algébricas. A realização desse evento indica uma preocupação dos pesquisadores em Educação Matemática em relação ao tema inequações.

Bazzini e Boero (2001), que apresentaram um trabalho no PME de 2004, consideram o assunto inequações importante, porém difícil para os alunos, e pouco considerado por pesquisadores até aquele ano. Segundo esses autores, em vários países, o tema inequações é tratado de forma subordinada em relação às equações, sendo que vários professores, de alguns desses países, conduzem o processo de ensino e aprendizagem por meio da memorização, o que pode fazer com que o aluno fique despreparado para lidar com inequações de outra maneira. A sugestão desses autores é a abordagem desse tópico por meio do ensino de funções, visando evitar a memorização de regras.

Um outro trabalho apresentado no PME 2004, foi o de Sackur (2004), o qual indica que a maioria dos professores do Ensino Médio veem os gráficos como sendo uma ferramenta que pode ajudar os alunos na resolução de inequações, mas considera que se deve também estudar os possíveis problemas que podem surgir na resolução gráfica de inequações. Embasado na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, a qual constitui também o referencial teórico de nossa pesquisa e que descreveremos no capítulo II, considera que a abordagem gráfica pode ser satisfatória se o aluno for capaz de coordenar pelo menos dois registros de representação semiótica, o algébrico e o gráfico.

---

[1] *Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education*

Nesse fórum, em linhas gerais, concluiu-se que as dificuldades dos alunos têm origens diferentes, e a forma de lidar com cada dificuldade dependerá de como atua o profissional durante o processo de ensino e também do aluno. Considerando-se então que não é possível generalizar as dificuldades dos estudantes no trato com inequações, pois estas dependem do contexto e histórico deles. Durante o fórum foram debatidas diversas soluções para o problema, sendo que todas as abordagens se dirigiam para a diversidade de dificuldades apresentadas pelos alunos no trato com equações e inequações e as razões por que elas ocorrem.

Embora tenhamos encontrados poucos trabalhos, em nível nacional, que tratam do tema inequações, percebemos que existem grupos de pesquisadores na comunidade internacional, dentre eles italianos, franceses e israelitas que consideram o valor do estudo de inequações, pois ele envolve vários outros conceitos importantes para o amadurecimento matemático do individuo, e investigam como melhorar o ensino e aprendizagem desse assunto.

Diante desse cenário elaboramos e aplicamos um instrumento diagnóstico composto de cinco atividades baseadas no estudo de funções que favorecesse o uso do gráfico para a resolução de inequações, posteriormente analisamos os dados obtidos.

Utilizamos como ferramenta de ensino o *software* GeoGebra em uma das aplicações do instrumento diagnóstico, sendo que esse mesmo grupo, que resolveu as atividades tendo a disposição essa ferramenta, foi convidado a resolvê-la novamente mas sem o uso do *software*.

Pretendemos com esse trabalho diagnosticar se o ensino de inequações por meio de uma abordagem funcional gráfica, com o auxilio de um *software* que possibilite a conversão do registro algébrico para o gráfico, favorece um melhor entendimento por parte do aluno em relação às abordagens tradicionais, e para tal organizamos nosso trabalho da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos nosso referencial teórico, A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003) que foi utilizada na elaboração de nosso instrumento diagnóstico e na análise dos protocolos dos nossos sujeitos de pesquisa. A opção de iniciar nosso trabalho pela fundamentação teórica se deve ao fato de que, muitos dos trabalhos que pesquisamos e que serão apresentados em nossa problemática, utilizam-se dela, e por questões pedagógicas preferimos primeiramente descrever, em linhas gerais, a teoria que nos apóia em nossas análises.

O capítulo 2 compreende a problemática e as justificativas de nosso trabalho, em que é apresentado nosso levantamento bibliográfico referente a dissertações, teses, artigos e os documentos oficiais no que se refere ao estudo das inequações.

No capítulo 3 descrevemos nossas escolhas metodológicas e no capítulo 4 nossas análises preliminares que são: a análise do plano de ensino de Matemática da série em que os alunos se encontravam no inicio de nossa pesquisa e uma breve descrição do livro didático utilizados por eles no 9º ano do ensino fundamental e na 1ª série do Ensino Médio. Ainda nesse capitulo apresentamos a análise a *priori* de nosso instrumento diagnóstico, na qual descrevemos nossos objetivos prévios em relação a cada atividade proposta aos alunos.

A análise dos protocolos produzidos pelos alunos nas duas sessões que eles participaram encontram-se no capítulo 5.

O capítulo 6 foi destinado às considerações finais acerca dos resultados obtidos assim como nossa percepção do que significou essa pesquisa em nossa carreira como docente.

CAPÍTULO 1 – Fundamentação Teórica

Acreditamos que o professor de matemática além de conhecer o conteúdo matemático a ser ensinado, também deveria conhecer teorias que o norteie no sentido de como ocorre a aquisição do conhecimento de uma forma geral e mais particularmente no que se refere ao aprendizado de Matemática.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF) (BRASIL,1998), o conhecimento matemático formalizado, precisa necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido na escola, isto é, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passiveis de comunicação direta. Em virtude do caráter abstrato dos objetos matemáticos, toda e qualquer atividade em Matemática se dá com base em representações, uma vez que os objetos matemáticos não são diretamente observáveis na natureza.

Há pesquisas que destacam as dificuldades que os alunos têm de transcrever para a linguagem matemática um problema proposto em língua natural, como a de Traldi (2002), por exemplo, presente em nossa problemática, assim como perceber que um objeto matemático pode ter mais de uma representação seja ela algébrica, gráfica ou de tabela, como a de Pelho (2003), também considerada em nossa revisão bibliográfica.

Em nossa pesquisa procuramos verificar se, por meio de uma abordagem funcional gráfica, o uso de vários registros de representação semiótica podem desencadear um melhor entendimento sobre inequações e para melhor compreender as dificuldades dos alunos com relação a esse tema nos apoiaremos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval (2003).

1.1 A Noção do termo semiótica

Antes de descrever a Teoria dos Registros de Representação Semiótica elaborada por Duval (2003) achamos conveniente esclarecer brevemente o que significa o termo semiótica, uma vez que, pela nossa experiência, quando este termo é proferido em uma reunião pedagógica, nem todos os professores presentes, sabem o seu significado, nem qual a relação com a disciplina que lecionam. Incluímo-nos nesse grupo de professores, pois, embora tenhamos 11 anos de experiência na educação básica, nossos primeiros estudos sobre semiótica ocorreram durante a realização dessa pesquisa, ou seja, no período de 2008 a 2011, em que fazíamos parte do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

O termo semiótica, de origem grega, *semeion-signos*, é utilizado para denominar a ciência dos signos ou ciência de todas as linguagens. Tal ciência se originou ao mesmo tempo em três locais: Estados Unidos da América, Europa Ocidental e União Soviética, iniciando a era da "consciência semiótica", ou seja, consciência da linguagem. (VIEL e DIAS 2007)

No século XIX, no EUA, o filósofo, físico e matemático, Peirce iniciou a doutrina geral dos signos ao formular a teoria peirceana. Peirce se interessava muito pela lógica e a considerava, em seus estudos, um ramo da Semiótica, dessa forma a integrou como sendo uma teoria geral de todos os tipos possíveis de signos, surgindo então, uma teoria lógica, filosófica e científica da linguagem.

De acordo com Santaella (1999), por meio da teoria peirceana, desenvolveram-se muitas outras Semióticas, originando a aplicação de diversos processos e produtos de linguagem como: arte, teatro, teoremas, musica, um objeto, etc.

Na União Soviética, Vigotski, psicólogo, e Essentein, cineasta, resgataram os trabalhos dos filósofos Viesselovski e Potiebniá e do lingüista Marr a respeito do Estruturalismo Lingüístico[2] (séc. XX), os quais mostram o inter-relacionamento da linguagem, dos ritos antigos, da linguagem dos gestos e da língua articulada. (VIEL e DIAS 2007).

No final da primeira década do século XX, Na Europa Ocidental, Saussurre, professor de Linguística Geral na Universidade de Genebra, define, com bases precisas, a língua como sendo uma estrutura direcionada por leis e regras

[2] Corrente de pensamento do inicio do séc. XX, fundamentada na afirmação de Ferdinand Sausurre de que "a língua não é um conglomerado de elementos heterogêneos; é um sistema articulado, onde tudo está ligado e onde cada elemento tira seu valor de sua posição estrutural (COSTA, 2000, p. 2)

especificas e autônomas. Para ele, a língua e a fala, inseparáveis, deveriam ter uma ciência de estudo abrangente e vasta que denominou como Semiologia, o estudo de todos os sistemas de signos na vida social.

Santaella (1999) relata em seu livro o caráter embrionário dessa nova ciência, a Semiótica, que se encontra em fase de desenvolvimento. Pode-se dizer que a Semiótica é uma ciência que investiga as linguagens existentes, examinando os fenômenos em seu significado e sentido, infiltra-se nos estudos e pesquisas sobre as diversas ciências, porém não com o objetivo de se apoderar do saber da investigação específica de outras ciências, mas de desvendar sua existência enquanto linguagem, isto é, sua ação em termos de signo.

1.2 Os Registros de Representação Semiótica

Para elaborar e analisar as atividades constantes de nossa pesquisa norteamo-nos pela teoria desenvolvida por Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica.

Psicólogo de formação Raymond Duval trabalhou no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) em Estrasburgo na França de 1970 a 1995. A partir de seus estudos sobre psicologia cognitiva escreveu a obra “Semiótica e pensamento humano”.

Segundo Duval, um dos problemas para compreensão da Matemática é que, um estudante para reconhecer um objeto matemático precisa recorrer a uma representação dele, uma vez que “toda comunicação em Matemática se estabelece com base em representações” (DUVAL, 2003, p.14). Além disso, segundo esse autor, é preciso levar em conta as diferentes representações de um mesmo objeto.

Os registros de representação semiótica são fundamentais para o entendimento das idéias da Matemática, seria muito difícil ensiná-las a nossos alunos sem seu uso, por exemplo, quando nos referimos a uma inequação, precisamos representá-la de alguma forma para a ela ter acesso e poder fazer manipulações, e a forma que utilizamos é o registro de representação semiótica. Podemos representar, uma inequação no registro algébrico, $2x + 3 > 5$, no registro da língua natural, *quais são os números que multiplicados por dois e adicionados a três resultam em números maiores que 5*, ou ainda por meio de registro gráfico :

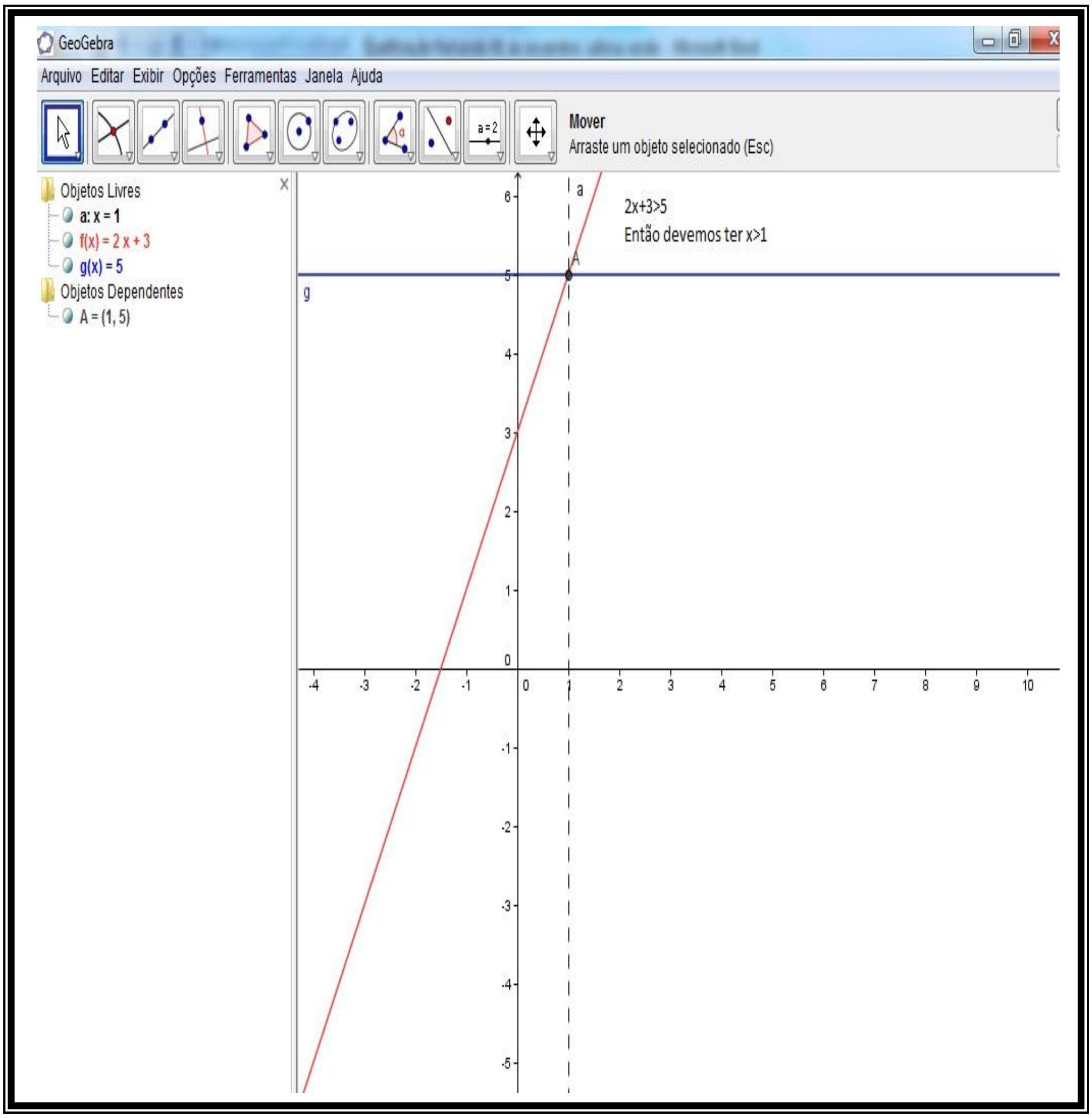


Figura 1 - Janela do GeoGebra – Representação gráfica das funções f e g.
Fonte: Elaborada pelo autor.

A janela acima mostra o gráfico da função f dada por $f(x) = 2x + 3$ e da função constante g definida por $g(x) = 5$. O ponto A representa a interseção dos gráficos de f e de g, e desse modo a abscissa desse ponto representa a solução da equação $f(x) = g(x)$. Parte do gráfico de f acima do gráfico de g temos $f(x) > g(x)$, ou seja, $2x + 3 > 5$. Parte do gráfico de f abaixo do gráfico de g temos $f(x) < g(x)$, ou seja, $2x + 3 < 5$.

No exemplo anterior, representamos uma inequação por meio de três registros diferentes, o algébrico, o da língua materna e o gráfico, que possuem as suas particularidades para serem manipulados e interpretados, mas representam o mesmo objeto matemático.

Em sua teoria, Duval explicita que o objeto matemático torna-se acessível por meio de sua representação (no sistema semiótico), porém há que cuidar-se para não confundir o objeto matemático com sua representação. As manipulações desse objeto são sempre feitas por meio de sua representação semiótica, o que faz com que a representação seja essencial à atividade cognitiva.

A utilização de diferentes registros de representação semiótica é uma maneira didática que o professor pode usar quando o objetivo é a aquisição do conhecimento, mas o essencial é a maneira como esses registros estão sendo utilizados. Segundo Damm (2008), a aquisição do conhecimento ocorre a partir do momento em que o aluno "transita" naturalmente por diferentes registros (p.176).

Segundo Duval (2003) há dois tipos de transformações de representações semióticas, o tratamento e a conversão. O tratamento ocorre quando trabalhamos em um mesmo registro, como por exemplo, resolver uma inequação usando apenas manipulações algébricas. A conversão envolve registros diferentes, como acontece quando resolvemos uma inequação dada no registro algébrico por meio de sua representação gráfica.

Exemplo de tratamento no registro algébrico:

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $3x - 5 > x + 7$. (Enunciado dado no registro algébrico)

Tratamento no registro algébrico: $3x - x - 5 + 5 > x - x + 7 + 5$

$2x > 12$

$x > 6$

$S = \{x \in \mathbb{R} / \ x > 6\}$ (Solução obtida por meio do tratamento no registro algébrico)

Figura 2 - Exemplo de tratamento no registro algébrico
Fonte: Elaborada pelo autor

Poderíamos pensar também na resolução gráfica da inequação resolvida anteriormente, dessa forma estaríamos representando o mesmo objeto por meio de um outro registro de representação semiótica. Considerando cada membro da inequação citada como uma função, construímos, com o auxilio do *software* GeoGebra os gráficos que possibilitam a resolução da inequação no registro gráfico, e esse tipo de transformação, segundo Duval, é definido como conversão.

Exemplo de conversão do registro algébrico para o registro gráfico:

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $3x - 5 > x + 7$. **(Enunciado dado no registro algébrico)**

Conversão: Construindo os gráficos das funções f e g dadas por $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = x + 7$ e analisando os gráficos, percebemos que parte do gráfico de f acima do gráfico de g faz com que *f(x)>g(x),* ou seja, $3x - 5 > x + 7$, portanto *x>6*

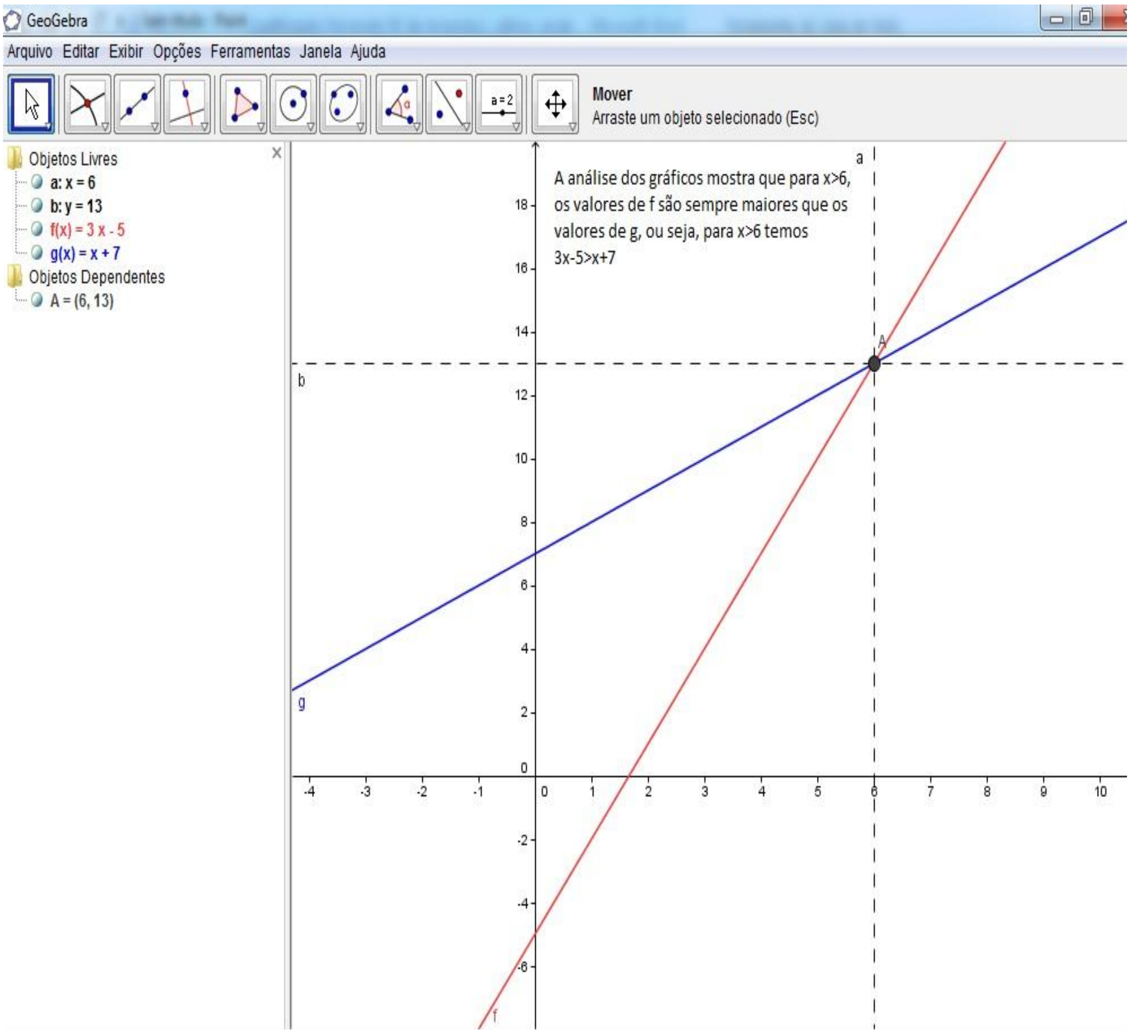


Figura 3 - Exemplo de conversão do registro algébrico para o registro gráfico
Fonte: Elaborada pelo autor

O artigo de Colombo e Moretti (2007) explicita a importância das representações ao longo da história:

> Na matemática a utilização das representações simbólicas, livres do jogo da semelhança, iniciada com Viète no fim do século XVI, Descartes no início e Leibniz no final do século XVII, torna possível o desenvolvimento das idéias matemáticas num nível formal e abstrato. Isso porque a partir da segunda metade do século XVII, os signos passam a se constituir por um ato de conhecimento, não mais condicionados por um conjunto de similitudes. O signo e o objeto não estão mais unidos, colados um ao outro, pois "é no interior do conhecimento que o signo começará a significar" (FOUCAULT, 1992, p. 74), ou seja, o signo passa a ser a representação do objeto. Dessa forma, novas teorias semióticas surgem, novos símbolos são estabelecidos em sistemas de representação semiótica para serem utilizados, estudados e compreendidos. (2007, p.3)

De acordo com Flores (2006 apud COLOMBO e MORETTI, 2007) um sistema de representação semiótica tem como elementos, o sujeito do conhecimento, o objeto do conhecimento e o meio físico que permite a realização da representação, ou seja, "um signo, uma simbologia, uma expressão, uma palavra, um mapa..." (p.3)

Nesta perspectiva, quando tratamos de aprendizagem em Matemática, podemos entender o sujeito do conhecimento como sendo o sujeito da aprendizagem, o aluno, aquele que mobiliza os registros de representação de um sistema semiótico para ter acesso aos objetos matemáticos.

Dessa forma para aprender Matemática é preciso dispor de um sistema de representações semióticas, ou seja, a representação desempenha um papel vital no ensino da Matemática e essa premissa é fundamental na noção teórica desenvolvida por Duval.

Representar, tratar e converter registros de representação semiótica são argumentos fundamentais na teoria elaborada por Duval (2003), o qual acredita ser necessário mobilizar sistemas cognitivos específicos para cada atividade matemática, que é essencialmente ligado às operações semióticas, ou seja, para Duval (2003) só é possível conhecer, compreender, aprender matemática pela utilização das representações semióticas do objeto matemático. Afirma ainda que o sujeito precisa mobilizar tais representações para verdadeiramente conhecer, ou seja, operar com elas, converter uma representação do objeto matemático dado num sistema semiótico, em outra representação de um outro sistema semiótico, o qual facilite a resolução de um dado problema.

Contudo, as pesquisas mostram que o ensino privilegia em grande parte apenas a aprendizagem das regras concernentes ao tratamento, o lugar reservado à conversão das representações de um registro em outro é muito pequeno e muitas vezes nem é contemplado.

Duval (2003) afirma que a conversão das representações é a atividade fundamental para aprendizagem, tão importante quanto às atividades de tratamento, pois ao utilizar a conversão pode-se favorecer a coordenação dos registros de representação, ou seja, quando um aluno consegue perceber que um objeto matemático pode ser representado por mais de um registro, pode-se dizer que ele realmente está adquirindo conhecimento sobre o que está estudando, de modo que, ao resolver um problema, tem a possibilidade de coordenar vários registros de representação em busca daquele que melhor favorece sua resolução.

Pretendemos em nossas atividades possibilitar a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação semiótica, pois segundo Duval (2003), essa coordenação é fundamental para a aprendizagem.

CAPÍTULO 2 – Delimitação do problema

2.1 Problema de Pesquisa

Dentre todos os conteúdos ministrados no ensino médio, que é nossa principal área de atuação, o que nos chama mais a atenção com relação às dificuldades dos alunos, é a resolução de inequações, principalmente quando a função estudada não é um polinômio do 1º grau na forma $ax + b$ com $a > 0$, pois, por mais que insistíssemos em fazer com que os alunos aprendessem os conceitos matemáticos envolvidos neste problema, esses se mostravam dispostos a usar regras válidas para equações, mas que não são necessariamente válidos para inequações, como também apontam as pesquisas de Fontalva (2006) e Giusti (2008).

Entendemos que existe uma relação entre função e equação e entre função e inequação e, ao pesquisar sobre essa relação, encontramos na tese de Alessandro Jacques Ribeiro (2007) intitulada “Equação e seus multisignificados no ensino da Matemática: contribuições de um estudo epistemológico”, uma definição para equação que foi extraída de um dicionário *Dictionaire dês mathématiques Moderns* que a relaciona com as funções:

> Sejam *f* e *g* duas aplicações de um conjunto E em um conjunto F. A relação *f(x)=g(x)* é chamada de equação e o elemento *x* de E de incógnita. Todo elemento *x* de E para o qual a relação *f(x)=g(x)* é válida chama-se solução da equação. A pesquisa do conjunto solução chama-se solução da equação. (2007, p. 94)

Não encontramos definição semelhante para as inequações, porém entendemos que essa noção se aproxima da definição de equação dada acima, no que se refere à sua relação com as funções.

Ribeiro, A.J. (2007) em sua tese investigou os significados da noção de equação no ensino da Matemática e encontrou diferentes significados. Pela nossa experiência é provável que existam também diferentes significados para a noção de inequação. Dentre os significados que o pesquisador atribuiu às equações, destacamos:

> Axiomático-postulacional: concebe a equação como uma noção Matemática que não precisa ser definida, uma idéia a partir da qual outras idéias matemáticas e não matemáticas são construídas. Por essa concepção, a noção de equação é utilizada no mesmo sentido de Noção Primitiva, como reta, plano, ponto na Geometria Euclidiana (2007, p. 126-127).

Não pretendemos em nosso trabalho atribuir um significado as inequações como Ribeiro, A.J. (2007) fez com as equações, pois nossa pesquisa não tem esse objetivo e mesmo porque precisaríamos investigar sobre os muitos significados que essa noção pode ter. Acreditamos que existe uma relação entre função e inequação, e por esse motivo sugerimos uma abordagem funcional.

Ao cursarmos a disciplina Tópicos de Cálculo, ministrada no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC-SP, em que a abordagem privilegiava o uso dos gráficos de funções para resolução dos problemas, dentre eles a resolução de equações e inequações, pensamos que talvez o ensino deste tópico pudesse apresentar melhores resultados caso esse fosse apresentado por meio de uma abordagem funcional gráfica, aliada à resolução algébrica, visando um melhor entendimento por parte do aluno do assunto em questão.

Percebemos no livro didático que utilizamos, em nossas aulas e nessa pesquisa, que o tópico inequações é estudado justamente nos capítulos reservados ao estudo das funções, porém é predominante a resolução algébrica em sua abordagem, utilizando poucas vezes o registro gráfico, mesmo sendo esse um registro importante no estudo funções.

Como mencionamos na introdução desse trabalho, embora tenhamos encontrados poucos trabalhos, em nível nacional, que tratam do tema inequações, percebemos que existem grupos de pesquisadores na comunidade internacional, que consideram o valor do estudo de inequações, pois ele envolve vários outros conceitos importantes para o amadurecimento matemático do individuo, dentre esses pesquisadores destacamos Boero e Bazzini (2001) e Gallo e Battú (2000).

Divulgado no SFIDA[3] (2000), o trabalho de Gallo e Battú (2000) procura esclarecer as analogias e as diferenças de manipulações algébricas cujo significado está ligado ao sinal de igual (=) e as analogias e diferenças das

---

[3] *Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre*

manipulações ligadas ao uso dos símbolos “maior que” (>), “menor que” (<), “maior ou igual que” (≥) e “menor ou igual que” (≤). Essas autoras elaboraram e aplicaram a alunos de uma série que corresponde à 1ª série do Ensino Médio em nosso país, um conjunto de tarefas de resolução de inequações visando observar os procedimentos de resolução por eles utlizados.

Gallo e Battú (2000) perceberam ao analisar os protocolos de alunos, dois tipos de resolução que classificaram como: (a) modelo das inequações do 1º grau, que consiste em obter uma inequação equivalente a que ser quer resolver, obtendo por meio desta a solução imediata; (b) modelo do estudo do sinal, utilizado quando a inequação é apresentada na forma fatorada, usando-se duas regras que as autoras classificaram como “regra de anulação do produto” e a “regra de sinais”.

De acordo com essas autoras é o modo como é apresentada a inequação, fatorada ou não, segundo membro nulo ou não é que evoca modelos de resolução diferentes, indicando que os alunos usam procedimentos de forma mecânica sem refletir o que estão fazendo.

Os resultados da pesquisa de Gallo e Battú (2000) refletem claramente o que acontece em nossas aulas na resolução de inequações, ou seja, alunos utilizando-se de procedimentos mecânicos sem nenhuma reflexão sobre o que estão fazendo, que a nosso ver é resultado de uma abordagem tradicional no ensino desse tópico, que supervaloriza os procedimentos algébricos.

Bazzini e Boero (2001) sugerem a abordagem desse tema por meio do ensino de funções, visando evitar a memorização de regras, abordagem na qual concordamos e dessa forma procuramos trabalhos referentes ao ensino de funções que pudessem nortear-nos em nossa pesquisa.

A dissertação de mestrado de Ardenghi (2008) apresenta um levantamento bibliográfico das produções cientificas realizadas, no período de 1970 a 2005, referente ao tema ensino e aprendizagem do conceito de função, concluindo que 52,2% dessas pesquisas concentram-se no período de 2002 à 2005, o que mostra um crescente interesse por parte dos pesquisadores sobre esse tema.

Concluiu por meio de sua análise bibliográfica, que os professores e os livros didáticos apresentam as funções em uma linguagem muito técnica e distante da realidade do aluno. Para minimizar esse efeito sugere que sejam formuladas atividades que tragam situações mais contextualizadas, aproximando assim o aluno do conceito de função e apresentando-o como uma ferramenta para a resolução de diversos problemas.

Percebemos na pesquisa de Ardenghi (2008) que existem muitos trabalhos referentes a funções afins e quadráticas, poucos sobre exponencial e logarítmicas, mas nenhum deles discutiu a possibilidade de resolução de inequações por meio da abordagem funcional, utilizando os gráficos como ferramenta de auxilio a resolução.

A partir de sua experiência em sala de aula e a reflexão sobre trabalhos que abordam o tema função, Pelho (2003) desenvolveu e aplicou uma sequência de ensino à alunos da 2ª série do ensino médio, com o objetivo de introduzir o conceito de função por meio da compreensão das variáveis dependentes e indepententes.

Utilizou como ferramenta na aplicação da sequência o *software Cabri-Geometre* II, além do uso de apenas papel e lápis.

Segundo a pesquisadora, a compreensão do conceito de função fica prejudicada quando é abordada de uma maneira tradicional, ou seja, sem a preocupação de evidenciar as variáveis.

Pelho (2003) pretendeu com sua pesquisa responder a seguinte questão:

> Os alunos do ensino médio conseguem compreender o conceito de função, rompendo com suas interpretações mecânicas, com uma seqüência didática, que envolva atividades nas quais são abordados aspectos funcionais entre as variáveis e que utilize um ambiente computacional como uma das ferramentas de ensino? (2003, p.10)

Para análise dos dados obtidos em sua sequência didática, fundamentou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1999, apud Pelho 2003), e constatou que a utilização do *software Cabri-Geometre* II foi uma ferramenta eficaz para iniciar o estudo de funções, pois possibilitou a compreensão do relacionamento entre as variáveis, além de viabilizar a conversão entre registros de representação semiótica. Em seus resultados apontou um ganho na compreensão do conceito de função e dessa forma respondeu sua questão de pesquisa.

O trabalho de Pelho (2003), de certa forma, reforçou nossas convicções sobre o uso de uma abordagem funcional gráfica para a resolução de inequações auxiliada pelo uso de um *software* que possibilite a conversão entre os registros de representação semiótica, pois em seu trabalho percebemos avanços no entendimento dos estudantes a respeito do tema, assim como os beneficios que o *software* pode promover.

O trabalho de Bianchini e Puga (2006) procura identificar alguns elementos que pudessem evidenciar ou fornecer subsídios sobre as concepções dos alunos, referente à noção de função ao ingressarem no primeiro ano do Ensino Superior. Essas autoras realizaram uma pesquisa diagnóstica com 79 alunos matriculados na disciplina de CDI (Cálculo Diferencial e Integral) do curso de Ciência da Computação, utilizando como referencial teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica concebida por Duval (2003 apud Bianchini e Puga, 2006).

À luz desse referencial teórico, elaboraram um instrumento constituído de questões abertas sobre o conceito de função e algumas representações gráficas que as pesquisadoras acreditavam ser familiares aos alunos durante a escolarização básica e outras não tão familiares, uma vez que certos assuntos, como as cônicas, somente são trabalhadas no terceiro ano do ensino médio. Os resultados obtidos evidenciaram que os alunos que mobilizaram a coordenação de dois ou mais registros de representação semiótica obtiveram um melhor desempenho do que aqueles que utilizaram apenas um. A comparação entre os resultados da pesquisa com o referencial teórico utilizado apontaram o que Duval (2003 apud Bianchini e Puga, 2006) afirma sobre a necessidade da coordenação de pelo menos dois registros de representação para que haja a compreensão de um conceito.

Bianchini e Puga (2006) ainda destacaram a necessidade da exploração, desde o ensino médio de outras funções, além das afins e quadráticas, pois os alunos não obtiveram resultados satisfatórios, mesmo em relação às funções estudadas anteriormente.

Em busca de trabalhos nacionais que focassem diretamente no tema inequações, encontramos no banco de teses e dissertações da CAPES e em Universidades que disponibilizam suas pesquisas na Internet, seis trabalhos, todos desenvolvidos pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, sendo cinco dissertações de mestrado entituladas: “Sistemas de Inequações do 1º grau”, de autoria de Traldi (2002), “Um estudo sobre inequações: entre alunos do ensino médio”, de Fontalva (2006), “Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logaritmicas no ensino médio” da pesquisadora Saldanha (2007), “O ensino de desigualdades e inequações em um curso de licenciatura em Matemática” de Melo (2007), “Resolução de inequações logarítmicas: um olhar sobre a produção dos alunos” de Clara (2007) e uma tese de doutorado de Giusti (2008) que pesquisou sobre o “Uso de vários registros na resolução de inequações. Uma abordagem funcional gráfica”.

A pesquisa de Traldi (2002) tem como referencial teórico “Os Registros de Representação Semiótica” de Raymond Duval (1993 apud Traldi, 2002) e foi realizada com alunos do 3º ano do ensino médio do período noturno de uma instituição publica estadual do estado de São Paulo.

Por meio de teste diagnóstico o pesquisador procurou verificar se os alunos desta série estavam preparados para resolver problemas de programação linear, pois segundo esse autor:

> É comum, nos dias de hoje, encontramos problemas que tenha que minimizar custos e maximizar lucros nas diversas atividades profissionais e no nosso cotidiano. Muitos desses problemas podem ser classificados como problemas de programação linear e são estudados nas disciplinas de Pesquisa Operacional nos cursos de Computação, Economia e Administração. (TRALDI, 2002, p. 5)

Traldi (2002) esclarece que muitos desses problemas podem ser resolvidos utilizando-se de conceitos provenientes de conteúdos ministrados no Ensino Fundamental e Médio e por esse motivo é relevante verificar se os alunos que terminam o ensino médio tem condições de resolver alguns desses problemas de otimização.

Seu teste diagnóstico apontou a dificuldade que os alunos tinham na resolução de problemas lineares (ou de otimização) e a partir desse resultado procurou na teoria de Duval elementos que pudessem ajudar na elaboração de uma seqüência didática para ser aplicada em outra turma do 3º ano do ensino médio pretendendo verificar se:

> [...] atividades que consideram o tratamento, a conversão e a coordenação entre registros proporcionam condições favoráveis para apreensão do objeto sistema de inequações do 1º grau e se os alunos utilizam esses conhecimentos para resolver problemas de otimização (TRALDI, 2002, p.2)

Após desenvolver sua sequência didática juntos aos alunos dessa nova turma, elaborou um pós-teste com a intenção de comparar os resultados do teste diagnóstico com a sequência elaborada segundo a teoria de Duval. Essa análise evidenciou que os alunos que participaram da sequência evoluíram em relação àqueles que fizeram o teste diagnóstico, pois esses não obtiveram sucesso na resolução de problemas de programação linear resolvendo corretamente apenas algumas inequações do 1º grau enquanto que os alunos da segunda turma, em sua maioria, obtiveram sucesso na resolução dos problemas propostos.

Sobre essa evolução, em suas considerações finais, afirma:

> Considerando essas evoluções, pudemos assim confirmar a nossa hipótese de que ao considerar, no processo de ensino-aprendizagem do objeto sistemas de inequações do 1º grau, atividades que permitam o tratamento, a conversão e a coordenação entre registros de representação, o aluno terá condições mais favoráveis para apreensão desse objeto (TRALDI, 2002, p.102)

Fontalva (2006) realizou uma pesquisa também com alunos do 3º ano do ensino médio, mas de uma escola Técnica Estadual localizada em São Bernardo do Campo-SP, sendo que o ingresso dos alunos nessa instituição é feito por meio de exame de seleção nos moldes do vestibular e, sendo assim, possui um público diferenciado em relação às escolas publicas que não fazem teste de ingresso.

O pesquisador elaborou um instrumento diagnóstico inspirado em suas análises preliminares que foram: entrevista com o professor das séries anteriores; consulta ao livro didático utilizado pelos alunos e ao plano de ensino da Instituição. O instrumento contém inequações polinomiais do 1º, 2º e 3º graus na forma fatorada e algumas inequações racionais e tem como propósito responder às seguintes questões:

> a)De quais recursos esses alunos lançam mão na resolução de inequações? b) Que justificativas fornecem para as diversas etapas da resolução de inequações? c) Nessas justificativas, explicitam ferramentas tais como conceitos e propriedades ou explicitam apenas termos relativos a técnicas da resolução de inequações? d) Quais são os tipos de erros mais freqüentes? (FONTALVA, 2006, p. 31)

Seu instrumento de diagnóstico foi aplicado em dois encontros, em duas semanas seguidas, em que o professor/pesquisador não deu aula nem tirou dúvidas sobre o assunto. Informou apenas aos alunos a importância da realização para o desenvolvimento do ensino dessa matéria.

Focalizando as atenções nas justificativas apresentadas pelos alunos, e analisando os resultados segundo o referencial teórico “a interação entre domínios” de Douady (1986 apud Fontalva, 2006) concluiu que as resoluções dos alunos se baseiam em técnicas, ao invés do uso de propriedades matemáticas, embora o uso de propriedades e conceitos apareça em um pequeno número de resoluções. O pesquisador acredita que esse quadro de privilégio à técnica seja decorrente do processo de ensino e aprendizagem das inequações, o qual prioriza técnicas em vez de conceitos e propriedades.

O pesquisador sugere, face aos resultados apresentados, que os assuntos inequação e equação sejam trabalhados simultaneamente, pois a grande parte dos erros dos alunos são cometidos por utilizarem procedimentos válidos para equações que não são necessariamente válidos em inequações. Esse tipo de abordagem poderia evitar analogias inapropriadas na resolução de inequações.

Melo (2007), diferentemente de Traldi (2002) e Fontalva (2006) que focaram suas atenções nos alunos, concentrou suas atenções no professor da Licenciatura em Matemática, tendo como foco principal investigar:

> Como os professores de uma Instituição de Ensino Superior desenvolvem as desigualdades e a inequações com suas classes e quais as fontes orientadoras de seu trabalho a respeito desses assuntos?(MELO 2007, p. 4)

Para desvelar como os professores da licenciatura veem e tratam as dificuldades e saberes de seus alunos com relação a desigualdades e inequações, elaborou uma entrevista tendo como suporte teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003 apud Melo, 2007).

> Neste quadro teórico, a questão de pesquisa se especifica assim: Os professores da instituição investigada promovem a coordenação de registros de representação semiótica, quando desenvolvem desigualdades e inequações com suas classes? E os livros didáticos ou apostilas mais utilizados por eles? (MELO, 2007, p.15)

Melo (2007) realizou um estudo de caso tendo como sujeitos de pesquisa quatro professores de uma Instituição de ensino superior do Estado de São Paulo, que até o ano de 2007 tinha 35 anos de atuação com o curso de Licenciatura Plena em Matemática, sendo o curso, dessa modalidade, mais antigo na cidade em que se encontra. Foram aplicadas entrevistas aos professores, analisada a bibliografia constante nas ementas das disciplinas que lecionam e os cadernos de cinco alunos do curso desses professores.

Concluiu que os professores entrevistados utilizam diversos registros de representação semiótica em suas aulas, porém existe a ausência da conversão entre esses registros, aspecto fundamental para apreensão de um objeto matemático segundo Duval (2003 apud Melo, 2007). Por meio da análise do material didático percebe que a utilização do registro numérico representa apenas 4% das atividades propostas, o que caracteriza a pouca utilização desse tipo de registro.

A figura a seguir é um quadro que foi extraído da dissertação de Melo (2007) e nos interessa devido à coincidência da resposta de três dos quatro professores no que se refere à multiplicação de uma inequação por um número negativo, além de conter a menção de erros presentes também em nossa sala de aula.

Professor	O que diz o professor
P1	Eles (os alunos) esquecem que o negativo (multiplicar por um número negativo) inverte a desigualdade... ...outros chegam ao ponto de subtrair, por exemplo, $2x > 6$ então $x > 6 - 2$ [...]
P2	[...] ele (aluno) não sabem que tem que trocar de sinal [...] [...] há uma grande dificuldade na simples leitura do maior e menor [...]
P3	[...] a questão do sinal, que, multiplicando por um numero negativo uma inequação, vai alterar a desigualdade e eles não conseguem enxergar isso... [...] não reconhecimento de uma equação que é mais simples, e ai passando por inequação fica pior ainda [...]
P4	Muitas vezes, quando eles (alunos) multiplicam uma inequação por uma número negativo, eles esquecem de inverter o sinal [...]

Figura 4: Dificuldade dos alunos: o que diz o professor. (MELO, 2007, p.45)

Chama-nos a atenção a linguagem empregada pelos professores entrevistados por Melo (2007), o que a nosso ver, tratam a resolução de uma inequação como um conjunto de regras. Expressões do tipo “trocar o sinal”, “inverte a desigualdade”, focam apenas nos tratamentos realizados ao resolvê-la e transformam essa resolução em um conjunto de regras, quando na verdade deveriam ser valorizados os conceitos matemáticos envolvidos nesses problemas.

Giusti (2008) a partir de sua experiência em lecionar para os primeiros anos de Engenharia Elétrica, Matemática, Ciência da Computação e Física, em geral a disciplina Cálculo 1, levantou a hipótese de que os alunos cometeriam erros na resolução algébrica de inequações por não saberem ler o que está sendo pedido e por decorarem regras que são válidas apenas para equações.

Diante da preocupação com o tema, a pesquisadora decidiu desenvolver uma abordagem para o ensino de inequações que não fosse estritamente algébrica, acreditando que essa apresentaria melhores resultados. Essa proposta denominada de funcional gráfica, fundamentada na teoria de Duval, estaria focada na coordenação de gráficos, expressões algébricas e a língua materna.

Giusti (2008) procura essencialmente responder a três questões:

> Q1. Uma seqüência didática envolvendo o tratamento e a conversão de registros pode fornecer aos alunos condições de inter-relacionarem os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos envolvidos na resolução de inequações com uma incógnita real? (GIUSTI, 2008, p.6)
>
> Q2. O tratamento e a conversão de registros (gráfico, algébrico e o da língua natural) pode propiciar aos alunos uma apreensão significativa de que é preciso sempre trabalhar com inequações equivalentes? (GIUSTI, 2008, p.6)
>
> Q3. Uma abordagem envolvendo o tratamento e a conversão de registros, no caso da resolução de equações e/ou inequações com uma incógnita real, pode desencadear a discussão global sobre esta resolução? (GIUSTI, 2008, p.7)

Para responder suas questões de pesquisa elaborou uma seqüência didática que pudesse ser aplicada a uma população de futuros professores (formação inicial) e a um grupo de professores da rede publica estadual (formação continuada) por acreditar que são eles que promoverão mudanças na sala de aula.

Em sua pesquisa, a autora escolheu a combinação dos referenciais teóricos: dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995, 2000, apud Giusti, 2008), da Visualização elaborada também por Duval (1999, apud Giusti, 2008) e dos aspectos formais, algoritmos e intuitivos que estão presentes numa atividade matemática conforme Fischbein (1993, 2008, apud Giusti, 2008).

Como Metodologia de Pesquisa, Giusti (2008) optou por alguns passos da Engenharia Didática, inspirados por algumas colocações de Artigue (1995, apud Giusti, 2008). O caminho dessa engenharia, conforme Artigue (1995 apud Giusti, 2008) foi delineado com duas vias, a de produção de estratégias e abordagens para o ensino e a de uma metodologia de investigação. Giusti se identificou pela segunda, por te-la interpretado como uma metodologia de pesquisa que não tem um fim em si mesma. Isto é, que não se restringe à elaboração de um relatório para divulgar os resultados observados, seja de forma quantitativa, seja de forma qualitativa.

Com o desenvolvimento dos passos de sua engenharia didática, Giusti (2008) acredita ter feito uma intervenção nos grupos pesquisados, os quais, a longo prazo, poderão realizar algo semelhante junto a outros grupos, usufruindo assim dos resultados provenientes da sequência elaborada, testada e avaliada.

A pesquisadora adotou como hipótese de partida os argumentos de Fischbein (1993, apud Giusti 2008) de que, para que haja aprendizagem, é preciso haver inter-relação entre os aspectos, formais, algoritmos e intuitivos existentes em um certo conteúdo matemático. Para promover essa inter-relação, optou pela utilização de três sistemas de representação: o algébrico, o gráfico e o da língua natural, com os respectivos tratamentos e conversões, pois imaginava que, ao ler e interpretar uma expressão algébrica (aspectos formais da conversão entre os registros algébricos e o da língua natural), um sujeito seria capaz de ler e interpretar um gráfico (aspecto formal), desde que soubesse a definição de gráfico, associada a visualização global (aspectos formais, intuitivos e algoritmos).

Supôs então que os sujeitos da pesquisa sabiam ler e interpretar frases algébricas. No entanto, apareceram algumas dificuldades, como, por exemplo a de aceitar $x \leq \pm 3$ como uma resposta coerente e possível. Na avaliação de Giusti (2008), nenhum dos sujeitos sabe realmente compor os sinais do sistema algébrico e agem sem dominar os aspectos lógicos formais. O tratamento dos registros algébricos “eram falhos” e dessa forma todo processo acabou comprometido.

Giusti (2008) sugere que se pesquise porque a abordagem proposta em seu trabalho não funcionou com esses dois grupos. Levanta a hipótese de que, com um tempo maior e com mais discussões preliminares é possível atingir o objetivo proposto inicialmente (inter-relacionar os aspectos formais, algoritmos e intuitivos da resolução algébrica).

Sobre o método de pesquisa, Giusti (2008) se inspirou na Engenharia Didática, principalmente porque acreditava que os resultados pudessem ser transpostos na educação básica. No entanto, ao aplicar sua seqüência aos dois grupos pesquisados, um de professores e outro de alunos do 1º ano de licenciatura em Matemática, percebeu que o assunto não era conhecido desses sujeitos e, portanto, as atividades tinham que ter um cunho diferente, não diretamente aplicável em sala de aula de Educação Básica, porque seria trabalhado com indivíduos mais maduros e mais experientes.

Giusti (2008) elaborou as atividades de uma vez só e as aplicou, alternando-as com uma institucionalização. Embora não tenha re-elaborado e re-discutido cada atividades com os sujeitos, como talvez seria o ideal numa engenharia, percebeu pelos protocolos que, ao longo da discussão, 7 dos 16 alunos e 4 dos 7 professores conseguiram aceitar a abordagem funcional gráfica (e portanto as funções) como uma ferramenta possível para a resolução de inequações com uma incógnita real. Concluiu também, pela evolução dos protocolos, que estes 7 alunos e 2 destes professores foram beneficiados pelas institucionalizações intermediárias, o que a levou a crer que é uma boa prática e que merece ser testada novamente.

A partir das leituras feitas e em nossa experiência em sala de aula, esperamos, por meio de nossa pesquisa, responder à seguinte questão:

Em que medida o ensino de inequações via uma abordagem funcional gráfica que envolva o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica, pode, ou não, favorecer o entendimento por parte dos alunos do assunto em questão? Quais as dificuldades encontradas? Quais os avanços percebidos com relação à coordenação desses registros?

2.2 Os documentos oficiais e o ensino de inequações

2.2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Segundo os PCNEM[4] (BRASIL, 1999) a Matemática no Ensino Médio não deve ter apenas o caráter formativo, mas que os estudantes sejam capazes de compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicar esses conhecimentos em diversas situações, além de desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, assim como o espírito critico e criativo.

Esse documento propõe como critério da seleção de conteúdos a contextualização e afirma que cabe ao ensino de Matemática fazer com que o aluno lide com os conhecimentos matemáticos de uma forma autônoma.

No que diz respeito ao ensino de funções, cita que o aluno deve compreender o conceito de função em diversas situações e descrever por meio da leitura de gráficos o comportamento de certos fenômenos, além de fazer conexões com outras áreas do conhecimento.

Os PCN+Ensino Médio[5] (BRASIL, 2002) focalizam o ensino da Matemática de uma forma contextualizada e integrada a outros conhecimentos. Traz em si o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, generalizar entre outras ações necessárias para a formação do estudante.

Segundo os PCN+Ensino Médio (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os estudantes desenvolvam habilidades relacionadas à representação, comunicação, representação e investigação. Afirmam que a estratégia de resolução de problemas é o principal meio para o desenvolvimento dessas habilidades.

Esses documentos ressaltam que, para o desenvolvimento das competências, não se deve propor apenas exercícios de aplicação e técnicas matemáticas, pois isso faz com que os estudantes busquem em sua memória apenas exercícios semelhantes aqueles feitos anteriormente, o que não garante

---

[4] Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999).

[5] PCN + Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (BRASIL, 2002)

que seja capaz de utilizar seus conhecimentos matemáticos em situações nunca vistas antes ou mais complexas.

Nos PCN+Ensino Médio os temas foram organizados em três eixos norteadores com a intenção de possibilitar a articulação dos conteúdos e o desenvolvimento das competências nas três séries do Ensino Médio:

- Álgebra: números e funções;
- Geometria e Medidas;
- Análise de Dados.

No primeiro eixo estruturador encontram-se o ensino de funções e dessa forma, como utilizamos uma abordagem funcional gráfica em nossa pesquisa, o ensino de equações e inequações estão inseridos nesse eixo na unidade temática “variação de grandezas”. Não é mencionada nesse eixo de forma explícita a resolução de inequações, porém propõe a ênfase no estudo de diferentes funções focalizando em seus conceitos, propriedades e na interpretação de seus gráficos que são habilidades importantes para a resolução de equações e inequações.

No eixo estruturador Geometria e Medidas encontramos um trecho que explicita a importância das ferramentas equação e inequação:

> A unidade **Geometria analítica** tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de **equações**,sistemas ou **inequações**. (BRASIL, 2002, p. 124) [grifo nosso]

Esse documento considera que o estudo de funções possibilita ao aluno adquirir uma linguagem algébrica necessária para a relação entre duas grandezas variáveis, porém seu ensino deve ser permeado de situações do cotidiano e formas gráficas que outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.

2.2.2 Orientações Curriculares do Ensino Médio

As OCEM[6] (BRASIL, 2006) tratam de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular. Partem do principio que toda situação de aprendizagem deve priorizar o “pensar matematicamente”. Nessa perspectiva orientam a necessidade de priorizar atividades que desenvolvam nos alunos a habilidade do “fazer matemático” por meio de um processo investigativo, dando prioridade à qualidade e não à quantidade de conteúdos de forma que contribuam na apropriação do conhecimento.

Para o ensino de funções as OCEM (2006) apontam para a necessidade da exploração das diferentes formas de representação de uma função, tais como a algébricas e gráficas. Orientam que se explore qualitativamente, ao representar uma função graficamente, o crescimento e decrescimento da função.

O documento sugere aos professores que solicitem aos alunos a expressão com palavras de uma função dada na forma algébrica. E quando a função está na forma gráfica, salientam a necessidade de exploração de seus parâmetros no intuito de identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando esses números são alterados.

As OCEM (2006) ressaltam a necessidade de que sejam trabalhadas diferentes modelos de função tais como: linear, quadrático e exponencial por meio de situações de aprendizagem que abordem diversas áreas do conhecimento. Os gráficos devem ser entendidos de maneira global em relação ao crescimento/decrescimento da função e não somente por meio da transcrição de dados tomados de uma tabela numérica, visando um melhor entendimento do comportamento das funções.

No tocante as propriedades das operações com números reais, o documento recomenda que estas sejam trabalhadas de forma que permita ao aluno compreender as estruturas dos algoritmos, com a intenção de prevenir possíveis erros em problemas que envolvam manipulações algébricas e exemplifica:

---

[6] Orientações Curriculares do Ensino Médio.

> Por exemplo, os alunos devem entender o que acontece com uma **desigualdade** quando ambos os lados são multiplicados por um mesmo número negativo, ou por que o quadrado de um número nem sempre é maior que o próprio número, ou como resolver **inequações** que envolvam quocientes. (BRASIL, 2006, p. 71) [grifo nosso]

Com relação à tecnologia as OCEM (2006) incentivam o uso de *softwares* no ensino da Matemática, indicando que existem programas que apresentam recursos que provocam o processo de “pensar matematicamente”, pois nesses programas os estudantes fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas e criam estratégias para resolver os problemas. O documento classifica os *softwares* com essas características de programas de expressão.

No que diz respeito à resolução de equações e inequações utilizando a tecnologia afirmam:

> Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies), tem-se uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação – inequação. (BRASIL, 2006, p. 89)

As leituras desses documentos, PCNEM, PCN+Ensino Médio e OCEM reforçaram nossas convicções a respeito da abordagem que adotamos em nosso trabalho, assim como o uso da tecnologia como meio para ensinar Matemática. No capítulo a seguir descreveremos os procedimentos metodológicos que adotamos na condução dessa pesquisa.

Capítulo 3 - Escolhas Metodológicas

3.1 Metodologia de Pesquisa

Percebemos no desenvolvimento desse trabalho, em nossas leituras de artigos, teses e dissertações, o crescente interesse dos pesquisadores em educação por pesquisas de caráter qualitativo.

Segundo Bogdan e Biklen (1999, p. 47), existem cinco características relativas a esse tipo de pesquisa:

- O ambiente natural é a fonte direta dos dados e o investigador é o instrumento principal;
- Trata-se de uma investigação descritiva;
- O significado tem importância vital;
- Os investigadores tendem a analisar seus dados de forma indutiva;
- Interessa-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados obtidos.

Acreditamos que, para atingir nossos objetivos a pesquisa qualitativa é a mais indicada, pois não nos interessa apenas apontar a quantidade de acertos ou erros dos alunos ao resolver um problema, e sim quais foram as condições propiciadas aos sujeitos de pesquisa que permitiram a eles desenvolver um raciocínio para chegar a solução e se a abordagem por nós utilizada, no ensino de inequações propicia, ou não, um entendimento sobre o assunto, quais foram as dificuldades encontradas e quais foram os avanços percebidos.

No desenvolvimento de nossa pesquisa qualitativa, utilizaremos como metodologia alguns pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1998 apud Machado, 2008) que a caracteriza como:

> [...] um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino (ARTIGUE 1988 apud MACHADO, 2008, p.235)

Este processo experimental da Engenharia Didática compõe-se de quatro principais fases: análises preliminares; concepção e análise a *priori* das situações didáticas; experimentação; análise a *posteriori* e validação.

Na fase das análises preliminares são feitos estudos sobre o quadro teórico e sobre os estudos já realizados sobre o tema em questão. Podem também ser feitas análises sobre a epistemologia dos conteúdos pesquisados; sobre o ensino atual e seus efeitos; sobre a concepção dos alunos, suas dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução.

Dependendo do objetivo da pesquisa, as análises preliminares feitas inicialmente são retomadas durante todo transcorrer do trabalho, com o objetivo de aprofundar os conhecimentos do objeto estudado.

A análise *a priori* contém uma parte descritiva na qual o pesquisador, orientado por suas análises preliminares, descreve cada escolha presente na situação de aprendizagem proposta na pesquisa e o desafio que essa atividade irá proporcionar aos sujeitos envolvidos na fase de experimentação. A outra parte refere-se a previsão das possíveis soluções realizadas pelos sujeitos com relação ao conhecimento visado para a aprendizagem.

A fase de experimentação ocorre quando acontece o contato professor com os alunos envolvidos na pesquisa e prevê a explicação dos objetivos e das condições em que a pesquisa será realizada, o estabelecimento do contrato didático[7], a aplicação das atividades e anotações e/ou gravações dos acontecimentos ocorridos durante a experimentação.

A análise a *posteriori* e validação, última fase desta metodologia, apóia-se na coleta de dados obtidas durante a fase de experimentação, que como citado anteriormente ocorre no momento do contato do pesquisador com os sujeitos de pesquisa, baseando-se tanto nas observações feitas durante todo o processo quanto na produção dos alunos. É da confrontação da análise a *priori* com a *posteriori* que se validam ou não as hipóteses levantadas, e esta última etapa é denominada validação.

Em nossa pesquisa, como descrito na introdução desse trabalho, procuramos saber o que já tinha sido investigado sobre o ensino de inequações e as diferentes abordagens utilizadas além de analisar livros didáticos e

[7] Segundo Bousseau (1986 apud Ribeiro, A.J, 2007), contrato didático é o conjunto de comportamentos do professor esperados pelos alunos e dos alunos esperados pelo professor em relação ao saber.

documentos oficiais. Descrevemos os trabalhos que mais se aproximavam do nosso e que poderiam nos auxiliar em toda pesquisa, desde a elaboração do instrumento diagnóstico até as considerações finais, além disso, buscamos subsídios nos documentos oficiais referente ao tema que pesquisamos. Analisamos os livros didáticos utilizados pelos alunos nos anos de 2008 e 2009, quando cursavam o 9º ano do ensino fundamental e a 1ª série do ensino médio, respectivamente e também o plano de curso do professor referente aos anos citados anteriormente, os quais serão descritos no capítulo 4 deste trabalho.

Ao elaborar as atividades de nosso instrumento diagnóstico, as quais foram apresentadas aos integrantes que compõe o grupo de pesquisa do qual participamos, e que recebemos contribuições dos mesmos, fizemos as análises *a priori* das atividades delineando nossos objetivos, nossas escolhas, o que esperávamos dos alunos em cada atividade, e as diferentes resoluções de cada questão.

A fase de experimentação ocorreu no primeiro semestre de 2010, no laboratório de informática da escola em que o professor pesquisador atua, em dois encontros com duração de duas horas cada um, em que explicitamos nossos objetivos aos alunos e distribuímos as atividades para que resolvessem conforme enunciado de cada questão e as instruções constantes nas folhas de respostas.

Coube ao professor acompanhar o grupo de alunos durante a aplicação do instrumento diagnóstico e esclarecer eventuais dúvidas referentes ao enunciado das questões, que pudessem impedir os alunos de realizar as atividades.

Após recolher as folhas de questões, começamos o trabalho de análise das respostas dadas pelos alunos, um por um, procurando articular resultados de pesquisas anteriores e nosso referencial teórico.

Capítulo 4- Estudos preliminares e análise *a priori*

4.1 Estudos Preliminares

De acordo com a metodologia que adotamos, os estudos preliminares se inserem na fase “análises preliminares”, pois, além de estudarmos a respeito das pesquisas já realizadas sobre nosso tema e quais foram às dificuldades encontradas pelos alunos nestes estudos, precisamos saber mais sobre o que nossos sujeitos de pesquisa já estudaram de Matemática e para tal analisamos o plano de curso do professor da 1ª série do ensino médio e os livros didáticos utilizados pelos alunos nos anos de 2008 e 2009.

Os estudos preliminares também foram importantes na elaboração das atividades de nosso instrumento de pesquisa e na análise *a priori* dessas atividades, uma vez que nos dão informação sobre a seqüência adotada pelos autores dos livros que nossos sujeitos utilizam ou utilizaram, assim como o modo com que o professor seleciona os conteúdos e como os distribui em seu plano de trabalho.

4.1.1 O plano de trabalho docente

O plano de curso de Matemática da Instituição é um documento que visa planejar parte da trajetória do aluno em sua vida escolar, descrevendo os objetivos da disciplina no ensino básico, os tópicos que serão trabalhados durante o ano, como e o porquê deles.

Pretendíamos analisar brevemente os planos de ensino do 9º ano do ensino fundamental do ano de 2008 e o da 1ª série do ensino médio do ano de 2009, porém ao solicitar o documento do 9º ano à coordenação da escola, percebemos que esse documento não foi entregue à coordenação ou foi extraviado, e não existia a possibilidade de solicitar informações junto ao professor e coordenador do ensino fundamental da época (2008), pois ambos se desligaram do colégio ao final desse ano. Dessa forma descreveremos brevemente os tópicos do plano de curso da 1ª série do ensino médio que estão diretamente ligados ao nosso estudo que são: função, gráfico de função e inequação. Segundo depoimento dos alunos, o tema função não foi abordado no 9º ano do ensino fundamental, mas não sabemos se estava previsto no plano de ensino do professor.

A organização da escola é feita em trimestres, no planejamento do 1º trimestre da 1ª série do ensino médio de 2009 foi previsto desenvolver os seguintes conteúdos:

Objetivos específicos (Para quê?)	Conteúdo (O quê?)	Procedimento didático (Como?)
Reconhecer relações entre grandezas variáveis dadas por gráficos, tabelas e fórmulas. Desenvolver o conceito de função. Reconhecer e definir função Construir ler e interpretar gráficos de funções Reconhecer quando a função é injetora ou sobrejetora. Analisar gráficos quanto ao seu crescimento ou decrescimento. Definir função inversa e composta e resolver problemas que envolvam o conceito de função.	O conceito matemático de função. Domínio, Contradomínio e Imagem de uma função. Gráfico de uma função. Funções: sobrejetora, injetora e bijetora. Crescimento e decrescimento de uma função. Função composta. Função Inversa.	Aulas expositivas. Como o objetivo está na resolução de problemas, em algumas aulas serão utilizados recursos tecnológicos como calculadoras e computadores. Jogos. História da Matemática.
Reconhecer e definir função polinomial. Reconhecer função constante. Reconhecer e definir função polinomial do 1º grau. Reconhecer e interpretar gráficos de funções do 1º grau. Resolver inequações do 1º grau.	O que é função polinomial. Estudo da função polinomial do 1º grau. Inequações do 1º grau.	Aulas expositivas. Como o objetivo está na resolução de problemas, em algumas aulas serão utilizados recursos tecnológicos como calculadoras e computadores. Jogos. História da Matemática.

Figura 5 – Plano de Matemática da 1ª série do ensino médio - 1º trimestre de 2009

Percebemos que no plano de trabalho docente da figura anterior estão presentes muitos elementos previstos em nossa abordagem, tais como, a construção e interpretação de gráficos e a resolução de inequações. A organização dos conteúdos segue rigorosamente a ordem proposta pelo livro didático utilizado pelos alunos e no campo "procedimentos didáticos" consta a possibilidade de utilização de recursos tecnológicos, tais como, computadores e calculadoras, que são recursos previstos para uso na resolução de nosso instrumento diagnóstico.

No segundo trimestre e em parte do 3º trimestre estavam previstos os demais conteúdos que interessam a nossa pesquisa, como descrito na figura abaixo:

Objetivos específicos (Para quê?)	Conteúdo (O quê?)	Procedimento didático (Como?)
Reconhecer e definir função do 2º grau. Analisar, construir e interpretar gráficos. Resolver inequações do 2º grau, analisando as funções envolvidas. Determinar o domínio de funções.	Estudo da função polinomial do 2º grau. Inequações do 2º grau. Inequação produto e inequação quociente. Usando inequações para determinar o domínio de uma função.	Aulas expositivas. Como o objetivo está na resolução de problemas, em algumas aulas serão utilizados recursos tecnológicos como calculadoras e computadores. Jogos. História da Matemática.
Definir função modular. Reconhecer, construir e interpretar gráficos de função modular. Resolver equações modulares. Resolver inequações modulares.	Módulo ou valor absoluto de um número real. Função modular. Equações modulares. Inequações modulares.	Aulas expositivas. Como o objetivo está na resolução de problemas, em algumas aulas serão utilizados recursos tecnológicos como calculadoras e computadores. Jogos. História da Matemática.
Rever o conceito de potências com expoente real. Reconhecer e resolver equações exponenciais. Definir função exponencial. Reconhecer inequações exponenciais. Resolver problemas que envolvam potências de base 10.	Revisão sobre potenciação. Equações exponenciais Função exponencial. Inequações exponenciais. Potencias de base 10.	

Figura 6 – Plano de Matemática da 1ª série do ensino médio de 2009 - 2º trimestre e parte do 3º trimestre.

Embora conste o tópico inequações exponenciais no planejamento dessa série, esse, segundo o professor não foi abordado, em face das dificuldades dos alunos em lidar com funções e inequações durante o ano. Como a instituição a que eles pertencem prioriza o aprender e não simplesmente cumprir na íntegra o planejamento, esse tópico, assim como o estudo de logaritmos, nesse ano, foram deixados para serem estudados na série seguinte.

Podemos constatar, na análise desse documento, que todos os conteúdos previstos no livro didático, referente ao tema funções são contemplados, o que mostra que o aluno tem a oportunidade de conhecer o comportamento de outras funções que não só as afins e quadráticas, o que é tratado como um fator desejável na pesquisa realizada por Bianchini e Puga (2006).

4.1.2 Breve descrição dos livros didáticos utilizados pelos alunos

Em nossa pesquisa utilizamos uma abordagem funcional gráfica na resolução de equações e inequações, pois acreditamos que esse tipo de abordagem pode propiciar algum avanço no entendimento desse tópico em relação às abordagens tradicionais. Sendo assim, elaboramos para nosso instrumento diagnóstico, atividades com potencial para favorecer o tratamento e a conversão de diversos registros de representação semiótica. Para a elaboração dessa atividade, dentre outros fatores, foi necessária a análise dos livros didáticos utilizados por nossos sujeitos de pesquisa no ano de 2008, quando cursavam o 9º ano do ensino fundamental, e no ano de 2009, quando eram alunos da 1ª série do ensino médio. Analisamos quais abordagens são utilizadas e como são exploradas, para avaliar se o tratamento e a conversão de registros, que ao nosso entender promovem um avanço no entendimento desse tópico, estão presentes nas atividades propostas pelo autor, visto que esse tipo de abordagem é objeto de estudo desta pesquisa.

Escolhemos para análise dos livros didáticos, os elementos que julgamos importantes e que estão ligados a esta pesquisa, ou seja, procuramos nos livros as abordagens que se referem a: função, gráfico de função, inequação e resolução de inequação.

O livro utilizado pelos alunos em 2008 é de autoria de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr e é intitulado “A Conquista da Matemática: A + nova” destinado a 8ª série do Ensino Fundamental, atual 9º ano.

O livro é dividido em 12 capítulos, sendo :

- Capítulo 1: Estudando as potências e suas propriedades;
- Capítulo 2: Calculando com radicais;
- Capítulo 3: Equações do 2º grau;
- Capítulo 4: Função polinomial do 1º grau;
- Capítulo 5: Função polinomial do 2º grau;
- Capítulo 6: Segmentos proporcionais;
- Capítulo 7: Semelhança;
- Capítulo 8: Estudando as relações métricas no triângulo retângulo;
- Capítulo 9: Estudando as relações trigonométricas nos triângulos;
- Capítulo 10: Estudando a circunferência e o circulo;
- Capítulo 11: Estudando as áreas das figuras geométricas planas e
- Capítulo 12: Noções elementares de estatística.

Descreveremos os capítulos intitulados “Função polinomial do 1º grau” e Função polinomial do 2º grau (ou função quadrática)”.

O capítulo intitulado de “Função Polinomial do 1º grau” é iniciado apresentando noções de coordenadas cartesianas aos alunos, feita por meio de um texto no qual é mencionado o matemático René Descartes (contexto histórico), um exemplo de localização de um ponto em um sistema de coordenadas, exemplos de localizações geográficas por meio de latitude e longitude e de vista aérea de quarteirões de certa cidade.

A noção de função é apresentada com a apresentação de tabelas que correspondem a situações concretas, como por exemplo, o custo para aquisição de x canetas iguais em um determinado estabelecimento e explicações sobre quais seriam as variáveis envolvidas em cada situação. É feito um trabalho de forma que seja destacada a questão da variação entre grandezas.

Em seguida são sugeridas atividades variadas sobre a relação entre grandezas variáveis, com o objetivo de generalizar essas relações e determinar a expressão algébrica de cada função.

Embora o capítulo seja de função polinomial do 1º grau essas atividades não se limitam apenas a expressões algébricas desse tipo.

Para definir domínio e imagem de uma função, recorre-se a noção de função via teoria dos conjuntos, e é usada a expressão $\frac{1}{x}$ para explicar, em uma situação genérica, quando um número real não pertence ao domínio de uma função. Em seguida são sugeridos diversos exercícios referentes ao tema em que é usada a terminologia matemática sobre domínio e imagem, em contextos algébricos, geométricos e situações-problema nas quais é possível usar a definição de domínio e imagem. À medida que o assunto vai evoluindo é possível perceber a presença de atividades que permitem tratamentos e conversões entre registros de representação semiótica. As atividades 3 e 8 (da figura a seguir), por exemplo, têm como um dos objetivos a conversão do registro da língua materna para o registro algébrico, quando é solicitada a fórmula matemática que define a função explicitada nos problemas. As demais atividades envolvem tratamentos no registro algébrico, uma vez que é dada a expressão algébrica da função[8].

[8] Optamos por escrever expressão algébrica da função e não “lei da função” para não dar aos alunos a impressão que uma função necessariamente precisa de uma lei algébrica, visto que podemos defini-la (a função) sem a necessidade de uma expressão algébrica.

3 O preço de um sorvete é 2,50 reais. Se você comprar x sorvetes, deverá pagar y reais, ou seja, a quantia que você vai pagar é dada em função do número de sorvetes que vai comprar. Nessas condições, responda:

a) Qual é a fórmula matemática que define essa função? $y = 2{,}50x$

b) Quanto você gastará se comprar 3 sorvetes? 7,50 reais

c) Qual é a imagem do número 7 pela função? 17,50

d) Se você pagou 12,50 reais, quantos sorvetes você comprou? 5

e) Qual é o número x cuja imagem pela função é 20? 8

4 Quando a um número real associamos o seu dobro diminuído de 5 unidades, temos uma função definida pela fórmula matemática $y = 2x - 5$. Nessas condições, determine:

a) o domínio dessa função $\mathbb{R}$

b) a imagem do número 3,5 pela função 2

c) a imagem do número $\frac{5}{2}$ pela função 0

d) o número real x cuja imagem pela função é -1 2

e) o número real x cuja imagem pela função é $\frac{1}{2}$ $\frac{11}{4}$

5 Sabemos que uma função é definida pela fórmula matemática $y = \frac{10}{x}$ e seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}^*$. Nessas condições:

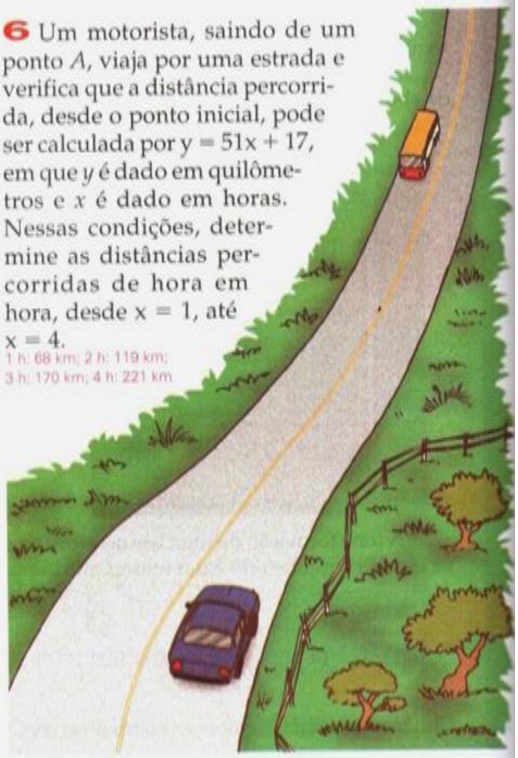
a) Qual é a imagem do número $\sqrt{5}$ pela função? $2\sqrt{5}$

b) Qual é a imagem do número 0,1 pela função? 100

c) Qual é o número real x cuja imagem pela função é $\frac{1}{5}$? 50

d) Qual é o número real x cuja imagem pela função é $\frac{2}{\sqrt{2}}$? $5\sqrt{2}$

6 Um motorista, saindo de um ponto A, viaja por uma estrada e verifica que a distância percorrida, desde o ponto inicial, pode ser calculada por $y = 51x + 17$, em que y é dado em quilômetros e x é dado em horas. Nessas condições, determine as distâncias percorridas de hora em hora, desde $x = 1$, até $x = 4$.
1 h: 68 km; 2 h: 119 km; 3 h: 170 km; 4 h: 221 km



7 Em uma função definida pela fórmula matemática $y = x^2 - 8x + 12$, cujo domínio é $\mathbb{R}$, determine o número real x cuja imagem pela função é 0. 6 ou 2

8 Em um retângulo, cujo comprimento é 50 unidades, a área y é dada em função da largura x. Nessas condições:

a) Escreva a fórmula matemática que define essa função. $y = 50x$

b) Qual é a imagem do número 32 pela função? 1 600

c) Qual é o número real x cuja imagem pela função é 750? 15

136

Figura 7 - Atividades iniciais do Livro didático do 9º ano
Fonte: "A Conquista da Matemática: A + nova" (Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 2002, p. 136)

Giovanni e Castrucci (2002) retomam o assunto inicial, sobre o plano cartesiano, para iniciar o assunto gráfico da função afim. Primeiramente sua ênfase é na construção, variando o sinal do coeficiente angular das equações que representam as retas, com o objetivo de mostrar a mudança na inclinação da mesma. As construções iniciais são feitas por meio de tabelas com mais de dois pontos para determinação dos gráficos, mas nas últimas são utilizados apenas os pontos referentes às intersecções das retas com os eixos *x* e *y*. Em seguida são sugeridas algumas atividades cujo objetivo é a construção no plano cartesiano de gráficos de funções polinomiais do 1º grau.

Os próximos tópicos abordam o tema zero da função afim e a interpretação dos gráficos desses tipos de funções. Nessas interpretações são destacados o crescimento ou decrescimento da função afim e também análises a respeito do sinal da função para diferentes intervalos do domínio.

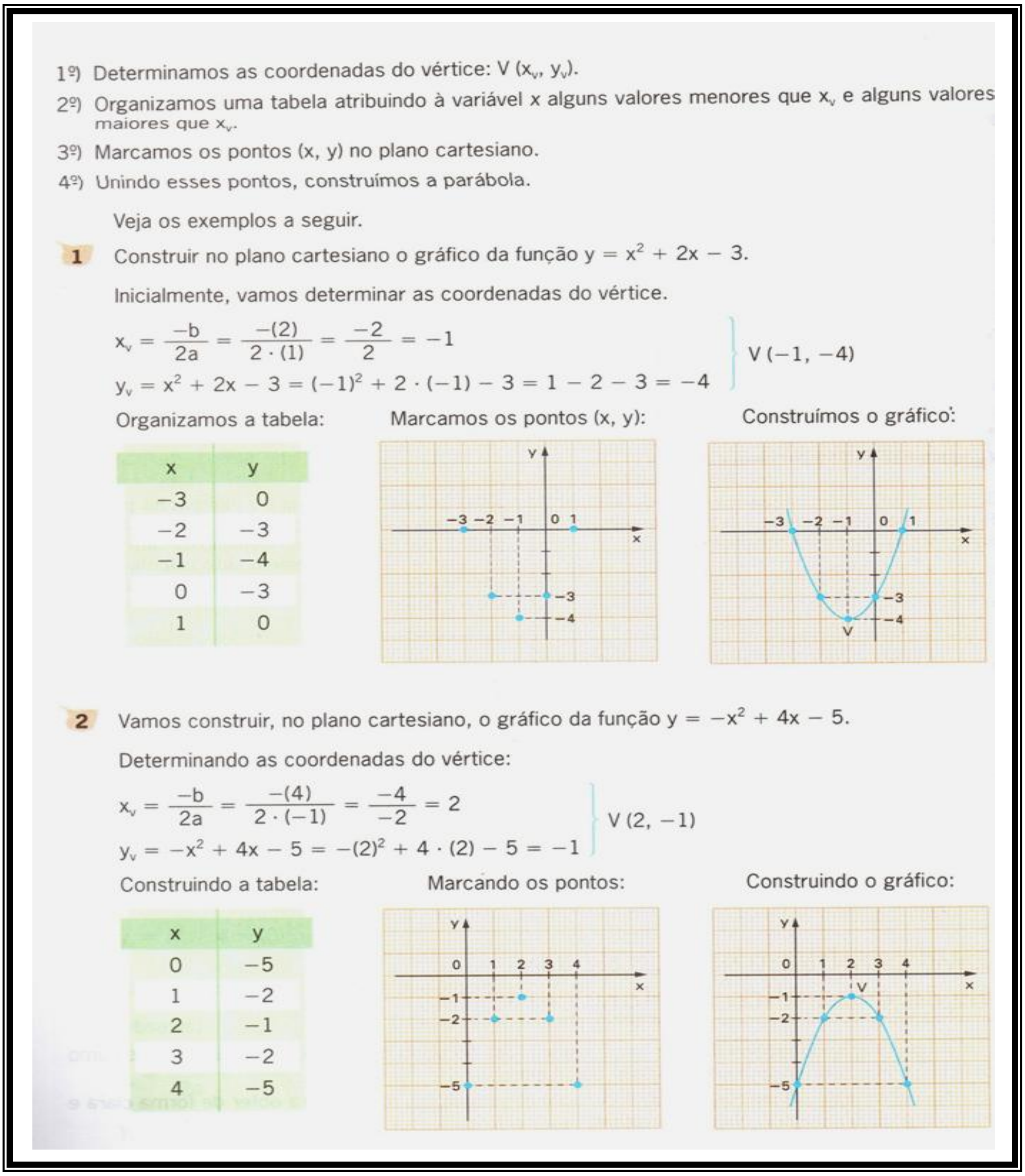
A partir do momento que é anunciada a análise a respeito do sinal da função (estudo do sinal da função), o qual seria uma oportunidade para abordar as inequações do 1º grau utilizando essa ferramenta, em apenas uma é solicitado aos alunos que determinem o zero da função $(y = 0)$, os valores de *x* que façam com que a função seja positiva $(y > 0)$ e os valores que a fazem negativa $(y < 0)$, estudo do sinal da função, e apenas nessa ocasião são utilizadas as desigualdades.

Os autores iniciam o capítulo “Função Polinomial do 2º grau (ou função quadrática)” apresentando algumas situações que podem ser expressas por uma função quadrática. Os exemplos escolhidos foram: da formação dos números triangulares (1, 3, 6, 10,...); a soma dos 100 primeiros números naturais atribuída a Gauss (1+2+3+...+98+99+100); uma situação que envolve um retângulo decomposto em outros quatro, em que um desses retângulos (um quadrado) tem a medida do lado variável, e dessa forma o cálculo da área do retângulo maior, pelo somatório dos quatro retângulos menores recai em uma função polinomial do 2º grau.

O tópico seguinte aborda o tema gráfico da função quadrática, sua forma, o nome da curva e como construí-lo utilizando de sua expressão algébrica e uma tabela de valores.

São utilizadas como exemplo de construção de gráficos de funções quadráticas, utilizando uma tabela de valores, as equações algébricas $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 4$. Percebemos que são escolhidas expressões que possuem as mesmas raízes (soluções da equação $y = 0$), que são $x = 2$ e $x = -2$, que são números opostos e portanto simétricos em relação à origem do plano cartesiano, o que faz com que os gráficos também sejam simétricos em relação ao eixo das ordenadas. A escolha dessas equações facilita a escolha dos valores que devem constar na tabela, visto que os alunos têm muitas dúvidas com relação a escolha desses números, ou seja, quando nela são incluídos os valores de x que fazem com que $y = 0$, escolhendo alguns valores entre eles, nos exemplos dos autor apenas números inteiros, alguns menores que $x = -2$ e alguns maiores que $x = 2$, percebe-se a simetria desses pontos da parábola em relação ao eixo das ordenadas. Além disso, é destacada a questão da concavidade da parábola no plano cartesiano, ou seja, o gráfico de $y = x^2 - 4$ tem a concavidade voltada para cima enquanto que o gráfico de $y = -x^2 + 4$ tem a concavidade voltada para baixo. Por meio desses gráficos são destacados pontos importantes como as intersecções com os eixos x e y e o vértice da parábola. Em seguida propõe a construção de um gráfico de uma função quadrática não simétrico ao eixo das ordenadas, porém com duas intersecções com o eixo das abscissas, ou seja, existem dois valores reais de x que fazem com que $y = 0$. São sugeridos exercícios com o objetivo de calcular as coordenadas do vértice de parábolas no plano cartesiano e um exercício de interpretação de um gráfico.

Ainda nesse tópico, após as atividades, é sugerida a construção de gráficos utilizando o vértice e pontos convenientes. Após determinado o vértice é incentivada a escolha de valores menores que a coordenada correspondente à abscissa do vértice e valores maiores que esta. Em seguida são apresentadas as atividades sobre construção de gráfico com a mesma abordagem, inclusive o enunciado solicita que seja utilizado esse procedimento de determinação das coordenadas do vértice e preenchimento de uma tabela de valores tendo como valor de x "central" a abscissa desse ponto. A figura seguinte explicita esse procedimento.



1º) Determinamos as coordenadas do vértice: V (x_v, y_v).

2º) Organizamos uma tabela atribuindo à variável x alguns valores menores que x_v e alguns valores maiores que x_v.

3º) Marcamos os pontos (x, y) no plano cartesiano.

4º) Unindo esses pontos, construímos a parábola.

Veja os exemplos a seguir.

1 Construir no plano cartesiano o gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$.

Inicialmente, vamos determinar as coordenadas do vértice.

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(2)}{2 \cdot (1)} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ y_v = x^2 + 2x - 3 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \end{array}\right\} V(-1, -4)$$

Organizamos a tabela:

x	y
−3	0
−2	−3
−1	−4
0	−3
1	0

Marcamos os pontos (x, y):

Construímos o gráfico:

2 Vamos construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$.

Determinando as coordenadas do vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(4)}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ y_v = -x^2 + 4x - 5 = -(2)^2 + 4 \cdot (2) - 5 = -1 \end{array}\right\} V(2, -1)$$

Construindo a tabela:

x	y
0	−5
1	−2
2	−1
3	−2
4	−5

Marcando os pontos:

Construindo o gráfico:

Figura 8 - Explicação dos autores a respeito da construção do gráfico da função quadrática.
Fonte: "A Conquista da Matemática: A + nova" (Giovanni e Castrucci, 2002, p.158)

Após essa etapa de construção do gráfico da função quadrática, são descritas as análises referentes aos zeros da função, sobre a concavidade da parábola e sobre o ponto de máximo ou mínimo do gráfico da função. Todas essas análises são feitas por meio de exemplos com explicitação nos registros algébrico e gráfico, propondo em seguida atividades muito semelhantes à exposição feita pelo autor em seus exemplos.

A análise do sinal da função é feita no último tópico do capitulo utilizando esboços dos gráficos para mostrar que valores de *x* tornam a função nula, quais a fazem negativa e quais a fazem positiva. Nesse tipo de abordagem é feita a conversão do registro algébrico para o gráfico e em seguida, por meio da notação de conjuntos, é feita a análise no registro algébrico.

O método consiste na determinação dos zeros da função e representação do esboço da curva representativa da função apenas no eixo *x*, observando o sinal do coeficiente a de $f(x) = ax^2 + bx + c$ para saber se a concavidade é para cima ou para baixo. O autor propõe um grande número de atividades utilizando-se do registro algébrico na mesma linha dos exemplos apresentados.

Em relação ao capítulo anterior, o de função polinomial do 1º grau, é dada uma maior ênfase nas desigualdades, inclusive em número de atividades propostas.

A seguir exibimos uma figura contendo algumas das atividades, de um total de 18, que encerram o capítulo. Essas atividades se referem ao estudo das inequações e, dessa forma, faremos alguns comentários a respeito delas.

Exercícios

1 Para quais valores reais de x a função $y = x^2 - x - 6$ é:

a) nula ($y = 0$)? $x = -2$ ou $x = 3$

b) positiva ($y > 0$)? $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

c) negativa ($y < 0$)? $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

2 Dada a função $y = 9x^2 - 8x - 1$, determine os valores reais de x para os quais se tem:

a) $y = 0$ $x = -\frac{1}{9}$ ou $x = 1$

b) $y > 0$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{9} \text{ ou } x > 1\}$

c) $y < 0$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{9} < x < 1\}$

3 Dada a função $y = -x^2 + 5x$, determine os valores reais de x para que se tenha:

a) $y = 0$ $x = 0$ ou $x = 5$

b) $y > 0$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$

c) $y < 0$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 5\}$

4 Sabendo que $y = -x^2 + 10x - 25$, determine os valores reais de x para que se tenha:

a) $y = 0$ $x = 5$

b) $y > 0$ Nunca teremos $y > 0$.

c) $y < 0$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$

5 Sendo dada a função $y = x^2 - 6x + 15$, analise essa função quanto ao sinal.
A função será positiva para qualquer valor real de x.

6 Sendo dada a função $y = x^2 - 9x - 10$, calcule os valores reais de x para que se tenha $y > 0$.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 10\}$

7 Existem valores reais de x para os quais se tem $x^2 - 8x + 16 < 0$? não

8 Existem valores reais de x para os quais a função $y = 2x^2 - x + 3$ é positiva ($y > 0$)?
Qualquer valor real de x torna a função positiva.

9 Para quais valores reais de x o produto $(x - 7)(x + 3)$ é positivo? $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 7\}$

10 Determine a solução da inequação de 2º grau $x^2 + 3x < 0$. $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0\}$

11 Dada a inequação de 2º grau $(x - 1)^2 + x > 3$, determine a sua solução no conjunto $\mathbb{R}$. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$

12 Para quais valores reais de x a expressão $x^3 - 1$ é menor, numericamente, que a expressão $x^3 - x^2 + 5x - 5$? $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

13 Qual é o menor inteiro positivo x que verifica a inequação $(3x - 1)(x - 2) > 2(x^2 - 2)$?

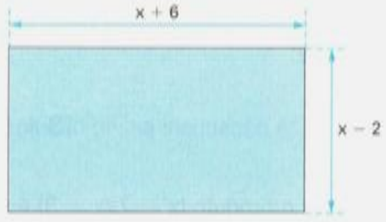
14 Qual é o menor e qual é o maior número inteiro x que faz com que a expressão $x^2 - 5x - 36$ seja menor que zero? O menor é -3 e o maior é 8.

15 Para que valores reais de x a função $y = x^2 - 10x + 21$ é negativa? $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 7\}$

16 Existe algum valor real de x que verifica a inequação $4x^2 - 3 < 12(x - 1)$? não

17 Qual é a solução, no conjunto $\mathbb{R}$, da inequação $8(x^2 - 3) + 1 < 5(x^2 - 1) - 6$?
$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

18 Determine os valores reais de x para os quais a área do retângulo seja maior que 9. $x > 3$



172

Figura 9 - Atividades propostas referentes às inequações
Fonte: "A Conquista da Matemática: A + nova" (Giovanni e Castrucci, 2002, p.172)

As quatro primeiras atividades referem-se diretamente a fazer o estudo do sinal da função, cujo livro traz em páginas anteriores exercícios resolvidos semelhantes. A atividade 1, nos itens a), b) e c), formula as perguntas em dois registros distintos, o registro algébrico e o registro da língua natural, pois o faz da seguinte forma: " a) nula ($y = 0$), b) positiva ($y > 0$), c) negativa ($y < 0$). Acreditamos que a pergunta feita dessa maneira pode contribuir no entendimento do aluno a respeito desses dois registros, ou seja, que podemos fazer a pergunta de uma maneira ou de outra que estaremos representando a mesma idéia. Nas atividades 2, 3 e 4 não é mais usada, em seus itens, essa maneira de perguntar.

A atividade 5 também solicita que seja feito o estudo do sinal da função, porém dessa vez é utilizado apenas o registro da língua natural, a pergunta é: "analise essa função quanto ao sinal", o que também consideramos válido, pois essa pergunta resume os itens a), b) e c) das atividades anteriores.

Nas atividades 6, 7, 8, 9, 14 e 15 são solicitadas aplicações do estudo do sinal, ou seja, pergunta-se apenas $y > 0$ ou $y < 0$, dessa forma estamos diante da resolução de inequações do 2º grau. Atividades semelhantes a essa também estão presentes nos exercícios resolvidos das páginas anteriores.

As atividades 10, 11, 12, 13, 16 e 17 referem-se à inequações do 2º grau cuja resolução, segundo os exercícios resolvidos dos autores, baseia-se em tratamentos algébricos que possibilitem escrevê-las em uma das formas: $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$, com $a \neq 0$. Após essa etapa a inequação é resolvida utilizando-se o estudo do sinal da função como nas atividades citadas no parágrafo anterior.

A ultima atividade (18), é dada por meio do registro geométrico, um retângulo com lados medindo $(x - 2)$ e $(x + 6)$. Nessa atividade é necessário que o aluno saiba como calcular a área de uma região retangular para chegar a inequação $(x - 2)(x + 6) > 9$, é desejável que os alunos reconheçam que a expressão $y = (x - 2)(x + 6)$ representa a área delimitada pelo retângulo e que queremos os valores de x que fazem com que a área y seja maior que 9, porém, pela ênfase dada aos tratamentos algébricos nas atividades anteriores, em que não há perguntas para reflexão, é provável que os alunos que cheguem a inequação, relacione-a com as atividades já feitas e por meio de tratamentos algébricos escreva o primeiro membro como um polinômio do 2º grau e resolvam a inequação utilizando o estudo do sinal da função.

Consideramos o livro “A Conquista da Matemática: A + nova” de Giovanni e Castrucci parcialmente adequado para o ensino das inequações, levando em conta a idade dos alunos do 9º ano e que o livro representa apenas um dos suportes didáticos que o professor possui. A obra dá ênfase aos tratamentos algébricos e as conversões aparecem em poucas atividades, como apontam as pesquisas referentes ao ensino desse tema e que descrevemos em nossa revisão bibliográfica (Capitulo 2), ou seja, mesmo no livro didático o lugar reservado as conversões é muito pequeno e muitas vezes nulo.

A seguir, apresentamos uma breve análise do livro “Matemática: Uma nova abordagem”, v.1, de autoria de Giovanni, J.R. e Bonjorno, J.R. – São Paulo – FTD – 2000, no que se refere ao nosso tema de pesquisa. Essa obra foi utilizada pelos alunos na 1ª série do ensino médio, ano de 2009.

Desde que o professor pesquisador ingressou na Instituição de ensino essa é a coleção adotada e a justificativa dessa escolha, dada pelo coordenador do ensino médio da época que é também professor de Matemática, é o rigor utilizado por esses autores na apresentação dos tópicos, além de ser um livro que considera todos os conteúdos presentes nos vestibulares mais concorridos do Brasil, não tratando nenhum como um conteúdo opcional.

Esse livro é dividido em 10 capítulos, sendo:

- Capítulo 1: Geometria métrica plana;
- Capítulo 2: Trigonometria nos triângulos;
- Capítulo 3: Conjuntos;
- Capítulo 4: Funções;
- Capítulo 5: Função polinomial;
- Capítulo 6: Função modular;
- Capítulo 7: Função exponencial;
- Capítulo 8: Função logarítmica;
- Capítulo 9: Noções de Matemática financeira;
- Capítulo 10: Trigonometria no ciclo.

A seguir analisaremos brevemente os capítulos referentes ao tema função, ou seja, os capítulos 4, 5, 6 e 7, por serem de interesse ao nosso estudo.

A idéia de função é introduzida no capítulo 4, intitulado “Funções”, e é feita por meio de: tabelas, gráficos e situações no contexto da Geometria nas quais existe a possibilidade de estabelecer uma relação entre grandezas variáveis, como a relação entre o lado e o perímetro de um quadrado, por exemplo. São expostos textos e exercícios resolvidos e, em seguida, atividades variadas que visam fazer com que o aluno perceba a variação entre grandezas variáveis e a proximidade desse assunto com o quotidiano.

Em seguida apresentam o conceito matemático de função, preocupando-se em definir primeiramente o que é produto cartesiano e a relação binária entre dois conjuntos, para em seguida definir função, domínio, contradomínio e imagem.

No tópico intitulado “Estudando o domínio de uma função” as desigualdades e inequações são utilizadas como ferramenta na determinação do domínio de funções quando são dadas suas expressões algébricas e estas envolvem as operações de radiciação, quando o expoente é par, ou a divisão, quando a variável está no divisor.

No restante do capítulo o autor vai acrescentando, por meio de textos e exercícios resolvidos, as particularidades das funções, tais como, a possibilidade de representação gráfica, a interpretação desses gráficos, o crescimento e o decrescimento, a composição de funções (função composta), as qualidades que uma função pode ou não ter, tais como ser injetiva, sobrejetiva ou ambas, e a função inversa.

O capítulo “Função polinomial” é iniciado esclarecendo por meio de textos e exemplos o que é um polinômio e definindo o que é o “grau” de um polinômio.

Em seguida são expostas situações-problema em que a relação entre grandezas variáveis pode ser expressa por uma função polinomial (função cuja expressão algébrica é um polinômio).

Primeiramente, são apresentadas algumas situações que podem ser representadas por uma função constante (função polinomial de grau zero) e em seguida inicia-se o estudo da função polinomial do 1º grau (função afim), também por meio de situações-problema que podem ser representadas por uma função desse tipo.

Os autores do livro procuram dar ênfase à construção de gráficos de funções afins, e por meio deles fazer a análise quanto ao crescimento e o sinal da função, para em seguida iniciar o estudo das inequações do 1º grau.

O estudo de inequações é iniciado por meio de exemplos de resolução em que são utilizados tratamentos no registro algébrico e a revisão de duas propriedades das desigualdades, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.

Os sistemas de inequações e as inequações simultâneas também são apresentadas por meio de exemplos de resoluções dadas no registro algébrico. Nessas resoluções são privilegiados os tratamentos nesse registro, resolvendo cada inequação componente do sistema separadamente para posteriormente, após determinar os intervalos que satisfazem cada uma das inequações, converter a solução de cada inequação componentes do sistema para o registro gráfico, em forma de representação de intervalos na reta real. Finalmente é feita a intersecção desses intervalos a fim de encontrar um que seja comum a todas as inequações. Em seguida são propostas atividades dos mais variados tipos, desde contextos puramente matemáticos à situações-problema em que existe a necessidade do uso de uma inequação.

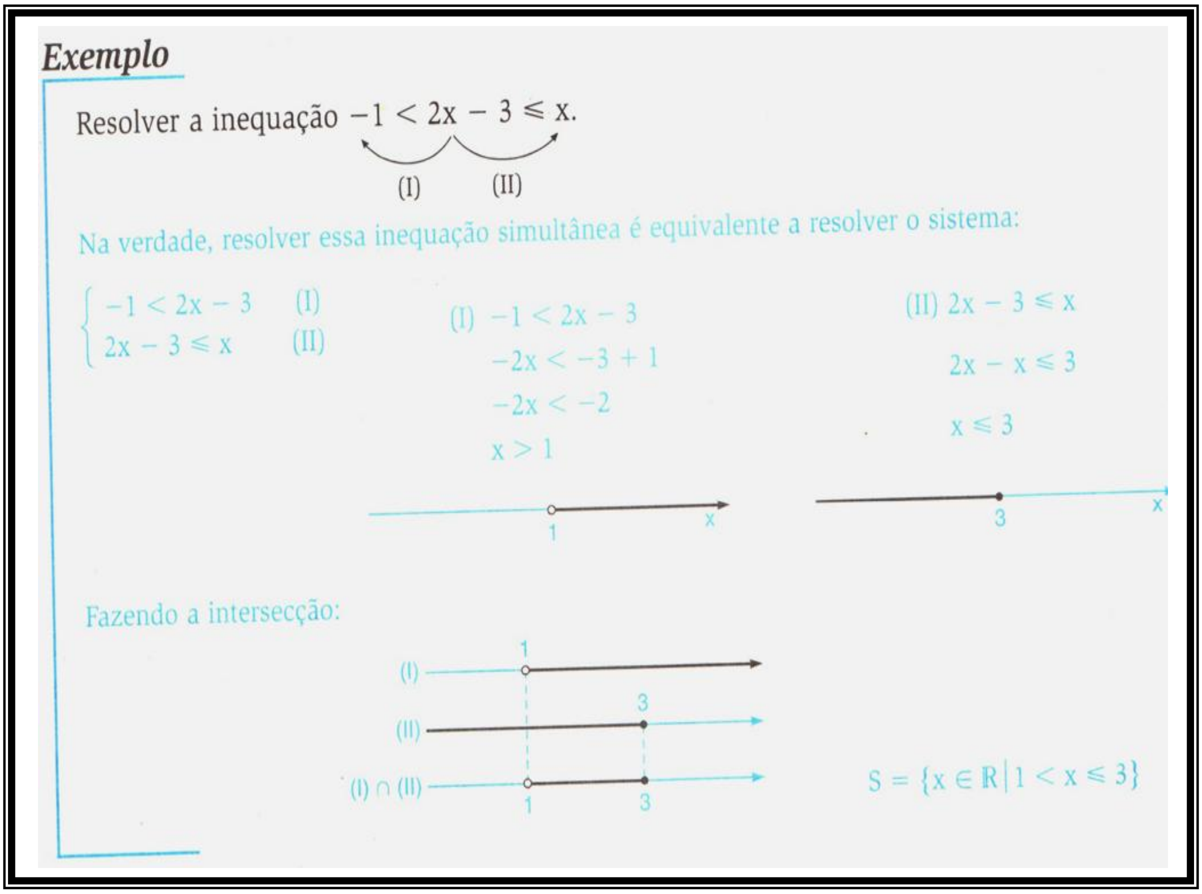
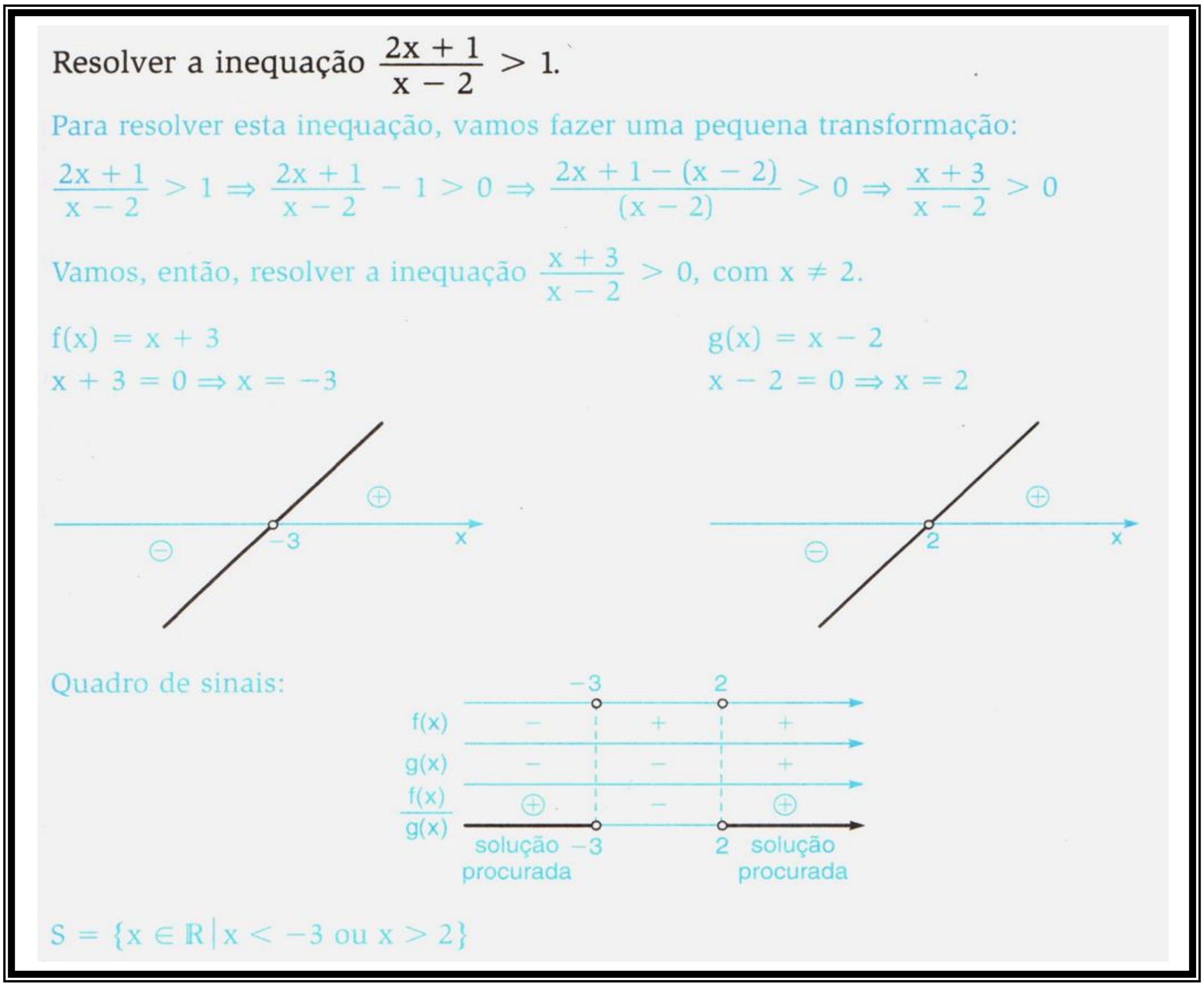


Figura 10 - Resolução de inequação simultânea proposta pelos autores do livro.
Fonte: Matemática; Uma Nova abordagem V. 1 (Giovanni e Bonjorno, 2000, p. 181)

O tópico seguinte refere-se às inequações dadas na forma fatorada, nas quais os fatores são polinômios do 1º grau, e as inequações racionais, com numerador e denominador representados por polinômios do 1º grau. Os autores se referem a esses tipos de inequações como sendo “inequação-produto” e “inequação-quociente” respectivamente.

A abordagem baseia-se no estudo do sinal das funções dos fatores do produto ou das funções que representam o numerador e o denominador do quociente, quando for o caso, e a resolução é feita por meio de um quadro de sinais, no qual são consideradas as “regras” de sinais da multiplicação e da divisão de números reais, a condição na qual um produto ou um quociente de números reais é nulo e a condição para o qual um quociente é inexistente (quando o denominador é zero).



Resolver a inequação $\frac{2x+1}{x-2} > 1$.

Para resolver esta inequação, vamos fazer uma pequena transformação:

$$\frac{2x+1}{x-2} > 1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x+1-(x-2)}{(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} > 0$$

Vamos, então, resolver a inequação $\frac{x+3}{x-2} > 0$, com $x \neq 2$.

$f(x) = x + 3$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$g(x) = x - 2$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Quadro de sinais:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 2\}$

Figura 11 - Resolução de uma inequação racional formulada pelos autores do livro.
Fonte: "Matemática: Uma Nova abordagem (Giovanni e Bonjorno, 2000, p. 185)

Na resolução acima são efetuados tratamentos no registro algébrico e a conversão para o registro gráfico. Após essa etapa é construído um quadro de sinais da função com o objetivo de comparar os sinais representados nessas retas e responder ao problema inicial. Consideramos essa uma boa estratégia de resolução, desde que os alunos saibam o que significam os sinais representados no quadro de sinais, ou seja, esse tipo de resolução não pode ser interpretado como uma regra, como apontam as conclusões da pesquisa de Gallo e Battu (2000) como sendo um "modelo de estudo do sinal", isto é, o fato de a inequação ser apresentada de uma certa forma, evoca um tipo de resolução padrão sem que os alunos saibam o que estão fazendo.

O tópico seguinte refere-se à função polinomial do 2º grau (função quadrática) e segue o mesmo "roteiro" do de função afim, isto é, é apresentada a forma, as situações em que a função quadrática pode resolver um problema e as particularidades de seu comportamento, tais como, gráfico, crescimento, decrescimento, estudo do sinal, máximos ou mínimos da função.

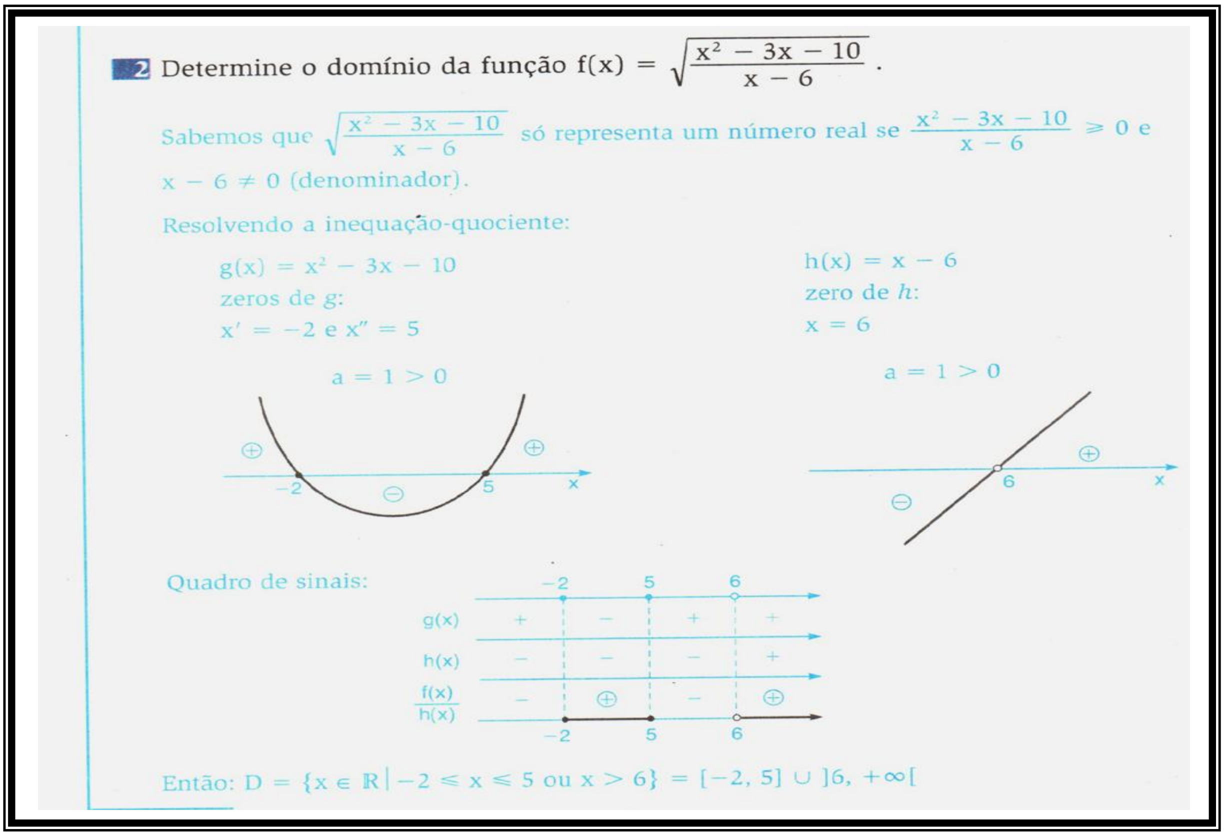
Boa parte do capítulo é dedicada à construção de gráficos e sua interpretação, principalmente sobre a concavidade e o estudo do sinal da função, assim como as condições para uma função polinomial do 2º grau admitir duas raízes reais distintas, duas raízes reais iguais, ou nenhuma raiz real.

As inequações são resolvidas primeiramente por meio do estudo do sinal da função quadrática, quando são apresentadas na forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ com $a \neq 0$. Esse tipo de resolução considera a expressão algébrica que constitui o primeiro membro da inequação como sendo uma função quadrática e construindo um esboço de seu gráfico pode-se chegar ao conjunto solução da inequação.

Os sistemas de inequação, as inequações simultâneas, inequações produto e inequações quociente são resolvidas da mesma forma como no tópico de função afim, porém utilizando as particularidades do estudo do sinal das funções quadráticas, o qual consideramos mais complexos, pois possuem mais detalhes que os da função afim.

O último tópico desse capitulo é intitulado “Usando as inequações para determinar o domínio de uma função”, o qual consideramos muito apropriado como aplicação das inequações. Porém não são feitas explorações numéricas, isto é, “testes” para situar e convencer os alunos do que eles estão fazendo, ou seja, procurando um conjunto de valores que faça a expressão algébrica que representa a função ter sentido. As resoluções baseiam-se em entender as operações de radiciação e divisão no universo dos números reais.

Na figura seguinte exibimos uma dessas resoluções formuladas no livro de Giovanni e Bonjorno (2000). Nela podemos perceber que, para um estudante resolver tal problema é necessário conhecer das propriedades dos números reais, radiciação e divisão, registrar algebricamente uma inequação cujo um dos membros é o radicando da expressão algébrica da função, conhecer os esboços gráficos da função quadrática e da função afim e registrá-los no intuito de construir um quadro de sinais para determinar o domínio da função que é a resolução da inequação citada no parágrafo anterior.



2 Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 6}}$.

Sabemos que $\sqrt{\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 6}}$ só representa um número real se $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 6} \geqslant 0$ e $x - 6 \neq 0$ (denominador).

Resolvendo a inequação-quociente:

$g(x) = x^2 - 3x - 10$
zeros de g:
$x' = -2$ e $x'' = 5$

$a = 1 > 0$

$h(x) = x - 6$
zero de h:
$x = 6$

$a = 1 > 0$

Quadro de sinais:

	−2		5		6	
g(x)	+		−		+	+
h(x)	−		−		−	+
$\frac{f(x)}{h(x)}$	−		⊕		−	⊕

Então: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ ou } x > 6\} = [-2, 5] \cup]6, +\infty[$

Figura 12 – Aplicação das inequações na determinação do domínio de uma função
Fonte: "Matemática: Uma Nova abordagem" (Giovanni e Bonjorno, 2000, p. 222)

Em nenhum momento desse capítulo é apresentada uma solução que seja diferente daquela baseada no estudo do sinal das funções que estão sendo comparadas, inequações, e dessa forma perde-se a oportunidade de fornecer subsídios aos alunos sobre o entendimento das situações que eles estão resolvendo. Porém, entendemos que o professor poderia explorar outras possibilidades além daquelas constantes no livro, pois isso enriqueceria as discussões com os alunos no âmbito de um tópico matemático tão complexo que são as inequações.

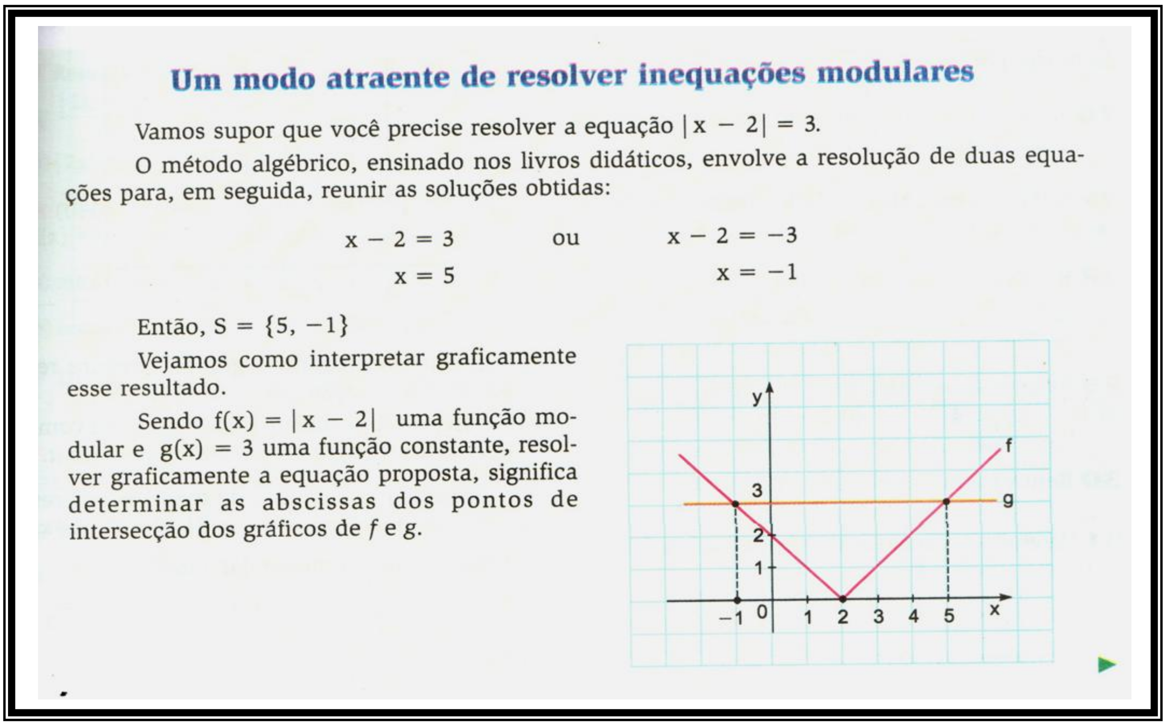
O capítulo intitulado "Função modular" é iniciado definindo módulo ou valor absoluto de um número real, em seguida propõem atividades referentes a essas definições em registros numéricos ou algébricos, visando escrever expressões algébricas sem os módulos equivalentes á expressões dadas com eles.

Em seguida é definida função modular, dando ênfase à construção dos gráficos de funções modulares cujas expressões algébricas “dentro do módulo” são polinômios do 1º grau ou polinômios do 2º grau, levando em conta o que foi estudado anteriormente.

As equações modulares são apresentadas por meio de exemplos e as resoluções são realizadas baseando-se na definição de módulo efetuando tratamentos no registro algébrico.

As inequações também são apresentadas por meio de exemplos, seguindo a mesma “linha” da resolução de equações e apropriando-se dos estudos realizados no capítulo “função polinomial” referentes ao estudo do sinal e ao sistema de inequações, visto que as expressões dentro do módulo são representações de funções afins e quadráticas.

Pela primeira vez encontramos uma resolução gráfica para uma inequação quando um dos membros não é igual a zero, e um problema em que é solicitado o uso dessa abordagem, a qual consideramos que pode promover um avanço no entendimento do assunto quando aliada da resolução algébrica. A seguir exibimos os trechos do livro aos quais nos referimos:



Um modo atraente de resolver inequações modulares

Vamos supor que você precise resolver a equação $|x - 2| = 3$.

O método algébrico, ensinado nos livros didáticos, envolve a resolução de duas equações para, em seguida, reunir as soluções obtidas:

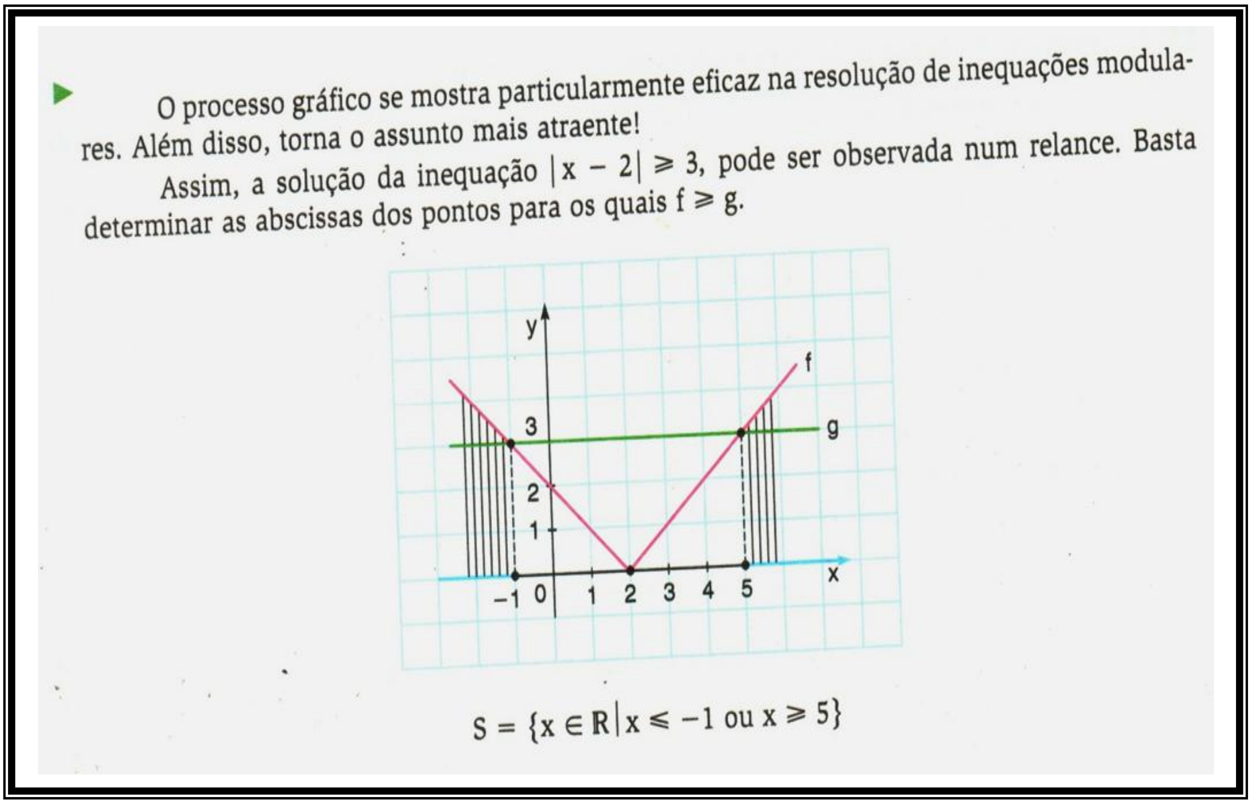
$$x - 2 = 3 \quad \text{ou} \quad x - 2 = -3$$
$$x = 5 \qquad\qquad x = -1$$

Então, $S = \{5, -1\}$

Vejamos como interpretar graficamente esse resultado.

Sendo $f(x) = |x - 2|$ uma função modular e $g(x) = 3$ uma função constante, resolver graficamente a equação proposta, significa determinar as abscissas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e g.

Figura 13 - Resolução gráfica de uma equação modular formulada pelos autores do livro. Fonte: “Matemática: Uma Nova abordagem” (Giovanni e Bonjorno, 2000, p. 241)


O processo gráfico se mostra particularmente eficaz na resolução de inequações modulares. Além disso, torna o assunto mais atraente!

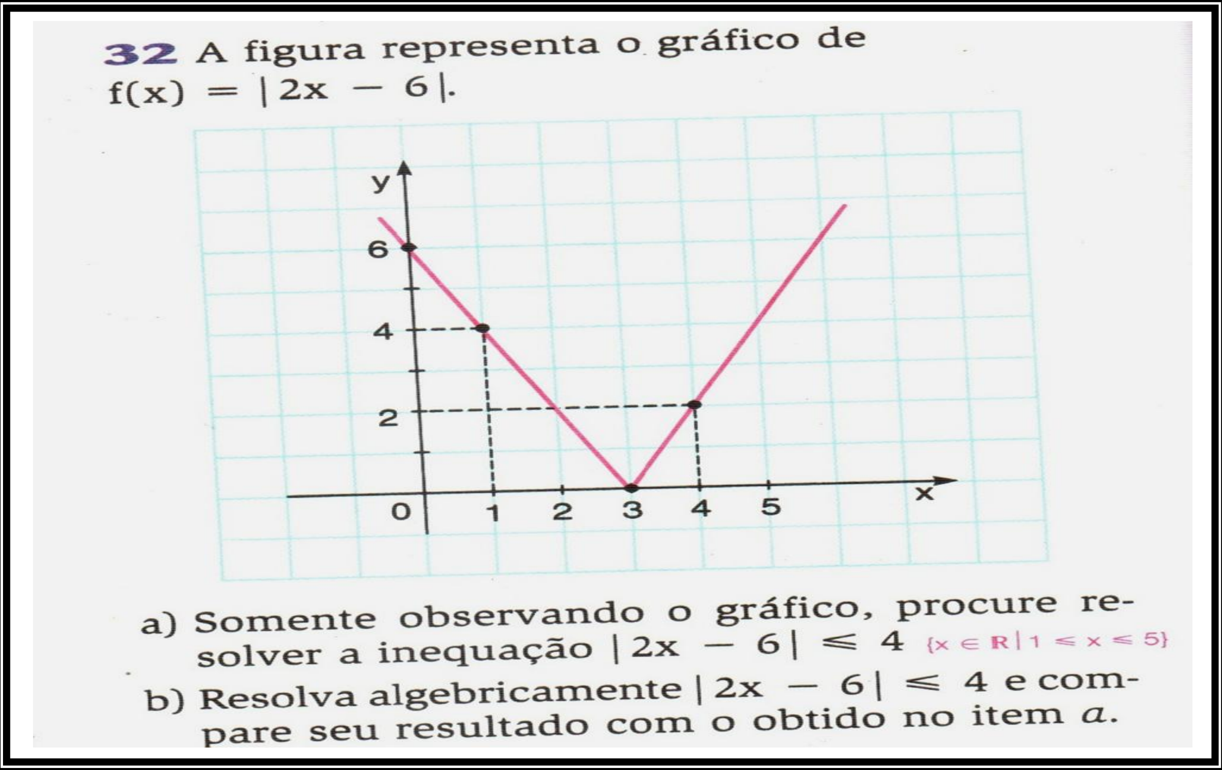
Assim, a solução da inequação $|x - 2| \geqslant 3$, pode ser observada num relance. Basta determinar as abscissas dos pontos para os quais $f \geqslant g$.

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

Figura 14 - Resolução gráfica de uma inequação modular formulada pelos autores do livro. Fonte: “Matemática: Uma Nova abordagem” (Giovanni e Bonjorno, 2000, p. 242)

Na figura 14 a solução gráfica é detalhada pelos feixes de retas paralelas verticais. Para chegar a isto é necessário representar graficamente a função f dada por $f(x) = |x - 2|$ e a função g dada por $g(x) = 3$ e fazer a seguinte interpretação: parte do gráfico de f acima do gráfico de g temos $f(x) \geq g(x)$, ou seja, $|x - 2| \geq 3$. Dessa forma para valores de x maiores que 5 (ou igual a 5) temos $f(x) \geq 3$ e para valores de x menores que -1 (ou igual a -1) também temos $f(x) \geq 3$. Isso pode ser representado por retas verticais $x = 5$, $x = 5{,}2, \ldots$, $x = -1$, $x = -2 \ldots$.

Na figura seguinte exibimos uma atividade proposta no livro para ser resolvida graficamente, como a da Figura 14, e em seguida resolvida algebricamente. Percebemos nessa atividade a oportunidade de os alunos coordenarem dois registros de representação semiótica diferentes, o que pode trazer um avanço no entendimento desse tópico.



32 A figura representa o gráfico de $f(x) = |2x - 6|$.

a) Somente observando o gráfico, procure resolver a inequação $|2x - 6| \leq 4$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

b) Resolva algebricamente $|2x - 6| \leq 4$ e compare seu resultado com o obtido no item *a*.

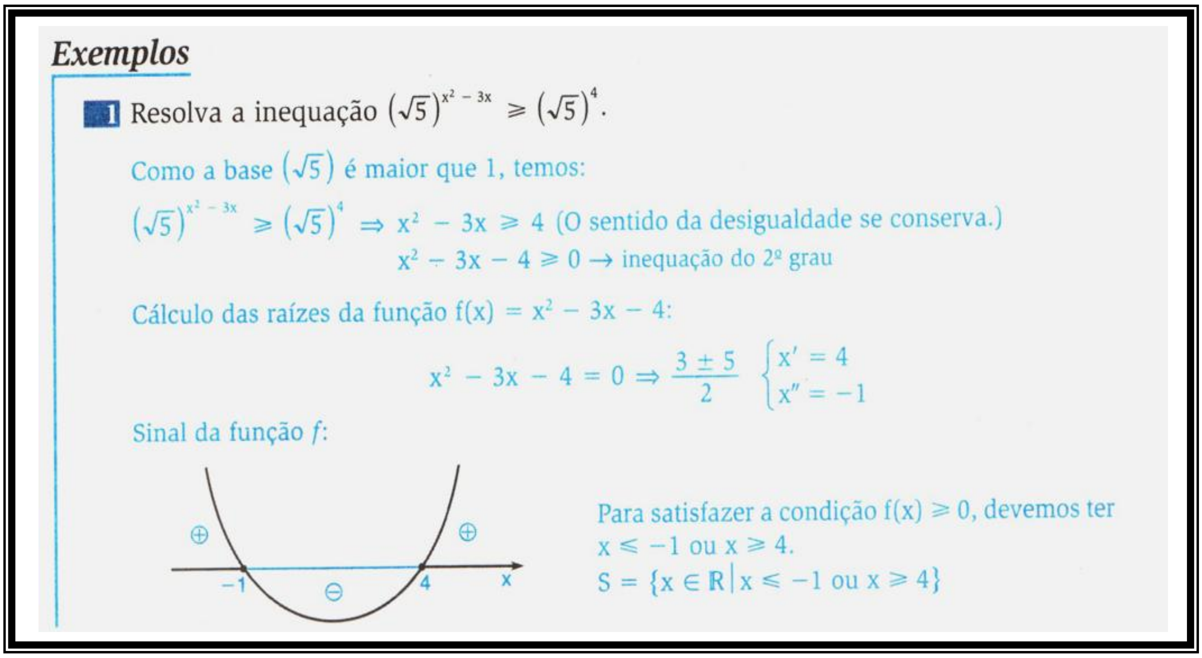
Figura 15 - Atividade proposta no Livro “Matematica: Uma nova abordagem” v.1
Fonte: “Matemática: Uma Nova abordagem” (Giovanni e Bonjorno, 2000, p. 242)

A resolução algébrica solicitada no item *b)* da atividade acima pode ser resolvida por meio de dois tratamentos diferentes que são: resolver a inequação simultânea $-4 \leq 2x - 6 \leq 4$ ou escrever $f(x)$ sem os módulos chegando a $f(x) = \begin{cases} 2x - 6 \; se \; x \geq 3 \\ -2x + 6 \; se \; x < 3 \end{cases}$ para posteriormente resolver o sistema de inequações do 1º grau $\begin{cases} 2x - 6 \leq 4 \\ -2x + 6 \leq 4 \end{cases}$, sendo que essas duas maneiras de resolução são abordadas no livro didático, porém é mais freqüente a primeira.

O capítulo intitulado “Função exponencial” é iniciado com uma revisão da potenciação e atividades referentes a essa “revisão”, em seguida são apresentados problemas que devem ser resolvidos utilizando uma função exponencial, as quais recaem em uma equação.

A seguir é definida a função exponencial, como sendo a função definida pela expressão $f(x) = a^x$, em que o número real a é a base e x é o expoente. São apresentadas as restrições para os valores da base, sua influência no crescimento da função e seu gráfico. As atividades seguintes referem-se ao crescimento/decrescimento dessa função e problemas que são resolvidos utilizando-se de funções exponenciais.

As inequações exponenciais aparecem nesse contexto também por meio de exemplos, como exposto nos capítulos anteriores do livro. A resolução baseia-se na análise do intervalo em que pertence a base das funções (para saber se elas são crescentes ou decrescentes) que representam os membros da inequação e conhecimentos advindos do capítulo de função polinomial, visto que os expoentes são sempre polinômios do 1º ou 2º graus. Abaixo exibimos uma dessas resoluções.



Exemplos

1 Resolva a inequação $(\sqrt{5})^{x^2 - 3x} \geq (\sqrt{5})^4$.

Como a base $(\sqrt{5})$ é maior que 1, temos:

$(\sqrt{5})^{x^2 - 3x} \geq (\sqrt{5})^4 \Rightarrow x^2 - 3x \geq 4$ (O sentido da desigualdade se conserva.)

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow$ inequação do 2º grau

Cálculo das raízes da função $f(x) = x^2 - 3x - 4$:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} x' = 4 \\ x'' = -1 \end{cases}$$

Sinal da função f:

Para satisfazer a condição $f(x) \geq 0$, devemos ter $x \leq -1$ ou $x \geq 4$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 4\}$

Figura 16 - Exemplo de resolução de uma inequação exponencial
Fonte: "Matemática: Uma Nova abordagem" (Giovanni e Bonjorno, 2000, p.257)

Na resolução acima é analisado o intervalo a que pertence o número real $\sqrt{5}$ que é a base das funções exponenciais envolvidas no problema. Essa informação foi necessária para saber se as funções são crescentes ou decrescentes, como $\sqrt{5} > 1$ tratam-se de funções crescentes, portanto o sentido da desigualdade se mantém já que nas funções crescentes se aumentarmos o valor de x, o valor de $f(x)$ também aumenta. Após essa constatação faz-se com que $x^2 - 3x$ (expoente da função exponencial que está do primeiro membro) seja maior ou igual a 4 (expoente da função exponencial que está no segundo membro) o que recai em uma inequação quadrática que pode ser resolvida utilizando o estudo do sinal da função quadrática conforme foi exposto nos capítulos anteriores do livro.

Entendemos que o livro adotado contém atividades que promovem a coordenação de pelo menos dois registros de representação, como recomenda Duval (2003), no entanto cabe ao professor estimular o uso de mais de um registro de representação semiótica e incentivar a coordenação entre eles.

Um grande número das atividades, principalmente as que constam nos exercícios resolvidos, enfatizam as resoluções algébricas e podem ser resolvidas graficamente. Com o uso do *software* para fazer a conversão para o registro gráfico pode-se pensar na resolução de uma inequação por meio de resoluções gráficas diferentes das apresentadas no livro.

Acreditamos que a abordagem oferecida nos dois livros, tanto o do 9º ano EF quanto o da 1ª série EM, favorece o tipo de abordagem que pretendemos utilizar em nossa pesquisa, visto que são livros rigorosos, com relação ao conteúdo, mas também promovem atividades relacionadas ao quotidiano dos alunos as quais favorecem a conversão de registros de representação semiótica, considerando a passagem do registro da língua materna para o registro gráfico. Quanto às resoluções gráficas de equações e inequações, não percebemos um incentivo nessas obras para esse tipo de resolução, talvez pelas dificuldades que podem surgir na construção de gráficos pelos alunos. Porém essa é uma abordagem que pode ser oferecida pelo professor, aproveitando atividades do próprio livro, aumentando as possibilidades de representação das inequações o que pode favorecer um melhor entendimento sobre esse tópico.

4.2 Análise a *priori* do instrumento diagnóstico

Elaboramos cinco atividades com o objetivo de responder as seguintes questões:

Em que medida o ensino de inequações via uma abordagem funcional gráfica que envolva o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica, pode, ou não, favorecer o entendimento por parte dos alunos do assunto em questão? Quais as dificuldades encontradas? Quais os avanços percebidos com relação à coordenação desses registros?

As três primeiras questões são apresentadas no contexto das funções, e apresentadas no registro algébrico. O objetivo de cada uma delas é estimular, quando necessária, a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, e para tal os educandos poderão utilizar o *software* GeoGebra para construir as representações gráficas e interpretá-las diretamente na tela do computador.

A primeira delas traz uma síntese das ideias apresentadas no capítulo "Função polinomial do 1º grau" do livro utilizado pelos alunos na 1ª série do ensino médio, ou seja, a ordem dos itens está de acordo com a sequência sugerida por seu autor (Giovanni e Bonjorno, 2000). Em nossas atividades realizadas em sala de aula, fora do contexto dessa pesquisa, visto que além de pesquisadores também somos professores do ensino médio, quando todos esses itens são reunidos, em atividades avaliadas ou não, o número de respostas erradas é muito grande, pois muitos dos alunos se confundem em diferenciar a resolução algébrica de uma inequação racional (no livro o autor a define como inequação quociente) com a de um sistema de inequações, itens (*d* e (*e* dessa atividade. Nesse sentido o *software* poderá ajudá-los a diferenciar uma resolução da outra.

Na segunda atividade, não tocamos diretamente no ponto da desigualdade, ou seja, não é solicitada a resolução de uma inequação. Preferimos apresentar uma função cuja expressão algébrica é constituída da raiz quadrada de um quociente entre polinômios do 2º grau com uma variável real. Escolhemos os polinômios que constituem o quociente de forma que a função estudada não ficasse definida para todo *x* real. Solicitamos aos alunos a determinação do domínio da função *f*, e dessa forma recaímos em uma inequação racional, pois em $\mathbb{R}$[9], é necessário que o radicando seja positivo ou nulo.

Optamos, na terceira atividade pelo uso de uma função exponencial e uma polinomial do 2º grau, e os itens a serem resolvidos pelos alunos, assemelham-se aos das atividades 1 e 2. Pretendemos que os alunos percebam por meio de registros numéricos ou gráficos que uma função exponencial com base positiva tem imagem positiva, enquanto que uma função polinomial pode ter imagem positiva, nula ou negativa. Ao final dessa atividade é solicitada de forma direta a resolução de uma inequação quociente, semelhante à solicitada na atividade 1 e a condição de existência[10] da atividade 2, porém as funções que representam o numerador e o denominador do quociente são de natureza diferentes, ou seja, não são dois polinômios, como é usual nas atividades apresentadas no livro didático utilizado pelos alunos.

A atividade 4 é explicitada no registro da língua natural em forma de uma situação problema em que a necessidade do uso de inequações não é explícita. Esse tipo de atividade se mostra, em nossas aulas, das mais difíceis para os alunos, pois a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico precisa necessariamente ser efetuada. A escolha dessa atividade se deu por esse motivo e também por ser possível uma segunda conversão, para o registro gráfico, o que tem estrita ligação com as atividades anteriores.

Finalizando nosso instrumento de pesquisa, apresentamos a quinta atividade no registro gráfico, pois queremos analisar se a nossa abordagem realmente promove o entendimento dos alunos do tópico que estamos pesquisando. Nessa atividade não é necessária a conversão para resolver o que é solicitado, portanto é relevante para nossa pesquisa uma atividade dessa natureza.

A seguir, apresentamos a análise detalhada de cada atividade e as possíveis soluções realizadas pelos sujeitos na fase de experimentação.

---

[9] Conjunto dos Números Reais

[10] Condição de existência é o termo utilizado pelos autores do Livro Didático “Matemática: Uma nova abordagem” de Giovanni e Bonjorno (2000), para se referir ao domínio de certas equações algébricas ou funções que não estão definidas para todo x real, tais como, equações racionais, algumas equações que envolvem a operação de radiciação, equações logarítmicas, ou ainda, para a base da função exponencial, que dever ser sempre positiva (nesse caso não se refere aos valores de x).

Atividade 1

Considere as funções $g:\Re \to \Re$ e $h:\Re \to \Re$ definidas por $g(x)=x+2$ e $h(x)=5x$.

a) Resolva a equação $g(x)=h(x)$.

b) Determine todos os valores reais de x tais que $g(x)>0$.

c) Determine todos os valores reais de x tais que $h(x)<0$.

d) Resolva o sistema de inequações $\begin{cases} h(x)<2 \\ g(x)>20 \end{cases}$

e) Agora resolva a inequação $\dfrac{g(x)}{h(x)}>0$.

Elaboramos essa atividade baseada em nosso referencial teórico e também em estudos preliminares.

Como pretendemos estimular uma abordagem funcional gráfica, a atividade é apresentada no contexto matemático das funções, em que são apresentadas duas funções polinomiais do 1º grau. A escolha desse tipo de função deve-se ao fato de que esse tipo de expressão algébrica (polinômio do 1º grau) é bem familiar em sala de aula e faz parte da resolução de muitos dos problemas do livro didático que os alunos utilizam. Espera-se que em cada item o aluno perceba que, a comparação entre essas duas funções pode recair em uma inequação ou em uma equação, visto que quando escrevemos $f(x)>g(x)$ ou $f(x)=g(x)$ estamos comparando valores (*Quais valores de x fazem com que os valores de f sejam maiores que os de g? Quais valores de x fazem com que o valor de f seja igual ao valor de g?*) e o mesmo acontece nas inequações racionais, nos sistemas de inequações, ou seja, podemos considerar como uma comparação entre funções.

Inspiramo-nos, para a elaboração dessa atividade, em nossa experiência como professores do ensino médio e também nas pesquisas de Fontalva (2006) e Giusti (2008).

Item a)

No item a) é solicitado a resolução da equação $g(x)=h(x)$. Acreditamos que os alunos optem por uma resolução gráfica por estarem no laboratório de informática, e pelo incentivo que é dado em nossas aulas a esse tipo de resolução, mas normalmente optariam pela resolução algébrica, visto que é uma equação na qual, alunos desse nível, já estão bastante habituados a resolvê-la.

As resoluções esperadas para o item a) são:

Resolução gráfica

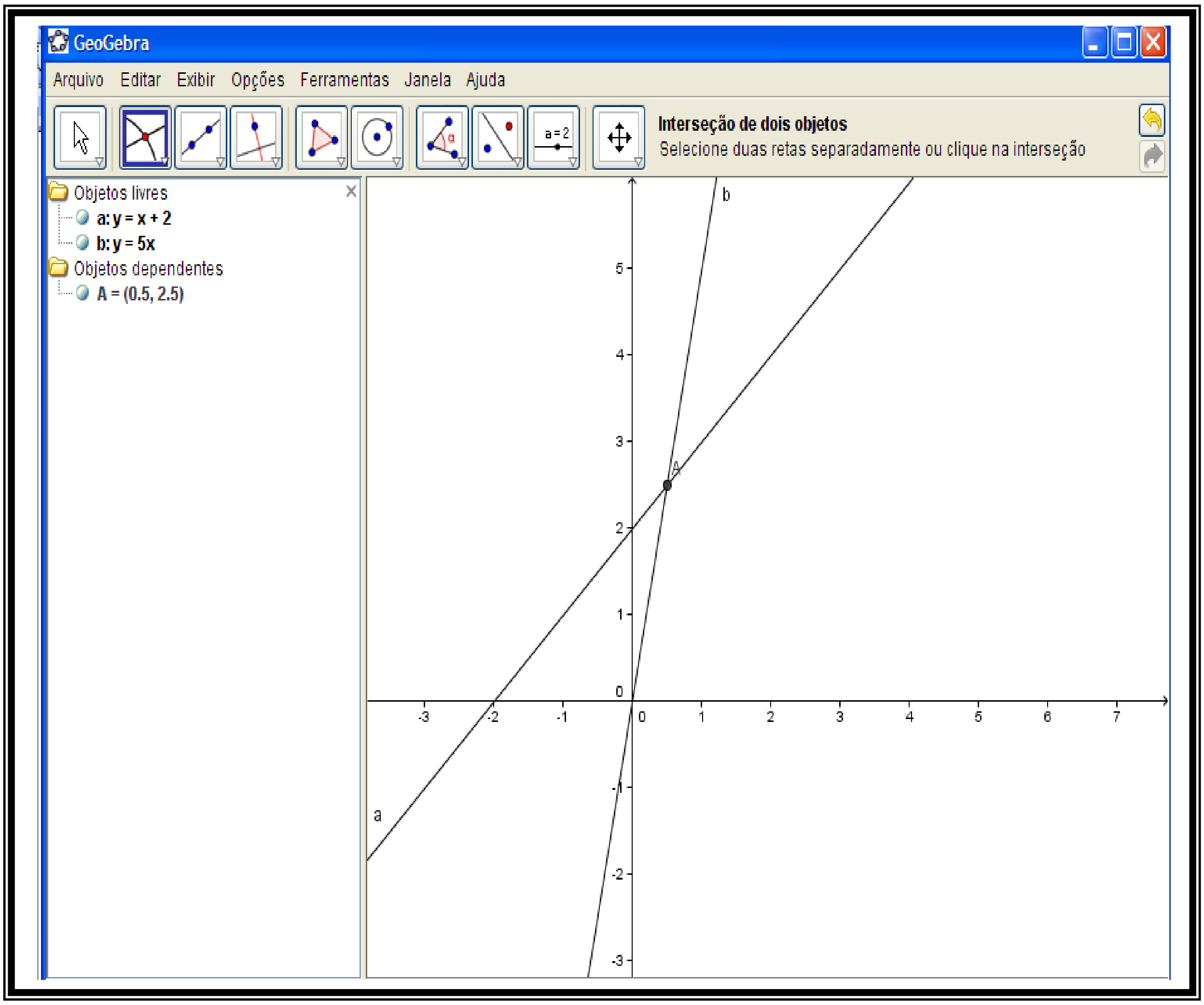


Figura 17 - Janela do GeoGebra - Resolução gráfica da atividade 1 item a)
Fonte: Elaborada pelo autor

Nesse tipo de resolução, a solução da equação é dada pela abscissa do ponto A, que é o ponto de intersecção dos gráficos de *g* e *h*. As coordenadas do ponto A, são exibidas pelo *software* na janela à esquerda, e a resposta correta é $x = 0{,}5$.

De acordo com nosso referencial teórico, nesta resolução ocorre a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, assim como o uso de três registros de representação: língua natural, algébrico e gráfico, visto que o enunciado é dado no registro da língua natural e também no algébrico.

Resolução Algébrica

Igualando as funções temos $5x = x + 2$; subtraindo x dos dois membros da equação chegamos a $4x = 2$; dividindo os dois membros da equação por 4 chegamos a $x = \frac{2}{4}$ e efetuando a divisão concluímos que $x = 0{,}5$.

Nesta resolução foram efetuados tratamentos em um mesmo registro de representação semiótica que nesse caso é o algébrico.

Itens b) e c)

Nos itens *b)* e *c)* é solicitado aos alunos que resolvam a desigualdade $g(x) > 0$ e $h(x) < 0$, nesse item provavelmente os alunos optem tanto pela resolução gráfica quanto pela algébrica, no sentido de averiguar se os resultados obtidos na resolução algébrica conferem com os da resolução gráfica. A resolução algébrica se assemelha a resolução de uma equação polinomial do 1º grau, pois os coeficientes de x nas duas funções são positivos, e alunos desse nível estão bastante habituados a sua resolução.

As resoluções esperadas para os itens b) e c) são:

<u>Resolução gráfica do item *b)*</u>

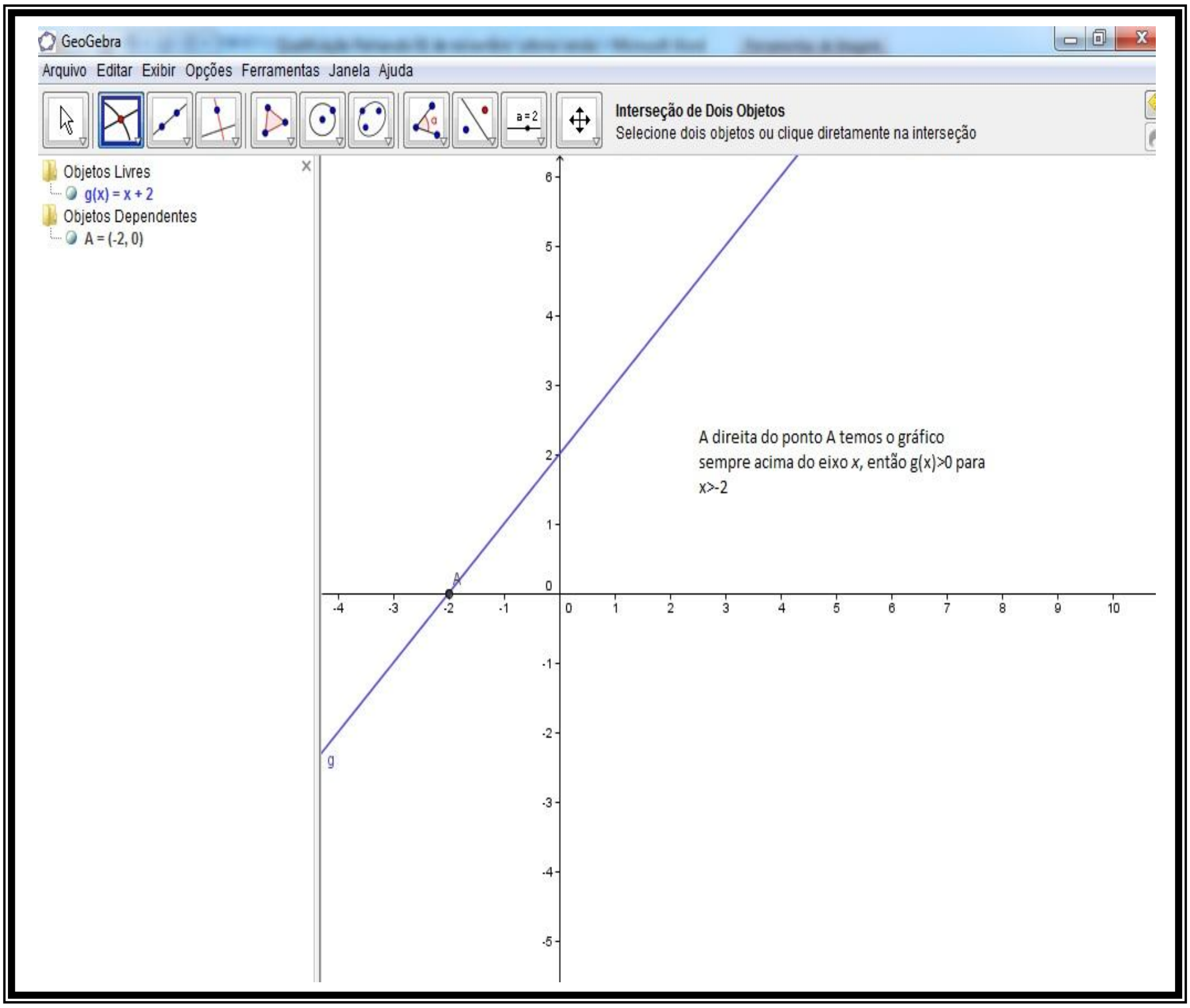


Figura 18 - Janela do GeoGebra – Gáfico da função *g* definida por $g(x) = x + 2$
Fonte: Elaborada pelo autor

A Figura 18 mostra o gráfico da função *g*, espera-se que o aluno nesse tipo de resolução relacione o gráfico com o estudo do sinal da função, que tanto fazemos em sala de aula, isto é, localize os valores de *x* que fazem com que g seja positiva, para então responder $x > -2$.

Nessa perspectiva ocorre a conversão do registro algébrico para o registro gráfico que possibilita a solução dada no registro algébrico.

<u>Resolução algébrica do item *b)*</u>

Na resolução algébrica devemos resolver a desigualdade $x+2>0$ e adicionando -2 nos dois membros da desigualdade chegamos a $x>-2$. Trata-se de uma resolução usual em inequações desse tipo, e os procedimentos são mecânicos, pois se assemelha à resolução de uma equação polinomial do 1º grau, portanto não deve se tornar um obstáculo para o aluno.

Para tal feito é necessário apenas tratamentos no registro algébrico.

<u>Resolução gráfica do item *c)*</u>

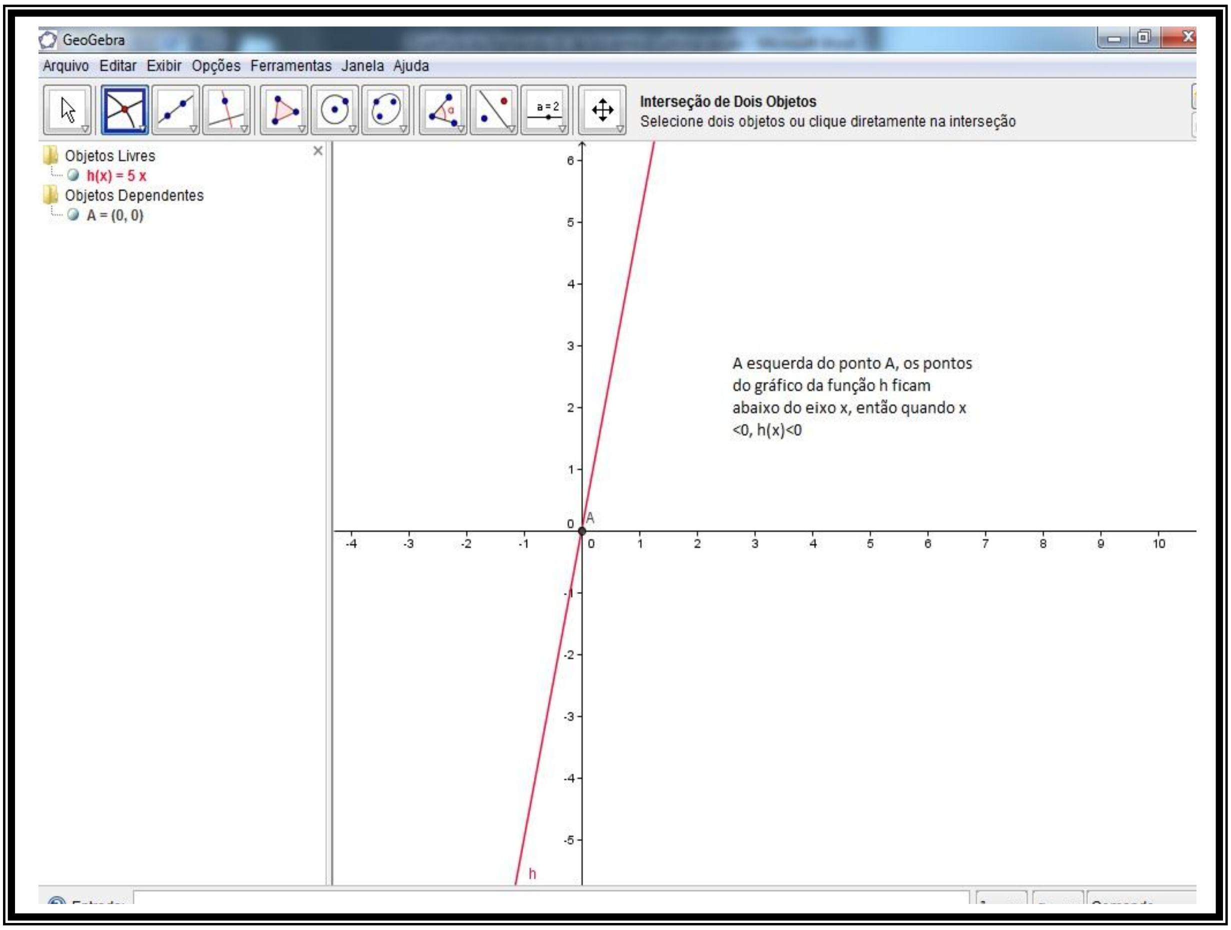


Figura 19 - Janela do Geogebra – Gráfico da função h definida por $h(x) = 5x$
Fonte: Elaborada pelo autor

A Figura 19 mostra o gráfico da função *h*, da mesma forma como no item anterior espera-se que o aluno nesse tipo de resolução, associe o estudo do sinal da função com seu gráfico, localizando os valores de *x* para os quais temos *h* negativa, respondendo dessa forma $x<0$.

Nessa resolução é efetuada a conversão do registro algébrico para o registro gráfico o que possibilita dar a resposta no registro algébrico.

<u>Resolução algébrica do item *c)*</u>

Assim como no item *b)*, trata-se de uma resolução algébrica semelhante à resolução de uma equação polinomial do 1º grau que para resolvê-la $(5x < 0)$ basta dividir os dois membros da inequação por 5, e como 5 é positivo, o sentido da desigualdade se mantém, chegando à solução $x < 0$.

Apenas um tratamento no registro algébrico foi necessário para chegar a tal conclusão.

<u>Item *d)*</u>

Nesse item é solicitado aos alunos que resolvam um sistema de inequações. A resolução desse tipo de sistema consiste em encontrar um intervalo que satisfaça todas as inequações que o compõe. Escolhemos um sistema em que não existe um intervalo que satisfaça simultaneamente as duas inequações, pois pretendemos estimular a conversão para o registro gráfico. Pela nossa experiência, problemas que não tem solução põem os alunos em dúvida e optando pela resolução algébrica e por meio dela se deparando com tal situação (a ausência de valores de *x* que satisfaçam ambas as inequações), pode-se recorrer ao registro gráfico para confirmar tal resposta, e dessa forma os alunos estariam coordenando esse dois registros.

Nos itens anteriores, um dos membros da inequação é zero, o que facilita a escolha do intervalo conveniente, ou seja, escolher o intervalo que faça com que determinada função seja positiva ou negativa. Nesse item, cada componente do sistema não tem um dos membros igual a zero, o que pode contribuir para que os alunos possam apresentar dois tipos de resolução gráfica.

Os alunos que responderem corretamente que a solução é o conjunto vazio, e justificarem sua resposta, provavelmente entendam o que é resolver um sistema de inequações

Resolução gráfica 1

d) Resolva o sistema de inequações $\begin{cases} h(x) < 2 \\ g(x) > 20 \end{cases}$

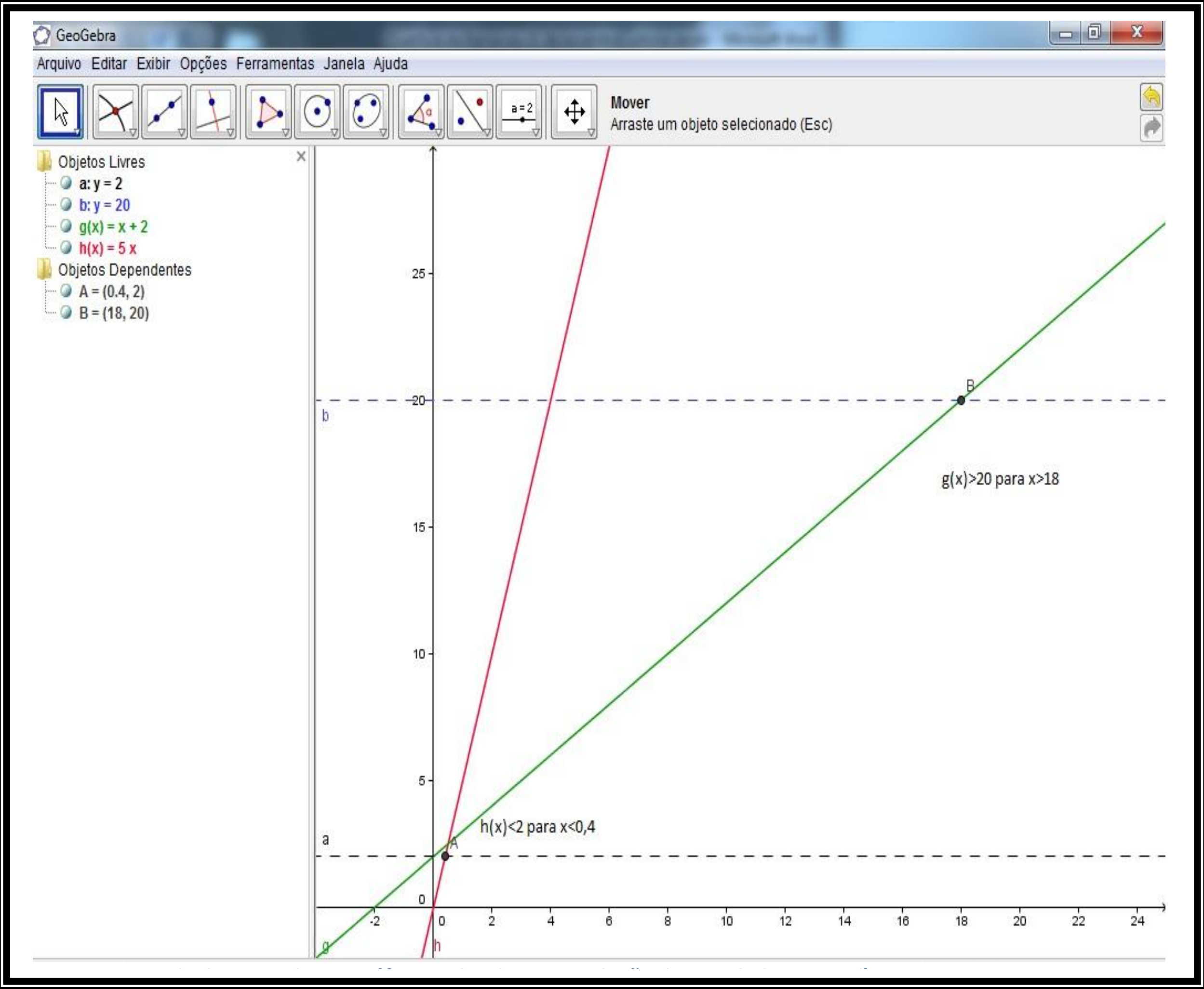


Figura 20 - Janela do GeoGebra – Gráficos utilizados na resolução da Atividade 1 item d)
Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura acima estão representados os gráficos da função *h* (em vermelho) e *g* (em verde). Construímos também as retas cujas equações algébricas são $y = 2$ e $y = 20$, gráficos traçados nas cores preto e azul respectivamente. Devemos resolver a inequação $h(x) < 2$ (I) e $g(x) > 20$ (II) e verificar se existe um intervalo de números reais que satisfaça as duas simultaneamente. Para resolver a inequação (I) marcamos o ponto A, intersecção das retas que representam a função *h* e y=2, e por meio dele percebemos que os valores que fazem com que *h* seja menor que 2 estão à esquerda da abscissa de A ($x = 0{,}4$), ou seja $x < 0{,}4$. Para resolver a inequação (II) marcamos o ponto B, intersecção das retas que representam a função g e y = 20, e pelo mesmo procedimento utilizado para resolver a inequação (I), encontramos $x > 18$. Ao fazer a intersecção dos intervalos que constituem as soluções de (I) e (II) chegamos à conclusão que o sistema não tem solução.

Trata-se de uma solução que envolve a conversão de registros do algébrico para o gráfico e a interpretação do que significa a representação do gráfico de uma função, pois pela nossa experiência em sala de aula e análise dos livros utilizados pelos alunos, esse tipo de resolução não é muito utilizada, o que pode ser um obstáculo para os alunos.

<u>Resolução gráfica 2</u>

Para essa resolução é necessário um tratamento nas inequações que compõe o sistema. Os alunos devem deixar um dos membros igual a zero, o que possibilita, ao observar os gráficos, a comparação direta dos intervalos que satisfazem individualmente cada inequação do sistema e concluir se existe ou não um intervalo que satisfaça as duas simultaneamente. Nesse tipo de resolução trabalham-se com os gráficos das funções equivalentes às inequações dadas.

Dessa forma escreve-se o sistema $\begin{cases} 5x - 2 < 0 \\ x - 18 > 0 \end{cases}$ e os gráficos das funções associadas a cada uma das inequações são $f(x) = 5x - 2$ e $g(x) = x - 18$:

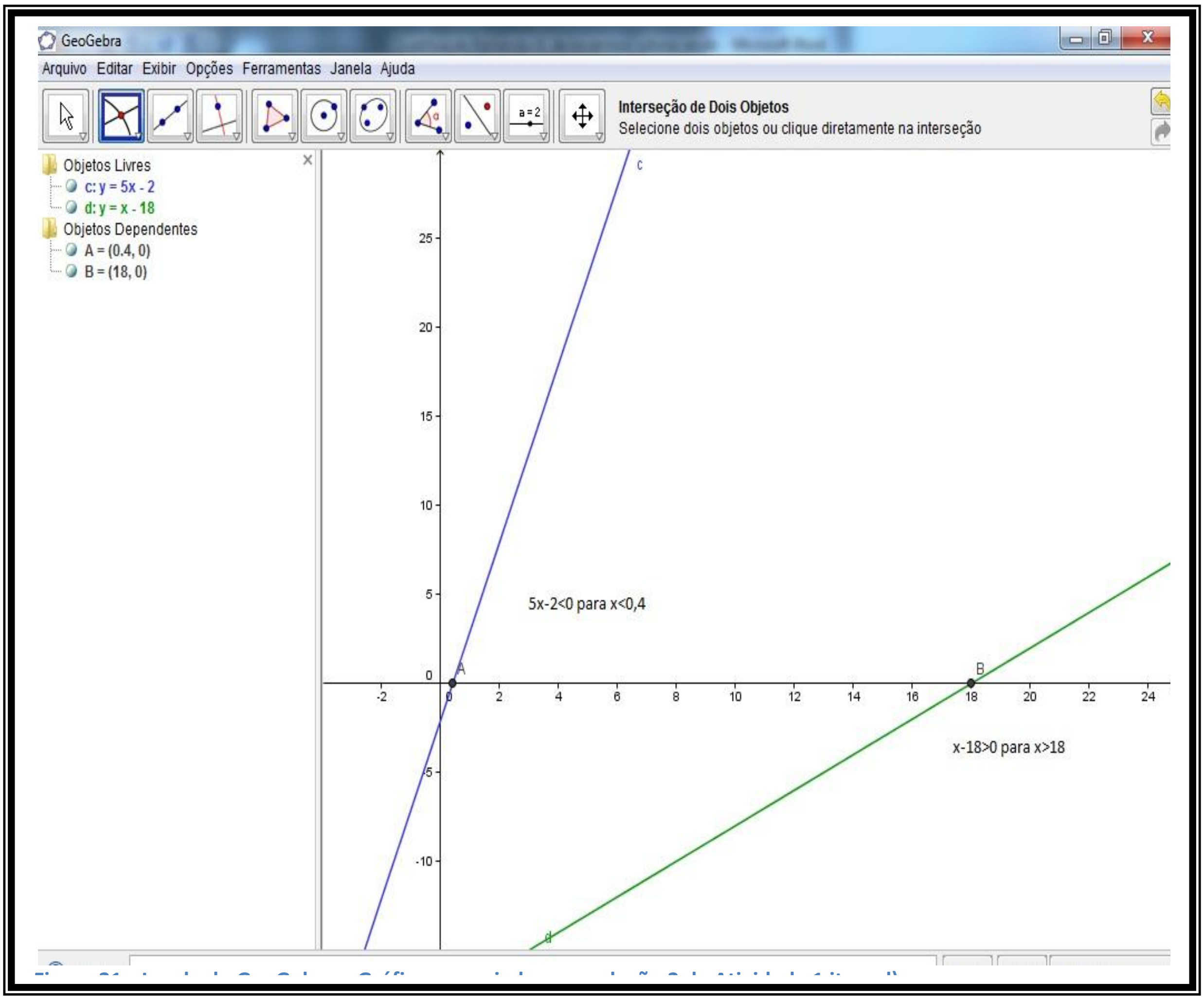


Figura 21 - Janela do GeoGebra – Gráficos associados a resolução 2 da Atividade 1 item d)
Fonte: Elaborada pelo autor

Marcamos os pontos A e B que representam as intersecções das retas que representam as funções $y = 5x - 2$ *e* $y = x - 18$, respectivamente, com o eixo das abscissas. Pela observação dos gráficos, podemos concluir que não existe um intervalo de números reais que faça com que $y = 5x - 2$ seja negativa e $y = x - 18$ seja positiva simultaneamente, portanto esse sistema não admite solução.

Em relação à resolução gráfica 1, essa, após efetuados os tratamentos e a conversão dos registros, assemelha-se mais às soluções apresentadas pelos autores do livro didático dos alunos, embora o faça com o titulo “estudo do sinal”, portanto é mais provável que utilizando os gráficos, os alunos optem por esse caminho.

Resolução algébrica

Na resolução algébrica, resolvemos separadamente cada uma das inequações componentes do sistema e verificamos se há um conjunto de valores comum que respondem as duas inequações. Identificando como (I) a inequação 5x<2 e (II) a desigualdade $x+2>20$, em (I) dividimos por 5 ambos os membros da inequação, já que 5>0 essa divisão não altera o sentido da desigualdade, e chegamos à solução de (I) que é $x<\frac{2}{5}$, em (II) adicionamos -2 aos dois membros da inequação e chegamos a $x>18$. Ao compararmos esses dois intervalos, constatamos que não existe solução para o sistema de inequações proposto.

Por esse caminho ocorrem apenas tratamentos no registro algébrico. Soluções desse tipo estão presentes no livro didático, o que a torna mais familiar para os alunos, em face da freqüência em que é utilizada.

Item *e)*

No item e) é solicitado ao aluno que resolva a inequação $\frac{g(x)}{h(x)}>0$, que trata-se de um quociente entre as funções *g* e *h*, ou seja uma função racional, cuja resolução recai nos seguintes sistemas de inequações: $\begin{cases} g(x)>0 \\ h(x)>0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} g(x)<0 \\ h(x)<0 \end{cases}$, ou seja, a solução é assemelha-se ao item anterior no que diz respeito ao sistema de inequações, porém é necessário que o aluno entenda a divisão de números reais, ou seja, que o quociente é positivo quando numerador e denominador têm o mesmo sinal, e não apenas quando os dois são positivos, e nesse caso a solução da inequação quociente é a união da solução dos dois sistemas de inequação.

Acreditamos que os sujeitos de pesquisa, na resolução desse item recorram aos gráficos das funções *g* e *h* para fazer o estudo do sinal das funções envolvidas no quociente, já que essa é a técnica utilizada em sala de aula.

A resolução é a seguinte:

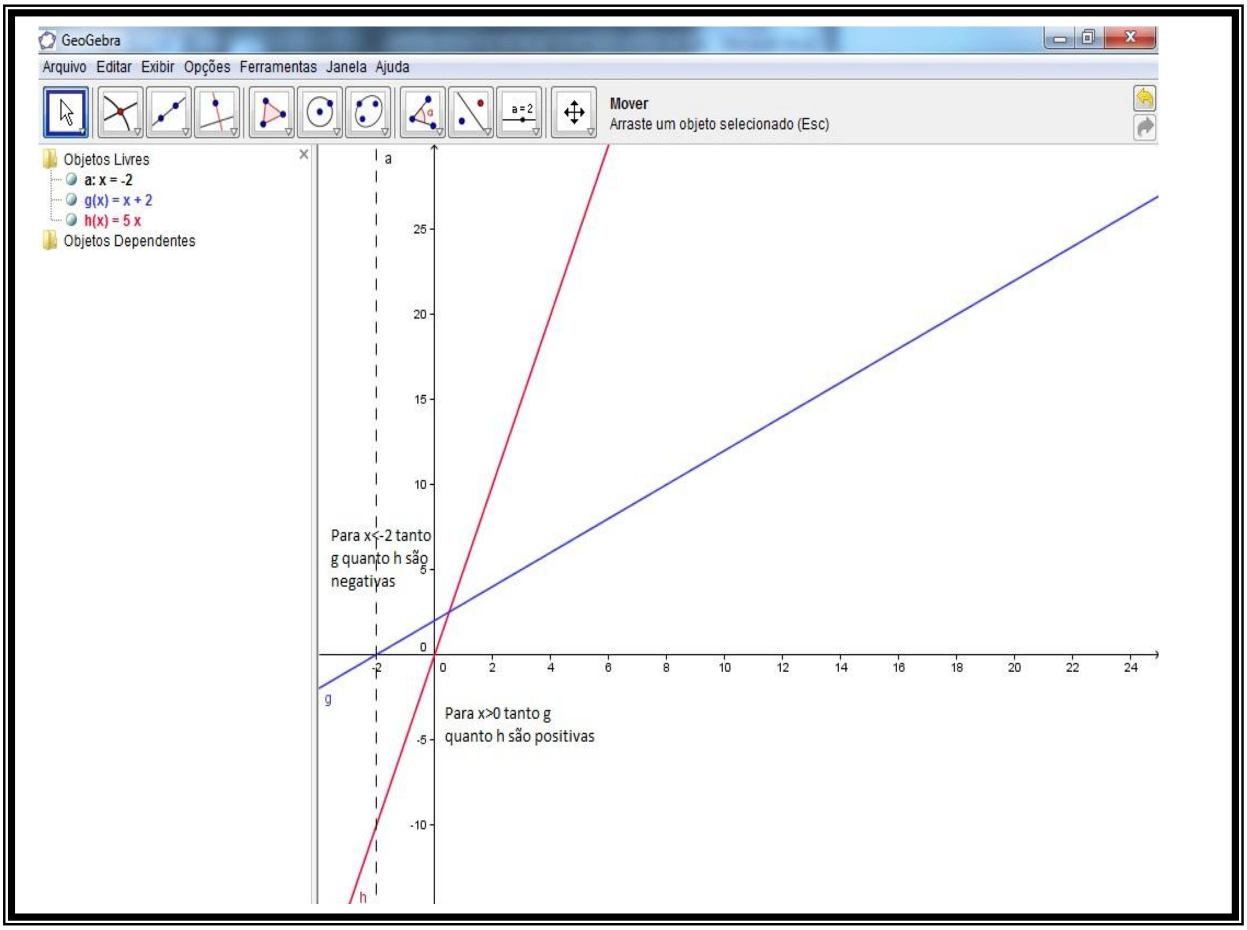


Figura 22 - Janela do GeoGebra – Gráficos da funções g, h e da reta $x = -2$
Fonte: Elaborada pelo autor

Observando o gráfico constatamos que $g(x) = 0$ para $x = -2$ e como o gráfico é uma reta e o comportamento da função *g* crescente, temos $g(x) > 0$ para $x > -2$ e $g(x) < 0$ quando $x < -2$. Fazendo a mesma análise com relação ao gráfico da função *h* chegamos à conclusão que $h(x) = 0$ para $x = 0$, $h(x) > 0$ para $x > 0$ e $h(x) < 0$ para $x < 0$. Sabendo que para termos $\frac{g(x)}{h(x)} > 0$ devemos ter *g* e *f* com sinais iguais, constatamos que a resolução da inequação é, no universo dos números reais, $x > 0$ ou $x < -2$.

Existe ainda a possibilidade de fazer o gráfico da função $\frac{g}{h}$ e a partir da observação direta da janela do *software* GeoGebra verificar a solução da inequação $\frac{g(x)}{h(x)} > 0$.

A opção por esse tipo de resolução mostra que o aluno entende o quociente $\frac{g(x)}{h(x)}$ como uma função e dessa forma a determinação do conjunto solução depende apenas da interpretação do gráfico, isto é, os valores de *x* que fazem com que a imagem de *g/h* seja positiva.

A seguir exibimos a janela do *software* Geogebra com tal situação:

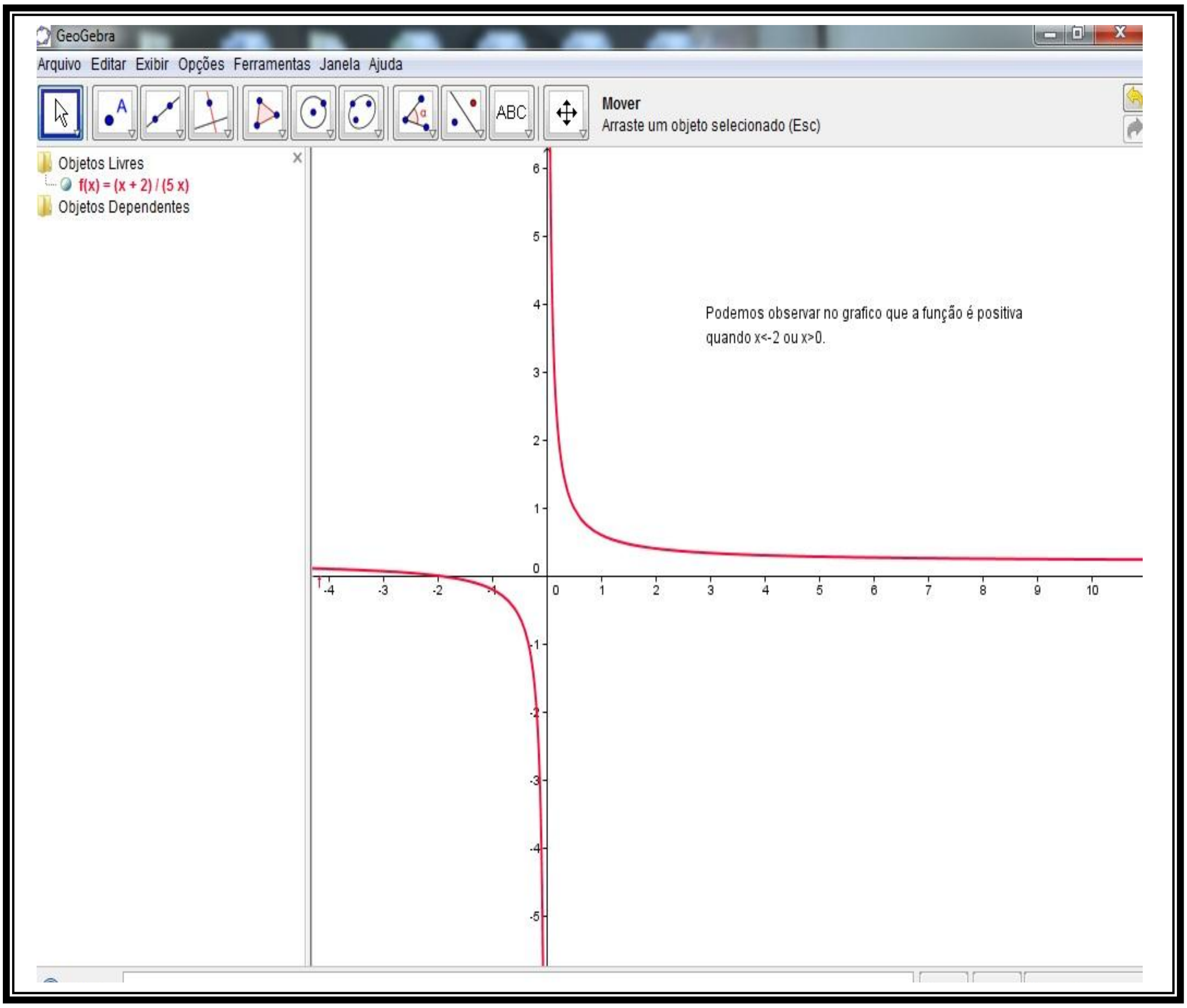


Figura 23 - Janela do GeoGebra – Gráfico da função g/h
Fonte: Elaborada pelo autor

Um aluno que optasse por uma resolução algébrica, pela nossa experiência, não optaria pela resolução dos dois sistemas citados anteriormente, provavelmente faria o estudo do sinal das funções *h* e *g* por meio de representação dos sinais das funções em retas que representam o eixo das abscissas dos gráficos, como é o habitual em sala de aula, e posteriormente fariam a divisão genérica nos intervalos delimitados pelos zeros das funções *g* e *h*, o que é muito semelhante à resolução gráfica citada anteriormente.

Esse item da atividade favorece a conversão de registros, mesmo não optando pelos gráficos, pois o estudo do sinal da função (quadro de sinais) é um registro de representação semiótica baseado no gráfico de uma função.

Atividade 2

Considere a função $f : A \to \Re$ definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 5x + 4}}$

a) Calcule $f(3{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(4)$ e $f(5)$.

b) Denomina-se domínio de uma função o **maior conjunto** de valores que podem ser atribuídos a variável independente. Relacionando a definição de domínio da função com os resultados do item *a)*, determine o domínio A da função f.

Elaboramos esta atividade baseando-se em nosso referencial teórico e em nossas análises preliminares. Espera-se que os alunos percebam durante a sua resolução a necessidade de recair em uma inequação, pois a operação de radiciação proposta só é possível, no universo dos números reais, quando o radicando for positivo ou nulo.

Na atividade 2 é solicitado ao aluno que resolva questões referentes a função $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 5x + 4}}$, sendo que o objetivo do item *a)* é uma verificação sobre os conhecimentos dos alunos referentes à radiciação de números negativos com índice da raiz par, o que não é possível no universo dos números reais, uma vez que todo numero real diferente de zero elevado a um número par resulta em um número positivo, e sobre divisões quando o denominador é zero. Caso os sujeitos tenham essa questão da radiciação e da divisão incorporada aos seus conhecimentos matemáticos, poderão perceber que na função que estamos estudando, a variável *x* não pode assumir qualquer valor do conjunto dos números reais, caracterizando assim a exclusão de alguns valores reais do domínio da função.

Embasados nos resultados do item *a)*, da leitura da definição de domínio explicitada no enunciado da questão e de seus conhecimentos prévios os alunos então devem determinar o domínio da função *f*. Tal tarefa recai em uma inequação, tema estudado nessa pesquisa.

Existe a possibilidade de resoluções gráficas ou algébricas como explicitaremos a seguir.

<u>Resolução no registro numérico do item *a)*</u>

Nesse item os alunos podem efetuar as operações com os valores de *x* dados no enunciado, utilizando-se ou não da calculadora, pois não foi vedada nessa atividade o uso dessa ferramenta. Utilizando esse recurso, calcula-se $f(3{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(4)$ e $f(5)$,

concluindo que $f(3{,}5)=\sqrt{\dfrac{3{,}5^2-9.3{,}5+18}{3{,}5^2-5.3{,}5+4}}$ =1;

$f(0)=\sqrt{\dfrac{18}{4}}\approx 2{,}12$;

Não é possível calcular $f(1)$, pois a expressão x^2-5x+4 vale zero para $x=1$.

$f(2)=\sqrt{\dfrac{4-18+18}{4-10+4}}=\sqrt{\dfrac{4}{-2}}=\sqrt{-2}$ que não é possível no universo dos números reais, pois o radicando é negativo ;

$f(-1)=\sqrt{\dfrac{1+9+18}{1+5+4}}=\sqrt{\dfrac{28}{10}}\approx 1{,}67$;

$f(-2)=\sqrt{\dfrac{4+18+18}{4+10+4}}=\sqrt{\dfrac{40}{18}}\approx 1{,}49$;

Não é possível calcular $f(4)$, pois a expressão x^2-5x+4 vale zero para $x=4$.

$f(5)=\sqrt{\dfrac{25-45+18}{25-25+4}}=\sqrt{\dfrac{-2}{4}}=\sqrt{-0{,}5}$ que também não é possível no universo dos números reais pois o radicando é negativo.

<u>Resolução gráfica do item *a)*</u>

Também é possível uma resolução gráfica da questão, construindo o gráfico de *f* e as retas $x=3{,}5$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=-1$, $x=-2$, $x=4$ e $x=5$, e por meio da observação direta dos gráficos verificar se há ou não pontos de intersecção entre o gráfico da função e as retas perpendiculares ao eixo *x*. Dessa forma o aluno pode responder o valor da função solicitado, quando existir a intersecção do gráfico com as retas, exemplificando, *f(3,5)* é a intersecção do gráfico de *f* com a reta *x=3,5*.

Vejamos a seguir esse tipo de resolução, utilizando o recurso de “intersecção de dois objetos”, ferramenta disponível no *software* Geogebra, que nos fornece as coordenadas de um ponto de intersecção de dois gráficos, quando ela existe.

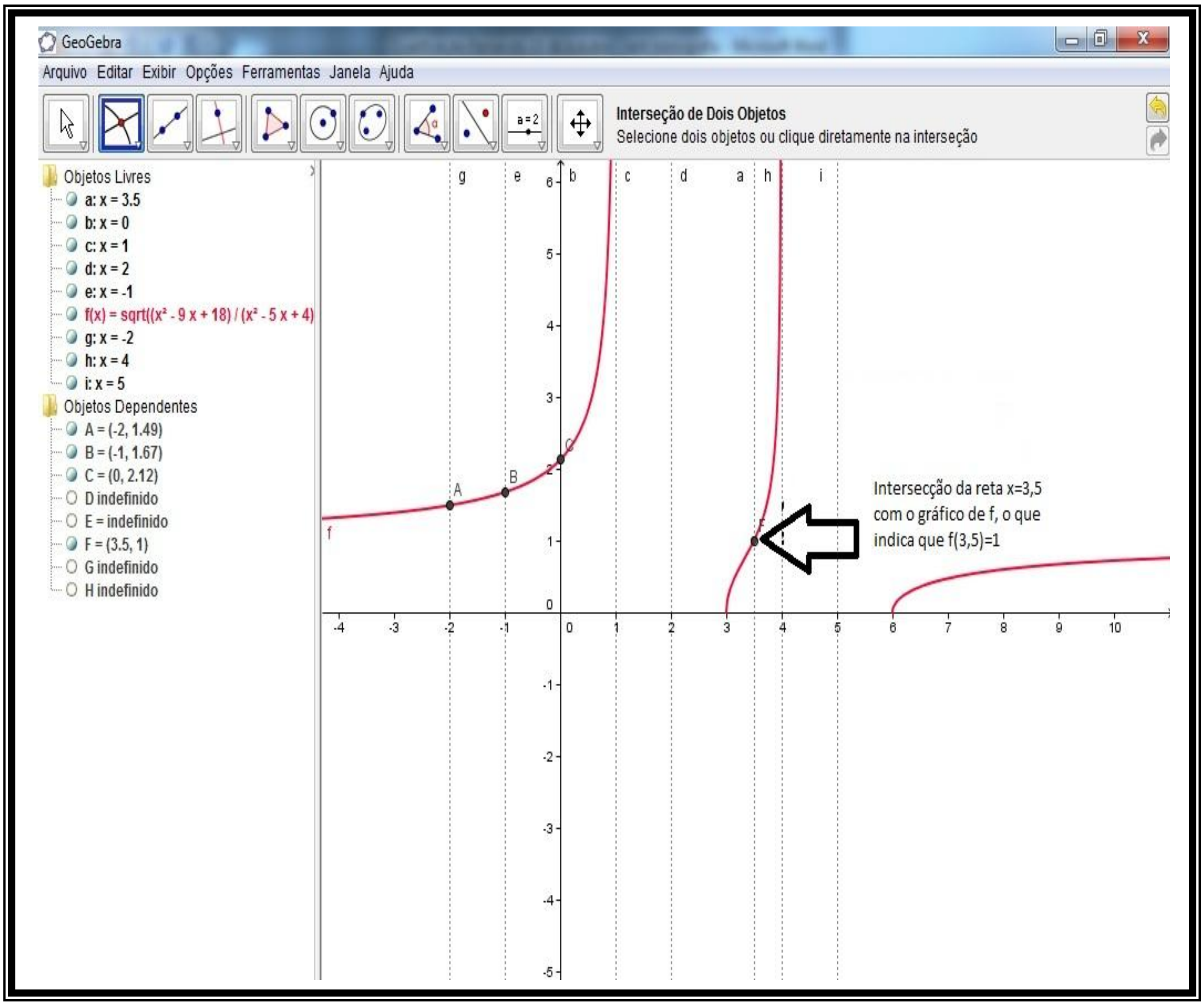


Figura 24 - Janela do GeoGebra – Resolução gráfica da Atividade 2 item a)
Fonte: Elaborada pelo autor

A curva (em vermelho) representa o gráfico da função *f*, e as linhas pontilhadas, as retas referentes aos valores de *x* dados. Quando não há intersecção entre os objetos (gráfico de *f* e alguma das retas) o *software* marca o ponto como indefinido e quando há intersecção ele mostra as coordenadas do ponto correspondente (janela de álgebra à esquerda, Figura 24). Os valores que pertencem ao domínio da função e, portanto possíveis de serem calculados estão representados pelas abscissas dos pontos A, B, C e F.

Nesse tipo de resolução ocorre a conversão de registros, do algébrico para o gráfico, e a construção de retas perpendiculares ao eixo das abscissas que não representam função. Esse tipo de resolução, embora comentada com os alunos nas oportunidades que dispusemos do *software* em sala de aula, porém fora do ambiente dessa pesquisa e em aula com todos os alunos da 1ª série do Ensino Médio, não lhes é muito familiar, em face da maior ênfase dada pelo livro e pelo professor às resoluções numéricas, visto que a construção de alguns gráficos é muito difícil para os alunos. Dessa forma é pouco provável que os alunos façam resoluções gráficas nesse item.

<u>Resolução do item *b)*</u>

Com base nos resultados do item *a)*, das informações contidas no enunciado da questão, quanto à definição de domínio de uma função real e os conhecimentos provenientes das discussões em sala de aula os alunos podem optar por três tipos de resolução, três gráficas e uma algébrica, sendo que é mais provável que utilizem a resolução gráfica aliada à algébrica no intuito de fazer o estudo do sinal[11] das funções envolvidas no quociente que compõe o radicando da função *f*.

A resolução mais provável seria a explicitada a seguir:

Devemos resolver a inequação $\frac{x^2-9x+18}{x^2-5x+4} \geq 0$, para que seja possível a operação de radiciação que a função *f* envolve, dessa forma construiríamos os gráficos das funções que representam o numerador e o denominador do quociente acima.

---

[11] Denomina-se estudo do sinal de uma função, segundo os autores do livro “Matemática: Uma nova abordagem”, de Giovanni e Bonjorno (2000), utilizado pelos alunos, o conjunto de valores de *x* que anulam uma função, o conjunto de valores de *x* que a tornam positiva e o conjunto de valores de *x* que a tornam negativa.

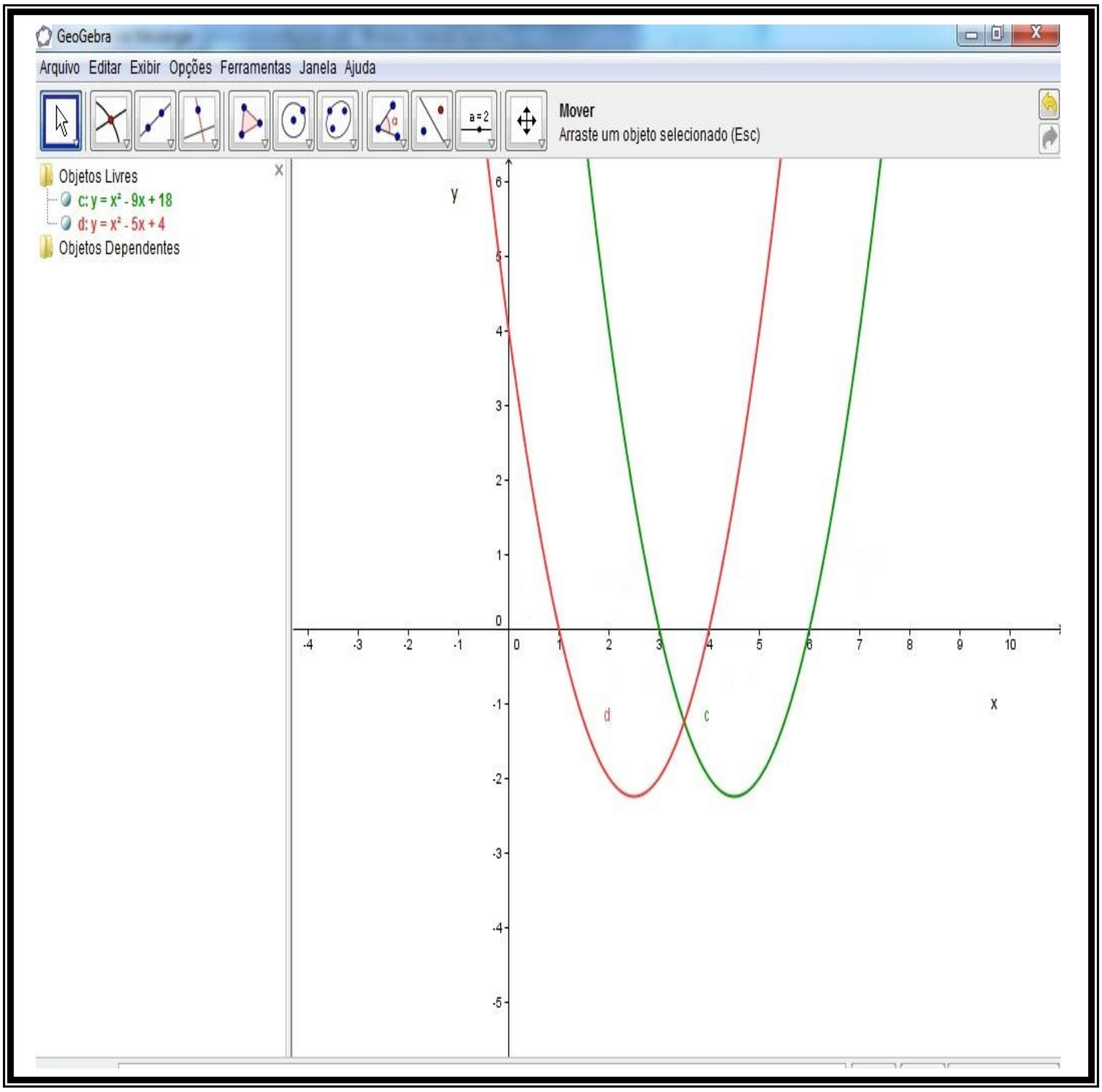


Figura 25 - Janela do GeoGebra – Gráficos das funções que representam o numerador e o denominador da inequação racional $\frac{x^2-9x+18}{x^2-5x+4} \geq 0$

Fonte: elaborada pelo autor

Pela observação dos gráficos acima e sabendo que os quocientes são positivos quando o numerador e o denominador têm o mesmo sinal, concluímos que o domínio da função é $x<1$, pois nesse intervalo numerador e denominador são positivos, $x=1$ foi excluído pois é um dos zeros da função que representa o denominador; ou $3 \leq x < 4$, já que nesse intervalo numerador e denominador são negativos, $x=4$ foi excluído pois é o outro zero da função que representa o denominador; ou $x \geq 6$, pois nesse intervalo numerador e denominador são novamente positivos e a resposta na notação de conjuntos é $A = \{x \in \Re / x < 1 \quad ou \quad 3 \leq x < 4 \quad ou \quad x \geq 6\}$.

Em sala de aula, ao resolver esse tipo de inequação, com todos os alunos e fora do ambiente dessa pesquisa, optamos por construir um quadro referente aos sinais das funções que representam o numerador, o denominador e o quociente. Investigamos os intervalos em que numerador e denominador têm o mesmo sinal e em quais intervalos tem sinais contrários. Após essa etapa registramos o sinal do quociente, pois esse depende dos sinais de numerador e denominador. Sendo assim, existe a possibilidade de os alunos coletarem informações do gráfico referente aos sinais das funções envolvidas e os registrarem como lhes é sugerido na maioria das de aulas, tanto pelo livro didático, quanto pelo professor.

Resolução de $\frac{x^2-9x+18}{x^2-5x+4} \geq 0$ utilizando o quadro de sinais:
Estudo do sinal de $y = h(x) = x^2 - 9x + 18$ e de $y = g(x) = x^2 - 5x + 4$ representados na tabela abaixo, 1ª e 3ª linha. Em seguida, na 5ª linha, o estudo do sinal do quociente obtido por meio da comparação dos sinais das funções h e g. Os números 3 e 6 são os zeros da função h enquanto que 1 e 4 são os zeros da função g.

h(x)	+		+		-		-		+
				3				6	
g(x)	+		-		-		+		+
		1				4			
h(x)/g(x)	+		-		+		-		+
		1		3		4		6	

Observando o quadro acima constatamos que a solução de $\frac{x^2-9x+18}{x^2-5x+4} \geq 0$ é $x < 1$, pois nesse intervalo numerador (função h) e denominador (função g) são positivos, sendo que para $x = 1$ o quociente é inexistente, ou $3 \leq x < 4$, pois nesse intervalo numerador e denominador são negativos, sendo que $x = 3$ anula o quociente e $x = 4$ o torna inexistente, ou $x \geq 6$, quando temos novamente numerador e denominador negativo, e $x = 6$ anula o quociente.

Figura 26 - Quadro de sinais utilizado para a resolução da inequação racional
Fonte: elaborada pelo autor

Outra possível resolução é a construção do gráfico de $y=\dfrac{x^2-9x+18}{x^2-5x+4}$ e a observação dos intervalos em que $y \geq 0$.

Para melhor interpretarmos o gráfico devemos lembrar de construirmos as retas que representam as assíntotas verticais[12] $x=1$ e $x=4$, pois esses valores anulam a função que representa o denominador da função.

Queremos ressaltar que o termo “assíntota vertical” assim como a sua definição matemática nunca fora comentado com os alunos, nem no ambiente de pesquisa, nem em aulas normais da 1ª série do Ensino Médio.

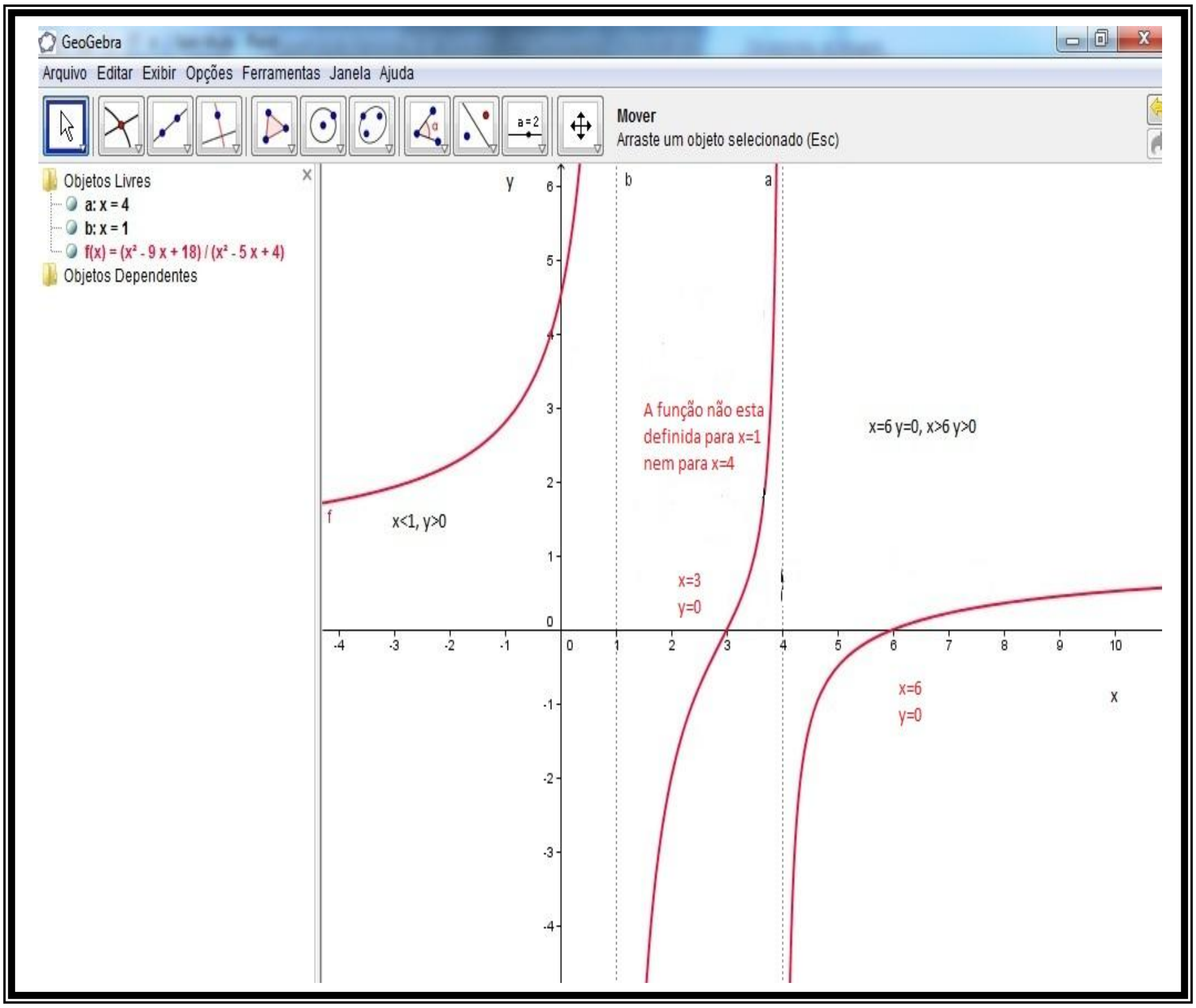


Figura 27 - Janela do GeoGebra – Gráfico da uma função racional envolvida no problema
Fonte: elaborada pelo autor

[12] Uma reta $x=a$ é chamada de assíntota vertical do gráfico de uma função f se $f(x)$ tende a $+\infty$ ou $-\infty$ quando x tende a a.

Analisando o gráfico da Figura 27, e escolhendo os intervalos em que $y \geq 0$ chegamos a resposta $A = \{x \in \Re / x < 1 \quad ou \quad 3 \leq x < 4 \quad ou \quad x \geq 6\}$ que representa o domínio da função *f*.

Uma terceira resolução gráfica é a construção do gráfico da função *f* diretamente, ou seja, o gráfico de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 5x + 4}}$, pois nessa resolução pode-se visualizar diretamente na tela do computador os intervalos em que a função está definida. Cogitamos a hipótese dessa resolução, pois os alunos sujeitos dessa pesquisa, por curiosidade, algumas vezes nos indagam como seriam os gráficos de funções não "convencionais" e como se digita "raiz quadrada" ou outros comandos pouco usuais no *software*.

A seguir exibimos o gráfico citado no parágrafo anterior:

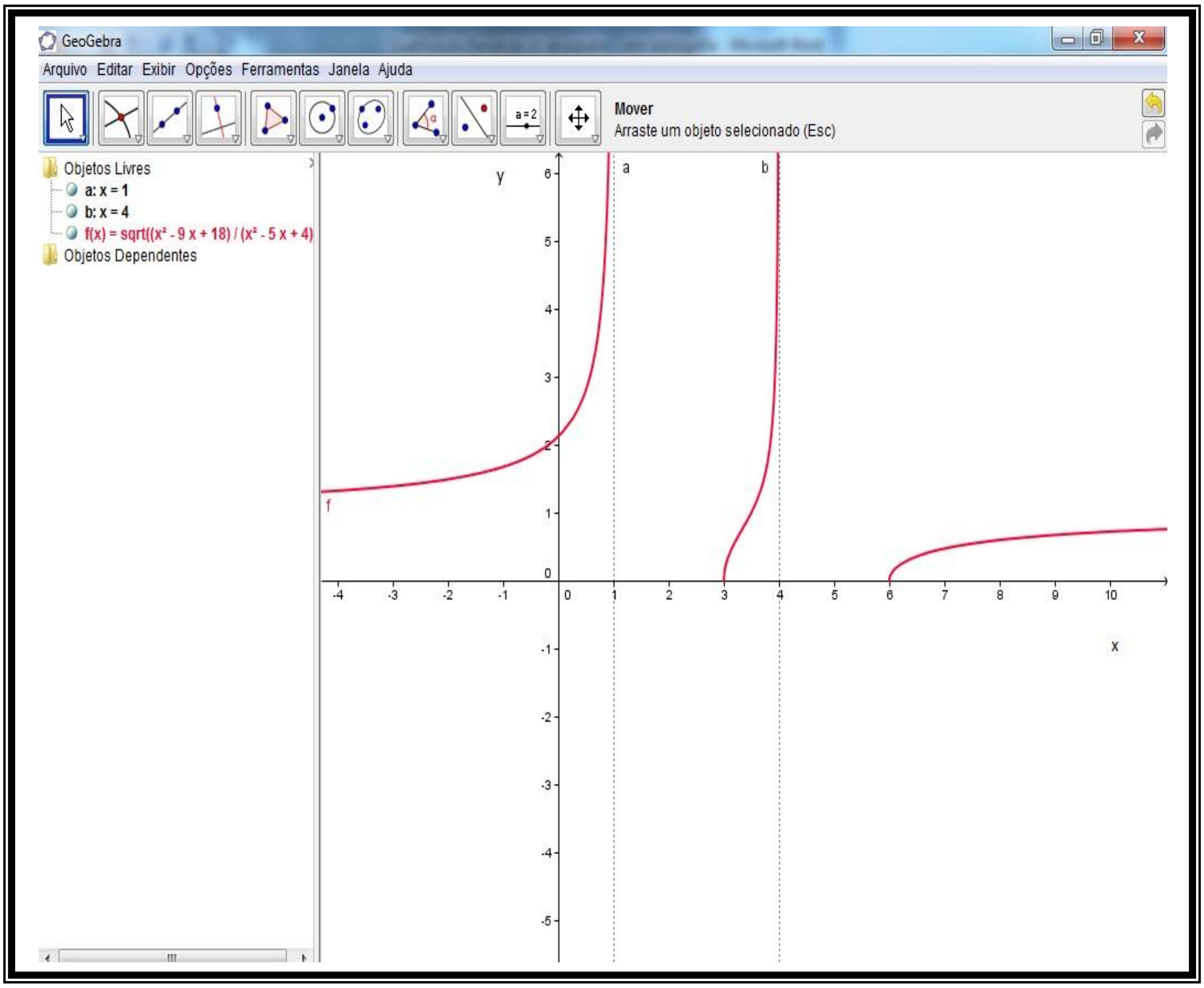


Figura 28 - Janela do GeoGebra – Gráfico da função *f* envolvida no problema.
Fonte: elaborada pelo autor

Na Figura 28 encontram-se representados os gráficos de *f* e as retas verticais representadas por $x = 1$ e $x = 4$. Analisando essa situação constatamos que o domínio da função é $A = \{x \in \Re / x < 1 \quad ou \quad 3 \leq x < 4 \quad ou \quad x \geq 6\}$.

Qualquer que seja o caminho utilizado pelos alunos, estes têm necessariamente que fazer conversões entre registros e interpretações gráficas, e dessa forma coordenar mais de um registro de representação semiótica, levando em conta que o enunciado do problema foi dado no registro da língua natural e no registro algébrico (registro de partida).

Atividade 3

Considere a função $w : \Re \to \Re$ e $z : \Re \to \Re$ definidas por $w(x) = 3^x$ e $z(x) = x^2 - 1$

a) Calcule $w(-2)$, $w(-1)$, $w(0)$, $w(1)$ e $w(2)$.

b) Determine $z(-2)$, $z(0)$ e $z(2)$.

c) Resolva a inequação $\dfrac{z(x)}{w(x)} < 0$.

Elaboramos esta atividade, com base em nosso referencial teórico e em nossas análises preliminares.

Nas leituras que fizemos referente a trabalhos que envolvem o tema inequações, encontramos a proposta de estudo das dificuldades dos alunos em resolverem inequações representadas por funções racionais, aquelas em que o numerador e o denominador são representados por funções polinomiais. Diante dessa constatação, optamos pela escolha de uma função polinomial do 2º grau e uma função exponencial, inclusive os livros didáticos que consultamos não trazem atividades que envolvam essas duas funções simultaneamente, ou seja, pelas nossas análises, quando o capítulo do livro é dedicado ao estudo da função exponencial, as inequações tratam apenas de funções com essas propriedades e o mesmo ocorre quando o capítulo é dedicado à função polinomial.

O objetivo do item *a)* é fazer com que o aluno calcule algumas das imagens da função *w* dada por $w(x) = 3^x$, o que pode ocorrer no registro numérico ou gráfico. Por meio do registro numérico talvez o aluno possa até concluir que

$3^x > 0$ para todo *x* real, por outro lado, se utilizar o registro gráfico isso pode se tornar uma certeza.

Uma das vias de resolução é a de fazer a conversão do registro algébrico para o registro numérico. Os alunos devem resolver, preferencialmente sem o auxilio da calculadora, uma vez que essas máquinas fazem uma estimativa do valor dos números 3^{-2} e 3^{-1}, pois, $3^{-2} = \frac{1}{9}$ e $\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$, e $3^{-1} = \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, e como as calculadoras tem limitações quanto ao número de casas após a vírgula o aluno pode achar que a divisão de 1 por 9 e a de 1 por 3 resulta em decimal exato, sem perceber que 3^{-2} e 3^{-1} são os inversos multiplicativos dos números 3^2 e 3^1, respectivamente. Nesse tipo de resolução obtém-se $w(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$, $w(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, $w(0) = 3^0 = 1$, $w(1) = 3^1 = 3$ e $w(2) = 3^2 = 9$.

A resolução gráfica consiste em construir o gráfico da função *w* e também as retas $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, observando os pontos de intersecção do gráfico de *w* com as retas verticais, em resolução semelhante à do item *a)* da atividade 2.

A figura seguinte exibe tal resolução:

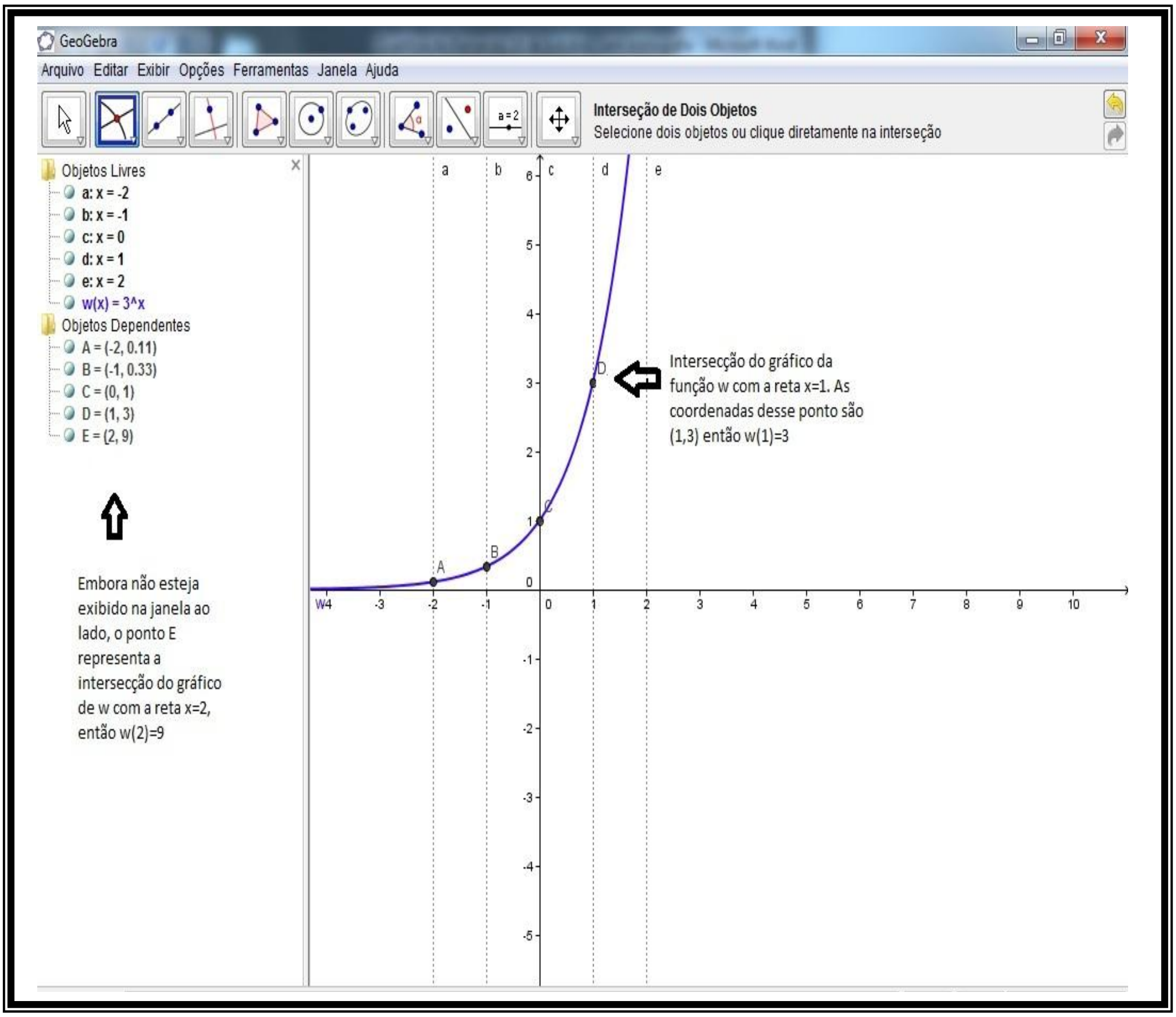


Figura 29 - Janela do GeoGebra – Resolução gráfica da Atividade 3 item a)
Fonte: elaborada pelo autor

Embora esse tipo de resolução também envolva arredondamentos como é o caso de w(-2) e w(-1), pois o *software* também tem suas limitações, ela envolve aspectos visuais importantes, como a intersecção das retas com o gráfico, além do uso das ferramentas próprias do GeoGebra, como a “Intersecção de dois objetos” para o cálculo das abscissas dos pontos de intersecção. Utilizar esse tipo de resolução mostra um amadurecimento matemático do indivíduo.

O item *b)* é semelhante ao item *a)*, exceto pela natureza da função, pois nesse caso temos a possibilidade de obter valores de x que fazem com que $z(x) = 0$, $z(x) > 0$ e $z(x) < 0$. A expressão algébrica da função também envolve a operação de potenciação, mas nesse caso a variável independente está na base e não no expoente. A resolução desse item também envolve a conversão do registro algébrico para o registro numérico, que os alunos também devem resolver com ou sem o auxilio da calculadora, obtendo $z(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$, $z(0) = 0^2 - 1 = -1$ e $z(2) = 2^2 - 1 = 3$.

É possível ainda, nesse item, uma resolução gráfica semelhante a do item a), construindo o gráfico da função z e as retas correspondentes às abscissas dadas, ou seja, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$. Escolhemos as mesmas abscissas do item *a)*, porém não acreditamos que os alunos optem por resoluções gráficas, visto que as numéricas são imediatas.

No item *c)* é solicitada a resolução de uma inequação que envolve o quociente entre uma função quadrática (como numerador) e uma função exponencial (como denominador). Essa questão difere da apresentada na atividade 1 pela natureza das funções envolvidas, pois nessa as funções componentes do quociente não são representadas apenas por polinômios. Sabe-se que um quociente é negativo quando o numerador e o denominador tem sinais opostos, um positivo e outro negativo ou vice-versa, positivo quando eles tem o mesmo sinal, ambos positivos ou ambos negativos, e é nulo quando o numerador é nulo com o denominador diferente de zero e é inexistente quando o denominador é igual a zero.

É provável que os sujeitos envolvidos nessa pesquisa recorram a uma resolução gráfica com o intuito de observar o sinal da função para diferentes intervalos do domínio das funções que representam o numerador e o denominador do quociente, fazer o estudo do sinal e dar a resposta no registro algébrico.

A figura seguinte exibe os gráficos envolvidos nessa resolução:

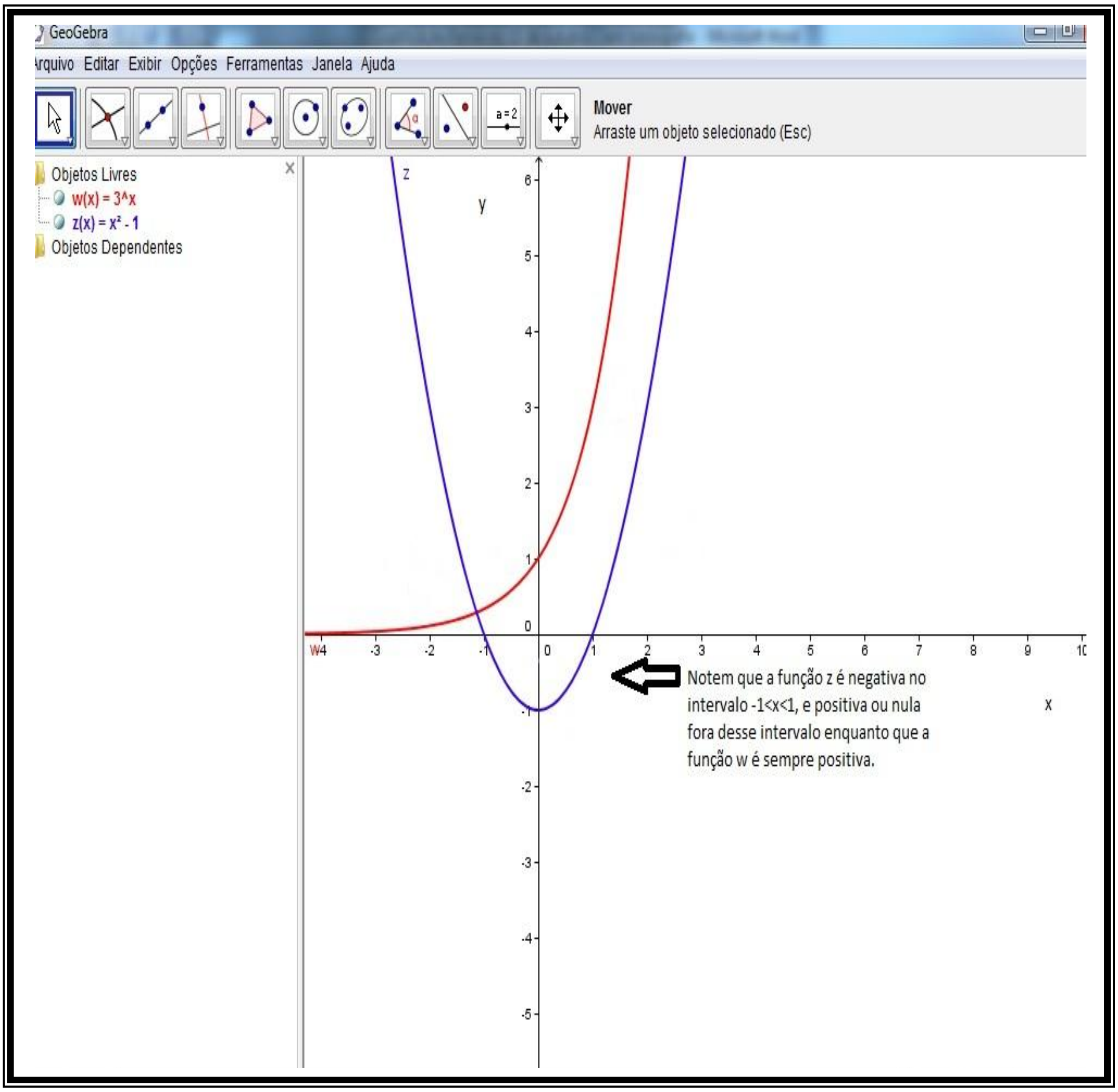


Figura 30 - Janela do GeoGebra – Gráficos das funções *w* e *z*

Pela análise da Figura 30 acima percebemos que a função z, representada pelo gráfico em cor azul (parábola), é negativa no intervalo $-1 < x < 1$, zero para $x = -1$ ou $x = 1$ e positiva no restante do seu domínio, que é o conjunto dos números reais; a função w , representada pelo gráfico em vermelho (curva que representa graficamente a função exponencial) é positiva para qualquer valor de x, dessa forma teremos o quociente negativo (menor que zero) apenas no intervalo $-1 < x < 1$, pois é o único em que z é negativa, já que w é sempre positiva.

Outra possível solução, ainda gráfica, é considerar o quociente como uma única função, ou seja, construir diretamente o gráfico da função $\frac{z}{w}$, com o auxilio do *software* GeoGebra, alternativa algumas vezes sugerida pelos alunos em situações semelhantes em nossas aulas, com todos os alunos e fora do ambiente dessa pesquisa, porém com quocientes que envolviam apenas funções polinomiais. Nesse tipo de resolução deve-se observar se existe um intervalo em que a função é negativa.

Na janela abaixo exibimos essa possível resolução:

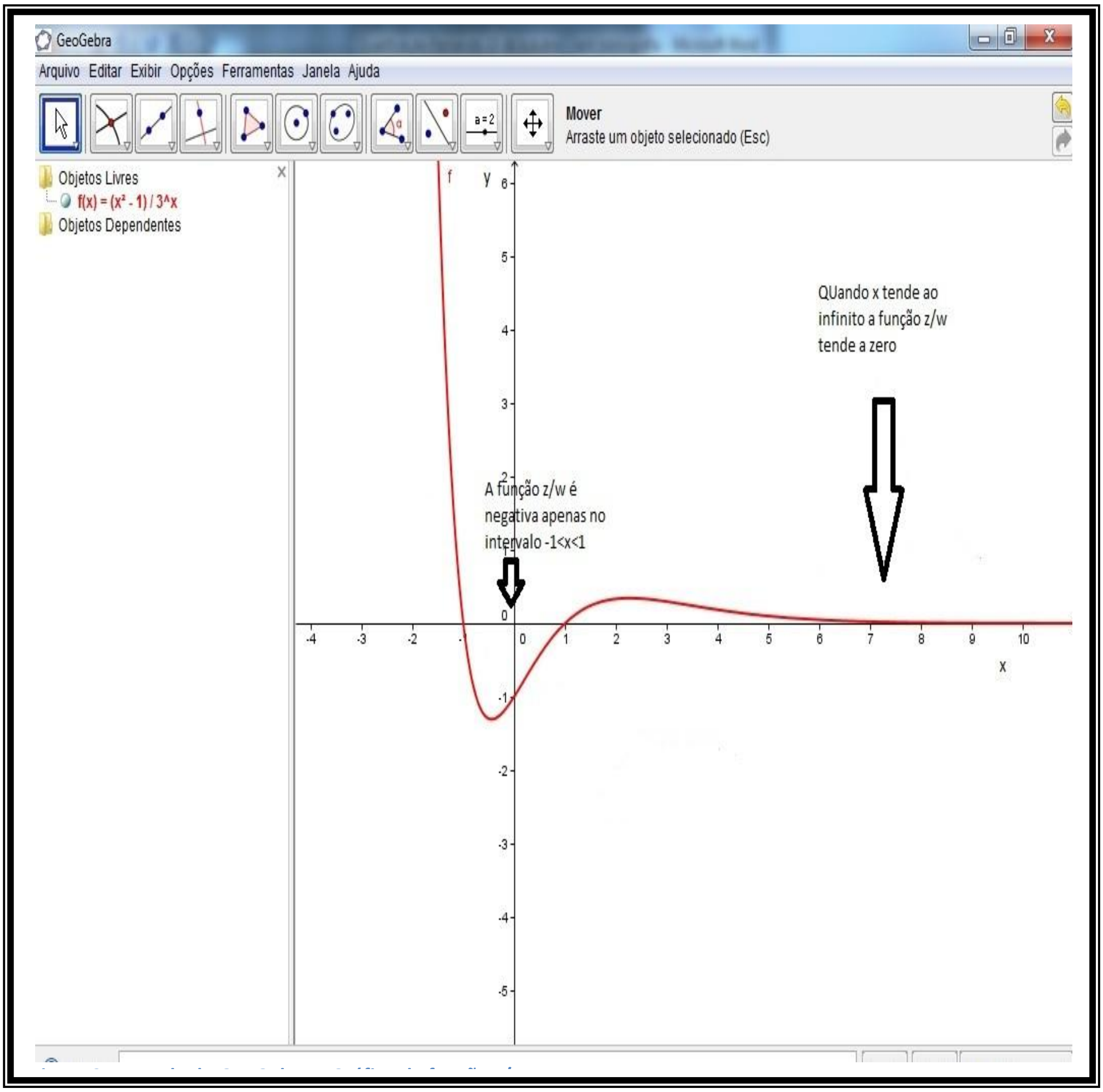


Figura 31 - Janela do GeoGebra – Gráfico da função $\frac{z}{w}$
Fonte: elaborada pelo autor

Por observação direta, constatamos que a função é negativa (menor que zero) no intervalo $-1 < x < 1$, resposta equivalente à primeira solução.

Vale ressaltar que embora essa segunda resolução pareça mais simples, ela não é tão freqüente em livros didáticos, pela dificuldade da construção do gráfico. Já com o auxilio do *software* GeoGebra tal tarefa é facilitada.

Qualquer que seja a opção dos alunos, essa questão viabiliza o uso de mais de um registro de representação semiótica e a conversão entre registros.

Atividade 4

João possui um terreno de $1000\,m^2$, no qual pretende construir uma casa. Ao engenheiro responsável pela planta, ele impõe as seguintes condições: a área destinada a lazer (piscina, churrasqueira, etc.) deve ter $200m^2$, e a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% da área total do terreno; além disso, o custo para construir a casa deverá ser de, no máximo, R$ 200.000,00. Sabendo que o metro quadrado construído nessa região custa R$ 500,00, qual é a área interna da casa que o engenheiro poderá projetar?

Esta atividade foi extraída do livro “Matemática Uma nova abordagem”, v.1 de Giovanni e Bonjorno (2000, p.180), coleção utilizada pelos sujeitos participantes de nossa pesquisa.

Trata-se de um problema pertencente ao capítulo funções polinomiais no subitem intitulado Sistemas de Inequações do 1º grau, porém não consta nas atividades propostas aos alunos e sim na seção de “exercícios resolvidos” a qual o professor pode utilizar ou não como modelo em suas aulas.

É o único exercício com essas características em todo o capítulo. Ele exige de forma direta a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico e, se o aluno achar “econômico” cognitivamente, pode-se efetuar a conversão ainda para o registro gráfico.

Encontramos um trecho na pesquisa de Traldi (2002) sobre a teoria de Duval que reflete a situação explicitada acima referente ao livro didático:

> [...] Fundamentamos nossa hipótese em nossa prática docente e também nas considerações que Duval faz de que as representações mais complexas são as que tem como ponto de partida o enunciado em língua natural ou textos e que as atividades de conversão são pouco consideradas no processo ensino-aprendizagem e, portanto, ocasionam dificuldade para os alunos. (p. 5)

Uma possível resolução dessa atividade consiste em fazer a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, chegando ao seguinte sistema: $\begin{cases} x + 200 > 500 \\ 500x \leq 200.000 \end{cases}$ sendo x a medida, em metros quadrados, da área interna casa.

Após essa conversão os alunos devem encontrar os valores de x que satisfaçam as duas inequações, componentes do sistema, simultaneamente. Tarefa que já foi realizada na atividade 1, porém essa conversão não era necessária, pois o sistema de inequações já estava no registro algébrico.

Pode-se optar por uma resolução algébrica que seria: identificando com (i) a primeira inequação ($x + 200 > 500$) subtraímos 200 dos dois membros dela e obtemos como resposta para (i) $x > 300$; identificando como (ii) a segunda inequação, dividimos os dois membros dela por 500, que como é positivo não troca o sentido da desigualdade, e obtemos $x \leq 400$ como resposta para (ii). Fazendo a intersecção entre os intervalos que correspondem as soluções de (i) e (ii) concluímos que $300 < x \leq 400$, dessa forma a área interna da casa a ser projetada deve ter entre $300\ m^2$ e $400\ m^2$(inclusive).

Como temos a disposição o *software* GeoGebra é possível também a resposta por meio da análise dos gráficos representativos das funções envolvidas no sistema de inequações, porém essa alternativa requer conhecimento sobre a mudança de escala na janela do programa, visto que temos a escala em unidades (de um em um), com valores máximos nos eixos *x* e *y* muito inferiores aos solicitados no problema, ou seja o aluno deve alterar as configurações do programa, aspecto que não foi trabalhado pelo professor pesquisador em nenhuma das oportunidades. Esse fato pode ser um obstáculo para uso do *software,* embora esse tipo de configuração seja intuitiva caso os alunos tenham a noção, mesmo que em outros programas, de alterar configurações.

A seguir exibimos tal situação:

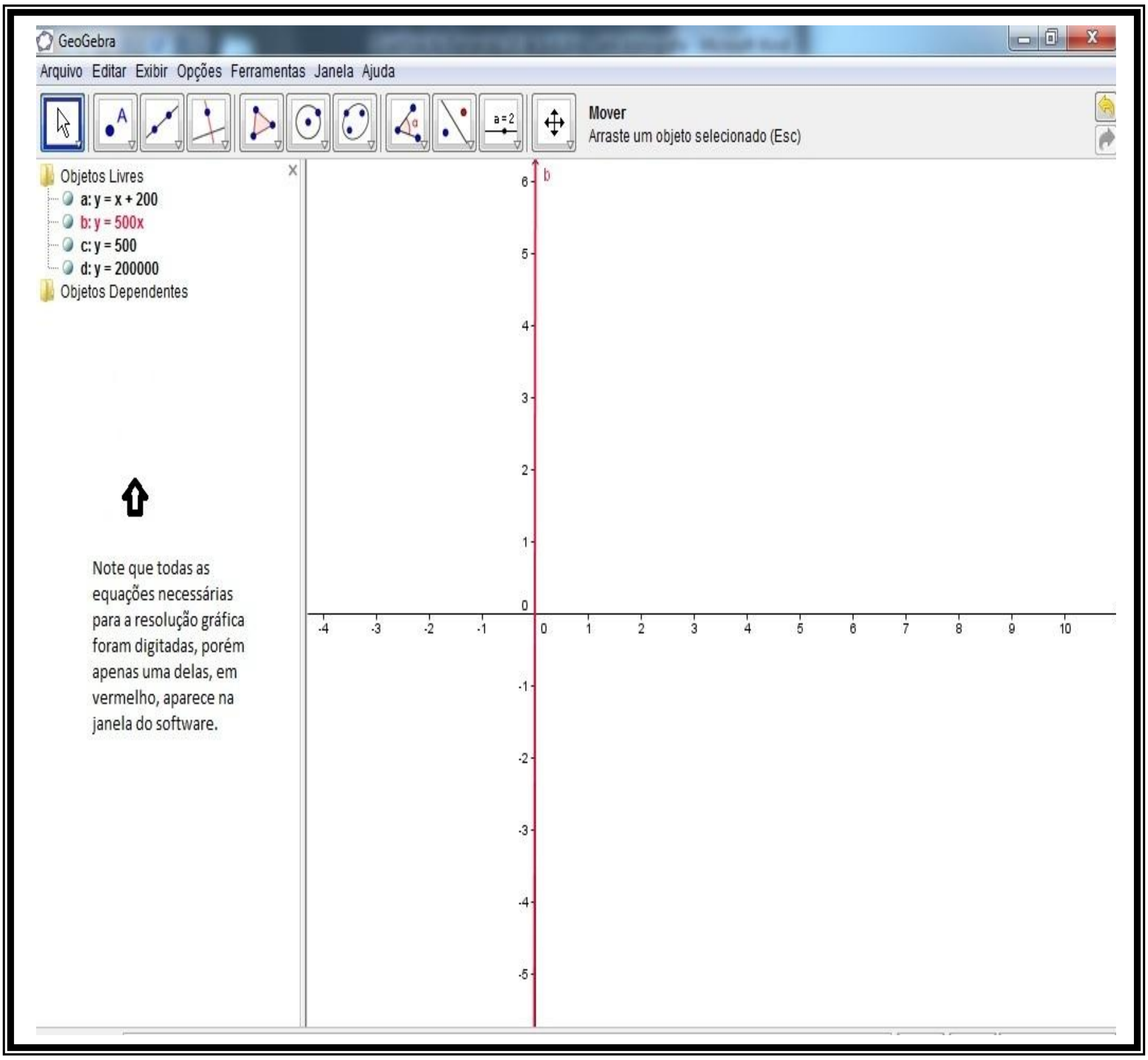


Figura 32 - Janela do GeoGebra – Visualização dos gráficos necessários para resolver a atividade 4, porém sem alterar as configurações de visualização do programa.
Fonte: elaborada pelo autor

Agora com as alterações feitas no menu “opções”, “janela de visualização”. A Figura 33 ilustra a situação:

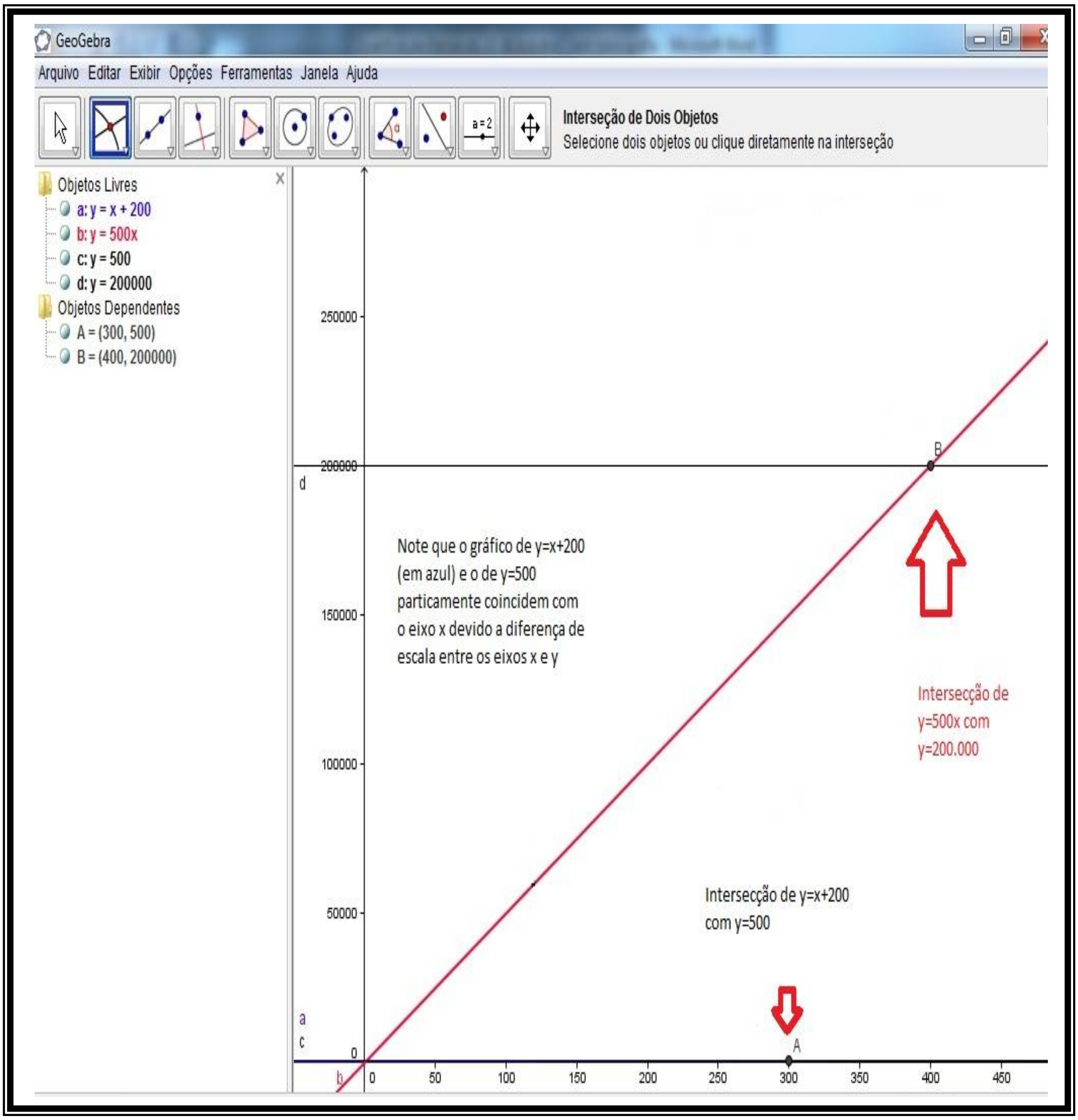


Figura 33 - Janela do GeoGebra –Gráficos das funções dadas por $y = 500x$ e $y = x + 200$
Fonte: elaborada pelo autor

Mesmo após as mudanças na escala fica difícil visualizar os dois gráficos, porém na janela de álgebra, à esquerda do gráfico temos as coordenadas dos pontos de intersecção entre as retas $y = x + 200$ com $y = 500$ (ponto A) e $y = 500x$ com $y = 200000$ (ponto B), o que nos permite responder que a medida da área interna da casa deve estar entre as abscissas desses pontos, ou seja, entre 300 e 400 metros quadrados (inclusive) ($300 < x \leq 400$).

Atividade 5

No plano cartesiano abaixo estão representados os gráficos das funções f e g. Determine:

a) O domínio das funções f e g.

b) Os valores de x para os quais temos $g(x) > f(x)$.

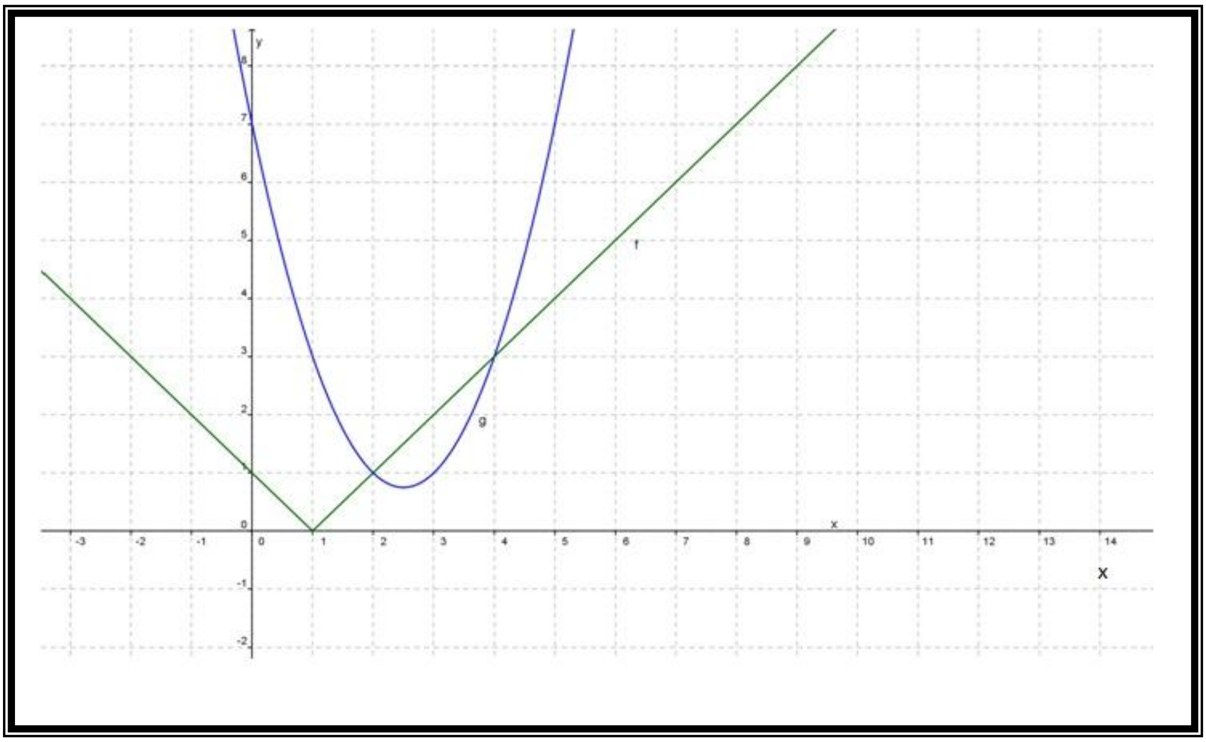


Figura 34 – Gráficos da Atividade 5 elaborados no *software* GeoGebra
Fonte: elaborada pelo autor

Elaboramos esta atividade com base em nosso referencial teórico e em nossas análises preliminares e tem como objetivo verificar como os alunos se comportam na resolução de uma atividade cujo registro de partida não é algébrico e nem o da língua natural, ou seja, o que esperávamos como conversão de registros nas atividades anteriores, não é necessário. Pretende-se também analisar se ficou esclarecida, para os alunos, a definição de domínio de uma função, explicitado na atividade 2, em outras palavras, queremos verificar se a abordagem gráfica favorece esse aspecto do estudo de funções.

Uma preocupação nesse tipo de atividade é que, diferentemente do gráfico executado na tela do computador que é dinâmico (podemos movimentá-lo), esse é estático e um aluno mais desatento, ou que não tenha entendido as notações matemáticas, ou o conjunto dos números reais, pode imaginar que os valores

$x = -3$ e $x = 14$ sejam limitadores, ou seja, que as funções não estão definidas para além desses valores ($x < -3$ e $x > 14$).

Para resolução do item *a)*, os alunos devem apenas observar o gráfico e, caso tenham entendido a definição de domínio de uma função, concluir que os valores pertencentes ao domínio estão no eixo das abscissas, dessa forma em ambas as funções o domínio é o conjunto dos números reais.

No item *b)* a pergunta é feita no registro algébrico, mas a resolução pode ser gráfica e feita a partir da observação do gráfico, em que se deve concluir que $g(x) > f(x)$ para $x < 2$ ou $x > 4$

Explicitamos na Figura 34 o raciocínio utilizado para chegar a tal conclusão.

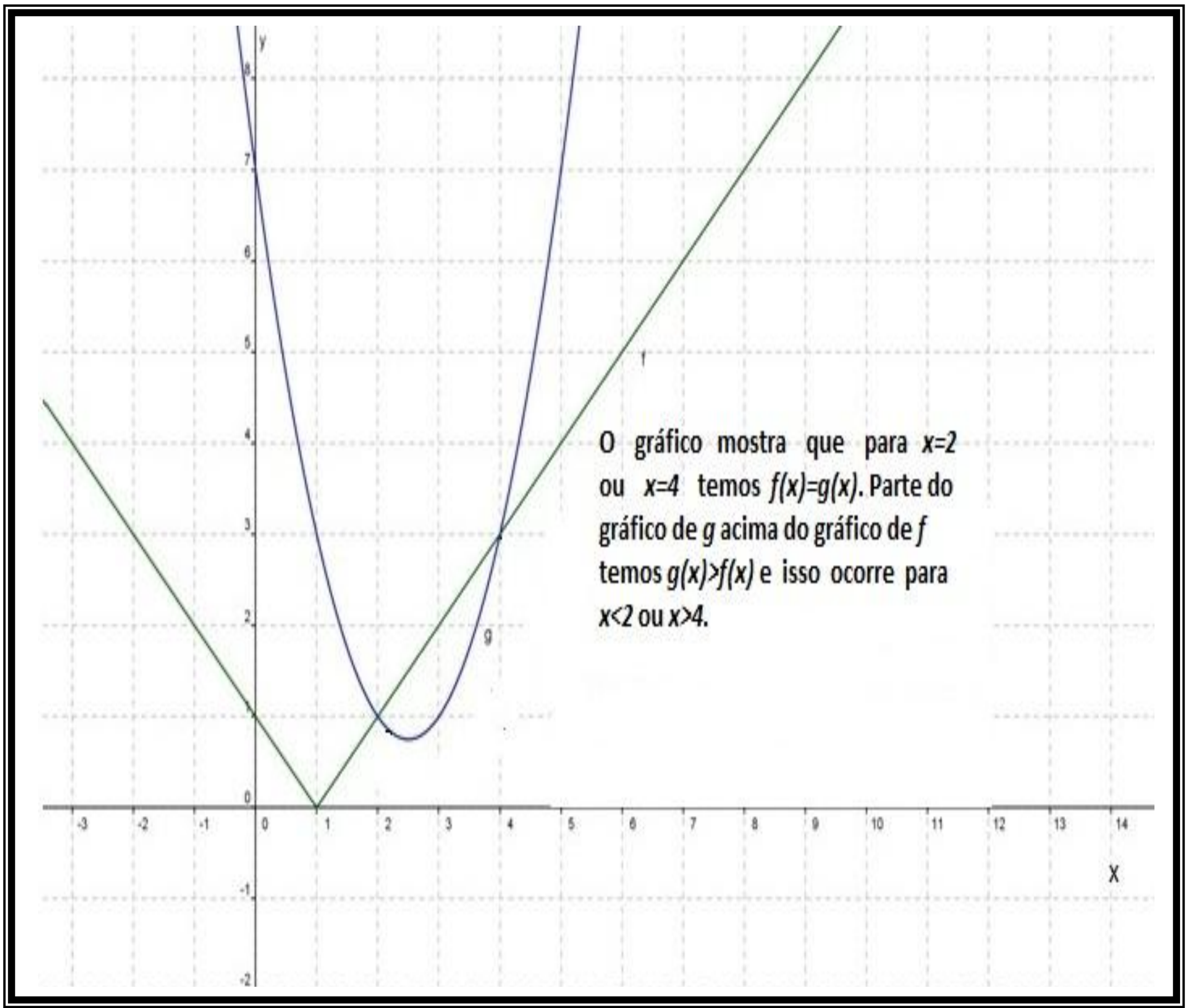


Figura 35 - Ilustração da resolução gráfica da inequação $g(x) > f(x)$
Fonte: elaborada pelo autor

CAPITULO 5 – Aplicação do instrumento diagnóstico e análise dos resultados

5.1 Procedimentos de pesquisa

Nossa pesquisa foi realizada no primeiro semestre de 2010 em uma Escola particular localizada no bairro da Liberdade em São Paulo – SP.

Trata-se de uma instituição que atualmente conta com 79 anos de atuação que atende principalmente alunos oriundos da classe média da região onde ela se encontra.

A escola conta com diversos laboratórios, biblioteca, quadras poliesportivas, restaurante, lanchonete, enfim, recursos materiais requeridos por seus professores com o intuito de oferecer a seus alunos melhores condições para a aprendizagem das diversas disciplinas que eles estudam. Mantém cursos desde o ensino infantil até o ensino médio, sendo que no ano de 2010 possui seis salas desse último nível, sendo duas 1as séries, duas 2as séries e duas 3as séries.

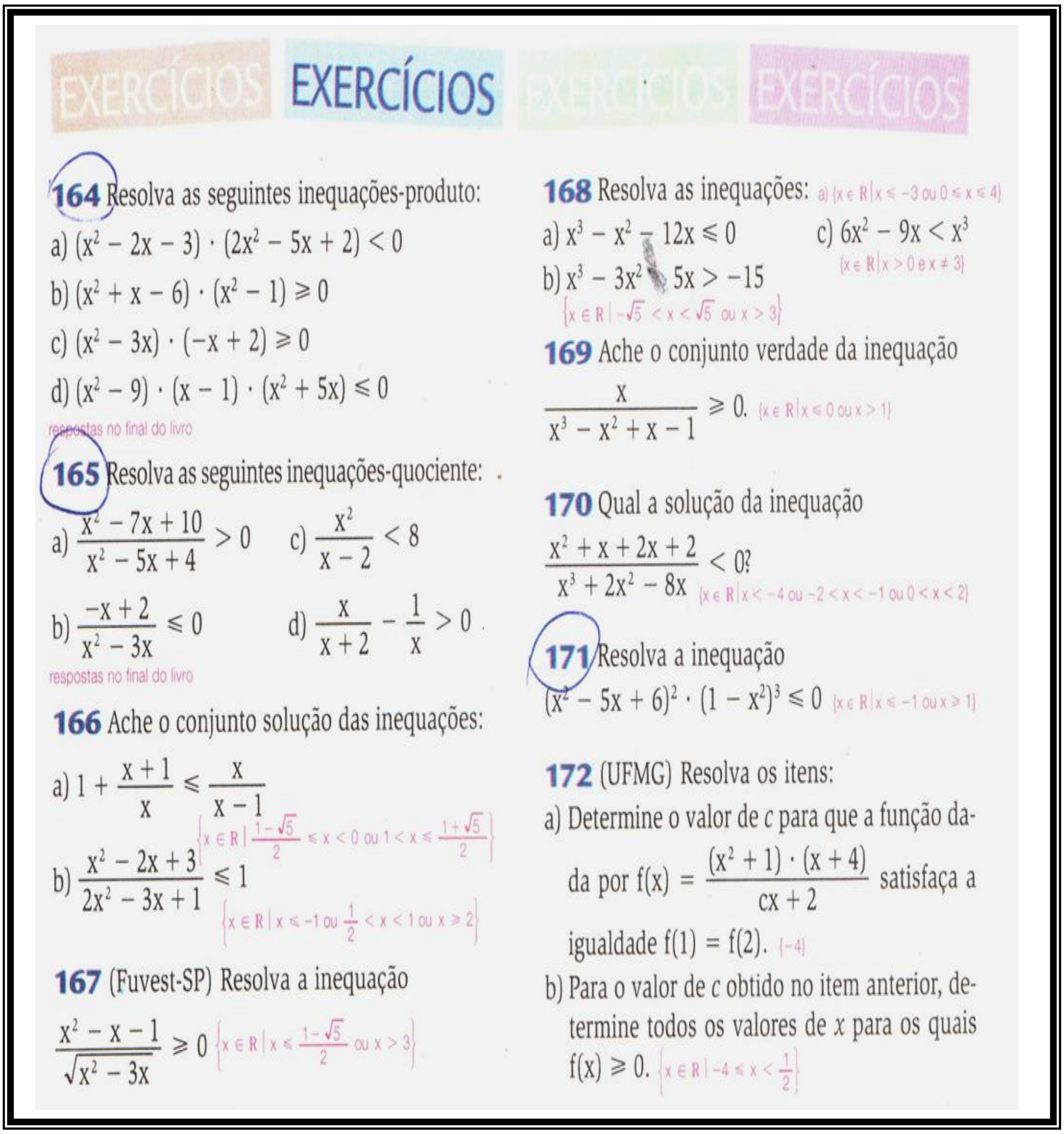
A maioria dos alunos do ensino médio estudou na escola boa parte do ensino fundamental, senão todo, e são conhecedores da filosofia da escola que não prioriza apenas a aquisição de conteúdos científicos, mas também a formação humana.

A escolha dessa instituição deve-se ao fato de o pesquisador ser professor dela, conhecendo-a bem, e ter contato com todos os alunos do ensino médio, além da autorização da Direção da escola para realizarmos a pesquisa.

Os alunos participantes da pesquisa pertencem a 2ª série do ensino médio e a escolha desses se deve ao fato de que, em relação ao tema que estamos pesquisando, eram eles que já o tinham o estudado na série anterior.

No segundo semestre de 2009, quando esses alunos estavam na 1ª série do Ensino Médio, realizamos cinco encontros, no laboratório de informática e fora do horário de aula, para termos contato com o *software Geogebra* e discutirmos a possibilidade de resolução dos problemas que havíamos proposto em horário de aula normal utilizando essa ferramenta.

Os problemas, constantes no livro de Giovanni e Bonjorno (2000), tratavam de inequações dadas na forma fatorada, com o segundo membro nulo ou não, ou na forma racional, com o segundo membro nulo ou não, cuja resolução, sugerida pelos autores do livro era feita por meio de um quadro de sinais, quando o segundo membro era nulo, ou realizados tratamentos, quando o segundo membro não era nulo, a fim de torná-lo nulo e proceder pelo mesmo método.



EXERCÍCIOS EXERCÍCIOS EXERCÍCIOS EXERCÍCIOS

164 Resolva as seguintes inequações-produto:

a) $(x^2 - 2x - 3) \cdot (2x^2 - 5x + 2) < 0$

b) $(x^2 + x - 6) \cdot (x^2 - 1) \geqslant 0$

c) $(x^2 - 3x) \cdot (-x + 2) \geqslant 0$

d) $(x^2 - 9) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 5x) \leqslant 0$

respostas no final do livro

165 Resolva as seguintes inequações-quociente:

a) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 4} > 0$　　c) $\dfrac{x^2}{x - 2} < 8$

b) $\dfrac{-x + 2}{x^2 - 3x} \leqslant 0$　　d) $\dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{1}{x} > 0$

respostas no final do livro

166 Ache o conjunto solução das inequações:

a) $1 + \dfrac{x + 1}{x} \leqslant \dfrac{x}{x - 1}$　$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leqslant x < 0 \text{ ou } 1 < x \leqslant \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

b) $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 3x + 1} \leqslant 1$　$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } \frac{1}{2} < x < 1 \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

167 (Fuvest-SP) Resolva a inequação

$\dfrac{x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - 3x}} \geqslant 0$　$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$

168 Resolva as inequações:

a) $x^3 - x^2 - 12x \leqslant 0$　$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant 4\}$

b) $x^3 - 3x^2 - 5x > -15$　$\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \text{ ou } x > 3\}$

c) $6x^2 - 9x < x^3$　$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 3\}$

169 Ache o conjunto verdade da inequação

$\dfrac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} \geqslant 0.$　$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$

170 Qual a solução da inequação

$\dfrac{x^2 + x + 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} < 0?$　$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } -2 < x < -1 \text{ ou } 0 < x < 2\}$

171 Resolva a inequação

$(x^2 - 5x + 6)^2 \cdot (1 - x^2)^3 \leqslant 0$　$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$

172 (UFMG) Resolva os itens:

a) Determine o valor de *c* para que a função dada por $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1) \cdot (x + 4)}{cx + 2}$ satisfaça a igualdade $f(1) = f(2)$. (-4)

b) Para o valor de *c* obtido no item anterior, determine todos os valores de *x* para os quais $f(x) \geqslant 0$. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x < \frac{1}{2}\right\}$

Figura 36 – Problemas que foram discutidos com os alunos (grifados).

Fonte: “Matemática: Uma nova abordagem” v. 1 (Giovanni e Bonjorno, 2000, p. 221)

O grupo contava com 20 alunos, que participaram de forma voluntária, interessados na realização dessa atividade, visando aprender mais sobre a resolução de inequações por meio da resolução gráfica com o auxilio de um *software*, visto que esse é um tópico que gera muitas dúvidas.

Além disso, em aula com todos os alunos, quando diante da resolução de inequações ou outro problema que envolvesse a comparação entre funções, faz parte da prática do professor, em algumas aulas, após a resolução algébrica com ou sem auxilio de um quadro de sinais, mostrar como é a resolução gráfica, projetando a janela do *software* GeoGebra em tela própria (quadro branco fornecido pela Instituição) e discutindo com os alunos a respeito dos gráficos envolvidos na atividade.

Quando usamos o *software* para construção de gráficos, precisamos pensar em cada expressão presente na inequação como uma função e esse é um dos motivos que tornam essa abordagem funcional, por exemplo, na resolução de $x^2 - 5x + 9 > 2x^2 - 3x$, podemos considerar que estamos resolvendo $f(x) > g(x)$ e dessa forma construímos e analisamos na janela do *software* os gráficos de *f* e de *g.* Ou ainda podemos efetuar os tratamentos algébricos necessários para tornar um dos membros da inequação igual a zero, nesse caso chegamos a $-x^2 - 2x + 9 > 0$ ou ainda $x^2 + 2x - 9 < 0$, para posteriormente construir o gráfico referente a apenas um dos membros da inequação estudada, observando na janela do *software* os valores de *x* que a tornam positiva ou negativa conforme o tratamento efetuado, nesse caso consideramos que um dos membro da inequação é a função nula.

A diferença das atividades desenvolvidas com os alunos, fora do horário de aula e com todos os alunos em aulas normais é a possibilidade de manipulação do *software* pelo próprio aluno, visto que com os 20 participantes das aulas extras mencionadas acima, usávamos o laboratório de informática com um aluno por computador e consequentemente eles construíam os gráficos que achavam convenientes para cada resolução, enquanto que na sala de aula o computador era operado apenas pelo professor que projetava a imagem na lousa, a partir das sugestões dos alunos, para posterior discussão.

Diante desse panomarama elaboramos um instrumento diagnóstico inspirados na Teoria de Duval (2003) com o objetivo de responder a seguinte questão:

Em que medida o ensino de inequações via uma abordagem funcional gráfica que envolva o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica, pode, ou não, favorecer o entendimento por parte dos alunos do assunto em questão? Quais as dificuldades encontradas? Quais os avanços percebidos com relação à coordenação desses registros?

Tal instrumento foi submetido à análise dos membros de nosso grupo de pesquisa que, em conjunto com nossa orientadora Dra. Barbara Lutaif Bianchini, deram suas contribuições para a clareza das atividades que estávamos propondo. Todas as sugestões foram levadas em conta, algumas foram incorporadas, e aplicamos o instrumento apenas quando o grupo a considerou adequada.

No primeiro semestre de 2010, quando os alunos estavam na 2ª série do ensino médio, foram convidados a resolver as atividades elaboradas para a nossa pesquisa. O instrumento, composto de 5 atividades, para ser resolvido individualmente, foi aplicado a quatro alunos, em duas oportunidades, em encontros com duração de duas horas, em um intervalo de 7 dias.

No primeiro encontro os sujeitos tinham a sua disposição o computador equipado com o *software Geogebra* e poderiam resolver as atividades utilizando ou não esse recurso. Os alunos receberam cinco folhas cada uma com uma questão, nas quais responderiam à caneta suas soluções Foram orientados a escrever o que pensaram em cada etapa de suas resoluções, e caso errassem e quisessem refazer alguma etapa, deveriam passar apenas um traço sobre o que não deveria ser considerado, de forma que puséssemos saber qual foi o possível erro cometido. Tal recurso também foi utilizado na pesquisa de Fontalva (2006).

No primeiro encontro dois dos alunos fizeram apenas uma pergunta referente ao enunciado da questão 4, dado no registro da língua natural, questionando se a casa, que deveria ter um custo máximo de R$ 200.000,00 incluía a área de lazer (vide enunciado da questão na página 100). Como consideramos procedente a pergunta feita pelos alunos, esclarecemos que esse custo era apenas da área interna.

O segundo encontro contou com 5 alunos, Moisés, Manoel, Pedro, Paulo e um quinto aluno, porém em nossas análises consideraremos apenas quatro, pois esse quinto aluno faltou a primeira sessão e dessa forma prejudicaria nossas análises. Nessa sessão os alunos deveriam resolver as mesmas atividades da semana anterior sem a possibilidade do uso do *software*, porém caso achassem necessário, poderiam usar a calculadora. O motivo dessa decisão se deve ao fato de mensurarmos o quanto o uso do da tecnologia poderia nos favorecer em nossa abordagem.

Consideramos que proporcionamos um ambiente de estudo adequado para nossos sujeitos de pesquisa, com as máquinas (computadores) funcionando perfeitamente, em uma sala silenciosa, na qual o papel do professor pesquisador foi apenas de acompanhar os alunos, caso houvesse alguma dúvida no enunciado, e fiscalizar para que não ocorresse a comunicação entre eles, prejudicando assim todo o processo. Nas duas sessões iniciamos as atividades às 16 horas e o último aluno entregou sua atividade às 17h55min no primeiro encontro e às 17h20min no segundo encontro.

5.2 Análise a *posteriori*

Nesse capítulo apresentamos as análises dos protocolos dos alunos com o objetivo de confrontar com nossa análise a *priori* e validar nossas hipóteses referentes às soluções por eles apresentadas, assim como as possíveis dificuldades.

Organizamos essas análises em dois momentos que são:

- Sessão 1: Trata-se da análise dos protocolos dos alunos referentes à resolução das atividades com o auxilio do *software* GeoGebra.
- Sessão 2: Trata-se da análise dos protocolos dos alunos referentes à resolução das mesmas atividades, porém sem o auxilio do *software* GeoGebra. Excluímos a atividade 5 dessa segunda análise, pois, além de ela já conter os gráficos na folha de respostas para serem interpretados, nenhum aluno utilizou o *software* para resolvê-la na primeira sessão, e o objetivo dessa segunda análise é inferir o quanto a tecnologia influenciou nas resoluções feitas pelos alunos.

Em cada análise optamos por apresentar novamente a atividade, descrever se houve dúvidas com relação ao enunciado e analisar os protocolos dos alunos. Após cada análise exibimos o respectivo protocolo do aluno.

Os alunos foram identificados com os nomes fictícios, Manoel, Moisés, Pedro e Paulo. A seguir analisamos todos os protocolos produzidos em nossos dois encontros.

5.2.1 Sessão 1

5.2.1.1 Análise *a posteriori* da Atividade 1

Durante a aplicação dessa atividade nenhum aluno fez perguntas referentes ao enunciado da questão nem a respeito de como construir o gráfico das funções envolvidas utilizando o *software* GeoGebra.

Vamos retomar a questão proposta:

<u>Atividade 1</u>

Considere as funções $g:\Re \to \Re$ e $h:\Re \to \Re$ definidas por $g(x) = x + 2$ e $h(x) = 5x$.

a) Resolva a equação $g(x) = h(x)$.

b) Determine todos os valores reais de x tais que $g(x) > 0$.

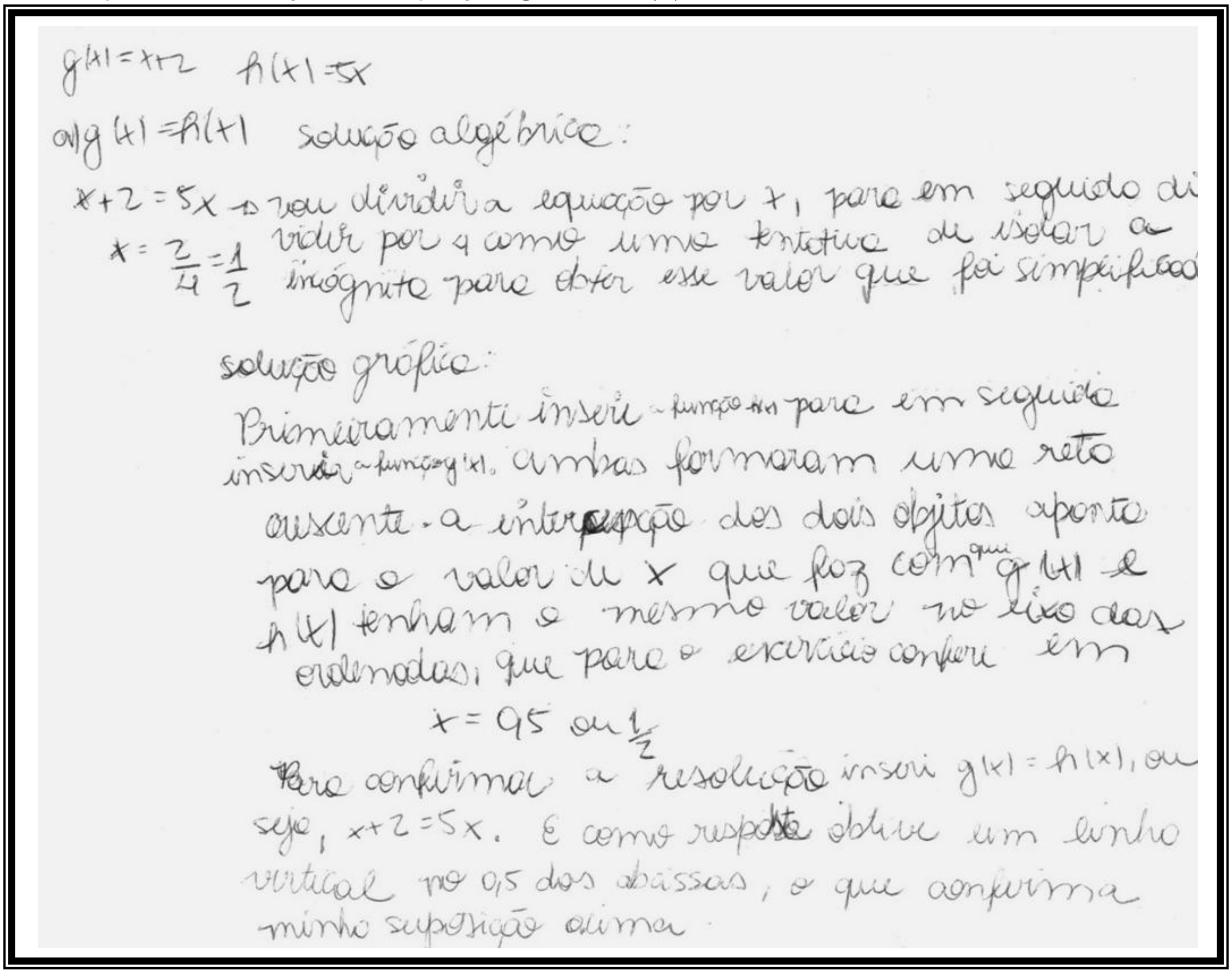
c) Determine todos os valores reais de x tais que $h(x) < 0$.

d) Resolva o sistema de inequações $\begin{cases} h(x) < 2 \\ g(x) > 20 \end{cases}$

e) Agora resolva a inequação $\dfrac{g(x)}{h(x)} > 0$.

Manoel optou por apresentar dois tipos de resolução nessa atividade, a algébrica e a gráfica. Na resolução algébrica do item *a)* determinou a solução correta da equação $g(x) = h(x)$, porém ao descrever os procedimentos algébricos que havia realizado na equação, cometeu alguns equívocos. Achamos que o aluno subtraiu *x* dos dois membros da equação com a intenção de isolar a incógnita, nesse caso passaria de $x + 2 = 5x$ para $5x - x = x - x + 2$, porém escreveu em seu texto (Figura 37) “vou dividir a equação por x”. Em seguida descreveu o procedimento correto que é dividir os dois membros da equação por 4, chegando à solução da equação $x = \frac{1}{2}$.

Quanto à resolução gráfica desse item, optou pelo registro em língua natural. Indicando que efetuou a conversão do registro algébrico para o registro gráfico com o auxilio do *software*. Pelos seus registros ela esboçou o gráfico das funções *f* e *g* e encontrou o ponto de intersecção desses gráficos, que corresponde à solução da equação $g(x) = h(x)$.


$g(x) = x+2$ $h(x) = 5x$

a) $g(x) = h(x)$ solução algébrica:

$x+2 = 5x$ → vou dividir a equação por x, para em seguida dividir por 4 como uma tentativa de isolar a incógnita para obter esse valor que foi simplificado

$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

solução gráfica:

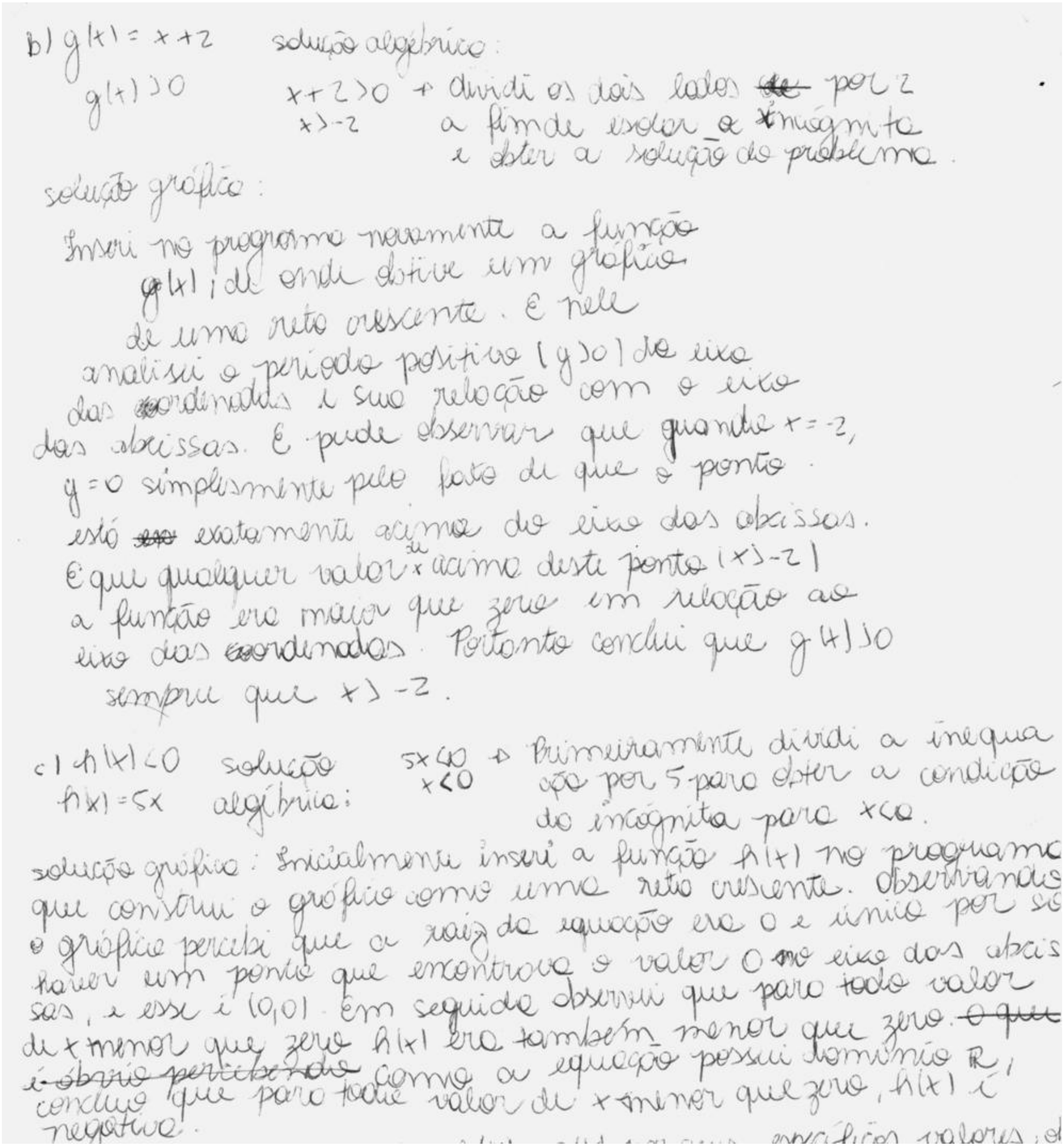
Primeiramente inseri a função h(x) para em seguida inserir a função g(x). ambas formaram uma reta crescente. a intersecção dos dois objetos aponta para o valor de x que faz com que g(x) e h(x) tenham o mesmo valor no eixo das ordenadas, que para o exercício conferi em

$x = 0,5$ ou $\frac{1}{2}$

Para confirmar a resolução inseri $g(x) = h(x)$, ou seja, $x+2=5x$. E como resposta obtive uma linha vertical no 0,5 das abscissas, o que confirma minha suposição acima.

Figura 37 - Protocolo de Manoel - atividade 1; item a)

Nos itens *b)* e *c)*, em sua resolução algébrica, cometeu os mesmos equívocos do item *a)*, ou seja, confundiu-se mais uma vez em descrever os procedimentos algébricos por ele utilizados, porém produziu as respostas esperadas. Acreditamos que na resolução de $x + 2 > 0$, o aluno subtraiu 2 dos dois membros da inequação, chegando a $x + 2 - 2 > 0 - 2$ e dessa forma concluindo que $x > -2$. Porém, escreveu “vou dividir os dois lados da inequação por 2 a fim de isolar a incógnita e obter a solução do problema”, o que não corresponde ao registro algébrico por ele efetuado.


b) $g(x) = x+2$ solução algébrica:
$g(x) > 0$
$x+2>0 \rightarrow$ dividi os dois lados ~~de~~ por 2
$x>-2$ a fim de isolar a incógnita
e obter a solução do problema.

solução gráfica:
Inseri no programa novamente a função
g(x); de onde obtive um gráfico
de uma reta crescente. E nele
analisei o período positivo (y>0) do eixo
das ordenadas e sua relação com o eixo
das abscissas. E pude observar que quando x = -2,
y = 0 simplesmente pelo fato de que o ponto
está ~~em~~ exatamente acima do eixo das abscissas.
E que qualquer valor de x acima deste ponto (x>-2)
a função era maior que zero em relação ao
eixo das ordenadas. Portanto conclui que g(x)>0
sempre que x>-2.

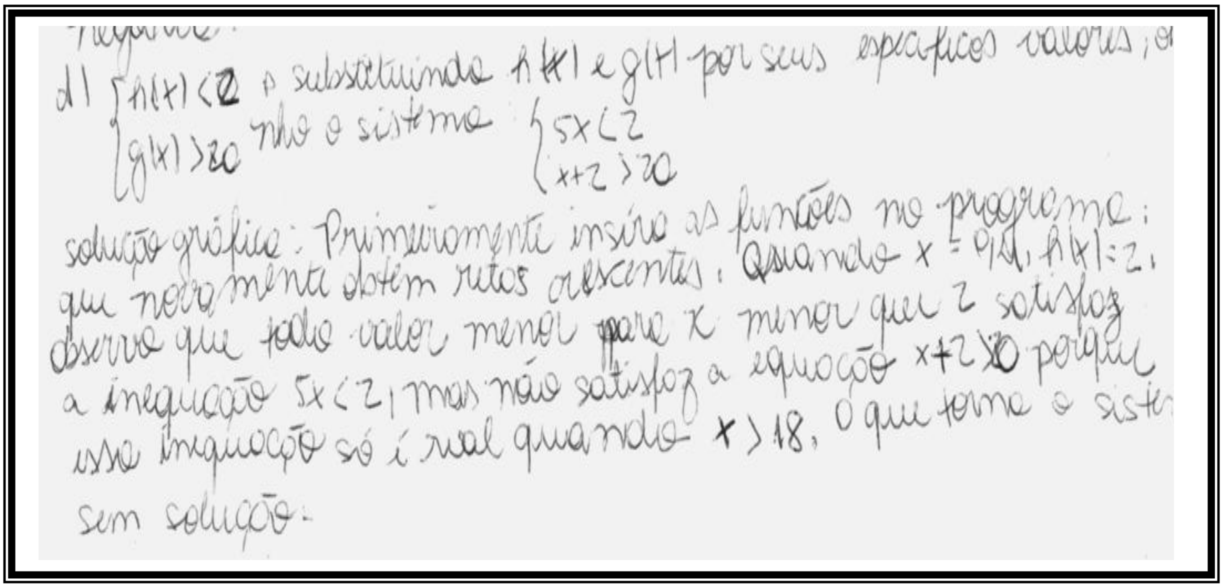
c) $h(x)<0$ solução algébrica:
$h(x)=5x$
$5x<0 \rightarrow$ Primeiramente dividi a inequa
$x<0$ ção por 5 para obter a condição
da incógnita para x<0.

solução gráfica: Inicialmente inseri a função h(x) no programa
que construiu o gráfico como uma reta crescente. Observando
o gráfico percebi que a raiz da equação era 0 e único por só
haver um ponto que encontrava o valor 0 ~~no~~ eixo das abscis
sas, e esse é (0,0). Em seguida observei que para todo valor
de x menor que zero h(x) era também menor que zero. ~~o que~~
~~é óbvio percebendo~~ Como a equação possui domínio $\mathbb{R}$,
concluo que para todo valor de x menor que zero, h(x) é
negativo.

Figura 38 - Protocolo de Manoel – atividade 1; itens b) e c)

Manoel também produziu uma resolução gráfica para esses itens, utilizando-se do *software* para realizar a conversão, descrevendo a relação existente entre os valores do eixo das abscissas (valores do domínio da função) com os valores do eixo das ordenadas (valores da imagem da função). Menciona em sua resolução o termo raiz da equação, que interpretou como a solução da equação $g(x) = 0$ no item *b)* e $h(x) = 0$ no item *c)*, utilizando-se dos pontos cuja abscissa é a raiz dessas equações, como referência para responder esses itens, como ele mesmo descreve no item *b)*, "qualquer valor acima desse ponto $(x > -2)$ a função era maior que zero em relação ao eixo das ordenadas".

O item *d)*, o qual considerávamos em nossa análise *a priori*, que a resolução gráfica poderia ser um obstáculo para o aluno, não foi confirmada na análise do protocolo de Manoel, uma vez que o aluno efetuou a conversão do registro algébrico para o gráfico, com o auxilio do *software*, e percebeu que o sistema de inequações que propomos não tem solução. Descreveu seus procedimentos por meio do registro da língua natural de uma forma clara, cometendo apenas o equívoco referente à inequação $x + 2 > 20$, o qual cita que ela é "real quando $x > 18$", quando na verdade $x > 18$ é seu conjunto solução, ou seja, os valores que fazem com que $g(x)$ seja maior que 20. Provavelmente Manoel tenha utilizado essa terminologia realmente para descrever o conjunto solução da inequação e não se referindo ao conjunto dos números reais.

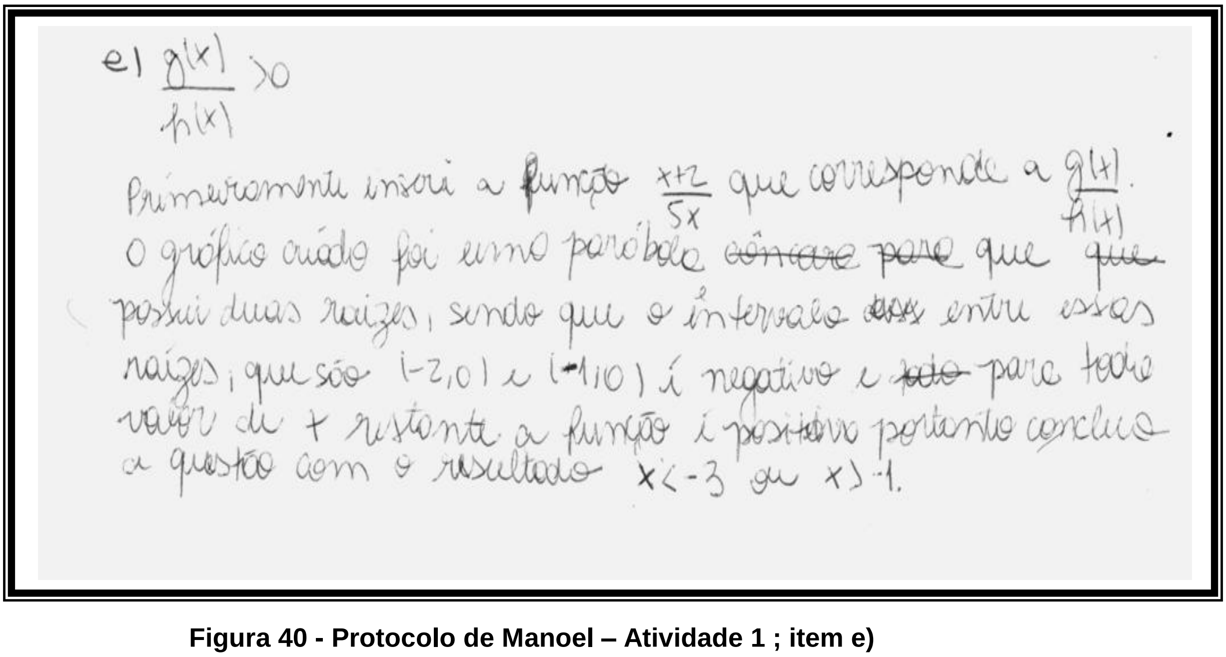

d) $\begin{cases} h(x) < 2 \\ g(x) > 20 \end{cases}$ → substituindo h(x) e g(x) por seus específicos valores, ob-
tenho o sistema $\begin{cases} 5x < 2 \\ x+2 > 20 \end{cases}$

solução gráfica: Primeiramente insiro as funções no programa: que novamente obtém retas crescentes. Quando x = 0,4, h(x) = 2. Observo que todo valor menor para x menor que 2 satisfaz a inequação 5x < 2, mas não satisfaz a equação x+2 > 20 porque essa inequação só é real quando x > 18, o que torna o sistema sem solução.

Figura 39 - Protocolo de Manoel – Atividade 1; item d)

Na explicação dada por Manoel referente ao item e), percebemos que ele adotou um procedimento correto de resolução que é o de construir o gráfico por meio do *software* e analisá-lo quanto à variação do sinal, relacionando os valores do domínio da função com os da imagem da função da função, conforme o fez nos itens anteriores. Contudo, algum erro de digitação foi cometido, pois o gráfico de $y = \frac{x+2}{5x}$, não é uma parábola, o que evidencia que esse sujeito não conseguiu relacionar a forma algébrica de uma função cujo gráfico é uma parábola, ou considera que todas as curvas são parábolas, excetuando-se aqueles gráficos que são retas. Além disso, em sua explicação menciona que esse gráfico intercepta o eixo das abscissas nos pontos (-2,0) e (-1,0), fato que não poderia ocorrer, pois o único zero da função $y = \frac{x+2}{5x}$ é $x = -2$.

Efetuando testes para descobrir por que Manoel menciona que o gráfico é uma parábola, digitamos no campo entrada do GeoGebra a equação de diferentes maneiras. Digitando $y = (x+2)/5x$, o software construiu o gráfico de $y = \frac{(x+2)}{5}.x$ que é uma parábola com concavidade voltada para cima, interceptando o eixo das abscissas em (-2,0) e (0,0). Digitando $y = x + 2/5x$ o *software* construir o gráfico de $y = x + \frac{2}{5}x$ que tem pontos alinhados obedecendo à equação y=1,4x, que intercepta o eixo das abscissas na origem. Consideramos que nessa questão, como o aluno não registrou o gráfico em sua folha de respostas, que ele não soube interpretar o gráfico, caso tenha inserido as informações corretamente ou não soube inserir as informações no *software* para obter a resposta correta. Como mencionado no inicio, acreditamos que o aluno poderia obter sucesso na resolução, pelas suas explicações, porém não conseguiu efetuar a mudança de registro satisfatoriamente.


e) $\frac{g(x)}{h(x)} > 0$

Primeiramente inseri a função $\frac{x+2}{5x}$ que corresponde a $\frac{g(x)}{h(x)}$.
O gráfico criado foi uma parábola ~~côncava~~ ~~para~~ que ~~que~~ possui duas raízes, sendo que o intervalo ~~dos~~ entre essas raízes, que são (-2,0) e (-1,0) é negativo e ~~todo~~ para todo valor de x restante a função é positivo portanto concluo a questão com o resultado x<-3 ou x>-1.

Figura 40 - Protocolo de Manoel – Atividade 1 ; item e)

Solicitamos a todos os alunos que escrevessem o que pensaram em cada passagem da resolução e dessa forma eles teriam que fazer algo que não é tão rotineiro em suas aulas de Matemática. Acreditamos que Manoel pode conhecer os tratamentos no registro algébrico necessários para a resolução desse tipo de inequação, porém de forma mecânica, como algo que sempre o fez, e dessa forma, sem refletir a respeito do problema, não conseguiu descrever corretamente o porquê de tais tratamentos, o que pode ter ocasionado tais confusões quando tentou justificar seus procedimentos.

Já nas resoluções gráficas percebemos que o aluno se justifica de forma mais clara, o que nos leva a crer que a coordenação entre os registros algébrico e gráfico lhe proporciona um melhor entendimento sobre a resolução de equações e inequações.

Moisés optou por registrar todos os gráficos utilizados na resolução da atividade 1, e também explicar sua resolução conforme pedido feito no cabeçalho de cada questão.

No item *a)* resolveu corretamente a questão por meio do registro gráfico e formalizou sua resposta utilizando-se do registro da língua natural.

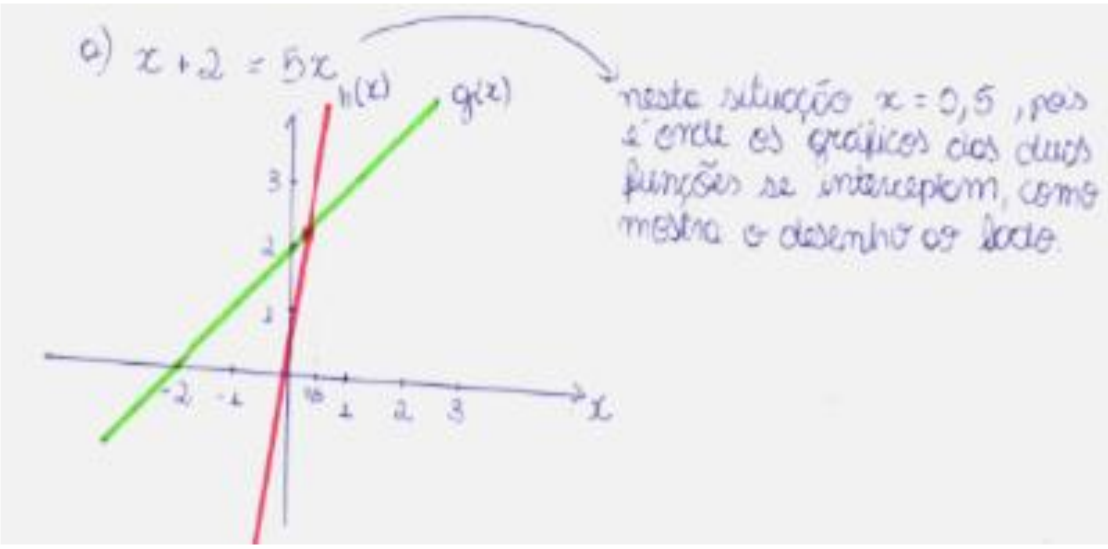


Figura 41 - Protocolo de Moisés – Atividade 1; item a)

Procedeu também corretamente nos itens *b)* e *c)*, efetuando a conversão para o registro gráfico e escrevendo a resposta por meio do registro da língua natural e do algébrico, explicitando os intervalos que correspondem a solução das inequações por meio desses dois registros.

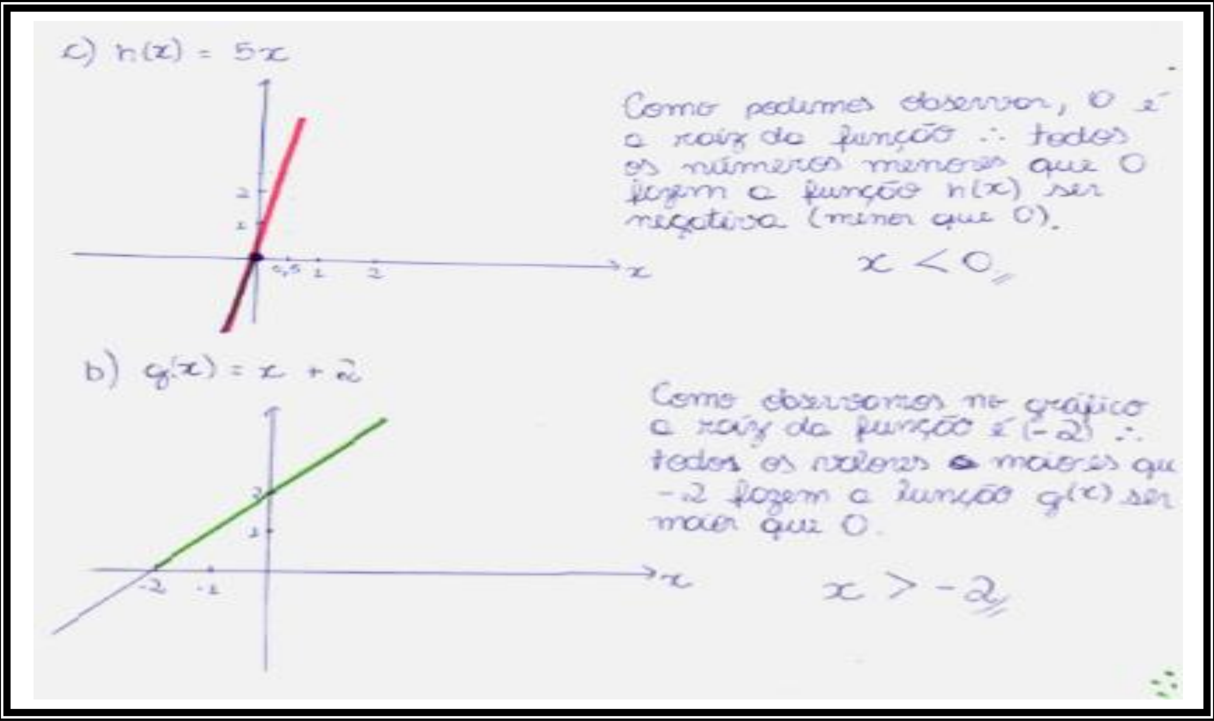


Figura 42 - Protocolo de Moisés – Atividade 1; itens b) e c)

Embora o aluno tenha percebido que o sistema de inequações proposto no item *d)* não tem solução, em sua folha de resposta faz uma pequena confusão quanto ao registrar o intervalo de valores que faz com que $h(x) = 5x$ seja menor que 2, tal intervalo é $x < 0{,}4$ e o aluno menciona $x < -4$, no entanto seu registro gráfico mostra o valor $x = 0{,}4$. Consideramos que esse sujeito incorporou a resolução por meio de uma resolução gráfica e a interpretou corretamente, pois pela nossa experiência, os sistemas que não possuem solução são os mais difíceis de serem interpretados pelos alunos, visto que esse tipo de atividade não é muito explorada em livros didáticos e nem pela maioria dos professores de Matemática. Inclusive em nossa análise *a priori* prevíamos que os estudantes poderiam ter dificuldades para chegar à conclusão que esse sistema de inequações não tem solução, porém o uso do *software* poderia lhes ajudar. Assim como Manoel, que também utilizou a solução gráfica, Moisés chegou a resposta que esperávamos.

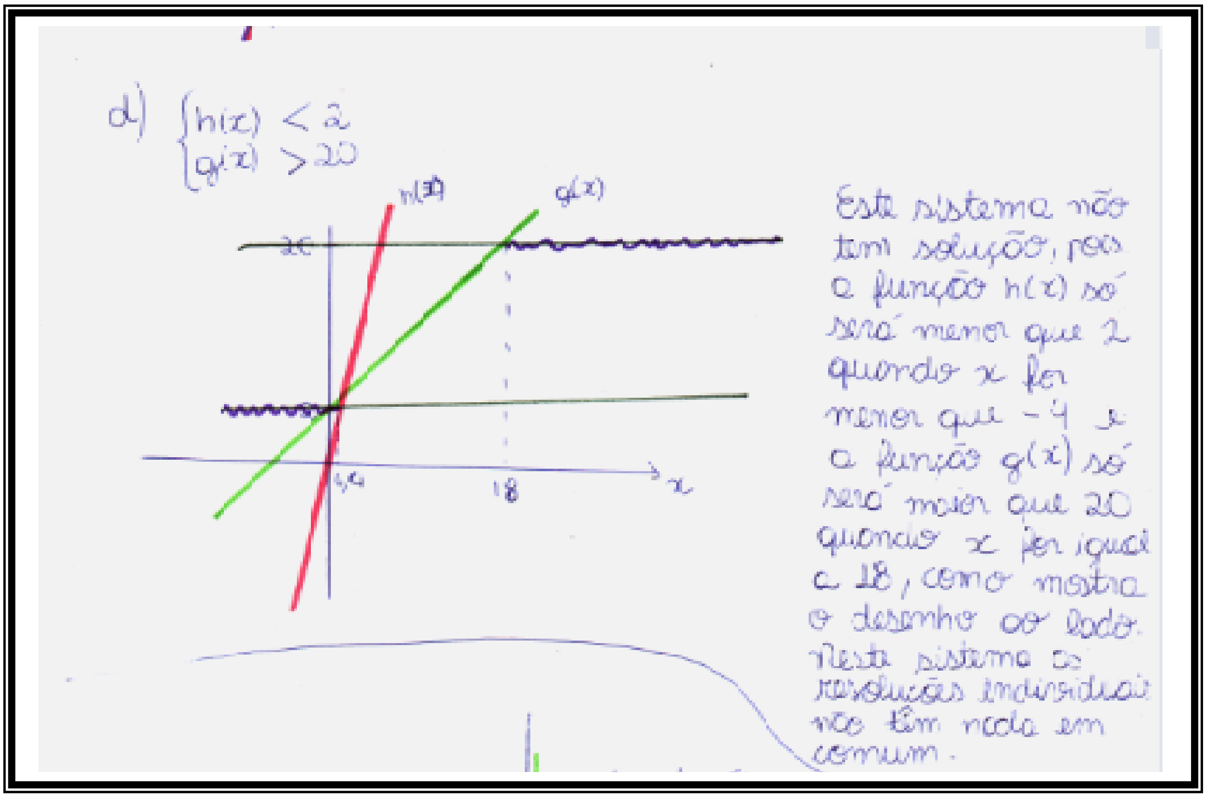


Figura 43 - Protocolo de Moisés – Atividade 1; item d)

No item *e)*, o aluno construiu o gráfico corretamente, com o auxilio do *software*, e o interpretou-o de forma adequada, chegando à resposta que esperávamos. Registrou em seus protocolos o gráfico utilizado para visualização do conjunto solução da inequação que propusemos, porém não desenhou a orientação dos eixos e nem deu nome a eles (*x* e *y*).

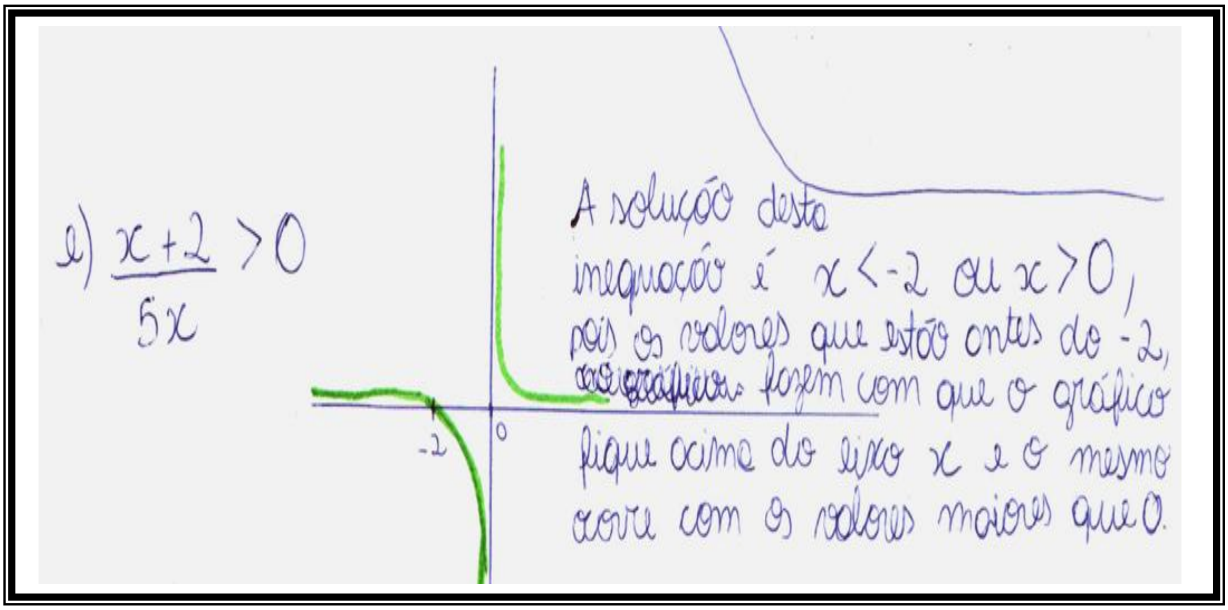


Figura 44 - Protocolo de Moisés – Atividade 1; item e)

Diferentemente de Manoel, Moisés optou em todos os itens pela conversão do registro algébrico para o gráfico com o auxilio do *software*, justificando suas intenções de forma clara em todos os itens. Talvez pelo fato de estarmos no laboratório de informática não foi aventada nenhuma resolução algébrica como as que fazemos na maioria de nossas aulas.

Os protocolos de Moisés mostram que esse aluno entende a resolução de inequações por meio de uma abordagem funcional gráfica, evidenciando que o aspecto visual lhe trouxe um avanço, tanto em suas resoluções, quanto em suas justificativas.

Pedro é extremamente sintético em suas respostas, porém em todas elas produziu as respostas esperadas. Este utilizou, segundo seus protocolos, os gráficos construídos com o auxilio do *software* GeoGebra, para visualização direta no monitor, explicando seus os procedimentos no registro da língua natural.

No item *a)* apresentou a solução algébrica e a gráfica, sendo esta última dividida em duas etapas, de uma forma muito segura do que estava fazendo, efetuando os tratamentos e as conversões necessárias para obter as respostas.

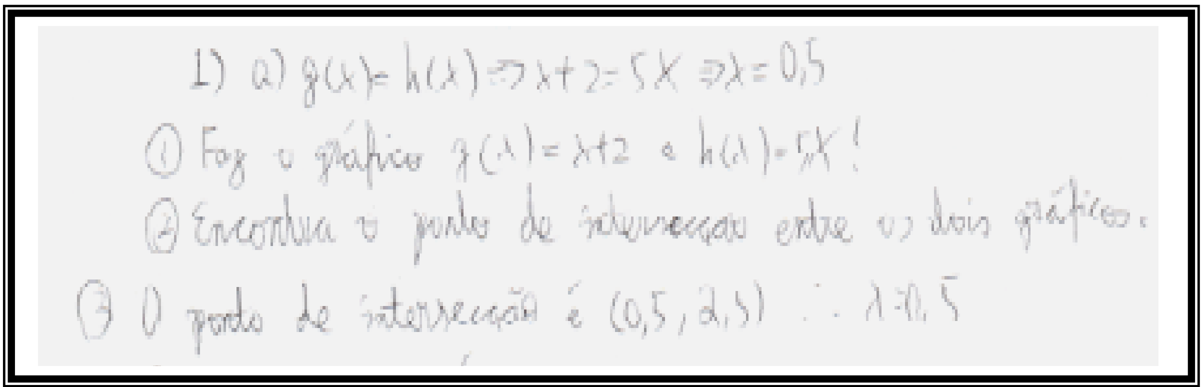

1) a) $g(x) = h(x) \Rightarrow x+2 = 5x \Rightarrow x = 0,5$
① Faz o gráfico $g(x) = x+2$ e $h(x) = 5x$!
② Encontra o ponto de intersecção entre os dois gráficos.
③ O ponto de intersecção é $(0,5 ; 2,5)$ $\therefore x = 0,5$

Figura 45 - Protocolo Pedro – Atividade 1; item a)

A resolução dos itens *b)* e *c)* foi dada por meio do registro da língua natural, porém mencionando a conversão do registro algébrico para o gráfico para obter a resposta esperada.

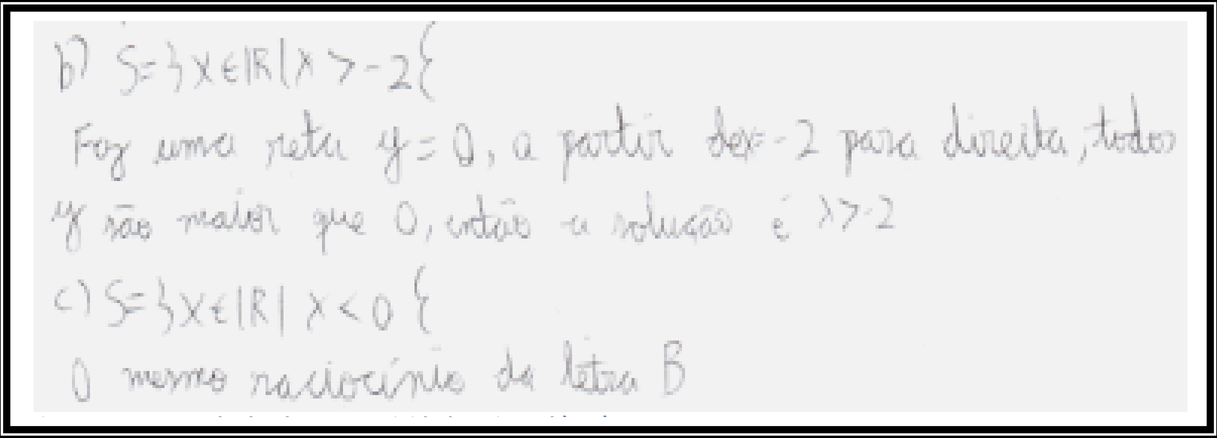


Figura 46 - Protocolo do aluno 3 – Atividade 1; itens b) e c)

No item *d)*, trocou as inequações componentes no sistema proposto, chegando a um novo sistema. Propusemos a resolução de $\begin{cases} h(x) < 2 \\ g(x) > 20 \end{cases}$ com $h(x) = 5x$ e $g(x) = x + 2$, porém o aluno resolveu $\begin{cases} x + 2 < 2 \\ 5x > 20 \end{cases}$, que é diferente do que solicitamos. Contudo, resolveu corretamente o sistema que ele mesmo propôs, efetuando tratamentos nas inequações componentes do sistema e mencionando o fato de que os gráficos das funções equivalentes obtidas após os tratamentos são retas paralelas e, por esse motivo, não existe um intervalo de valores que satisfaça as duas inequações simultaneamente.

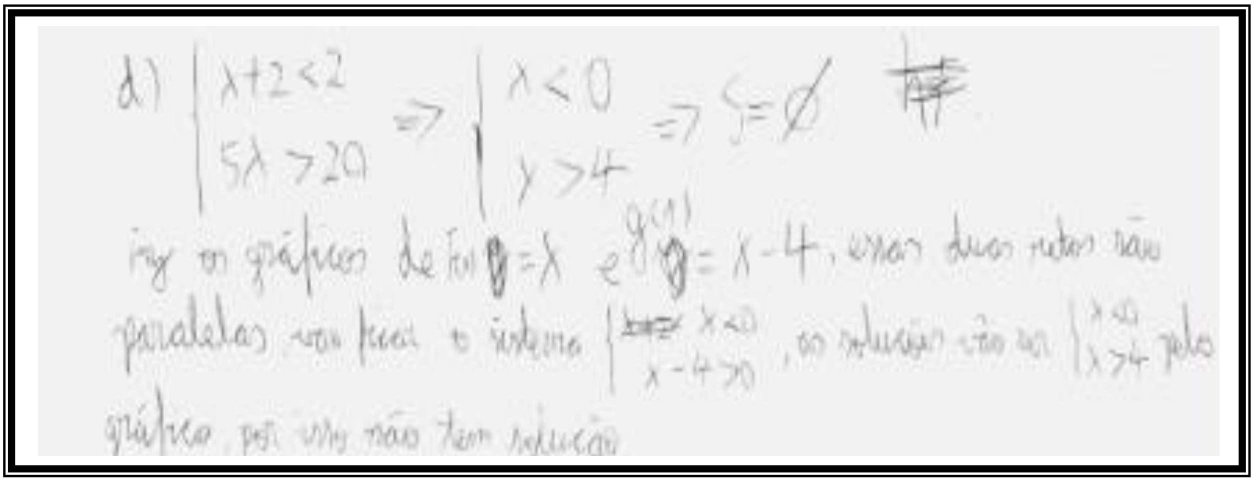
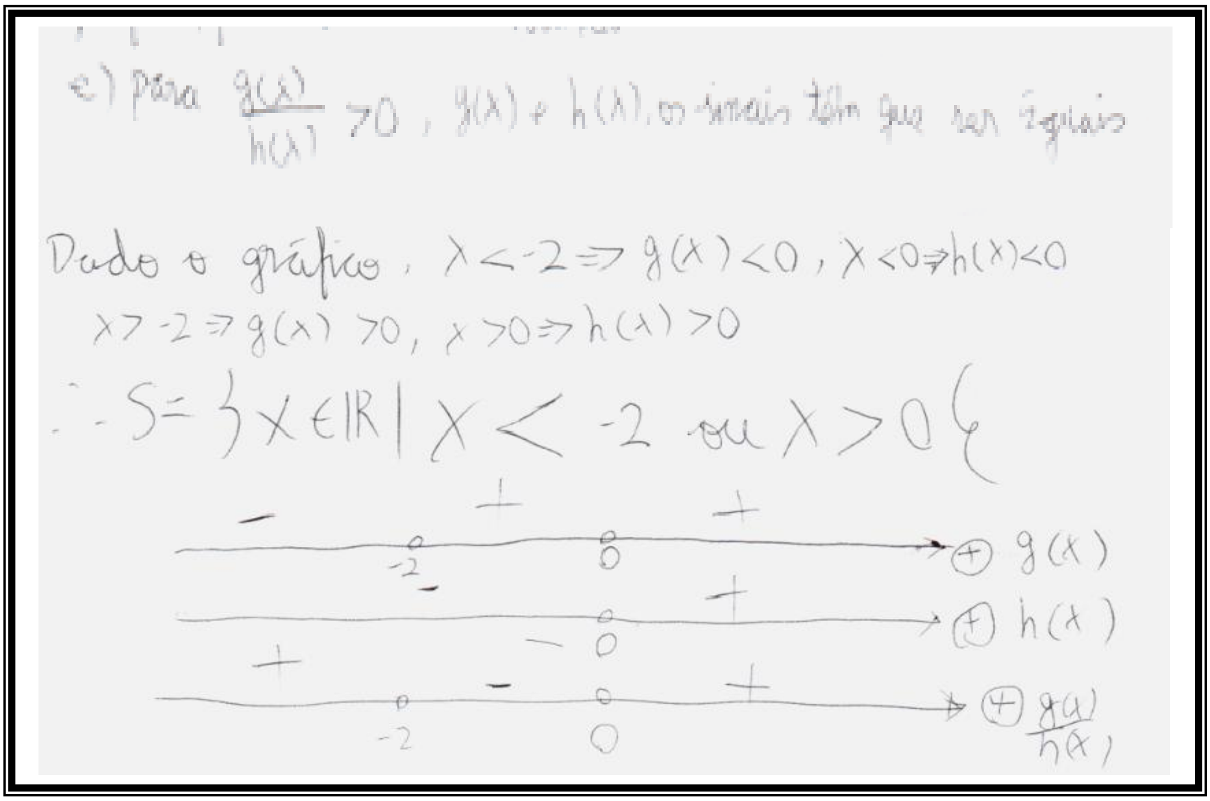


Figura 47 - Protocolo de Pedro – Atividade 1; item d)

Na resolução do item *e)*, utilizou-se dos gráficos de *g* e *h* para produzir um quadro de sinais, efetuando uma resolução muito semelhante àquela proposta pela maioria dos livros didáticos, inclusive naquele utilizado por ele, porém esse sujeito registra no estudo do sinal da função g dada por $g(x) = x + 2$ a ausência de $x = 0$ em seu domínio, mostrando uma atitude de preocupação com a divisão, porém esse valor está ausente no domínio de g/h, visto que $h(x) = 5x$, e nesse caso $x \neq 0$. Contudo descreve precisamente quando um quociente resulta em um número positivo e escreve corretamente o conjunto solução da inequação proposta.



e) para $\frac{g(x)}{h(x)} > 0$, $g(x)$ e $h(x)$, os sinais têm que ser iguais

Dado o gráfico, $x < -2 \Rightarrow g(x) < 0$, $x < 0 \Rightarrow h(x) < 0$

$x > -2 \Rightarrow g(x) > 0$, $x > 0 \Rightarrow h(x) > 0$

$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2$ ou $x > 0\}$

Figura 48 - Protocolo de Pedro – Atividade 1; item e)

Paulo também não registrou em sua folha de respostas os gráficos utilizados por ele na resolução dessa atividade, porém mencionou que os tenha usado para resolver a questão.

No item *a)* apresenta a resolução algébrica da equação, efetuando os devidos tratamentos de forma correta, e menciona no que os gráficos o ajudaram a responder a questão. Usa também o fato de que a função *h* cresce mais rapidamente que *g* como justificativa para sua resposta.

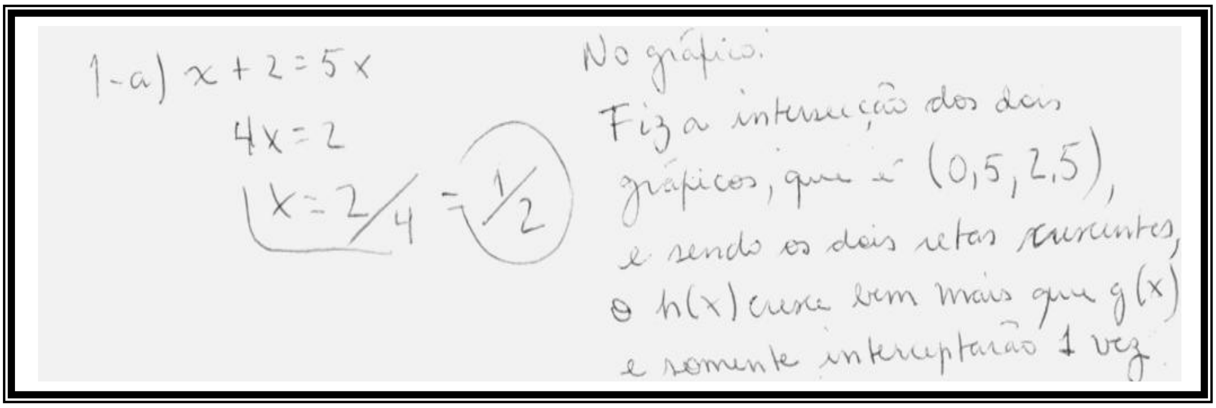


Figura 49 - Protocolo de Paulo – Atividade 1; item a)

Na resolução dos itens *b)* e *c)* o aluno a faz de forma correta no registro algébrico e relaciona com a solução gráfica. Explica os procedimentos utilizados na resolução gráfica de forma meio confusa, talvez pela falta de hábito de escrever o que se faz em aulas de Matemática. Usa expressões como “a raiz da função é -2, e vai decrescendo cada vez que diminui”, ou ainda “sua raiz é zero, portanto os negativos são os menores que o ponto interceptado nos eixos”, frases aparentemente mal escritas, porém evidenciam o entendimento do aluno na interpretação gráfica. Na primeira das frases, provavelmente tentou explicar que para $x < -2$ os valores da imagem da função são negativos, pois menciona o termo “decrescendo cada vez que diminui” que associou ao aspecto do gráfico (uma reta) que a medida que diminuímos os valores de x diminuem os valores de y. Na segunda das frases provavelmente explicou que, como o zero da função é $x = 0$, então o gráfico intercepta o eixo x quando $x = 0$, como a função $h(x) = 5x$ é crescente, os valores de x negativos fazem com que os valores de y também sejam negativos.

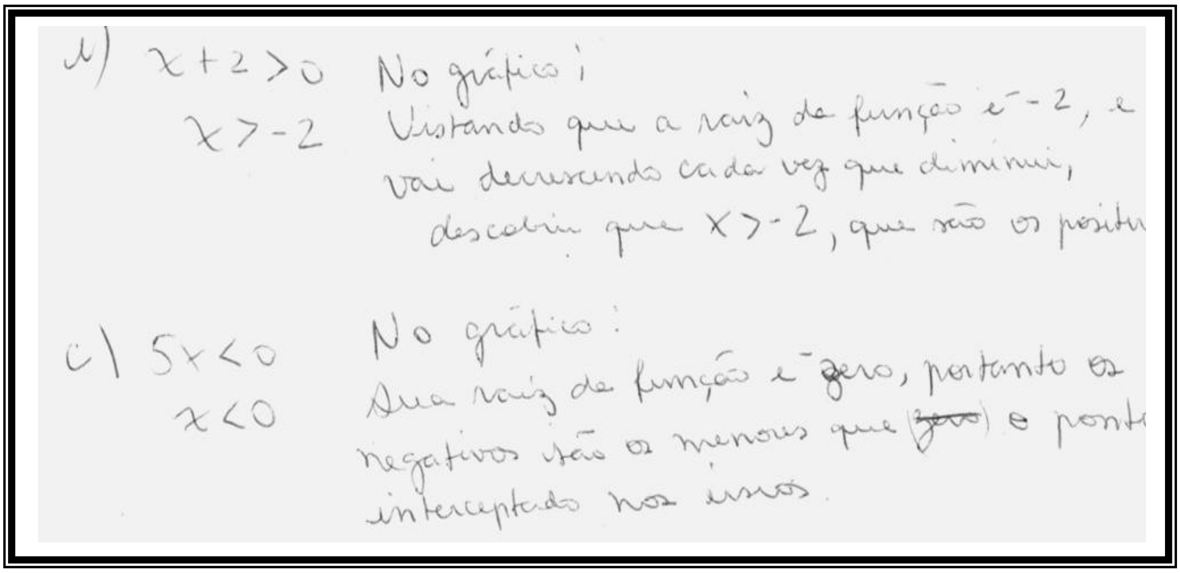


Figura 50 - Protocolo de Paulo – Atividade 1; itens b) e c)

Parece-nos que no item *d)* o aluno não sentiu necessidade de uso ou não entendeu muito bem a resolução gráfica de um sistema de inequações. Sua justificativa é dada a partir da resolução algébrica das inequações e, depois de resolvidas, representa em retas que estão hachuradas os intervalos que satisfazem cada uma das inequações componentes do sistema. Por meio da intersecção desses intervalos resolve corretamente a o problema.

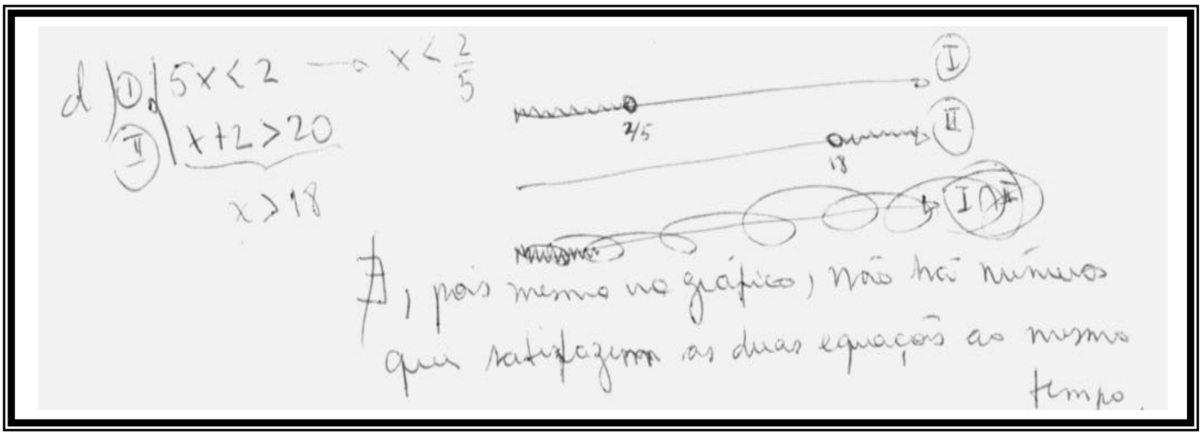


Figura 50 - Protocolo de Paulo – Atividade 1; item d)

O item *e)* foi resolvido apenas no registro algébrico por meio de um quadro de sinais. Talvez esse aluno não sentiu necessidade ou não sabia interpretar corretamente o gráfico naquele momento e optou pela resolução mais freqüente em sala de aula, por outro lado, embora tenha registrado em uma reta o intervalo correto que satisfaz a inequação que propusemos, não soube explicar sua resolução, confundindo os valores de x com os valores de $g(x)$ e $h(x)$, pois menciona em seus protocolos que, “para a divisão ser positiva, os dois (numerador e denominador) tem que ser menor que -2 (<-2) ou maiores que zero (>0)”, na verdade achamos que queria explicar que para o quociente ser positivo, numerador e denominador devem ser ambos positivos ou ambos negativos, e para isso acontecer $x < -2$ ou $x > 0$.

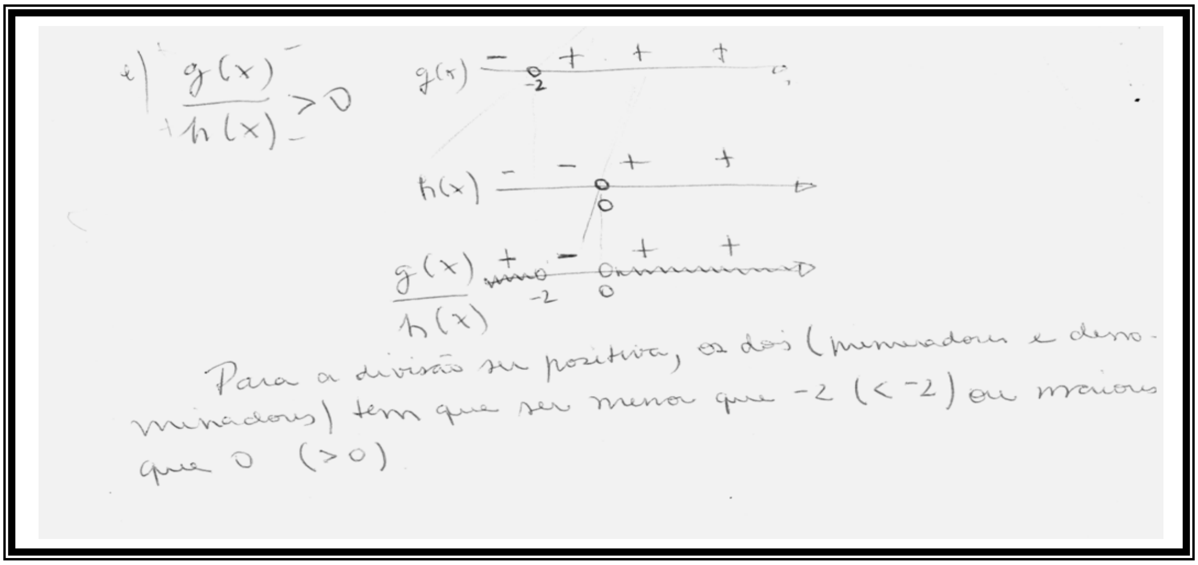


Figura 52 - Protocolo de Paulo – Atividade 1; item e)

Analisando os protocolos produzidos por Paulo, percebemos a sua tendência a opção pela resolução algébrica, talvez pelo fato de ser o procedimento que ele está acostumado a fazer e o entende, mesmo que seja de forma mecânica, e nossa primeira atividade não provocou a necessidade da conversão, principalmente nos dois últimos itens, do registro algébrico para o gráfico.

Elaboramos essa atividade com o objetivo de promover a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica e estimular uma abordagem funcional gráfica na resolução de inequações e equações.

Outro objetivo dessa atividade é de fazer o aluno perceber as diferenças na resolução de um sistema de inequações em relação a uma inequação racional (quociente entre dois polinômios), conforme descrevemos em nossa análise a *priori*.

Após a análise dos protocolos dos alunos percebemos que a resolução gráfica foi utilizada pela maioria dos alunos, apenas Paulo que não a utlizou nos itens *d)* e *e)*, e portanto a conversão do registro algébrico para o gráfico foi amplamente utlizada, caracterizando que houve conversão entre registros, pois as justificativas dos alunos nesse tipo de resolução são melhores explicadas em relação as justificativas de seus procedimentos algébricos.

A utilização da abordagem funcional gráfica pode ter feito com que todos os sujeitos não se confundissem nas resoluções do sistema de inequações e na inequação racional. Acreditamos que o aspecto visual e a correta interpretação do que é uma divisão no universo dos numeros reais tenham proporcionado isso.

Dentro daquilo que havíamos previsto para essa atividade, nossos objetivos foram alcançados. As soluções e dificuldades previstas em nossa análise *a priori* se confirmaram, o que também valida a metodologia adotada em nossa pesquisa em relação a essa atividade.

5.2.1.2 Análise *a posteriori* da Atividade 2

Assim como na Atividade 1, nenhum dos alunos se manifestou com relação a dúvidas referentes ao entendimento do enunciado.

Vamos retomar o enunciado da questão e em seguida nossas análises quanto às resoluções utilizadas pelos alunos.

Atividade 2

Considere a função $f : A \to \Re$ definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 5x + 4}}$

a) Calcule $f(3{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(4)$ e $f(5)$.

b) Denomina-se domínio de uma função o **maior conjunto** de valores que podem ser atribuídos a variável independente. Relacionando a definição de domínio da função com os resultados do item a, determine o domínio A da função f.

Manoel, por meio do registro da língua natural, explicou sua resolução, explicitando que construiu o gráfico da função *f* e os detalhes usados em sua construção, pois chegou a falar que teve o cuidado de colocar o quociente entre parênteses para que o *software* construa corretamente o gráfico (cuidado esse que não teve na construção do gráfico do item *e)* da atividade 1). Analisou o gráfico e respondeu todos os valores conforme esperávamos. Inclusive percebeu que a função não está definida para todo x real.

Esse tipo de resolução foi prevista em nossa análise *a priori* e é fruto da curiosidade dos alunos na construção de gráficos diferentes, ou seja, as curvas que construímos em sala de aula na maioria das vezes são oriundas de funções polinomiais, modulares, exponenciais e logarítmicas, pois são esses os tópicos abordados no livro didático, dificilmente construímos gráficos com as características como o da função presente nessa atividade. De um modo geral, as resoluções presentes em livros didáticos se utilizam dos gráficos apenas para coletar o sinal das funções envolvidas no quociente, que é o radicando da raiz quadrada, e por meio de um quadro de sinais, determinar os intervalos nos quais esse quociente é positivo ou nulo, para ser possível a operação de radiciação com índice par.

A solução baseada no quadro de sinais está presente na pesquisa de Giusti (2008), pesquisa que se assemelha à nossa quanto à utilização de um *software* que possibilite a conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

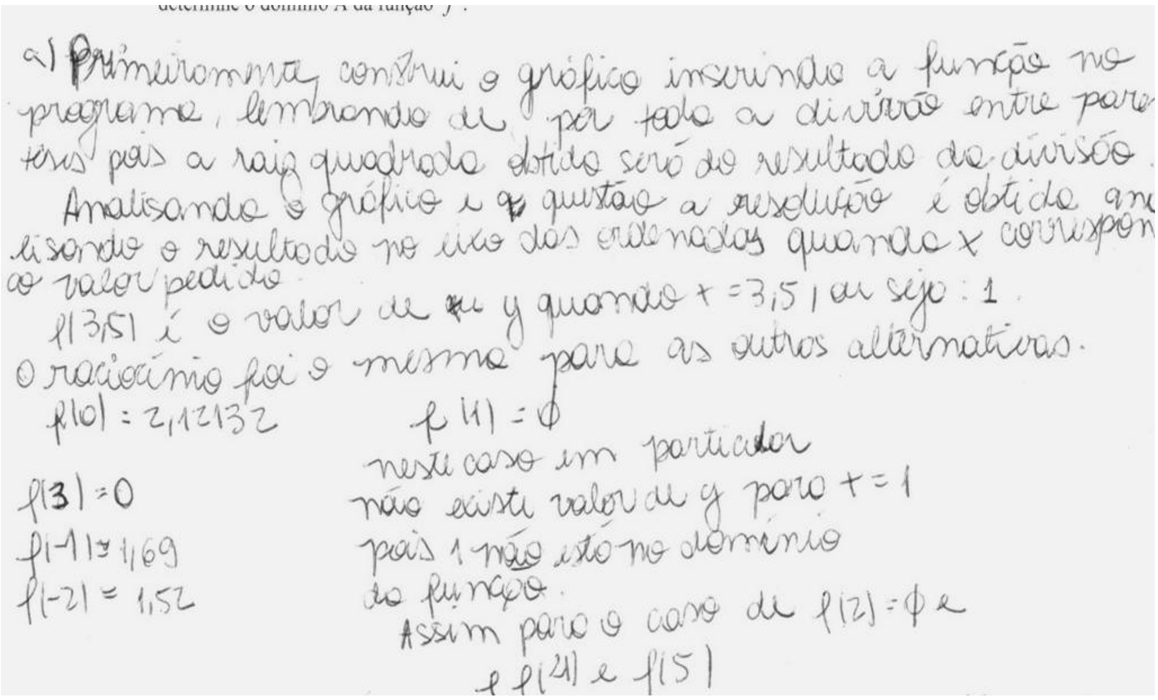

a) Primeiramente construí o gráfico inserindo a função no
programa, lembrando de que toda a divisão entre pares
teria pois a raiz quadrada obtida será do resultado da divisão.
Analisando o gráfico e as questões a resolução é obtida ana
lisando o resultado no eixo das ordenadas quando x correspon
ao valor pedido
f(3,5) é o valor de y quando x = 3,5, ou seja: 1.
O raciocínio foi o mesmo para as outras alternativas.
f(0) = 2,12132
f(1) = ∅
neste caso em particular
não existe valor de y para x = 1
pois 1 não está no domínio
da função.
Assim para o caso de f(2) = ∅ e
e f(4) e f(5)
f(3) = 0
f(-1) = 1,69
f(-2) = 1,52

Figura 53 - Protocolo de Manoel – Atividade 2; item a)

No item *b)*, em que é solicitado o domínio da função *f*, pela explicação dada pelo aluno no item *a)*, possivelmente ele utilizou o gráfico da figura seguinte, porém precisaríamos tê-lo entrevistado para termos certeza disso.

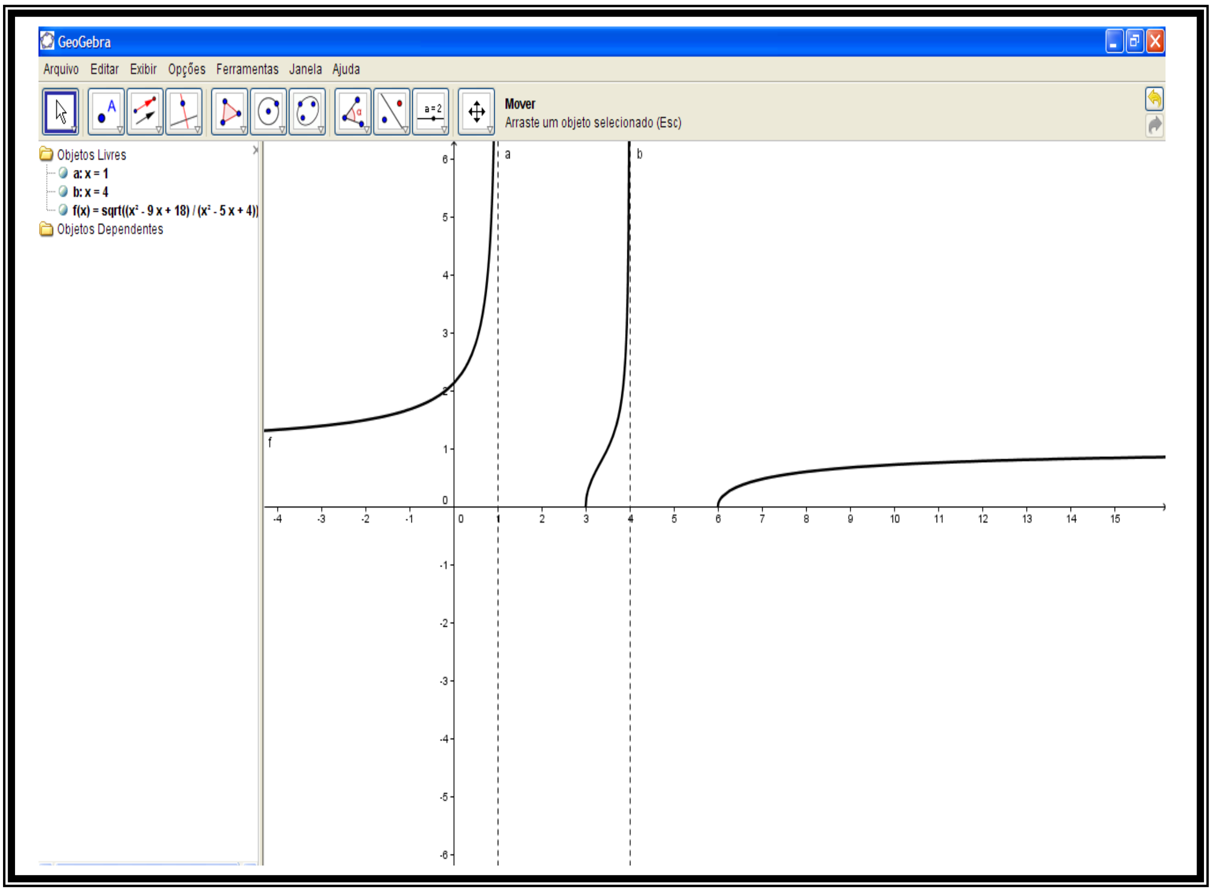
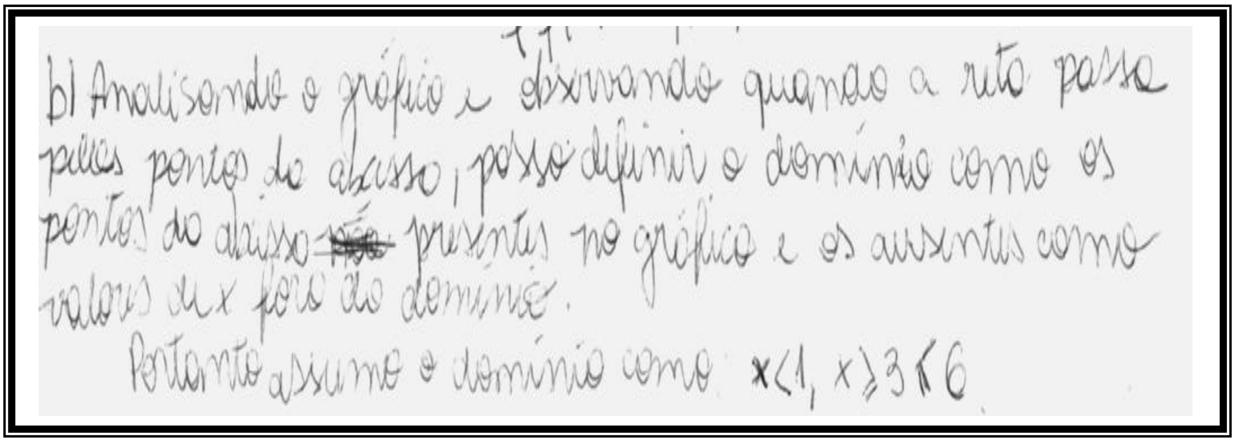


Figura 54 - janela do GeoGebra– Possivel gráfico utilizado por Manoel na Atividade 2; item b)
Fonte: elaborada pelo autor

Ao analisar o gráfico, explicitou que procurou as intersecções da “reta” com o eixo das abscissas, talvez se referindo ao gráfico de *f*, para ter uma referência de quais são os pontos pertencentes ao gráfico de *f* que anulam a função e a partir desse raciocinio definir qual conjunto de valores que x pode assumir. Respondeu que o dominio da função é $x < 1, x \geq 3 \leq 6$ o que não é verdadeiro, e nem faz sentido. Observando o gráfico acima percebemos que $x < 1 \; ou \; 3 \leq x < 4 \; ou \; x \geq 6$.

Erros referentes ao registro da resposta por meio de desigualdades, como o cometido por Manoel, também estão presentes na pesquisa de Giusti (2008), e são muito comuns em nossas salas de aula.

Pelo fato do aluno ter incluído $x = 3$ e $x = 6$ em sua resposta, pois chegou a utilizar o símbolo de maior ou igual, mas não x=1, acreditamos que ele possa ter entendido o gráfico corretamente quanto aos zeros da função, porém não soube interpretá-lo ou não soube fazer o registro dos intervalos corretamente.



b) Analisando o gráfico e observando quando a reta passa pelos pontos do abscisso, posso definir o domínio como os pontos do abscisso ~~são~~ presentes no gráfico e os ausentes como valores de x fora do domínio.
Portanto assume o domínio como: x<1, x>3 < 6

Figura 55 - Protocolo de Manoel – Atividade 2; item b)

Moisés optou em suas resoluções pelo registro gráfico, efetuando a conversão com auxilio do *software* e dando suas respostas a partir da visualização da tela do computador, porém no item *a)* não respondeu alguns dos valores da função que foram solicitados. Respondeu que $f(3{,}5) = 1$, $f(0) = 2{,}12$, $f(-2) = 1{,}48$ e que $f(1)$, $f(4)$ e $f(5)$ não existem como imagens de algum valor de x da função, ou seja, $x = 1$, $x = 4$ e $x = 5$ não fazem parte do domínio de *f.* As respostas produzidas por esse aluno são as esperadas, porém não analisou $f(-1)$ e $f(-2)$ que são valores pertencentes à imagem da função.

Em seus protocolos registrou, para responder $f(3{,}5)$ e $f(0)$, os gráficos das funções $y = 1$ e $y = 2{,}12$, o que pode significar que o aluno, com o auxilio do *mouse*, procurou pontos do gráfico nos quais $x = 3{,}5$ e $x = 0$ para determinar suas respostas (na figura seguinte exibimos a janela do *software* GeoGebra que ilustra essa situação) porém usou essas retas como parte integrante da resposta. (Figura 57).

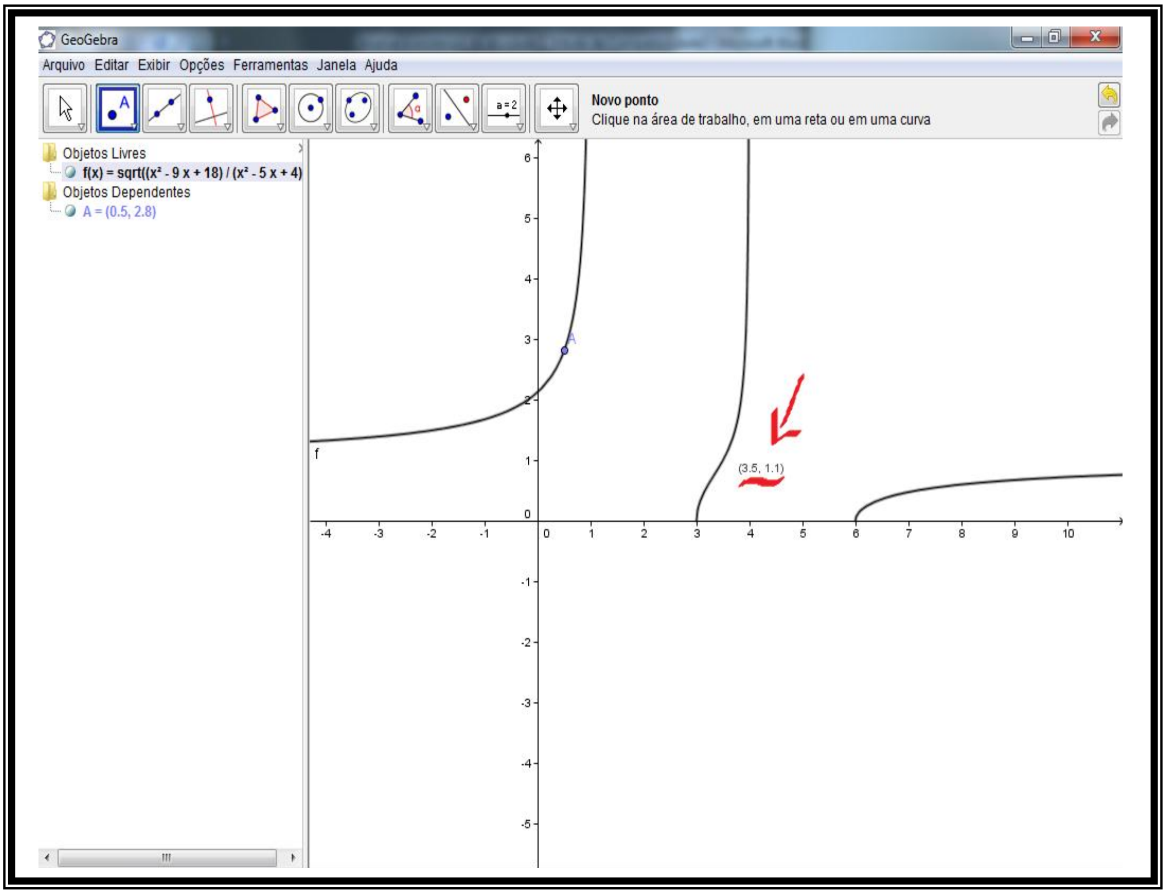


Figura 56 - Janela do GeoGebra – Possível gráfico utilizado por Moisés Atividade 2; item a)
Fonte: elaborada pelo autor

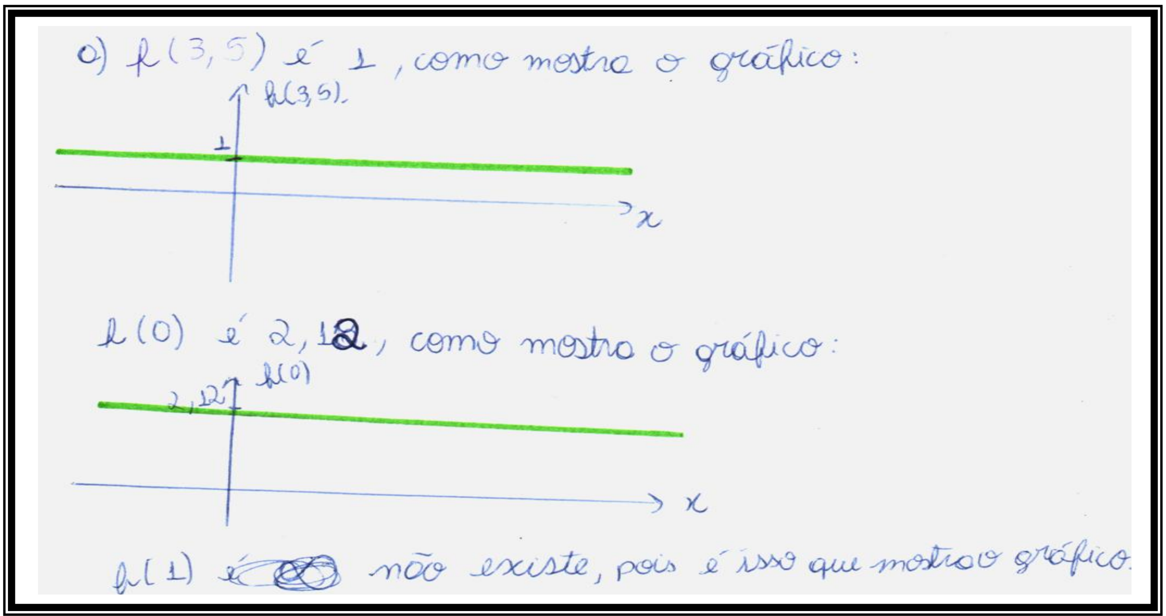


Figura 57 - Protocolo de Moisés – Atividade 2; item a)

Quanto à determinação do domínio, analisou diretamente o gráfico da função *f* de uma forma muito intuitiva, como previamos em nossa análise *a priori* e que consideramos um grande avanço. Cometeu apenas um erro em excluir dois valores do domínio, quando na verdade estes representam os zeros da função. Talvez tal erro tenha ocorrido pela percepção que os alunos têm de que, para ser possível a radiciação de números reais, no caso do índice da raiz ser par, o radicando deve ser positivo esquecendo-se que ele também pode ser nulo, ou seja, essa concepção está tão presente em suas crenças que mesmo com a visualização do gráfico, ele excluiu esses valores.

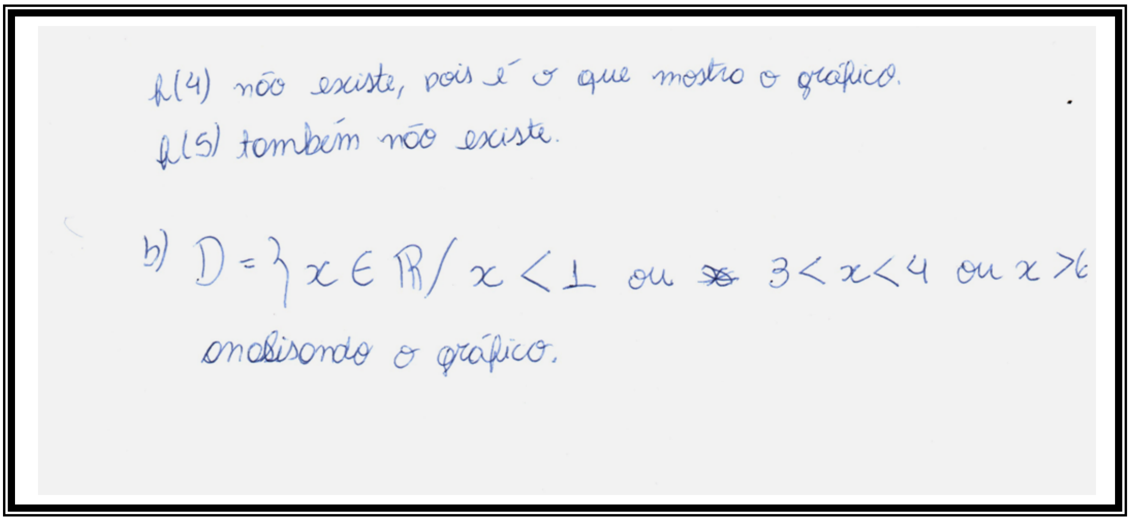

f(4) não existe, pois é o que mostra o gráfico.
f(5) também não existe.
b) $D = \{x \in \mathbb{R} / x < 1$ ou $3 < x < 4$ ou $x > 6$
analisando o gráfico.

Figura 58 - Protocolo de Moisés – Atividade 2 – item b)

Pedro nomeou o numerador e o denominador do quociente que fazem parte da função *f* de *g* e *h* e construiu seus gráficos separadamente, o que consiste em uma das alternativas de resolução previstas em nossa análise *a priori*, contudo para resolver o item *a)*, segundo seus registros, parece-nos que marcou pontos sobre os gráficos, utilizando-se da ferramenta “novo ponto” do *software*, cujas abscissas são dos valores de x dados no enunciado da questão.

Nas figuras seguintes exibimos a janela do *software,* possivelmente utilizada pelo aluno na resolução do item *a)*, porém para termos certeza desse fato precisaríamos tê-lo entrevistado, e seu respectivo protocolo. Observe que temos pontos identificados pelas letras de A a O dispostos sobre o gráfico de *g* e *h,* cujas abscissas correspondem aos valores de x dados. As coordenadas dos pontos podem ser vistas na janela de álgebra situada a esquerda dos gráficos (janela do GeoGebra).

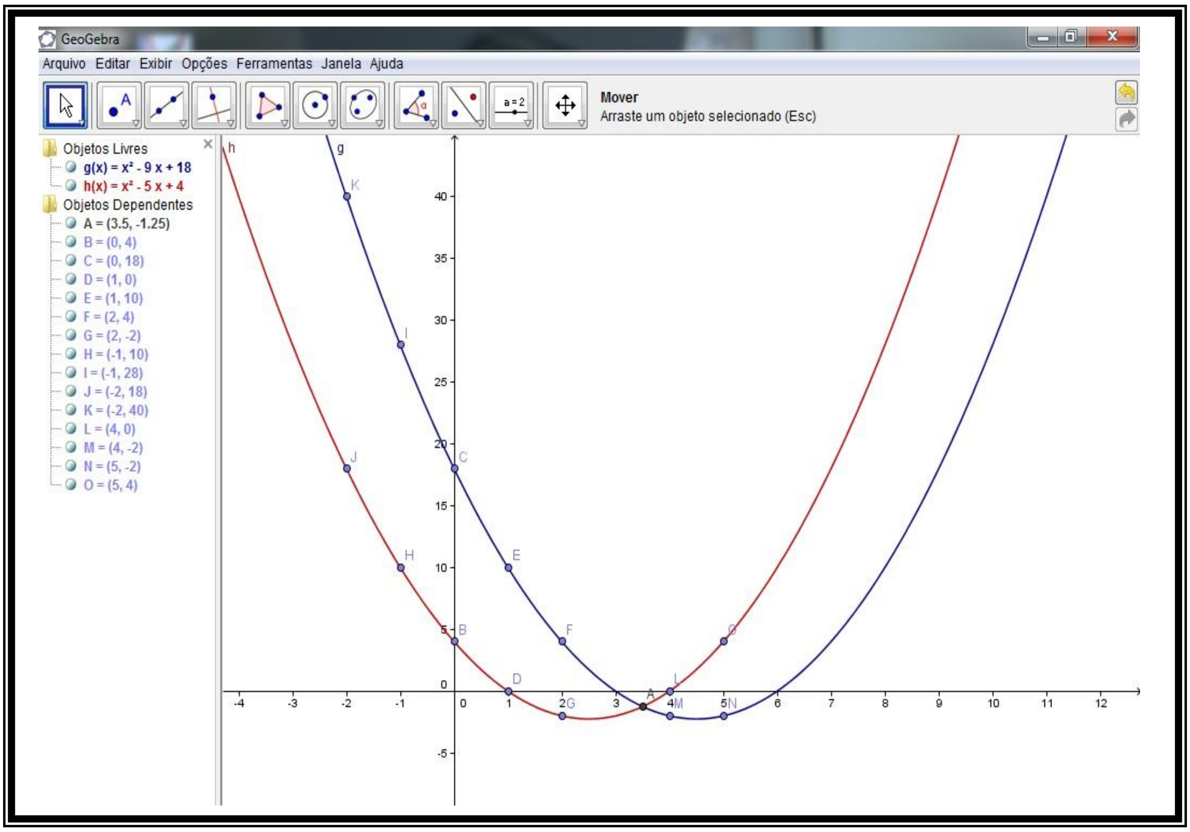
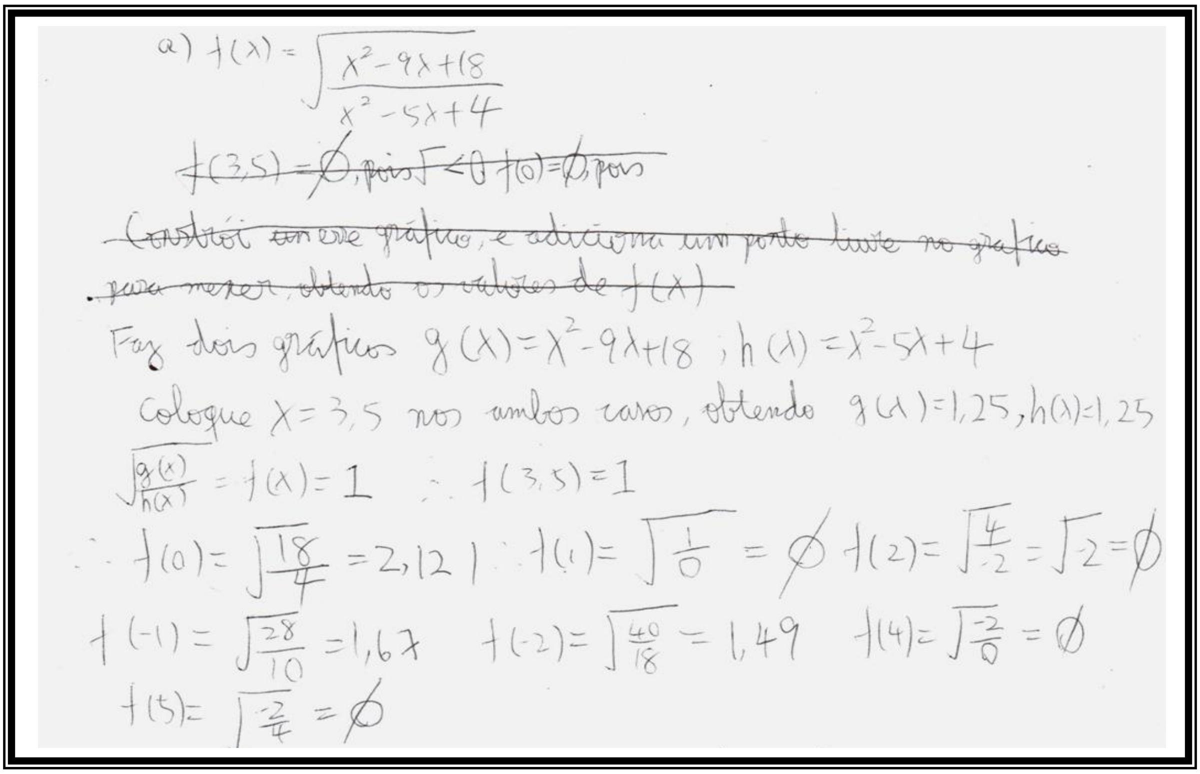


Figura 59 - Janela do GeoGebra – Possivel solução de Pedro na Atividade 2; item a)
Fonte: elaborada pelo autor



a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-9x+18}{x^2-5x+4}}$

~~$f(3,5) = \emptyset$, pois $\sqrt{\ } < 0$ $f(0) = \emptyset$, pois~~

~~Constrói um esse gráfico, e adiciona um ponto livre no gráfico para mexer, obtendo os valores de $f(x)$~~

Faz dois gráficos $g(x) = x^2-9x+18$; $h(x) = x^2-5x+4$

Coloque $x = 3,5$ nos ambos casos, obtendo $g(x) = 1,25$, $h(x) = 1,25$

$\sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}} = f(x) = 1$ $\therefore f(3,5) = 1$

$\therefore f(0) = \sqrt{\frac{18}{4}} = 2,121$ $\therefore f(1) = \sqrt{\frac{1}{0}} = \emptyset$ $f(2) = \sqrt{\frac{4}{-2}} = \sqrt{-2} = \emptyset$

$f(-1) = \sqrt{\frac{28}{10}} = 1,67$ $f(-2) = \sqrt{\frac{40}{18}} = 1,49$ $f(4) = \sqrt{\frac{-2}{0}} = \emptyset$

$f(5) = \sqrt{\frac{-2}{4}} = \emptyset$

Figura 60 - Protocolo de Pedro – Atividade 2; item a)

Percebemos ainda, analisando os protocolos, que quando um valor de x não pertence ao domínio, Pedro utiliza a notação de conjunto vazio para explicitar essa idéia, porém esse não é um procedimento correto. Pela nossa experiência, observamos que muitos alunos tentam utilizar uma linguagem simbólica para dar resposta a diversos problemas ao invés de utilizar o registro da língua natural, porém cometem equívocos como o cometido por Pedro, contudo, ao considerar os objetivos de nossa pesquisa percebemos que o aluno respondeu corretamente a questão.

Para responder qual é o domínio da função *f*, o aluno utilizou os gráficos construídos com o auxilio do *software* na resolução do item *a)* para coletar informações sobre o sinal das funções *g* e *h* e elaborar um quadro de sinais. Dessa forma, como a resposta não poderia ser dada pela observação direta do gráfico, observou quando *g* e *h* possuem o mesmo sinal e quando *g* é igual a zero, lembrando que é necessário excluir os valores que fazem com que *h* seja igual a zero. Pedro procedeu dessa forma e respondeu corretamente ao que foi solicitado, ou seja, qual é o conjunto A que corresponde ao domínio da função *f.*

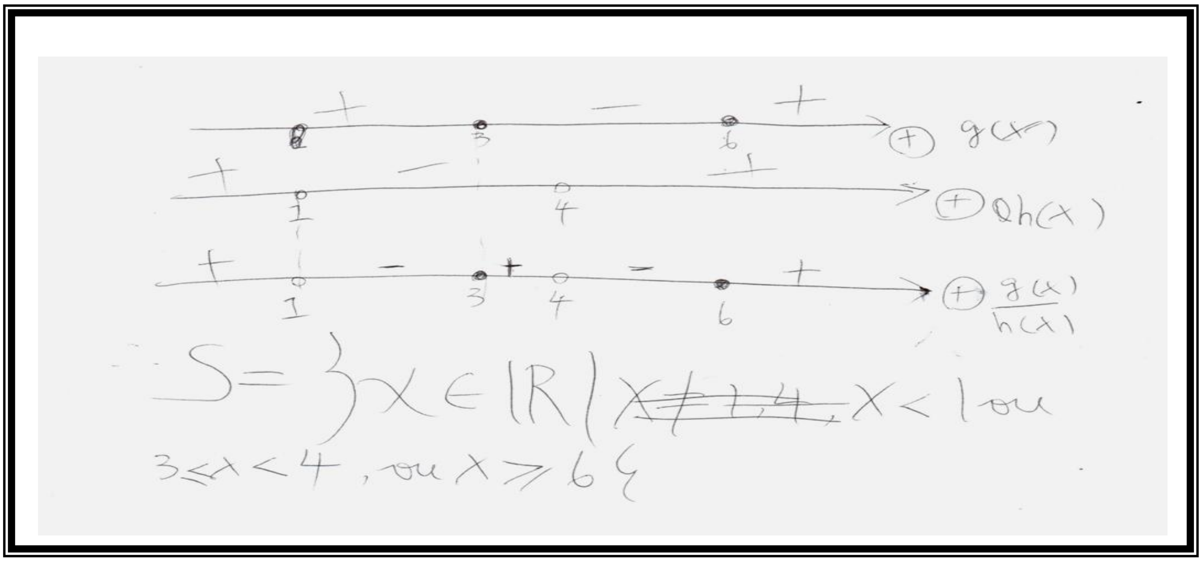


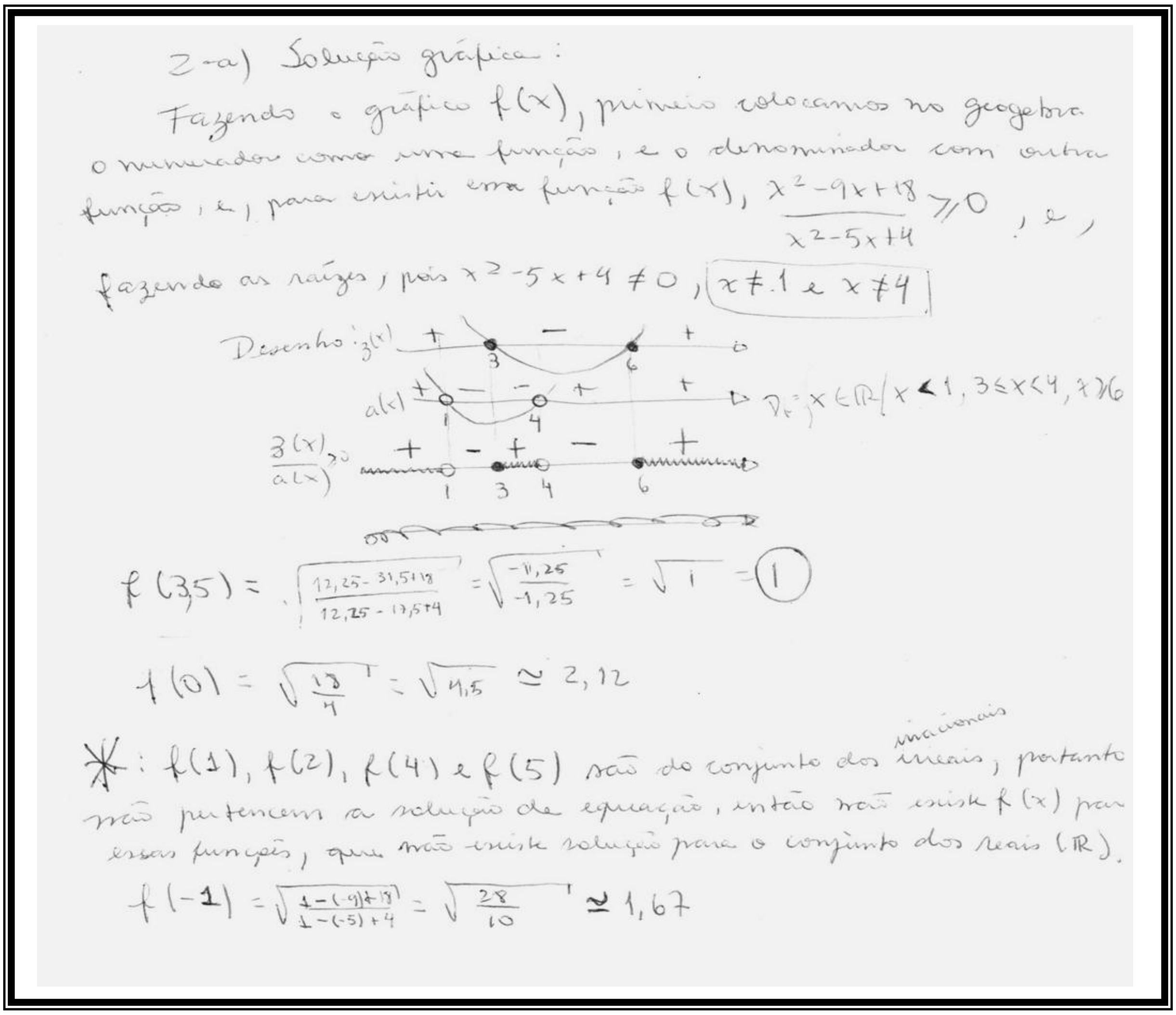
Figura 61 - Protocolo de Pedro – Atividade 2; item b)

Paulo diante do solicitado no item *a)*, optou por determinar primeiramente o domínio da função por meio de um quadro de sinais. Elaborou tal quadro construindo separadamente os gráficos das funções que representam o numerador e o denominador do quociente da função *f,* porém ao explicar seus procedimentos diz que essa construção representa o gráfico da função *f,* o que não é verdadeiro. Menciona que para *f* existir deve ser satisfeita a condição de existência da raiz quadrada no universo dos reais. Após registrar corretamente o intervalo de valores que fazem parte do domínio da função *f*, percebeu que não era possível determinar *f(1), f(2), f(4)* e *f(5)*, dessa forma, por meio do calculo numérico efetuou as operações necessárias para encontrar os valores de *f(3,5), f(0)* e *f(-1).*

Não prevíamos esse tipo de raciocínio em nossa análise a *priori* uma vez que o item *a)* era um meio de fazer o aluno perceber que a função *f* não está definida para todo x real.

Confundiu-se ao explicar porque alguns valores não pertencem ao domínio, mencionando que aqueles valores, *f(1), f(2), f(4)* e *f(5)*, pertencem o "conjunto dos irracionais irreais", o que mostra que esse aluno tem noção da terminologia da Teoria dos Conjuntos. Outra confusão foi tratar a função como uma equação mencionando que esses mesmos valores não fazem parte de sua solução.

De um modo geral esse aluno entendeu a proposta da atividade e consideramos como satisfatória sua solução.



2-a) Solução gráfica:

Fazendo o gráfico f(x), primeiro colocamos no geogebra o numerador como uma função, e o denominador com outra função, e, para existir uma função f(x), $\frac{x^2-9x+18}{x^2-5x+4} \geq 0$, e,

fazendo as raízes, pois $x^2-5x+4 \neq 0$, $\boxed{x \neq 1 \text{ e } x \neq 4}$

Desenho: g(x)

$D_f: x \in \mathbb{R} / x < 1, 3 \leq x < 4, x \geq 6$

$f(3,5) = \sqrt{\frac{12,25-31,5+18}{12,25-17,5+4}} = \sqrt{\frac{-1,25}{-1,25}} = \sqrt{1} = 1$

$f(0) = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{4,5} \simeq 2,12$

*: f(1), f(2), f(4) e f(5) são do conjunto dos irracionais reais, portanto não pertencem a solução da equação, então não existe f(x) para essas funções, que não existe solução para o conjunto dos reais (ℝ).

$f(-1) = \sqrt{\frac{1-(-9)+18}{1-(-5)+4}} = \sqrt{\frac{28}{10}} \cong 1,67$

Figura 62 - Protocolo de Paulo – Atividade 2; item a) e b)

Considerando os objetivos propostos para essa atividade, avaliamos que os alunos entenderam a proposta, apesar de alguns erros que estão arraigados na escola básica, em face de seu caráter mecanicista apoiado em regras, tais como, confusão ao escrever intervalos que determinam o domínio de funções por meio da notação de conjuntos utilizando-se dos símbolos “maior que”, “menor que”, “maior ou igual que” ou “menor ou igual que” ou exclusão de valores que anulam o radicando de uma raiz quadrada, simplesmente pelo fato de acreditarem que a raiz quadrada de zero não é possível no universo dos reais, aliás, essa é uma pergunta muito freqüente em aulas do ensino médio.

Acreditamos também que o *software* pode ajudar, mas não em uma resolução separada da solução algébrica, pois consideramos, apoiados em nosso referencial teórico, que o entendimento só é possível quando o aluno consegue compreender as diferentes características dos registros de representação semiótica de um mesmo objeto, isto é, que existe mais de uma forma de representar um objeto matemático, porém cada sistema semiótico apresenta um conteúdo diferente, e podemos coordená-los para resolver um problema.

5.2.1.3 Análise *a posteriori* da Atividade 3

Assim como nas atividades anteriores, nenhum dos alunos se manifestou com relação a dúvidas referentes ao entendimento do enunciado.

Vamos retomar o enunciado da questão e em seguida nossas análises quanto às resoluções utilizadas pelos alunos.

Atividade 3

Considere a função $w:\Re \to \Re$ e $z:\Re \to \Re$ definidas por $w(x) = 3^x$ e $z(x) = x^2 - 1$

a) Calcule $w(-2)$, $w(-1)$, $w(0)$, $w(1)$ e $w(2)$.

b) Determine $z(-2)$, $z(0)$ e $z(2)$.

c) Resolva a inequação $\dfrac{z(x)}{w(x)} < 0$.

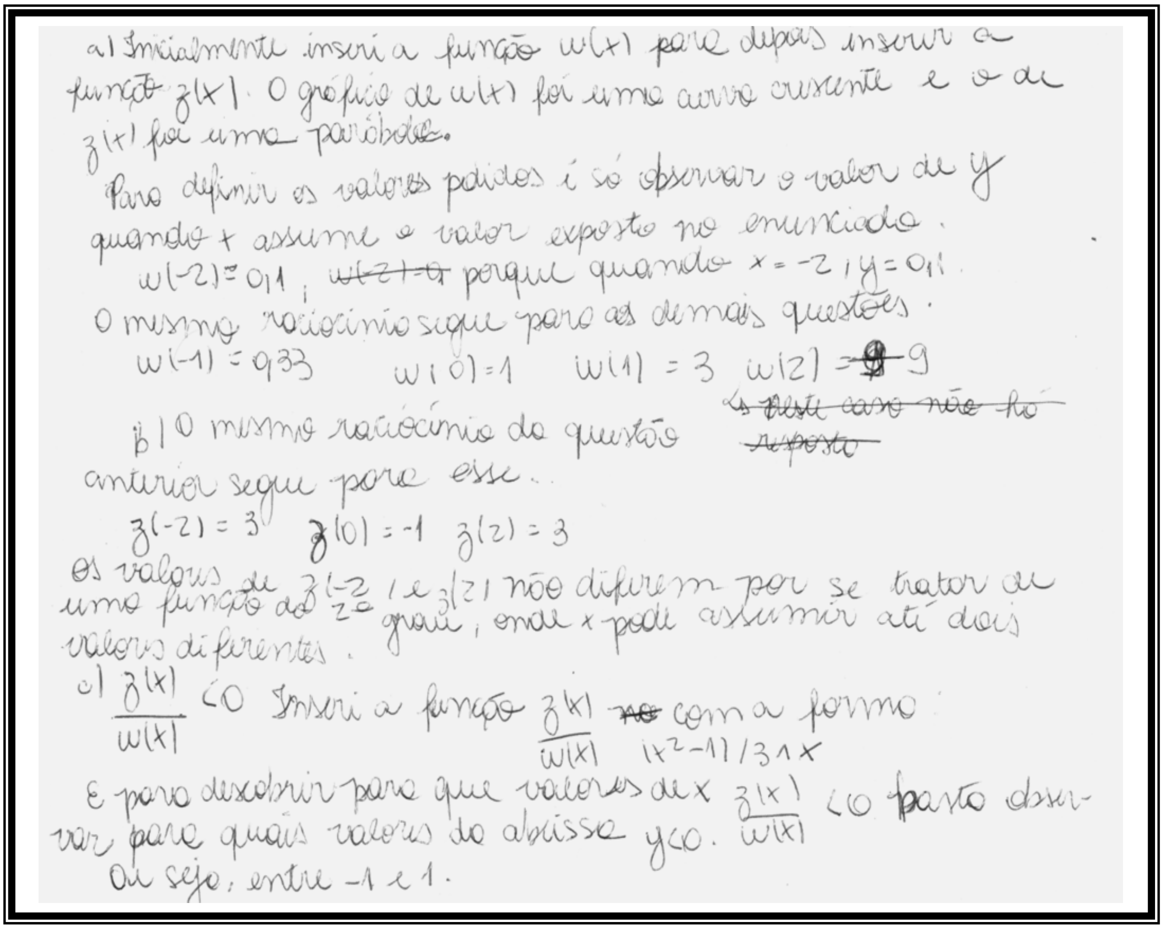
Manoel em seus protocolos explicita que construiu com o auxilio do *software* os gráficos envolvidos no problema. Explica que construiu os dois gráficos na mesma janela e relata o formato das curvas que visualizou. Diz que "o gráfico de $w(x)$ é uma curva crescente e o de $z(x)$ foi uma parábola". Sobre o gráfico de w que é uma função exponencial, Manoel quis destacar seu crescimento, pois na verdade a função que é crescente e não a curva. Provavelmente, com o auxilio do *mouse*, respondeu os itens *a)* e *b)* colocando o ponteiro sobre a curva e localizando os pontos que tem as abscissas dadas no enunciado do problema, pois diz "Para definir os valores pedidos é só observar o valor de *y* quando *x* assume o valor exposto no enunciado".

Previamos em nossa análise a *priori* a resolução gráfica desses itens, porém não com o auxilio do *mouse* e sim por meio da construção de retas verticais cujas equações são as abscissas citadas no enunciado, ou seja, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.

Para resolver o item *c)* optou por construir diretamente o gráfico de $\frac{z}{w}$ e por meio da observação direta desse determinou o domínio da função.

Assim como na atividade anterior, Manoel não citou nenhum tipo de resolução algébrica, diferentemente da Atividade 1. Talvez isso ocorra pelo fato de que não estarmos mais trabalhando, como na primeira atividade, apenas com funções afins, evidenciando a grande ênfase que é dada na escola na resolução de problemas que envolvam funções polinomiais do 1º grau.

A solução utilizada por Manoel estava prevista em nossa análise a *priori*. Embora ela não seja tão frequente, como citamos anteriormente, o aspecto visual ajuda o aluno a compreender o comportamento da função em todo o seu domínio.



a) Inicialmente inseri a função w(x) para depois inserir a função z(x). O gráfico de w(x) foi uma curva crescente e o de z(x) foi uma parábola.
Para definir os valores pedidos é só observar o valor de y quando x assume o valor exposto no enunciado.
$w(-2) = 0,1$; ~~w(-2)=0~~ porque quando $x = -2$, $y = 0,1$.
O mesmo raciocínio segue para as demais questões.
$w(-1) = 0,33$ $w(0) = 1$ $w(1) = 3$ $w(2) = 9$
b) O mesmo raciocínio da questão anterior segue para esse. ~~Neste caso não há exposto~~
$z(-2) = 3$ $z(0) = -1$ $z(2) = 3$
Os valores de $z(-2)$ e $z(2)$ não diferem por se tratar de uma função do 2º grau, onde x pode assumir até dois valores diferentes.
c) $\frac{z(x)}{w(x)} < 0$ Inseri a função $\frac{z(x)}{w(x)}$ com a forma: $(x^2-1)/3^x$
E para descobrir para que valores de x $\frac{z(x)}{w(x)} < 0$ basta observar para quais valores da abscissa $y<0$. Ou seja, entre -1 e 1.

Figura 63 - Protocolo de Manoel – Atividade 3; itens a), b) e c)

Moisés registrou todas as repostas dos itens *a)* e *b)* por meio de registros gráficos o que indica que construiu os gráficos de w e z para responder os valores das imagens que foram solicitadas.

Provavelmente, com o auxilio do *mouse*, procurou pontos sobre o gráfico cujas abscissas correspondessem aos valores dados no enunciado, e posteriormente registrou, para cada valor encontrado, o gráfico de uma reta que representa uma função constante $y = a$ em que a é o valor encontrado. Explicou também por meio do registro da língua natural as operações que efetuou e o porquê da resposta. Ao calcular $w(2)$ diz "$w(2)$, nesta função a resposta é 9, pois para qualquer valor de x o $w(2)$ é igual a 9, já que se trata de uma função constante". Pode ser que Moisés, ao localizar o ponto de w cuja abscissa é 2, construiu uma reta que representa a função constante $y = 9$ para fazer a intersecção com o gráfico de w, já que o *software* da as coordenadas do ponto quando é aproximado da curva o ponteiro do *mouse*, porém ao registrar suas respostas, imaginou que as retas fazem parte da resolução e não que foi uma ferramenta que lhe auxiliasse no aspecto visual.

No item *c)* optou por construir, com o auxílio do *software*, diretamente o gráfico de $\frac{z}{w}$, inclusive o registra em seus protocolos. Por meio da observação direta desse gráfico, determina o conjunto solução da inequação.

Em nossa análise a *priori*, não prevíamos o tipo de registro utilizado pelo aluno nos itens *a)* e *b)*, mesmo porque não o consideramos correto. Quanto ao item *c)* era uma resposta esperada, porém, pouco utilizada pela dificuldade da construção desse gráfico, dificuldade essa que foi diminuída pelo fato de os alunos terem a disposição o *software* GeoGebra para efetuar a conversão.

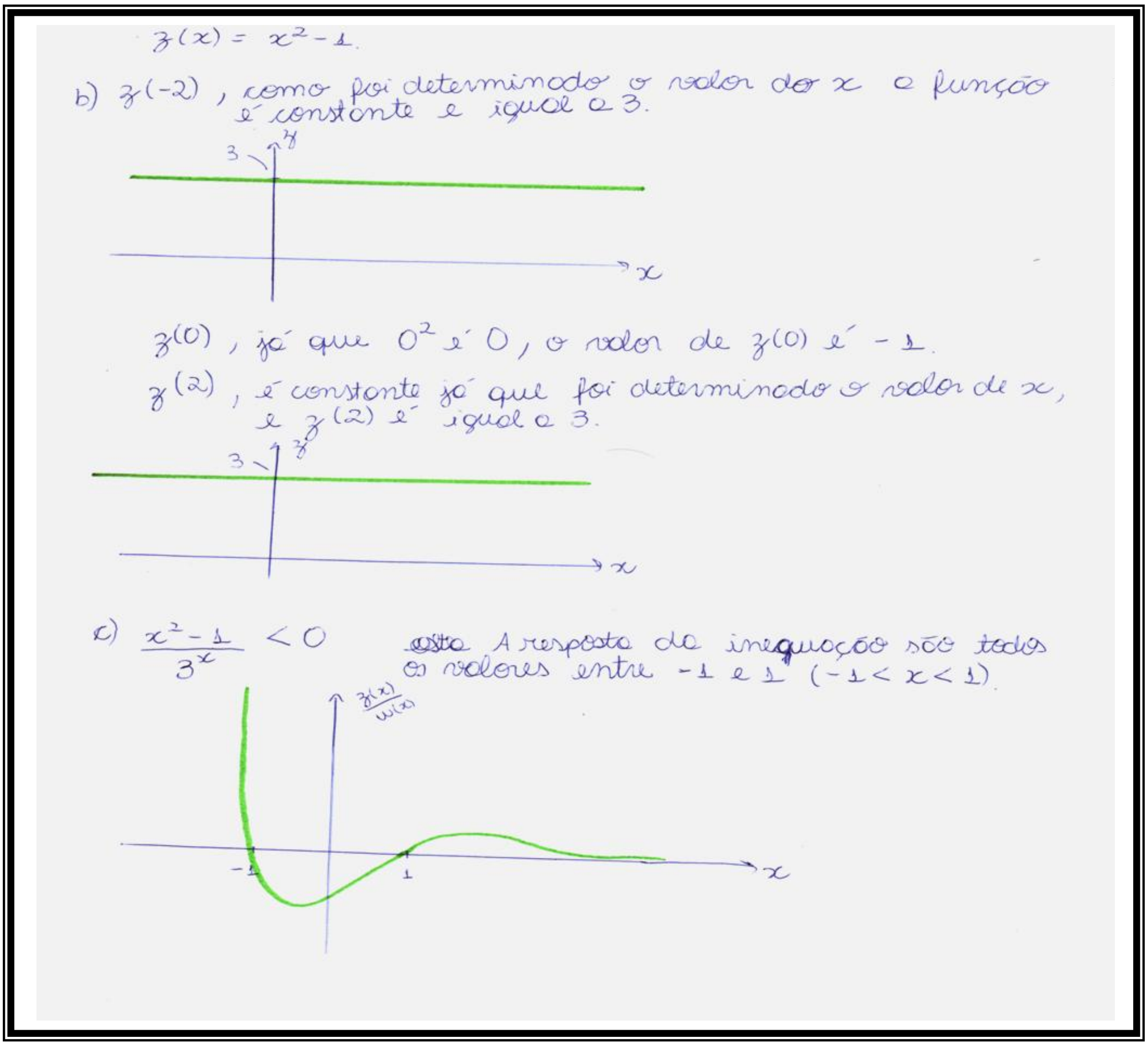


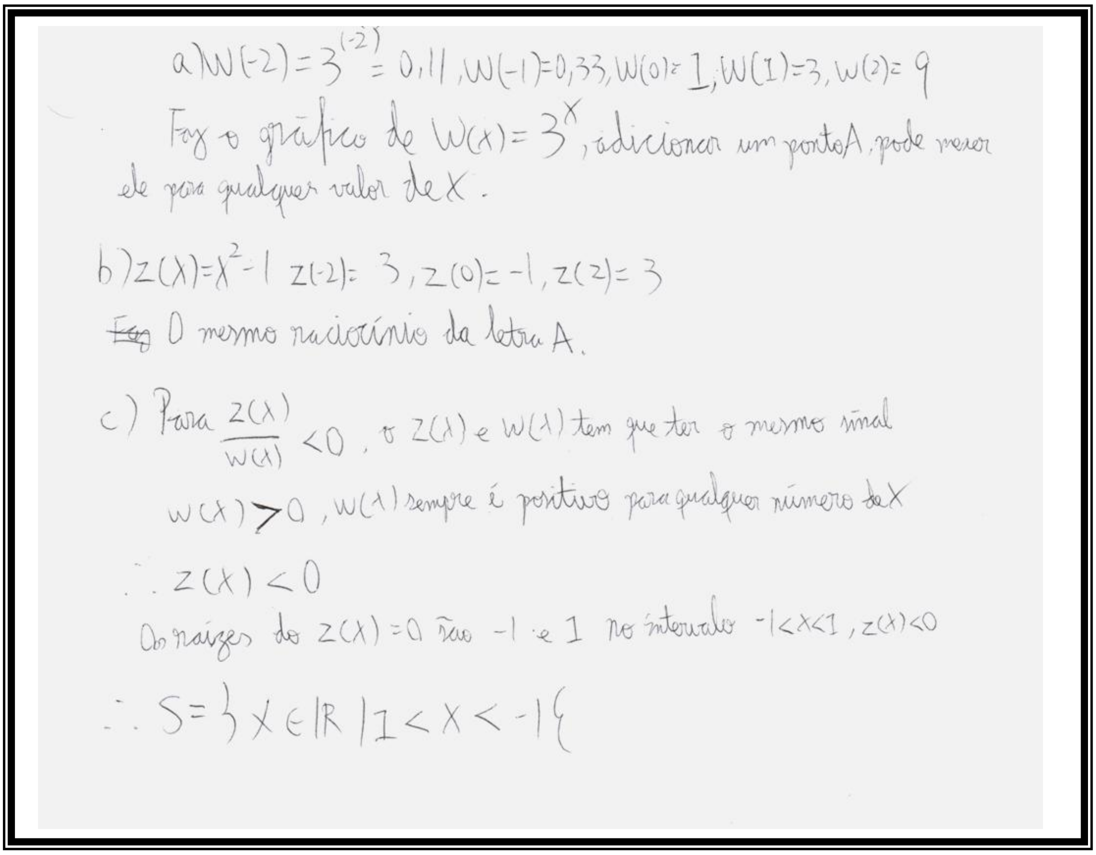
Figura 64 - Protocolo de Moisés – Atividade 3; itens a), b) e c)

Nos itens *a)* e *b)*, Pedro utilizou o mesmo raciocínio, ou seja, construiu o gráfico correspondente em cada item, com auxilio do *software*, e inseriu um ponto **A** qualquer sobre a curva que corresponde ao gráfico da função dada, em seguida o moveu de forma que a abscissa coincidisse com os valores de x dados no enunciado, os quais queremos saber suas imagens por meio das funções z e w. Em seus protocolos diz “Faz o gráfico de $w(x) = 3^x$, adicionar um ponto A, pode mexer ele para qualquer valor de x”.

Para resolver o item *c)* não utilizou diretamente o gráfico de $\frac{z}{w}$ para a resolução do problema. Utilizando da linguagem simbólica, própria da Matemática, e da língua materna, respondeu de forma segura a questão, mostrando que entendeu quando um quociente é negativo, pois o objetivo nesse item é o de resolver a inequação $\frac{z(x)}{w(x)} < 0$. Percebeu que w é positiva para todo x real, pode ter constatado isso observando o gráfico que utilizou no item *a),* determinou os zeros da função z sabendo que seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima, cuja informação também pode ter sido obtida observando o gráfico utilizado no item anterior, concluiu então o intervalo em que z é negativa, dessa forma chegou à conclusão que $\frac{z}{w}$ é negativo quando z<0.

Em nossa análise a *priori* prevíamos uma resolução semelhante à de Pedro para os itens *a)* e *b)*, porém o aluno utilizou outro recurso presente no *software* que é o de inserir um ponto sobre a curva e movimentá-lo sobre essa para determinar as respostas solicitadas. Dessa forma explorou outra ferramenta do GeoGebra o qual achamos muito positivo no sentido de formular estratégias que facilitem a resolução de um problema.

A resposta dada por Pedro no item *c)* também estava prevista, porém a forma como ele responde, assim como nas atividades anteriores, mostra um bom entendimento sobre as atividades realizadas por ele até então.


a) $W(-2) = 3^{(-2)} = 0,11$, $W(-1)=0,33$, $W(0)= 1$, $W(1)=3$, $W(2)= 9$

Faz o gráfico de $W(x)= 3^{x}$, adicionar um ponto A, pode mover ele para qualquer valor de X.

b) $Z(X)=X^{2}-1$ $Z(-2)= 3$, $Z(0)= -1$, $Z(2)= 3$

~~Faz~~ O mesmo raciocínio da letra A.

c) Para $\frac{Z(X)}{W(X)} < 0$, o $Z(X)$ e $W(X)$ tem que ter o mesmo sinal

$W(X) > 0$, $W(X)$ sempre é positivo para qualquer número de X

$\therefore Z(X) < 0$

As raízes do $Z(X) = 0$ são -1 e 1 no intervalo $-1<X<1$, $Z(X)<0$

$\therefore S = \}X \in \mathbb{R} \mid 1 < X < -1\{$

Figura 65- Protocolo de Pedro – Atividade 3; itens a), b) e c)

Paulo resolveu os itens *a)* e *b)* da mesma maneira, ou seja, construiu os gráficos das funções w e z, respectivamente, e também retas definidas por equações do tipo $x = a$ em que a são as abscissas são os valores de x dados no enunciado. Embora não tenha registrado em seus protocolos essa situação, acreditamos nela, pois em seus protocolos diz "Resolvi interceptando pontos em relação ao eixo x no gráfico; cada ponto (x, y) no gráfico, uso o y, que é o $w(x)$ para responde-las". O fato de mencionar as palavras "interceptar" e "em relação ao eixo x" pode evidenciar esse tipo de solução. Contudo, não podemos excluir a possibilidade de o aluno ter feito uma solução parecida com a de Pedro, marcando um ponto qualquer sobre a curva e movimentando-o ao longo da mesma para obter as respostas esperadas.

No item *c)* mostra que coletou informações dos gráficos utilizados na resolução dos itens *a)* e *b)*, pois em seus protocolos diz "Resolvi pegando os pontos que interceptam o eixo x (raízes da função) no $z(x)$ e $w(x)$ sei que é sempre positivo". Com base nessas informações construiu um quadro de sinais, determinando dessa forma o conjunto solução da inequação.

As soluções apresentadas por Paulo estavam previstas em nossa análise a *priori*, e com relação aos registros de representação semiótica utilizou-se de registros algébricos, gráficos e da língua natural.

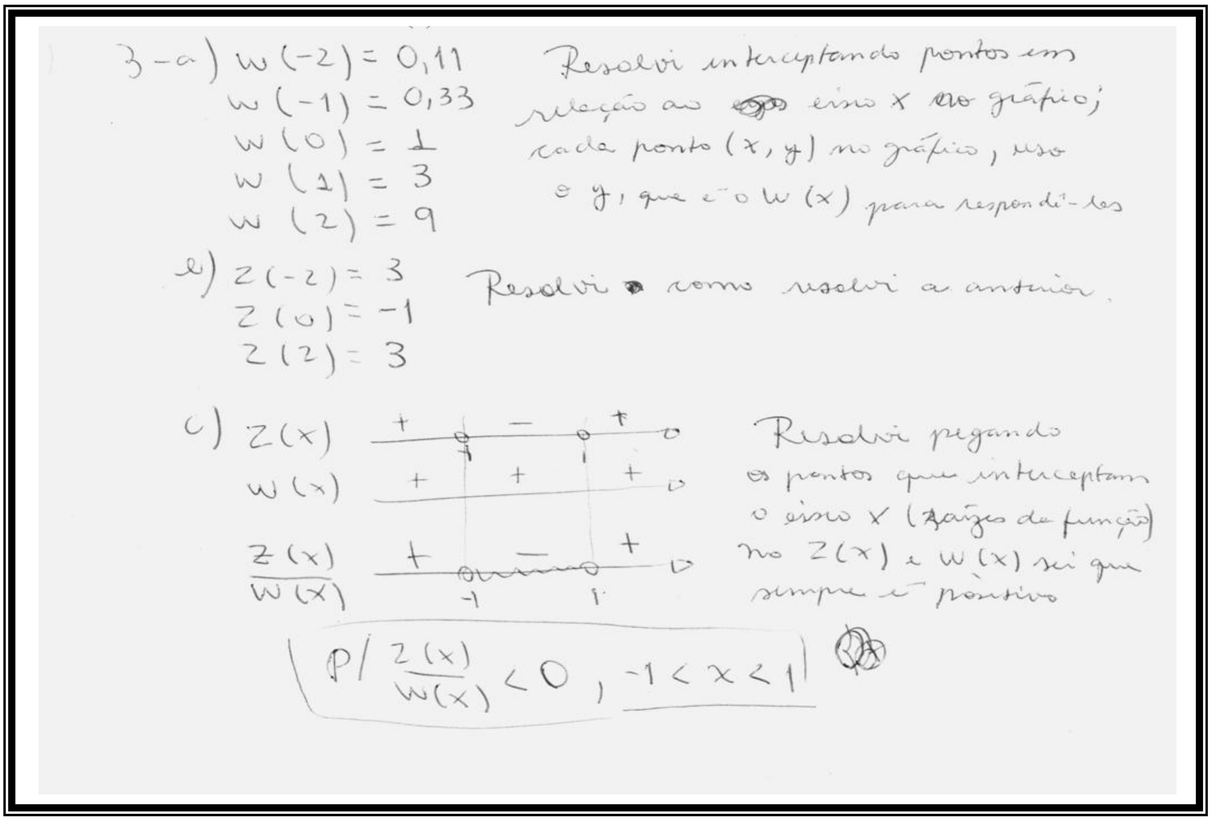


Figura 66 - Protocolo de Paulo – Atividade 3; itens a), b) e c)

Percebemos que nessa atividade, todos os nossos sujeitos de pesquisa efetuaram a conversão do registro algébrico para o registro gráfico para resolvê-la, mesmos nos itens *a)* e *b)* cujas resoluções são familiares dos alunos em situações que fazem parte das aulas sem o auxilio do *software*. Inclusive, dois desses sujeitos, ao resolver esses itens, podem ter percebido que a função exponencial w é positiva para todo x real.

No item *c)* notamos um maior avanço, pois percebemos, em dois dos protocolos, uma coordenação entre os registros de representação semiótica. Esses sujeitos relacionaram informações coletadas nos gráficos dos itens *a)* e *b)* para resolver o item *c)*. Utilizando em suas soluções os registros algébricos e da língua materna. Os outros dois sujeitos optaram por construir um novo gráfico para a resolução desse item e dessa forma chegarem à resposta esperada. Embora também seja uma habilidade importante, essa pode também se tornar um mecanicismo, visto que um dos membros da inequação é igual à zero, ou seja, o caminho de resolução resume-se a inserir um único gráfico no programa e procurar os valores de x que fazem com a função seja positiva, negativa ou nula, dependendo da situação.

5.2.1.4 Análise *a posteriori* da Atividade 4

Nessa atividade dois alunos tiveram uma dúvida com relação ao enunciado, a qual consideramos pertinente e dessa forma a esclarecemos. A dúvida deles era a seguinte: Como o enunciado diz que o custo da construção da casa deve ser de, no máximo, R$ 200.000,00, os alunos perguntaram esse valor era para a construção da área interna mais a área de lazer ou somente para a área interna. Respondemos aos alunos que esse custo é apenas para a construção da área interna.

Vamos retomar o enunciado da questão e em seguida nossas análises quanto às resoluções utilizadas pelos alunos.

Atividade 4

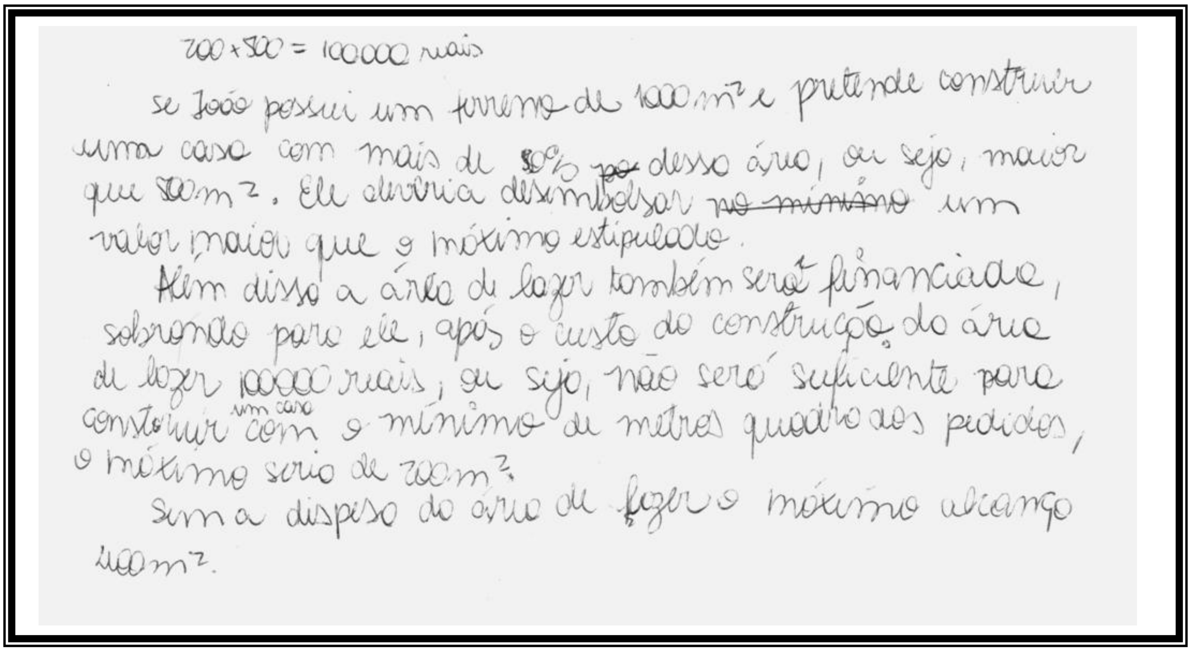
João possui um terreno de $1000\,m^2$, no qual pretende construir uma casa. Ao engenheiro responsável pela planta, ele impõe as seguintes condições: a área destinada a lazer (piscina, churrasqueira, etc.) deve ter $200m^2$, e a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% da área total do terreno; além disso, o custo para construir a casa deverá ser de, no máximo, R$ 200.000,00. Sabendo que o metro quadrado construído nessa região custa R$ 500,00, qual é a área interna da casa que o engenheiro poderá projetar?

Manoel optou por responder o problema considerando a hipótese em que a área de lazer juntamente com a área interna deve ser custeada com os R$ 200.000,00 e quando este valor é destinado apenas à construção da área interna. Em sua resolução efetua registros numéricos, como por exemplo, calcular o custo da área de lazer, que como tem 200 m^2 de área, custaria R$ 100.000,00, pois o metro quadrado na região custa R$ 500,00 e dessa forma fez 200x500=100.000. Também explica por meio do registro da língua natural seu raciocínio dizendo: “Se João possui um terreno de 1000 m^2 e pretende construir uma casa com mais de 50% dessa área, ou seja, maior que 500 m^2. Ele deveria desembolsar um valor maior que o máximo estipulado”. Essa resolução de Manoel faz sentido, pois se temos R$ 200.000,00, e o metro quadrado custa R$ 500,00, podemos construir no máximo 400 m^2, o que não ultrapassa 50% da área total do terreno, e dessa forma o máximo que a área interna poderia medir é 200 m^2.

Na hipótese de que os R$ 200.000,00 custeariam apenas a área interna da casa, explica que o máximo de área que o imóvel poderia medir é 400 m^2, o que está correto, porém esquece-se de determinar o valor mínimo, pois se construíssemos 301 m^2, por exemplo, alcançaríamos uma área maior que 50% do terreno, já que a área de lazer mede $200\,m^2$, e dentro do orçamento estipulado. Talvez, naquele momento, não pensou na resolução do problema em termos de intervalos, ou seja, que de acordo com o enunciado temos outras possibilidades, o que é um erro muito comum em nossas aulas.

Por outro lado, Manoel, mesmo após esclarecermos a dúvida dos alunos quanto ao enunciado, a qual provavelmente ele ouviu, optou por resolver o problema considerando duas hipóteses, o que consideramos uma atitude coerente, afinal de contas, fora da escola, ao resolver algum problema prático real é conveniente considerar todas as variáveis.

Prevíamos em nossa análise a *priori* uma resolução baseada em um sistema de inequações, e a resposta de Manoel não condiz com a resposta que achávamos que o aluno poderia dar. Quando dizemos sistemas de inequações, não precisamos prevê-lo de uma maneira formal, pois o erro cometido por Manoel foi justamente não considerar os dados: ter área maior que 50% da área total do e ter custo máximo de R$ 200.000,00, pois essas duas informações apontam para mais de uma possibilidade. Se considerasse esses intervalos, que constituem um sistema de inequações resolveria o problema totalmente.



200x500 = 100000 reais

Se João possui um terreno de 1000 m² e pretende construir uma casa com mais de 50% ~~por~~ dessa área, ou seja, maior que 500m². Ele deveria desembolsar ~~no mínimo~~ um valor maior que o máximo estipulado.

Além disso a área de lazer também será financiada, sobrando para ele, após o custo da construção da área de lazer 100000 reais, ou seja, não será suficiente para construir uma casa com o mínimo de metros quadrados pedidos, o máximo seria de 200m².

Sem a despesa da área de lazer o máximo alcança 400m².

Figura 67 - Protocolo de Manoel – Atividade 4

Moisés para resolver o problema construiu uma figura para entender a situação, após isso determinou o valor que corresponde a 50% de 1000 m^2 e concluiu então que a área interna da casa deve medir no mínimo 300 m^2, já que a área de lazer mede 200 m^2. Calculou o custo para construir 300 m^2 ao preço e R$ 500,00 o metro quadrado, chegando a R$ 150.000,00 e por meio de uma "regra de três simples", determinou a área necessária para gastar os R$ 200.000,00 disponíveis para a construção da casa, chegando a 400 m^2. Em seguida explicou, por meio do registro da língua natural seu raciocínio, demonstrando que entendeu o problema e dessa forma chegando a resposta esperada.

Não prevíamos em nossa análise a *priori* uma resolução como a de Moisés, mas enxergamos em sua resolução um sistema de inequações, mesmo que não explicitado no registro algébrico.

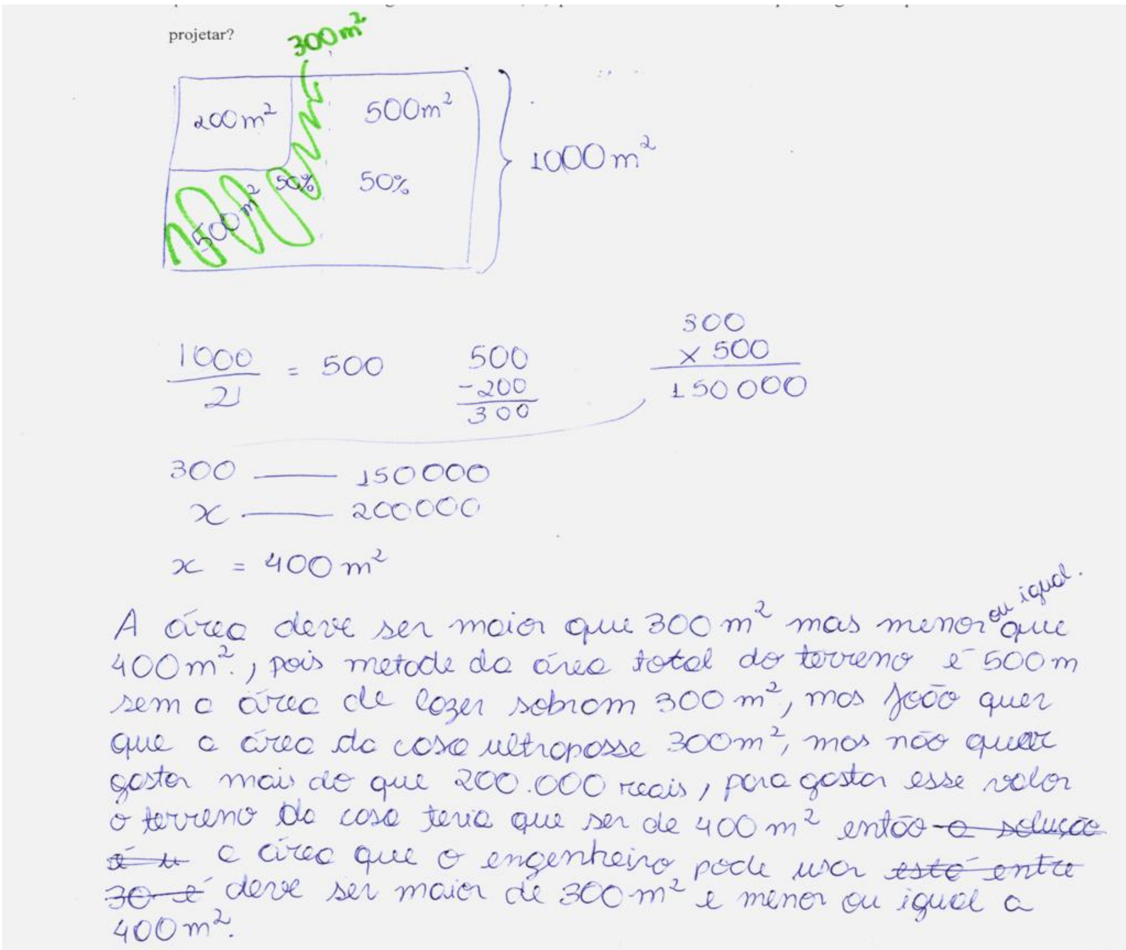
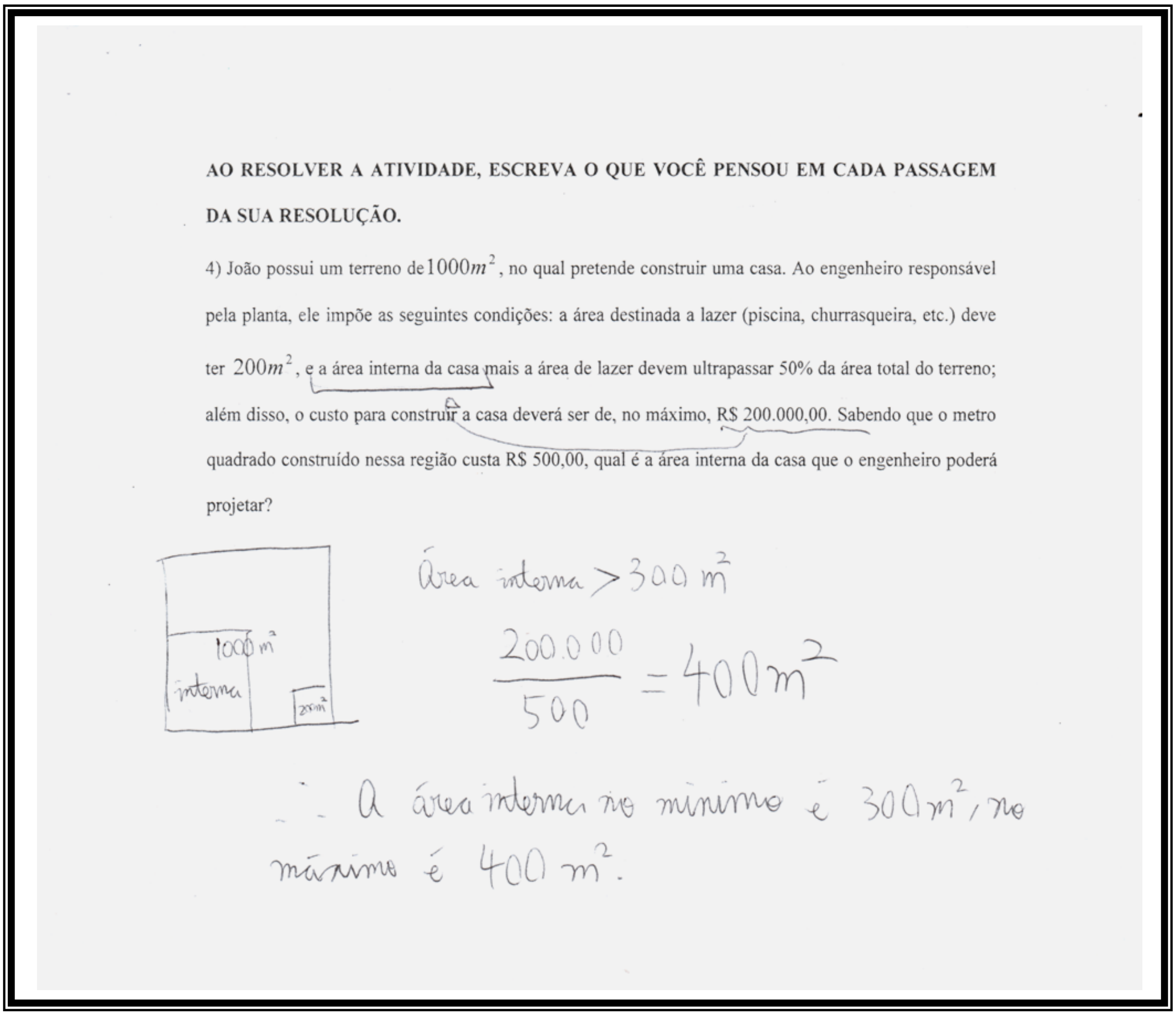


Figura 68 - Protocolo de Moisés – Atividade 4

Pedro fez uma figura para relacionar com o enunciado do problema e a partir dessa relação concluiu que à área interna da casa deve medir mais que 300 m^2, pois registra “Área interna>300m^2”. Sabendo que, nesse caso, o custo é diretamente proporcional a área construída, determina a área máxima que a casa pode ter efetuando o cálculo $\frac{200.000}{500} = 400$. Comparando os resultados obtidos em suas análises conclui que a área interna deve ser no mínimo 300m^2 e no máximo $400m^2$.

Ao dar sua resposta final, por meio do registro da língua natural, diz que a área pode ser de 300m^2, porém em seus protocolos evidencia que sabe que a área tem que ser maior que esse valor.

A resolução de Pedro também não estava prevista em nossa análise a *priori,* visto que a fizemos baseados na resolução formal de um sistema de inequações. Porém encontramos traços da resolução do sistema, mesmo que não o tenha escrito no registro algébrico usando uma letra para representar as possíveis áreas que a casa pode ter, pelo fato de, ao procurar um intervalo que satisfizesse as duas condições, ou seja, área interna+área de lazer > 500 e 50 x área interna $\leq$ 200.000, resolveu, de certa forma, o sistema de inequações implícito nesse problema.



AO RESOLVER A ATIVIDADE, ESCREVA O QUE VOCÊ PENSOU EM CADA PASSAGEM DA SUA RESOLUÇÃO.

4) João possui um terreno de $1000m^2$, no qual pretende construir uma casa. Ao engenheiro responsável pela planta, ele impõe as seguintes condições: a área destinada a lazer (piscina, churrasqueira, etc.) deve ter $200m^2$, e a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% da área total do terreno; além disso, o custo para construir a casa deverá ser de, no máximo, R$ 200.000,00. Sabendo que o metro quadrado construído nessa região custa R$ 500,00, qual é a área interna da casa que o engenheiro poderá projetar?

Área interna > 300 m²

$$\frac{200.000}{500} = 400m^2$$

$\therefore$ A área interna no mínimo é $300m^2$, no máximo é $400\ m^2$.

Figura 69 - Protocolo de Pedro – Atividade 4

A solução de Paulo consistiu em determinar primeiramente a área que corresponde a 50% da área total do terreno, provavelmente com o intuito de saber qual a área mínima que a casa pode ter. Porém, conforme o registro que fez em seus protocolos, parece-nos que desistiu dessa idéia, pois chega a dois possíveis valores para a área mínima que a casa deve ter que são $1300m^2$, o qual descarta, pois esse registro está riscado evidenciando que é para ser desconsiderado e mesmo por que não está correto, e $300m^2$ que também o descarta, embora esse valor seja útil para a resposta (pois é um dos extremos do intervalo). Procurou então se preocupar apenas com o valor máximo que pode ser gasto na construção, e por meio de uma “regra de três simples”, sabendo que um metro quadrado custa R$ 500,00 chegou à conclusão de que o engenheiro poderá projetar uma casa de $400m^2$.

Entendemos que Paulo, ao abandonar a tentativa de determinar a área mínima que a casa pode ter, desconsiderou essa variável e dessa forma não obteve a resposta completa, ou seja, respondeu apenas uma das possíveis áreas que a casa pode ter.

Em nossa análise a *priori* prevíamos que os alunos resolvessem um sistema de inequações que consiste em encontrar valores que respeitassem as duas condições dadas no enunciado do problema, e o erro cometido por Paulo foi justamente o de desconsiderar uma delas.

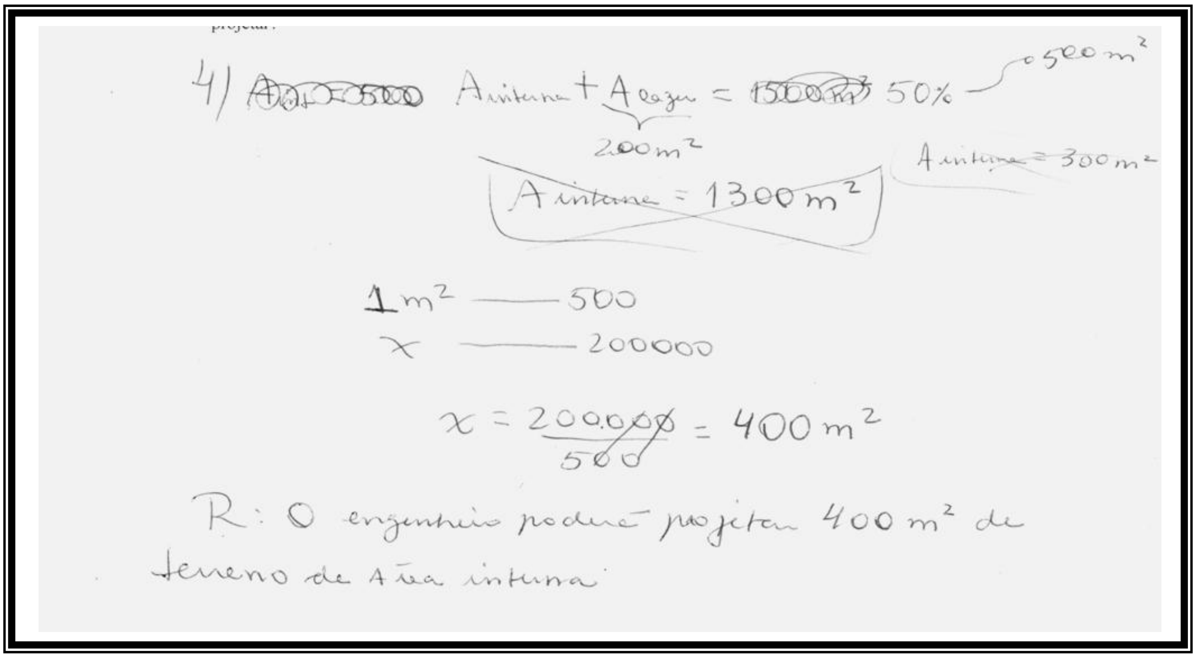


Figura 70 - Protocolo de Paulo – Atividade 4

Nessa atividade, nenhum dos alunos se utilizou do *software* para resolver o problema, conforme prevíamos em nossa análise a *priori*, talvez pelo fato de não vislumbrarem, naquele momento essa possibilidade ou não sentirem necessidade.

De uma forma geral, os alunos que consideram as duas condições para realização do projeto dadas no enunciado, saíram-se melhor do que aqueles que consideraram apenas uma delas. Percebemos também que aqueles alunos que fizeram uma figura (registro figural) para relacioná-lo com o enunciado do problema responderam-no totalmente.

5.2.1.5 Análise *a posteriori* da Atividade 5

Nessa atividade nenhum dos alunos se manifestou com relação a dúvidas referentes ao entendimento do enunciado.

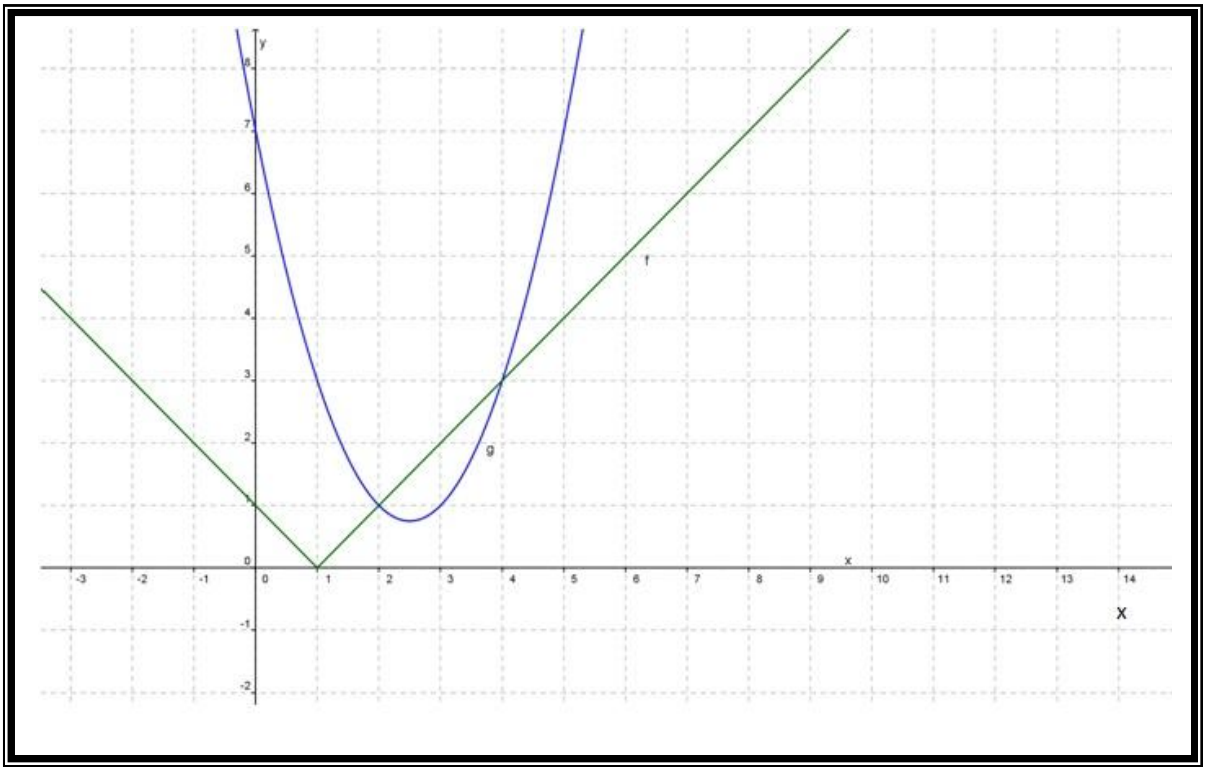
Vamos retomar o enunciado da questão e em seguida nossas análises quanto às resoluções utilizadas pelos alunos.

Atividade 5

No plano cartesiano abaixo estão representados os gráficos das funções f e g. Determine:

a) O domínio das funções f e g.

b) Os valores de x para os quais temos $g(x) > f(x)$.



No item *a)* Manoel analisou os gráficos considerando que os valores de x válidos para cada um deles são aqueles nos quais a curva está compreendida na figura, ou seja, para ele a função g tem domínio $-1 < x < 5$ e a função f tem domínio $-4 < x < 10$. Preocupou-se ainda em determinar valores inteiros para os extremos dos intervalos que considerou como sendo os domínios das g e h.

Embora Manoel tenha mostrado que entendeu o que é o domínio da função, considerou naquele momento apenas o aspecto visual, desconsiderando a continuidade dos gráficos. Não percebeu que quando constrói os gráficos com o *software* fica diante de situações semelhantes, exceto pelo caráter dinâmico que o GeoGebra apresenta (possibilidade de movimentar a janela do gráfico), mas pelos protocolos das atividades anteriores, esse recurso não foi utilizado.

Por outro lado no item $b)$ não foi coerente com a resposta do item $a)$, pois, embora tenha interpretado corretamente quando a função g assume valores maiores que a função f, respondeu um intervalo que não pertence ao domínio das funções que ele mesmo determinou, pois diz "$g(x) > f(x)$ quando a função g alcança maior valor de y que f. E isso ocorre entre -4 e 2 ou maior que 4". Percebemos que o intervalo $-4 < x < 2$ faz parte do domínio de g que o aluno determinou, mesmo que incorretamente, no item a) mas não faz parte do domínio de f (também determinado pelo aluno) e que, $x > 4$, conforme suas conclusões do item *a),* não faz parte do domínio de nenhuma das duas funções, ou seja, não relacionou a resposta do item *a)* com a resolução do item b).

Já esperávamos esse tipo de erro, que é muito comum em nossas salas de aula. Acreditamos que Manoel entendeu os conceitos envolvidos na atividade e dessa forma percebemos que tem a habilidade de interpretar gráficos, porém naquele momento, não percebeu que o gráfico não está limitado à janela apresentada no papel, assim como a relação direta que tem a resolução do item *a)* com a do item *b)*.

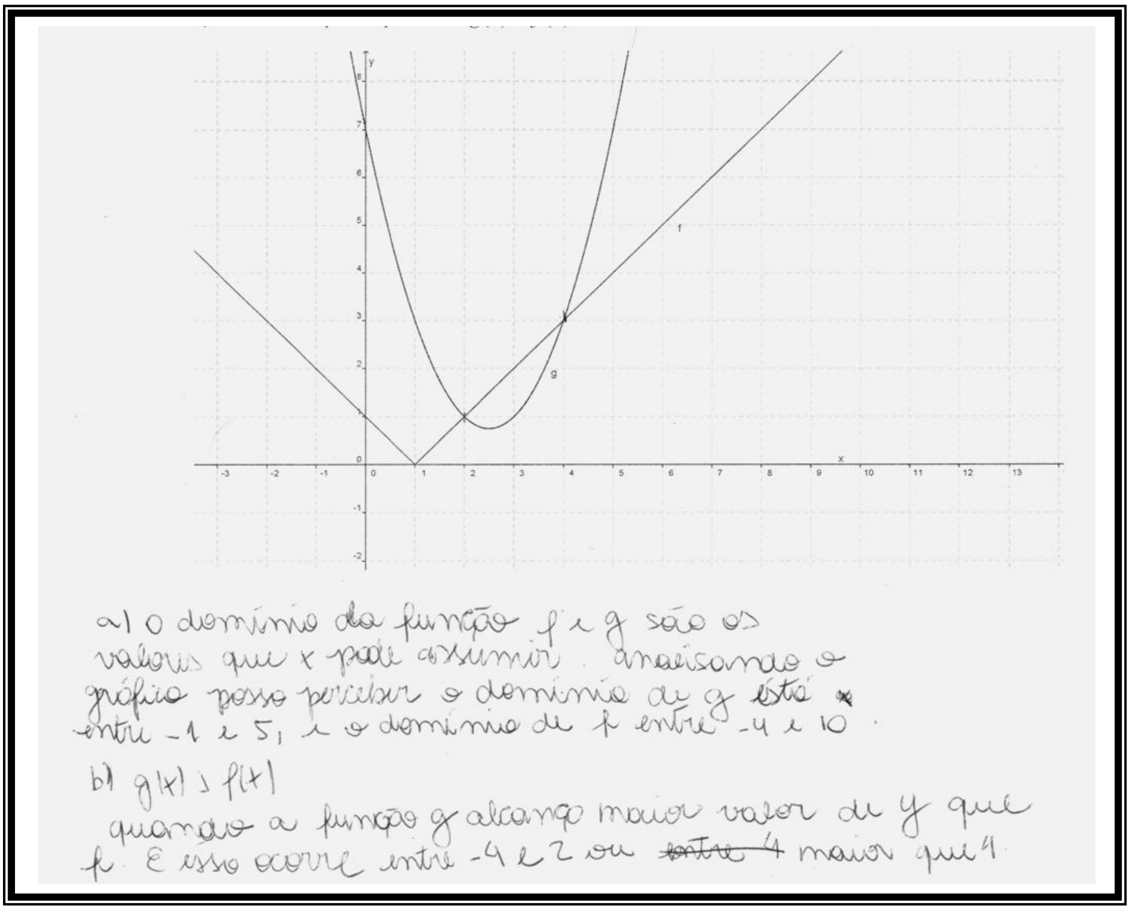


Figura 71 - Protocolo de Manoel – Atividade 5

Moisés, nessa atividade, foi muito direto em suas respostas, mostrando que as atividades anteriores, em que ele utilizou os gráficos em três das quatro, podem ter proporcionado um avanço em sua interpretação gráfica. No item *a)* respondeu que o domínio de ambas as funções é conjunto dos números reais e no item *b)* destacou a parte do gráfico em que $g(x) > f(x)$, chegando ao conjunto solução da inequação.

Previamos esse tipo de resolução em nossa análise a *priori*, e acreditamos que o conjunto das atividades favoreceu a resposta correta dada por Moisés.

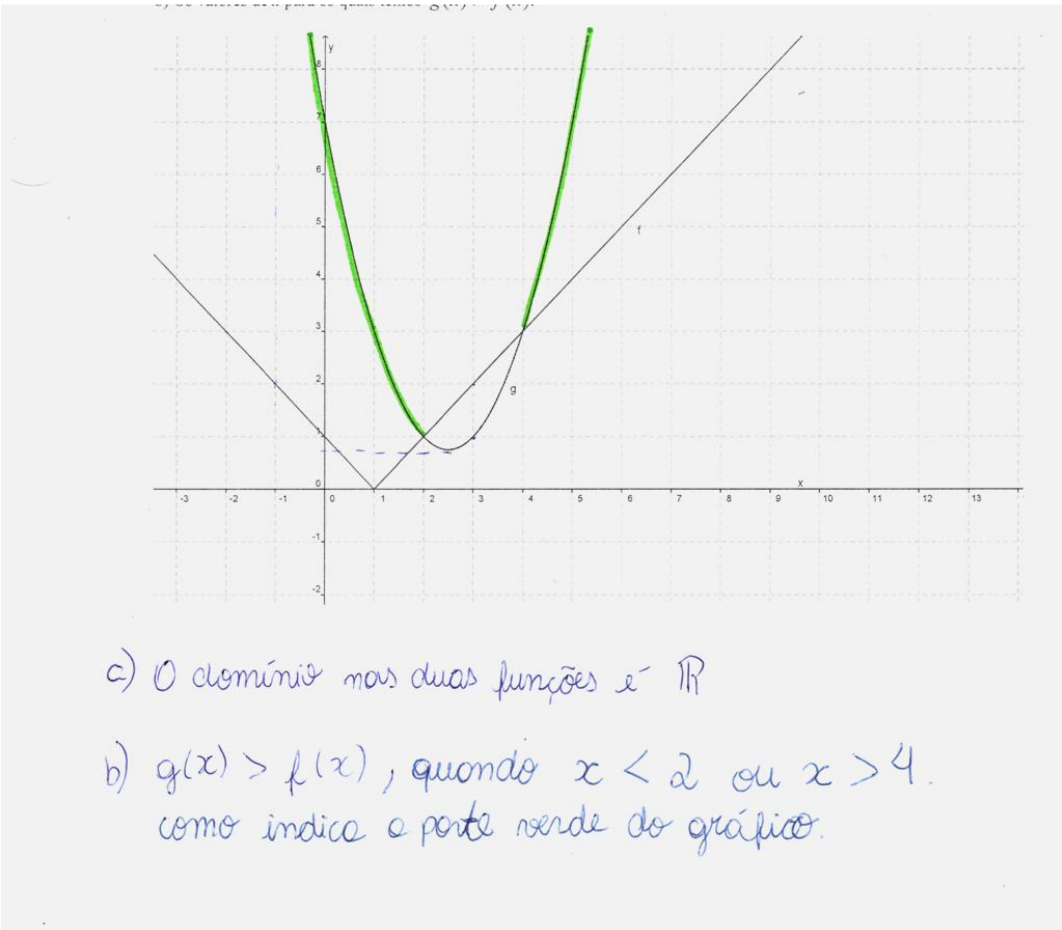


Figura 72 - Protocolo de Moisés – Atividade 5

Pedro também foi muito direto em sua resposta, respondendo o item *a)* por meio da linguagem simbólica dizendo " $D_{f(X)} = \{x \in \mathbb{R}\}$ e $D_{g(X)} = \{x \in \mathbb{R}\}$", mostrando que entendeu que o domínio de ambas as funções é o conjunto dos números reais. Para responder o item *b)* comparou os gráficos dados, marcando seus pontos de intersecção e justificando "Para $g(x) > f(x)$, nos valores de x, a curva tem que mais alta (maior) que a reta." Mostra que entendeu o objetivo da atividade e escreve por fim o conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R}/x < 2\ ou\ x > 4\}$.

Previamos esse tipo de solução em nossa análise a *priori*, inclusive na utilização da linguagem simbólica. Percebemos que Pedro, em todas as atividades sempre se preocupou em utilizar tanto o registro simbólico quanto o registro da língua natural em suas respostas, o que mostra que esse sujeito utiliza uma coordenação entre esses dois registros, sendo essa, segundo nosso referencial teórico, uma das premissas para o bom entendimento das ideias da Matemática.

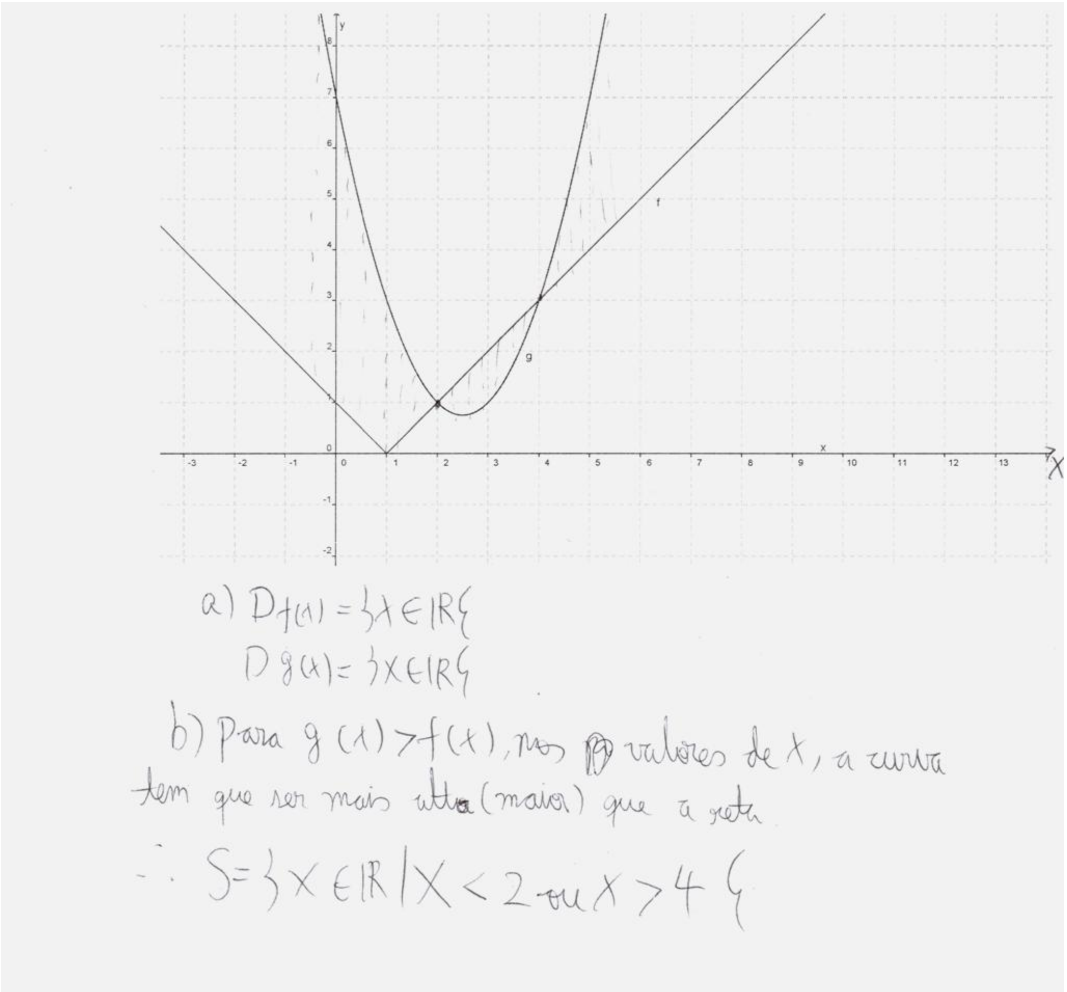


Figura 73 - Protocolo de Pedro – Atividade 5

Paulo a partir da leitura dos gráficos concluiu que o domínio tanto de g quanto de f é o conjunto dos números reais, inclusive utilizou-se de uma linguagem simbólica para representar os conjuntos, porém ao justificar suas conclusões, confundiu-se e escreveu “ $D_f \in \mathbb{R} \Rightarrow$ qualquer valor de y há resposta real p/ o x”, o que não é correto, pois o conjunto dos valores de y associados as duas funções não é o conjunto dos números reais e sim um subconjunto dele, dessa forma não é qualquer valor de y que está associado a um valor de x da função. Além disso, utilizou-se do símbolo $\in$ (pertence a) para relacionar o domínio da função com o conjunto dos reais, o que não é correto, pois tal símbolo serve para relacionar um elemento a um conjunto e nesse caso temos dois conjuntos, o correto seria escrever $D_f = \mathbb{R}$.

Registra no gráfico o fato de que $g(0) = 7$ e que $\Delta < 0$ no caso da função g cujo gráfico é uma parábola. Escreve que a expressão algébrica da função f é $f(x) = |x + 1|$, o que não está correto, na verdade $f(x) = |x - 1|$. Marca um dos pontos de intersecção dos gráficos das funções. Esses registros evidenciam que Paulo estava reunindo elementos para a resolução do item *b),* o qual respondeu corretamente, porém nos parece que ficou em dúvida algumas vezes, quanto ao intervalo $x < 2$, pois por duas vezes registra esse intervalo como sendo $0 < x < 2$, mas o descarta em seguida.

Nas atividades anteriores 1, 2 e 3, quando da resolução de inequações, evitou o uso dos gráficos, sempre optando pelos métodos tradicionais que consistem na construção de um quadro de sinais e posterior interpretação do que está pedindo o problema, dessa forma, quando diante de um problema que já está no registro gráfico, parece-nos que Paulo não sentiu-se muito confortável, explicando de forma equivocada a determinação do domínio da função e ficando em dúvida na resolução de uma inequação onde não temos as expressões algébricas.

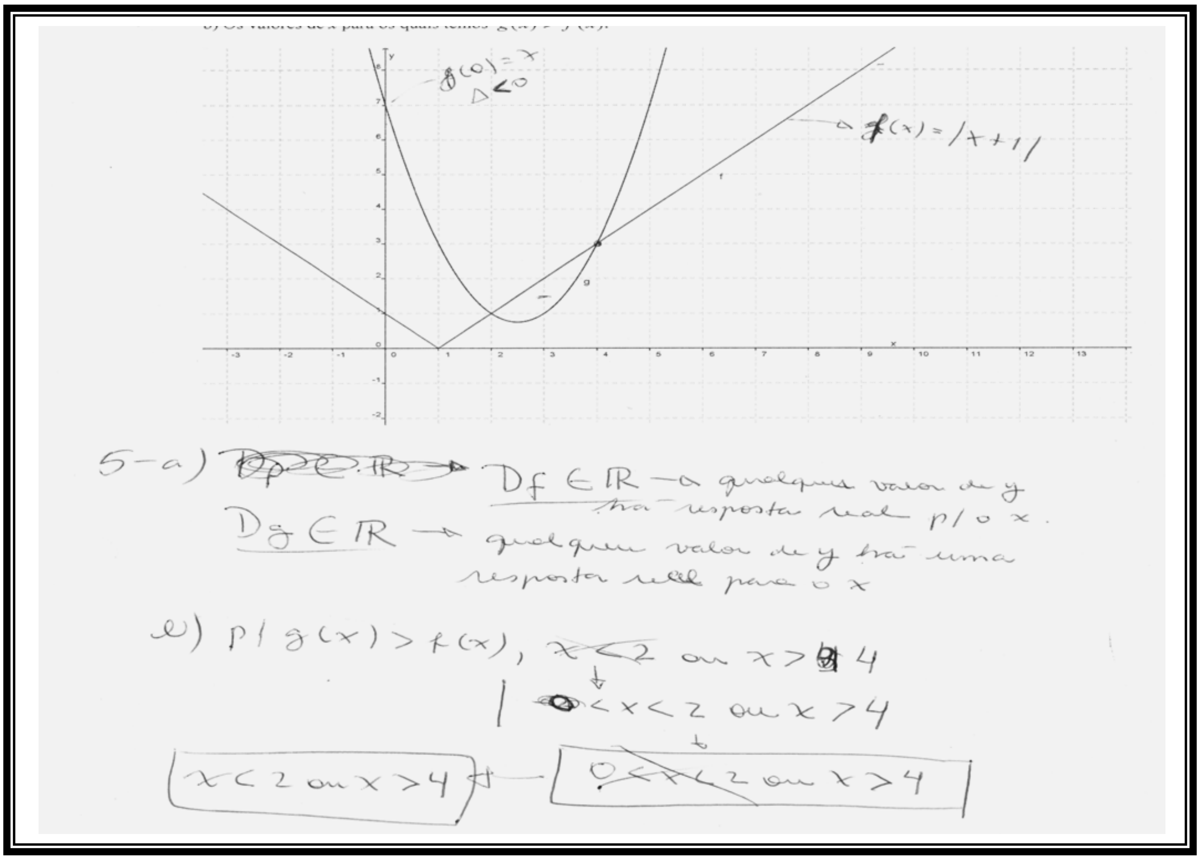


Figura 74 - Protocolo de Paulo – Atividade 5

Essa atividade, que é o fechamento de uma série de cinco, nos mostra que, de uma forma geral, aqueles alunos que se utilizaram de resoluções gráficas nas atividades anteriores, responderam essa de uma forma mais segura, evidenciando um avanço no entendimento desse tema.

As resoluções dos sujeitos nos dois itens dessa atividade coincidem com o que previamos em nossa análise a *priori*, visto que solicitamos, já com os gráficos prontos, tarefas que já tinham sido realizadas nas atividades anteriores.

Os possíveis erros, assim como o cometido por Manoel, de limitar o gráfico ao seu registro no papel, ou seja, não considerar que ele continua, também havíamos previsto, porém percebemos que Paulo pode ter dúvidas quanto ao que é o domínio de uma função, pois esse se confundiu ao justificar essa questão.

De uma forma geral, dentro dos objetivos que propomos, acreditamos que houve um avanço no que diz respeito à resolução de inequações por meio de uma abordagem funcional gráfica, utilizando-se de um *software* para efetuar a conversão do registro algébrico para o gráfico.

A seguir, analisaremos as mesmas atividades, resolvidas pelos mesmos alunos, uma semana depois da realização desta, porém fora de um ambiente computacional. Pretendemos mensurar qual foi a influência do *software* na resolução dessas atividades.

Após a realização dessa primeira sessão, na segunda-feira da semana seguinte, os alunos, sujeitos de nossa pesquisa, nos perguntaram se nós já havíamos “corrigido” suas atividades. Informamos a eles que não se tratava de corrigir e sim de analisar e que, tão logo concluíssemos essa pesquisa, comentaríamos com eles nossas conclusões.

Reforçamos ainda que na sexta-feira daquela semana faríamos outra atividade no laboratório de informática, porém, como citado anteriormente, os alunos não sabiam que resolveriam as mesmas questões sem o auxilio do *software* GeoGebra.

5.2.2 Sessão 2

5.2.2.1 Análise *a posteriori* da Atividade 1

Durante a aplicação dessa atividade nenhum aluno fez perguntas referentes ao enunciado da questão.

Vamos retomar a questão proposta:

Atividade 1

Considere as funções $g:\Re \to \Re$ e $h:\Re \to \Re$ definidas por $g(x) = x + 2$ e $h(x) = 5x$.

a) Resolva a equação $g(x) = h(x)$.

b) Determine todos os valores reais de x tais que $g(x) > 0$.

c) Determine todos os valores reais de x tais que $h(x) < 0$.

d) Resolva o sistema de inequações $\begin{cases} h(x) < 2 \\ g(x) > 20 \end{cases}$

e) Agora resolva a inequação $\dfrac{g(x)}{h(x)} > 0$.

Nessa sessão Manoel corrigiu a confusão que havia feito quando da resolução dessa atividade em ambiente informatizado. Naquela oportunidade, no item *a)* resolveu a equação $x + 2 = 5x$ justificando "vou dividir a equação por x, para em seguida dividir por 4 como uma tentativa de isolar a incógnita para obter esse valor que foi simplificado", nessa sessão ao resolver a mesma equação justificou "Primeiramente subtrai dos dois lados da equação o valor x (que representa a incógnita) para em seguida dividir por 4, obtendo o valor $x = \frac{2}{4}$, que se divido por dois eu obtenho $x = \frac{1}{2}$". O mesmo ocorreu com a resolução do item *b)*, ou seja, a justificativa equivocada dada na primeira resolução foi corrigida na segunda, o que mostra que Manoel entende os procedimentos algébricos que utilizou na resolução da equação do item *a)* e na inequação do item *b)*.

Assim como na primeira sessão, em que optou por uma solução gráfica, Manoel percebeu que o sistema de inequações proposto no item *d)* não tem solução. Para chegar a essa conclusão, resolveu separadamente cada uma das inequações obtendo os intervalos que as satisfazem. Após essa etapa, fez a intersecção dos intervalos obtidos percebendo que não há intervalo comum, portanto o sistema de inequações proposto não tem solução.

No item *e)* o aluno optou por construir um quadro de sinais para resolução da inequação racional proposta. Destacou os intervalos em que g e h são positivos, talvez entendendo que para o quociente $\frac{g}{h}$ ser positivo, ambos devem ser positivos. Não destacou os intervalos em que g e h são negativos, o que também faz com que o quociente seja positivo e então a intersecção desse intervalo faz parte do conjunto solução da inequação, porém considerou as duas opções ao dar a resposta (g e h positivas ou g e h negativas), o que está correto. No entanto confundiu-se ao localizar os números que representam os zeros das funções g e h na reta, pois considerou que -2 é maior que zero e dessa forma não chegou a resposta esperada.

Na primeira sessão Manoel optou por uma resolução gráfica do item e), construindo com o auxilio do *software* o gráfico de $\frac{g}{h}$., porém, naquela oportunidade não soube interpretar o gráfico confundindo-o com uma parábola e não chegando ao conjunto solução da inequação.

Na comparação entre as soluções apresentadas por Manoel nessa atividade nas duas sessões, percebemos que esse sujeito se saiu melhor na segunda, pois nessa escreveu justificativas melhores.

É claro que temos que considerar que os alunos podem ter conversado sobre as questões após a primeira sessão, porém percebemos um avanço no entendimento de Manoel referente ao item *e)* dessa atividade, mesmo porque ele não sabia que resolveria essa atividade novamente em nosso segundo encontro. O aluno evocou mais conceitos matemáticos na resolução desse item nesta sessão do que a interpretação gráfica equivocada que fizera no primeiro encontro.

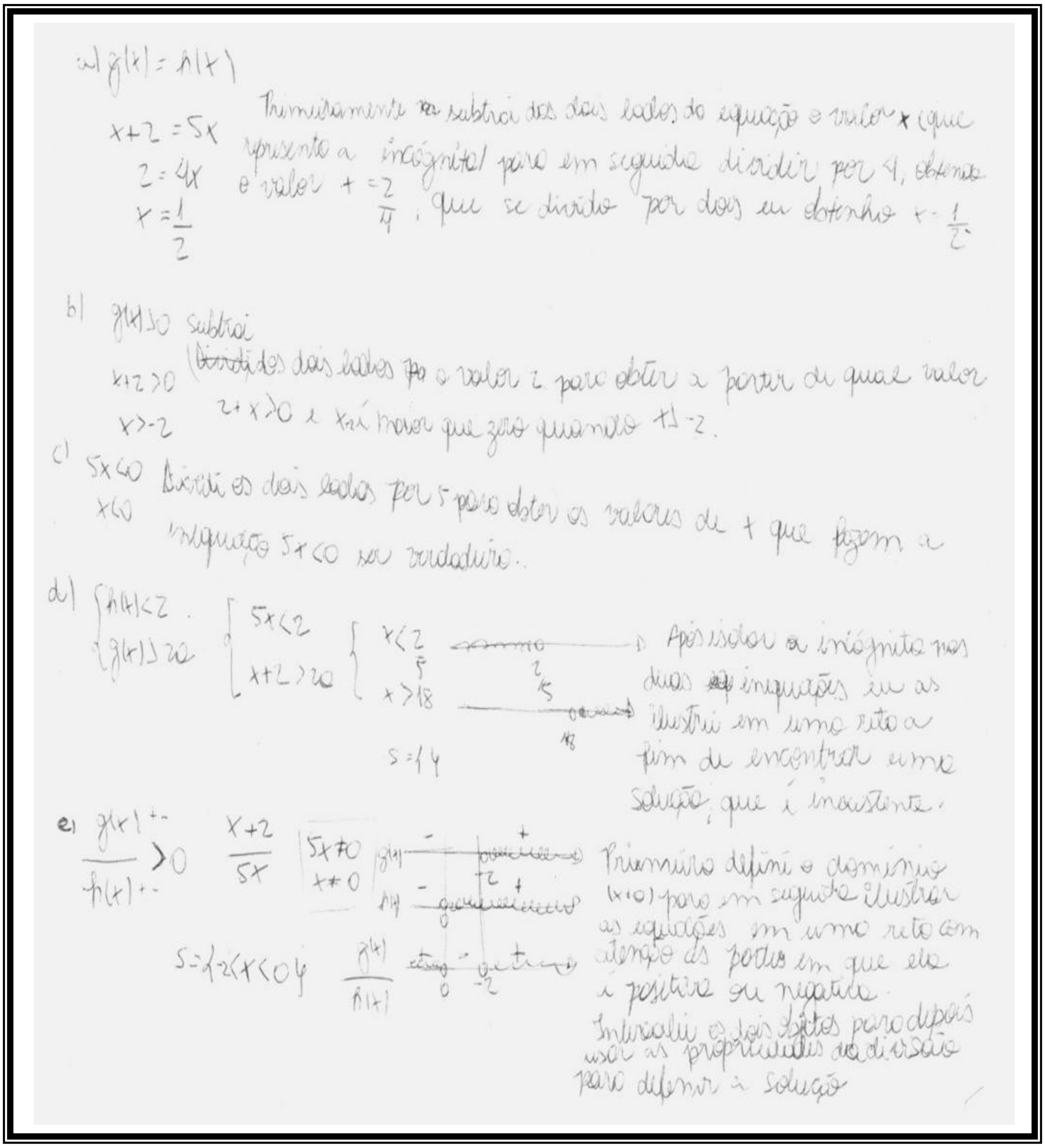


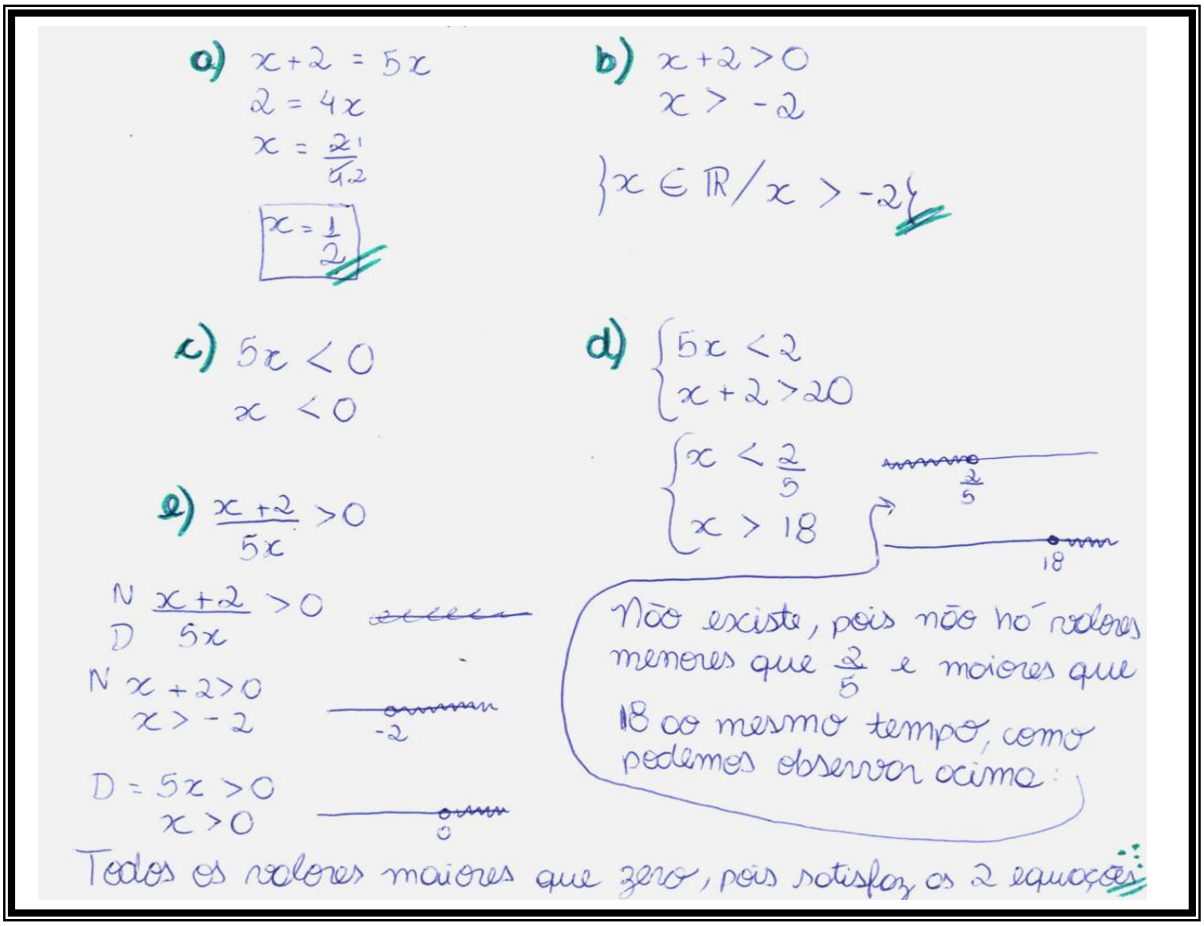
Figura 75 - Protocolo de Manoel – Atividade 1 – Sessão 2

Moisés mostrou nessa sessão não ter problemas no entendimento dos itens *a)*, *b)*, *c)* e *d)* dessa atividade, pois suas resoluções algébricas estão todas dentro do esperado e quando comparadas com suas resoluções gráficas, efetuadas na 1ª sessão cujas respostas são as mesmas desta, percebemos que esse sujeito entende tanto a resolução algébrica, quanto a resolução gráfica como sendo a mesma situação.

No item *e)* cometeu um erro muito comum em nossa sala de aula, que é o de achar que, no universo dos números reais, para um quociente ser positivo, o numerador e o denominador devem ser necessariamente positivos, esquecendo da possibilidade de que a divisão entre dois números negativos também é positiva. Utilizando dessa crença, para resolver a inequação $\frac{g(x)}{h(x)} > 0$ considerou somente a possibilidade $g(x) > 0$ e $h(x) > 0$ e dessa forma respondeu que o conjunto solução da inequação é $x > 0$, o que não é correto, visto que o intervalo $x < -2$ também faz parte do conjunto solução.

Na primeira sessão, quando utilizou o *software* para resolver os cinco itens dessa atividade, não cometeu esse erro, o que mostra que Moisés ainda tem dúvidas nesse tipo de situação, mas não na interpretação do gráfico quando este vem pronto ou quando dispomos da tecnologia para construí-lo.

Diante do exposto podemos afirmar que o *software*, no caso de Moisés, foi decisivo para a resolução correta desse último item.



a) $x+2 = 5x$
$2 = 4x$
$x = \frac{2}{4}$
$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

b) $x+2>0$
$x > -2$
$\{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$

c) $5x < 0$
$x < 0$

d) $\begin{cases} 5x < 2 \\ x+2 > 20 \end{cases}$
$\begin{cases} x < \frac{2}{5} \\ x > 18 \end{cases}$

Não existe, pois não há valores menores que $\frac{2}{5}$ e maiores que 18 ao mesmo tempo, como podemos observar acima.

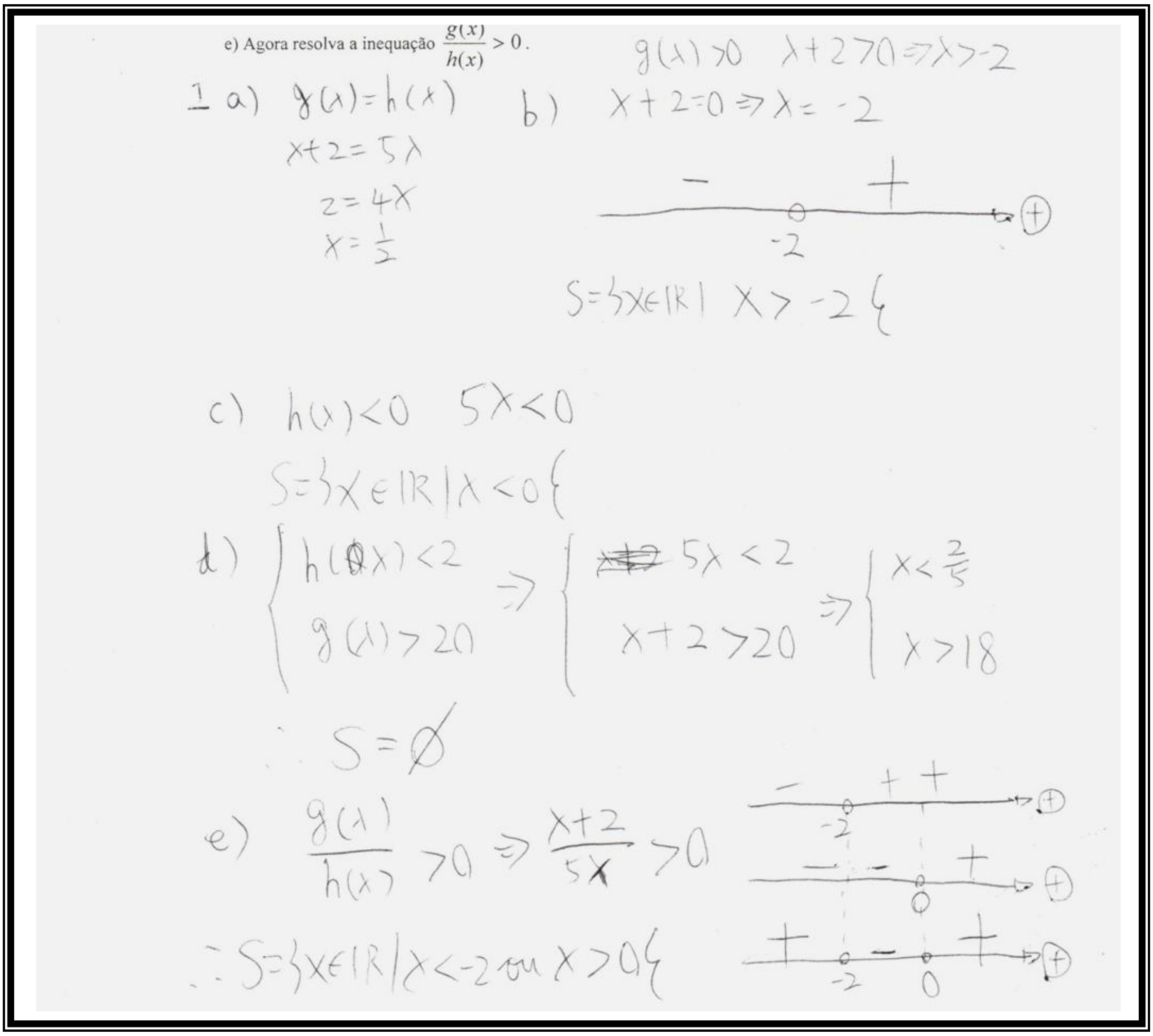
e) $\frac{x+2}{5x} > 0$
$\frac{N}{D} \; \frac{x+2}{5x} > 0$
N $x+2>0$
$x > -2$
D $= 5x > 0$
$x > 0$

Todos os valores maiores que zero, pois satisfaz as 2 equações.

Figura 76 - Protocolo de Moisés – Atividade 1 – Sessão 2

Na primeira sessão Pedro optou por resolver todos os itens utilizando-se dos gráficos, construídos com o auxilio do *software*. Explicou suas conclusões utilizando tanto a linguagem simbólica quanto o registro da língua natural, chegando a todas as respostas esperadas, com exceção do item *d)* em que inverteu o sistema que propomos que é $\begin{cases} h(x) < & 2 \\ g(x) > & 20 \end{cases}$ por $\begin{cases} g(x) < & 2 \\ h(x) > & 20 \end{cases}$, porém ainda assim, diante desse novo sistema o respondeu corretamente.

Nessa sessão efetuou todos os procedimentos algébricos corretos e chegou a todas as respostas esperadas o que mostra que esse sujeito consegue transitar naturalmente entre os registros de representação semiótica algébrico e gráfico, pois é o mesmo problema e devemos chegar às mesmas respostas, o que pode demonstrar o porquê responde as questões de forma tão segura.


e) Agora resolva a inequação $\frac{g(x)}{h(x)} > 0$.

$g(x) > 0 \quad x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

1 a) $g(x) = h(x)$

$x + 2 = 5x$

$2 = 4x$

$x = \frac{1}{2}$

b) $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

c) $h(x) < 0 \quad 5x < 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

d) $\begin{cases} h(x) < 2 \\ g(x) > 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x < 2 \\ x + 2 > 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{5} \\ x > 18 \end{cases}$

$S = \emptyset$

e) $\frac{g(x)}{h(x)} > 0 \Rightarrow \frac{x+2}{5x} > 0$

$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 0\}$

Figura 77 - Protocolo de Pedro – Atividade 1 – Sessão 2

Já havíamos comentado anteriormente a aparente preferência de Paulo por resoluções algébricas, pois na primeira sessão, sempre que possível optou por essa. Dizemos isto, pois, em todas as questões dessa atividade na primeira sessão, resolveu algebricamente cada item e, em seguida, comentou como seria a resolução gráfica, o que é uma atitude esperada, pois queríamos estimular a coordenação entre esses registros, porém suas justificativas em relação aos gráficos sempre foram menos enfatizadas. No item *e)*, por exemplo, não se aventurou em uma resolução gráfica, ficando somente com a resolução algébrica.

Nessa sessão, “desobrigado” de efetuar essa articulação, utilizou procedimentos algébricos corretos em todos os itens, produzindo as respostas esperadas, mostrando que o *software* para essa atividade não era necessário no seu caso.

Paulo mostrou, no momento em que aconteceu essa pesquisa, um pleno entendimento dos procedimentos que devem ser realizados para resolver as situações presentes na atividade 1.

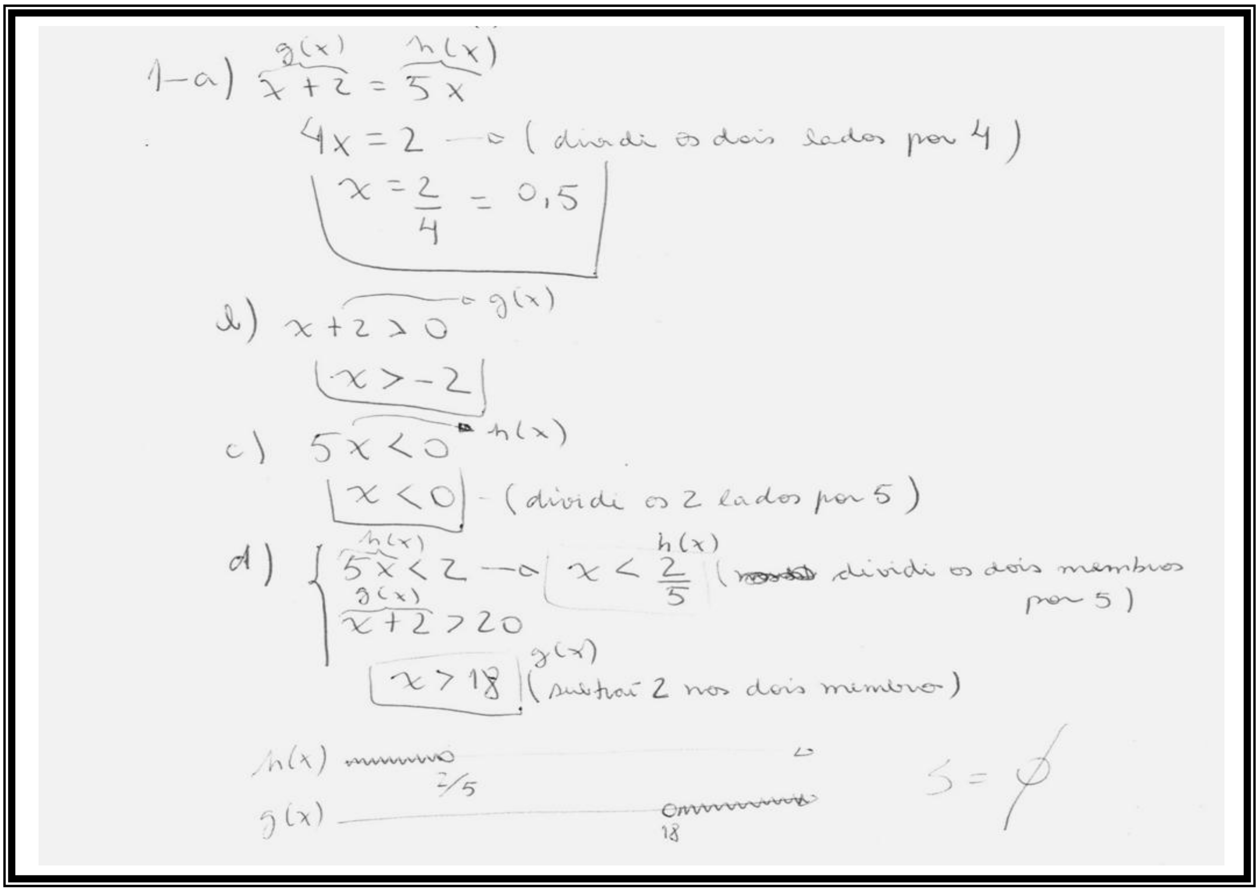


Figura 78 - Protocolo de Paulo – Atividade 1 a), b), c) e d) – Sessão 2

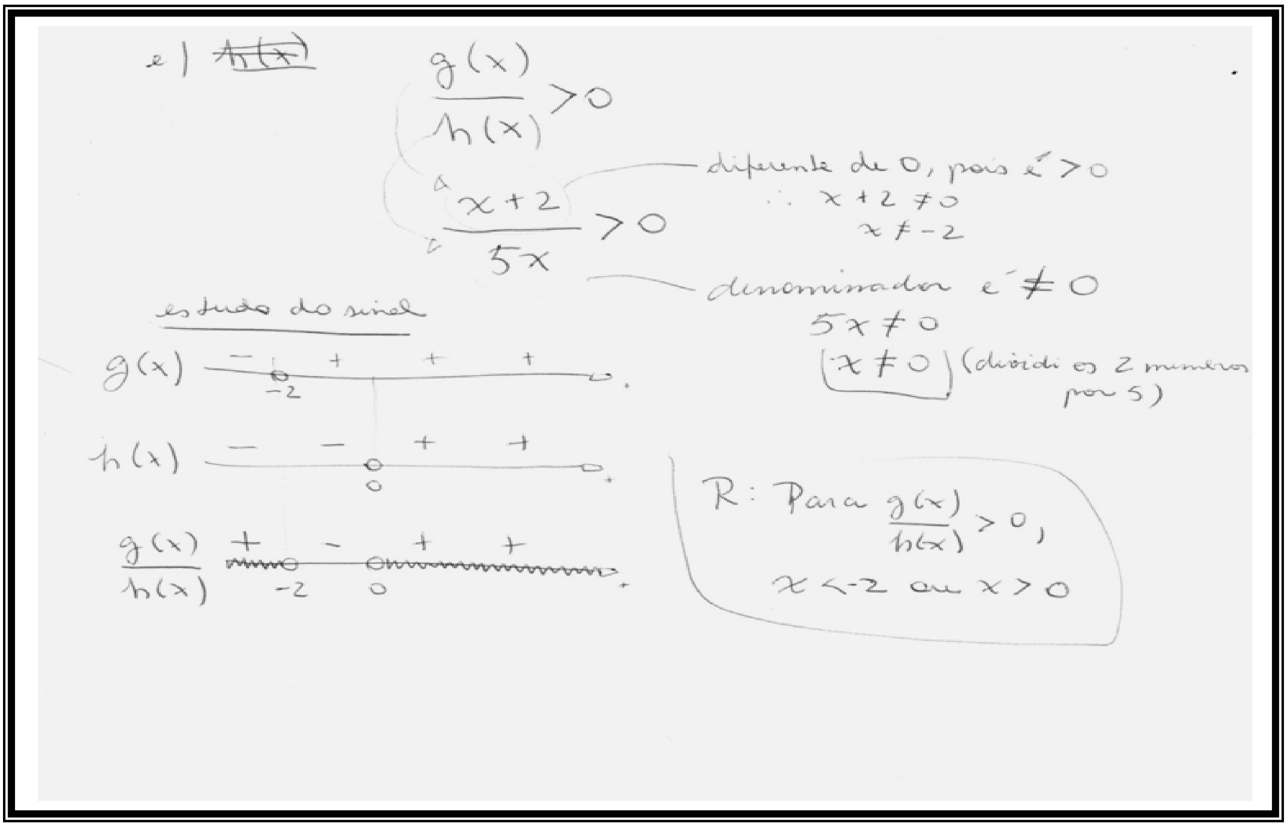


Figura 79 - Protocolo de Paulo – Atividade 1 e) – Sessão 2

5.2.2.2 Análise *a posteriori* da Atividade 2

Assim como na Atividade 1, nenhum dos alunos se manifestou com relação a dúvidas referentes ao enunciado.

Vamos retomar o enunciado da questão em seguida nossas análises quanto às resoluções dos alunos.

Atividade 2

Considere a função $f : A \to \Re$ definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 5x + 4}}$

a) Calcule $f(3{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(4)$ e $f(5)$.

b) Denomina-se domínio de uma função o **maior conjunto** de valores que podem ser atribuídos a variável independente. Relacionando a definição de domínio da função com os resultados do item a, determine o domínio A da função f .

Nessa sessão Manoel resolveu o item *a)* substituindo os valores de x dados na expressão algébrica da função f, obtendo as respostas que esperávamos para essa etapa do problema. Diferentemente do que fez na sessão 1, quando utilizou o símbolo de conjunto vazio para mostrar que não existe imagem por meio da função f de alguns valores que solicitamos, dessa vez utilizou o símbolo de não existe ($\nexists$) o que é mais conveniente nesse caso. Percebemos que Manoel sabe que não é possível uma divisão com divisor igual a zero e que também não é possível determinar, no universo dos números reais, a raiz quadrada de um numero negativo.

Na primeira sessão, Manoel optou pelo uso do *software*, e utilizando as ferramentas dele chegou às mesmas conclusões dessa sessão.

No item *b)* , utilizando um quadro de sinais, chegou mais perto da resposta do que na primeira sessão, pois o único equivoco cometido por ele foi o de excluir os valores $x = 3$ e $x = 6$ do domínio da função, porém esses são os valores que anulam apenas o numerador do quociente e dessa forma é possível extrair a raiz quadrada, o que mostra que pode acreditar que a raiz quadrada de zero não existe no universo dos números reais.

Assim como na Atividade 1, Manoel se saiu melhor na segunda sessão do que na primeira, evidenciando que, naquele momento, não possuía desenvolvida a habilidade de interpretação dos gráficos quando estes não são oriundos de funções afins ou quadráticas.

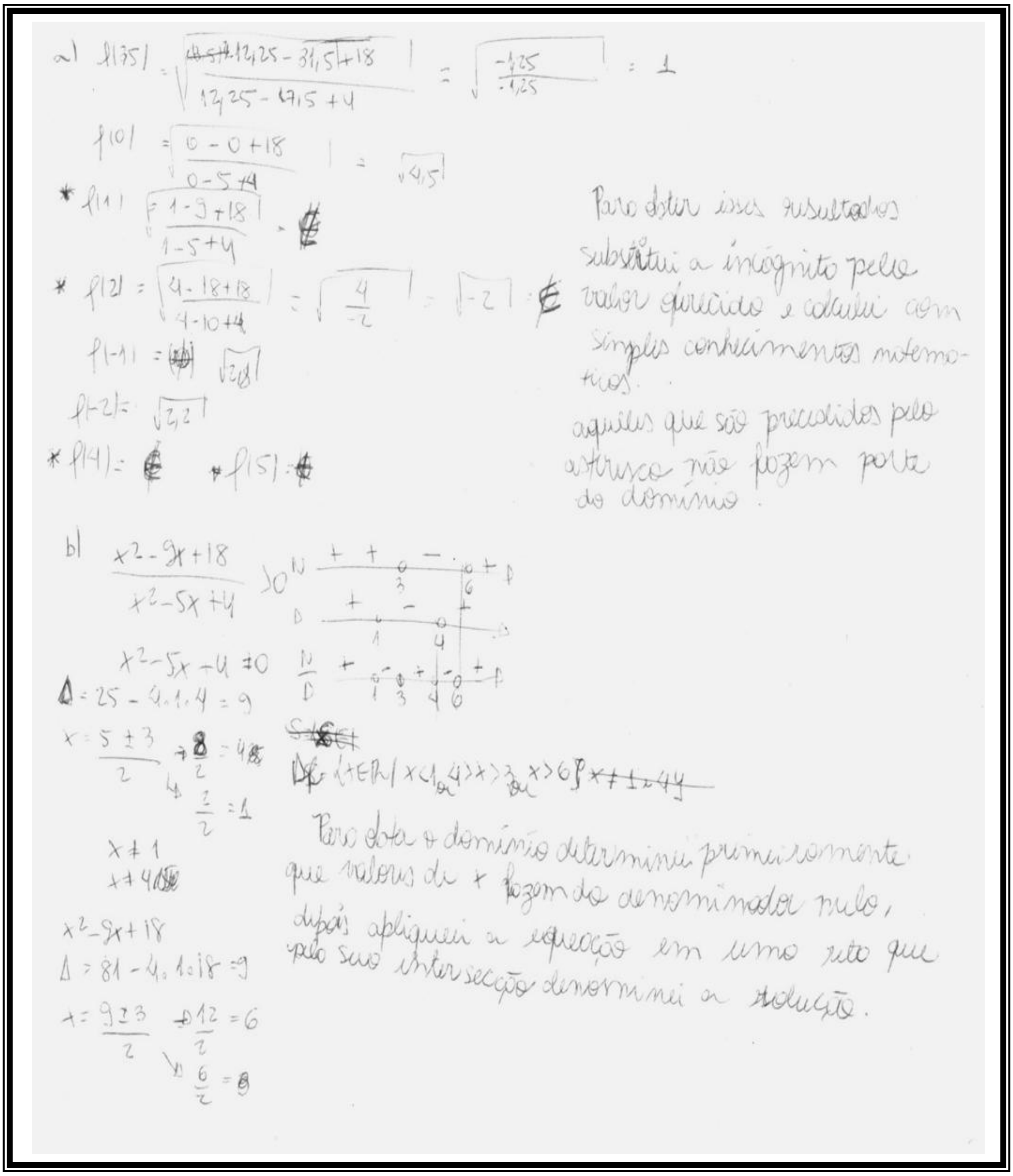


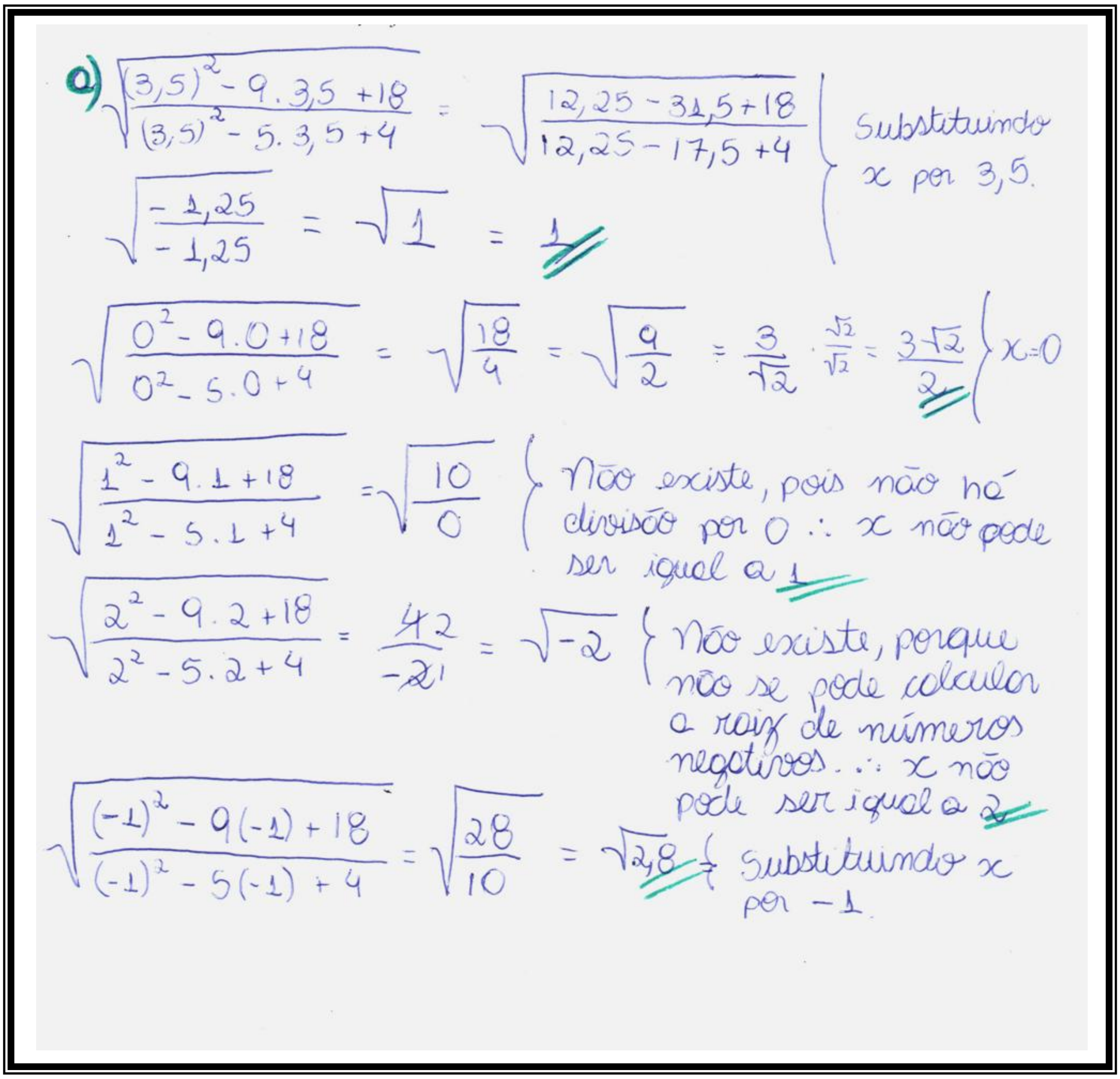
Figura 80 - Protocolo de Manoel – Atividade 2 – Sessão 2

Moisés resolveu o item *a)* substituindo os valores de x dados no enunciado na função f e por meio de cálculos numéricos chegou às respostas esperadas. Mostrou entender que não é possível uma divisão por zero e que também não é possível determinar a raiz quadrada de números negativos no universo dos números reais.

A resolução de Moisés na primeira sessão foi gráfica e por meio dela chegou às mesmas conclusões, porém na segunda sessão, evitou arredondamentos, registrando sempre o resultado exato das operações.

Com relação ao item *b)* Moisés, naquele momento, equivocou-se na determinação do domínio, relacionando-o apenas com os cálculos do item *a),* dizendo "descartando os valores que comprovamos não servirem para essa função sobram apenas: $x = 3{,}5$ / $x = 0$ $/x = -1$ e $x = -2$ $\therefore$ $\{x \in \mathbb{R}/0 \leq x \leq 3{,}5\ ou - 1 \leq x \leq -2\}$", o que não é verdadeiro e não representa o domínio dessa função. Na primeira sessão Manoel se aproximou mais do intervalo que representa o domínio da função utilizando apenas a resolução gráfica. Naquela oportunidade respondeu $\{x \in \mathbb{R}/x < 1\ \ ou\ 3 \leq x \leq 4\ ou\ x > 6\}$, cometendo o equivoco de excluir do conjunto os valores $x = 6$ e $x = 3$, demonstrando que entende que não é possível determinar a raiz quadrada de zero, o que também não está correto.

Assim como na Atividade 1, o uso do *software* foi uma importante ferramenta na resolução do problema, o que mostra que esse aluno ainda tem dúvidas a respeito da inequação quociente que teria que resolver para determinar o domínio da função, pois não conseguiu relacionar a resolução gráfica com a algébrica.



a) $\sqrt{\frac{(3,5)^2 - 9.3,5 + 18}{(3,5)^2 - 5.3,5 + 4}} = \sqrt{\frac{12,25 - 31,5 + 18}{12,25 - 17,5 + 4}}$ } Substituindo x por 3,5.

$\sqrt{\frac{-1,25}{-1,25}} = \sqrt{1} = 1$

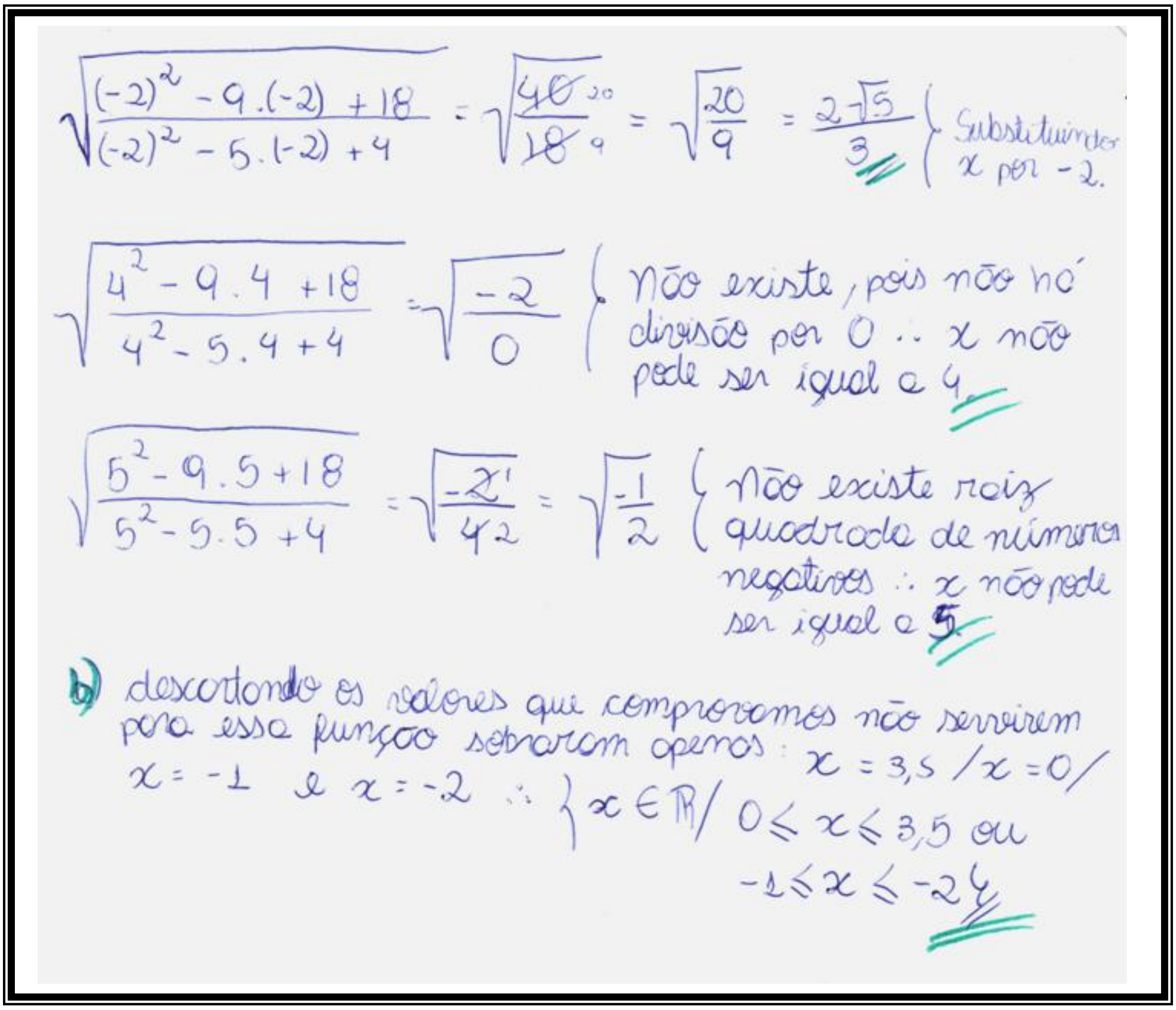
$\sqrt{\frac{0^2 - 9.0 + 18}{0^2 - 5.0 + 4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ } $x = 0$

$\sqrt{\frac{1^2 - 9.1 + 18}{1^2 - 5.1 + 4}} = \sqrt{\frac{10}{0}}$ } Não existe, pois não há divisão por 0 ∴ x não pode ser igual a 1

$\sqrt{\frac{2^2 - 9.2 + 18}{2^2 - 5.2 + 4}} = \frac{4}{-2} = \sqrt{-2}$ } Não existe, porque não se pode calcular a raiz de números negativos. ∴ x não pode ser igual a 2

$\sqrt{\frac{(-1)^2 - 9(-1) + 18}{(-1)^2 - 5(-1) + 4}} = \sqrt{\frac{28}{10}} = \sqrt{2,8}$ } substituindo x por −1.

Figura 81 - Protocolo de Moisés– Atividade 2 a) – Sessão 2



$\sqrt{\frac{(-2)^2-9.(-2)+18}{(-2)^2-5.(-2)+4}} = \sqrt{\frac{\cancel{40}^{20}}{\cancel{18}_{9}}} = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ } Substituindo x por -2.

$\sqrt{\frac{4^2-9.4+18}{4^2-5.4+4}} = \sqrt{\frac{-2}{0}}$ } Não existe, pois não há divisão por 0 ∴ x não pode ser igual a 4.

$\sqrt{\frac{5^2-9.5+18}{5^2-5.5+4}} = \sqrt{\frac{\cancel{-2}^{1}}{42}} = \sqrt{\frac{-1}{2}}$ } Não existe raiz quadrada de números negativos ∴ x não pode ser igual a 5.

b) descartando os valores que comprovamos não servirem para essa função sobraram apenas: $x = 3,5$ / $x = 0$ / $x = -1$ e $x = -2$ ∴ $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 3,5$ ou $-1 \leq x \leq -2\}$

Figura 82 - Protocolo de Moisés– Atividade 2 a), b) – Sessão 2

Pedro em sua resolução algébrica substituiu os valores de x dados no enunciado na função f e determinou todas as respostas conforme esperado. Provavelmente utilizou a calculadora, pois diferente dos protocolos de Manoel e Moisés, esse arredondou alguns resultados, como a raiz quadrada de 2,8, por exemplo. Continuou utilizando a notação de conjunto vazio para representar os valores de x que não tem imagem por meio da função f.

Em relação ao item *b)* percebeu que o radicando deve ser positivo ou nulo para ser possível a determinação da raiz quadrada, e elaborou um quadro de sinais para a resolução da inequação por ele proposta. Fez o estudo sinal da função quadrática que representa o numerador do quociente (radicando da expressão algébrica que representa a função f) corretamente, porém ao fazer o estudo do sinal da expressão que representa o denominador, equivocou-se na determinação dos intervalos que o tornam positivo assim como naqueles que o tornam negativo. Dessa forma ao comparar esses intervalos, determinou um conjunto que não representa o domínio da função respondendo $\{1 < x \leq 3 \quad ou\, 4 < x \leq 6\}$, note que $x = 2$ e $x = 5$ fazem parte desses intervalos, e no item *a)* Pedro respondeu que $f(2)$ e $f(5)$ não existem.

Na sessão anterior, quando tinha à disposição o *software*, esse sujeito tinha determinado corretamente o domínio da função f. O que mostra que o aspecto visual dos gráficos o ajudou a não cometer erros em sua resolução, que também foi algébrica, pois teve a possibilidade de inter-relacionar os aspectos da resolução gráfica com a algébrica e fazer uma análise mais apurada.

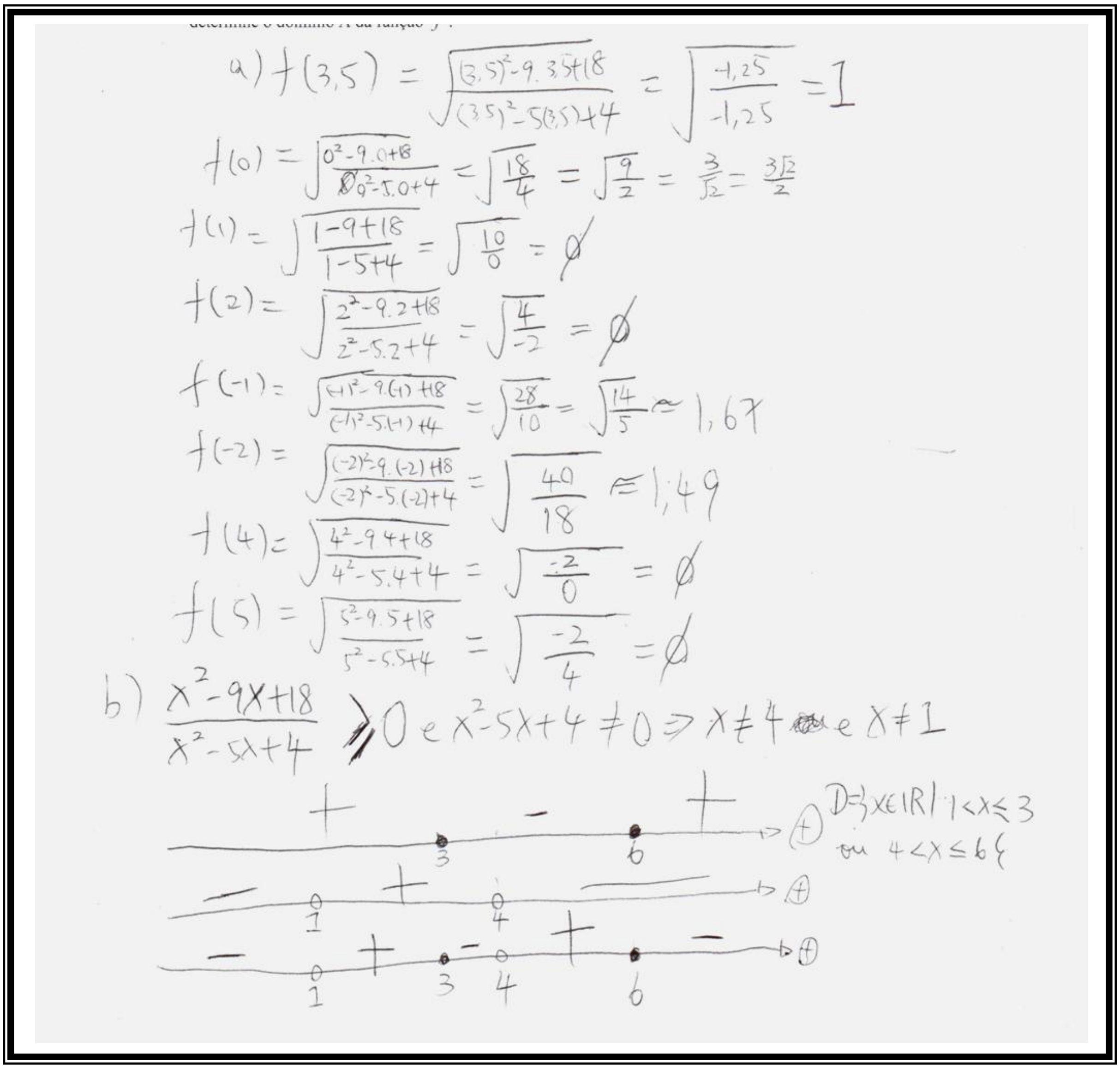
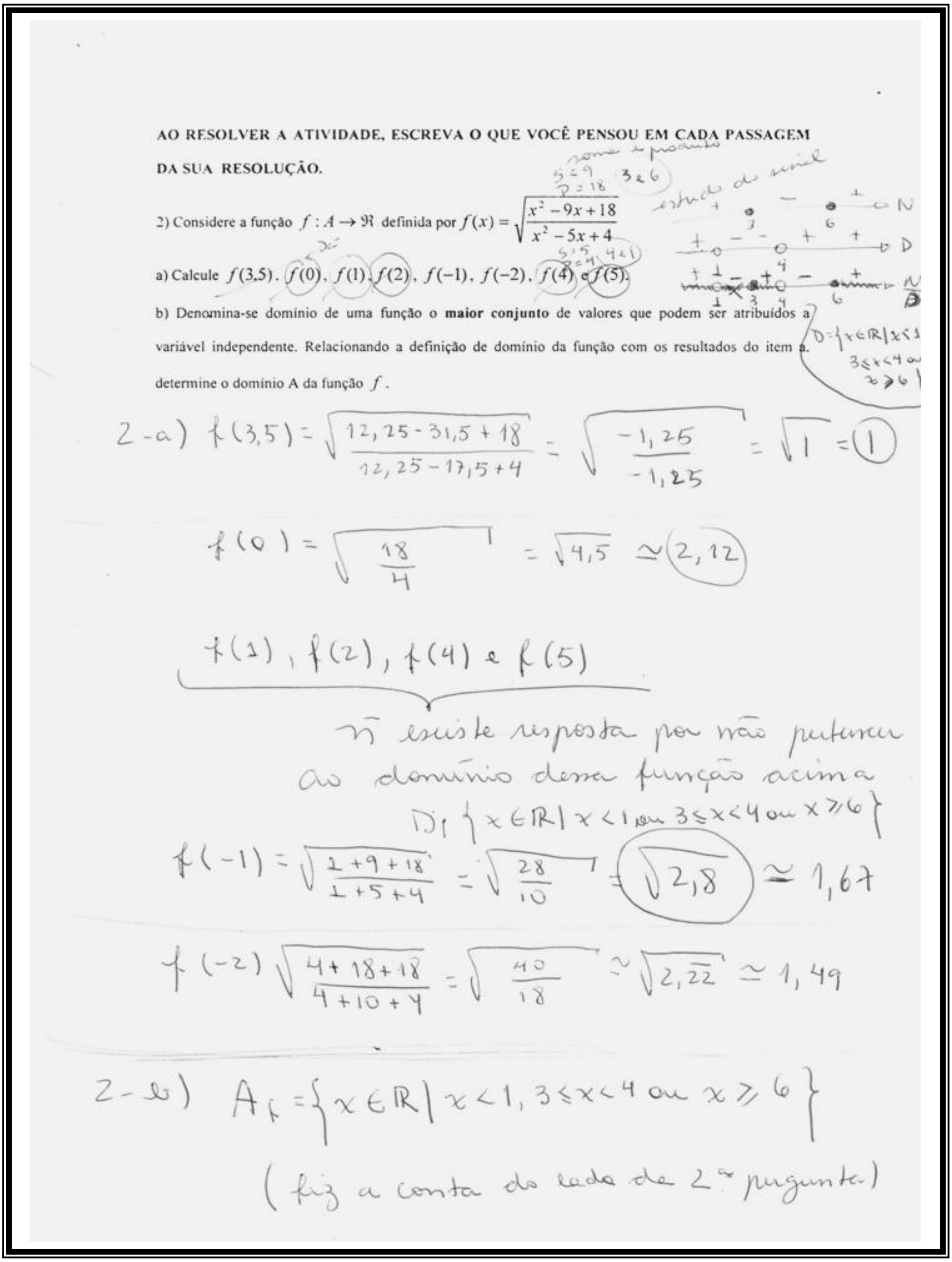


Figura 83- Protocolo de Pedro– Atividade 2 – Sessão 2

Paulo antes de responder o item *a)* determinou o domínio da função f. Percebendo que a raiz quadrada de um número negativo não é possível no universo dos números reais, fez o estudo do sinal da função racional que representa o radicando da expressão algébrica dada no enunciado, ou seja, resolveu a inequação $\frac{x^2-9x+18}{x^2-5x+4} \geq 0$. Dessa forma, percebeu que $f(1), f(2), f(4)$ e $f(5)$ não são imagens da função, pois esses valores de x não fazem parte do domínio. Calculou então os demais valores chegando às respostas esperadas, provavelmente com o auxilio da calculadora.

Na primeira sessão também adotou procedimento semelhante. Menciona a solução gráfica, em que constrói os gráficos das funções que representam o numerador e o denominador do quociente presente na expressão algébrica que representa a função, e a partir da interpretação desses gráficos constrói um quadro de sinais para analisá-lo e responder qual é o domínio da função.

Percebemos que Paulo conhece o comportamento das funções quadráticas e as propriedades da radiciação, dessa forma a possibilidade de uso do *software* não foi decisiva na resolução dessa questão, pois suas resoluções são praticamente idênticas.



AO RESOLVER A ATIVIDADE, ESCREVA O QUE VOCÊ PENSOU EM CADA PASSAGEM DA SUA RESOLUÇÃO.

soma e produto

S = 9
P = 18 3 e 6

estudo do sinal

2) Considere a função $f: A \to \Re$ definida por $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-9x+18}{x^2-5x+4}}$

S = 5
P = 4 4 e 1

a) Calcule $f(3{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(4)$ e $f(5)$.

b) Denomina-se domínio de uma função o **maior conjunto** de valores que podem ser atribuídos a variável independente. Relacionando a definição de domínio da função com os resultados do item a, determine o domínio A da função f.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1$ $3 \leq x < 4$ ou $x \geq 6\}$

2-a) $f(3{,}5) = \sqrt{\dfrac{12{,}25 - 31{,}5 + 18}{12{,}25 - 17{,}5 + 4}} = \sqrt{\dfrac{-1{,}25}{-1{,}25}} = \sqrt{1} = 1$

$f(0) = \sqrt{\dfrac{18}{4}} = \sqrt{4{,}5} \simeq 2{,}12$

$\underbrace{f(1),\ f(2),\ f(4) \text{ e } f(5)}$

não existe resposta por não pertencer ao domínio dessa função acima

$D: \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1$ ou $3 \leq x < 4$ ou $x \geq 6\}$

$f(-1) = \sqrt{\dfrac{1+9+18}{1+5+4}} = \sqrt{\dfrac{28}{10}} = \sqrt{2{,}8} \simeq 1{,}67$

$f(-2)\ \sqrt{\dfrac{4+18+18}{4+10+4}} = \sqrt{\dfrac{40}{18}} \simeq \sqrt{2{,}22} \simeq 1{,}49$

2-b) $A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1,\ 3 \leq x < 4$ ou $x \geq 6\}$

(fiz a conta do lado da 2ª pergunta)

Figura 84- Protocolo de Paulo – Atividade 2 – Sessão 2

5.2.2.3 Análise *a posteriori* da Atividade 3

Assim como nas atividades anteriores, nenhum dos alunos se manifestou com relação a dúvidas referentes ao enunciado.

Vamos retomar o enunciado da questão em seguida nossas análises quanto às resoluções dos alunos.

Atividade 3

Considere a função $w:\Re \to \Re$ e $z:\Re \to \Re$ definidas por $w(x) = 3^x$ e $z(x) = x^2 - 1$

a) Calcule $w(-2)$, $w(-1)$, $w(0)$, $w(1)$ e $w(2)$.

b) Determine $z(-2)$, $z(0)$ e $z(2)$.

c) Resolva a inequação $\dfrac{z(x)}{w(x)} < 0$.

Na resolução dos itens *a)* e *b)* Manoel substituiu os valores de x dados no enunciado, chegando a todas as respostas esperadas, assim como o fez na primeira sessão, onde tinha o auxilio do *software*. A única diferença notada em suas respostas foi a ausência de arredondamentos, ou seja, respondeu $w(-2) = \frac{1}{9}$ e $w(-1) = \frac{1}{3}$, na primeira questão, por seguir os arredondamentos feitos pelos GeoGebra, respondeu $w(-2) = 0{,}1$ e $w(-1) = 0{,}33$.

Com relação ao item *c)*, em que na primeira sessão com o auxilio do *software* para construir o gráfico, chegou ao conjunto solução da inequação, dessa vez não interpretou corretamente o quociente. Percebeu que a função w é positiva para qualquer valor de x real, o que está correto, porém quanto à função z, que é uma função quadrática que possui dois zeros reais, determinou apenas um desses zeros que foi $x = 1$ e interpretou que essa função para valores maiores que de x=1 é positiva e para valores menores que $x = 1$ é negativa, como se a função fosse $z(x) = x - 1$, cujo gráfico é uma reta. Dessa forma não conseguiu, naquele momento, determinar o conjunto solução da inequação.

Percebemos que o *software*, para Manoel, foi decisivo na resolução do item *c)* dessa atividade, uma vez que na primeira sessão, quando o utilizou, chegou ao conjunto solução da inequação, enquanto na segunda sessão, mostrou que ainda tem dúvidas referentes a solução de inequações quocientes, inclusive confundindo-a com equações, pois diz com relação ao item *c)* “Resolvi as equações e depois coloquei as duas em uma reta para achar na intersecção a solução”.

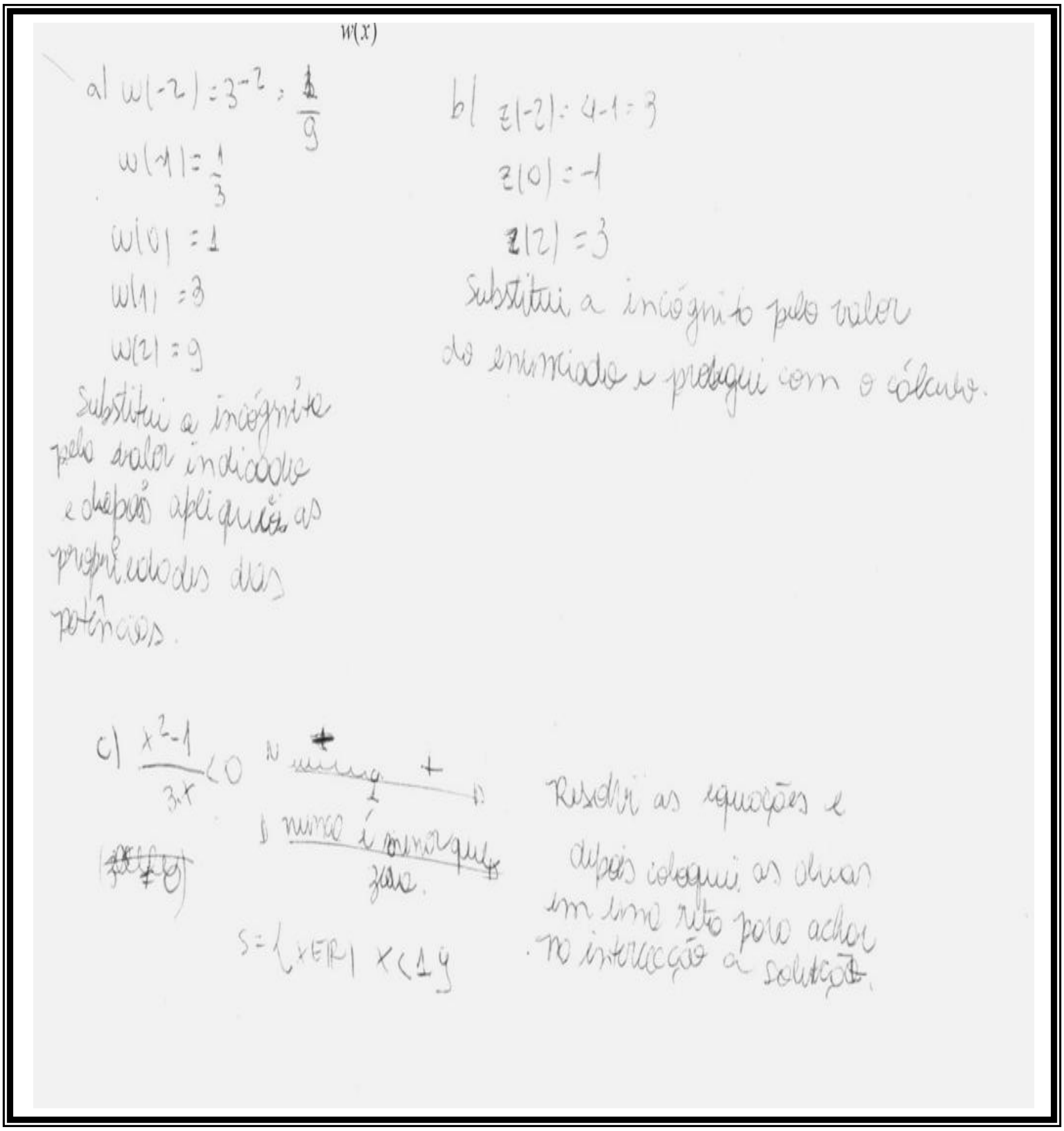


Figura 85- Protocolo de Manoel – Atividade 3 – Sessão 2

Moisés resolveu os itens *a)* e *b)* substituindo os valores de x dados no enunciado nas funções w e z chegando a todas as respostas esperadas. Assim como Manoel, dessa vez não efetuou nenhum arredondamento, uma vez que, na primeira sessão quando tinha a disposição o *software*, utilizou-se dos arredondamentos feitos pelo programa.

Ao resolver o item *c)* na primeira sessão, construiu com o auxilio do GeoGebra o gráfico de $\frac{z}{w}$ e analisou quando esse quociente é negativo diretamente na tela do computador, chegando ao conjunto solução da inequação. Nessa sessão Moisés achou que para um quociente ser negativo, devemos ter o numerador negativo e o denominador negativo, o que não está correto, inclusive chega a resolver a inequação $3^x < 0$ acreditando que ela é satisfeita para $x < 0$, que também não está correto, além de resolver a inequação $x^2 - 1 < 0$ como se fosse a inequação $x - 1 < 0$.

Moisés mostrou, nessa sessão, que tem dúvidas na resolução de uma inequação quociente e que a resposta correta dada na primeira sessão deve-se a sua correta interpretação sobre gráficos e o auxilio do *software* para construí-los.

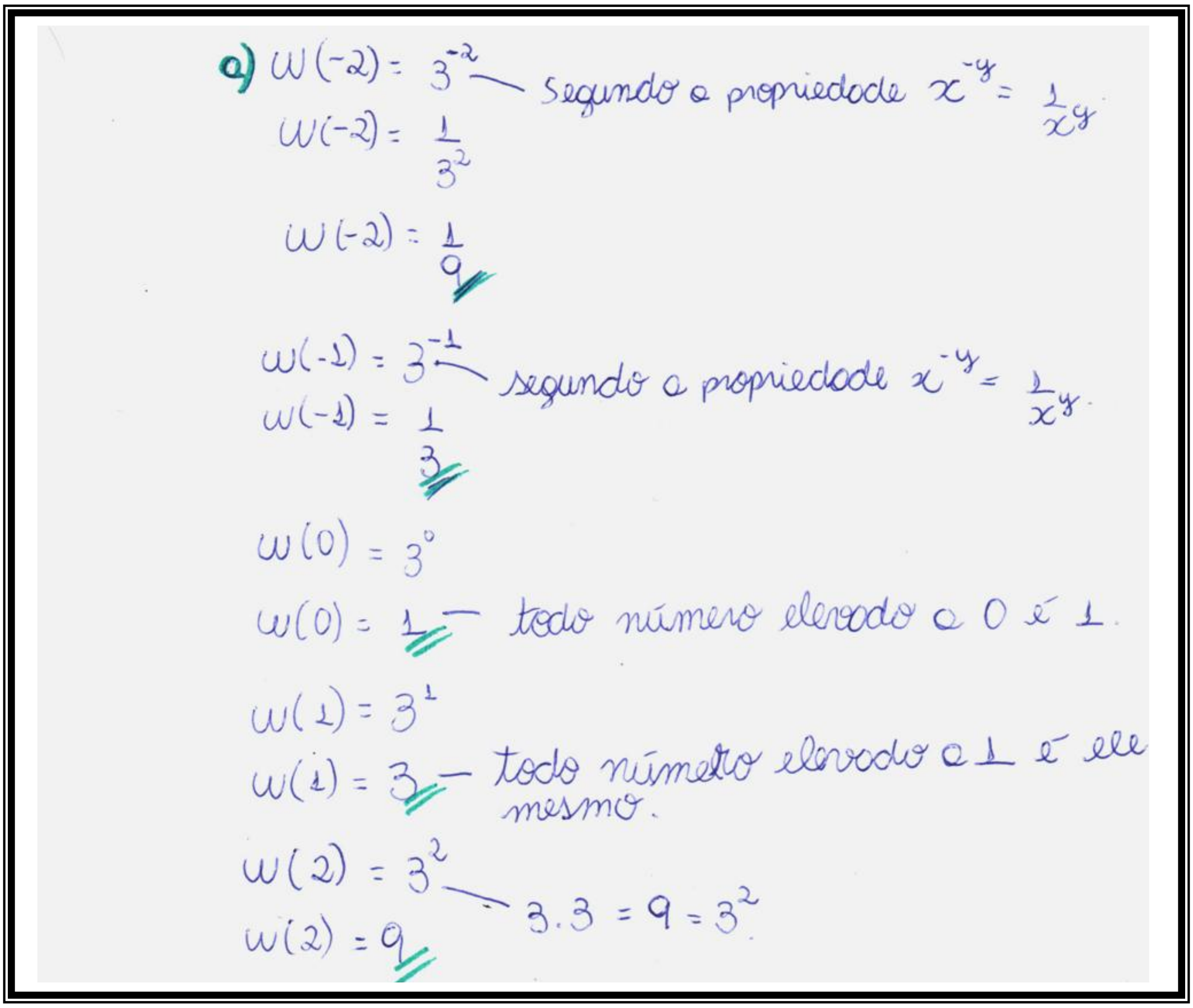
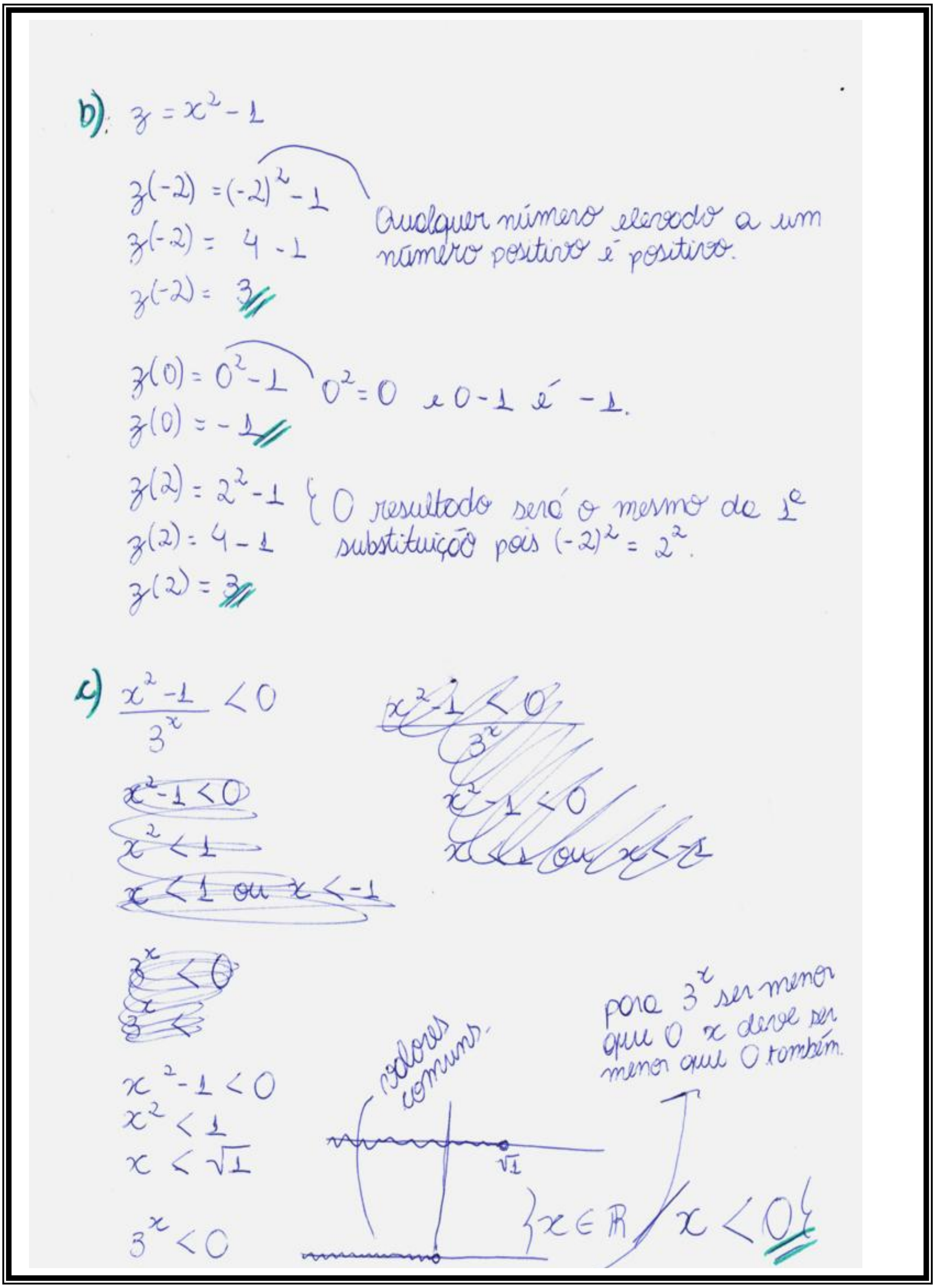


Figura 86- Protocolo de Moisés – Atividade 3 a) – Sessão 2



b) $y = x^2 - 1$

$y(-2) = (-2)^2 - 1$
$y(-2) = 4 - 1$
$y(-2) = 3$

Qualquer número elevado a um número positivo é positivo.

$y(0) = 0^2 - 1$ $\quad 0^2 = 0$ e $0 - 1$ é -1.
$y(0) = -1$

$y(2) = 2^2 - 1$
$y(2) = 4 - 1$
$y(2) = 3$

{ O resultado será o mesmo da 1ª substituição pois $(-2)^2 = 2^2$.

c) $\dfrac{x^2 - 1}{3^x} < 0$

$\cancel{x^2 - 1 < 0}$
$\cancel{x^2 < 1}$
$\cancel{x < 1 \text{ ou } x < -1}$

$\cancel{3^x < 0}$

$\cancel{\dfrac{x^2 - 1}{3^x} < 0}$
$\cancel{x^2 - 1 < 0}$
$\cancel{x < 1 \text{ ou } x < -1}$

$x^2 - 1 < 0$
$x^2 < 1$
$x < \sqrt{1}$

$3^x < 0$

valores comuns.

$\sqrt{1}$

para 3^x ser menor que 0 o x deve ser menor que 0 também.

$\{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$

Figura 87- Protocolo de Moisés – Atividade 3 b), c) – Sessão 2

Assim como Manoel e Moisés, Pedro, para resolver os itens *a)* e *b),* substituiu os valores de x dados no enunciado da questão nas funções w e z chegando às respostas esperadas e sem arredondamentos, pois dessa vez não utilizou o *software*.

Assim como o fez na primeira sessão percebeu que a função w é positiva pra qualquer valor de x real e dessa forma concluiu que o quociente $\frac{z}{w}$ será negativo quando z for negativo. Baseado em sua análise, fez o estudo do sinal da função z que é uma função quadrática, chegando ao conjunto solução da inequação.

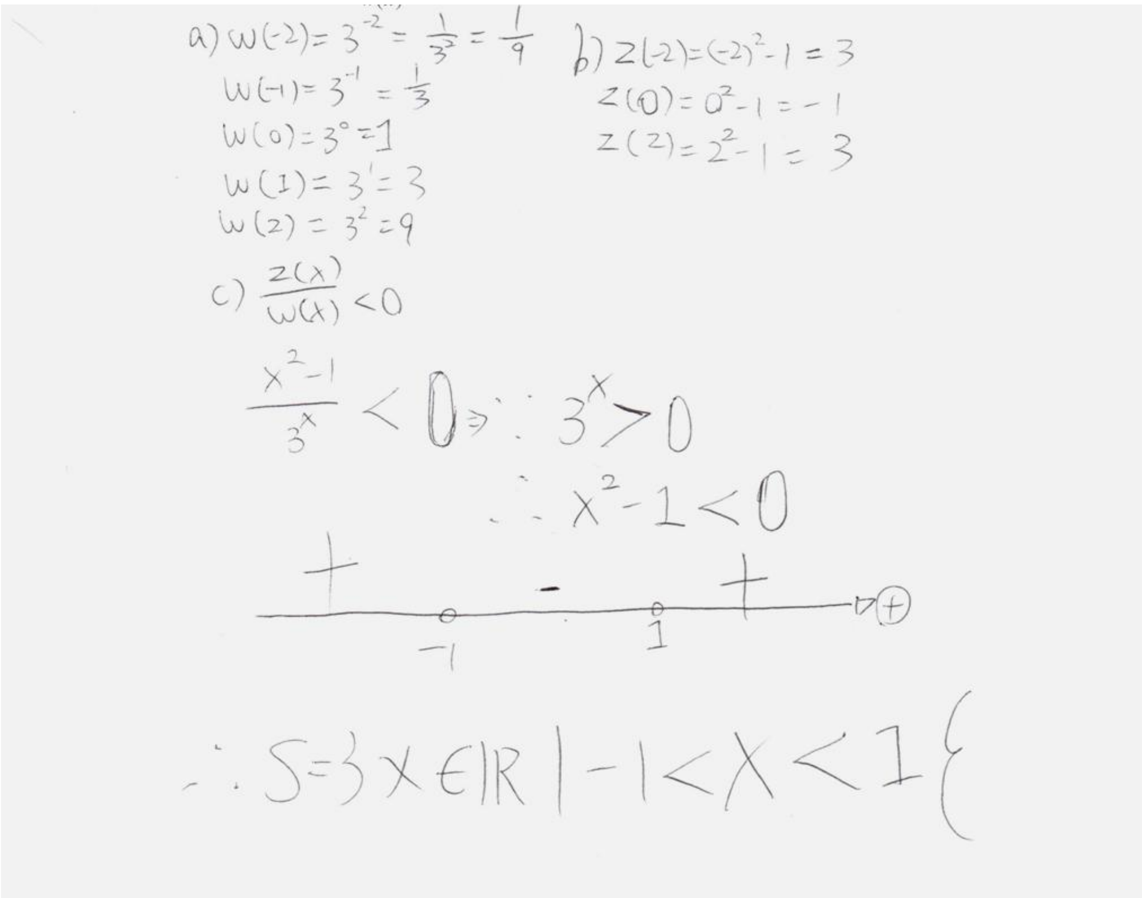


Figura 88 - Protocolo de Pedro – Atividade 3– Sessão 2

Assim como os outros sujeitos de nossa pesquisa, Paulo, para resolver os itens *a)* e *b)*, substituiu os valores de x dados no enunciado da questão nas funções w e z chegando as respostas esperadas e sem arredondamentos, pois dessa vez não utilizou o *software*.

Na sessão anterior Paulo, ao resolver o item *c)* percebeu que a função w é positiva para qualquer valor de x real e construiu o gráfico de z com a intenção de coletar os zeros da função e os intervalos onde ela é positiva ou negativa. Em seguida construiu um quadro de sinais, e interpretou corretamente quando o quociente $\frac{z}{w}$ é negativo, chegando ao conjunto solução da inequação.

Sem o auxilio do *software* Paulo procedeu exatamente da mesma maneira, porém o método para encontrar os zeros da função w foi a resolução da desigualdade $x^2 - 1 \neq 0$, concluindo que $x \neq \mp 1$.

Assim como mostrou nas atividades anteriores, Paulo sabe os métodos para resolver uma inequação quociente algebricamente, e dessa forma não precisou do *software* para resolver essa atividade, mesmo porque, suas justificativas na resolução gráfica convergem no sentido de determinar os pontos de intersecção da curva com o eixo x e a partir dessa informação estudar o sinal da função nos intervalos delimitados por eles, o que é válido e se assemelha muito à resolução baseada no quadro de sinais da função.

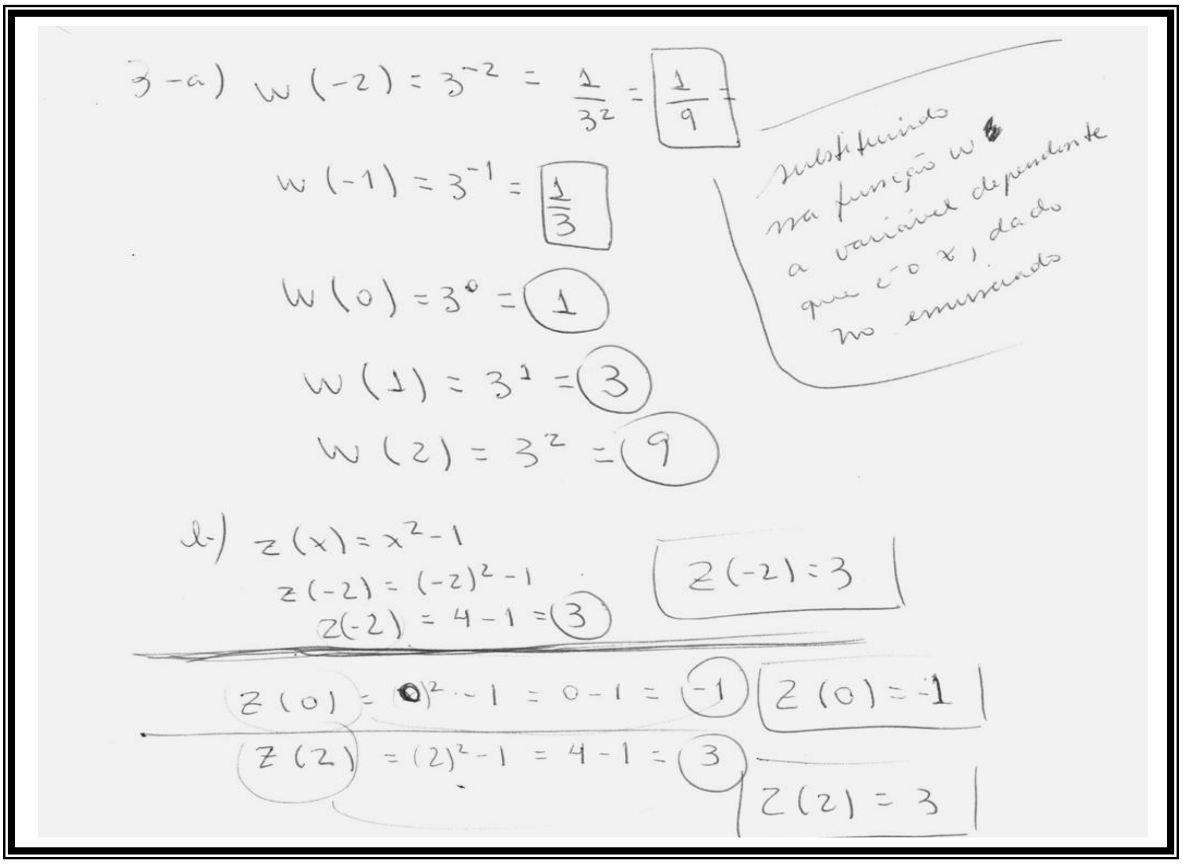


Figura 89 - Protocolo de Paulo – Atividade 3 a), b) – Sessão 2

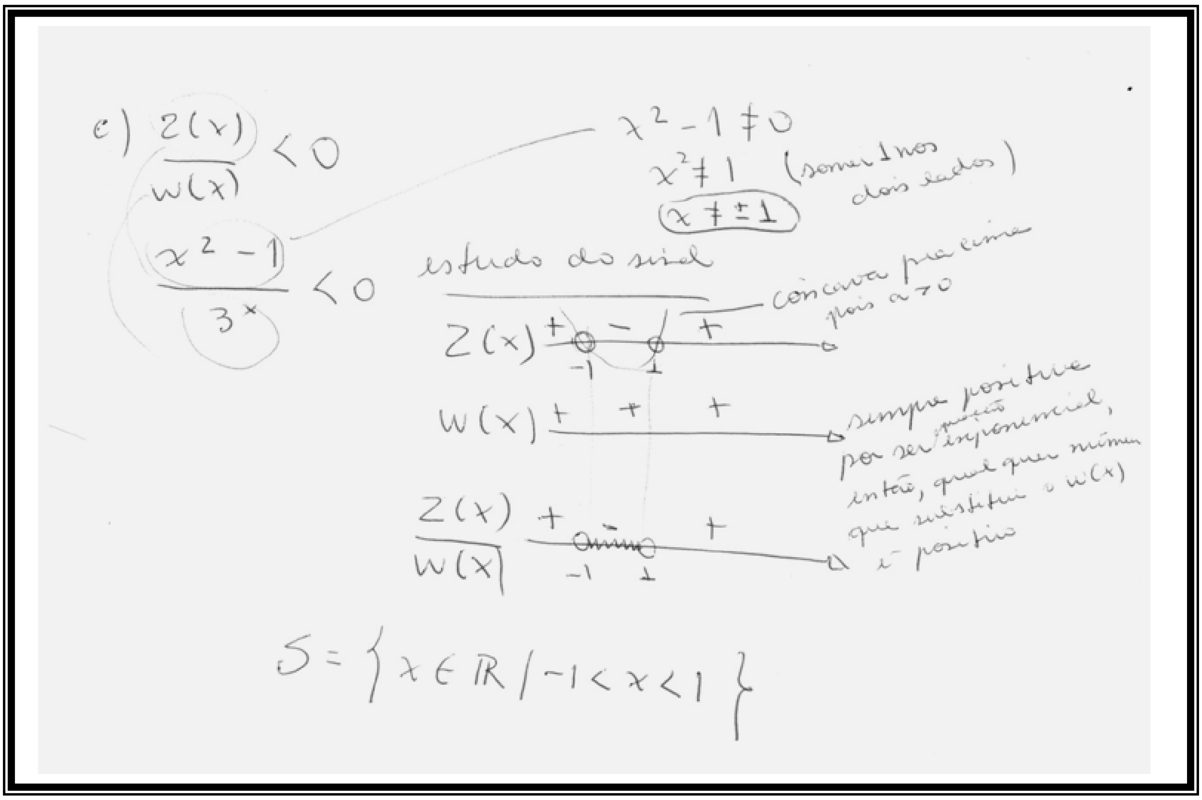


Figura 90 - Protocolo de Paulo – Atividade 3 c) – Sessão 2

5.2.2.4 Análise *a posteriori* da Atividade 4

Assim como nas atividades anteriores, nenhum dos alunos se manifestou com relação a dúvidas referentes ao enunciado.

Vamos retomar o enunciado da questão em seguida nossas análises quanto às resoluções dos alunos.

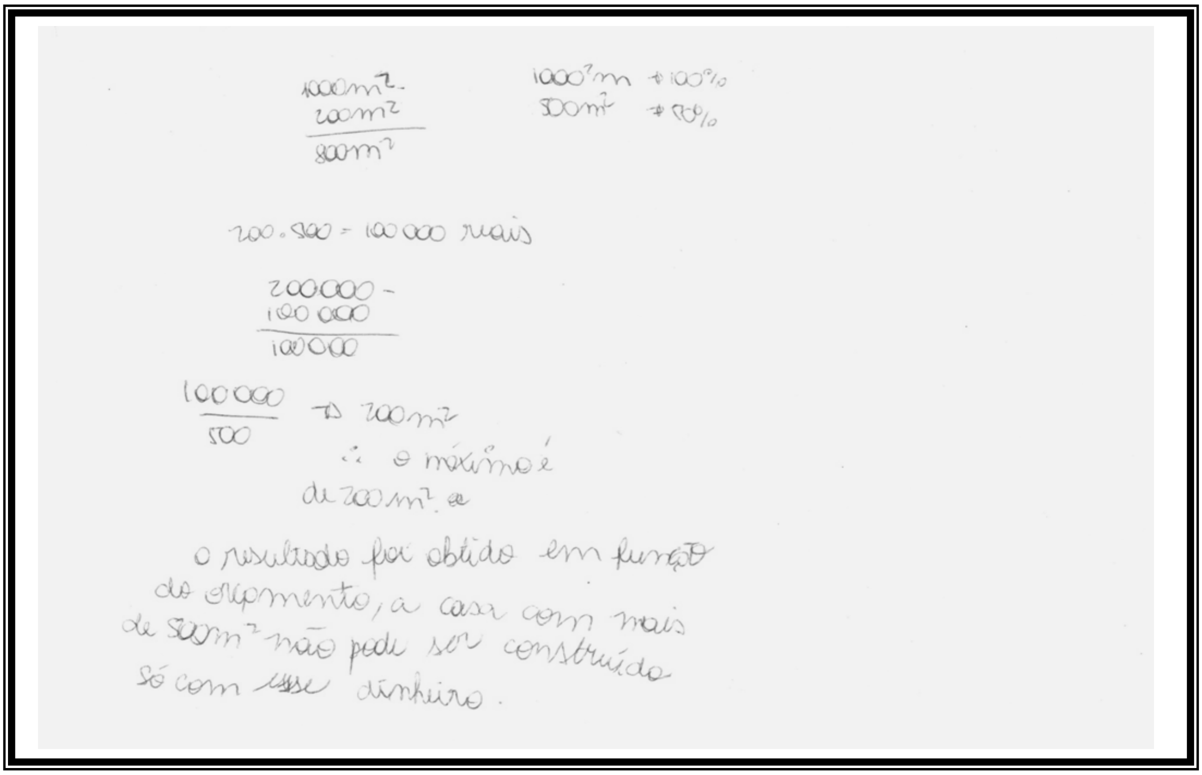
Atividade 4

João possui um terreno de $1000\,m^2$, no qual pretende construir uma casa. Ao engenheiro responsável pela planta, ele impõe as seguintes condições: a área destinada a lazer (piscina, churrasqueira, etc.) deve ter $200m^2$, e a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% da área total do terreno; além disso, o custo para construir a casa deverá ser de, no máximo, R$ 200.000,00. Sabendo que o metro quadrado construído nessa região custa R$ 500,00, qual é a área interna da casa que o engenheiro poderá projetar?

Na primeira sessão Manoel não utilizou o *software* para resolver essa atividade e, naquela oportunidade, teve a iniciativa de entender o problema de duas formas sendo: Os R$ 200.000,00 custeariam a área interna da casa mais a área de lazer, e nesse caso o dinheiro não seria suficiente para construir mais que 50% dos 1000 m^2 que o terreno possui de área, já que o metro quadrado da região custa R$ 500,00; Os R$ 200.000,00 custeariam apenas a área interna da casa e nesse caso, respondeu que poderia ser construída uma casa de no máximo 400 m^2, porém não percebeu que os R$ 200.000,00 não precisariam ser necessariamente todo gasto, desde que a área interna da casa mais a área de lazer ultrapassassem 50% da área total do terreno.

Nessa sessão entendeu que os R$ 200.000,00 custeariam a área interna da casa mais a área de lazer e dessa forma respondeu que esse dinheiro não seria suficiente para que a área ocupada pela casa seja maior que 500 m^2.

Não podemos considerar a resposta de Manoel errada já que o enunciado permite essa dupla interpretação, embora na primeira sessão tenhamos esclarecido aos alunos que perguntaram e provavelmente Manoel ouviu que os R$ 200.000,00 eram destinados para custear a área interna da casa



1000m² -
200m²
800m²

1000m² → 100%
500m² → 50%

200 . 500 = 100 000 reais

200000 -
100 000
100000

100000/500 → 200m²
∴ o máximo é de 200m².

o resultado foi obtido em função do orçamento, a casa com mais de 500m² não pode ser construída só com esse dinheiro.

Figura 91 - Protocolo de Manoel – Atividade 4 – Sessão 2

Moisés nessa sessão resolveu a atividade de forma idêntica a primeira. Fez uma figura para visualizar o problema, percebeu que a área interna da casa deveria ter área maior que 300 m^2 já que a área de lazer ocuparia 200 m^2, por meio de uma “regra de três simples” determinou qual seria a área máxima a ser construída, chegando a $400\, m^2$ e explicou seu raciocínio, mostrando que entendeu o problema.

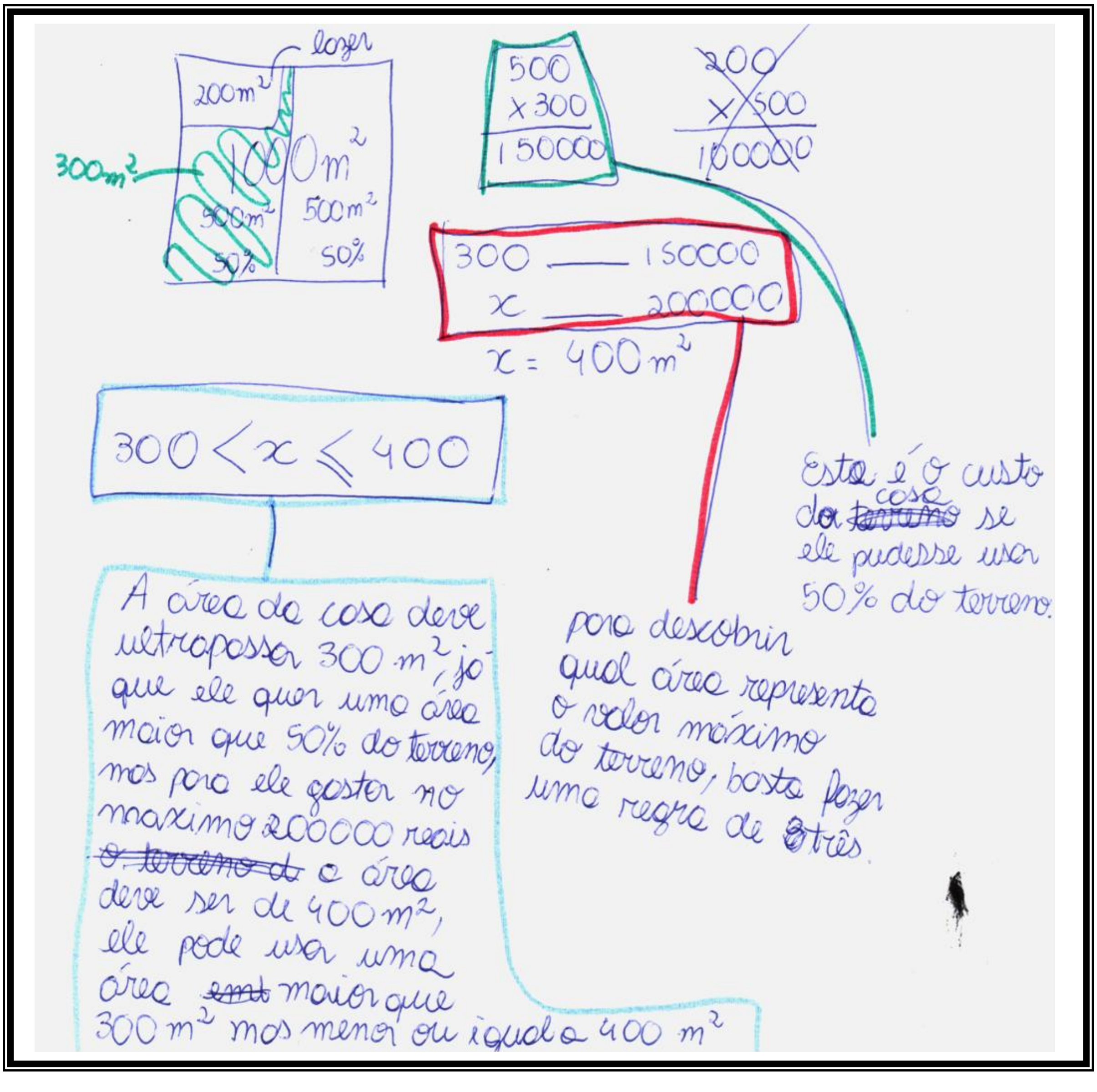


Figura 93 - Protocolo de Moisés – Atividade 4 – Sessão 2

Pedro também resolveu essa atividade de forma muito parecida com sua resolução na primeira sessão. Fez uma figura para visualizar a situação, estruturou a inequação 200 + área interna > 50%**.**1000, sendo a área interna igual a x e dessa forma concluiu que $x > 300$, dividiu 200.000 por 500 (que é o preço do metro quadrado construído) obtendo a área máxima da casa que é de 400 m^2. Concluiu que a área interna da casa deve estar entre 300 m^2 e 400 m^2(inclusive) uma vez que escreveu o conjunto solução do sistema de inequações que está implícito no problema que é $S = \{x \in \mathbb{R}/300 < x \leq 400\}$ sendo x a área interna da casa.

Embora seja uma resolução muito parecida com a dada na primeira sessão, percebemos um avanço nos aspectos formais presentes nessa nova resolução.

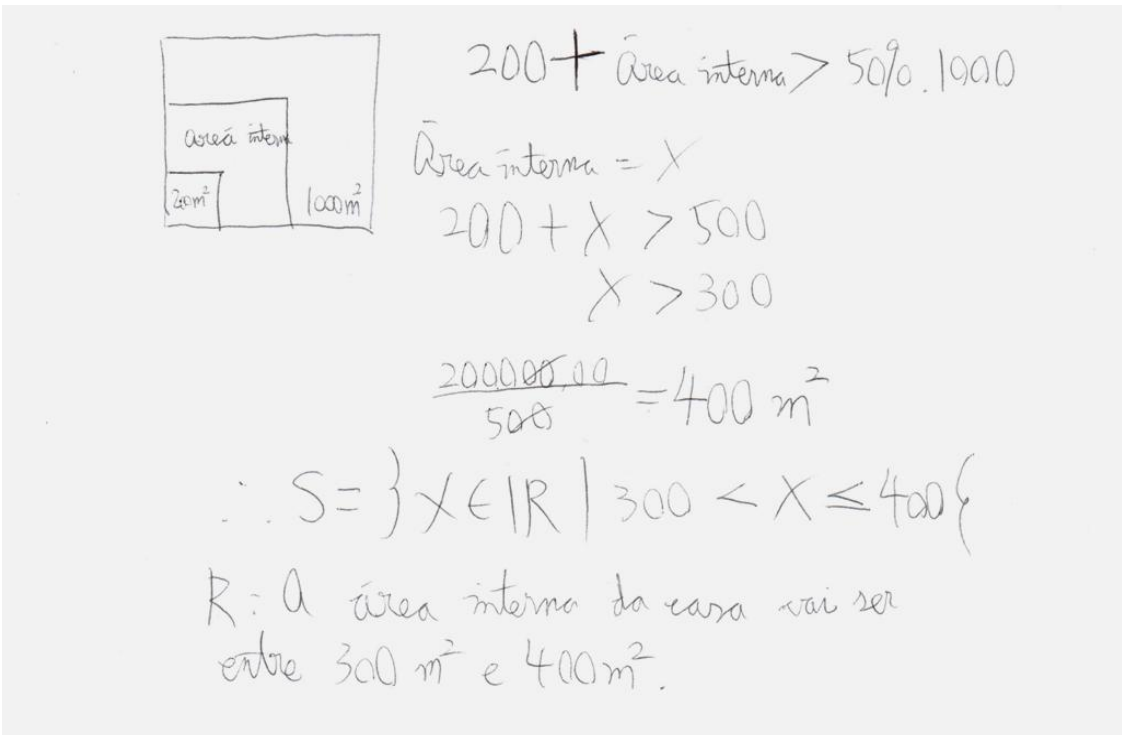


Figura 94 - Protocolo de Pedro – Atividade 4 – Sessão 2

Percebemos um avanço de Paulo na resolução dessa atividade pela segunda vez, pois na primeira tratou a informação do enunciado "a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% da área total do terreno" como uma equação e chegou a escrever "$A_{interna}+A_{lazer}=500\ m^2$". Dessa vez já entendeu como uma inequação e escreveu "$A_{interna}+A_{lazer}>500\ m^2$", e resolvendo essa última chegou à conclusão que a área interna deve ser maior que 300 m^2. Por meio de uma "regra de três simples", pois sabe que 1 m^2 custa R$ 500,00, concluiu que a maior área interna que a casa pode ter é de 400 m^2. Porém, ao dar a resposta não percebeu que esta é um intervalo e respondeu apenas que a área máxima que a área interna pode ter.

Assim como na primeira sessão, o aluno não percebeu o sistema de inequações que está implícito no problema.

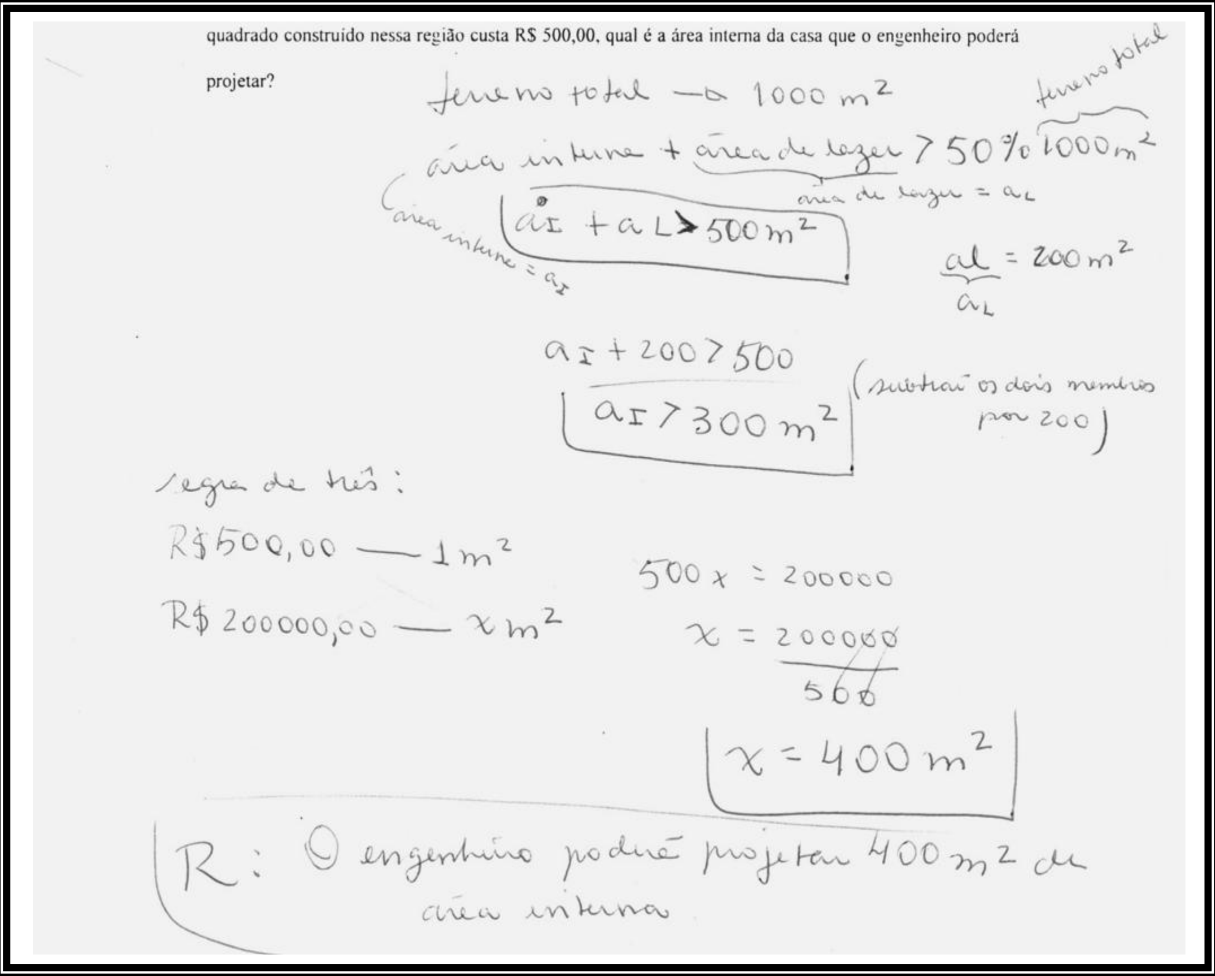


Figura 95 - Protocolo de Paulo – Atividade 4 – Sessão 2

Como dizemos de inicio, nosso objetivo nessa segunda análise é mensurar qual foi o impacto do uso do *software* na resolução de nossas atividades. Entendemos que esses resultados podem ser diferentes dependendo da ordem das sessões, ou seja, se optássemos pelo uso da tecnologia na segunda sessão e não na primeira, como o fizemos.

Considerando essa nossa escolha, percebemos dois fatos: Uma maior presença de elementos matemáticos nas justificativas dos alunos na nessa sessão, o que pode significar que esses sujeitos conseguiram relacionar algumas resoluções algébricas com as gráficas, representando assim um avanço em seu entendimento; Certo tecnicismo na resolução gráfica de alguns alunos, ou seja, com os gráficos prontos, conseguem interpretá-los corretamente. Quando optam pela construção (utilizando o *software*) a fazem como uma única expressão algébrica, analisando um único gráfico, principalmente quando o problema se refere à inequações cuja expressão algébrica é um quociente, limitando sua interpretação a coletar informações referentes ao sinal da função, o que mostra que esses sujeitos podem não entender a resolução algébrica, pois não conseguem relacioná-la com a gráfica.

A seguir, em nossas considerações finais, retomaremos os pontos importantes das duas sessões no intuito de responder nossa questão de pesquisa.

Capítulo 6 - Considerações finais

Nossa pesquisa tem como objetivo avaliar se a resolução de inequações por meio de uma abordagem funcional gráfica, utilizando atividades que possibilitem o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica, pode levar os alunos a terem um avanço no entendimento desse tema em relação às abordagens que privilegiam apenas os tratamentos no registro algébrico.

Nossos sujeitos de pesquisa tiveram à disposição o *software* GeoGebra na realização das atividades. Tal programa de computador possibilita a conversão do registro algébrico para o registro gráfico e dessa forma reúne elementos visuais e dinâmicos os quais acreditamos que podem ajudar os alunos a entenderem os conceitos matemáticos envolvidos nas atividades que estão resolvendo.

Os estudantes participantes dessa pesquisa resolveram as atividades duas vezes, uma em ambiente computacional e outra fora desse ambiente. Fizemos essa escolha para avaliar qual foi o impacto do uso do *software* GeoGebra em nossa atividade.

Decidimos investigar a respeito de tal tema a partir de nossa experiência docente, convivendo com a pouca compreensão de nossos alunos a respeito da resolução de inequações em nossas aulas, mas principalmente após a leitura das pesquisas de Traldi (2002), Fontalva (2006), Bianchini e Puga (2006) e Giusti (2008).

A pesquisa de Traldi (2002), que realizou uma pesquisa com alunos da 3ª série do ensino médio, mostra que, na resolução de sistemas de inequações do 1º grau, os alunos que resolveram os problemas de programação linear, propostos pelo pesquisador, utilizando os registros algébricos e gráficos concomitantemente obtiveram maior sucesso do que aqueles que decidiram utilizar apenas um dos registros.

As dificuldades apresentadas pelos alunos no trato com os sistemas de inequações do 1º grau, diagnosticadas por Traldi (2002) foram as de fazer a: conversão da linguagem materna para a sentença matemática; conversão de sentenças matemáticas para suas representações gráficas, leitura e interpretação de gráficos, representação gráfica de inequações; e resolução de sistemas de Inequações.

A pesquisa de Fontalva (2006), que também teve como sujeitos alunos da 3ª série do ensino médio, mostra uma forte tendência por parte dos estudantes no emprego de técnicas de resolução ao invés de propriedades matemáticas quando da resolução de inequações polinomiais do 1º, 2º e 3º graus dadas na forma fatorada e também nas inequações racionais.

Os principais erros cometidos pelos sujeitos de pesquisa de Fontalva (2006) na resolução de inequações foram: "conexões sem sentido com raízes quadradas; "multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos"; e "Dedução incorreta de sinais de fatores a partir do produto ou do quociente".

Bianchini e Puga (2006) tiveram como sujeitos de pesquisa alunos do ensino superior e constataram que, embora o ensino de funções ocupe grande parte do currículo do ensino médio, os estudantes chegam ao ensino superior sem compreender os conceitos básicos de função, além de reconhecer apenas gráficos oriundos de funções polinomiais do 1º e 2º graus (retas e parábolas).

Outro resultado importante da pesquisa de Bianchini e Puga (2006) é que os alunos, ao resolverem as questões propostas pelos pesquisadores, que coordenaram dois ou mais registros de representação semiótica obtiveram maior sucesso na resolução dos problemas, fato que coincide ao apontado por Traldi (2002).

Giusti (2008) teve como sujeitos de pesquisa professores de Matemática em exercício e futuros professores de Matemática (alunos da licenciatura). Propôs a esses sujeitos uma abordagem funcional gráfica genérica para a resolução de inequações e/ou equações, por meio de uma sequencia de atividades, com o intuito de contribuir para o ensino e aprendizagem da resolução algébrica de inequações com uma incógnita real.

A análise dos protocolos produzidos pelos sujeitos de pesquisa de Giusti (2008), a qual a fez baseada na teoria de Efraim Fischbein (1993, apud Giusti, 2008), que acredita que para haver aprendizagem em Matemática é preciso dominar e inter-relacionar aspectos formais, algoritmos e intuitivos do assunto em estudo, mostrou a ausência de aspectos formais lógicos em todos os protocolos e a presença maciça de aspectos intuitivos numéricos. Seus sujeitos, embora tenham conseguido fazer as conversões necessárias para resolver uma inequação graficamente, não conseguiram relacionar tal resolução com a resolução algébrica, mostrando a dificuldade que os próprios professores têm na resolução de inequações.

Do trabalho de Giusti (2008), aproveitamos a idéia de utilizar um ambiente computacional que possibilitasse a conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

Baseando-se nos resultados desses trabalhos e nas leituras dos documentos oficiais elaboramos, aplicamos e analisamos um instrumento diagnóstico composto de cinco atividades à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica elaborada por Duval (2003).

Procuramos formular atividades que possibilitassem a coordenação de mais de um registro de representação semiótica, sendo que a conversão para o registro gráfico poderia ser efetuada com o auxilio do *software* GeoGebra.

Na análise dos protocolos percebemos resultados semelhantes aos apontados pelas quatro pesquisas que apontamos anteriormente, sendo: dificuldades na interpretação de gráficos que não são retas e nem parábolas, como apontado na pesquisa de Bianchini e Puga (2006); dedução incorreta de sinais ao resolver uma inequação quociente, além da opção pela técnica resolutiva ao invés de conceitos matemáticos como apontado por Fontalva (2006); dificuldade na conversão do registro da língua materna para o registro algébrico e incorreta interpretação do gráfico como na pesquisa de Traldi (2002); não relacionar a resolução gráfica com a resolução algébrica, um dos resultados de Giusti (2008).

Percebemos ainda, em nossa pesquisa, dificuldades dos alunos em explicar no registro da língua natural os procedimentos utilizados por eles na resolução dos problemas, fato que pode ser explicado pelo pouco hábito que eles têm de justificar, via texto, suas resoluções, ou porque realmente não entendem os procedimentos que utilizam, pois o fazem de forma mecânica.

Criticamos na introdução desse trabalho a Tendência Tecnicista Mecanicista apontada por Fiorentini (1995) e utilizada por alguns professores no ensino de Matemática.

Tal tendência consiste em priorizar o fazer, deixando de lado outros aspectos importantes, como compreender e refletir. Contudo o aluno Moisés, na primeira sessão, em que era permitido o uso do *software* para resolver as atividades, utilizou os gráficos para resolver três dos quatro problemas em que era possível a conversão. Resolveu corretamente o item *e)* da atividade 1, que trata da resolução de uma inequação racional, chegou perto de determinar o domínio da função solicitado no item *b)* da atividade 2, cuja expressão algébrica consiste na raiz quadrada de uma expressão racional, cometendo apenas o erro de excluir do domínio os zeros da função, e também acertou a solução da inequação quociente proposta no item *c)* da atividade 3, cujo numerador é representado por uma função exponencial. Porém, na segunda sessão, sem o auxilio do *software* para auxiliá-lo na construção dos gráficos, não conseguiu chegar às mesmas respostas, cometendo erros referentes ao conceito de divisão e também na resolução de uma inequação exponencial, mostrando que não conseguiu relacionar a resolução gráfica com a resolução algébrica.

A respeito do exposto acima nossa indagação é a seguinte: Até que ponto a resolução desses problemas utilizando a tecnologia para construir os gráficos, ou seja, digitam-se as expressões algébricas das funções envolvidas no *software* e, após construção feita pela máquina, analisá-los para chegar a resposta do problema, também não pode se tornar um tecnicismo?

Reconhecemos como importantes as habilidades que Manoel demonstrou de interpretação dos gráficos, pois resolveu as atividades de modo correto, cujas perguntas são feitas no registro da língua natural e também no algébrico, o que mostra sua capacidade de relacionar os registros, porém não poderíamos deixar de aventar o caráter tecnicista que enxergamos nas resoluções desse sujeito, face aos erros que cometeu na segunda sessão.

Em contrapartida Paulo, mesmo tendo a disposição o *software* para a construção dos gráficos, quase não o utilizou, o que mostra que nossas atividades não incitaram, pelo menos para ele, a necessidade da conversão para o registro gráfico para resolvê-las.

Paulo resolveu as atividades da mesma forma nas duas sessões, com exceção da atividade 5, cujo registro de partida já foi dado no registro gráfico e, embora existisse a possibilidade de determinação das expressões algébricas, ele optou por interpretar os gráficos. Sua resposta na segunda sessão foi mais clara, corrigindo a simbologia e hesitando menos ao dar a resposta. Esse fato mostra que os alunos podem ter conversado a respeito das atividades após a primeira sessão, trocando informações com os colegas, ou consultaram livros a respeito do tema, o que consideramos um fator positivo visto que os alunos não sabiam que resolveriam as mesmas questões novamente e, uma semana depois, lembravam dos detalhes possivelmente debatidos com os colegas.

Sobre o exposto no parágrafo anterior podemos também citar Manoel, que melhorou suas respostas da primeira para a segunda sessão, cometendo menos erros na redação de suas respostas e mostrando mais conhecimentos matemáticos do que na primeira.

Chamou-nos também a atenção, na atividade 4, que os alunos que fizeram uma figura para entender o problema, visto que ele é dado no registro da língua materna, se saíram melhor do que os que não o fizeram, pois por meio desse registro figural podem ter percebido o sistema implícito no texto da atividade.

Ainda com relação a atividade 4, percebemos que nenhum aluno utilizou o registro gráfico, talvez por não acharem econômico cognitivamente, ou porque não perceberam esse tipo de resolução. Os alunos que resolveram corretamente a questão na primeira sessão, também o fizeram na segunda, e o mesmo se aplica aos que erraram. Contudo notamos uma melhora na resolução de Paulo, pois na segunda vez já enxergou as desigualdades do problema.

Diante do exposto vamos retomar nossa questão de pesquisa:

Em que medida o ensino de inequações via uma abordagem funcional gráfica que envolva o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica, pode, ou não, favorecer o entendimento por parte dos alunos do assunto em questão?

A abordagem funcional que utilizamos em nossa pesquisa tem como objetivo estimular as conversões entre os registros de representação semiótica algébrico, gráfico e da língua natural. Para utilizá-la, precisamos escrever uma ou mais expressões algébricas que representem função e que reflitam o problema, quando essas não são dadas. E essa já é uma conversão. A partir dela podemos representar a função por meio de uma representação gráfica (registro gráfico), caso isso "econômico" cognitivamente, e interpretá-lo.

Percebemos nos protocolos dos alunos que todos de alguma forma procuraram utilizar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, quando esta o ajudaria na resolução do problema, e também do registro da língua natural para o registro algébrico ou numérico, o que torna esse tipo de abordagem válida, porque faz com que os alunos transitem pelos registros de representação semiótica, e essa premissa, segundo Duval (2003), é fundamental para a aprendizagem em Matemática.

Na sessão que envolve o uso do *sofware* observamos poucos erros nas resoluções das inequações cujas expressões algébricas são representadas por quocientes ou radicais, o que pode evidenciar que a inter-relação entre os registros de representação das funções envolvidas nos problemas, isto é ter a disposição o registro algébrico e o gráfico para visualização, ajudou os alunos a tirarem suas conclusões, porém devem-se considerar também as dificuldades de lidar com o registro gráfico, pois esse mostra um conteúdo diferente do registro algébrico.

Respondemos, diante do material que coletamos e baseados em nosso referencial teórico, que o ensino de inequações via uma abordagem funcional gráfica que envolva o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica, pode sim favorecer o entendimento por parte dos alunos do tema inequações.

Quais as dificuldades encontradas? Quais os avanços percebidos com relação a coordenação desses registros?

As dificuldades encontradas em nossa pesquisa assemelham-se as pesquisas de Traldi (2002), Fontalva (2006), Bianchini e Puga (2006) e Giusti (2008), ou seja, mesmo utilizando essa abordagem alguns alunos ainda mostram que tem: dificuldades na interpretação de gráficos que não são retas e nem parábolas, como apontado na pesquisa de Bianchini e Puga (2006); dedução incorreta de sinais ao resolver uma inequação quociente, além da opção pela técnica resolutiva ao invés de conceitos matemáticos como apontado por Fontalva (2006); dificuldade na conversão do registro da língua materna para o registro algébrico e incorreta interpretação do gráfico como na pesquisa de Traldi (2002); e não relacionar a resolução gráfica com a resolução algébrica, um dos resultados de Giusti (2008).

Assim, entendemos que todos os alunos avançaram em algum aspecto na sua compreensão relativa ao tema inequações, pois percebemos mais conceitos matemáticos presentes nas respostas na segunda sessão (sem o auxilio do *software*), em que respondem com um maior rigor, evidenciando que parte desses sujeitos conseguiram relacionar os aspectos gráficos com os aspectos algébricos.

Dizemos isso, pois, esses alunos continuam em nossa sala de aula, agora na 3ª série do ensino e, no estudo de Geometria Analítica, conseguem perceber tanto resoluções geométricas quanto resoluções algébricas nos problemas propostos, o que mostra uma coordenação e compreensão desses registros de representação semiótica.

Realizar essa pesquisa, e quando dizemos isso estamos nos referindo a todo o curso, que compreende o período de fevereiro de 2008 a março de 2011, nos levaram a mudança de nossa prática. Quando ingressamos no programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, éramos Professores de Matemática, hoje somos Professores de Alunos, pois, passamos a perceber suas dificuldades e a notar melhor seus avanços, mesmo que pequenos, entendendo que todos são diferentes e aprendem de formas diferentes.

A partir dessa “mutação” notamos o quanto é difícil elaborar atividades para os alunos que promovam um avanço em seu entendimento em relação às abordagens tradicionais, em outras palavras, que os façam entender sobre o assunto que estão estudando.

Nossa mudança de prática passa desde a análise do livro didático que utilizamos até a leitura de Teorias que versem sobre o ensino de Matemática, as quais entendemos que todos os professores deveriam estudar.

Passamos a acreditar que nossa profissão vai além de simples vocação para executá-la, mas exige esforço pessoal e formação que façam com que tenhamos o domínio dos aspectos teóricos e práticos ligados à aprendizagem.

Esperamos que a leitura de nosso trabalho possa contribuir para novas pesquisas em Educação Matemática.

7. Referências

ARDENGHI, M. J. **Ensino e aprendizagem do conceito de função: Pesquisas realizadas no período de 1970 à 2005 no Brasil. 2008** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

BAZZINI, L; BOERO, P. **Reavealing and Promoting the Student's Potencial in Algebra:** A Case Study Concerning Inequalities Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, 2001, p. 53-60.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: Uma introdução a teoria e aos métodos. 1999. Porto. Porto Editora. pp. 47-51.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: ME/SEMT, 1999.

_____, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: *Ensino Médio-Ciências* da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.

_____, Secretaria da Educação Básica. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; Volume 2. Brasília; MEC, 2006.

BIANCHINI, B. L; PUGA, L. Z. **Função: Diagnosticando Registros de Representação Semiótica** In: REFREMAT- Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática. UFSC, pp. 5-16, 2006.

CLARA, M. S. H. C. **Resolução de inequações logarítmicas**: Um olhar sobre a produção dos alunos. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Pontifica Universidade Católica. São Paulo, 2007.

COLOMBO, J. A. A.; MORETTI, M. T. **REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**: INTERFACES PRESENTES E POSSÍVEIS In: Anais do IX Encontro de Educação Matemática. 2007.

COSTA, G. S. **ESTRUTUTALISMO LINGUISTICO**. Artigo. CEFET-PI/UNED, Floriano, 2000.

DAMM, R. **Registros de representação** In: Educação Matemática uma Introdução: S.D.A et al 3ª edição –São Paulo: EDUC, 2008 pp. 233-246.

DUVAL R. **Registros de Representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática.** In: MACHADO. S.D.A (org) Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003 11-33p.

FIORENTINI, D; **Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil**. In: Revista Zetetiké, Campinas, SP, ano 3, n.4, p. 1-37, 1995

FONTALVA, G. M. **Um estudo sobre inequações:** entre alunos do ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica, Sâo Paulo, 2006

GALLO, E; BATTÚ, M. **Quali modelli e controlli intervengono lavorando su disequazioni?** In: SEMINÁRIO FRANCO-ITALIANO DIDATTICA DELL' ALGEBRA – SFIDA – 9 -12. , 2000, Nice. Actes dês séminaries. Nice: IREM DE NICE, 2000, V. 3, p-25-35.

GIOVANNI, J.R; BONJORNO J.R. **Matemática: Uma nova abordagem. V. 1** . São Paulo – SP: FTD, 2000.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR, J. R. **A conquista da Matemática: A +nova. V. 8**. São Paulo – SP: FTD, 2002.

GIUSTI, V. H. **O uso de vários registros na resolução de inequações**: Uma abordagem funcional gráfica. 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

MACHADO, S. D. A. **Engenharia Didática** In: Educação Matemática uma Introdução: S.D.A et al 3ª edição –São Paulo: EDUC, 2008 pp. 167-188.

MARIANI, R. C. P. **TRANSIÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA PARA O ENSINO SUPERIOR**: A coordenação dos Registros de Representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de Cálculo. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

MELO, M. **O ensino de desigualdades e inequações em um curso de licenciatura em Matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de função: A importância de compreensão das variáveis.** 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multisignificados no ensino da Matemática: Contribuições de um estudo epistemológico.** 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

RIBEIRO, R. M. **FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E A PRÁTICA REFLEXIVA** In: Anais do IX Encontro de Educação Matemática. 2007.

SACKUR, Catherine – **Problems related to the use of graphs in solving inequalities**. Proceedings of PME 28. 2004: p. 148-151.

SALDANHA, M. S. G. **Análise de uma Intervenção Didática sobre Desigualdades e Inequações Logarítmicas no Ensino Médio**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. 1999. Brasilisense, São Paulo.

TRALDI JR, A. **Sistema de inequações:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representação. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

VIEL, M. J. M.; DIAS, M. A. **O DESAFIO DE TORNAR A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA UM MEIO PARA AS MUDANÇAS NA PRÁTICA DOCENTE**: Estudo de caso In: Anais do IX Encontro de Educação Matemática. 2007

8. Anexos

Anexo 1 – Autorização para realização da pesquisa

Termo de Autorização

Eu, ______________________________________RG_____________ autorizo o Professor Fernando da Silva Conceição Junior, a utilizar parcial ou integralmente, respostas a questionário ou gravações de meu (minha) filho (a)____para fins de pesquisa cientifica, podendo divulgá-las parcial ou integralmente em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que o nome de meu (minha) filho (a) não será citado em hipótese alguma. Abdicando direitos meus e de meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

São Paulo,   Abril de 2010

____

Assinatura do responsável legal

Anexo 2 – Autorização para realização de Pesquisa Acadêmica

Termo de autorização

Ao Diretor geral do Colégio________________________

Venho por meio de este solicitar vossa autorização para que eu, Fernando da Silva Conceição Junior, aluno regularmente matriculado no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Estudos Pós-Graduados em educação Matemática da PUC-SP, possa desenvolver parte de minha pesquisa de Mestrado, juntos aos alunos da 1ª série do ensino médio deste colégio.

A atividade consiste em seis encontros semanais, fora do horário de aula dos alunos, no laboratório de informática do colégio com o objetivo de diagnosticar, por meio da pesquisa, se o ensino de inequações com o auxilio do *software* GeoGebra pode trazer avanços no entendimento dos alunos referente a esse tema.

Além disso, precisamos analisar o plano de ensino de Matemática de 2008 e 2009, referentes ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio.

Informo que estou providenciando junto aos responsáveis dos alunos interessados, autorização para que eles possam participar dessa atividade.

Desde já agradeço a compreensão e me disponho para quaisquer esclarecimentos caso seja necessário.

São Paulo,   Novembro de 2009.

____

Fernando da Silva Conceição Junior

Atividade 1

Considere as funções $g:\Re \to \Re$ e $h:\Re \to \Re$ definidas por $g(x) = x + 2$ e $h(x) = 5x$.

a) Resolva a equação $g(x) = h(x)$.

b) Determine todos os valores reais de x tais que $g(x) > 0$.

c) Determine todos os valores reais de x tais que $h(x) < 0$.

d) Resolva o sistema de inequações $\begin{cases} h(x) < 2 \\ g(x) > 20 \end{cases}$

e) Agora resolva a inequação $\dfrac{g(x)}{h(x)} > 0$.

Atividade 2

Considere a função $f: A \to \Re$ definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 5x + 4}}$

a) Calcule $f(3{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(4)$ e $f(5)$.

b) Denomina-se domínio de uma função o **maior conjunto** de valores que podem ser atribuídos a variável independente. Relacionando a definição de domínio da função com os resultados do item *a)*, determine o domínio A da função f.

Atividade 3

Considere a função $w:\Re \to \Re$ e $z:\Re \to \Re$ definidas por $w(x) = 3^x$ e $z(x) = x^2 - 1$

a) Calcule $w(-2)$, $w(-1)$, $w(0)$, $w(1)$ e $w(2)$.

b) Determine $z(-2)$, $z(0)$ e $z(2)$.

c) Resolva a inequação $\dfrac{z(x)}{w(x)} < 0$.

Atividade 4[1]

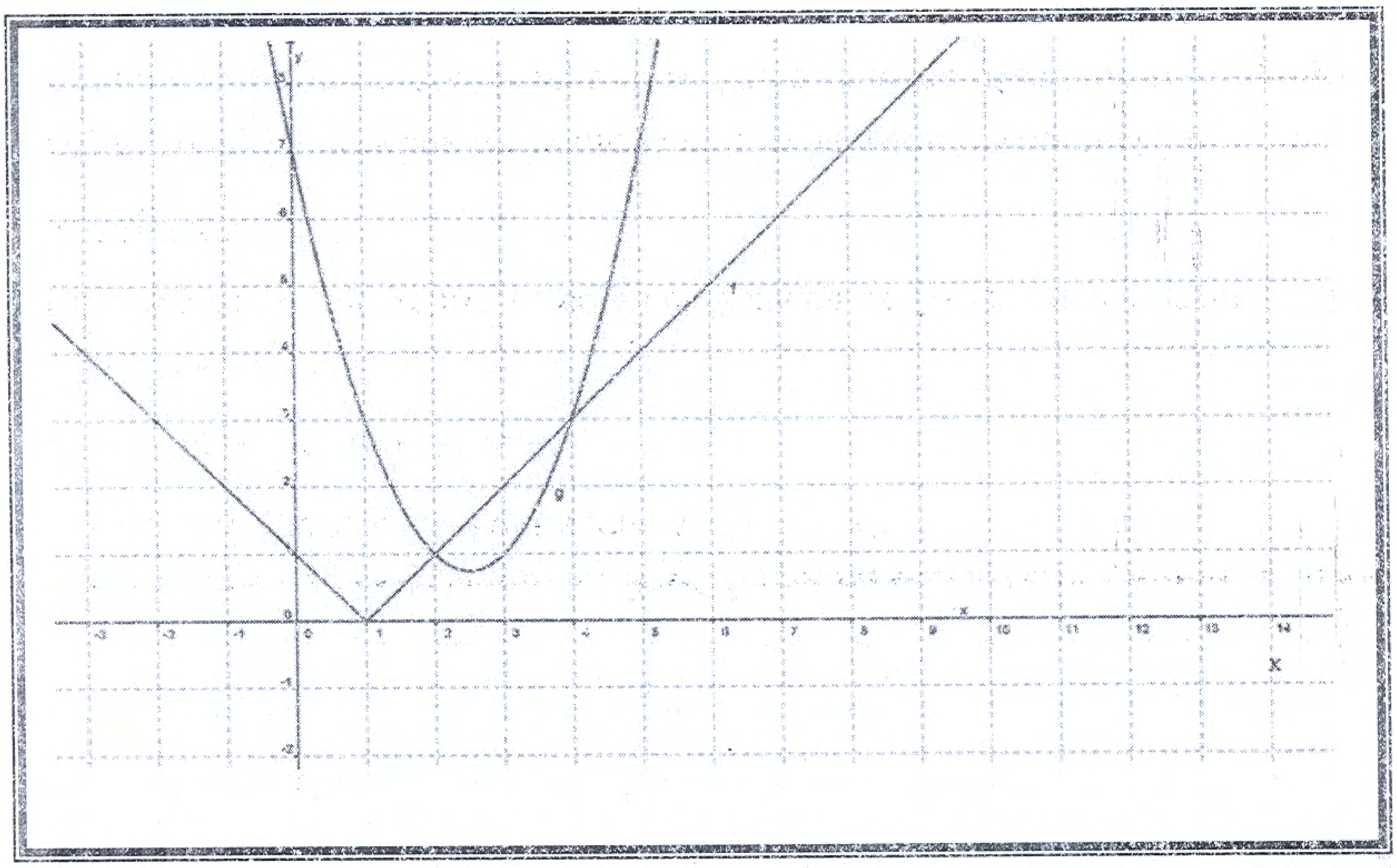
João possui um terreno de $1000\ m^2$, no qual pretende construir uma casa. Ao engenheiro responsável pela planta, ele impõe as seguintes condições: a área destinada a lazer (piscina, churrasqueira, etc.) deve ter $200m^2$, e a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% da área total do terreno; além disso, o custo para construir a casa deverá ser de, no máximo, R$ 200.000,00. Sabendo que o metro quadrado construído nessa região custa R$ 500,00, qual é a área interna da casa que o engenheiro poderá projetar?

Atividade 5

No plano cartesiano abaixo estão representados os gráficos das funções f e g. Determine:

a) O domínio das funções f e g.

b) Os valores de x para os quais temos $g(x) > f(x)$.



[1] Atividade extraída do livro Matemática: Uma nova abordagem, volume 1, de Giovanni e Bonjorno (2000, p. 180)

Este encarte é parte integrante da dissertação de Mestrado intitulada: Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio de Conceição (2011).