DAVID ANTONIO DA COSTA

O ESTUDO DOS FRISOS NO AMBIENTE INFORMATIZADO CABRI-GÉOMÈTRE

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2005

DAVID ANTONIO DA COSTA

O ESTUDO DOS FRISOS NO AMBIENTE INFORMATIZADO CABRI-GÉOMÈTRE

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni.***

PUC/SP

São Paulo

2005

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ Local e Data: ______________

DEDICATÓRIA

A Geraldo e Dinoráh, meus pais (em memória).

A Maria Fernanda, minha esposa.

Ao Caio e Lucas, meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por me conceder a vida e a inteligência.

Ao Profº Dr.Vincenzo Bongiovanni, meu orientador e amigo, que compartilhou grande parte da trajetória da minha pós graduação, por sua dedicação e apoio por todos estes momentos.

A todos os professores do programa, especialmente a Profª Dra. Sonia Igliori, exemplo vivo que estará sempre presente em meus pensamentos.

À Profª Dra. Lulu e Profª Dra. Yurico, por suas valiosíssimas sugestões dadas na qualificação.

Agradeço à CAPES e à comissão de bolsa por sua concessão.

A Geraldo e Dinoráh, meus pais (em memória), que com seus exemplos, mostraram-me o verdadeiro valor de uma família.

A minha esposa, Ms.Maria Fernanda, que com sua dedicação, amor e paciência incentiva-me sempre a crescer e persistir no bom caminho.

Aos meus filhos, Caio e Lucas, que durante muitos momentos foram privados de minha companhia. Que este trabalho possa servir de estímulo em busca de novos horizontes na formação de cada um de vocês.

Aos alunos da ETE Aristóteles Fernandes, na pessoa da Profª Denise e da Profª Yeda, meus sinceros agradecimentos.

À equipe da Pinacoteca Benedito Calixto (Santos/SP) que possibilitou a execução deste trabalho.

À Profª Cristina Helena Spechoto pela revisão gramatical.

A todos, que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu muito obrigado!

RESUMO

O trabalho pretende fazer um estudo de algumas transformações geométricas no plano Euclidiano a partir da dimensão artística dos frisos (faixas). O objetivo visado foi verificar em que medida o uso dos frisos com a ajuda do software de geometria dinâmica Cabri-Géomètre-II contribui para articular e dar significado aos conceitos de translação, simetria axial e simetria central. A Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady foi utilizada na concepção das atividades. A metodologia utilizada seguiu algumas etapas da engenharia didática. Os sujeitos foram alunos de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Santos. Pudemos constatar nas análises feitas a partir das produções dos alunos que a introdução dos frisos na seqüência didática, favoreceu a articulação entre as diferentes transformações geométricas contribuindo dessa forma para um salto qualitativo nas justificativas apresentadas em relação aos principais conceitos das transformações.

Palavras-Chave: Transformações geométricas, frisos, Dialética Ferramenta-Objeto.

ABSTRACT

This research intends to develop an approaching about some geometrical transformations in the Euclidean plane beginning with the frieze patterns in an artistic dimension. The goal was to verify in which measure the use of Dynamic Geometry Software “Cabri Géomètre II” contributed to articulate and give meaning to the concepts of translations, reflection and rotation. The Tool-Object Dialetic, in accordance with Régine Douady, were used on the activities development. The methodology followed some steps in the Didactical Engineering. The subjects were the high school students in a public school in the city of Santos. We concluded from the students productions that the introduction of the frieze patterns in the didactical sequence helped the articulation among the different geometrical transformation contributing to a high quality step forward in the purpose shown in relation to the mainly concepts of them.

Keywords: Geometrical transformation, frieze patterns, Tool-Object Dialetic

SUMÁRIO

Anexo III	Atividade 3º módulo simetria axial - Alunos
Anexo III a	Atividade 3º módulo simetria axial - Observadores
Anexo IV	Atividade 3º módulo simetria central - Alunos
Anexo IV a	Atividade 3º módulo simetria central - Observadores
Anexo V	Atividade 4º módulo classificação das faixas da Pinacoteca - Alunos
Anexo VI	Atividade 4º módulo re-classificação de faixas - Alunos
Anexo VI a	Atividade 4º módulo re-classificação de faixas - Observadores
Anexo VII a	Faixas $\mathcal{F}_1^2$ Reflexão vertical com translações
Anexo VII b	Faixas $\mathcal{F}_2^1$ Reflexão vertical e reflexão horizontal com translações
Anexo VII c	Faixas $\mathcal{F}_2$ Rotação de meia volta com translações

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho “O estudo dos frisos no ambiente informatizado Cabri-Géomètre” insere-se na linha de pesquisa do Grupo 3 “Tecnologias e Meios de Expressão em Educação Matemática - TecMEM” do Programa de Estudos Pós Graduados do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Esta linha de pesquisa intenta formar uma cultura de investigação e pesquisa, tratando de questões sobre as relações recíprocas entre práticas matemáticas, aprendizagens e tecnologias, em particular, as tecnologias digitais, e a orquestração de ensino na presença de ferramentas tecnológicas.

Pretendemos neste trabalho elaborar uma seqüência de atividades que será apresentada a alunos do Ensino Médio a fim de articular os conceitos de translação, reflexão e simetria central a partir dos frisos no ambiente informatizado Cabri-Géomètre.

Para isto, organizamos nossa exposição em cinco capítulos.

No primeiro capítulo apresentaremos nossas justificativas, objetivos e quadro teórico.

No segundo capítulo apresentaremos um estudo do objeto matemático friso.

No terceiro capítulo descreveremos as nossas escolhas para a concepção da seqüência e faremos uma análise a priori das atividades, as quais serão divididas em quatro módulos assim distribuídos:

No primeiro módulo objetivamos a familiarização do aluno com o programa Cabri-Géomètre II e a revisão de algumas noções geométricas. No segundo módulo, apresentamos alguns exemplos de frisos e foi solicitado aos alunos uma possibilidade de classificação pelo encontro de elementos comuns nestes exemplares. No terceiro módulo, já com um pouco mais de domínio em relação ao software, objetivamos a formação dos conceitos relativos às transformações geométricas, particularmente translação, simetria axial, e simetria central. No último módulo, descreveremos nossa atividade de visita à Pinacoteca Benedicto Calixto onde é possível vivenciar a presença dos frisos nas paredes deste magnífico casarão branco da orla da praia da cidade de Santos, identificando os tipos distintos de frisos e as transformações geométricas pertinentes em vários exemplares. Em seguida, solicitamos aos alunos a reavaliação da primeira classificação realizada em relação aos modelos de frisos apresentados, e, posteriormente, apresentar exemplos de modelos utilizando diversas transformações geométricas feitas com o Cabri-Géomètre II.

No quarto capítulo, analisaremos os resultados de cada uma das seqüências de atividades.

No quinto capítulo, a partir das análises que serão realizadas, apresentaremos os principais resultados da nossa pesquisa.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA

1.1 Introdução

Neste capítulo iremos abordar nossas justificativas, objetivos e quadro teórico utilizado na pesquisa.

Descreveremos os trabalhos de Régine Douady, Dialética Ferramenta-Objeto. Este quadro teórico de Régine Douady será revelado com exemplos e apresentado em suas diversas fases contemplando aspectos de conceitos matemáticos a serem introduzidos em uso na resolução de problemas ora como ferramenta, ou como elemento de um corpo de conhecimento científico e socialmente reconhecido, então como objeto.

Faremos uso também do quadro teórico de Bernard Parzysz que classifica as atividades em quatro níveis: Geometria concreta (G0); Geometria espaço-gráfica (G1), Geometria Proto-axiomática (G2) e Geometria axiomática (G3).

Por último, apresentaremos como metodologia de trabalho a engenharia didática de Michèle Artigue.

1.2 Justificativas

Durante minha trajetória docente de um pouco mais de uma década na cadeira de desenho geométrico foi possível observar diversas posturas de alunos frente aos conteúdos propostos em sala de aula.

E dentro dessa diversidade algumas provocaram inquietações que me induziram a realizar alguns questionamentos: por que com os passar dos anos, com o surgimento de novas turmas, notoriamente seus interesses pela área se demonstravam decrescentes? Por que o interesse dos alunos pelo desenho geométrico nas séries iniciais não se tornava uma prática nas séries posteriores?

Ainda que houvesse integração de áreas, no momento da institucionalização dos conhecimentos estudados novamente, o desinteresse se fazia presente. E as inquietações permaneciam. Será que existem alternativas eficazes na abordagem de desenho geométrico? A informática poderia dar conta, através de uso adequado, na solução desse impasse?

Para estas indagações comecei a buscar respostas. Sempre me causava um apreço pelos conteúdos que pudessem ser remetidos a uma contextualização artística.

O estudo de arcos góticos, romanos, ogivais, sua identificação e presença na arquitetura da cidade e prédios circunvizinhos à região do colégio, onde os alunos pudessem lançar mão de registros próprios (fotos), é um exemplo de trabalho que apresentou êxito na participação e envolvimento dos mesmos no tema abordado.

Estes desdobramentos descritos incentivaram-me à procura de subsídios que pudessem auxiliar nas respostas às indagações formuladas. Quais conteúdos deveriam ser enfatizados e qual a melhor abordagem a ser feita? Será que o uso do computador favorece a aprendizagem da geometria e em que medida ele difere do ambiente papel-lápis?

1.2.1 Transformações geométricas nos PCN's

"Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura".(PCN, 1998-p59)

Segundo os PCN's (1998, p-51), os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, pois o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, representar e descrever, de forma organizada, o mundo em que vive.

"Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino da geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isto poderá ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, arquitetura ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc." (PCN, 1998 p.128)

Apoiadas neste documento oficial brasileiro encontram nossas justificativas acerca dos conteúdos e da forma de como abordá-los. A introdução dos frisos e ornamentos poderia ser um pretexto para a introdução de conceitos geométricos. Mas para introduzi-los seria necessário a apreensão de alguns conceitos de transformações geométricas. Os frisos possuem características artísticas que permitem uma visão mais ampliada sobre a presença da Matemática em outras áreas do conhecimento.

"*Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento"*. PCN (1998,p51)

Os frisos e as faixas usados como sinônimo nesta pesquisa se apresentarão como elementos motores articulados dentro de uma dimensão artística e promoverão uma possibilidade ímpar de estudo. Esta articulação será feita por uma releitura de obras de arte. Encontramos duas importantes componentes básicas neste documento: a contextualização do conhecimento e a interdisciplinaridade. Os frisos e as faixas permitirão o estudo das transformações geométricas. Além de poderem ser estudados sob a perspectiva artística, permitindo uma nova dimensão ao estudo que transcende a própria Matemática.

No bloco de conteúdos denominado espaço-forma para o terceiro e quarto ciclos são encontradas as indicações quanto às transformações geométricas (isometrias e homotetias) e sua relevância posto que elas permitem o desenvolvimento de percepção espacial e são utilizadas como recursos para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições necessárias para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.

1.2.2 Problemáticas no ensino de transformações geométricas

Segundo Chevallard (2001,p.59), a Didática da Matemática é a ciência do estudo e da ajuda para o estudo da matemática. Um dos seus princípios consiste em postular que as explicações dos fenômenos didáticos devem partir das descrições das atividades matemáticas que realizam conjuntamente, professor e aluno, na sala de aula e fora dela e não pode ser resumido a fatores psicológicos, nem reduzido às especificidades dos métodos pedagógicos utilizados. Entende-se que o objeto matemático deve ser problematizado e não visto como elemento transparente na relação didática.

Para adentrarmos nesta pesquisa adotaremos o conceito de obra matemática também discutido por Chevallard (2001) e entendemos que todo saber matemático é constituído de pequenas obras e estas devem ser reconstruídas para que se possa dar significados a este saber. Entende-se como obra uma construção humana que responde sempre a um conjunto de questões.

Entendemos assim, que as transformações devem ser problematizadas para poderem ser estudadas. Segundo Bkouche (1991) o estudo da geometria das transformações pode ser problematizado e abordado da seguinte forma:

a) movimento (congruência);

b) figuras regulares (polígonos regulares e seus respectivos padrões – frisos e pavimentações; poliedros regulares e os cristais);

c) figuras semelhantes (homotetias e semelhanças);

d) representações planas dos objetos espaciais (perspectiva cônica e paralela).

Vamos detalhar cada um destes ítens. Para o item a) encontramos segundo Bkouche (1991) o caso dos movimentos ditos rígidos. Um objeto pode ser deslocado no espaço ou no plano sem sofrer deformação. Uma das propriedades do corpo sólido, por exemplo, suas dimensões, é um invariante deste movimento. As dimensões dos corpos no início e no final do seu deslocamento não mudam. Estes deslocamentos no plano podem ser oriundos de translações ou rotações. Como veremos posteriormente com mais detalhes, as translações e rotações são, na verdade, composições de reflexões. No caso da translação, um dos elementos que a caracteriza é o vetor, ente matemático representante de uma classe cujos elementos apresentam mesma direção, módulo e sentido.

Bkouche (1991) ainda descreve como sua segunda problemática ao abordar o tema das transformações geométricas quando a relaciona com o estudo das figuras regulares. Para este autor, uma figura é regular quando são observadas igualdades repetitivas entre certas partes dela. Assim, um polígono é regular se todos os seus lados e ângulos forem respectivamente congruentes. Então, para estudar as figuras regulares podemos utilizar transformações que deixem os lados e os ângulos invariantes. Se tomarmos o exemplo de representação nos números complexos no plano Argand-Gauss, poderemos construir polígonos regulares mediante a divisão de uma circunferência em partes iguais, onde a geometria se reencontra com a álgebra e aritmética via a equação: $z^n - 1 = 0$. As raízes n-ésimas da unidade são representadas pelos vértices de um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo unitário e tendo $z = 1$ como um dos seus vértices. Todos os demais polígonos poderão ser criados por homotetia.

Além dos polígonos regulares, podemos considerar os poliedros regulares onde todas as faces e seus ângulos poliédricos são respectivamente congruentes.

Na mesma problemática, Bkouche ainda cita as figuras que admitem eixos, planos ou centros de simetria, como as faixas ornamentais, mosaicos, cristais, etc. Para o nosso trabalho estaremos particularmente interessados nesta abordagem caracterizada pelo estudo dos frisos.

Na terceira problemática apresentada, ele descreve os casos relativos às figuras semelhantes. O termo semelhança refere-se a uma noção transformacional, ou seja, trata-se de uma relação entre figuras que se correspondem, elemento a elemento, da seguinte forma: congruência de ângulos e proporcionalidade de segmentos homólogos. Esta transformação, ainda que possa não conservar as dimensões ou suas grandezas, conserva sua forma original.

Bkouche descreve como a quarta problemática ao estudo das transformações geométricas que ele chama de transformações deformantes, ou seja, as projeções paralelas e centrais nas quais trata-se o problema de representar no plano uma figura do espaço. Ainda que haja uma mudança na forma das figuras, existem invariantes entre elas. Existem elementos que permanecem constantes no estado inicial e no estado final da transformação. Podemos citar o exemplo do princípio de Cavalieri relativo à conservação de áreas de seções planas. É possível então, a partir da projeção de uma figura, obter as características da mesma.

Enfatizaremos neste trabalho a abordagem do estudo da geometria das transformações pelas figuras regulares.

1.2.3 O ambiente informatizado

"Os programas de computadores para uso educacional possuem diversas capacidades e propriedades que devem ser reconhecidas e aproveitadas tanto por professores como por alunos, para obterem resultados eficientes no processo de ensino e aprendizagem".(BALDIN, 2002).

Com o advento das novas tecnologias na educação, diversos softwares têm sido desenvolvidos objetivando melhorar as condições estabelecidas entre o ensino e a aprendizagem, particularmente, na área de Geometria. Isto ocorre graças ao papel fundamental das representações gráficas nesta área de conhecimento (Laborde,1993).

Os softwares chamados de Geometria Dinâmica (DGS) permitem a possibilidade de desenhar rapidamente e de forma precisa além de manipular e modificar as representações gráficas construídas. Neste ambiente é possível construir figuras geométricas e manipulá-las, alterando suas medidas, formas e posição.

O software Cabri-Géomètre II será utilizado no estudo dos frisos e das transformações geométricas no plano. O uso deste programa permitirá uma abordagem diferenciada em relação ao meio papel e lápis, pois sua principal característica é de permitir a manipulação de figuras sem alterar as propriedades básicas das mesmas, ou seja, seus invariantes.

A manipulação direta das figuras geométricas obtida por meio do Cabri-Géomètre II nos permite visualizar a reconstrução dos conceitos da geometria pelo estudo das propriedades invariantes destes "desenhos" quando são "arrastados" seus componentes na tela (no sentido de arrastar pelo mouse). As propriedades geométricas se transformam na descrição dos fenômenos geométricos acessíveis pela observação nestes novos campos de experimentação.

O Cabri-Géomètre II e os demais softwares de geometria dinâmica completaram as ligações entre a geometria e seu campo de representação, desenhos das figuras geométricas. Estes ambientes de geometria dinâmica são completamente definidos por um conjunto de objetos primitivos (ponto, reta, segmento, etc...) e ações elementares (desenhar uma perpendicular dada uma reta e um ponto, uma reta paralela, etc...). Isto permite um conjunto organizado de ações primitivas que podem se tornar uma ação mais complexa usando macro construções. As figuras podem ser "deslocadas" e "arrastadas" em torno de qualquer ponto, com um certo grau de liberdade.

Healy (2000b) destaca algumas características que diferenciam o Cabri-Géomètre, assim como os demais DGS, de outros ambientes de aprendizagem de Geometria:

"- as ferramentas de construção e de criação possibilitam aos estudantes produzir um diagrama que seja simultaneamente um desenho e uma figura (Laborde,1993);

- as ferramentas de arrastar permitem aos estudantes examinar suas construções, para identificar os relacionamentos que permanecem invariantes e para impor visualmente relacionamentos adicionais (Hölzl, 1996; Arzarello, Micheletti, Olivero e Robutti, 1998);

- ferramentas de verificação de propriedades que permitem que os estudantes considerem o domínio da validade de propriedades visualmente identificáveis de suas construções (Laborde e Laborde, 1995);

- ferramentas de medição que permitem estudantes considerar casos particulares e fornecer meios diferentes de focalizar em relacionamentos invariantes (Healy, 2002a,p.1-2)

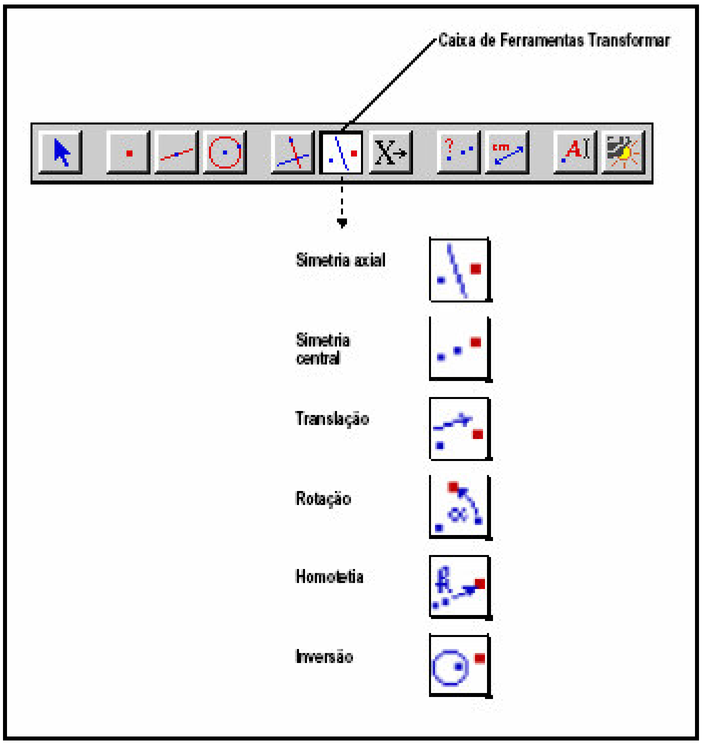
Esclarecendo a distinção feita por Laborde (1993), um diagrama pode ser visto como desenho e uma figura. Tal diferenciação se faz necessária, pois o desenho como entidade material, ou seja, a representação gráfica dos elementos geométricos, não tem perfeição (um ponto possui dimensão e uma linha possui largura). A figura é o resultado de um processo de teorização seguido do processo de materialização. A figura apresenta tanto as impressões visuais quanto as conceituais procedentes de sua definição.

Segundo Balacheff (1996), o status de desenho é mudado pela sua disponibilidade em tais ambientes, desde que eles não se referem a um singular objeto, mas a uma classe de objetos que compartilhem as mesmas restrições e, por isso, as características invariantes. Distinção entre desenho e figura pode então se tornar visível pela atividade geométrica dos aprendizes: o desenho é obtido como resultado de uma descrição explícita dos objetos e suas relações; a conversão das observações dos comportamentos dos desenhos na manipulação direta permitem o aprendiz a verificar a "validação" (correção) da figura intencionada, onde a correção é experimentada como uma relação entre invariantes previstas e as invariantes observadas. Este duplo papel da visualização na geometria permanece escondido em ambiente papel-lápis, por causa da limitação das produções dos desenhos e poucas possibilidades de realizar experimentos.

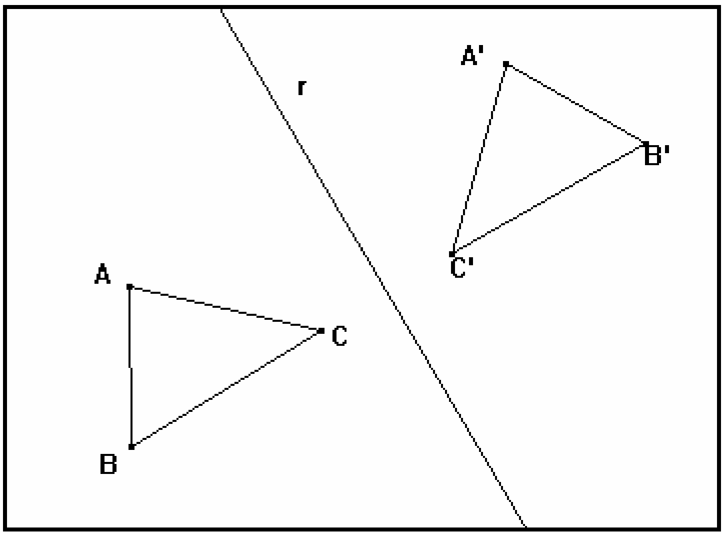
1.2.4 Transformações Geométricas no Cabri-Géomètre II

A caixa de ferramenta "Transformar" contém as ferramentas associadas aos recursos de transformação do Cabri-Géomètre II. Estes recursos permitem transladar, refletir, rotacionar e dilatar objetos de acordo com fatores e valores angulares especificados.

Particularmente em nosso trabalho, ocuparemo-nos apenas com a translação, a reflexão em reta (ou simetria axial) e a simetria central.



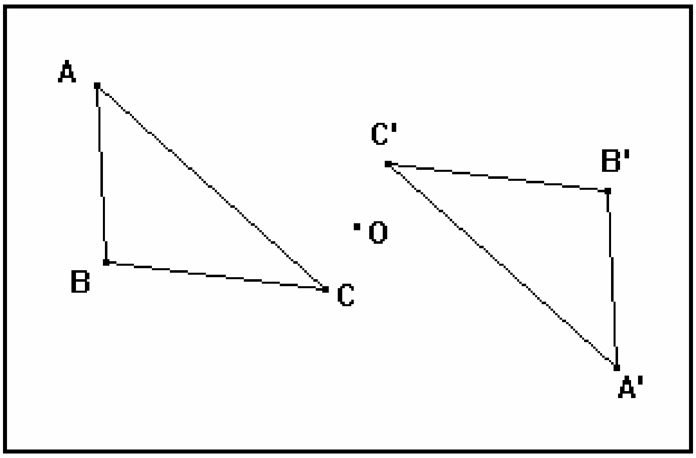
A ferramenta "simetria axial" cria a imagem de uma figura por uma reflexão em torno de uma reta chamada "eixo de simetria", ou ainda, em relação a um segmento, a uma semi-reta, a um vetor, a um eixo ou lado de um polígono. Uma vez selecionado este botão no menu, deve-se clicar no objeto a ser refletido e, posteriormente, no eixo considerado.



Exemplo de simetria axial

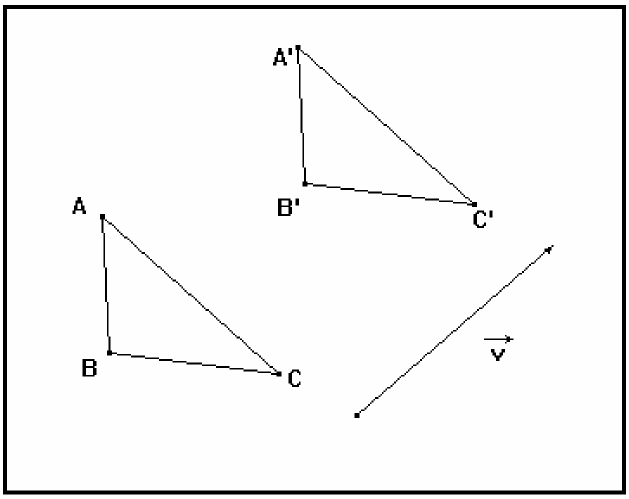
Para o exemplo acima, após o botão “simetria axial” estar pressionado, deve-se clicar no triângulo ABC e, posteriormente, na reta r.

Com a transformação “simetria central” é possível criar a imagem de um objeto simétrica em relação a um ponto. Para isto, uma vez que esta transformação esteja selecionada, basta clicar no objeto e posteriormente no ponto considerado.



Exemplo de simetria central

No caso da translação, além do objeto a ser transladado, há a necessidade de existir um vetor que possa determinar as condições da translação. Seleciona-se assim por um clique, o objeto e, posteriormente, o vetor definindo-se a translação.



Exemplo de translação

Cada uma destas ferramentas descritas funciona como "caixa-preta". Por meio destas ferramentas, os alunos têm acesso às figuras formadas pelas propriedades geométricas sem, no entanto, ter conhecimento sobre a forma como elas foram construídas.

1.3 Questão de pesquisa

Em nosso trabalho procuraremos responder à seguinte questão: em que medida o uso dos frisos com o Cabri-Géomètre-II contribui para articular e dar significado aos conceitos de translação, simetria axial e simetria central?

1.4 Quadro teórico

Nosso quadro teórico está apoiado nas pesquisas de Régine Douady (1986) e Bernard Parzysz (2001). Passaremos a descrever sucintamente estes quadros e, ao longo de nossas análises nos demais capítulos, as principais idéias estarão articuladas no decorrer do texto.

Para a concepção da nossa seqüência didática, utilizaremos a Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady.

1.4.1. Dialética Ferramenta-Objeto

Régine Douady em suas pesquisas se interessa pelos processos nos quais os alunos podem adquirir um saber matemático em situação escolar. Ela elaborou uma hipótese cognitiva e didática sobre o aprendizado de um conteúdo matemático:

"Pode-se construir efetivamente conhecimentos matemáticos fazendo jogar a dialética ferramenta-objeto no seio de jogos de quadros apropriados, graças a problemas respondendo a determinadas condições.

(...) Nossa hipóteses levaram a recortar as noções matemáticas, objeto do aprendizado, segundo um encadeamento de problemas, que por sua organização e graças a sua resolução em uma responsabilidade partilhada entre o professor e os alunos, deve

permitir aos alunos controlar o significado destas noções, dispô-las do mesmo modo ou adaptá-las as situações novas."(Douady, 1986).

Esta autora assume então, como hipótese de trabalho que, para certas noções, uma seqüência de atividades fazendo alternar o aspecto ferramenta da noção visada com o aspecto objeto, seguida de uma institucionalização, e seguida de exercícios variados de familiarização que precisam das noções recentemente institucionalizadas e sua reutilização numa situação nova pode ajudar na construção de um conhecimento procurado.

Iremos detalhar algumas definições abordadas em sua hipótese bem como explicitar melhor o que ela define como Dialética Ferramenta-Objeto que fundamentou as escolhas e elaboração de nossas atividades.

Para Douady (1986), um saber matemático pode ser visto sob dois aspectos. Por um lado, no nível funcional, onde certos conceitos e teoremas matemáticos podem ser usados para resolver problemas, interpretar informações. Neste caso, o saber matemático funciona como *ferramenta* que pode ser adaptada a vários problemas, e várias ferramentas podem ser adaptadas a um mesmo problema. O segundo aspecto é aquele que identifica o saber matemático como elemento de um corpo de conhecimento cientificamente e socialmente reconhecido. O saber matemático é visto, neste caso, como *objeto.*

Com o objetivo de articular estes conceitos matemáticos, Douady propõe uma organização do ensino fundamentado em três pontos: a dialética Ferramenta-Objeto, a dialética antigo-novo, os jogos de quadros. Estes pontos se relacionam a partir de problemas, e respondem às várias condições:

a) o enunciado (com texto e questões) tem sentido para os alunos.
b) considerando seus conhecimentos, os alunos podem engajar um procedimento de resolução, mas eles não podem resolver completamente o problema.
c) os conhecimentos visados pelo aprendizado (conteúdo ou método) são ferramentas adaptadas ao problema.
d) o problema pode se formular em, pelo menos, dois quadros diferentes.

(Douady 1986)

Por quadro ou domínio, entende-se o conjunto de conceitos, objetos de um ramo da matemática, suas propriedades, as relações possíveis entre esses objetos, as formulações diferenciadas que podemos fazer a respeito deles, os procedimentos matemáticos que envolvem esses conceitos e imagens mentais ligadas a esses objetos, além das relações entre os mesmos.

Uma vez elaborada convenientemente uma situação-problema a qual os alunos têm a tarefa de resolver e que contemple as condições elencadas anteriormente, passaremos a descrever um processo ao qual Douady (1984) chama de Dialética Ferramenta-Objeto separada em várias fases. Com o intuito de maiores esclarecimentos das fases propostas por este modelo, além da descrição das fases, vamos dar um exemplo dessa organização. Vamos supor que o assunto a ser ensinado seja a potenciação de números complexos. Dado o $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, obter z^{100}.

Dialética Ferramenta-Objeto Fase 1: "Antigo"

Nesta fase, os conceitos matemáticos são aplicados como ferramentas explícitas para resolver pelo menos parcialmente o problema.

Os alunos sabem calcular z^2, z^3, etc... usando seus conhecimentos antigos, mas tais conhecimentos se mostram *insuficientes* para resolver completamente o problema.

Dialética Ferramenta-Objeto Fase 2: "Pesquisa novo implícito"

Os alunos encontram dificuldades para resolver completamente o problema. Isto acontece se a estratégia inicial tornar-se muito custosa (em quantidade de operações e, portanto, em tempo, em risco de erro e, portanto, em incertezas sobre o resultado).

Novas questões surgem para resolver este problema nesta fase.(...) Isto faz com que os alunos procurem novos meios adaptados para resolução da situação. Freqüentemente progressos eficazes na resolução do problema provêm de uma mudança de quadros. (...) Mudanças de quadros são meios à disposição do professor para fazer avançar a fase 2. Mas a busca pode também avançar sob a responsabilidade apenas do aluno.

A mudança de quadros nesta fase desempenha o papel de motor no desenvolvimento desta dialética e pode favorecer a ampliação dos conhecimentos antigos dos alunos para produzir o conceito novo.

No exemplo em discussão, o problema necessita de um conceito novo para ser resolvido que é a fórmula de Moivre. Uma mudança do quadro algébrico para o quadro trigonométrico é desejável. Essa mudança de quadro possibilita operar números complexos na forma trigonométrica e obter a parir de $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + isen\alpha)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\beta + isen\beta)$ a relação $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\alpha+\beta) + i \cdot sen(\alpha+\beta)]$.

Dialética Ferramenta-Objeto Fase 3: "Explicitação e institucionalização local"

Certos elementos das fases anteriores tiveram um papel importante e são susceptíveis apropriação pelos alunos nesse momento da aprendizagem. *Eles são discutidos coletivamente pelo professor*. Nas situações de comunicação, os alunos apresentam várias formas de saber. Essa explicitação possibilita ao professor promover debates sobre os conhecimentos antigos, que estão sendo mobilizados, e sobre os novos, que estão sendo gerados implicitamente, sem que se crie uma situação de bloqueio. Estes debates servem para validar alguns conhecimentos produzidos nesta fase, e permitem aos alunos reconhecer procedimentos corretos ou refletir sobre procedimentos incorretos.

Aplicando-se sucessivamente a fórmula obtida na fase 2, obtém-se $z = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sen\frac{\pi}{3}$, $z^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sen\frac{2\pi}{3}$, $z^3 = \cos\frac{3\pi}{3} + i \cdot sen\frac{3\pi}{3}$ e, conseqüentemente, $z^{100} = \cos\frac{100 \cdot \pi}{3} + i \cdot sen\frac{100 \cdot \pi}{3}$. Institucionaliza-se a fórmula de potência de expoente natural de um número complexo a partir da situação proposta.

Dialética Ferramenta-Objeto Fase 4: "Institucionalização – status de objeto"

É a fase em que o professor identifica os novos saberes que constituem conhecimentos novos e as convenções a serem usadas. O professor apresenta de maneira organizada e estruturada, as definições, os teoremas, as demonstrações, indicando o que é essencial e o que é secundário. Institucionaliza-se o objeto a ser ensinado dando-lhe status de objeto matemático.

No nosso exemplo, institucionaliza-se a operação de potenciação em **C** para expoentes inteiros positivos e negativos. Se $z = \rho(\cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$ e $n \in Z$, então $z^n = \rho^n[\cos(n\alpha) + i \cdot sen(n\alpha)]$.

Dialética Ferramenta-Objeto Fase 5: "Familiarização - reinvestimento"

Os alunos utilizam-se do conceito matemático recentemente apreendido como ferramenta para resolver uma situação nova proposta pelo professor. *Estes exercícios só utilizam o conhecido. No entanto, os alunos os abordam com concepções que evoluíram e que lhes permitem encarar um campo maior de problemas.*

O novo conceito é então usado como ferramenta na resolução de um novo problema. Por exemplo, dado $z = \sqrt{3} + i$, obter z^5.

Sabendo-se que $z^n = \rho^n[\cos(n\alpha) + i \cdot sen(n\alpha)]$, então é possível reescrever o número complexo z da forma algébrica $z = \sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2})$ para a forma trigonométrica $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sen\frac{\pi}{6})$.

Aplicando-se a potenciação desejada, obtém-se:

$z^5 = 2^5\left[\cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot sen\left(5 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right] = 32(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot sen\frac{5\pi}{6})$. É possível reescrevê-lo agora na forma algébrica: $z = 32(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}) = -16\sqrt{3} + 16 \cdot i$.

Dialética Ferramenta-Objeto Fase 6: "Tornando a tarefa complexa ou novo problema"

Nesta fase são propostas situações mais complexas para as quais os alunos poderão reutilizar os novos conhecimentos envolvendo ainda outros conceitos matemáticos, iniciando assim um novo ciclo da Dialética Ferramenta-Objeto.

O novo conceito é utilizado numa situação mais complexa. Por exemplo obter o menor inteiro n positivo tal que o número complexo $(1 + i)^n$ seja real.

Sabendo-se que $z^n = \rho^n[\cos(n\alpha) + i \cdot sen(n\alpha)]$, então é possível reescrever o número complexo z da forma algébrica $z = (1 + i) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})$ para a forma trigonométrica $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4})$.

Estamos interessados no menor n inteiro positivo tal que z^n seja real, ou seja, sua parte imaginária seja igual a zero. Aplicando-se a potenciação n no número z, obtém-se:

$$z^n = (\sqrt{2})^n\left[\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot sen\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Para que tenhamos este número real, é necessário que $sen(n\cdot\frac{\pi}{4})=0$. Logo os valores de n que satisfazem esta condição são $n = 0,\pm4,\pm8,...$. Para satisfazer a condição do problema, ou seja, menor n inteiro positivo, escolhe-se $n = 4$.

1.4.2 O modelo de Bernard Parzysz

Para analisar as atividades realizadas pelos alunos nos apoiaremos no artigo de Bernard Parzysz (2001), no qual ele explicita suas referências ao modelo de van Hiele onde se distinguem cinco níveis no desenvolvimento do pensamento geométrico em crianças:

Nível 0 (visualização): as figuras são identificadas somente pelos seus aspectos gerais.

Nível 1 (análise): as crianças começam a distinguir propriedades das figuras, mas permanecem não aptas a esclarecer totalmente a situação em estudo.

Nível 2 (dedução informal): as crianças podem estabelecer relações intra e inter-figurais. Os resultados obtidos empiricamente são, muitas vezes, utilizados juntos com as técnicas de dedução.

Nível 3 (dedução formal): a dedução é vista como ferramenta para validação, dentro do sistema axiomático.

Nível 4 (rigor): o estudante está apto a se situar por si mesmo em vários sistemas axiomáticos e fazer comparações entre os mesmos.

Parzysz (2001) discute que os modelos de níveis 0 e 1 correspondem ao que ele denomina de "geometria concreta". Os objetos de estudo são materiais, isto é, desenhos, modelos, objetos da vida cotidiana e as argumentações a respeito dos mesmos são baseados primariamente em critérios perceptivos. No entanto, para os níveis 3 e 4, Parzysz faz uma correspondência ao que ele chama de "geometria teórica", onde os objetos de estudo são conceituais e somente demonstrações são aceitas como argumentação a respeito dos mesmos.

Para o nível 2 de Van-Hiele, Parzysz comenta que é possível encontrar elementos destas duas geometrias descritas. Neste nível apresenta-se claramente o conflito entre o conhecido e o percebido.

O modelo interpretativo de Parzysz considera uma produção do aluno como resultado do modo pelo qual ele se situa em relação a dois pólos geralmente antagônicos:

- um que consiste em representar o objeto tal como o sujeito imagina que ele se apresentaria à vista - pólo do percebido;
- outro que consiste em representar sem adaptação as propriedades do objeto que o sujeito julga importantes - pólo do conhecido.

Como, quase sempre, é impossível satisfazer um de cada vez, cada um dos critérios, o aluno os compõe, de modo freqüentemente inconsciente, para obter um resultado que ele julga o melhor possível.

A situação do sujeito em relação aos dois pólos depende de diversos fatores; ela evolui com a idade, mas também com as capacidades gráficas, os conhecimentos geométricos, a natureza da tarefa, o objetivo visado etc.

Sintetizando suas idéias, podemos distinguir no seu modelo dois aspectos: por um lado a natureza dos objetos em discussão (se físicos ou teóricos) e por outro lado os modos de validação (se perceptivos ou lógicos-dedutivos). A geometria não axiomática refere-se as situações concretas (G0), isto é, que se referem à realidade, e que são idealizadas para constituir o espaço-gráfico (G1). A geometria axiomática, em oposição a estas últimas, diz respeito à axiomatização completamente explícita (G3) ou não (G2). A referência ao real é opcional para G2 , mas não para G1, e a geometria é denominada proto-axiomática.

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">Geometrias não axiomáticas</td><td colspan="3">Geometrias axiomáticas</td></tr>
<tr><td>Tipos de geometrias</td><td colspan="2">Geometria concreta (G0)</td><td colspan="2">Geometria espaço-gráfica (G1)</td><td colspan="2">Geometria proto axiomática (G2)</td><td>Geometria axiomática (G3)</td></tr>
<tr><td>objetos</td><td colspan="4">físicos</td><td colspan="3">Teóricos</td></tr>
<tr><td>validações</td><td colspan="4">perceptivas</td><td colspan="3">Deduções</td></tr>
<tr><td>van Hiele</td><td>nível 0</td><td colspan="2">nível 1</td><td colspan="2">nível 2</td><td>nível 3</td><td>nível 4</td></tr>
</table>

Do ponto de vista didático, as distinções entre estas geometrias surgem na forma como são conduzidas as atividades propostas aos alunos, ou seja, pelas rupturas de contrato didático que se produz entre uma e outra atividade. Estas rupturas aparecem principalmente na passagem de nível G0➔G1 ou G1➔G2 ou ainda G2➔G3, no entanto, poderemos também ter rupturas em outras passagens de níveis não especificados.

Ainda segundo Parzysz (2001)

"... o maior objetivo do ensino de geometria nas escolas primárias e secundárias é ajudar os estudantes a transitarem do ponto de vista do nível G1 ao nível G2, uma vez que a geometria surge como um local privilegiado para por em jogo as provas hipotéticas-dedutivas".[1]

No nosso trabalho procuraremos classificar nossas atividades com os níveis de Parzysz e identificar vestígios entre a passagem de validações perceptivas para validações dedutivas. As estratégias dos alunos em suas resoluções e as validações das suas tarefas, seja em seu discurso verbalizado ou por meio de algum instrumental, ou ainda, por suas ações com o Cabri-Géomètre II serão norteadores para a nossa análise.

1.4.3 Metodologia.

Para responder à questão de pesquisa elaboraremos uma seqüência de atividades utilizando alguns elementos da engenharia didática.

Segundo Michèle Artigue (1988) a engenharia didática vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino.

A engenharia didática caracteriza-se também em relação aos tipos de pesquisas baseados nas experimentações em sala de aula, pelo registro no qual ela se situa e nos modos de validação que lhe são associados. Essa validação da pesquisa é feita de forma interna, pela confrontação entre a análise a priori, sustentada pelo uso do quadro teórico e a análise a posteriori.

Podemos elencar quatro fases do processo experimental da engenharia didática:

a) primeira fase: análises preliminares;
b) segunda fase: concepção das situações didáticas e análise a priori das atividades;
c) terceira fase: aplicação e observação da seqüência;

---
[1] Nossa tradução

d) quarta fase: análise a posteriori das atividades.

CAPÍTULO 2

ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO "FRISO"

2.1 Introdução

A história da geometria das transformações é bastante recente em face da própria história da Geometria. E mais recente ainda se levarmos em conta a história das artes. Neste capítulo, o leitor encontrará um breve relato sobre os frisos na história da arte bem como a evolução da geometria até a gênese da geometria das transformações. Os exemplos de obra de arte apresentados foram selecionados para que o leitor contemple a diversidade da procedência destas formas, ou seja, sua universalidade. E para tal apresentamos os frisos em exemplares dos cinco continentes. Nossa intenção é de evidenciar a presença destes motivos e padrões em várias obras de arte, desde peças entalhadas em madeira, ou ainda vasos e pinturas, .sem perder de vista que nosso estudo será dirigido aos frisos no plano.

Posteriormente, iremos definir e discutir as principais idéias das isometrias, classificando o objeto matemático friso presente em todas as nossas atividades. A descrição mostrará algumas definições presentes na literatura especializada.

2.2 Alguns aspectos históricos dos frisos

Iniciamos nosso trabalho na busca de referenciais históricos a respeito dos frisos, sua origem e desenvolvimento.

"Ignoramos como a arte começou, tanto quanto desconhecemos como teve início a linguagem. Se aceitarmos que arte significa o exercício de atividades tais como a edificação de templos e casas, a realização de pinturas e esculturas, ou a tessitura de padrões, nenhum povo existe no mundo sem arte".(GOMBRICH, 1999, p.41).

Segundo Gombrich, a arte dos povos pré-históricos e primitivos deve ser estudada e compreendida à medida que entendemos os propósitos a que tinha de servir. Quanto mais antigo, mais definido, mas também mais estranhas são as finalidades que se crê serem servidas pela arte.

As imagens de cavalos, mamutes ou renas encontradas em cavernas, pinturas rupestres, mostram-nos uma das mais antigas relíquias da crença universal no poder produzido pelas imagens. Possivelmente os homens caçadores pré-históricos imaginavam que, se fizessem uma imagem da sua presa, os animais verdadeiros também sucumbiriam ao seu poder.

Seja na pintura, seja na confecção de máscaras, o domínio técnico dos artífices tribais é deveras surpreendente. Os maioris da Nova Zelândia aprenderam a criar verdadeiras maravilhas em suas obras de talha. (GOMBRICH, 1999,p44). Nestes entalhes já está presente a simetria em relação a um eixo vertical.

Lintel da casa de um chefe maiori, começo do século XIX.
Madeira talhada, 32 x 82 cm;Museu do Homem, Londres. (GOMBRICH,1999).

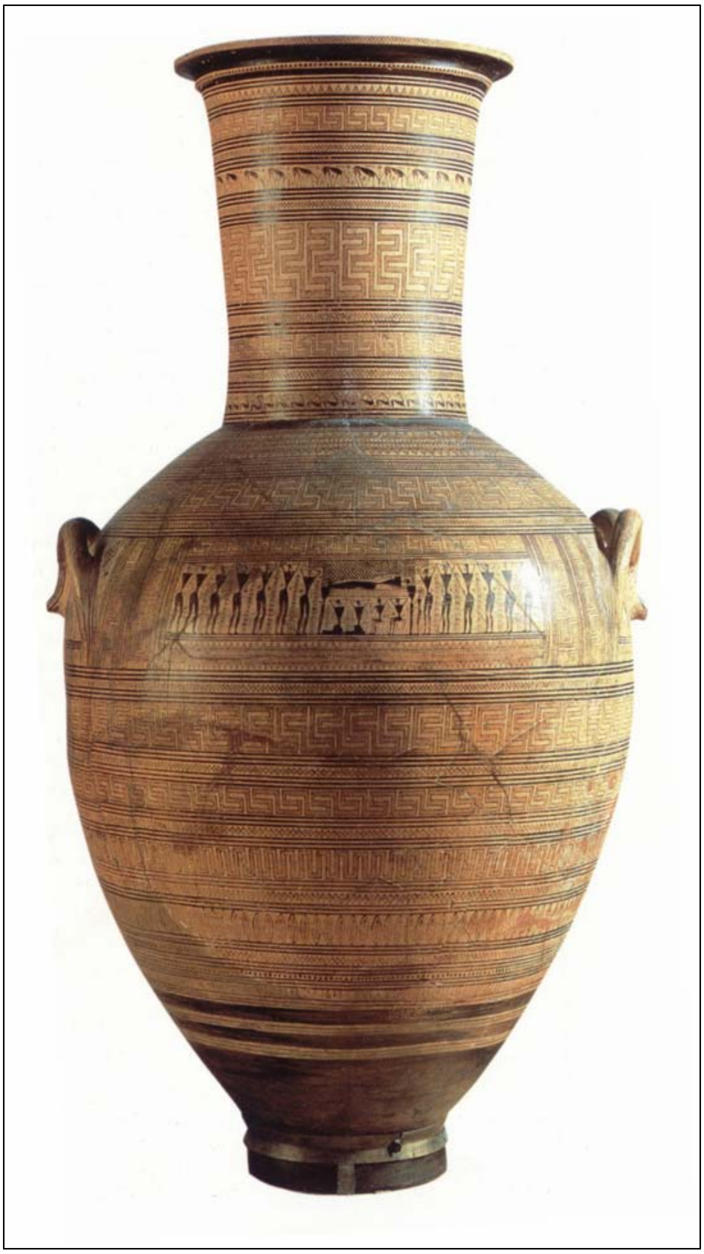
Encontramos no exemplar de uma série de cabeças de bronze descobertas há poucas décadas na Nigéria, África, um ornamento onde a translação está presente.

Cabeça de um negro, provavelmente representando um rei (Oni), de Ife, Nigéria, séculos XII-XIV. Bronze, altura 36 cm; Museu do homem, Londres. (GOMBRICH,1999)

Se dirigirmos nossa pesquisa para outros povos, poderemos encontrar no antigo vale do Nilo, Egito, os frisos sendo utilizados como ornamentos. Este exemplar representa um jardim com um tanque.

O jardim de Nebamun, 1400 a.C. Mural de um túmulo em Tebas, 64 x 74,2 cm; British Museum, Londres. (GOMBRICH,1999)

Muito dos nossos conhecimentos são procedentes dos gregos. Encontramos também na arte grega a presença dos ornamentos. De fato, em vários lugares até os dias de hoje, os frisos e as faixas com motivos geométricos são chamados também de "gregas". Passamos a apresentar um vaso grego decorado com padrões geométricos simples. Este vaso representa a lamentação por um morto, que jaz em seu esquife, enquanto as carpideiras à direita e à esquerda levam as mãos à cabeça no pranto ritual que era um costume de quase todas as sociedades primitivas.



A lamentação pelo morto, 700 a.C. Vaso grego no estilo Geométrico; altura 155 cm; Museu Arqueológico Nacional, Atenas. (GOMBRICH,1999)

Encontramos os frisos, além das manifestações em pinturas ou cerâmicas, também na arquitetura. O Coliseu é um exemplo característico da construção romana. O andar térreo é uma variação do estilo dórico, o segundo andar é jônico, e o terceiro e o quarto são meias colunas coríntias. É possível verificarmos a presença de um grande friso ornamentando o ponto mais elevado desta construção.

O Coliseu, Roma, 80 d.C. Um anfiteatro romano. (GOMBRICH,1999)

Se olharmos para o Oriente, poderemos observar a influência do islamismo na arte. Fazer imagens era proibido. Mas a arte não pode ser simplesmente suprimida, e os artífices do Oriente aos quais não era permitido representar seres humanos, deixaram sua imaginação jogar com padrões e formas. Eles criaram as ornamentações mais rendilhadas e sutis, conhecidas como arabescos. Mesmo fora dos domínios islâmicos, o mundo familiarizou-se com essas invenções através dos tapetes orientais.

Tapete persa, século XVII. Victoria and Albert Museum, Londres (GOMBRICH,1999)

Em uma observação mais cuidadosa do friso pertencente a este tapete, poderemos encontrar um entrelaçado de motivos com diversas transformações geométricas associadas, demonstrando uma abstração muito maior em relação aos padrões utilizados até a época de sua criação.

2.3 Gênese da Geometria das transformações

A Geometria se apresenta como um dos ramos mais antigos da Matemática e se desenvolveu em função das necessidades humanas. No início, ligado essencialmente ao espaço físico, os homens começam a acumular noções subconscientes sobre espaços e formas, conteúdo e relações espaciais de objetos específicos desse espaço. A essa geometria primitiva foi dado o nome de "geometria subconsciente" (EVES, 1992).

A origem da palavra *geometria* vem do grego: *geo* provém de gaia/terra e *metria* de métron /medida, ou ainda, "medida da terra".

As civilizações da época pré-histórica utilizavam regras para medir comprimentos, superfícies e volumes. Seus desenhos continham figuras geométricas nas quais a *simetria* era uma das características predominantes.

Dentre os povos das antiguidades, os babilônios e os egípcios se interessaram muito pelas questões de medidas sem preocupação em demonstrar as fórmulas que utilizavam. Para os egípcios, por exemplo, as fórmulas eram destinadas a dar aos agrimensores e aos fiscais de obras, modos apropriados de cálculo.

A Matemática dessa época não dispunha de notações algébricas e desse modo, é possível ver em tábuas desse período, exemplos de cálculos referentes a uma dada situação particular. A esta fase denomina-se a "geometria científica".

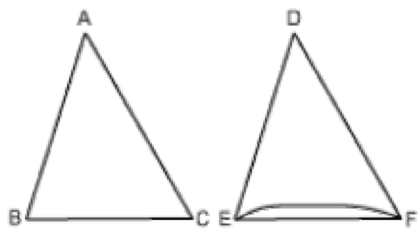
Posteriormente a este período, em torno de 600 a.C., a humanidade evoluiu tornando-se capaz de consolidar conscientemente algumas noções primitivas da geometria num conjunto de leis ou regras. Neste período, deu-se origem ao que se denomina "geometria demonstrativa". Os gregos emprestaram das civilizações anteriores, seus conhecimentos matemáticos, astronômicos e transformaram essa herança cultural numa ciência dedutiva, na qual as noções de demonstração, de teorema, de definição, de axioma substituem a característica empírica da Matemática utilizada pelos seus antecessores.

Ainda segundo EVES (1992), os gregos não imaginavam o espaço como uma coleção de pontos, mas como um domínio ou lugar em que os objetos se podiam mover de um lado para outro livremente e ser comparados entre si. Deste ponto de vista, a relação básica em geometria era a de *congruência* ou *superposição*.

Euclides em sua famosa obra, *Os Elementos*, descreve na sua proposição IV o caso de congruência de triângulos denominado LAL (lado-ângulo-lado). Nesta proposição que estabelece a congruência de dois triângulos, foi usada uma prática experimental de deslocamento e coincidência de figuras.

PROP. IV. TEOREMA.

Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e os ângulos, compreendidos por estes lados, forem também iguais; as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais.



Sejam os dois triângulos ABC, DEF, cujos lados AB, AC, DE, DF são iguais, cada um a cada um, isto é, AB=DE, e AC=DF; e seja o ângulo BAC=EDF. Digo, que a base BC é igual à base EF; e que o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF; e que os outros ângulos do primeiro triângulo são iguais aos outros do segundo, cada um a cada um, segundo ficam opostos a lados iguais; isto é, o angulo ABC=DEF, e ACB=DFE.

Considere-se pôsto o triângulo ABC sobre o triângulo DEF, de sorte que o ponto A caia sobre o ponto D, e a reta AB sobre a reta DE. O ponto B cairá sobre o ponto E, por ser AB=DE. Ajustando-se pois AB sobre DE, também a reta AC se ajustará sobre a reta DF, sendo o ângulo BAC=EDF. Logo sendo AC=DF, o ponto C cairá sobre o ponto F. Mas temos visto que B cai sobre E. Logo a base BC se ajustará sobre a base EF. Porque se não se ajustarem, caindo B em E, e C em F, se seguirá, que duas linhas retas compreendem um espaço, o que não pode ser (Ax. 10[1]). Logo a base BC deve-se ajustar sobre a base EF, e por conseqüência são iguais. Logo todo o triângulo ABC se ajusta sobre todo o triângulo DEF, e assim são iguais; e os outros ângulos do primeiro triângulo

[1] *Axioma 10 : duas linhas retas não compreendem espaço.*

também se ajustam sobre os outros do segundo e são iguais; isto é, o ângulo ABC=DEF, e ACB=DFE (Commandino, 1944, pp.23-24).

Temos também os casos de congruência de triângulos LLL (lado-lado-lado), proposição VIII, e finalmente ALA (ângulo-lado-ângulo) e LAAo (lado-ângulo-ângulo oposto, proposição XXVI.

Euclides estudou as congruências entre triângulos e polígonos. A congruência entre figuras quaisquer não foi objeto de estudo. Não havia elementos que pudessem dar conta deste tipo de estudo.

Na primeira metade do século XVII, com o surgimento da Geometria Analítica, o espaço passou a ser considerado como uma coleção de pontos. Dois séculos depois, com o surgimento das geometrias não-euclidianas, os matemáticos aceitaram a situação de que há mais do que um espaço concebível e, portanto, mais do que uma geometria. Mas o espaço ainda era considerado como um lugar onde as figuras poderiam ser comparadas entre si. A geometria passou a ser considerada como o estudo das propriedades das configurações de pontos que permanecem inalteradas quando o espaço circundante é sujeito a transformações.

Esta proposta foi feita por Felix Klein (1849-1925) em sua aula inaugural quando foi designado para a Faculdade de Filosofia e o Conselho da Universidade de Erlanger. Este programa de estudos defendido nessa aula tornou-se conhecido como *Erlanger Programm*.

No entanto, segundo Barbosa (1993), o primeiro tratamento matemático dos padrões no plano foi dado por Fedorov em 1891, ao estudar os grupos cristalográficos. Os mesmos foram reestudados e redescobertos por Fricke e Klein em 1897; novamente por Polya e Nigli em 1924. Por Hilbert e Cohn-Vossen, em 1932; por Coxeter, em 1948-1961. Esses trabalhos têm como base a teoria dos grupos discretos, constituindo as possibilidades, e por ausência de outros grupos geradores se conclui a exaustividade.

Barbosa (1993) ressalta como um fato curioso a respeito do palácio de Alhambra, construído no século XIII, em Granada, Espanha, no qual, conforme Fejes Tóth (Academia Húngara de Ciências, Universidade de Weszprém), existem os 7 padrões de simetria das faixas e os 17 padrões de simetria do plano.

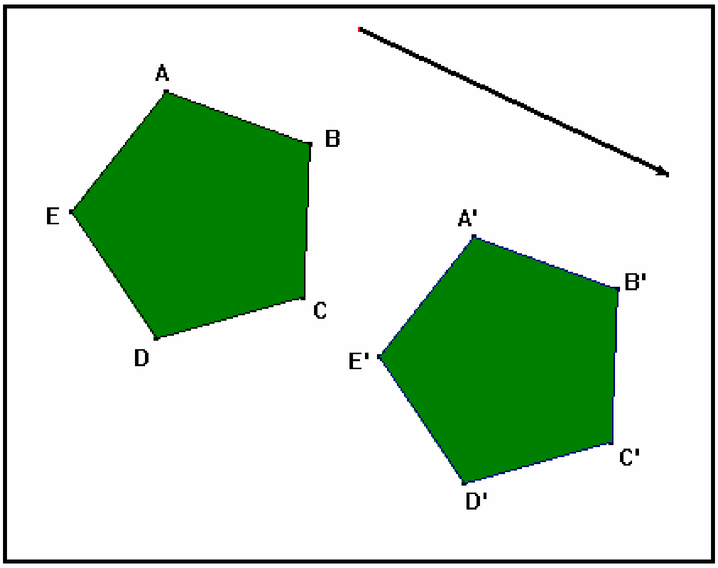
2.4 Aspectos teóricos da Geometria das transformações

2.4.1. Isometrias, idéias gerais

Isometrias são transformações do plano que não distorcem as formas e tamanhos, por isso, são conhecidas também como movimentos rígidos. Pertencem a esta categoria todos os movimentos que conservam a distância.

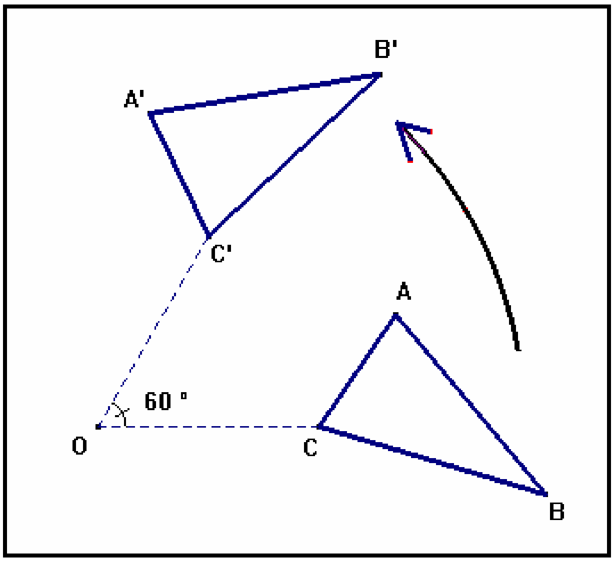
Podemos definir uma isometria do plano como uma transformação do plano F tal que $P'Q' = PQ$ para todo par de pontos distintos P e Q do plano, onde $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$.

Como exemplo de isometria apresentamos um pentágono ABCDE e sua imagem A'B'C'D'E' mediante um deslocamento provocado por uma translação. É possível verificar pela simples observação que esta figura deslocou-se na direção, no sentido e na amplitude de deslocamento indicado pela seta.

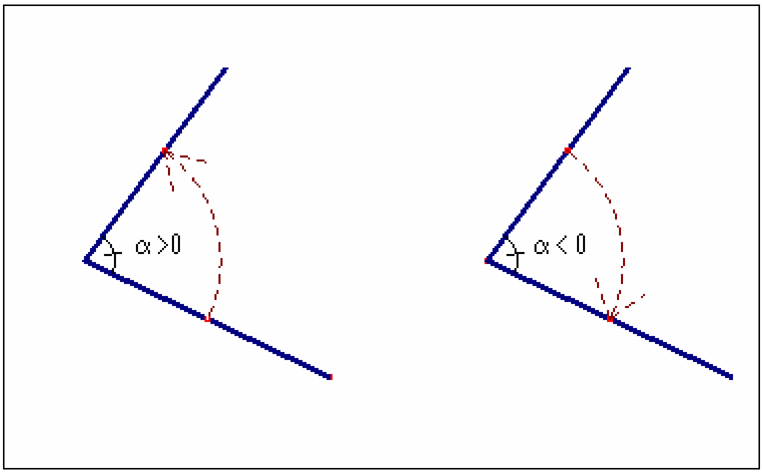


Neste movimento, todos os pontos sofrem um deslocamento de mesma medida, na mesma direção e sentido, portanto, é evidente que qualquer figura transformada conserve sua forma e seu tamanho.

Outro tipo de isometria muito comum é a **rotação** que, contrariamente à translação, possui um ponto fixo. Na rotação todos os pontos do plano movimentam-se girando de um mesmo ângulo em torno deste ponto e que se designa **ponto central**.



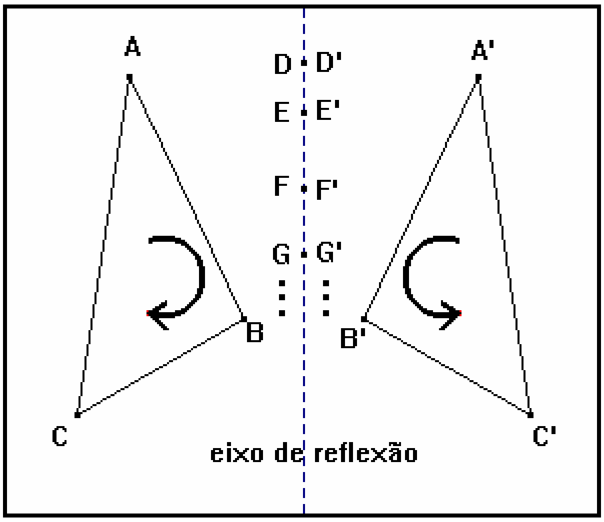
Para este estudo surge a necessidade de considerarmos uma orientação para os ângulos do plano. A escolha será feita de forma usual, isto é, os ângulos com medida positiva, ou simplesmente os ângulos positivos, serão aqueles orientados no sentido anti-horário, e os negativos aqueles orientados no sentido horário.



O fato de o movimento possuir ou não ponto fixo faz distinguir estes dois tipos de isometrias.

Será que existem isometrias que possuem uma maior quantidade de pontos fixos?

A resposta é afirmativa, como podemos observar na figura seguinte, a isometria por reflexão em relação a um eixo, fixa uma infinidade de pontos que coincidem com essa linha.

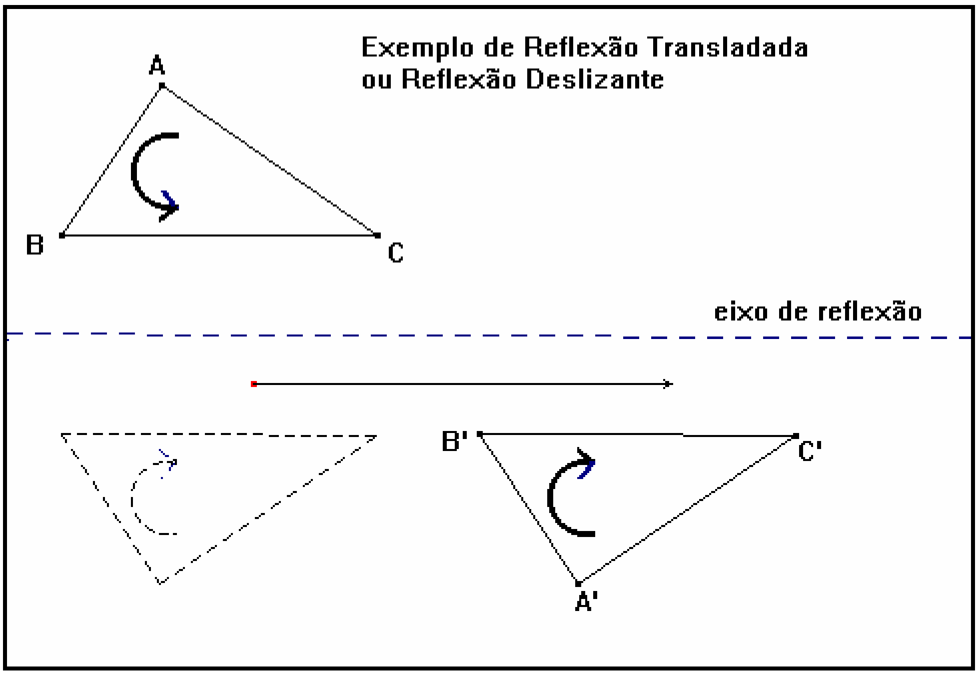


A reflexão é também conhecida por simetria axial, dado que é determinada por um eixo. Este movimento verifica as seguintes propriedades:

- um ponto e sua imagem estão numa mesma reta perpendicular ao eixo;
- os pontos do eixo não se movem por efeito da reflexão;
- a distância de um ponto ao eixo é igual à distância da imagem desse ponto ao eixo.

Verificamos, ainda, que ao designarmos na figura original uma determinada orientação, ele aparece invertido na figura final, ou seja, a reflexão altera a orientação dos pontos do plano.

Por fim, temos a reflexão deslizante que combina uma reflexão com uma translação na direção do eixo de reflexão.



Deste modo, podemos observar que a reflexão deslizante não pode ser distinguida das outras isometrias partindo somente do número de pontos fixos, dado que identicamente à translação, este movimento não tem pontos fixos. De modo análogo, não podemos fazer distinção das isometrias considerando somente o fato de o movimento preservar ou não a orientação da figura. Efetivamente, sendo a reflexão deslizante uma composição das isometrias reflexão e translação, este movimento vai alterar a orientação da figura no plano e não vai fixar pontos. Contudo, se considerarmos ambos aspectos, cada isometria pode ser convenientemente identificada:

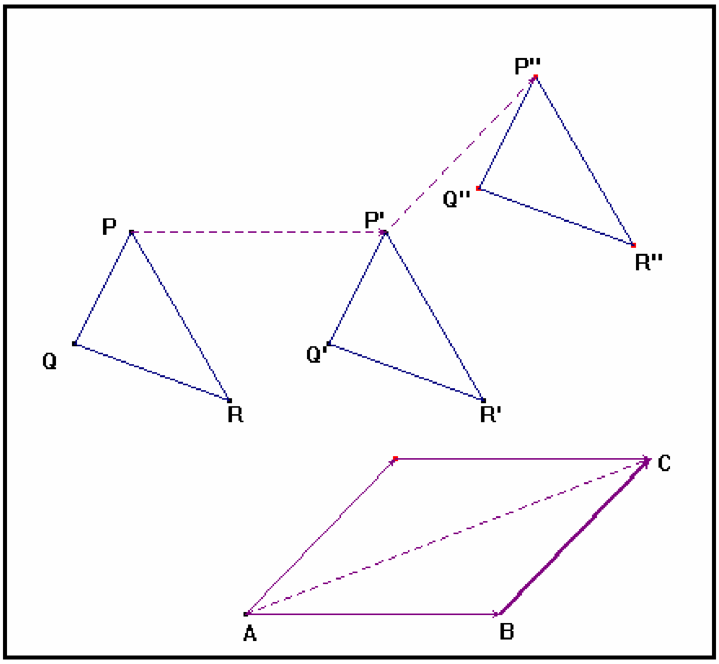
ISOMETRIA	PONTOS FIXOS	ORIENTAÇÃO
Translação	Nenhum	Preserva
Rotação	Um [ponto central]	Preserva
Reflexão	Infinitos [eixo de reflexão]	Inverte
Reflexão deslizante	Nenhum	Inverte

Uma vez que a composição de duas isometrias é uma isometria, vamos combinar os movimentos identificados: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante e, em seguida, vamos verificar se define ou não uma isometria deste tipo.

2.4.2. Estudo da combinação de duas transformações isométricas

2.4.2.1. Combinação de duas translações

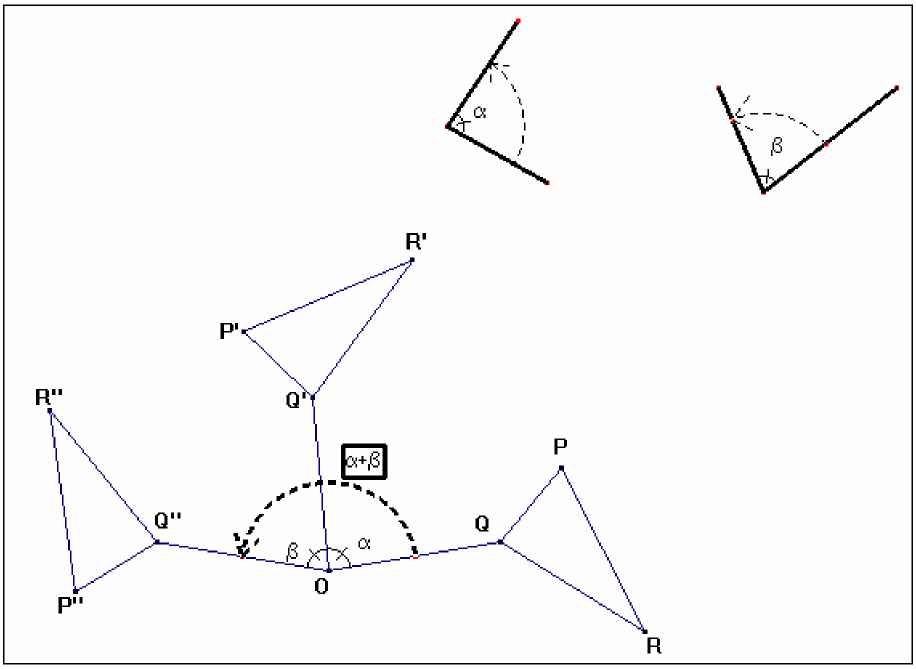
É possível verificar que se aplicarmos uma translação τ_{AB} e, posteriormente, uma outra translação τ_{BC} a uma figura no plano, resulta o mesmo efeito de uma única translação τ_{AC} equivalente a duas anteriores.



2.4.2.2. Combinação de duas rotações

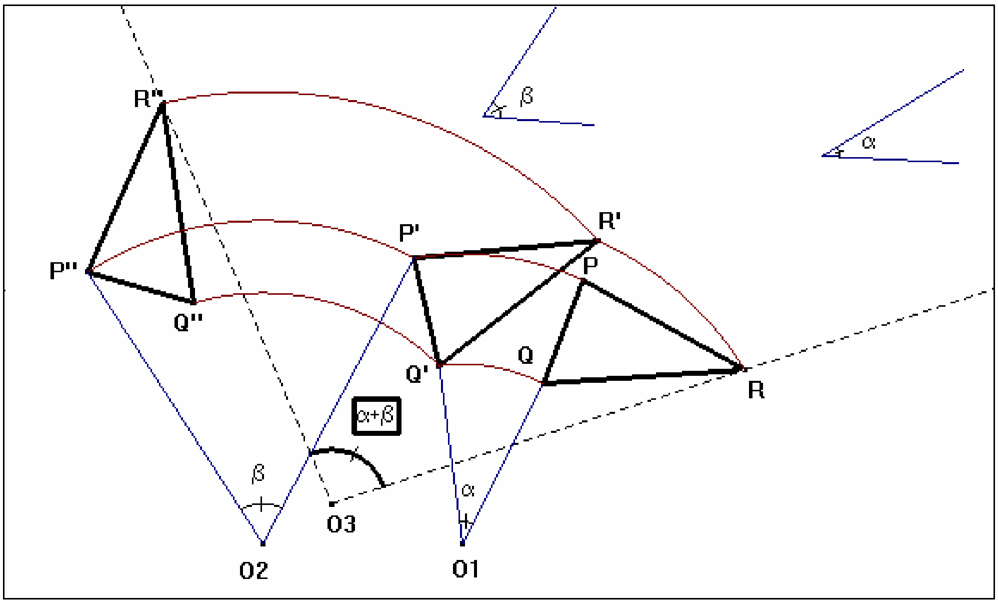
1º caso: Rotações de mesmo centro

É possível verificar que se aplicarmos uma rotação $\rho_{O,\alpha}$ (centro O e ângulo α) e, posteriormente, uma outra rotação $\rho_{O,\beta}$ (centro O e ângulo β) a uma figura no plano resulta o mesmo efeito de uma única rotação $\rho_{O,\alpha+\beta}$ (centro O e ângulo $\alpha+\beta$) equivalente a duas anteriores, para qualquer α e qualquer β.

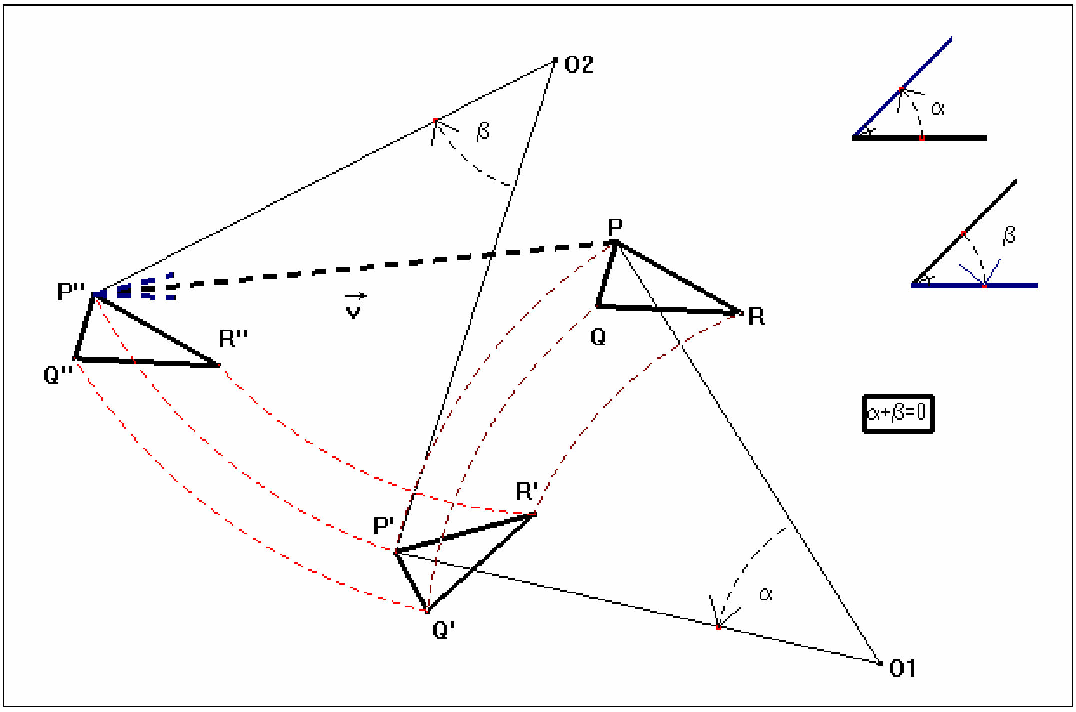


2º Caso: rotações de centros distintos

É possível verificar que se aplicarmos uma rotação $\rho_{O1,\alpha}$ (centro O_1 e ângulo α) e uma outra rotação $\rho_{O2,\beta}$ (centro O_2 e ângulo β) a uma figura no plano resulta o mesmo efeito de uma única rotação $\rho_{O3,\alpha+\beta}$ (centro O_3 e ângulo $\alpha+\beta$), para $\alpha+\beta \neq 0$.

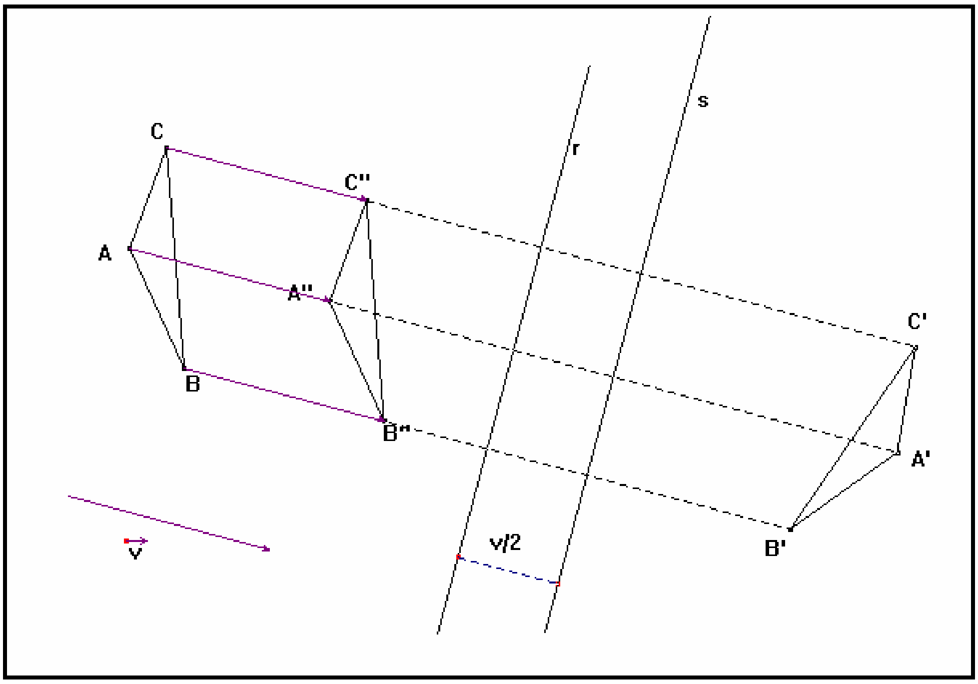


Na possibilidade de $\alpha + \beta = 0$, então teremos uma translação $\tau_{\vec{v}}$.

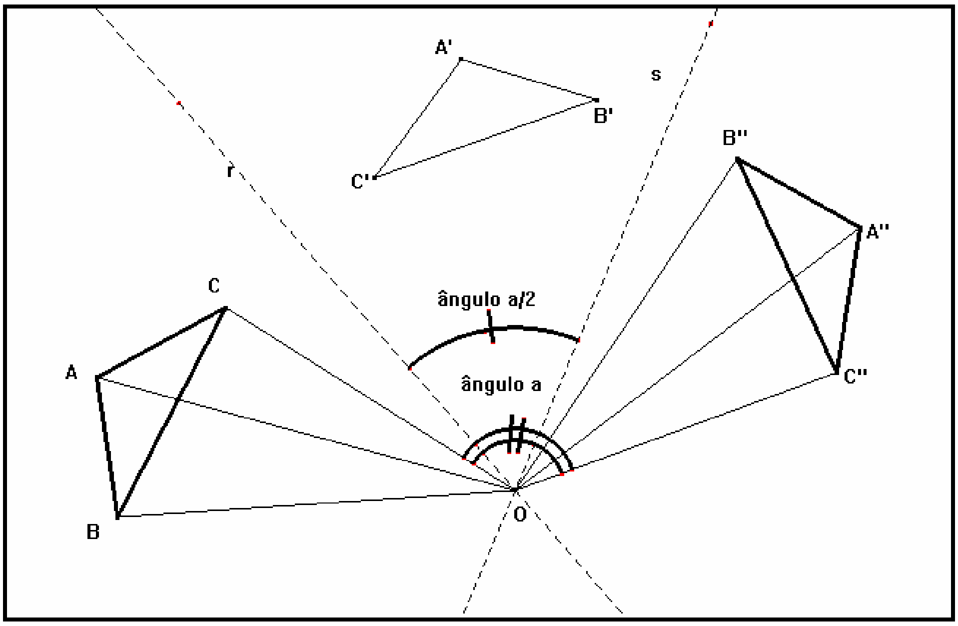


2.4.2.3. Combinação de duas reflexões

Para a combinação de duas reflexões temos dois casos a serem verificados: o primeiro, quando os eixos de reflexão são paralelos, ou ainda quando os eixos são concorrentes. Para o primeiro caso, encontramos uma composição que é equivalente a uma translação por um dado vetor cujo comprimento é dobro da distância entre os eixos.



Se considerarmos duas reflexões com eixos de simetria concorrentes, podemos representar a seguinte situação:



Ou seja, o resultado de duas reflexões em retas ***r*** e ***s*** concorrentes em O, formando ângulo **a/2** entre elas é equivalente a uma rotação em O por um ângulo **a.**

BALDIN et al (1999) apresenta um estudo geométrico de classificação de isometrias do plano com o Cabri-Géomètre II. Seu estudo segue através da análise do que ocorre com as composições de 2, 3 ou mais reflexões segundo retas.

"... A análise para as composições envolvendo 2 e 3 reflexões é feita estudando todos os casos geométricos possíveis quanto às posições relativas entre as retas envolvidas. Visualização destes casos é essencial para compreender que as translações *e* as rotações *são movimentos correspondentes à composição de 2 reflexões, e quando a composição é de reflexões, <u>além</u> dos movimentos já obtidos a única possibilidade é reflexão com deslizamento"*. (BALDIN et al,1999)

Iremos continuar a estudar as combinações entre as transformações, mas para tal, faremos uso de três teoremas, a saber. Primeiramente vamos definir o conceito de feixe de retas. Chama-se feixe de retas paralelas ao conjunto F_g de todas as retas paralelas à *g*, e feixe de retas concorrentes ao conjunto F_O de todas as retas concorrentes no ponto O.

"Toda isometria é o produto de no máximo três reflexões em retas." (Ruoff,p.82)

"Se três retas *f, g*, *h* pertencem a um feixe, o produto das três reflexões $\sigma_f\sigma_g\sigma_h$ é igual a uma reflexão numa reta do feixe, isto é, existe uma reta *m* pertencente ao feixe tal que: $\sigma_f\sigma_g\sigma_h = \sigma_m$" (Ruoff, p. 82)

"Teorema da redução em geral: Todo produto de quatro reflexões em retas é igual a um produto de duas reflexões em retas, isto é,: $\sigma_{f1}\sigma_{f2}\sigma_{f3}\sigma_{f4} = \sigma_{g1}\sigma_{g2}$" (Ruoff, p.84)

Com esses resultados e as considerações anunciadas por BALDIN et al (1999), podemos afirmar que todo produto de um número par de reflexões em retas é igual a um produto de duas reflexões em retas e que todo produto de um número ímpar de reflexões em retas é igual a uma reflexão em reta ou a um produto de três reflexões em retas.

2.4.2.4. Combinação de duas reflexões deslizantes

Uma reflexão deslizante é a composição de uma translação seguida de uma reflexão em relação a uma reta. No entanto, uma translação pode ser decomposta em duas reflexões de eixos paralelos. Por isso, duas reflexões deslizantes são equivalentes a seis reflexões em retas. Pelo resultado do teorema da redução anunciado anteriormente, quatro reflexões em retas podem ser reduzidas a duas reflexões. Nosso estudo se limita, primeiramente de seis a quatro reflexões para posteriormente ser reduzido a duas reflexões. Portanto, poderemos ter como resultado uma rotação ou uma translação.

Para continuarmos nossa análise de combinações, passaremos agora a discutir o que ocorre com transformações distintas duas a duas. Em todos os casos, decomporemos cada transformação em reflexões em retas. Uma vez feita esta decomposição serão utilizados os teoremas enunciados para concluir os resultados.

2.4.2.5. Combinação de uma translação e uma rotação

Uma translação pode ser reduzida a duas reflexões em retas. Uma rotação também pode ser reduzida a duas reflexões em retas. Logo, esta combinação anunciada é composta por quatro reflexões em retas. Pelo teorema da redução em geral, quatro reflexões em retas são equivalentes a duas reflexões em retas. Uma vez que temos quatro reflexões em retas são possíveis dois resultados: ou uma rotação ou uma translação.

2.4.2.6. Combinação de uma translação e uma reflexão

Uma translação pode ser reduzida a duas reflexões em retas paralelas. A translação associada a uma reflexão é composta de três reflexões. É possível provar que três reflexões em retas são equivalentes a uma reflexão deslizante ou uma única reflexão.

2.4.2.7. Combinação de uma translação e uma reflexão deslizante

Uma reflexão deslizante é equivalente a três reflexões em retas. A translação é equivalente a duas reflexões em retas paralelas. Portanto, estamos analisando um sistema com cinco reflexões em retas. De acordo com o teorema da redução enunciado, podemos tomar quatro das cinco reflexões e reduzir nosso sistema para duas reflexões. Logo estaremos analisando apenas três reflexões em retas. Portanto, teremos como resultado final ou uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

2.4.2.8. Combinação de uma rotação e uma reflexão

Uma rotação é uma transformação que pode ser decomposta em duas reflexões em retas. Associada a mais uma reflexão, compõe-se um sistema de três reflexões em retas que pode ser equivalente a uma reflexão ou a uma reflexão deslizante.

2.4.2.9. Combinação de uma rotação e uma reflexão deslizante

Uma reflexão deslizante é uma combinação de três reflexões em retas que associada a uma rotação forma um sistema de cinco reflexões em retas. Pelo teorema da redução podemos ter um sistema equivalente a três reflexões em retas com dois possíveis resultados: ou uma reflexão ou reflexão deslizante.

2.4.2.10. Combinação de uma reflexão e uma reflexão deslizante

E pela última combinação possível, uma reflexão associada a uma reflexão deslizante equivale a um sistema com quatro reflexões em retas. Podemos reduzir este sistema para duas reflexões resultando em um sistema com duas reflexões em retas. Portanto, poderemos ter ou uma translação ou uma rotação.

Vamos dar um significado preciso para a palavra transformação. Posteriormente discutiremos a definição de grupo.

Chamaremos de aplicação *F* a uma correspondência onde cada ponto P do plano associa um único ponto desse plano que será indicado por *F(P).* Diremos que *F* é sobrejetora se para todo *P* do plano existir um único ponto *P'* do plano tal que *F(P') = P*, e *F* é injetora se *F(A) = F(B)* implica que *A = B*, com *A* e *B* pertencente ao plano. Uma aplicação que é ao mesmo tempo sobrejetora e injetora é dita bijetora.

Sendo assim, podemos definir uma transformação do plano como uma aplicação bijetora do conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo. Isto significa que a cada ponto *P* do plano existe uma única imagem *P'* e que cada ponto *P'* é imagem de um único ponto *P* do plano.

Sendo a transformação do plano uma função bijetora, existe a aplicação F^{-1}, chamada transformação inversa de *F*. Assim, $F^{-1}(P') = P \Leftrightarrow F(P) = P'$.

Para estudar o conjunto das transformação do plano e sua estrutura, define-se a transformação identidade (Id) como aquela em que a imagem de todo ponto P do plano é o próprio ponto P, ou seja, $F(P) = P$.

A composição de duas transformações do plano, F e G, é ainda uma transformação $G \circ F$ do plano, definida por $(G \circ F)(P) = G(F(P))$. Temos também a validade de $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$ quaisquer que sejam as transformações do plano *F, G* e *H*. Nomeando de Σ o conjunto de todas as transformações do plano em si mesmo, podemos elencar as seguintes propriedades:

a) se $F, G \in \Sigma \Rightarrow G \circ F \in \Sigma$;

b) se $F, G, H \in \Sigma \Rightarrow (H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$;

c) existe em Σ um elemento *Id* tal que $F \circ Id = F = Id \circ F$ para todo $F \in \Sigma$;

d) para todo $F \in \Sigma$, existe um elemento $F^{-1} \in \Sigma$ tal que $F \circ F^{-1} = Id = F^{-1} \circ F$.

Um **grupo** $< G, * >$ é um conjunto *G,* associado com uma operação binária $*$ definida em G de forma que os seguintes axiomas estejam satisfeitos:

$\mathcal{G}_1$. A operação binária é associativa.

$\mathcal{G}_2$ Existe um elemento *e* em *G* tal que $e * x = x * e = x$ para qualquer $x \in G$.Este elemento *e* é o elemento identidade da operação $*$ definida em *G*.

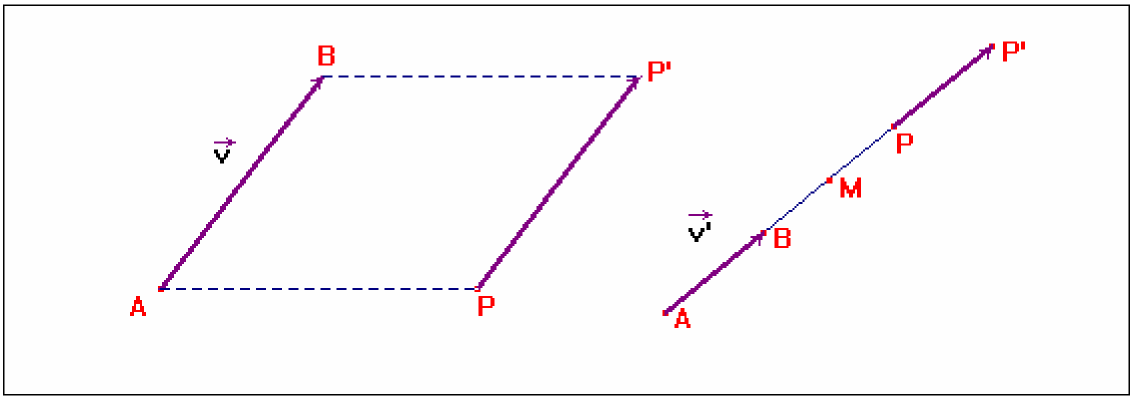
$\mathcal{G}_3$ Para cada *a* em *G*, existe um elemento *a'* em *G* com a propriedade que $a' * a = a * a' = e$. Este elemento *a'* é o elemento inverso de a em relação a operação $*$.

Observando-se o conjunto Σ munido da operação de composição satisfazendo os axiomas acima, podemos concluir que este conjunto Σ possui estrutura algébrica de grupo. Chamaremos de Σ o grupo das transformações do plano.

Um grupo importante de transformações do plano é o grupo das isometrias do plano.

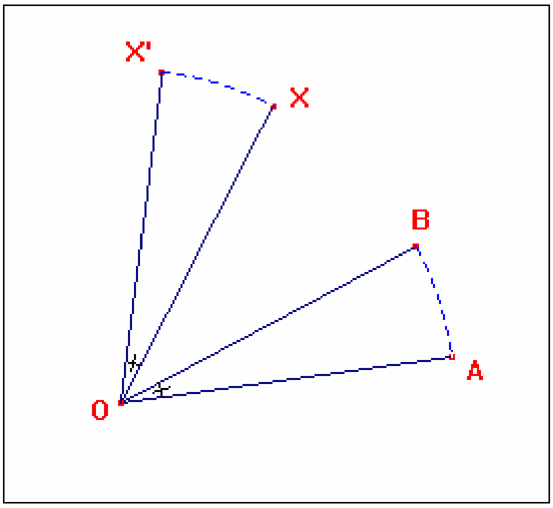
2.4.3. Translação

O conceito de vetor está relacionado à noção de translação. Dados os pontos *A* e *B* distintos do plano, tais que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. A translação τ_{AB} é definida por: dado o ponto *P* do plano, sua imagem $P' = \tau_{AB}(P)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem *AB* e *AP* como lados, se *A, B* e *P* não são colineares. Se *A*, *B* e *P* são colineares, então $P' = \tau_{AB}(P)$, tal que *AP'* e *BP* têm o mesmo ponto médio *M*. O segmento orientado *AB* é tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP'} = \vec{v}$. Podemos então escrever $\tau_{\vec{v}}$ em vez de τ_{AB} e dizer que $\tau_{\vec{v}}$ é a translação de vetor $\vec{v}$ e a direção e sentido de $\vec{v}$ é a direção e sentido da translação $\tau_{\vec{v}}$.



2.4.4. Rotação

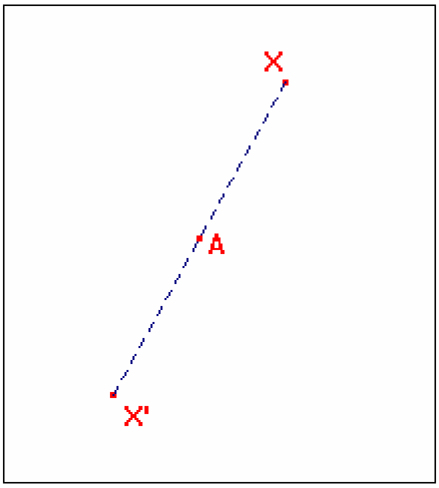
Consideramos *O* um ponto do plano e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo orientado de vértice *O*. A rotação de ângulo α em torno do ponto *O*, é a função $\rho_{O,\alpha}$ definida por $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e para todo ponto $X \neq O$ do plano, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$, onde *X'* é o ponto do plano, tal que $|XO| = |X'O|$, $X\hat{O}X' = \alpha$. O ponto *O* é chamado centro de rotação $\rho_{O,\alpha}$.



É possível de ser verificado que os ângulos $B\hat{O}X$ e $A\hat{O}X'$ têm a mesma bissetriz.

2.4.5. Simetria Central (Reflexão em torno de um ponto)

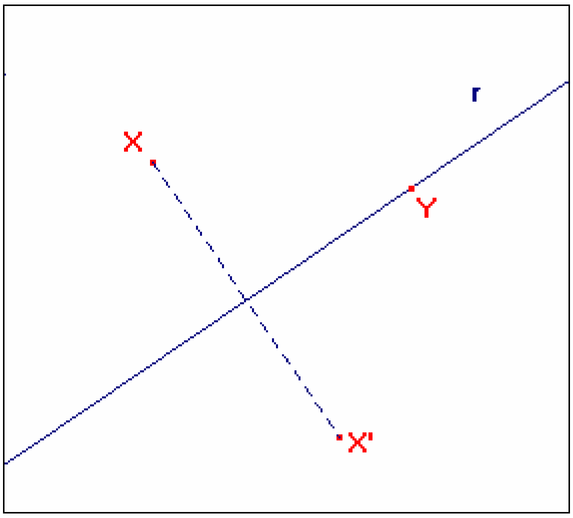
Seja A um ponto do plano. A função σ_A é uma *reflexão em torno de A*, ou uma simetria central em torno de A, se $\sigma_A(A) = A$ e para qualquer outro ponto X, distinto de A, temos $\sigma_A(X) = X'$. A é o ponto médio do segmento XX', isto é, X' é o simétrico de X relativamente a A.



O ponto A é chamado ponto de simetria ou centro de simetria.

2.4.6. Simetria Axial (Reflexão em torno de uma reta)

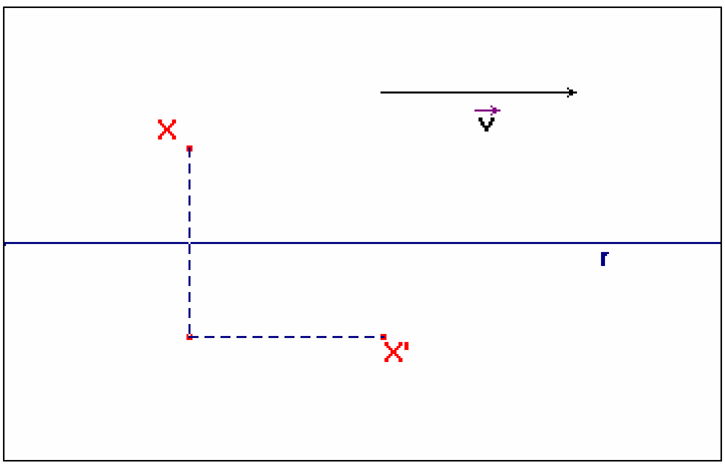
Seja r uma reta do plano. A reflexão *em torno da reta r,* representada por σ_r é definida por: $\sigma_r(Y) = Y$ para todo $Y \in r$ e, para $X \notin r$, $\sigma_r(X) = X'$ tal que a reta r é a mediatriz do segmento *XX'*.



A reta *r* é chamada reta de simetria ou eixo de simetria.

2.4.7. Reflexão Transladada ou Reflexão Deslizante

A reflexão transladada $\omega_{r,\vec{v}}$ é a transformação resultante da composição de uma reflexão em torno da reta r, por uma translação não nula, de direção do vetor $\vec{v}$ paralela ao eixo da reflexão. Assim $\omega_{r,\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \sigma_r$.



2.5. Padrões Regulares

Segundo as possíveis problemáticas nas abordagens do estudo das transformações geométricas em nossas considerações iniciais, adotamos aquela que trata dos padrões regulares.

Estes padrões podem ser finitos ou infinitos de acordo com o número de cópias seja finito ou infinito, respectivamente. No entanto, na realidade, encontramos somente padrões finitos, mas, a nossa capacidade de abstração permite-nos imaginar partes de padrões que se estendem indefinidamente.

Ao consultar diferentes obras, sobre este assunto, verificamos que existem autores que consideram diversos tipos de padrões não havendo, em certos casos, qualquer tipo de ligação. Vamos considerar os seguintes tipos de padrões:

- papéis de parede: padrão com simetria de translação em direções diferentes (independentes);
- frisos ou padrões de faixa: padrões com simetria de translação numa única direção;
- padrões de roseta: o motivo se repete como se constituísse pétalas de uma flor à volta do caule.

Num papel de parede a repetição do motivo verifica-se uma propriedade que consiste na existência de duas translações linearmente independentes, tais que, o desenho final é resultado de todas as transformações geradas por essas translações. Nosso estudo vai limitar-se a um tipo de padrão, ou seja, os frisos tratados no plano.

2.5.1 Frisos ou faixas

Iniciamos nossa pesquisa a procura de uma definição precisa sobre o que é friso ou faixa. Passaremos a descrever algumas delas e discutiremos alguns de seus aspectos relevantes ao nosso trabalho.

Pastor (1996) define friso como o ladrilhamento de uma região plana limitada por duas retas paralelas. Dada uma região R do plano, entende-se por ladrilhamento o conjunto de figuras geométricas (geralmente polígonos) que se podem colocar de maneira que todo ponto da região R pertença exclusivamente a uma destas figuras.

Ainda segundo este autor, o conjunto inicial de figuras é chamado de motivo mínimo. O conjunto de isometrias que permite construir o ladrilhamento são subgrupos do grupo de isometrias do plano, pois é sempre possível encontrar um conjunto mínimo de isometrias que caracterize o ladrilhamento, chamado de sistema gerador. Para ele, o ladrilhamento é caracterizado matematicamente por um motivo mínimo e um sistema gerador.

Essa região por onde se definiu o friso possui comprimento infinito, mas sua largura é finita. Sendo assim, as únicas isometrias que podem fazer parte destes frisos são:

a) as translações de vetor paralelo às bordas desta região;

b) as rotações de 180º cujo centro eqüidista das bordas da região;

c) as reflexões em reta desde que seu eixo seja uma reta eqüidistante das bordas desta região ou perpendicular a esta reta.

d) as reflexões transladadas com eixo eqüidistante das bordas desta região.

Acreditamos ser relevante a descrição das possíveis isometrias que poderão fazer parte dos frisos pois introduzem as possibilidades de construção que iremos utilizar no nosso estudo do objeto matemático.

Em Alsina (1989) encontramos definição similar, no entanto, um pouco mais precisa na sua forma de exposição. Este autor introduz a idéia do friso como figuras onde a geometria se põe a serviço de criar beleza com repetição e ritmo.

"...No friso se reconhece a ordem e a periodicidade. Seu motivo inicial pode ser muito diverso e eles induzem a pensar em uma infinidade de combinações. Porém, o método de geração de friso responde a uma perfeita sincronia de movimentos geométricos em número muito limitado." (Alsina 1989, p;83).

Segue-se o enunciado da definição de friso. Dada uma figura *F* e seja *S(F)* o grupo de simetrias de *F*, isto é, as isometrias que deixam a figura *F* invariante. Diremos que *F* é um friso se as seguintes condições são satisfeitas:

a) Existe uma reta *r* (desenhada ou não) que indica a direção de desenvolvimento do friso e que é invariante por todas as isometrias do grupo *S(F).*

b) Existe uma translação t_a, por vetor não nulo e direção igual a da reta *r*. As demais translações presentes no friso por vetor não nulo e direção igual a da reta serão múltiplos inteiros da translação t_a deixando o friso invariante.

Esta definição já faz menção às isometrias que deixam uma dada figura invariante. E também não necessariamente reduz a definição do friso para uma região delimitada por duas retas paralelas.

Encontramos uma definição mais precisa de friso em Martin (1982), a qual passaremos não somente a descrevê-la como também a estudar as possibilidades de construção de frisos anunciadas anteriormente.

Para este autor o que realmente é importante matematicamente são os diferentes possíveis grupos de transformação que fixam os frisos ou faixas.

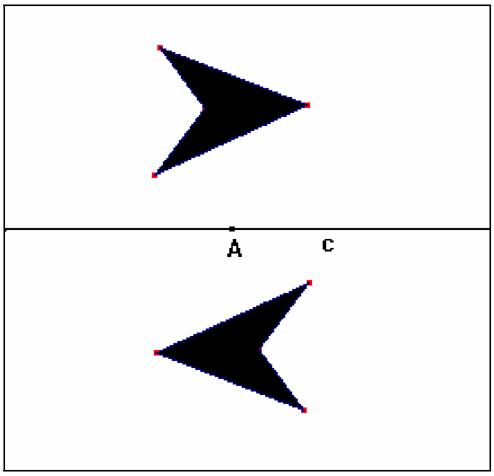
Todas as demonstrações apresentadas no próximo item 2.5.2. são fundamentadas no livro do Martin (1982) através do qual poderá ser feito um estudo mais aprofundado sobre este assunto.

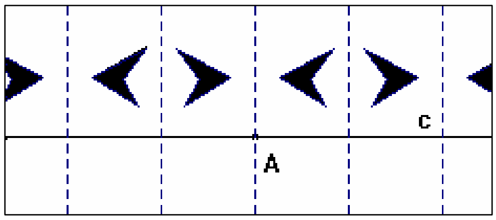
2.5.2 Frisos ou faixas - Definição matemática mais precisa

"*Um grupo de frisos de eixo* **c** *é um grupo de isometrias que fixa uma dada reta* ***c*** *cujas translações formam um grupo cíclico infinito."(Martin, 1982)*

Vamos considerar os grupos de isometrias que fixam uma reta ***c*,** gerados por uma translação. Esses grupos são chamados grupos de faixas ou grupos de frisos com eixo central ***c***. Seja τ uma translação não identidade que fixa a reta ***c*** . Escolhe-se um ponto *A* como segue:

a) se o grupo contém rotação de 180º, então *A* é escolhido como o centro de uma das rotações.
b) se o grupo não possui rotação de 180º, mas contém reflexão em retas perpendiculares a *c*, então *A* é escolhido para ser a intersecção de uma dessas retas com *c.*





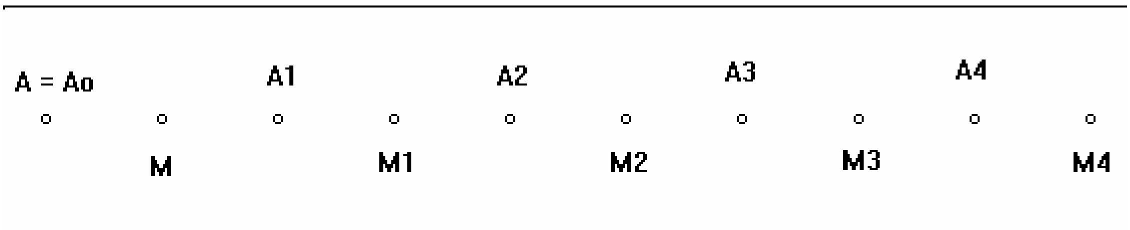
c) para outros casos, o ponto A será escolhido para ser qualquer outro ponto de c.

Temos que:

$A_i = \tau^i(A)$, $\tau^n(A_i) = \tau^n(\tau^i(A)) = \tau^{n+i}(A)$.

M_i é o ponto médio de A_i e A_{i+1} e $M_i = \tau^i(M)$,

onde M é o ponto médio de A=A_0 e A_1. M_i é também ponto médio de A_0 e A_{2i+1}.

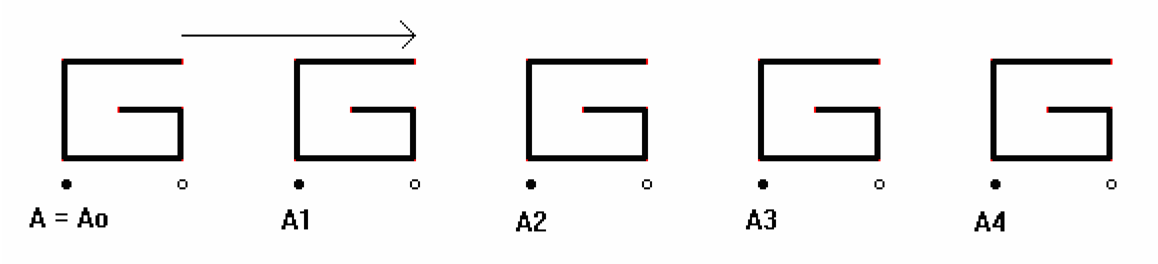


Os grupos de frisos $\mathcal{F}$ são grupos discretos de isometrias que possuem translações τ diferentes da identidade, mas somente em uma direção. Para continuarmos nossas considerações é importante salientar que usaremos a definição de padrão de friso como sendo o *pattern,* ou melhor, o modelo que se repete, o modelo que se mantém invariante. Ele é usado no contexto de reticulado unidimensional. É possível distinguir os seguintes tipos de grupos de frisos descritos a seguir.

OBS: Usaremos a notação < > para indicar o gerador do grupo de friso

2.5.2.1 1ª Possibilidade. $\mathcal{F}_1 < \tau >$. São os grupos de frisos gerados por translações:

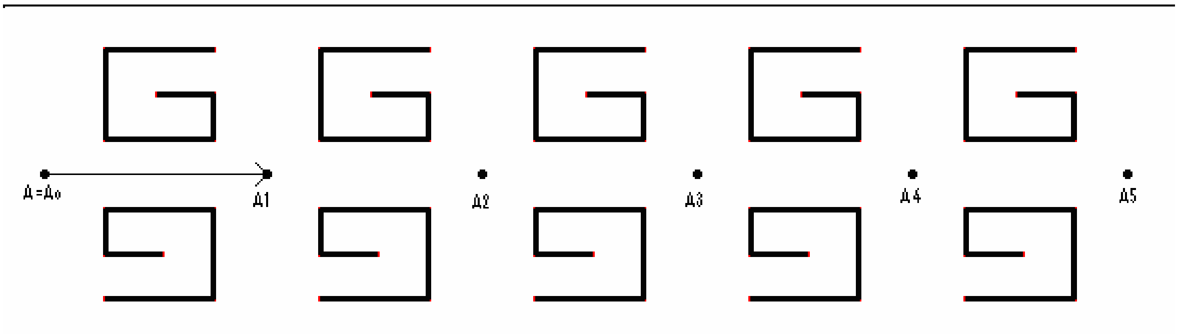
"Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1$ como seu grupo de isometria não tem ponto de simetria, não tem reta de simetria e não é fixo por uma reflexão transladada".(Martin,1982)



2.5.2.2 2ª Possibilidade: $\mathcal{F}_2 = < \tau, \sigma_A >$. São os grupos de frisos gerados por translações e rotações de 180º, isto é, simetrias centrais ou reflexões em pontos A_i. Temos que σ_A é a reflexão em relação ao ponto A e $\sigma_{M_i} = \tau\sigma_{A_i}$, lembrando que M_i são os pontos médios entre os pontos A_i.

Também $\mathcal{F}_2 = <\sigma_{A_i}, \sigma_{M_i}>$, pois $\sigma_{M_i}\tau = \sigma_{A_i}$. Todo elemento de $\mathcal{F}_2$ é da forma τ^i ou $\sigma_A\tau^i$, então os elementos de $\mathcal{F}_2$ são da forma $\sigma_A{}^j\tau^i$.

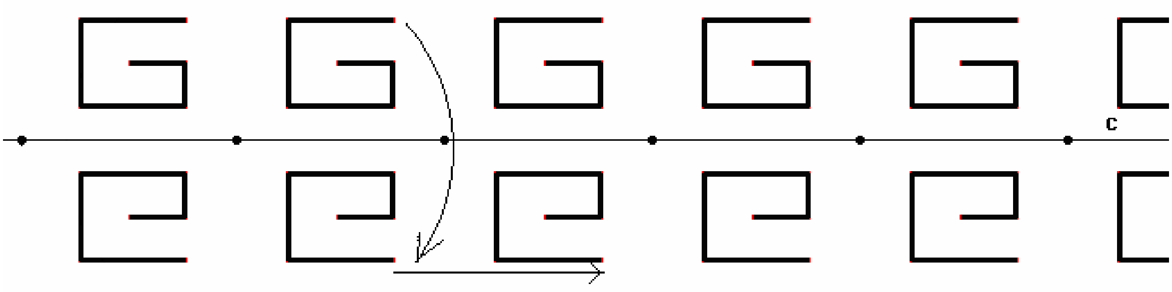
"Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_2$ como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria mas não tem eixo de simetria."(Martin,1982)



Os casos anteriormente vistos contêm apenas isometrias próprias. Vamos prosseguir outras possibilidades de construção adicionando isometrias impróprias, adicionando inicialmente reflexões. Temos:

2.5.2.3 3ª Possibilidade: $\mathcal{F}_1^1 = <\tau, \sigma_c>$. São os grupos de frisos que são gerados por translações e uma simetria axial cujo eixo é o eixo central do friso.

Como $\tau\sigma_c = \sigma_c\tau$, então $\mathcal{F}_1^1$ é abeliano e todo elemento seu é da forma $\sigma_c^j\tau^i$.



$\mathcal{F}_1^1$ contém reflexão transladada com eixo c que leva *A* para A_n com $n \neq 0$.

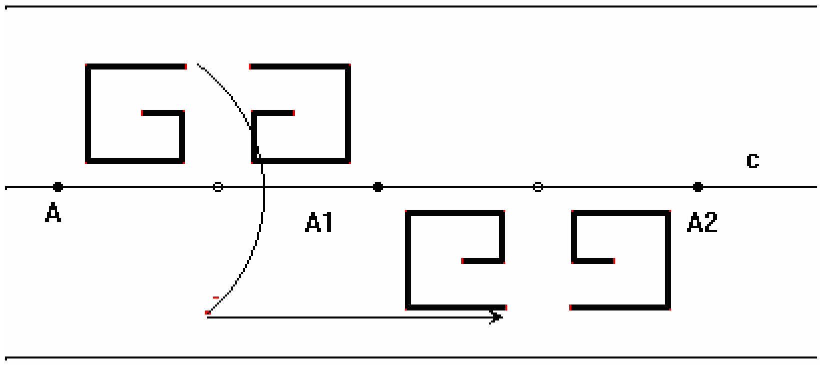
"*Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1^1$ como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria e o eixo central é um eixo de simetria.*"*(Martin, 1982)*

2.5.2.4 4ª Possibilidade: $\mathcal{F}_2^1 = <\tau, \sigma_A, \sigma_c>$. São os grupos de frisos gerados por translações e simetria axial cujo eixo é perpendicular à direção do vetor da translação. Estes frisos contêm não só translações, mas também simetria central em pontos alinhados no eixo que é o central deste friso.

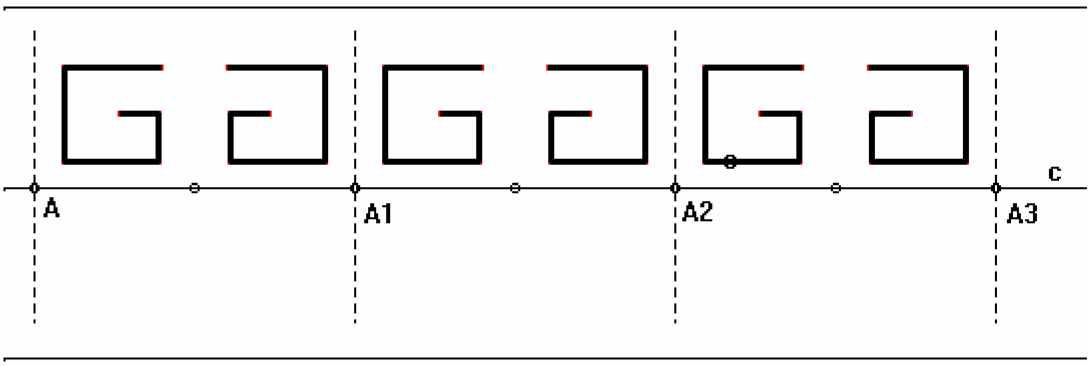
Desde que σ_c comuta com ambos τ e σ_A, então todo elemento de $\mathcal{F}_2^1$ é da forma $\sigma_c^k\sigma_A^j\tau^i$.

Para $n \neq 0$ então $\mathcal{F}_2^1$ contém:

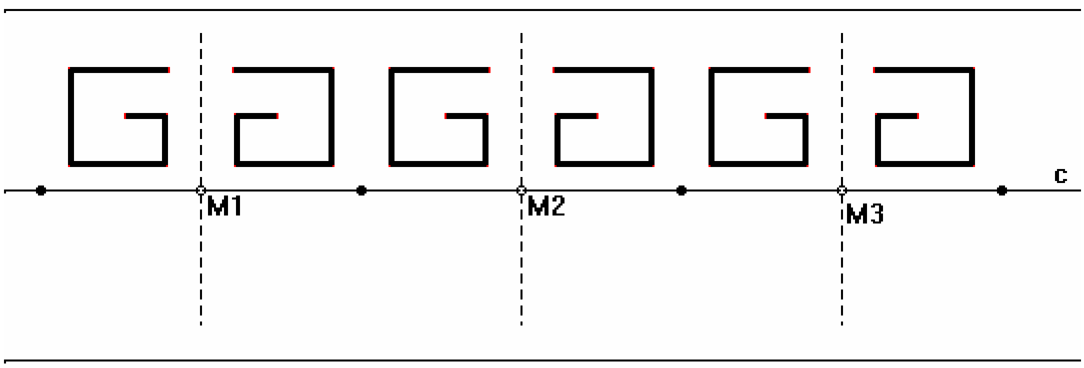
1. a reflexão transladada $\sigma_c\tau^n$ com eixo *c* que leva *A* para A_n.



2. a reflexão na reta perpendicular a ***c*** em A_i que é $\tau^{2i}\sigma_A\sigma_c$

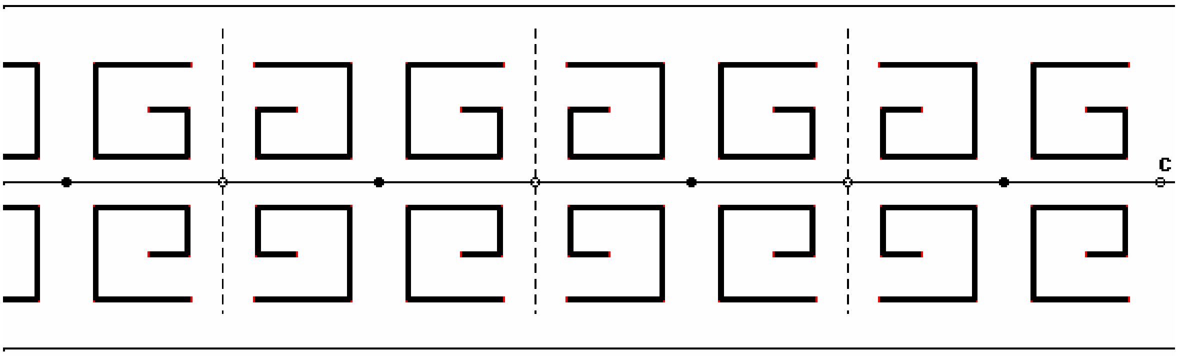


3. a reflexão na reta perpendicular a ***c*** em M_i que é $\tau^{2i+1}\sigma_A\sigma_c$.



Se *a* é uma reta perpendicular a ***c*** em A_i, então $\mathcal{F}_2^1 = <\tau, \sigma_a, \sigma_c>$.

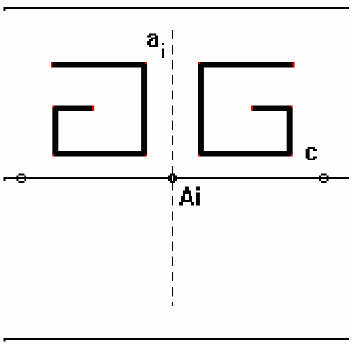
"Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_2^1$ como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria e o eixo central é um eixo de simetria." (Martin,1982)



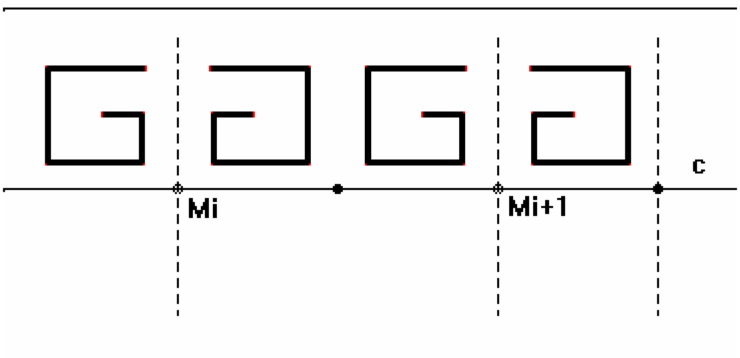
2.5.2.5 **5ª Possibilidade.** $\mathcal{F}_1^2 = <\tau, \sigma_a>$. São os grupos de frisos gerados por translações e simetria axial cujo eixo é perpendicular à direção do vetor da translação, diferentemente da 4ª possibilidade apresentada anteriormente, pois nela não há a simetria axial relativa ao eixo central c.

Admitindo o grupo de faixas $\mathcal{F}$ que não contém rotação de 180º, mas contém a reflexão em relação a reta a_i que é perpendicular a c. Como anteriormente afirmado, o ponto A será escolhido para estar na intersecção de a_i com a reta c. Então A_i está sobre a_i. Portanto $\mathcal{F}$ contém:

1. a reflexão $\tau^{2i}\sigma_a$, em relação a reta perpendicular a c em A_i .



2. a reflexão $\tau^{2i+1}\sigma_a$, em relação a reta perpendicular a c em M_i.

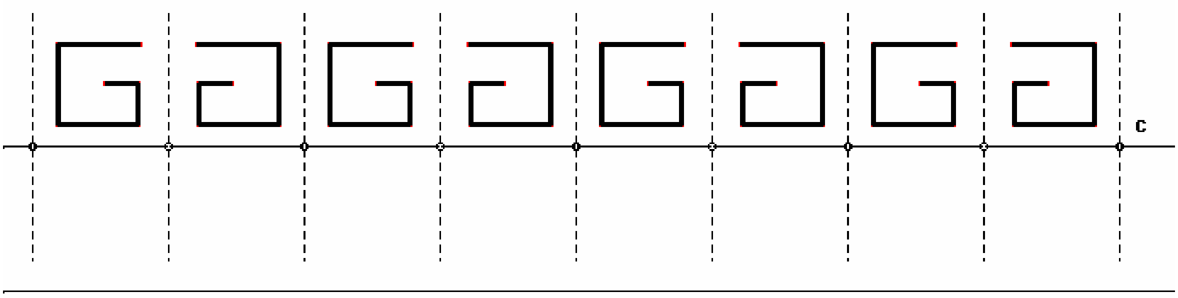


Vamos admitir que $\mathcal{F}$ contenha uma outra reflexão σ_l. Então $l \neq c$, pois a rotação de 180º $\sigma_c\sigma_a$,não estaria em $\mathcal{F}$. Logo $l \perp c$. Então $\mathcal{F}$ contém a translação $\sigma_l\sigma_a$ que deve levar A para A_n para algum n . Assim, $\sigma_l(A) = A_n$ para algum n com $n \neq 0$; e l é perpendicular a c em algum A_i ou algum M_i. Portanto, $\mathcal{F}$ deve conter exatamente as reflexões em retas perpendiculares a c em A_i para cada i e as reflexões em retas perpendiculares a c em M_i para cada i. Estão esgotadas todas as possibilidades adicionando-se as reflexões à $\mathcal{F}_1$.

Logo, $\mathcal{F}_1^2$, não contém σ_c mas contém reflexões em retas perpendiculares a c em A_i ou M_i.

Os elementos de $\mathcal{F}_1^2$ são de forma $\sigma_a^{\,j}\tau^i$, desde que $\tau\sigma_a = \sigma_a\tau^{-1}$.

"*Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1^2$ como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria, tem uma reta de simetria, mas o eixo c não é um eixo de simetria.*"(Martin,1982)



Exemplo de friso padrão $\mathcal{F}_1^2$

2.5.2.6 6ª Possibilidade. $\mathcal{F}_2^2 = <\tau, \sigma_A, \sigma_p>$. São os grupos de frisos gerados por translações e simetria axial cujo eixo é perpendicular à direção do vetor da translação. Além disso, também são gerados por simetrias centrais em relação a pontos médios da intersecção dos eixos perpendiculares a um eixo central paralelo à direção do vetor da translação. No entanto esta reta central do friso não é eixo de simetria

Suponhamos que $\mathcal{F}$ contenha uma rotação de 180º e a reflexão em uma reta p . Conforme visto na discussão da 5ª possibilidade, esta reta p somente poderá ser perpendicular a reta c.

Se $p = a$, então p é perpendicular a c em A_i ou p é perpendicular a c em M_i e obtemos assim $\mathcal{F}_1^2$ visto anteriormente. Para obtermos uma nova situação, vamos supor então que p está fora de cada A_i e cada M_i. Desde que $\sigma_p(A)$ deve ser o centro de uma rotação de 180º em $\mathcal{F}$, a única possibilidade é que p é a mediatriz de $\overline{AM_i}$ para algum i.

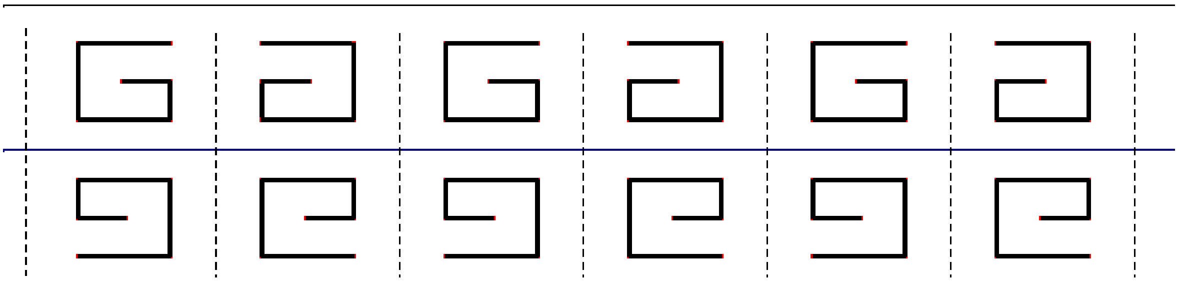
Sendo assim, $\mathcal{F}$ contém a reflexão em relação à mediatriz de $\overline{AM_i}$ para cada i e, conseqüentemente, em particular $\mathcal{F}$ contém σ_p onde p é a mediatriz de $\overline{AM}$. Se a reta a é perpendicular a c em A, então $\mathcal{F}$ não pode conter ambas σ_p e σ_a porque se isso ocorresse a translação $\sigma_p\sigma_a$ levaria A para M, o que é impossível. Também, desde que $\sigma_p\sigma_a = \sigma_p\sigma_c\sigma_A$, então $\mathcal{F}$ não pode conter ambas σ_p e σ_c.

Até o momento foram considerados todos os casos disponíveis ao se acrescentar reflexões a $\mathcal{F}_2$.

Então, $\mathcal{F}_2^2$ é gerado por τ, σ_A e σ_p onde p é a mediatriz de $\overline{AM}$. Também, $\mathcal{F}_2^2$ contém a reflexão transladada $\sigma_p\sigma_A$ com eixo c que leva A para M.

Seja $\gamma = \sigma_p\sigma_A$. Desde que $\tau = \gamma^2$ e $\sigma_p = \gamma\sigma_A$, então $\mathcal{F}_2^2 = <\gamma, \sigma_A>$ e $\mathcal{F}_2^2$ não contém σ_c.

"Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_2^2$ como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria, tem um eixo de simetria, mas o eixo central não é uma linha de simetria."(Martin,1982)



Exemplo de friso padrão $\mathcal{F}_2^2$

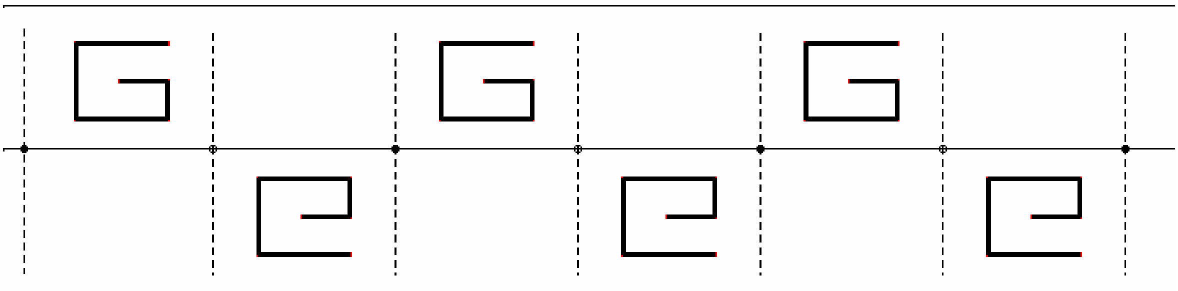
2.5.2.7 7ª Possibilidade. $\mathcal{F}_1^3 = <\gamma>$ onde γ é a reflexão transladada com eixo c tal que $\gamma^2 = \tau$. São os grupos de frisos gerados por translações e translação deslizante.

Supõe que $\mathcal{F}$ contenha uma reflexão transladada γ. Então, γ tem eixo central c e γ^2 é uma translação que fixa c. É possível verificar dois casos, a saber: $\gamma^2 = \tau^{2n}$ e $\gamma^2 = \tau^{2n+1}$ para algum inteiro *n*.

Suponhamos que $\gamma^2 = \tau^{2n}$. Como γ e τ comutam, então $(\gamma\tau^{-n})^2$ é a identidade. Logo, a isometria $\gamma\tau^{-n}$ deve ser a σ_c. Portanto, $\gamma = \sigma_c\tau^n$.

Neste caso, $\mathcal{F}$ contém σ_c e $\sigma_c\tau^m$ para cada inteiro *m*. Se $\mathcal{F}$ não contém uma rotação de 180º, então voltamos para $\mathcal{F}_1^1$, se $\mathcal{F}$ contém uma rotação de 180º, voltamos para $\mathcal{F}_2^1$. Supõe então, $\gamma^2 = \tau^{2n+1}$. Então $(\tau^{-n}\gamma)^2$ é τ. Seja $\gamma = \tau^{-n}\gamma$. Logo γ é uma isometria cujo quadrado é τ. Conseqüentemente , γ deve ser a única reflexão transladada com eixo c que leva A a M. Desde que $\gamma^{2m} = \tau^m$ e $\tau^{2m+1} = \tau^m\gamma$, as reflexões transladadas em $\mathcal{F}$ são exatamente aquelas da forma $\tau^m\gamma$.

"Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1^3$ como seu grupo de simetria, não tem ponto de simetria, não tem eixo de simetria, mas é fixo por uma reflexão transladada."(Martin,1982)



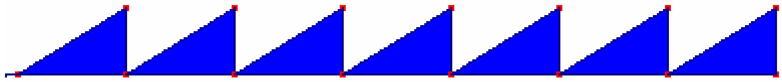
Exemplo de friso padrão $\mathcal{F}_1^3$

Vamos supor que $\mathcal{F}$ contenha outras isometrias acrescidas às geradas pela reflexão transladada γ com eixo *c*, onde $\gamma^2 = \tau$. Como o quadrado da translação $\sigma_c\gamma$ é τ, então $\sigma_c\gamma$ não está em $< \tau >$. Logo σ_c não pode estar em $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ contém σ_l com $l \perp c$, então $\mathcal{F}$ contém a rotação de 180º $\sigma_l\gamma$. Se $\mathcal{F}$ contém uma rotação de 180º, então, $\mathcal{F}$ deve conter σ_A. Neste caso, $\mathcal{F}$ contém σ_A e a reflexão transladada γ com eixo central *c* tal que $\gamma^2 = \tau$. Conseqüentemente, $\mathcal{F}$ é $\mathcal{F}_2^2$. Esgotam-se as possibilidades.

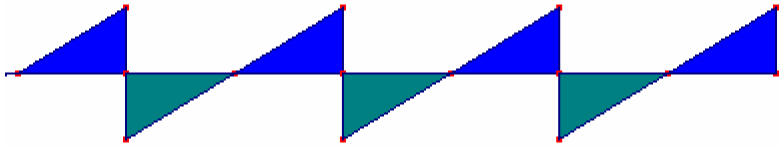
2.5.3. Resumo dos sete tipos de frisos

Apresentamos a seguir um quadro com os sete tipos de frisos distintos como definidos nos parágrafos anteriores, bem com suas respectivas notações utilizadas.

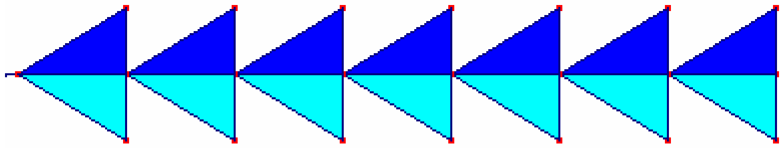
1º tipo $\mathcal{F}_1 = < \tau >$.



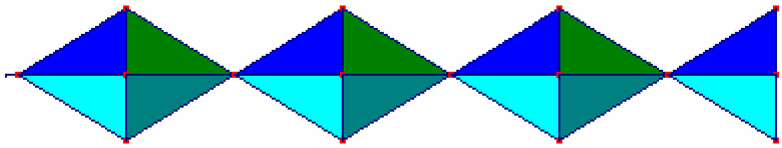
2º tipo $\mathcal{F}_2 = < \tau, \sigma_A >$



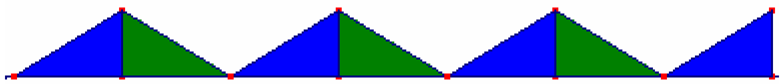
3º tipo $\mathcal{F}_1^1 = < \tau, \sigma_{c>}$



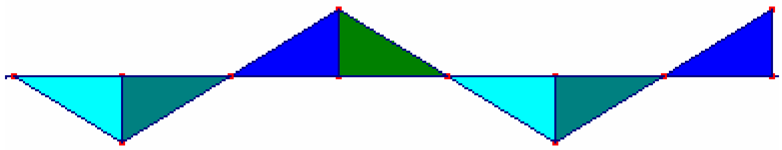
4º tipo $\mathcal{F}_2^1 = < \tau, \sigma_A, \sigma_c >$



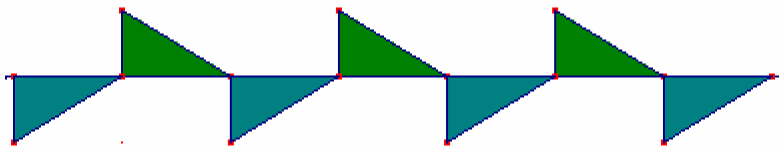
5º tipo $\mathcal{F}_1^2 = < \tau, \sigma_a >$



6º tipo $\mathcal{F}_2^2 = < \gamma, \sigma_A >$



7º tipo $\mathcal{F}_1^3 = < \gamma >$



Onde τ representa translações, σ representa as reflexões ou simetrias e γ representa a reflexão transladada ou também chamada de translação deslizante.

Capítulo 3

Concepção das Atividades e Análise a Priori

3.1 Introdução

Neste capítulo descreveremos o perfil dos sujeitos da pesquisa, as nossas escolhas para a concepção da seqüência didática e faremos uma análise a priori das atividades.

As atividades foram divididas em quatro módulos e apresentadas aos alunos da seguinte maneira:

a) Módulo 1: familiarização do aluno com o programa Cabri-Géomètre II;

b) Módulo 2: classificação aleatória de frisos;

c) Módulo 3: formação de conceitos relativos às transformações geométricas (translação, simetria axial e simetria central) e;

d) Módulo 4: reavaliação da classificação dos frisos ocorrida no módulo 2 e apresentação de alguns exemplos de faixas produzidas pelos próprios alunos.

Apresentaremos estas atividades sob dois pontos de vista: cronológico e, especificamente as atividades do módulo 3 em outra ordem, separadamente pelos critérios das fases da Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady descritos em nossas considerações iniciais.

Sob um ponto de vista da Dialética Ferramenta-Objeto, cada atividade está inserida em uma das fases, representando um papel próprio.

Ainda que não esteja tratado como um módulo específico, descreveremos também o estudo dos alunos ocorrido em uma visita à pinacoteca de Santos.

No final deste capítulo, apresentamos dois quadros sintetizando as atividades sob os dois aspectos discutidos.

3.2 Perfil dos sujeitos

Os sujeitos desta pesquisa são alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual de Santos. Esta escola é integrada à Secretaria de Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo e possui diversos cursos técnicos em suas atribuições. Os alunos não estão integrados a nenhum curso técnico.

Estes alunos não possuíam experiência de uso com o software Cabri-Géomètre II embora todos possuíssem conhecimentos básicos no uso de computadores.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, convidamos todos os alunos do primeiro ano desta escola. Vinte alunos espontaneamente se manifestaram para participar da pesquisa.

3.3 Apresentação do estudo

3.3.1. Ponto de vista cronológico

O primeiro módulo a respeito da familiarização do uso do software Cabri-Géomètre-II não será tratado neste trabalho.

Os demais módulos foram preparados em uma seqüência experimental composta de atividades para serem desenvolvidas no computador, devendo os alunos trabalharem em duplas. Das dez duplas formadas, três duplas seriam selecionadas para serem observadas e suas interações registradas em áudio. Para isto, contamos com a colaboração de dois observadores. A função do terceiro observador foi assumida por mim.

Para cada atividade foi criado um roteiro para os alunos (ver anexos I à VI) e um outro roteiro para os observadores (ver anexos I-a à VI-a). Estes roteiros deveriam ser seguidos pelas duplas, respondidos e justificados. Os observadores também preencheram seus respectivos roteiros. Estes roteiros, dos alunos e dos observadores, associados aos arquivos gerados pelas atividades realizadas no laboratório de informática subsidiaram as nossas análises da pesquisa. Os registros realizados em áudio complementaram o material para as análises.

O segundo módulo deste estudo contempla a primeira apresentação aos alunos dos frisos. É proposto aos alunos que façam uma classificação de alguns exemplares de frisos, de acordo com o que chamamos de elementos comuns. Sabemos da possível classificação dos sete tipos de frisos, conforme nossas considerações iniciais no trabalho.

No final do trabalho os alunos retornarão a este módulo fazendo uma releitura de suas observações acerca das faixas apresentadas. Este módulo foi aplicado na própria escola, em uma sala de aula convencional.

Nossa escolha pelos frisos foi fundamentada na opção da problemática apresentada por Bkouche para a abordagem do estudo das transformações geométricas, também conforme anunciado em nossas considerações iniciais.

O terceiro módulo é subdividido em três partes. As atividades propostas em ambiente informatizado Cabri-Géomètre deverão ser feitas objetivando a formação dos conceitos relativos à translação, simetria axial e simetria central. Estas atividades foram concebidas de acordo com o modelo da Dialética Ferramenta Objeto de Régine Douady. Os frisos foram utilizados como elementos motivadores. Dada a diversidade de situações possíveis, os frisos permitiram uma abordagem diferenciada para o estudo dos conceitos relativos a estas transformações geométricas.

Iniciamos a primeira parte deste módulo estudando a translação, pois esta transformação geométrica está presente em todos os tipos de frisos.

As segunda e terceira partes deste módulo estão reservadas, respectivamente, para o estudo da simetria axial e simetria central. Ambas transformações geométricas, juntamente com a translação, estão presentes em alguns dos possíveis sete tipos de construção de frisos existentes, conforme tratado no estudo deste objeto matemático.

Escolhemos iniciar a segunda parte deste módulo pela simetria axial (reflexão em relação a uma reta), pois existem diversas pesquisas relacionadas ao conceito de simetria axial, como, por exemplo, os trabalhos de Healy (2002c) e Hart (1981). Possivelmente, esta seja a transformação geométrica mais natural para os alunos. As imagens refletidas em espelhos, dobraduras, são exemplos de situações concretas que envolvem este conceito.

Para a aplicação deste terceiro módulo utilizamos o laboratório de informática da escola, onde cada dupla teve acesso a um computador.

O quarto módulo permitirá um reinvestimento por parte dos alunos dos conceitos apreendidos nos módulos anteriores, uma vez que os alunos retomarão as primeiras faixas apresentadas no início da pesquisa e farão uma releitura das mesmas. Para incentivar a criatividade e poder registrar a articulação no uso das transformações geométricas por parte dos alunos, nesta ocasião, eles produzirão exemplares de frisos com o Cabri-Géomètre-II.

Nosso trabalho possui uma dimensão artística que contempla a interdisciplinaridade da Matemática com as obras de arte. A Pinacoteca Benedito Calixto é um marco histórico na cidade de Santos sendo um dos principais pontos turísticos culturais da cidade. Possui um acervo fantástico de pinturas deste renomado artista. Esta pinacoteca é um casarão branco formado por diversas salas ricamente decoradas. Possui pinturas no teto e os ornamentos em forma de frisos são amplamente utilizados.

Os alunos, nossos sujeitos de pesquisa, foram levados a uma visita e puderam vivenciar uma contemplação de belíssimas faixas. Esta atividade trazia consigo o objetivo de propiciar um reconhecimento espontâneo pelas formas presentes dos padrões então estudados nas atividades anteriores.

3.3.2 Apresentação do estudo: ponto de vista da Dialética-Ferramenta Objeto Régine Douady

Sob o ponto de vista da Dialética Ferramenta-Objeto, toda parte da pesquisa é passível de ser visualizada desempenhando um papel específico. Sendo assim, iremos relatar suas respectivas fases.

Precedendo à apreciação das faixas para elaborarem classificações mediante elementos comuns, conforme descrito no item anterior, os alunos foram trabalhados em sessões de familiarização com o Cabri-Géomètre-II. Isto poderá ter favorecido uma revisão dos principais conceitos geométricos que foram então utilizados como ferramentas explícitas para a execução das próximas atividades.

O início da primeira fase sucedeu-se então na apresentação do **módulo 2**, onde se apresentam aos alunos alguns exemplares de frisos e se pede uma classificação dos mesmos segundo elementos comuns.

Fase 1: ***<u>Antigo</u>*** *Os alunos utilizam os conceitos geométricos que dispõe* na tentativa de poder dar conta de classificar as faixas que lhe são apresentadas.

Fase 2: ***<u>Pesquisa do novo implícito</u>*** *Os alunos encontram dificuldades em resolver completamente o problema.* A classificação dos frisos mediante seus grupos de simetria, conforme apresentado na introdução teórica do objeto matemático friso, poderá não ser encontrada. Novas questões surgem, pois os principais conceitos envolvidos como as transformações geométricas não são do conhecimento destes alunos. Outras atividades precisam ser inseridas para poder favorecer a pesquisa deste *novo implícito*.

Fase 3: ***Explicitação e institucionalização local*** As atividades propostas pelo **módulo 3** (formação dos conceitos de translação, simetria axial e simetria central) permitem que os alunos apropriem os principais conceitos envolvidos na classificação e identificação dos diversos tipos de frisos. Para a introdução de cada um destes conceitos citados, dada sua complexidade, a Dialética Ferramenta Objeto de Douady foi re-utilizada. Isto significa que para cada uma das transformações geométricas: translação, simetria axial e simetria central, iniciou-se um novo ciclo da Dialética.

Fase 4: ***Institucionalização - status de objeto*** Ao término de cada parte deste módulo, em suas respectivas versões, houve a institucionalização das transformações geométricas vistas por um nível local. Isto é, os alunos vivenciaram, construíram e fizeram uso dos frisos com suas respectivas transformações geométricas envolvidas.

Fase 5: ***Familiarização - reinvestimento*** No **módulo 4** com os alunos retomando a classificação dos frisos utilizados no **módulo 2**, os alunos poderão abordar o problema de classificação com as concepções que evoluíram.

Fase 6: ***Tornando a tarefa complexa ou novo implícito*** A visita na Pinacoteca Benedito Calixto em Santos e a identificação dos padrões de frisos presentes na casa são exemplos de tarefas mais complexas às quais os alunos foram submetidos. A criação posterior de frisos permitirá uma articulação dos conceitos geométricos.

3.4 As atividades - Análise a priori

3.4.1 Atividade do 1º Módulo: familiarização com o Cabri-Géomètre II

Uma vez que estamos interessados na resposta sobre as contribuições do estudo dos frisos com o uso do Cabri-Géomètre-II para dar significados e articular os conceitos de translação, simetria axial e simetria central, está claro nossa opção de trabalho fundamentado no uso do Cabri-Géomètre-II como software de geometria dinâmica (DGS). Era imprescindível, então, que nos certificássemos de que todos os alunos não teriam dificuldades com esta ferramenta de trabalho.

Para isto, aplicamos uma seqüência de atividades de familiarização com o este software privilegiando grande parte das construções geométricas básicas. Estas atividades foram realizadas em encontros diários de 3 horas durante uma semana totalizando 15 horas de trabalho. Nestes encontros, foram discutidos e apresentados todos os comandos básicos de construção do Cabri-Géomètre-II por meio de diversas atividades. Não foram trabalhados nenhum dos comandos relativos às transformações geométricas.

3.4.2 Atividade do 2º Módulo: classificação aleatória de faixas

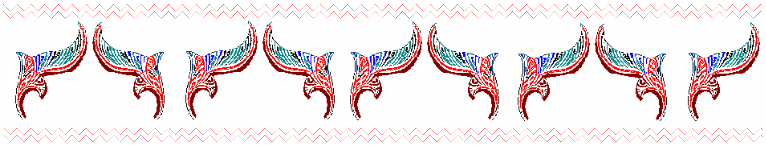
Nesta atividade serão solicitados aos alunos o estudo de quinze faixas e sua classificação mediante elementos comuns entre elas. Eles receberão exemplares impressos em papel plastificado. Todas com mesmas dimensões, aproximadamente 25 cm de comprimento por 3 cm de largura. Receberão também um espelho de mesma dimensão para poderem investigar seus desenhos e conjecturar possíveis relações entre as faixas. Para poderem falar e argumentar sobre as faixas, cada dupla numerará suas próprias faixas.

Conforme visto no capítulo que introduziu a faixa como um objeto matemático, verificamos que somente é possível encontrar sete tipos de faixas mediante diferentes grupos de simetria.

As faixas desta atividade foram previamente escolhidas dentro de três grupos de simetrias, a saber:

$\mathcal{F}_1^2$: Faixas que não contém ponto de simetria, contém uma reta de simetria, mas o centro da simetria não é a reta:

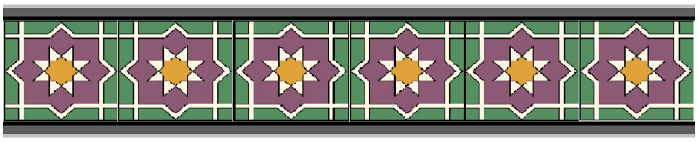
Faixa 1



Faixa 2

Faixa 3

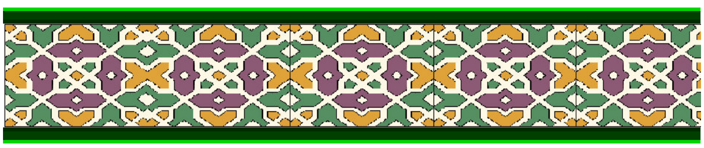
$\mathcal{F}_2^1$: Faixas que contém um ponto de simetria e contém uma reta de simetria.



Faixa 4

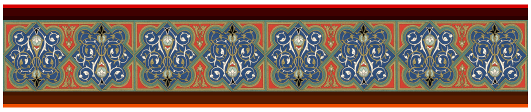
Faixa 5

Faixa 6



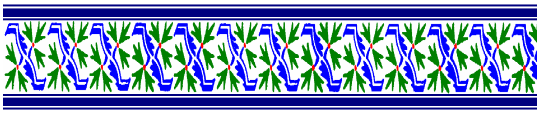
Faixa 7

$\mathcal{F}_2$: Faixas que contém um ponto de simetria, mas não possuem retas de simetria;

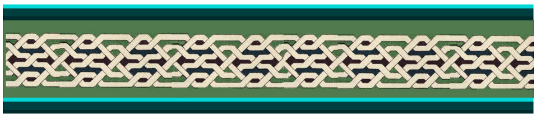


Faixa 8

Faixa 12

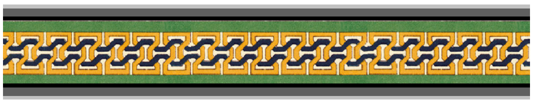


Faixa 9



Faixa 13

Faixa 10



Faixa 14

Faixa 11

Faixa 15

Estas características descritas são diferenciadoras e próprias que permitem que as faixas sejam classificadas.

Esta atividade não exige nenhum conhecimento relativo propriamente a faixas. No caso dos alunos vierem a fazer associações com elementos geométricos na descrição de alguma das características das faixas, estarão utilizando-se de conceitos básicos como paralelismo e medidas de comprimento.

Uma outra forma de visualização destas faixas poderá ocorrer por meio dos espelhos, podendo também favorecer algumas conjecturas por parte dos alunos.

Possivelmente, os alunos verificarão que todas as faixas são coloridas. Poderão observar e reconhecer que todas apresentam a mesma medida de comprimento.

Talvez alguns alunos possam reconhecer nestes modelos, motivos vistos ou usados em igrejas, obras de arte, ou alguma peça de tapeçaria, cerâmica ou bordados. Os desenhos escolhidos são bastante ricos em detalhes, dificultando até a exatidão da descrição destas faixas exclusivamente pelos mesmos. Acreditamos que os próprios alunos notarão a necessidade de se numerar as faixas para poderem se referir a elas para registros nos relatórios e poderem estabelecer um elo de comunicação com as peças.

Notadamente todas as faixas apresentam repetições em suas figuras. Possivelmente poderemos ter alunos que tentarão agrupá-las por este critério de repetições. Apenas para poderem ser referenciadas neste trabalho, apresentamos no ANEXO VII cópia de todos os modelos utilizados. As faixas 4, 5, 6 e 7 apresentam, repetidas vezes, elementos dispostos em oposição, tanto na vertical como na horizontal. Estes elementos artísticos poderão favorecer a indagação dos alunos acerca destas figuras posicionadas de forma alternadas. Possivelmente com o uso do espelho, estas observações sejam até mais evidenciadas.

Também é esperada a observação das faixas 1, 2 e 3 por estarem dispostas em oposição na vertical ao longo da faixa. Possivelmente, poderemos ter alunos agrupando-as por este critério.

Pela construção das faixas, alguns alunos poderão vislumbrar que parte delas assemelham-se a azulejos dispostos um ao lado do outro. As faixas 8, 10, 12 e 15 contemplam esta configuração.

A classificação das faixas em grupos mediante as transformações presentes ao longo de sua extensão ou ainda, a identificação dos elementos geradores que compõe cada uma delas é um dos objetos de estudo e avaliação desta pesquisa.

Para os alunos, deverá ser muito difícil agrupar estas faixas, pois há possibilidade de que não reconheçam nenhum destes elementos citados. Sua observação poderá ser mediada exclusivamente pela observação visual das figuras representadas isoladamente, e mesmo com o uso do espelho, dificilmente reconhecerão as invariantes entre elas neste momento da pesquisa.

A manipulação das faixas permitirá aos alunos ter seus primeiros contatos com este objeto matemático. Suas conjecturas, seus comentários poderão refletir sua cognição a respeito da geometria presente neste objeto. Uma tarefa realizada por meio de manipulação, Parzysz classifica-a como G0 (Geometria dos objetos), estágio este como sendo o mais elementar.

De fato, esperamos que a aplicação desta seqüência que ora se inicia possibilite uma apropriação dos conceitos das transformações geométricas translação, simetria axial e simetria central por parte dos alunos com a introdução das mesmas por meio dos frisos. Esperamos poder identificar avanços nestes estágios de cognição citados.

3.4.3 Atividade do 3º Módulo: Transformações Geométricas.

Este módulo diz respeito à formação dos conceitos de translação, simetria axial e simetria central. Do ponto de vista cronológico ele está dividido em três partes. Uma primeira parte dedicada ao tratamento do conceito da translação, uma segunda parte dedicada a simetria axial e uma terceira e última parte, a simetria central.

Estas atividades são independentes, mas possuem em sua concepção as mesmas idéias e fundamentação teórica baseada na Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady. Dada a complexidade já anunciada deste módulo 3, e uma vez que este foi elaborado com todas as fases da Dialética Ferramenta-Objeto de Douady, optamos em fazer suas análises simultaneamente, observando suas respectivas fases de acordo com esta dialética. As considerações feitas às atividades apresentadas serão sempre relativas a cada conceito dentro de sua especificidade, no entanto, cumprindo o mesmo papel na Dialética Ferramenta Objeto.

Do ponto de vista cronológico, foi iniciada a seqüência da translação, posteriormente a da simetria axial e, por último, a da simetria central.

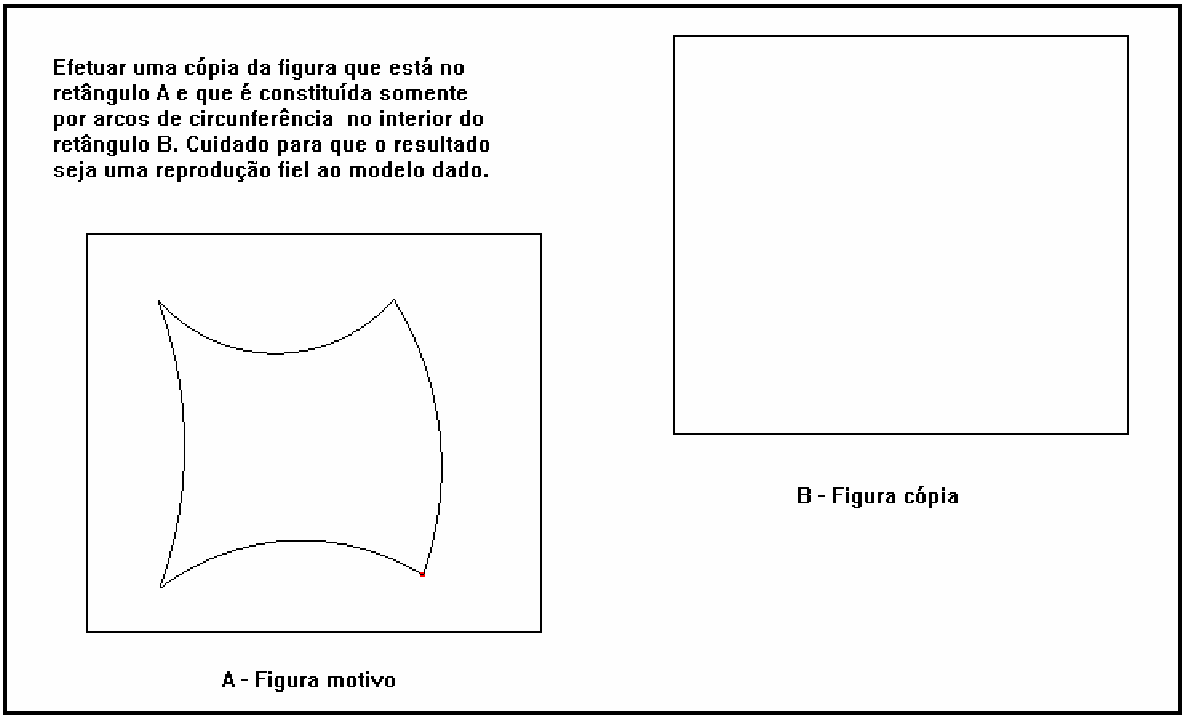
3.4.3.1 FASE 1: apresentação de uma situação problema

Como concebemos as atividades de acordo com a Dialética Ferramenta Objeto de Régine Douady, estamos dessa forma, iniciando a *fase 1*, em que os conceitos matemáticos antigos são aplicados como ferramentas explícitas para resolver, pelo menos parcialmente, o problema.

TRANSLAÇÃO - *fase 1*

O objetivo da atividade é apresentar uma situação problema de forma que o conhecimento visado pelos alunos (translação) seja a ferramenta adaptada na resolução deste problema.

Atividade proposta para translação:



Os alunos deverão ter conhecimentos de objetos matemáticos, como segmento, reta, circunferência, semi-reta, arcos de circunferência, e outros, e mobilizá-los por meio do Cabri-Géomètre II. No entanto, os alunos poderão não conseguir resolver totalmente a atividade, pois como se trata de um desenho não poligonal e assimétrico, poderão não encontrar regularidade capaz de reproduzi-lo utilizando o Cabri-II.

De fato, espera-se que esta situação seja *plenamente resolvida* apenas com o uso da translação, conceito este a ser usado como ferramenta adaptada para posterior institucionalização. Ainda que o botão translação esteja disponível na barra do Cabri, os alunos não deverão utilizá-lo, pois ainda não o conhecem.

A figura que está no retângulo A é formada por quatro arcos de circunferência. Alguns alunos poderão encontrar pontos no retângulo B criando arcos de circunferência para que se assemelhem ao modelo dado. No entanto, esta estratégia não assegurará uma cópia fiel ao modelo dado no retângulo A.

Como o objetivo proposto é fazer uma cópia fiel, bastaria que os alunos localizassem oito pontos no outro retângulo e construíssem a figura cópia. Caso os alunos utilizassem uma referência cartesiana, isto corresponderá a 16 transportes de medidas para efetivar os pontos onde se construiriam os arcos. Pelo número de transportes de medidas que seria necessário, ficaria assegurada a característica não da impossibilidade, mas sim da onerosidade da construção.

"*Os alunos encontram dificuldades para resolver completamente o problema. Isto acontece se a estratégia primitiva torna-se muito custosa (em quantidades de operações e, portanto, em tempo, em risco de erro e, portanto, em incerteza sobre o resultado...)...*" *(DOUADY, 1984)*

Os alunos mais familiarizados com a informática poderão utilizar o recurso disponível de edição (copiar e colar). A cópia surgirá muito próxima à figura original. Na tentativa de fazerem o "arrasto" da cópia, os alunos perceberão que esta ação não poderá ser efetuada. A situação problema foi dimensionada para que os alunos efetuem uma cópia do motivo em local determinado.

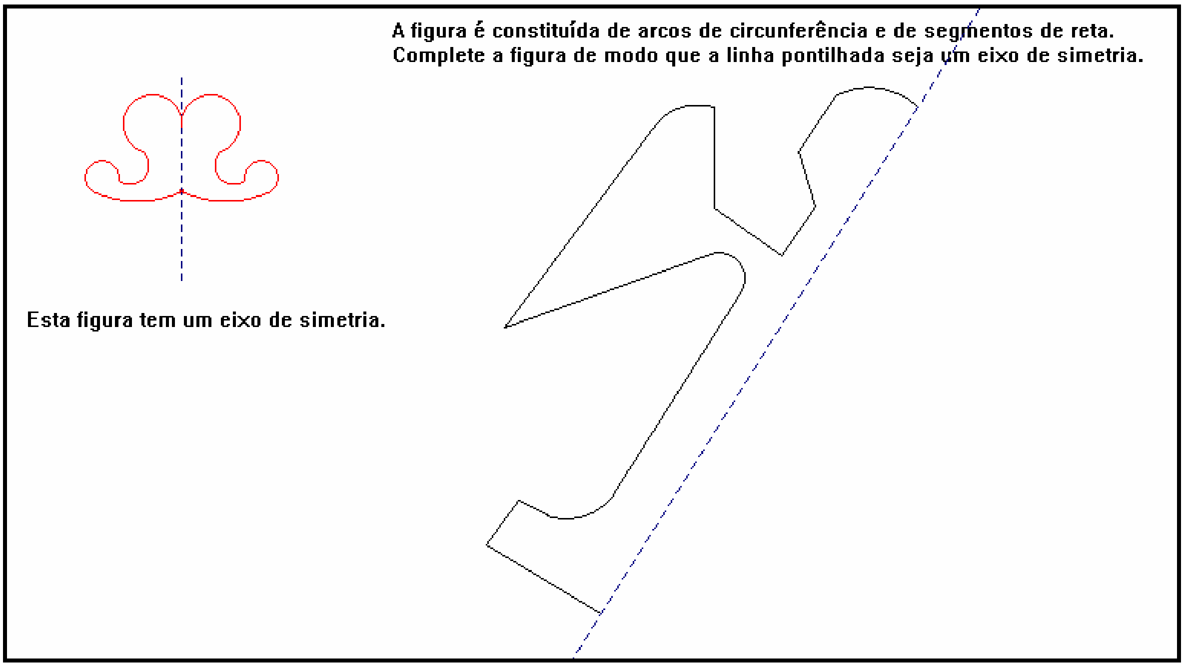
O Cabri-Géomètre II é um software de geometria dinâmica e possui como característica a movimentação dos objetos geométricos na tela pela ação do mouse. Para que os alunos não "deformassem" as figuras desenhadas na proposta da atividade, foi necessário a fixação dos pontos do retângulo da figura A e dos arcos, isto é, fixação para uma única localização no desenho pelo Cabri, para assegurar uma rigidez no modelo e não ser possível ocorrer uma eventual distorção por parte dos alunos.

Com o passar do tempo da aplicação desta atividade, os alunos poderão experimentar um sentimento de impotência para resolver esta situação.

A aplicação desta seqüência deverá ser conduzida de forma a que todos tenham a certeza de que não disporão de métodos de resolução para a proposta. Ainda que tentem por meio da ferramenta edição (copiar-colar) não deverão conseguir efetuar a translação.

SIMETRIA AXIAL - ***fase 1***

Esta atividade foi proposta da seguinte maneira:



Os alunos deverão conhecer os objetos matemáticos, como segmento, reta, circunferência, semi-reta, arcos de circunferências, mediatriz, etc, e saber mobilizá-los por meio do Cabri-II. Esta atividade faz uso do conceito de eixo de simetria que está representada por um exemplo na tela da atividade. Os alunos não saberão como completar a figura dada. Analogamente ao ocorrido na fase 1 da translação, espera-se que esta situação problema seja *plenamente resolvida* quando os alunos fizerem uso da transformação simetria axial, conceito este a ser usado como ferramenta adaptada para posterior institucionalização.

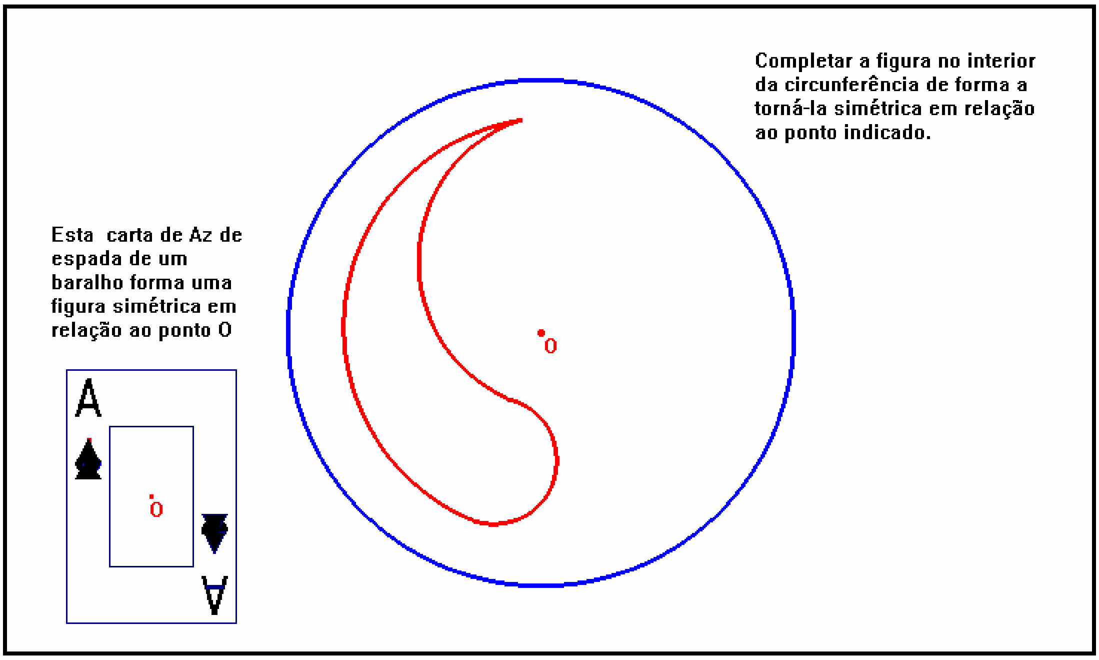
Os alunos poderão identificar uma figura não poligonal constituída de arcos de circunferências e de segmentos. Alguns poderão construir livremente arcos unidos por segmentos de reta, mas certamente, poderão observar que a figura assim construída não terá a reta pontilhada como eixo de simetria.

O entendimento da proposta, isto é, completar a figura de modo que a reta pontilhada seja um eixo de simetria, poderá ser o maior obstáculo para esta atividade. A representação de um eixo de simetria exemplificado ao lado inferior esquerdo da tela da atividade, como uma "dica", permitirá ao aluno ter acesso a esta informação, levando-o a aceitar uma primeira idéia de como completar a figura.

Nas experiências do cotidiano, os alunos passam por situações em que está presente este conceito. A reflexão em espelhos planos apresenta-se, talvez, como o mais simples e abrangente exemplo de uso deste conceito. Isto foi levado em conta na elaboração da "dica" deixada na atividade um.

SIMETRIA CENTRAL - ***fase 1***

A atividade se apresenta como:



Os alunos deverão saber manipular o Cabri-II com o objetivo de construir retas, segmentos, circunferências, arcos de circunferências, medir a distância entre dois pontos e comprimentos de arcos.

No entanto, os alunos poderão não conseguir resolver totalmente a atividade proposta. Por caracterizar-se da fase 1 da Dialética Ferramenta Objeto, espera-se que esta situação seja *plenamente resolvida* apenas com o uso da simetria central, conceito este a ser usado como ferramenta adaptada para posterior institucionalização.

É possível que alguns alunos tracem um par de eixos ortogonais com intersecção no ponto O, na tentativa de estabelecerem um referencial cartesiano para uso posterior. Caso os alunos se utilizem desta estratégia, encontrarão a figura vermelha interceptando em dois pontos o eixo vertical. A configuração da situação formada não apresentará nenhuma sugestão de como deverá ser realizada a construção da figura simétrica em relação ao ponto O.

A figura que deverá ser construída é constituída de três arcos de circunferência. O Cabri-II constrói arcos de circunferência a partir de 3 pontos. Portanto, seriam necessários, após o entendimento do que é uma figura simétrica em relação a um ponto, da localização de, no mínimo, seis pontos. A partir desses seis pontos, seria possível a construção dos arcos que formariam uma figura simétrica em relação ao ponto O.

Uma das principais características do Cabri-II é a de permitir aos alunos um ambiente de pesquisa. Poderemos ter alguns alunos construindo uma circunferência com centro em O na tentativa de verificar se os arcos desenhados na figura da atividade coincidem com alguma circunferência de centro O. Este procedimento será frustrado, pois o centro das circunferências suportes da figura da atividade não se encontra em O.

Prosseguindo nesta estratégia, os alunos poderão tentar localizar os centros das circunferências dos arcos da figura apresentada. Para cada centro seria necessária a construção de duas mediatrizes, ou seja, criar quatro pontos, e construir mediatrizes para cada par de pontos pertencentes ao mesmo arco. Como nossa figura possui 3 arcos distintos, logo os alunos deveriam construir doze pontos e três mediatrizes. Com isso, teriam localizado os centros das circunferências suportes dos arcos utilizados na figura da atividade.

Com esses três centros localizados, os alunos poderão verificar a posição relativa entre esses pontos na tentativa de encontrar alguma regularidade. A atividade foi construída de forma que esses três centros não estivessem alinhados.

Uma possibilidade de sucesso surgiria caso os alunos determinassem três pontos com as características de serem simétricos em relação ao ponto O dos centros das circunferências.

Espera-se que os alunos apresentem dificuldades não no entendimento do que seja uma figura simétrica em relação a um ponto, mas sim, de que forma poderão construí-la. As empresas de um modo geral se utilizam deste tipo de figuras na formação de sua logo marca. Podemos citar o logotipo do ECT (Empresa Brasileira de Correios) ou mesmo o “S” do Senna imortalizado em sua logo marca.

3.4.3.2 FASE 2: pesquisa do novo implícito

O aplicador, responsabilidade assumida pelo pesquisador, deverá ter sensibilidade suficiente para intervir e propor a continuação da seqüência didática encaminhando os alunos para as próximas atividades iniciando-se a *fase 2* da dialética Ferramenta-Objeto de Douady. Esta fase está composta pelas atividades, a saber:

a) Discussão das principais características dos conceitos das transformações geométricas;

b) Uso da transformação geométrica como caixa-preta e posteriormente como ferramenta.

Apresentaremos as atividades para cada transformação geométrica. Lembramos que estas atividades estão sendo analisadas simultaneamente do ponto de vista da Dialética Ferramenta-Objeto e não do ponto de vista cronológico.

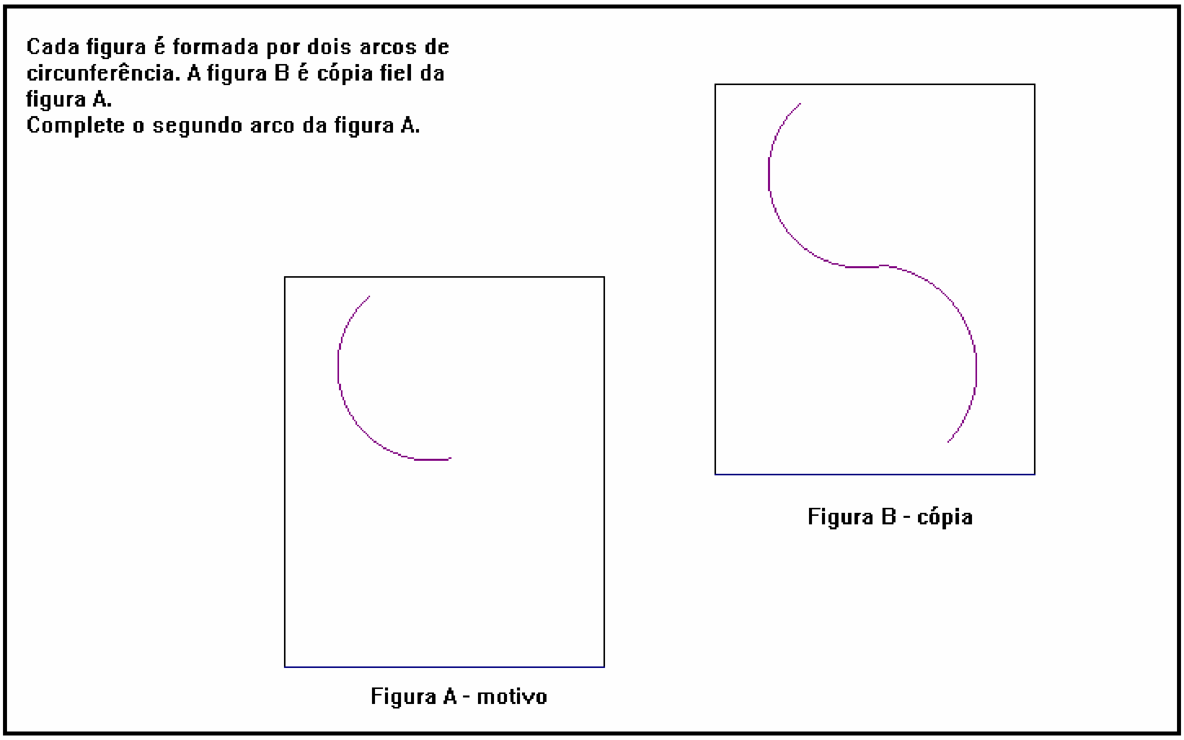
TRANSLAÇÃO - *fase 2*

Atividade 2a – Discussão das principais características

Estamos neste momento iniciando a *fase 2* da Dialética Ferramenta Objeto de Régine Douady para a formação do conceito da translação.

Esta atividade tem como objetivo levar os alunos à construção dos conceitos essenciais da noção de translação: paralelismo entre segmentos formados por pares de pontos correspondentes e, invariâncias das distâncias entre pontos correspondentes.

Esta atividade foi proposta da seguinte maneira:



Os alunos ainda deverão ter pleno conhecimento da construção de arcos definido por um ponto inicial, um ponto que determina sua curvatura e um ponto final, além da construção básica de segmentos de retas. Deverão saber medir comprimentos de segmentos e efetuar o transporte de medidas pelo compasso, ou usando o botão transferência de medidas.

O objetivo proposto para completar o segundo arco da figura motivo exigirá a localização do ponto que define sua curvatura. Como ele poderá ser localizado? Seria possível o uso de coordenadas cartesianas em relação às bordas dos retângulos para localização deste ponto?

"Estas questões poderão levar os alunos a procurar meios novos adaptados. (DOUADY, 1984)"

Por nossa escolha, novamente fixamos os vértices dos retângulos e os pontos que formam os arcos, isto é, fixação para uma única localização no desenho pelo Cabri. Dessa forma, o aluno não terá condições de desfigurar a atividade.

Esta atividade é bastante aberta, os seja, exigirá dos alunos bastante iniciativa e criatividade para a obtenção de pontos correspondentes.

Alguns alunos poderão pressionar o "botão esconder/mostrar" disponível no menu de ferramenta do Cabri-II com a expectativa de poderem localizar alguns pontos. Outros poderão marcar pontos sobre o arco para poderem iniciar suas conjecturas. De qualquer forma, ambas estratégias mostrarão o início da busca de propriedades entre elementos pertencentes às figuras.

Outros alunos poderão medir os comprimentos dos arcos. O arco reproduzido no retângulo A apresentará a mesma medida de comprimento do retângulo B. Isto servirá de indício para conduzir sua pesquisa. Possivelmente, deverá encontrar um ponto tal que complete o segundo arco com o mesmo comprimento do arco correspondente em B.

Espera-se que os alunos tenham iniciativa e façam as correspondências entre os pontos finais e iniciais dos arcos, construindo assim segmentos de retas para unir estes pontos. Outros poderão simplesmente construir retas passando por esses pares de pontos. Será possível observar e validar a existência de um feixe de retas paralelas formado.

Verificando-se a medida destes segmentos formados, espera-se que os alunos observem a invariância dos comprimentos. Por transporte de medidas em relação aos pontos correspondentes será possível encontrar novos pontos desejados. Bastaria ter as retas suportes, neste caso paralelas aos demais segmentos anteriormente traçados, para posterior transporte de medidas.

Aqueles que não fizerem estas construções por transporte de medidas poderão utilizar o botão compasso e efetuar traçados de circunferências com raio dado pelos segmentos já construídos anteriormente.

Esta situação é bastante rica, pois permite a formação do conceito do paralelismo entre figuras transladadas. É possível assim, associar uma interação de domínio do quadro numérico pelo uso das medidas dos segmentos, com o quadro geométrico identificando as invariâncias das distâncias.

"Freqüentemente progressos eficazes provêm de uma mudança de quadros... (...) As mudanças de ponto de vista e os jogos de quadros são meios à disposição do professor para fazer avançar a fase de pesquisa de modo frutuoso..." (DOUADY,1984)

É fundamental que os alunos utilizem o botão de transporte de medida corretamente, ou seja, que o ponto resultado do transporte da medida seja vinculado a uma circunferência de raio igual à medida que se deseja transportar, e que este ponto pertença ao segmento paralelo. Esta circunferência terá seu centro no mesmo ponto de referência utilizado pelo transporte de medida.

Caso os alunos não façam este procedimento de acordo com o discutido acima, não conseguirão encontrar perfeitamente a parte do arco que deverá ser completado.

Atividade 2b – A translação como caixa preta

O objetivo desta atividade é de apresentar aos alunos o uso da translação como caixa preta. Ou seja, por meio do Cabri-II, os alunos implementam a translação solicitada sem, no entanto, terem indícios de como se obteve o resultado desta transformação.

Esta atividade foi proposta com a seguinte descrição:

> Crie um segmento AB e uma flecha usando o botão "vetor". Utilizando o botão "translação" no menu de ferramentas, clique sobre o segmento e posteriormente sobre a flecha (vetor). O que se observa?
>
> Sendo C o ponto correspondente ao ponto A e D o ponto correspondente ao ponto B, descreva características do quadrilátero ABDC.
>
> Descubra uma relação entre o quadrilátero e o vetor. Justifique.

Como competência necessária para resolvê-la esperamos que os alunos conheçam a barra de menu do Cabri-II e sejam capazes de reconhecer os botões necessários para poder responder a atividade, utilizando-os na seqüência em que se pede, ou seja, construir um segmento de reta, nomear suas extremidades, criar um vetor, reconhecer um quadrilátero e saber as características de um quadrilátero paralelogramo.

Poderemos encontrar algumas estratégias possíveis dos alunos na resolução desta atividade.

Na primeira parte pertinente à construção do segmento e do vetor, espera-se que os alunos façam suas construções sem apresentar dificuldades. Ao concluirem a translação, espera-se que reconheçam a criação de um novo segmento. Alguns poderão ter a iniciativa de estudá-lo: poderão medir o seu comprimento, poderão verificar se é paralelo em relação ao segmento AB. Outros simplesmente poderão responder que se trata de mais um outro segmento e, possivelmente, dirão ser congruente sem ao menos efetuarem uma validação.

Na medida que a atividade pede para nomear os pontos C e D como correspondentes de A e B, respectivamente, e que se descreva a característica do quadrilátero ABDC, espera-se que os alunos possam reconhecer neste quadrilátero um paralelogramo. Para isto deverão validar e verificar as congruências das medidas dos lados AB e CD assim como dos lados AC e BD. Deverão também validar e verificar o paralelismo entre os segmentos AB e CD assim como entre AC e BD.

Quanto à relação entre o quadrilátero e o vetor, espera-se que os alunos reconheçam a correspondência e a congruência da medida do comprimento do vetor e a medida de um dos lados AC ou BD do paralelogramo. Por meio da característica do Cabri-II, espera-se que alguns alunos manipulem o vetor e observem as possíveis formas do paralelogramo se modificarem em correspondência as características deste vetor.

Os alunos poderão apresentar algumas dificuldades. De fato é esperado um grau de dificuldade bastante grande, pois estamos tratando da introdução do conceito de vetor, ente matemático bastante complexo, sobre o qual as experiências anteriores dos alunos são bastante reduzidas.

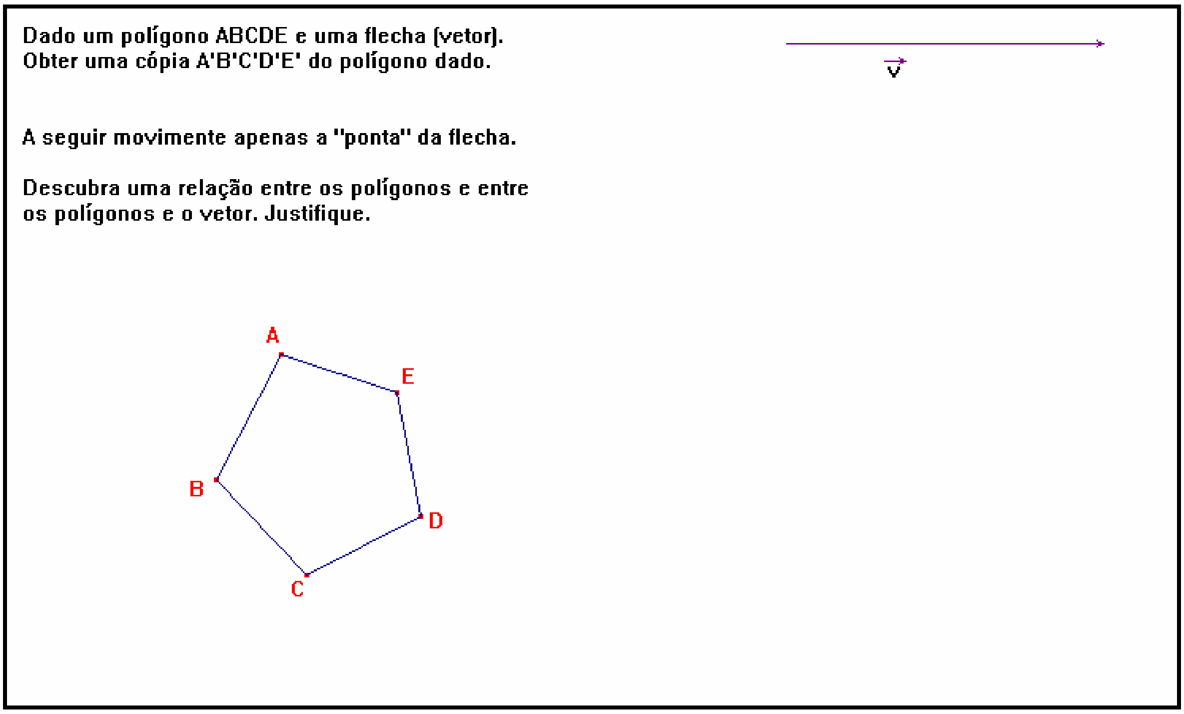
Além disso, estará presente também o que Laborde (2001) chamou de Dialética Global-Pontual. O uso do botão "translação" como "caixa preta" pelos alunos poderá favorecer o conceito da translação como uma transformação que atua em figuras. O Cabri-II não apresenta nenhuma indicação no modo de construção destas figuras resultantes do uso desta transformação. Sendo assim, o plano pode ser visto contendo um conjunto de figuras (pontos, segmentos, retas, triângulos, polígonos, circunferências, etc...) e, por meio da transformação, resultam novas figuras modificadas.

Ainda segundo Laborde (2001), a noção da transformação geométrica como uma aplicação do plano em si mesmo não deverá se apresentar tão naturalmente aos alunos. A passagem da transformação de figuras à aplicação que a todo ponto do plano associa um ponto do plano não é natural, ao contrário, marca uma ruptura, pois esses dois aspectos colocam em funcionamento concepções diferentes do plano. De um lado, um plano contendo um conjunto de figuras (pontos, segmentos, retas, triângulos, polígonos, circunferências, etc...) e de outro, um plano enquanto conjunto de pontos. As figuras geométricas são consideradas então, não como entidades particulares, mas como subconjuntos de pontos.

Atividade 2c – A translação como ferramenta

O objetivo desta atividade é usar a translação, ainda como ferramenta para resolver uma situação problema de reprodução de figura, ou seja, criar uma cópia dado um polígono como modelo.

Esta atividade foi proposta da seguinte maneira aos alunos:



Esperamos que os alunos deverão saber efetuar uma translação por meio do botão do Cabri-II e reconhecer a cópia como um resultado da translação por meio de vetor de um dado modelo como competência necessária para resolver esta atividade. Para relacionarem as figuras cópia e o modelo, e a cópia e o vetor, os alunos deverão saber usar os botões de medir distâncias e de verificação de propriedades entre objetos.

Por meio do botão translação, os alunos poderão utilizar este conceito como ferramenta, bastante explícito, necessitando de sua posterior institucionalização.

Ao movimentar a "ponta" da flecha, espera-se que os alunos observem os movimentos descritos pelo vetor e o polígono A'B'C'D'E' como sendo correspondentes, isto é, que seja possível associar o ponto A' como uma translação pelo vetor $\vec{v}$ do ponto A; o ponto B' como uma translação pelo vetor $\vec{v}$ do ponto B, etc...

Espera-se que os alunos observem a congruência entre os polígonos ABCDE e A'B'C'D'E'. Para isto será possível medir as medidas dos lados e ângulos correspondentes dos polígonos. Espera-se que os alunos comparem as medidas dos pares dos segmentos correspondentes AB com o A'B', BC com B'C', CD com C'D' e, assim, sucessivamente. Da mesma forma, medir os ângulos correspondentes ABC e A'B'C', BCD e B'C'D', CDE e C'D'E' e, assim, sucessivamente.

Como uma possível justificativa, poderemos encontrar alunos mediando os segmentos correspondentes dois a dois, formando paralelogramos. Isto é, analisar o paralelogramo ABB'A', BCC'B', etc.

A conjectura proposta pela movimentação da ponta da flecha permitirá uma concretização maior do conceito do vetor, e de sua implicação na translação já efetuada. No entanto, a justificativa correta poderá não emergir tão facilmente.A análise pelos paralelogramos formados dois a dois não poderá ser tão natural para os alunos.

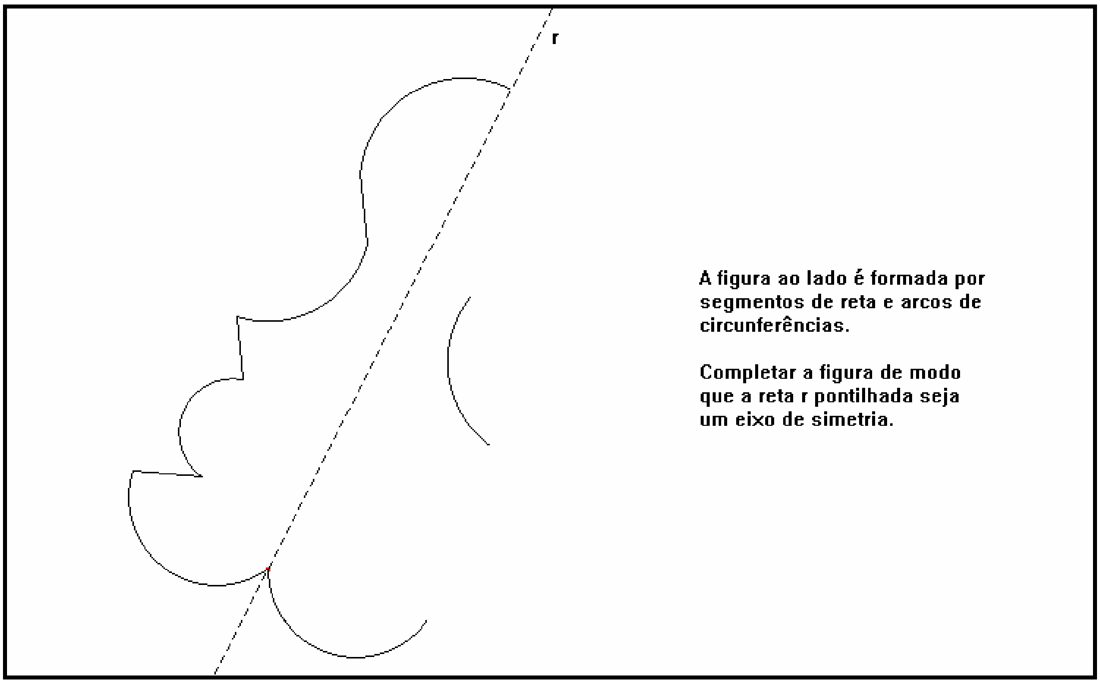
Uma vez que os alunos já experimentaram todas as atividade da *fase 2*, deverão ser incentivados a retomar a proposta dada pela atividade 1. Estará sendo iniciado a *fase 3* e descreveremos uma análise a priori desta atividade posteriormente as próximas apresentações da simetria axial e simetria central.

SIMETRIA AXIAL - *fase 2*

Atividade 2a - Simetria Axial – Discussão das principais características

O objetivo desta atividade é o de apresentar aos alunos alguns pontos correspondentes de uma figura simétrica em relação a um eixo. A construção de segmentos entre estes pontos pelos alunos, favorecerá a criação dos conceitos essenciais da simetria axial: paralelismo, invariâncias das distâncias entre pontos simétricos e suas respectivas projeções ortogonais em relação a um eixo.

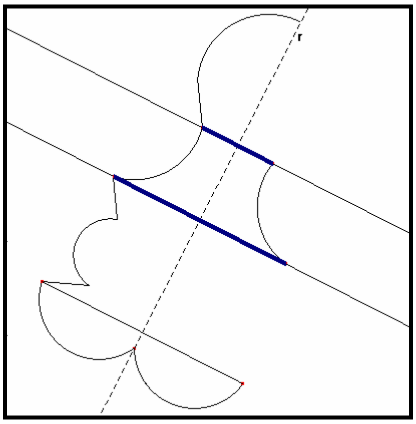
Esta atividade foi proposta da seguinte forma:



Os alunos deverão saber usar o Cabri-II na criação de segmentos, nas verificações de propriedades destes segmentos, isto é, verificação de seu posicionamento relativo a outros segmentos correspondentes objetivando a idéia do paralelismo. Também é esperado que os alunos saibam medir as distâncias pertinentes entre pontos e suas projeções ortogonais em relação a um eixo de simetria.

Como realizado na atividade da seção da translação, os alunos têm por objetivo completar uma figura sem, no entanto, possuírem referências para tal. É uma atividade aberta onde será necessária iniciativa e criatividade para obtenção dos pontos que permitirão completar a figura desejada.

A atividade apresenta dois arcos traçados no semi-plano correspondente ao lado de onde a figura deve ser completada. Possivelmente, os alunos poderão criar segmentos de reta, ou mesmo retas, unindo as extremidades dos arcos correspondentes nos dois semiplanos. Fazendo isto, os alunos poderão perceber o paralelismo entre os segmentos ou as retas criadas pela união destes pontos.



Poderemos ter alguns alunos conjecturando que os segmentos ou as retas criadas são perpendiculares em relação ao eixo pontilhado.

É possível que alguns alunos já reconheçam que o eixo de simetria é de fato a reta mediatriz destes dois segmentos recém criados. Sendo assim, os pontos correspondentes e simétricos em relação ao eixo pontilhado serão eqüidistantes ao eixo pontilhado.

Poderemos ter também alguns alunos que, por conjectura, poderão estabelecer a relação do eixo de simetria como sendo a bissetriz de qualquer ângulo cujo vértice se encontra no eixo de simetria e seus lados possuam pontos correspondentes simétricos em relação a este eixo de simetria.

No caso dos alunos não reconhecerem estas propriedades, elas poderão ser verificadas por meio da medida das distâncias entre os pontos e o eixo de simetria.

Os alunos poderão perceber que os segmentos mudam de comprimento, porém, em relação ao eixo de simetria há uma invariância de distância, ou seja, uma simetria entre os pontos.

Para completar a figura, espera-se que os alunos localizem os pontos necessários que demarcarão os segmentos ou os arcos de circunferências.

A possibilidade da medida da distância, isto é, o comprimento dos segmentos formados pelos pontos correspondentes (simétricos) faz o papel da mudança do quadro geométrico para um quadro numérico. Temos eqüidistância em relação ao eixo simétrico sendo visualizada e verificada pela igualdade numérica apresentada pelas medidas do Cabri-II.

Por ser um novo conceito que está sendo criado, espera-se que ainda não seja perfeitamente entendido o caso da correspondência de um ponto em relação a um eixo no momento em que este ponto está situado sobre este eixo. Estamos tratando do caso da transformação identidade.

Outra dificuldade que poderá surgir será no entendimento relativo à projeção ortogonal. O eixo de simetria foi propositadamente colocado inclinado para que não houvesse qualquer relação com casos particulares de horizontal e vertical, criando futuros obstáculos para posterior institucionalização deste conceito.

Atividade 2b – A simetria axial como caixa preta

O objetivo desta atividade é de apresentar aos alunos o uso da simetria axial como ferramenta disponível no Cabri-II. Nesta oportunidade, serão manipulados pontos e uma reta que servirá como eixo de simetria. A transformação simetria axial será tratada como caixa-preta. Entende-se o uso da simetria axial como "caixa-preta" como sendo a apresentação de seus resultados pelo Cabri-II sem mostrar a forma que foram obtidas.

Esta atividade foi proposta da seguinte forma:

Crie uma reta e um segmento AB de modo que a reta e o segmento não se intersectam.

Utilizando o botão "simetria axial" no menu de ferramentas, clique sobre o segmento e posteriormente sobre a reta (eixo de simetria). O que se observa?

Nomeie o ponto correspondente de A como A' e o ponto correspondente de B como B'. Quais são as características do quadrilátero AA'B'B? Justifique.

Espera-se que os alunos possuam as competências de conhecer a barra de menu do Cabri-II e que sejam capazes de reconhecer os botões necessários para que possam responder à atividade, utilizando-os na seqüência em que se pede, ou seja, construir uma reta e um segmento de modo a não possuírem pontos comuns. Pressionar o botão "simetria axial", clicar sobre o objeto segmento e, posteriormente, sobre a reta, eixo de simetria. Nomear as extremidades deste novo segmento e reconhecer o quadrilátero formado como um trapézio isósceles e saber suas principais características como diagonais congruentes, par de lados paralelos e lados não paralelos congruentes.

No início é esperado que alguns alunos possam ter dúvidas sobre o enunciado da atividade e o aplicador deverá esclarecer o sentido da palavra intersectam. Espera-se então que os alunos construam um segmento e uma reta que não possuam pontos em comum.

Quando os alunos estiverem usando a simetria axial como caixa-preta, possivelmente não deverão encontrar dificuldades na observação de que foi criado um outro segmento de mesma medida e localizado no semiplano oposto em relação à reta. Estas características são fundamentais na simetria axial.

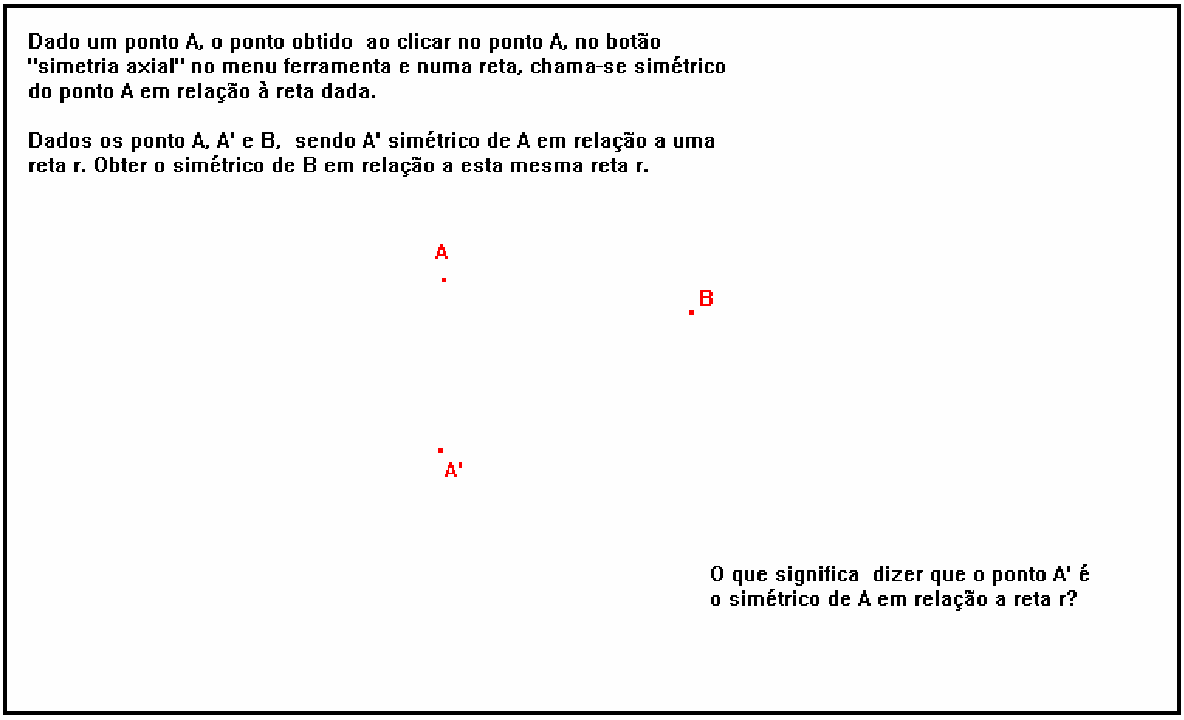
É esperado também que os alunos observem as correspondências entre os pontos A e A' e os pontos B e B'. Como na última atividade realizada, espera-se que os alunos reconheçam estes pontos A' e B' como eqüidistantes ao eixo de simetria representado pela reta que acabou de ser construída em relação aos pontos A e B.

Possivelmente, os alunos já identificarão o quadrilátero formado AA’B’B como sendo um trapézio isósceles, com congruência de lados representado pelos segmentos AB e A’B’, paralelismo entre os lados AA’ e BB’.

Atividade 2c - A simetria axial como ferramenta na localização do eixo de simetria

O objetivo desta atividade é o de encontrar o eixo de simetria dados pontos e seus simétricos em relação a este eixo. Favorecer a formação do conceito de simetria axial em relação a um eixo.

Esta atividade foi apresentada como:



Para resolver esta atividade, os alunos deverão saber e identificar reta mediatriz como sendo o lugar geométrico no plano dos pontos eqüidistantes a dois pontos. Deverão saber localizar o ponto B’ como simétrico de B em relação ao eixo encontrado. E, finalmente, saberem expressar seus entendimentos sobre o significado do ponto A’ como simétrico do ponto A em relação ao eixo.

Espera-se que alguns alunos possam reconhecer a necessidade da construção do eixo de simetria e, para isto, construirão a mediatriz do segmento AA’. De fato o eixo de simetria é o lugar geométrico de pontos eqüidistantes a quaisquer dois pontos ditos simétricos em relação a este eixo.

Para esta construção, espera-se que os alunos utilizem-se do botão “mediatriz” disponível no Cabri-II.

É possível também que alguns alunos construam uma reta qualquer passando por entre os pontos A e A’. E com esta reta sendo usada como eixo de simetria, por meio do botão “simetria axial”, os alunos poderão construir ponto A’’ como simétrico de A em relação a esta reta desenhada. Por conjectura, poderão “arrastar” a reta recém construída de forma a fazer coincidir o ponto A’’ com o ponto A’.

Poderemos ter alunos que conjecturem a possível construção de um trapézio isósceles formado pelos pontos ABB’A’. De fato poderemos ter alunos que mobilizem conceitos relativos às propriedades do trapézio isósceles e identifique os triângulos congruentes AA’B e AA’B’. Por construções geométricas poderão tentar localizar o ponto B’ para a construção deste triângulo.

Para a resposta do que significa o ponto A’ ser simétrico do ponto A em relação a reta r, possivelmente poderemos verificar que os alunos associem a idéia da simetria com a idéia da eqüidistância dos pontos correspondentes em relação ao eixo dado e a idéia do segmento formado pelos pontos simétricos como perpendicular ao eixo de simetria.

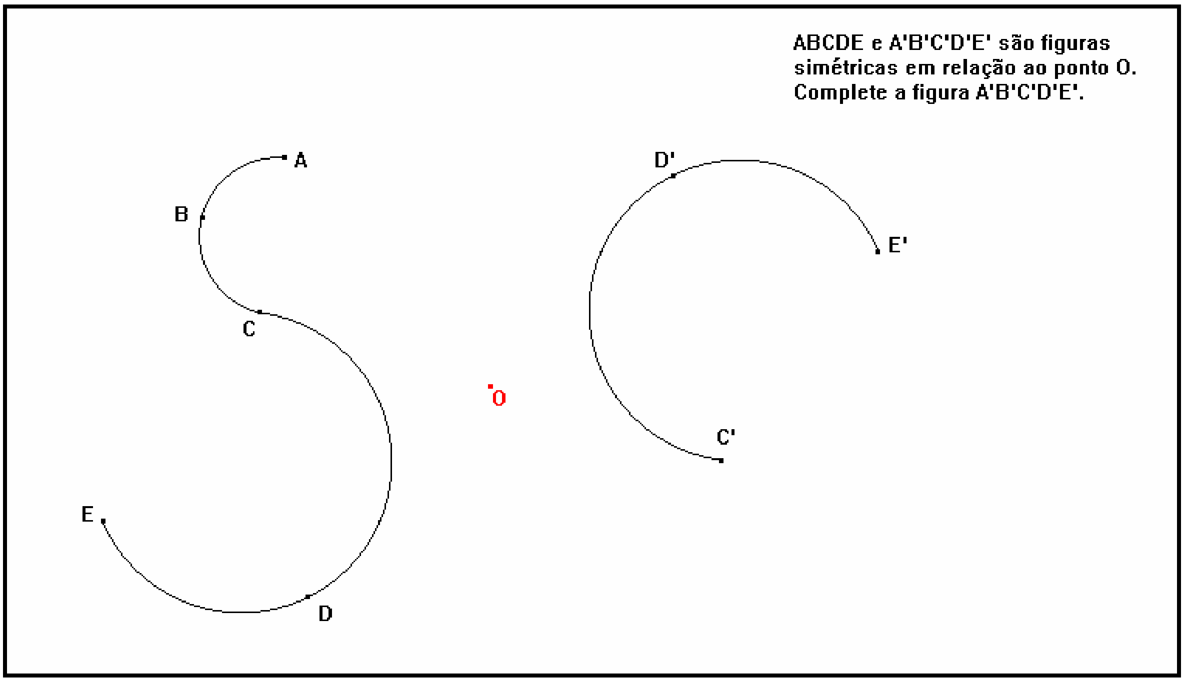
A identificação da mediatriz dos pontos A e A’ como sendo o eixo de simetria será fundamental para a resolução desta atividade. Acreditamos que a dificuldade maior que os alunos poderão apresentar seja no entendimento efetivo da mediatriz que responde a esta questão entre os pontos A e A’.

SIMETRIA CENTRAL - *__fase 2__*

Atividade 2a – Discussão das principais características da simetria central

Semelhante ao ocorrido com as demais transformações geométricas anteriores, o objetivo desta atividade é levar os alunos à construção das principais características da simetria central. Serão apresentadas aos alunos duas figuras: uma delas formada por dois arcos e outra, a ser completada formada por um arco. Os alunos deverão completar este segundo arco simétrico em relação ao ponto O conforme indicado. Ao construir este arco, espera-se que seja favorecido o conceito de que o ponto O é ponto médio de qualquer segmento unindo pontos correspondentes de duas figuras simétricas em relação a este ponto.

Esta atividade foi proposta da seguinte maneira:



Os alunos deverão saber construir arcos de circunferência dados três pontos, deverão saber construir segmentos de retas, retas, circunferências, nomear pontos, efetuar medidas de comprimentos entre pontos.

Podemos esperar que alguns alunos tentam encontrar os centros das circunferências suportes do arcos ABC, CDE e C'D'E'. De posse destes centros, será possível por conjectura observar que os centros dos arcos CDE e C'D'E' são alinhados com o ponto O e também com os pontos E e E'.

É possível encontrarmos alunos que tentarão construir circunferências de centro O na tentativa de encontrar alguma regularidade. De fato, uma vez que o aluno tenha seguido esta estratégia, espera-se que fique evidenciado que o ponto O é o centro da circunferência que possui o ponto E e E', ou da circunferência que possui os pontos D e D', ou ainda da outra circunferência C e C'.

A configuração desta atividade poderá favorecer a percepção dos alunos de que o segmento formado $\overline{CC'}$, ou $\overline{DD'}$, ou $\overline{EE'}$ são diâmetros de circunferências com centro O. Portanto, construir arcos simétricos é encontrar um ponto diametralmente oposto em relação ao centro da circunferência estudada.

Poderemos ter também alunos que construirão segmentos ou retas formados pelos pares de pontos correspondentes C e C', D e D', E e E'. É possível que os alunos validem uma provável suposição de que o ponto O é ponto médio destes segmentos. Com isso, para localizar os pontos A' e B', bastaria traçar retas suportes passando por esses pontos e o ponto O. Por transferência de medida, ou pela construção de uma circunferência de raio $\overline{OA}$ ou raio $\overline{OB}$, respectivamente poderiam localizar os pontos A' e B'.

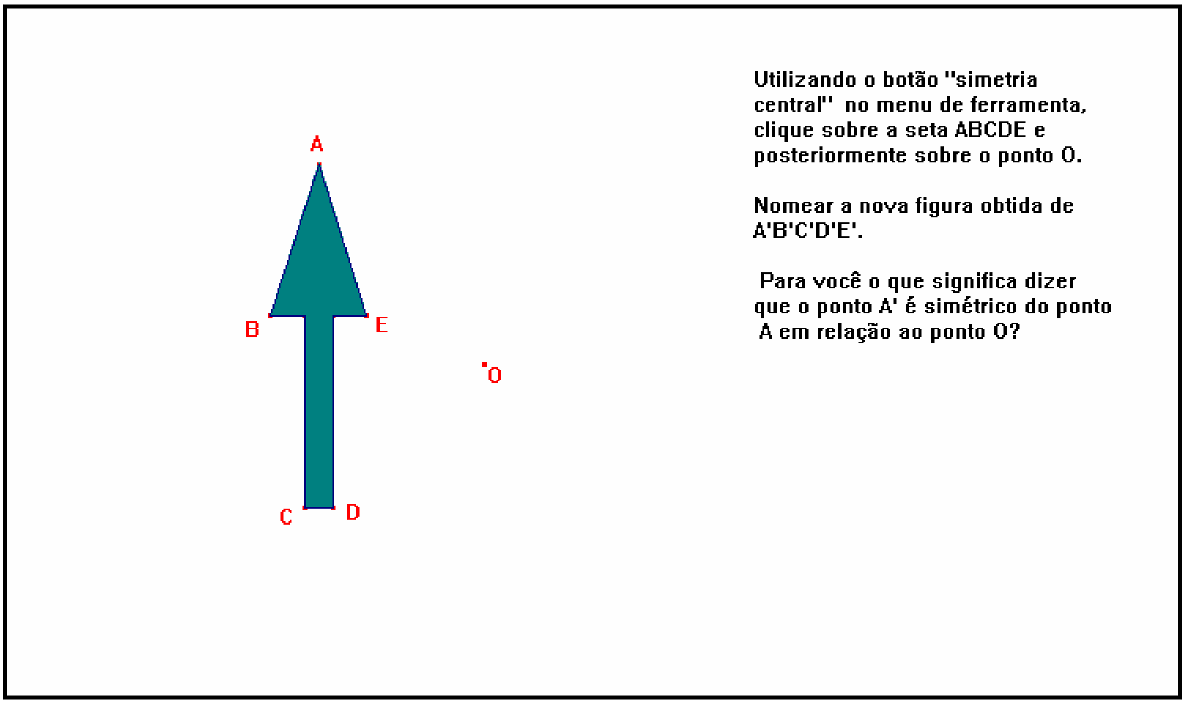
A construção do arco A'B'C' estaria completa.

Não esperamos dificuldades dos alunos nesta atividade.

Atividade 2b – Apresentação do botão simetria central e o uso da mesma como caixa-preta

O objetivo desta atividade é apresentar aos alunos o uso da simetria central como caixa preta. Ou seja, por meio do Cabri-II, os alunos implementam a transformação simetria central solicitada sem, no entanto, terem indícios de como se obteve o resultado desta transformação.

Esta atividade é proposta da seguinte maneira:



Espera-se que os alunos saibam utilizar a barra de menu de ferramenta do Cabri-II e possam nomear pontos. Interpretar o resultado da imagem que surge da transformação realizada.

É esperado que os alunos façam o que se indica na atividade e nomeiem os pontos A'B'C'D'E' da nova seta que surgirá com o uso da simetria central.

Poderemos ter alunos que farão retas entre os pontos correspondentes da seta para poder servir de auxílio na nomeação dos pontos.

Esperamos que os alunos reconheçam que o ponto O é de fato o ponto médio de qualquer segmento construído entre dois pontos correspondentes de figuras simétricas em relação a este ponto O.

Possivelmente, a dificuldade estará na nomeação dos pontos, principalmente dos pontos E e B ou ainda de C e D. O conceito de simetria central ainda está em formação.

Na realidade, os alunos observarão os pontos A,B,C,D,E nesta atividade se corresponderem a novos pontos de uma outra seta. No entanto, a idéia de que toda a figura foi transformada poderá ainda não estar compreendida. Estamos discutindo o que Laborde (2001) apresentou como dialética global-pontual já citada nas considerações sobre a translação.

Uma vez que os alunos já experimentaram todas as atividades da *fase 2*, deverão ser incentivados a retomar a proposta dada pela atividade 1. Estará sendo iniciado a *fase 3* e descreveremos uma análise a priori desta atividade.

"Nesta terceira fase, os trabalhos e propósitos dos alunos, sua validade são discutidos coletivamente." (DOUADY, 1984)

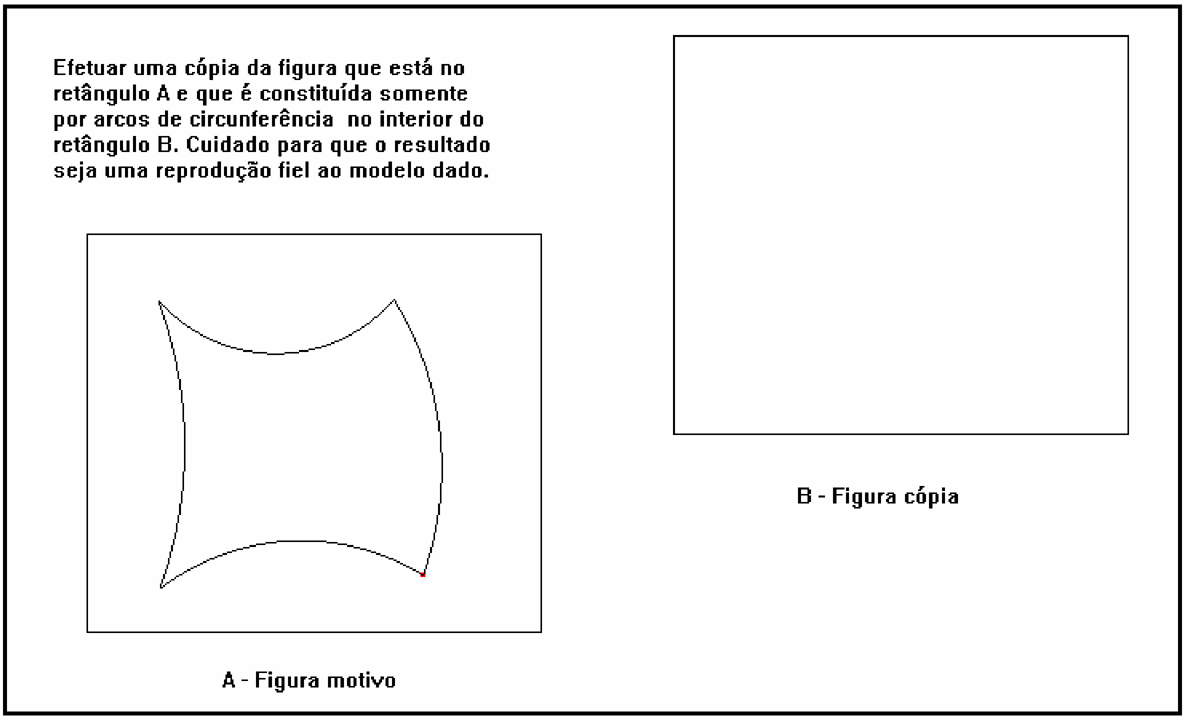
3.4.3.3 Fase 3: explicitação e institucionalização local

Retorno para a solução da situação problema proposta em cada uma das transformações geométricas descritas utilizando-se do novo conceito respectivo como ferramenta explícita.

TRANSLAÇÃO - *fase 3*

O objetivo desta atividade é o uso da translação como ferramenta adaptada para resolver uma situação problema.

Esta atividade foi proposta com a seguinte descrição:



De acordo com o referencial teórico da dialética Ferramenta-Objeto de Douady, a terceira fase de uma seqüência didática deve contemplar o uso do objeto a ser ensinado como ferramenta explícita para resolver a situação problema.

No nosso caso, a translação se apresenta como ferramenta adaptada para a resolução desta situação. No entanto, não foi apresentado nenhum vetor para os alunos na figura.

Para a solução desta situação, espera-se que os alunos mobilizem os conhecimentos vistos nas atividades anteriores de paralelismo e invariâncias das distâncias de pontos correspondentes e possam associar a necessidade de construir um vetor capaz de caracterizar a translação que produzirá uma cópia fiel da figura motivo no retângulo A no interior do retângulo B.

Saber construir o vetor será fundamental para o sucesso desta fase.

A atividade está sendo apresentada com alguns pontos acessíveis nos retângulos e nos arcos. Isto permite que os alunos possam por meio do Cabri-II, construir o vetor determinado por um par de pontos correspondentes.

Eventualmente, poderemos ter alunos que construirão o vetor sem fazer corresponder à translação solicitada, isto é, sem se preocupar em levar a figura “exatamente” na posição em relação ao retângulo. Esperamos que os pontos deixados nos retângulos possam ser usados como referências na construção dos vetores.

Ainda nessa atividade poderemos ter alunos que tentem efetivar a cópia pelo processo vivenciado na atividade em que foi apresentado o paralelismo entre os pontos associados a uma translação.

Espera-se que os alunos usem a translação como ferramenta adaptada, no entanto, é possível que eles possam construir sua solução baseada na construção dos pontos correspondentes do desenho dado.

Caso os alunos errem na determinação correta do vetor, poderemos encontrar cópias do desenho dado, porém com localização não adequada ao que nos referimos como cópia fiel. Possivelmente, poderemos encontrar alunos que ao perceberem esta situação, utilizar-se-ão como estratégia de solução, deletar o vetor e reiniciar sua tarefa. Este gesto poderia evidenciar uma melhor compreensão da situação proposta, pois toda a figura transladada é função de um vetor. A extinção do vetor implica na extinção da figura transladada correspondente.

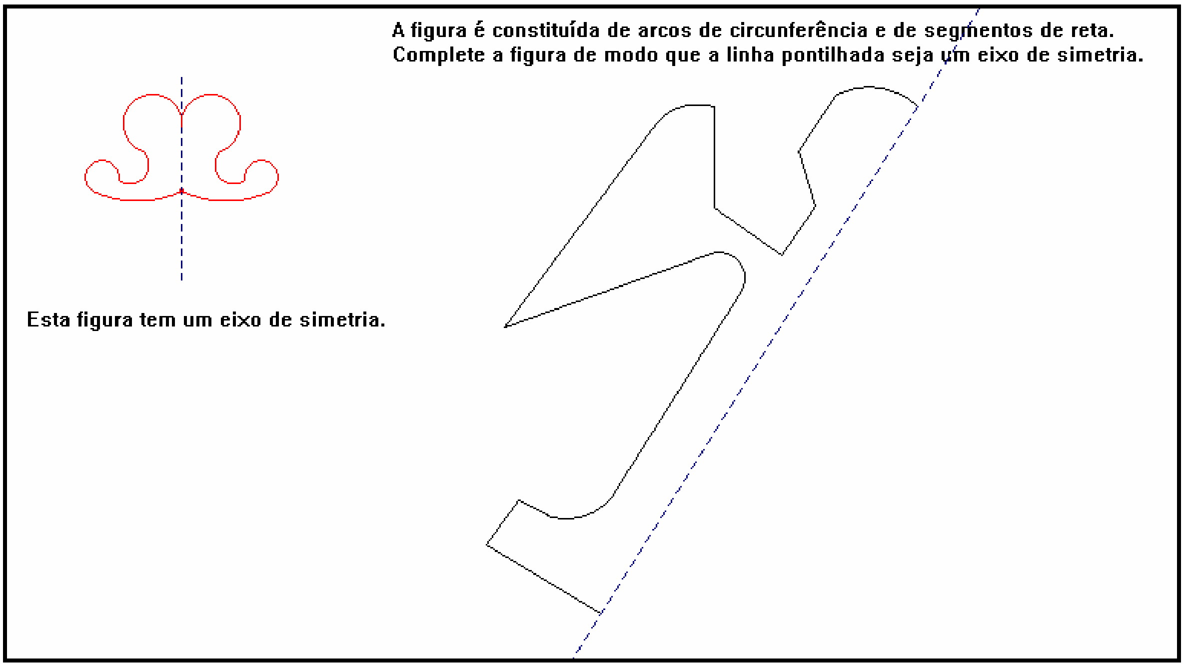
Acreditamos que a maior dificuldade será encontrar o vetor que caracterize a translação adequadamente.

"*.Além disso, mesmo se a coletividade "classe" resolveu o problema, nem todos reagiram individualmente da mesma maneira face às ferramentas mobilizadas. Nas situações de comunicação, o saber difunde diversamente conforme os alunos. Oficializar alguns conhecimentos que até aí foram somente ferramentas, dar status de objeto matemático é uma condição de homogeneização e de constituição de um saber da classe, e para cada um uma maneira de marcar seu próprio saber e assim assegurar a progressão.Esta é o objetivo da fase seguinte" (DOUADY, 1984).*

SIMETRIA AXIAL - ***fase 3***

O objetivo desta atividade é usar a simetria axial como ferramenta adaptada para resolver uma situação problema. Estamos iniciando a *fase 3* da Dialética Ferramenta Objeto de Régine Douady, neste caso para a SIMETRIA AXIAL.

Esta atividade foi proposta com a seguinte descrição:



No nosso caso, a simetria axial se apresenta como ferramenta adaptada para a resolução desta situação. Para a solução desta situação, espera-se que os alunos mobilizem conhecimentos vistos nas atividades anteriores e possam associar a necessidade do uso da simetria axial em relação ao eixo representado pontilhado.

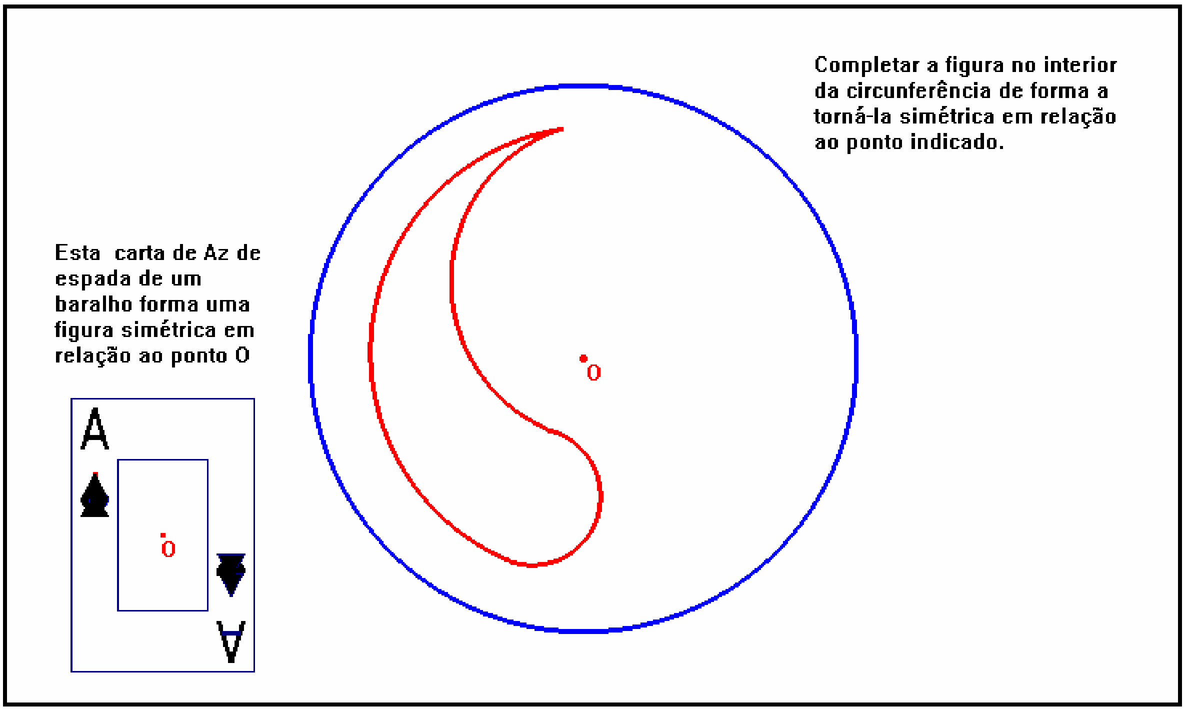
Espera-se que os alunos observem que esta figura é composta por segmentos de retas e arcos de circunferência. Para completar a figura, alguns alunos poderão selecionar estes segmentos e utilizar o botão "simetria axial" disponível no Cabri-II para construir a imagem simétrica em relação ao eixo. Poderão repetir esta operação, porém aplicada aos arcos.

Não esperamos dificuldades por parte dos alunos, desde que tenha havido o envolvimento e participação das atividades propostas anteriormente. De fato, após a resolução desta situação problema, os alunos estarão prontos para participarem das seções de institucionalização a respeito da simetria axial.

SIMETRIA CENTRAL - *fase 3*

Para a SIMETRIA CENTRAL iniciamos a *fase 3* da Dialética Ferramenta-Objeto de Douady com uma atividade cujo objetivo é usar a simetria central como ferramenta adaptada para resolver uma situação problema.

A descrição desta atividade se apresenta como:



De acordo com o referencial teórico da dialética Ferramenta-Objeto de Douady, a terceira fase de uma seqüência didática deve contemplar o uso do objeto a ser ensinado como ferramenta explícita para resolver a situação problema.

A simetria central se apresenta como ferramenta adaptada para a resolução desta situação. É esperado que os alunos mobilizem os conhecimentos vistos nas atividades anteriores e possam reconhecer no uso da simetria central uma estratégia de resolução desta situação problema.

Ainda nessa atividade poderemos ter alunos que tentem efetivar a construção da figura simétrica em relação ao ponto O pelo processo vivenciado nas atividades anteriores com a localização de pontos correspondentes, sejam centros das circunferências suporte dos arcos, ou sejam três pontos que determinem os arcos desejados.

Espera-se que os alunos usem a simetria central como ferramenta adaptada, no entanto, é possível que eles possam construir sua solução baseada na construção dos pontos correspondentes.

Neste momento, acreditamos que os alunos estejam preparados para receberem a institucionalização destes novos conceitos: TRANSLAÇÃO, SIMETRIA AXIAL e SIMETRIA CENTRAL.

“A institucionalização contribui para dar status de objeto matemático autônomo aos novos conhecimentos, já que são destinados a funcionar, posteriormente, como antigos”. (Maranhão 2002).

Os alunos encontram-se preparados a receber a institucionalização que será feita pelo aplicador, denominada de *fase 4.*

3.4.3.4 Fase 4: ***Institucionalização - status de objeto***

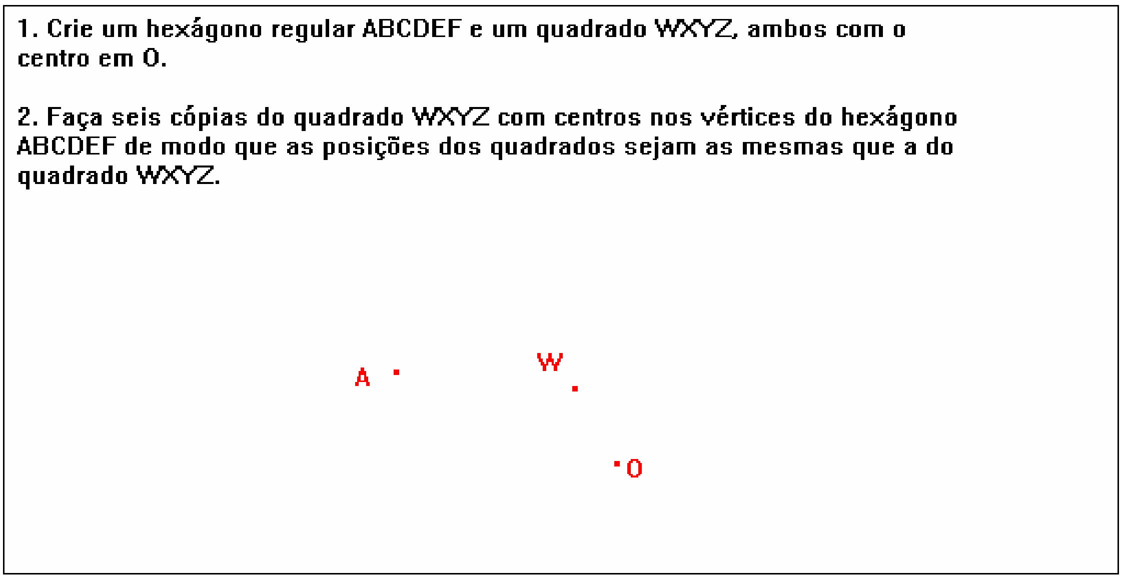
TRANSLAÇÃO - *fase 4*

Respectivamente à parte da translação foram preparadas duas atividades (4a e 4b) que auxiliarão na institucionalização do ente matemático vetor e uma última (4c) da transformação geométrica translação onde abordaremos características que reforçarão aspectos pontuais da transformação. Iniciaremos a apresentação da análise a priori destas atividades.

Atividade 4a –Translação – Exploração de vetores na translação

O objetivo da atividade é exploração de vetores na translação. Após construírem um hexágono regular e um quadrado posicionado de forma estratégica, por meio da translação os alunos efetuarão cópias deste quadrado com centros nos vértices do hexágono.

A atividade foi proposta com a seguinte descrição:


1. Crie um hexágono regular ABCDEF e um quadrado WXYZ, ambos com o centro em O.

2. Faça seis cópias do quadrado WXYZ com centros nos vértices do hexágono ABCDEF de modo que as posições dos quadrados sejam as mesmas que a do quadrado WXYZ.

Na *fase 4* da dialética Ferramenta-Objeto de Douady, o professor indica os saberes que constituem os novos conhecimentos. Nesta fase, os objetos são conceitualizados e descontextualizados da situação inicial proposta.

Há a necessidade da formação do conceito do vetor como elemento chave para se atingir a criação do conceito de translação. É claro que os alunos já realizaram as atividades relativas ao vetor, de suas modificações quando implementadas mudanças de direções. Por meio destas atividades, espera-se que os alunos sejam capazes de reconhecer os vetores e suas principais características.

Como competência, espera-se que os alunos saibam construir polígonos a partir de um ponto dado como centro e de um de seus vértices. Nesta atividade, os alunos terão liberdade na construção dos vetores que servirão para efetuar as translações e criar as cópias dos quadrados solicitados cujos centros estarão nos vértices do hexágono.

Espera-se que alguns alunos construam estes vetores partindo do ponto central O do hexágono apontando para os seus vértices. Isto implicaria na construção de seis vetores.

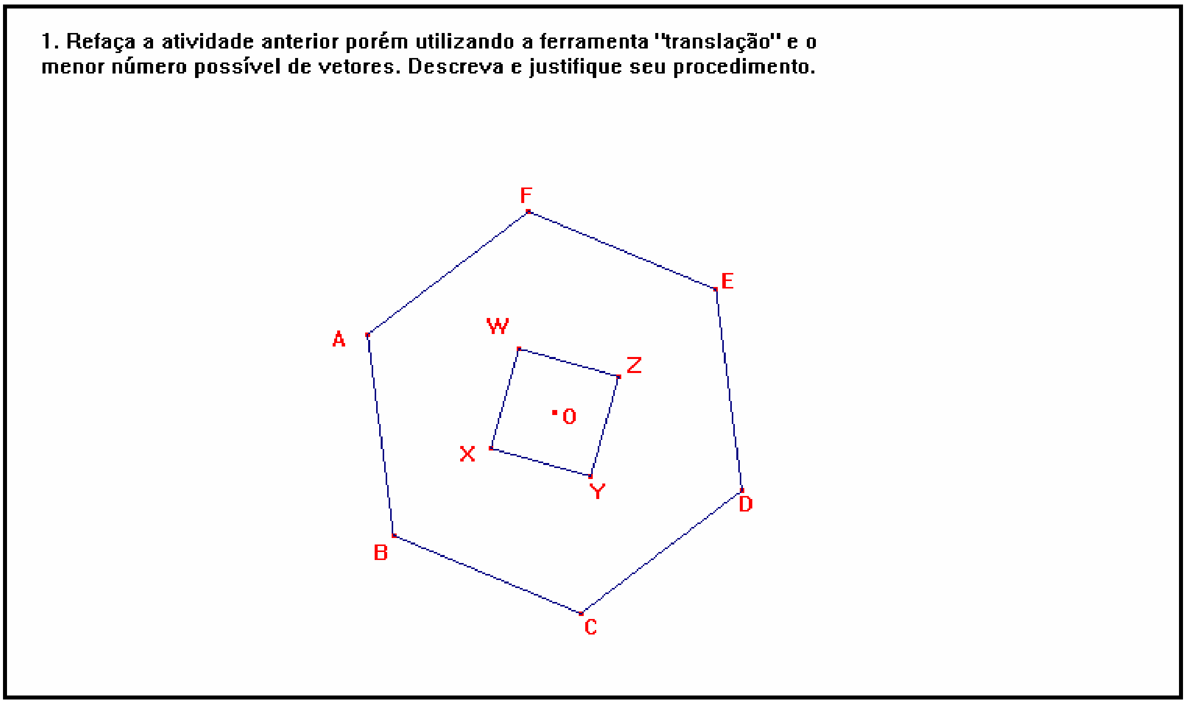
Os alunos poderão ainda construir um vetor $\overrightarrow{OA}$ e transladar o quadrado para este centro A. Posteriormente, construirão cada outro vetor que será associado a translação dos quadrados para cada vértice do hexágono. Esta estratégia assegurará as cópias e formarão sete vetores.

Não é esperada dificuldade nesta atividade. Previamente os alunos trabalharam a construção de polígonos regulares e recém finalizaram o uso da translação como cópia de figura em uma dada direção e sentido determinados por um vetor. Para esta atividade, estaremos admitindo o conceito de quadrado sob a perspectiva de ser um polígono regular de quatro lados congruentes inscrito num círculo de centro O. Atividades de construção de polígonos regulares foram realizadas na fase de familiarização do Cabri-Géomètre-II.

Atividade 4b –Translação – Exploração do uso do vetor na transformação geométrica Translação

O objetivo desta atividade é refazer a atividade anterior, porém utilizando o menor número possível de vetores.

Ela foi proposta com a seguinte descrição:



Ao abrir esta atividade, os alunos encontrarão o quadrado e o hexágono já construídos. Eles deverão apenas construir os vetores para efetivar as translações.

O número mínimo esperado para esta atividade é de 3 vetores com ângulo de 120º entre eles a partir de uma referência do centro do hexágono a qualquer um dos seus vértices. O módulo do vetor deverá ser de comprimento metade de uma diagonal do hexágono.

Alguns alunos poderão repetir a estratégia utilizada na atividade anterior tentando encontrar a regularidade para reduzir o número de vetores necessários. Possivelmente alguns poderão começar uma translação, por exemplo, $\overrightarrow{OA}$ e, posteriormente, $\overrightarrow{AF}$. Verificando que não possui nenhum quadrado na região inferior, então poderiam criar um novo vetor $\overrightarrow{OC}$. Neste ponto existiriam 3 quadrados e 3 vetores construídos. Com um estudo mais apurado poderão perceber que a direção CD é a mesma da direção dada pelo vetor AF. Assim como CB é a mesma que AO, OE é a mesma que AF, completando as translações com o uso de 3 vetores.

Outros poderão construir os vetores sobre os lados e tentarem fazer as translações com as direções mais convenientes, buscando sempre o menor número de soluções.

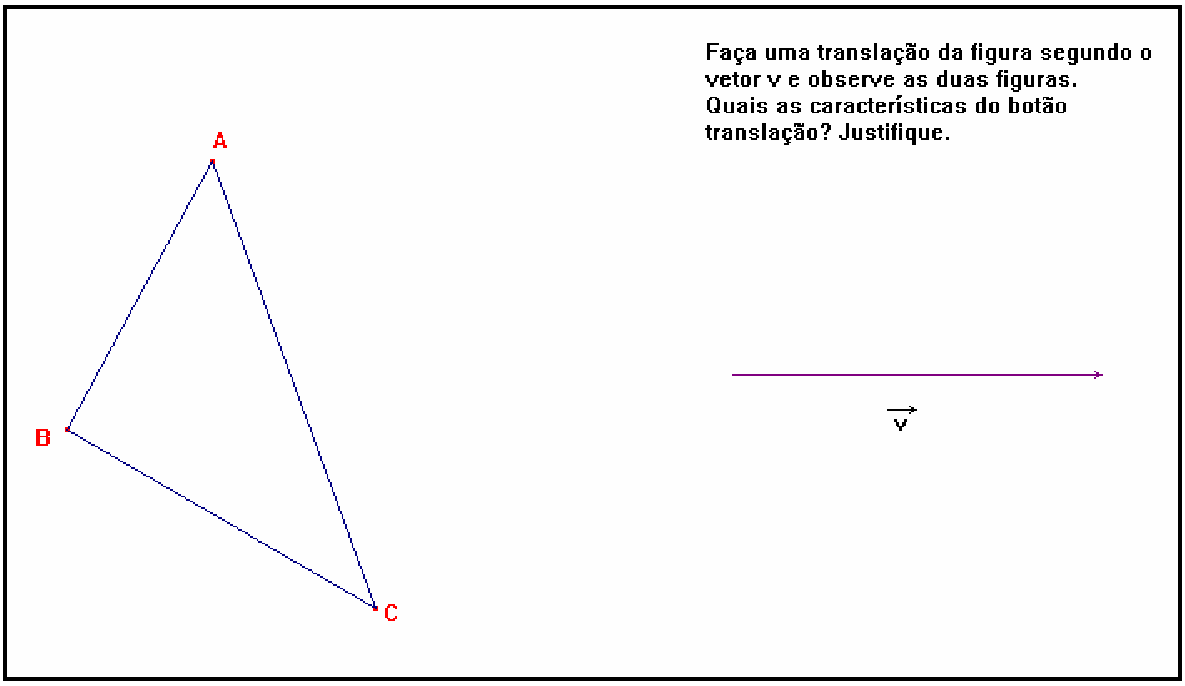
No início poderá parecer impossível reduzir o número de vetores para fazer o que se pede a atividade. Acreditamos que ao se utilizar o mesmo vetor duas vezes, os alunos perceberão a possibilidade do uso do vetor sem estar necessariamente associado diretamente à figura que se deseja transladar.

Poderemos ter também alunos que não encontrem o menor número de vetores para esta atividade.

Atividade 4c –Translação – Institucionalização da transformação geométrica

O objetivo desta atividade é institucionalizar a translação. Fazer com que os alunos reconheçam a translação como uma transformação geométrica e suas principais características associadas.

Esta atividade apresenta como sua descrição:



Nesta atividade da *fase 4*, o aluno toma conhecimento da translação como uma transformação, algo que modifica a posição de uma figura, preservando o paralelismo entre os segmentos associados a pontos correspondentes e a invariância das distâncias entre pontos correspondentes tomadas em um mesmo sentido.

Os alunos deverão saber usar todos os recursos básicos de construção de geometria do Cabri-II para poderem acompanhar e identificar estas características. Caberá ao professor escolher a profundidade de sua abordagem neste assunto.

“Na institucionalização o professor expõe o que é novo...(...). Ele “faz o curso” apresentando de maneira organizada, estruturada, as definições, teoremas, demonstrações indicando o que é essencial e o que é secundário.” (DOUADY,1984)

Os alunos poderão unir os pontos correspondentes entre os triângulos, medir os segmentos e observar as condições de paralelismos entre os segmentos, semelhante ao que foi realizado nas atividades anteriores.

Alguns poderão manipular o vetor que está sendo dado junto com a atividade de forma a posicionar o triângulo “cópia” sobre o triângulo motivo. Sendo assim, fica possível a conjectura da congruência entre as figuras iniciais e finais.

Quando ocorrer a modificação do triângulo “motivo” é possível efetuar as medidas dos seus segmentos e verificar o que ocorre com os segmentos do outro. Da mesma forma todos os ângulos e todos pontos que possam ser julgados importantes (pontos notáveis, alturas, medianas, incentro, bissetrizes internas, etc.).

Alguns alunos poderão apresentar algumas dificuldades. A transformação geométrica está baseada em conceitos dinâmicos, a idéia do movimento é muito forte. Poderemos ter algumas resistências entre os alunos em apropriar este conceito. O uso de uma ferramenta de software dinâmico é muito rico em poder propiciar situações de validação que permite rapidamente que os alunos assimilem novas situações, ainda que a geometria do ponto de vista funcional seja uma novidade para eles nesta fase escolar.

Novamente poderemos discutir a Dialética Global-Pontual apontada por Laborde (2001). Nesta atividade o professor fará uso da ferramenta “rastro ON/OFF” disponível do Cabri-II para poder abordar com os alunos os aspectos funcionais da transformação, ou seja, será possível que os alunos observem, por meio da demonstração feita pelo professor, a imagem da translação se formando ponto a ponto.

Como foi anunciado anteriormente, o Cabri-II não apresenta ao aluno como é realizada a construção da imagem da translação. O uso do botão “rastro” poderá favorecer o conceito de que a transformação é uma aplicação do plano em si mesmo.

SIMETRIA AXIAL - *fase 4*

Desenvolvemos uma única atividade que servirá como *fase 4* para a SIMETRIA AXIAL. O objetivo desta atividade é institucionalizar o conceito de simetria axial.

Segue a descrição desta atividade:

> Crie uma reta e um ponto A fora dela.
> Construir o simétrico de A em relação a esta reta.
> Movimente o ponto A e observe o ponto A'.
> Utilize a ferramenta traço: clique no botão "rasto" no menu de ferramenta e posteriormente nos pontos A e A'.
> Movimente novamente o ponto A.
> O que você observa?

Os alunos deverão saber utilizar o botão de "simetria axial" para construírem os simétricos de pontos, segmentos de reta e de um triângulo, todos em relação ao eixo de simetria representado na atividade.

Na localização do ponto simétrico A' poderemos ter alunos que utilizarão a transformação simetria axial normalmente ou ainda poderemos ter alunos que traçarão perpendiculares em relação ao eixo de simetria passando pelo ponto A, para depois verificarem as eqüidistâncias em relação ao eixo e marcarem respectivamente nesta reta perpendicular o ponto A'.

Quando os alunos ativarem o botão "rastro" nos pontos A e A' terão a possibilidade de visualizar movimentos simétricos em relação ao eixo de simetria formado pela reta que foi construída. Espera-se que os alunos possam vivenciar as características enfatizadas quanto à dialética pontual-global.

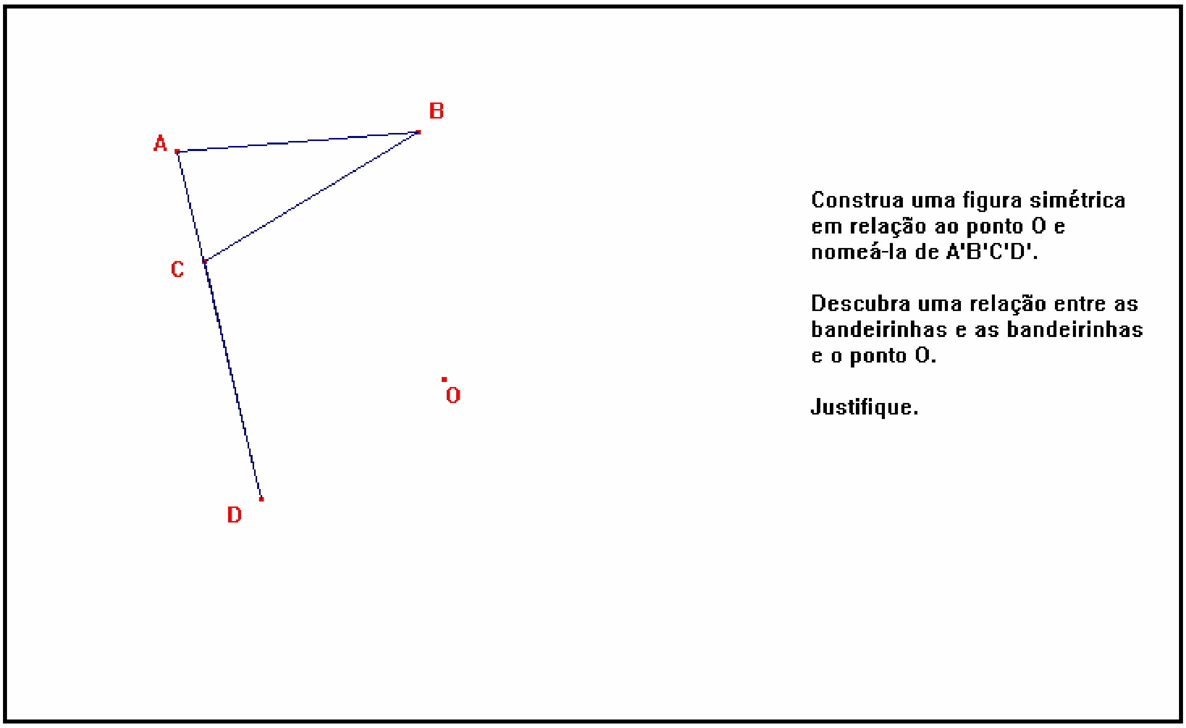
As idéias da transformação simetria axial poderão não ser inéditas para os alunos, pois eles podem imaginar espelhos para obter os resultados de uma reflexão. No entanto, a determinação do eixo de simetria quando são apresentados às figuras e os seus simétricos, aí sim, traz novos elementos. Poderemos verificar algumas dificuldades quanto ao entendimento de que este eixo de simetria nada mais é do que a mediatriz dos pontos correspondentes simétricos.

SIMETRIA CENTRAL - *fase 4*

Da mesma forma, para a SIMETRIA CENTRAL, desenvolvemos uma única atividade que servirá como *fase 4*.

O objetivo desta atividade é institucionalizar o conceito de simetria central.

Esta atividade é descrita como:



Na *fase 4* da dialética Ferramenta-Objeto de Douady, o professor indica os saberes que constituem os novos conhecimentos. Nesta fase, os objetos são conceitualizados e descontextualizados da situação inicial proposta.

Como competência, espera-se que os alunos saibam construir uma figura simétrica em relação ao ponto O dado por meio do uso da simetria central. Espera-se também que os alunos saibam utilizar as ferramentas básicas do Cabri-II como construção de segmentos, medidas de comprimento entre dois pontos ou de segmentos, medida de área de polígonos. Espera-se também que os alunos saibam reconhecer casos de congruência entre triângulos.

Nesta atividade da *fase 4*, o aluno toma conhecimento da simetria central como uma transformação, algo que modifica a posição de uma figura.

É esperado que os alunos construam a bandeirinha simétrica em relação ao ponto O por meio do uso do botão da simetria central. De fato, a bandeirinha foi construída como um polígono, portanto, a nova bandeirinha também será um polígono.

Para responderem a relação entre as bandeirinhas, poderemos ter alunos que utilizem o botão de medida de área para verificarem as áreas de cada bandeirinhas. A informação de que são iguais será os primeiros indícios que levarão a crer que os polígonos sejam congruentes.

Outra estratégia para realizar este estudo será novamente a de unir pontos correspondentes. Ao realizar esta ação, os alunos formarão dois triângulos particulares: CBO e OB'C'. Os ângulos BOC e C'OB' são opostos pelo vértice, logo são congruentes. O lado do triângulo BO é congruente a B'O pois são segmentos simétricos em relação ao ponto O, e portanto O é ponto médio do segmento BB'. Analogamente ao estudar o lado CO, teremos C'O como congruente. Portanto, os triângulos BOC e B'OC' são congruentes.

Outros alunos poderiam criar segmentos sobre os polígonos de forma a medi-los e compararam seus resultados.

Poderemos também ter alunos que verificarão que o sentido de nomeação dos pontos da figura da primeira bandeirinha não é diverso do sentido da nomeação dos pontos da bandeirinha simétrica em relação ao ponto O. De fato, sabe-se que esta transformação simetria central não altera o sentido dos pontos das figuras como ocorreu com a simetria axial.

Estas estratégias poderão fortalecer o conceito das isometrias entre as figuras. De fato, espera-se que os alunos observem que em relação ao ponto O, a bandeirinha apenas descreveu um giro de 180º, ou meia volta, "sem sair do plano".

As justificativas de formalização de congruência entre as bandeirinhas poderão ser dificuldades que os alunos poderão apresentar.

Neste momento da nossa seqüência, o aplicador fará a institucionalização da simetria central e fazendo uso dos recursos do Cabri-II de forma a poder explorar as questões já abordadas da Dialética Global-Pontual.

"Cabe ao professor decidir o momento e o modo de passagem para esta fase" (Maranhão 2002)

Nesta fase de nossa seqüência, após os alunos justificarem suas respostas, o professor fará uso da ferramenta Lugar Geométrico do Cabri-II. Será criado um ponto X sobre a bandeirinha ABCD. Posteriormente, será localizado o $X' = \sigma_O(X)$ (simétrico de X em relação ao ponto O). Com a ferramenta Lugar Geométrico será possível apresentar aos alunos os pontos imagens X' quando X estiver se movendo sobre a bandeirinha ABCD. A figura que surgirá será uma nova bandeirinha A'B'C'D'.

O uso de uma ferramenta de software dinâmico é muito rico em poder propiciar situações de validação que permitem rapidamente que os alunos assimilem novas situações, ainda que a geometria, do ponto de vista funcional, seja uma novidade para eles nesta fase escolar.

Novamente estaremos discutindo a dialética apontada por Laborde (2001) sobre o pontual e global onde serão vistos os aspectos funcionais da transformação, ou seja, será possível que os alunos observem a demonstração feita pelo professor da imagem da simetria central aplicada ponto a ponto da bandeirinha apresentada.

Como foi anunciado anteriormente o Cabri-II não apresenta ao aluno como é realizado a construção da imagem da simetria central. O uso desta abordagem poderá favorecer o conceito de que a transformação é uma aplicação do plano em si mesmo.

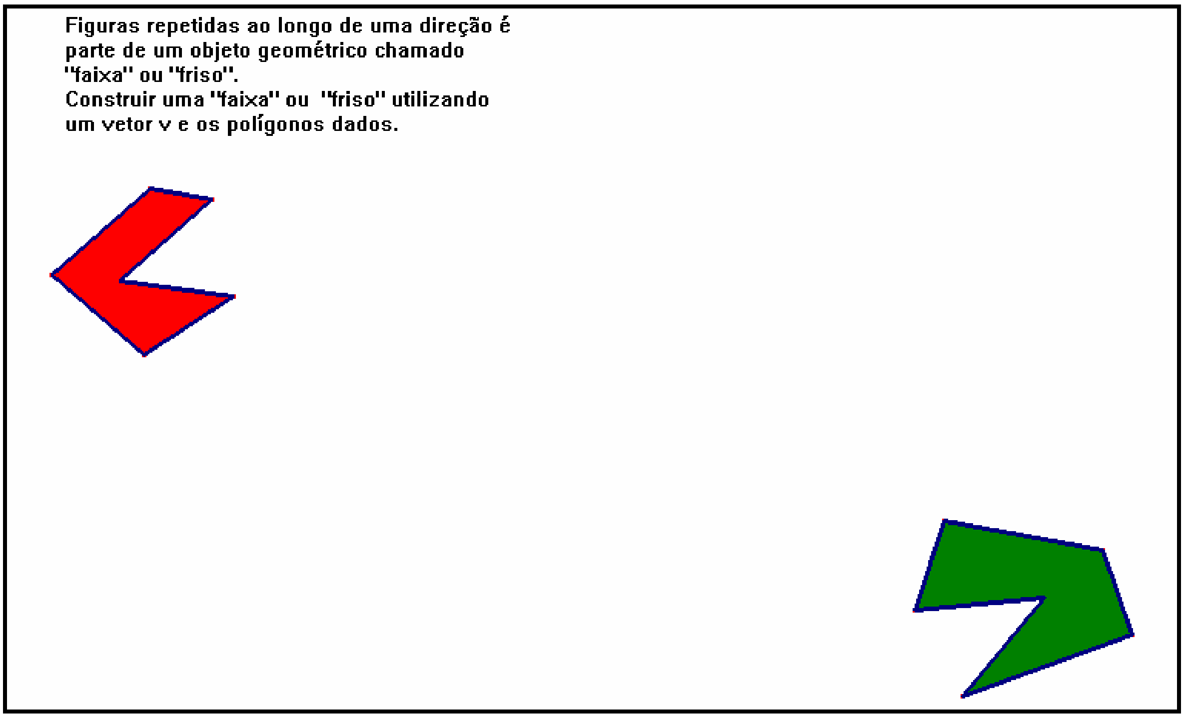
Uma vez que os conceitos de TRANSLAÇÃO, SIMETRIA AXIAL E SIMETRIA CENTRAL foram institucionalizados, ou seja, eles foram descontextualizados da situação inicial e ampliado seus significados para os alunos, a dialética de Douady recomenda uma nova fase, chamada de *fase 5* onde os alunos *têm ainda a necessidade de colocarem à prova, eventualmente em testes renovados, sozinhos, os conhecimentos que eles acreditam ter adquirido e fazerem um balanço do que eles sabem.* Sendo assim, os alunos se utilizam destes novos conceitos como ferramenta para uma nova situação proposta a saber:

3.4.3.5 Fase 5: ***Familiarização - reinvestimento***

TRANSLAÇÃO - *fase 5*

O objetivo desta atividade é usar a translação para introduzir a palavra faixa no contexto escolar.

Esta atividade foi proposta da seguinte maneira:



Reconhecer e saber usar a translação como ferramenta em uma das soluções desta situação problema é uma das competências esperadas para resolver esta atividade.

Espera-se que os alunos utilizem a translação para efetivar a cópia deste polígono. Como nas demais atividades já abordadas anteriormente, este polígono possui os pontos fixos, ou seja, fixados para uma única localização no desenho pelo Cabri-II. Isto para não permitir que a manipulação pelos alunos altere as características dos mesmos.

O termo faixa é usado pela primeira vez. Esta atividade introduz ao aluno a primeira idéia do objeto matemático "faixa" ou "friso" que já definimos em nossa introdução teórica e estará sendo utilizado gradativamente pelos alunos nas próximas atividades. Isto servirá para formar o conceito deste novo objeto por parte dos alunos.

Uma vez construído um vetor, os alunos poderão utilizar a translação para reproduzir os polígonos ao longo de uma certa direção dada por este vetor.

Os alunos têm liberdade de escolha de estratégias de solução, mas uma vez concebidas estas atividades com todas as fases da Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady, leva-nos a crer que o aluno poderá optar pela translação para dar conta desta situação problema.

Para completar a dialética de Douady, deveríamos propor uma nova atividade para os alunos em que fariam um reinvestimento de seus conhecimentos em um novo problema, porém, de ordem mais complexa. Entendemos que existe uma complexidade bastante acentuada na elaboração de faixas neste momento da seqüência.

"O professor pede aos alunos para resolverem exercícios variados que necessitem noções recentemente institucionalizadas. No entretempo, os alunos desenvolvem os hábitos e habilidades, eles integram o saber social confrontando-o com seu saber particular. Estes exercícios só utilizam o conhecido. Mas os alunos os abordam com concepções que evoluíram e que lhes permite encarar um campo maior de problemas.

Resta colocar à prova situações mais complexas em que os alunos poderão testar até mesmo desenvolver seu domínio das novas aquisições." (DOUADY, 1984)

Além disso, efetuar uma "faixa", ou seja, fazer translações a partir de um mesmo vetor nestes polígonos ao longo de uma mesma direção repetidas vezes será muito difícil, particularmente para o polígono que se encontra no canto inferior da tela.

Os alunos poderão fazer a translação do polígono pelo mesmo vetor com o uso do vetor indicado. No entanto, esta estratégia não é suficiente para resolver a questão, pois o polígono está representado no final da tela e a translação deverá ser efetuada no outro sentido.

A situação problema se resume na localização de um outro vetor $\vec{v}$, de mesmo comprimento e direção, porém de sentido oposto.

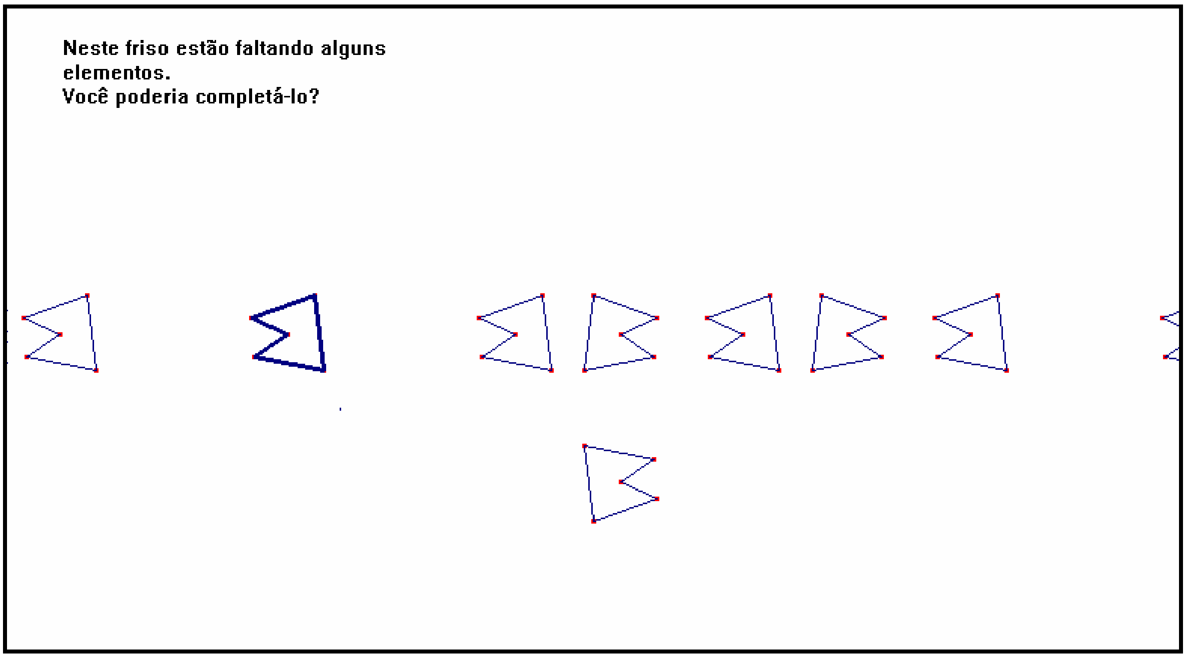
Espera-se que alguns alunos possam tentar reproduzir outro vetor cuja direção seja paralela ao vetor original, comprimento congruente e sentido oposto para ser utilizado. O aluno poderá estudar o vetor construído na tela e verificar todas as suas características e reproduzir outro convenientemente.

É possível que alguns outros alunos construam outro vetor diretamente sobre o inicialmente feito bastando apenas que invertam o sentido da sua construção. Traduzindo de forma matemática, os alunos estariam construindo o vetor $-\vec{v}$.

Pode-se também esperar que alguns alunos possam reproduzir este vetor utilizando-se da transferência de medidas em uma reta paralela e construir um novo vetor para atender a solicitação do sentido oposto ao inicial.

SIMETRIA AXIAL - ***fase 5***

O objetivo desta atividade é utilizar a simetria axial como ferramenta. Completaremos os elementos de um friso onde está presente translação e duas simetrias axial: um eixo paralelo e outro eixo perpendicular à direção do vetor da translação.



Espera-se que os alunos tenham conhecimento da translação, e que nesta atividade reconheçam a simetria axial com eixo paralelo e outro eixo perpendicular à direção do vetor da translação.

Os alunos deverão saber construir estes eixos de simetria das figuras simétricas para poder utilizá-lo para completar os elementos desta faixa.

Espera-se que alguns alunos utilizem a translação para poderem preencher a faixa com os elementos correspondentes. Para isto é necessário determinar um vetor que servirá no uso da translação. Por se tratar de polígonos, é possível reconhecer facilmente pontos correspondentes de forma a poder construir um vetor e se utilizar dele para efetuar as translações.

No entanto, para completar a faixa na parte inferior, necessariamente os alunos deverão utilizar uma simetria axial em relação a um eixo não visível. Primeiramente os alunos deverão encontrar este eixo, reconhecê-lo como a mediatriz dos pontos simétricos correspondentes. Após representá-lo, poderão construir elementos simétricos à parte superior, ou ainda, uma vez representado um desenho formado de um par simétrico em relação a um eixo vertical, utilizando-se do vetor, poderão efetuar as translações para completar a faixa.

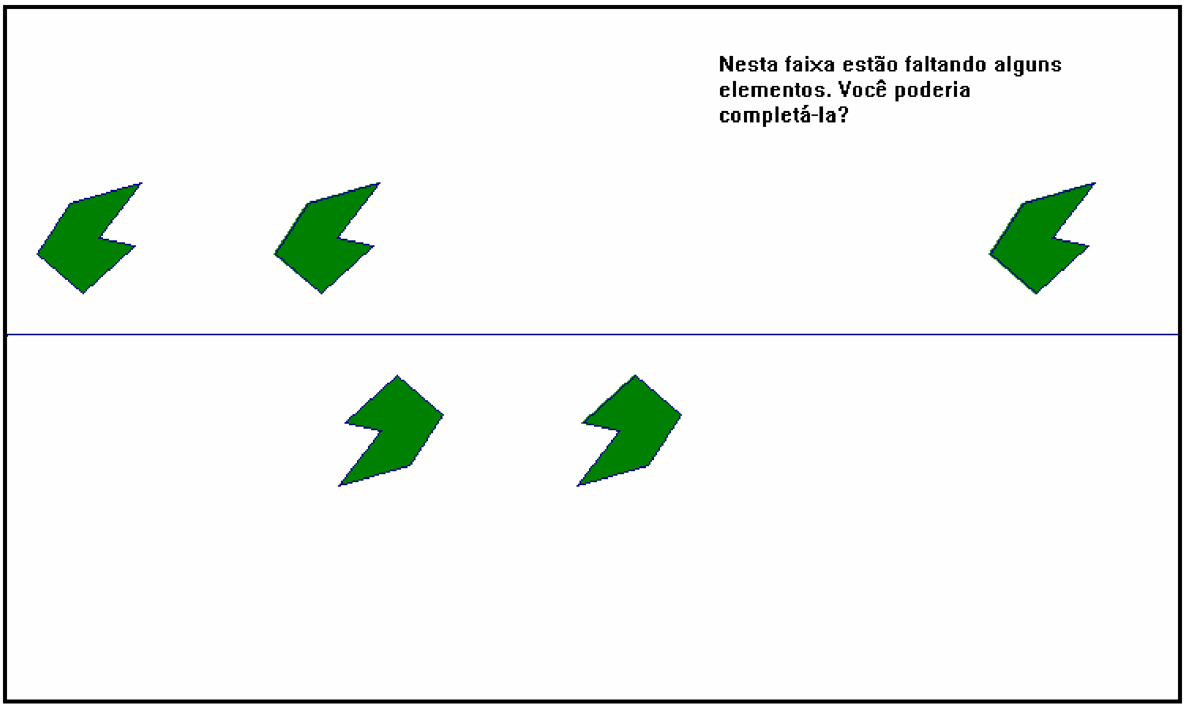
Resumindo, é possível ter alunos que utilizarão a simetria axial apenas para localizar duas figuras simétricas e depois apenas usar as translações para completar as faixas, ou ainda poderemos ter alunos que não se utilizarão das translações e sim apenas das simetrias axiais.

É bastante evidente que o grau de dificuldade desta atividade é muito relativo à apreensão dos conceitos das transformações vistas até este momento. Os alunos que encontrarem uma afinidade maior com uso das translações poderão procurar resolver este problema por meio delas e, então, a maior dificuldade poderá ser no estabelecimento do vetor que gerará os "movimentos" da faixa. Por outro lado, aqueles alunos que aderirem à simetria, a maior dificuldade poderá ser localizar o eixo de simetria paralelo e perpendicular em relação à direção do vetor.

SIMETRIA CENTRAL - ***<u>fase 5</u>***

O objetivo desta atividade é usar a simetria central para resolver uma situação problema proposta de forma a completar a faixa.

A atividade é descrita da seguinte forma:



Espera-se como competência necessária para resolver esta atividade o reconhecimento e o uso da simetria central como ferramenta como uma das soluções desta situação problema.

Esta atividade foi concebida de acordo com a Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady. Estamos utilizando as faixas como elemento motivador onde os alunos deverão aplicador os conhecimentos recém adquiridos na solução do problema apresentado.

Alguns alunos poderão encontrar um vetor $\vec{v}$ que defina uma translação entre dois elementos sucessivos desta faixa. Posteriormente poderão utilizar a translação de vetor $\vec{v}$ no semiplano superior e utilizar da translação do vetor $-\vec{v}$ no semiplano inferior para completar as figuras na faixa.

Outros poderão construir retas unindo os pontos correspondentes de dois polígonos localizados em semiplano opostos. Dessa forma, serão encontrados os pontos de simetria localizados no eixo central. Estes pontos poderão ser devidamente utilizados para formar novas figuras simétricas em relação a eles.

De acordo com a Dialética Global-Pontual apontada por Laborde (2001), os alunos não vêem com naturalidade a transformação geométrica que leva todos os pontos do plano a si mesmo, ou seja, possivelmente poderemos ter alunos que apresentarão dificuldades em visualizar que existem para o mesmo ponto, diversos polígonos simétricos. Ou seja, fixado um polígono no semiplano superior da faixa, é possível associar vários outros polígonos que serão simétricos a ele por diferentes pontos.

3.4.3.6 Fase 6: ***<u>Tornando a tarefa mais complexa</u>***

"Numa última fase, denominada novo problema, propõe-se a reutilização dos novos conhecimentos em tarefas mais complexas, envolvendo outros conceitos, propriedades e procedimentos, iniciando-se assim um novo ciclo." (Maranhão, 2002)

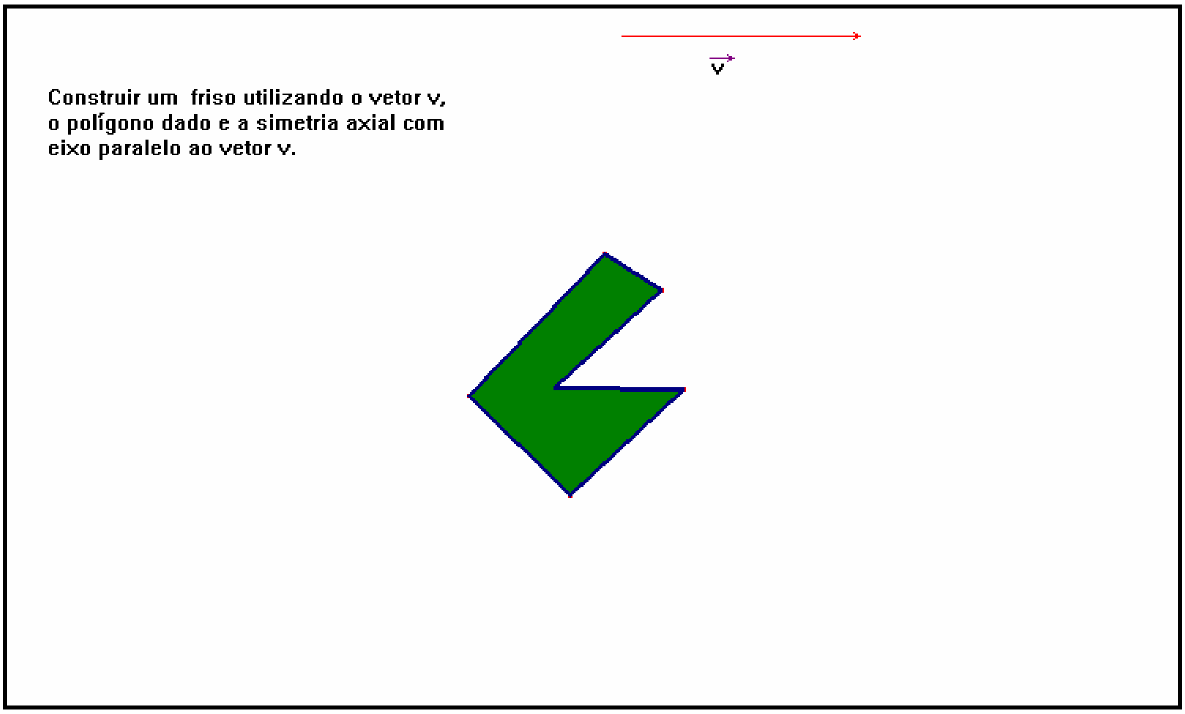
TRANSLAÇÃO - ***<u>fase 6</u>***

Não houve uma atividade específica relativa à fase 6 da Dialética para trabalhar o conceito de translação.

SIMETRIA AXIAL - *<u>fase 6</u>*

O objetivo desta atividade é o de usar a simetria axial em uma situação mais complexa.

Esta atividade é descrita como se segue:



Os alunos deverão saber usar a translação e a simetria axial como ferramenta para poder construir o friso solicitado.

Espera-se que os alunos utilizem o botão "translação" do menu de ferramenta do Cabri-II e por meio do vetor $\vec{v}$ disponível possam efetivar algumas translações do polígono apresentado. Para fazer translações no sentido oposto ao vetor, espera-se que os alunos encontrem primeiro um vetor $-\vec{v}$, ou seja, determinem um vetor de mesmo módulo e direção, porém de sentido oposto, para que seja utilizado na translação à esquerda do polígono.

Para completar a atividade, espera-se que os alunos construam uma reta paralela à direção do vetor para que a utilize como eixo de simetria. Posteriormente, por meio do botão "simetria axial" construam polígonos simétricos aos construídos anteriormente.

Do ponto de vista do friso pronto, é irrelevante qual a operação a ser feita primeiro, ou seja, poderemos ter alunos que iniciarão primeiro uma simetria axial do polígono apresentado dada uma reta paralela a direção do vetor, para posterior tratamento da translação em ambos sentidos; ou poderemos ter alunos que farão primeiro o tratamento da translação para posterior tratamento da simetria axial.

Entendemos que as dificuldades que poderão surgir estarão no tratamento dado a duas operações de transformações para um mesmo objeto, ou seja, a mobilização de ora efetuar uma translação, ora efetuar uma simetria axial.

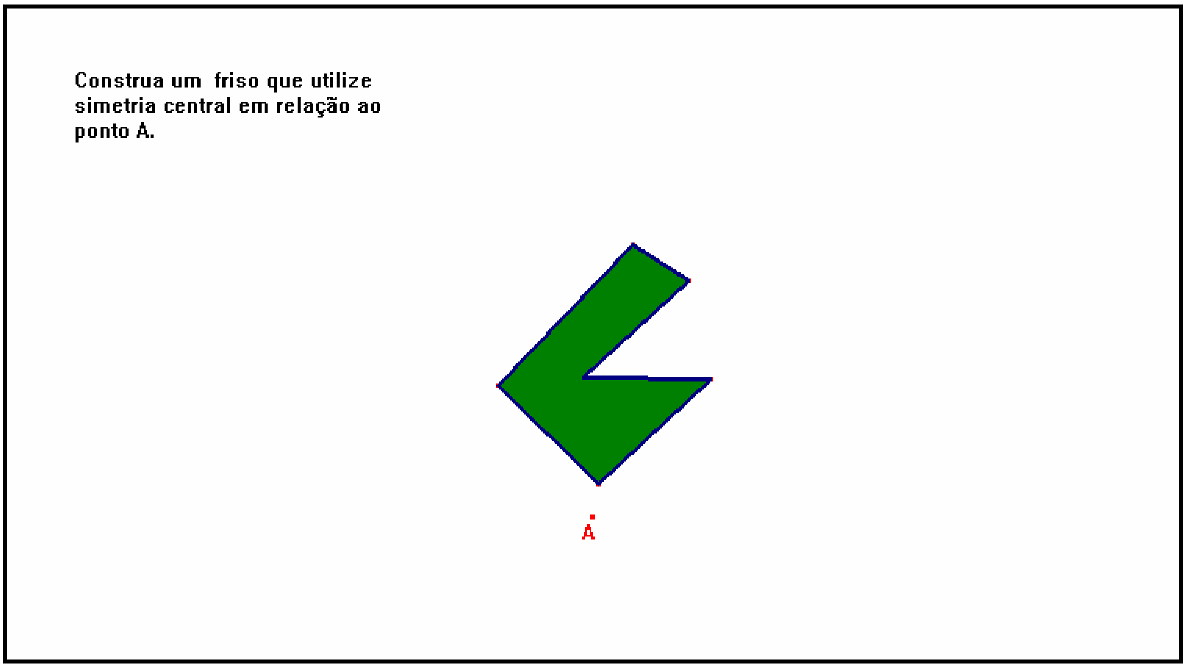
Acreditamos ainda que poderão surgir dúvidas com relação à construção do vetor $-\vec{v}$ necessário para completar o friso em ambas direções, pois o vetor é um conceito recém construído por parte dos alunos.

SIMETRIA CENTRAL - ***fase 6***

Esta atividade descrita por ora marca o início da *fase 6* da Dialética Ferramenta Objeto de Douady, onde os alunos são colocados à prova em situações-problema mais complexas envolvendo os conceitos recém apreendidos utilizados como ferramentas.

O objetivo desta atividade é usar a simetria central em uma situação mais complexa.

Esta atividade é descrita como:



Os alunos deverão saber usar a simetria central como ferramenta para poderem construir o friso solicitado e construirem reta passando por um ponto.

Poderemos ter alunos que farão a primeira simetria do polígono dado em relação ao ponto A também dado. No entanto, a atividade solicita a construção de um friso. E isto somente será iniciado quando o aluno definir uma reta passando por A de forma que possamos ter um eixo onde estarão situados todos os pontos de simetria.

Uma vez que os alunos tenham construído uma reta passando por A, alguns poderão definir uma certa distância e, a partir desta, marcar novos pontos que serão futuros centros de simetrias para esta faixa. Para este transporte de medida poderão lançar mão de construção de circunferências com raio definido pela primeira distância, ou ainda por transferência de medidas.

Alguns alunos poderão criar um vetor $\vec{v}$ qualquer e definir uma primeira translação do polígono dado. A partir da criação desse novo polígono será possível efetuar uma segunda simetria em relação ao ponto A. Para a continuação dessa faixa, será necessária a continuação das translações, sempre a partir do último polígono criado. Nesse momento, os alunos poderão ter duas atitudes frente ao problema: ou definem uma reta passando por A que seja paralela à direção do vetor e localizam pontos sobre esta reta espaçados do comprimento desse vetor para serem utilizados como centros de simetria, ou criam um vetor $-\vec{v}$ para efetuar as translações dos polígonos que estão faltando na faixa.

Possivelmente, caso os alunos tenham criado essa reta paralela ao vetor passando por A, poderão verificar que o uso da simetria axial de nada vai adiantar, pois os polígonos que surgem, caso a simetria axial seja usada, não correspondem ao que foi solicitado pela atividade.

É esperada a dificuldade da construção do friso conforme solicitado. Neste momento da seqüência, todos os alunos vivenciaram as seções relativas às translações, simetria axial e, desta seção, a simetria central. A decisão sobre qual transformação poderá ser usada e qual o suporte para realizá-la poderá ser a dificuldade de muitos.

3.4.4 Atividade do 4º módulo: reinvestimento e aplicação dos conceitos anteriormente vistos

O início do 4º módulo marca um dos pontos mais importantes do nosso trabalho. Estaremos nestas atividades propondo aos alunos a reutilização dos novos conhecimentos recém adquiridos em tarefas mais complexas e agora integradas também numa dimensão artística. Do ponto de vista da Dialética Ferramenta-Objeto, estaremos iniciando a fase 5.

"Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno frente ao conhecimento matemático".(PCN, 1998).

Iniciaremos nossas atividades com uma visita à Pinacoteca Bendito Calixto com uma atividade prática *in loco*. Posteriormente, em um outro momento, em sala de aula, retomaremos os objetivos da atividade do 2º módulo sobre a classificação de faixas e faremos um estudo comparativo das conclusões dos alunos de forma que possamos verificar uma evolução no pensamento geométrico. Em seguida, no laboratório de informática, solicitaremos que os alunos criem algumas faixas utilizando o Cabri-Géomètre-II.

A escola sede dos alunos situa-se próxima a orla da praia, no entanto dista 3 quilômetros da Pinacoteca. Os alunos e o pesquisador deverão percorrer este caminho à pé.

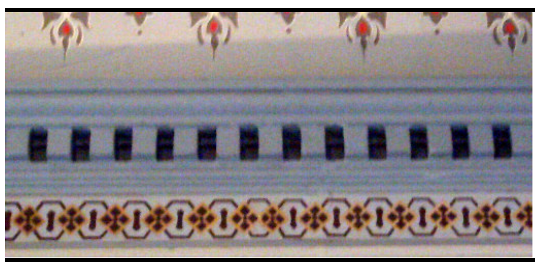
3.4.4.1 Atividade: Visita a "Pinacoteca Benedicto Calixto"

O objetivo desta atividade é de visitar a Pinacoteca Benedicto Calixto e reconhecer os frisos na pintura interna do casarão. Posteriormente, de posse de algumas fotos do local, nos jardins da casa, estudar estes frisos com o objetivo de verificar quais transformações geométricas estão presentes.

A atividade foi proposta com o seguinte enunciado e faixas:

Enumere as transformações geométricas presentes nas faixas. *Justifique* suas respostas.

Faixa 1

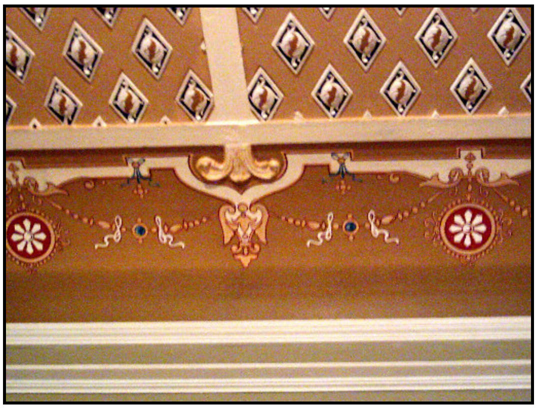


Faixa 2

Faixa 3

Faixa 4

Faixa 5



Faixa 6

O chamado Casarão Branco, sede da Fundação Pinacoteca Benedicto Calixto, construído no início do século XX, é um dos mais significativos conjuntos arquitetônicos da cidade de Santos. Localizado na orla da praia e cercado por edifícios residenciais, abriga nas pinturas internas dos cômodos, trabalhos artísticos magníficos onde a presença das faixas é notória em todos os ambientes.

Neste local, administrado pela Secretaria de Estado da Cultura de São Paulo em parceria com a Prefeitura Municipal de Santos, são promovidas visitas monitoradas.

Nossa visita deverá ser monitorada em aproximadamente 1 hora e trinta minutos quando os alunos poderão contemplar todas as obras deste brilhante artista Benedicto Calixto e demais ornamentos presentes nos cômodos da casa.

Uma vez encerrada a visita, ainda nos jardins do casarão, os alunos receberão fotos impressas de faixas presentes nos cômodos desta casa conforme descrito e serão convidados a estudar as transformações presentes nelas. Uma vez feita esta avaliação, deverão retornar a casa com o intuito de localizarem em qual cômodo se encontra a faixa estudada. Os alunos terão a oportunidade de estudar as faixas que serão vistas nos ambientes do casarão. Está previsto um tempo de 50 minutos para esta fase.

Espera-se que os alunos possam aproveitar esta visita contemplando todas as imagens presentes neste casarão.

Para responder às questões propostas no roteiro com relação às transformações presentes nas faixas, será necessário que os alunos tenham apreendido os conceitos das transformações: translação, simetria axial e simetria central. Esperamos que haja um retorno espontâneo no reconhecimento destas transformações a partir do primeiro contato com as obras de arte.

Os alunos poderão utilizar régua e lápis para assinalar os possíveis elementos presentes característicos das transformações, ou seja, poderão localizar um vetor que representará todas as translações, ou ainda localizar os pontos ou eixos de simetria.

Uma atividade externa de visita envolve um ambiente diverso de uma sala de aula. Poderemos ter alunos que dispersem muito sua atenção dada à diversidade apresentada pelos objetos de arte do local.

No entanto, é esperado que alguns alunos façam este retorno espontâneo do encontro das transformações geométricas presentes nas obras de arte.

Dando continuidade ao trabalho de reconhecimento das faixas, iniciaremos a análise da nossa próxima atividade onde retornaremos com as mesmas faixas apresentadas no 2º módulo, e faremos um estudo acerca das conclusões apresentadas pelos alunos.

3.4.4.2 Atividade: Reclassificação das faixas

O objetivo desta atividade é classificar 15 faixas e apresentar um critério de classificação. Estas faixas foram utilizadas na atividade de classificação aleatória (2º módulo) apresentadas na página 62 e se encontram disponíveis nos ANEXO VII. Esta atividade poderia ser feita em uma sala de aula convencional, porém utilizaremos o laboratório de informática para que os alunos possam, posteriormente, produzir algumas faixas.

Nesta atividade, os alunos serão solicitados novamente a estudarem as mesmas faixas utilizadas no segundo módulo e classificá-las mediante elementos comuns entre as mesmas. Eles receberão os mesmos exemplares de faixas impressas em papel plastificado utilizados.

Receberão também um espelho de mesma dimensão das faixas para poderem investigar seus desenhos e conjecturar possíveis relações entre elas. Para poderem falar e argumentar sobre as faixas, cada dupla utilizará os mesmos números já assinalados nas faixas. Está previsto um tempo de 50 minutos para esta atividade.

Esperamos que os alunos façam as diferenciações entre as faixas pelas transformações geométricas presentes nas faixas.

Os alunos deverão saber e reconhecer as translações, as simetrias axial e central presentes nas faixas. O uso do espelho poderá favorecer a localização dos eixos de simetria.

Possivelmente os alunos verificarão que todas as faixas possuem translações com diferentes vetores. Espera-se que os alunos possam conjecturar e localizar um vetor representante da translação por meio da localização de dois pontos correspondentes.

Esperamos que os alunos apresentem um novo olhar para estas faixas. No reconhecimento das transformações geométricas presentes nas faixas, os alunos deverão efetuar uma nova classificação.

É esperado, dado as composições de transformações presentes nos modelos, que os alunos possam identificar mais de uma transformação por faixa. Por exemplo, para as faixas do tipo $\mathcal{F}_2$ as mesmas possuem translação e simetria central, onde a distância de dois pontos da simetria central define a metade do comprimento do vetor da translação presente nesta faixa.

Ainda como estratégia utilizada, espera-se que os alunos usem os espelhos para a localização dos eixos de simetria e, marcando nas faixas pontos de referência os alunos possam localizar os vetores representantes das translações.

A classificação das faixas em grupos mediante as transformações presentes ao longo de sua extensão ou ainda, a identificação dos elementos geradores que compõe cada uma delas é um dos objetos de estudo e avaliação desta pesquisa.

Esperamos que a dificuldade que poderá surgir seja a avaliação de mais de uma transformação presente nas faixas. Os alunos completaram algumas faixas nas seções anteriores e eles mesmos puderam vivenciar que para uma mesma faixa é possível tanto encontrar elementos pela translação ou uma outra transformação pertinente. Isto é, a composição de transformações geométricas ainda é uma transformação. Pensamos que esta diversidade na opção seja um elemento dificultador nas classificações solicitadas.

Após a conclusão desta classificação proposta, os alunos, utilizando o Cabri-Géomètre-II, produzirão algumas faixas.

3.4.4.3 Atividade: Construção de faixas

Como última fase da Dialética, ***fase 6***, esta atividade permite o uso dos conceitos apreendidos recentemente em tarefas mais complexas. O objetivo desta atividade é incentivar a criatividade e poder registrar a articulação por parte dos alunos, no uso das transformações geométricas presentes no Cabri-Géomètre-II ao produzirem frisos.

Esta atividade será proposta em seguida à reclassificação das faixas recém ocorridas. Ela será enunciada da seguinte forma:

"Vamos agora utilizando o Cabri-Géomètre-II construir algumas faixas".

Foi permitido aos alunos que terminassem suas faixas em casa, com o compromisso de entregarem um arquivo gravado em disquete com suas produções. Esperamos encontrar nestes modelos todas as transformações e suas composições possíveis na formação dos frisos. Sabemos pelas nossas considerações iniciais que existem apenas sete tipos de frisos.

Possivelmente neste trabalho poderemos identificar os diversos tipos de frisos.

3.5. Quadro resumo das atividades

3.5.1. Cronologicamente

Módulo	Ação
Módulo 1	• Familiarização com o Cabri-II.
Módulo 2	• Classificação das faixas. Inicial.
Módulo 3	• Seqüência que introduz o conceito de Translação. • Seqüência que introduz o conceito de Simetria Axial. • Seqüência que introduz o conceito de Simetria Central.
Módulo 4	• Visita à Pinacoteca e reconhecimento das faixas. • Reclassificação das faixas usadas no módulo 2. • Criação de faixas.

3.5.2. De acordo com as fases da Dialética Ferramenta-Objeto

Este resumo permitirá ao leitor acompanhar melhor a forma como as atividades se relacionam. Podemos apresentar todo o nosso trabalho sob o ponto de vista da Dialética Ferramenta-Objeto.

Inicialmente os alunos participaram de atividade de familiarização (módulo 1) antecedendo o início das atividades.

Fase 1	*Antigo*: (módulo 2) proposta a situação-problema de classificação de algumas faixas.
Fase 2	*Pesquisa do novo implícito*: os alunos tentam, mas não conseguem, classificar as faixas de acordo com seus grupos de simetrias.
Fase 3	*Explicitação local*: estudo das características de cada transformação geométrica (Módulo 3): Estudo do conceito de translação: novo ciclo da Dialética: *fase 1* à *fase 6*. Estudo do conceito de simetria axial: novo ciclo da Dialética: *fase 1* à *fase 6*. Estudo do conceito de simetria central: novo ciclo da Dialética: *fase 1* à *fase 6*.
Fase 4	*Institucionalização local*: ao término de cada atividade da *fase 6* de cada um dos conceitos abordados, os frisos foram apresentados e verificadas suas principais características.
Fase 5	*Familiarização - Reinvestimento* (Módulo 4) - re-classificação das faixas.
Fase 6	*Exercícios mais complexos* - Visita à Pinacoteca e criação das faixas.

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI

4.1 Introdução

A análise a posteriori que faremos neste capítulo permitirá ligar os fatos observados às escolhas feitas no capítulo anterior, dando-nos elementos para responder à nossa questão de pesquisa. Lembramos que queremos investigar em que medida o uso dos frisos com Cabri-Géomètre-II contribui para articular e dar significado aos conceitos de translação, reflexão e simetria central.

Na evolução da análise relativa aos conceitos da translação, simetria axial e simetria central, enfocaremos apenas os principais e singulares resultados obtidos pelos alunos.

4.2 Organização da experimentação

A seqüência foi colocada em funcionamento em duas etapas: familiarização com o Cabri-Géomètre-II e experimentação das atividades.

4.2.1. Etapa 1: familiarização com o Cabri-Géomètre II (módulo 1)

Participaram das atividades deste módulo vinte alunos. Foi, então, possível desenvolver diversas atividades de familiarização com o software Cabri-Géomètre II. Os alunos trabalharam em duplas, sendo que cada dupla utilizava um computador. Nestas atividades privilegiamos grande parte das construções geométricas básicas e foram discutidos e apresentados todos os comandos básicos de construção deste programa. As ferramentas de transformações geométricas não foram apresentadas.

Como havíamos planejado, foi desenvolvida uma seqüência de tarefas totalizando 15 horas, ou seja, 3 horas por sessão. Estes encontros ocorreram na última semana do período das férias de julho de 2004, entre 14:00hs e 17:00hs, na sala do laboratório de informática da própria escola.

O objetivo destas atividades foi assegurar que o uso do software Cabri-Géomètre-II por parte dos alunos não se tornasse um obstáculo às próximas atividades. Todos os alunos conheciam o computador como usuário, no entanto, nunca tinham trabalhado com o programa Cabri-Géomètre-II.

4.2.2. Etapa 2: Experimentação das atividades (módulos 2, 3 e 4)

Esta etapa foi realizada da seguinte forma:

a) Módulo 2: classificação aleatória de faixas (sem o uso do Cabri-Géomètre II).
b) Módulo 3: transformações Geométricas (com o uso do Cabri-Géomètre II).
c) Módulo 4: reinvestimento e aplicação dos conceitos anteriormente vistos:
    1) Visita a "Pinacoteca Benedicto Calixto".
    2) Reclassificação das faixas usadas no módulo 2 (sem o uso do Cabri-Géomètre II).
    3) Confecção de faixas (Com o uso do Cabri-Géomètre II).

4.3. Coleta de dados

As atividades da etapa 2 foram elaboradas e apresentadas sob a forma de material impresso (ANEXO I à VI e passaremos a denominá-las de roteiros/questionários dos alunos.

O trabalho da etapa 2 foi desenvolvido em nove sessões de 100 minutos cada (totalizando cerca de 15 horas), distribuídas da seguinte forma:

Módulo	Sessão
2 - Classificação aleatória de faixas	1 x 100 minutos
3a - Transformação Geométrica - Translação	2 x 100 minutos
3b - Transformação Geométrica - Simetria Axial	2 x 100 minutos
3c - Transformação Geométrica - Simetria Central	2 x 100 minutos
4.1 - Reinvestimento: visita à Pinacoteca	1 x 100 minutos
4.2 - Reinvestimento: reclassificação e confecção de faixas	1 x 100 minutos

Os alunos trabalharam em duplas. Nas atividades do módulo 3 nas quais era necessário o uso do Cabri-Géomètre II, havia um computador para cada dupla. Dos vinte alunos que iniciaram a 1ª etapa-familiarização com o Cabri-Géomètre II, apenas 14 alunos participaram da experimentação das atividades. As duplas foram identificadas por D1, D2, D3,...,D7.

Em cada sessão as duplas recebiam seus roteiros contendo a atividade a ser realizada e algumas questões com espaço para serem respondidas.

Os dados para a nossa análise foram colhidos por meio da verificação dos roteiros/questionários preenchidos por cada dupla de alunos participantes da pesquisa. Além disso, elegemos três duplas para serem observadas e suas interações registradas em áudio. Para isto contamos com a colaboração de dois observadores. A função do terceiro observador foi assumida por mim.

Cada observador possuía um roteiro/questionário próprio (ANEXOS I-a à VI-a) onde eram feitos os apontamentos do acompanhamento da evolução das atividades realizadas pela dupla de alunos que estava sendo observada.

Nossa análise do trabalho dos alunos baseia-se em:

- Roteiro/questionário das duplas (ANEXO I à VI);
- Arquivos de figuras das duplas armazenados em disquetes;
- Anotações do roteiro/questionário dos observadores (ANEXO I-a à VI-a);
- Transcrições parciais das fitas cassete contendo os diálogos das duplas observadas.

4.4. Análise a posteriori das atividades

4.4.1. Atividades do 1º módulo - Familiarização com o Cabri-Géomètre II

Como anunciamos nas considerações iniciais, não discutiremos os resultados destas atividades.

4.4.2. Atividade do 2º módulo - Classificação aleatória de faixas

Nesta atividade, foi solicitado aos alunos que estudassem quinze faixas e classificá-las mediante elementos comuns entre as mesmas.

Esta atividade foi planejada para ser aplicada em uma sessão de 100 minutos em sala de aula convencional.

Participaram desta atividade sete duplas. Cada dupla recebeu exemplares de faixas impressas em papel plastificado todas com mesmas dimensões aproximadamente 25 cm de comprimento por 3 cm de largura. Receberam também um espelho de mesma dimensão para poderem investigar seus desenhos e conjecturar possíveis relações entre elas. Para poderem falar e argumentar sobre as faixas, cada dupla numerou suas próprias faixas.

Cada dupla recebeu um roteiro/questionário (ANEXO I) para ser preenchido. A atividade era descrita como:

Você recebeu 15 faixas e um espelho. Faça as associações entre elas de modo que tenham algo em comum. *Justifique* suas respostas.

Os roteiros descritos pelos observadores e a gravação foram utilizados como subsídios dos resultados que ora estão sendo apresentados.

Os alunos começaram a fazer suas conjecturas e rapidamente se deram conta da necessidade de organizar suas idéias e exposições, fazendo-se necessário numerar os exemplares. Cada dupla assim o fez.

Analisando os registros das respostas de cada dupla e nomeando cada uma delas de D1 a D7, pudemos encontrar algumas categorias usadas na classificação de faixas.

Categorias	Duplas
Classificação mediante cores	D2, D3, D4, D6, D7
Uso do espelho	D2, D4, D5, D6
Repetição das figuras utilizadas	D1,D2, D7
Citação da continuidade da faixa	D1,D5

- Classificação mediante cores

A classificação elaborada por meio da diferenciação de cores foi citada por 5 duplas. As duplas D2, D3 apenas citaram a possibilidade da classificação por cores. As duplas D4, D6, D7 apresentaram grupos de faixas onde predominavam determinada cor, seja nos desenhos de fundo, seja nos motivos utilizados nas faixas. Segundo Parzysz, uma atividade conduzida privilegiando aspectos visuais e justificativas baseadas em elementos perceptivos está situada no que ele chama de Geometria Concreta, ou G0.

- Uso do espelho

O espelho foi recebido pelas 7 duplas, no entanto, encontramos registros de seu uso em apenas 4 delas. Os alunos, de posse dos espelhos, posicionaram-no perpendicularmente ao plano da faixa.

E dessa forma a dupla D4 fez considerações ao uso do espelho paralelo e perpendicular à direção da faixa. Quando paralelo a esta direção, fez considerações de sua observação com o espelho posicionado na reta central da faixa e outras considerações quando o espelho estava na borda da faixa. Possivelmente esta dupla tenha observado a invariância nas quatro faixas $\mathcal{F}_2^1$ (reflexão vertical e reflexão horizontal com translações) ao posicionar o espelho sobre o eixo de simetria paralelo à direção da faixa.

Essa mesma dupla D4, ao posicionar o espelho na perpendicular em relação a faixa formando 90º em relação à direção da translação, agruparam as três faixas $\mathcal{F}_1^2$ (reflexão vertical com translações) pela observação da invariância da imagem mediada pelo espelho nesta posição.

No entanto, oito exemplares das faixas do tipo $\mathcal{F}_2$ (rotação de meia volta com translação) não foram corretamente classificados.

D2: "... nas figuras 2 e 3 as imagens refletidas se completam".

D5: "... nas faixas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 ao posicionarmos o espelho no centro (metade) horizontalmente, conseguimos completar a figura sem nenhuma alteração."

D6: "... todas as figuras com exceção da 2, 3, 5 e 15 olhadas verticalmente com o espelho não apresentam modificação do desenho original."

As duplas D2, D5 e D6 utilizaram o espelho num plano perpendicular à faixa. Algumas observações feitas quando paralelo à direção da faixa e outras quando perpendicular à direção da faixa. Todas estas duplas tentaram classificar as faixas agrupando-as desta forma. No entanto, nenhuma dupla conseguiu classificar corretamente todas as faixas de acordo com este critério.

Estes pensamentos poderiam estar associados aos eixos de simetria verticais ou horizontais presentes nas faixas. Como nenhuma dupla utilizou corretamente esta possibilidade de classificação, encontramos indícios de que há um conceito de eixo de simetria ainda a se formar por parte dos alunos. Eles observaram algumas invariâncias ocorridas, isto é, conseguiram agrupar algumas faixas que possuíam a simetria axial ou vertical, mas não souberam verificar as regularidades em <u>todos</u> os casos.

- Repetição das figuras utilizadas

Com relação à categoria destacada sobre repetição das figuras utilizadas, trazemos os registros das duplas D1, D2 e D7:

D1: "As faixas 10, 12, 11, 14, 15 são divididas em partes, mas todas as partes possuem a mesma figura".

D2: "Nas faixas 1 e 4, as imagens se repetem."

D7: "01, 02, 04, 08, 10, 12: pondo o espelho dado perpendicularmente à figura, observa-se que funcionam como seqüências baseadas no que se aparece no espelho".

É possível verificar pelos registros dos alunos que eles se baseiam na percepção de suas observações. Novamente podemos classificar esta atividade sendo desenvolvida no que Parzysz chamou de G0 (Geometria Concreta).

- Citação da continuidade da faixa.

Sabemos que os alunos não possuem o conceito relativo à translação, mas podemos verificar que eles reconhecem esta característica em alguns modelos de faixas.

D1: As faixas nºs 5, 7, 8, 4, 2 e 3 são como uma reta, obtendo a mesma continuidade infinitamente.

D5: Nas faixas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 ao posicionarmos o espelho na borda verticalmente a faixa se prolongará sem nenhuma modificação.

Ainda em nossa análise a priori, julgamos também que talvez alguns alunos pudessem reconhecer nestes modelos de faixas, motivos vistos ou usados em igrejas, obras de arte, ou alguma peça de tapeçaria, cerâmica ou bordados. Pudemos confirmar nossas expectativas pela análise da transcrição da gravação ocorrida com a dupla D2[1]:

C: Sabe o que parece...
D: Fala Carol.

[1] A dupla D2 é composta por duas meninas denominadas C e T. O observador esta denominado pela letra D.

C: Parece, eu acho que vai ser bobagem o que eu vou falar, essa aqui parece coisa de banheiro, isso daqui e isso daqui parece coisa de igreja...
T: É, concordo com você também.
C: Essa parece mais pra, sei lá, fachada de uma casa...
D: Quer dizer que você já viu algo ou isso te chama a atenção?
C: Me chamou atenção agora que eu estava reparando
T: Você estudando ela você começa a ver outra coisa, é o que ela falou mesmo, isso aqui você colocaria na frente, numa varanda, depois ornamentava com outras coisas, é chamativo, dá uma impressão de coisa mais de natureza, mais selvagem...
C: Que ver outra de varanda.
D; Quer dizer, além dos fatos das cores você está dizendo que algumas seriam pra banheiro, outras pra...
C: Banheiro, jardim, igreja, mas não são todas que eu vejo especificamente um lugar, são mais essa, essa, essa, essa e essa
D: Onde mais você viu essa faixas pra que você tenha essa lembrança de banheiro, de cozinha, onde mais você viu?
T: Fora o que ela falou?
D: Não sei, teve alguma idéia nesse sentido ou?
T: Em livros também a gente vê bastante, principalmente essa aqui, da mitologia greco-romana, essa aqui da época medieval...

Encontramos nesta transcrição a explicitação do reconhecimento dos frisos em outros ambientes conhecidos pelos alunos. Isto vai ao encontro de nossas justificativas no início de nosso trabalho: a interdisciplinaridade e contextualidade presentes neste estudo conforme recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Esta atividade permitiu que os alunos mantivessem o primeiro contato com os frisos.

4.4.3. Atividade do 3º módulo - Transformações Geométricas

Conforme já anunciamos nas análises a priori, as atividades deste 3º módulo tratam da formação dos conceitos de translação, simetria axial e simetria central. Do <u>ponto de vista cronológico</u> ele está dividido em três partes. Uma primeira parte dedicada ao tratamento do conceito da translação, uma segunda parte dedicada à simetria axial e uma terceira e última parte para simetria central. Cada uma dessa partes são compostas por diversas atividades que juntas formam um ciclo completo da Dialética Ferramenta-Objeto.

Como cada uma dessas partes possui *fase 1*, *fase 2*, *fase 3*, etc. Escolhemos fazer a apresentação das atividades de translação, simetria axial e simetria central divididas pelas suas respectivas fases da Dialética Ferramenta-Objeto. Esta escolha permitirá uma leitura menos repetitiva do texto.

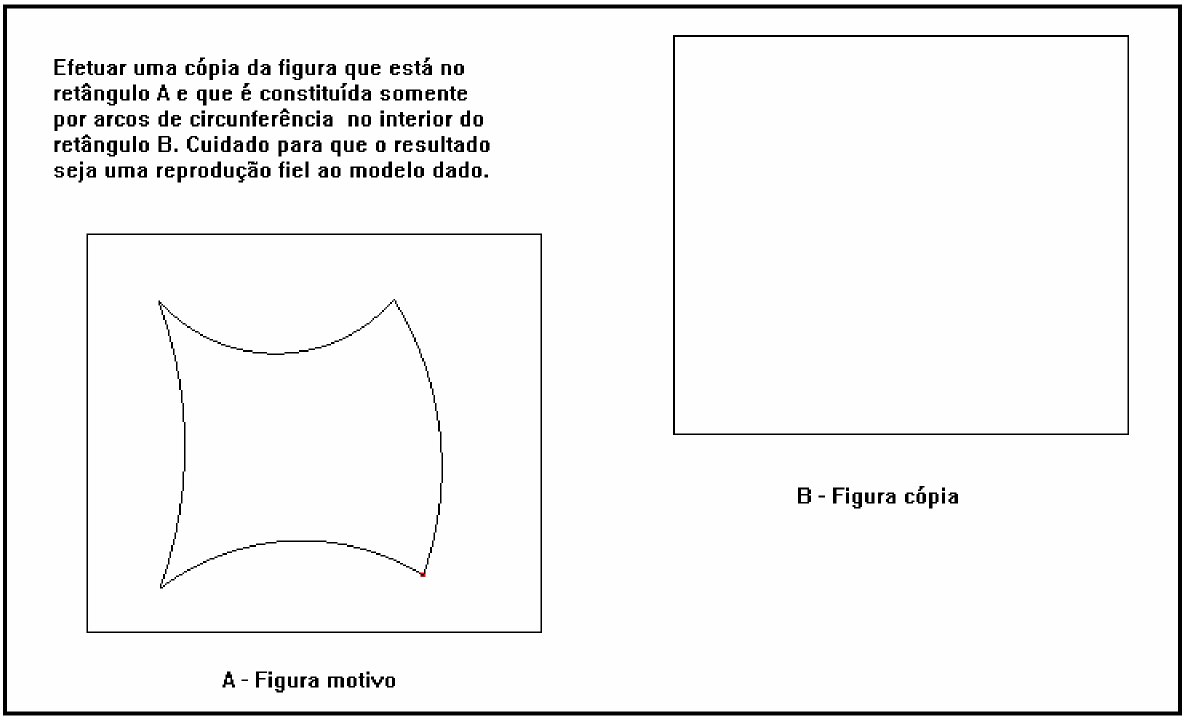
4.4.3.1. FASE 1: Apresentação de uma situação problema

Estas atividades foram concebidas consoante a Dialética Ferramenta Objeto de Régine Douady. Sendo assim, a primeira atividade inicia a *fase 1* em que os conceitos matemáticos são aplicados como ferramentas explícitas para resolver pelo menos parcialmente o problema e o *novo conceito* (translação, simetria axial ou simetria central) a ser introduzido, é a ferramenta adaptada na solução da situação problema.

TRANSLAÇÃO - *fase 1*

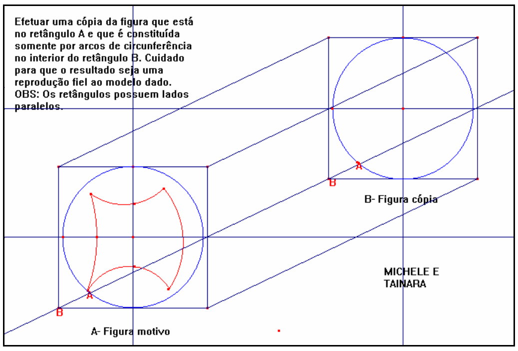
Os alunos não têm conhecimento sobre a translação, mas poderão articular conhecimentos anteriores que possuam na tentativa da solução desta situação problema.

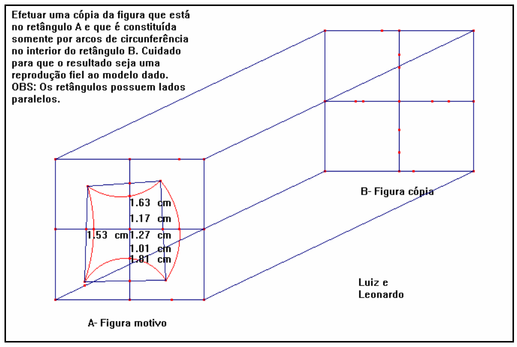
A primeira atividade era proposta com a seguinte descrição:



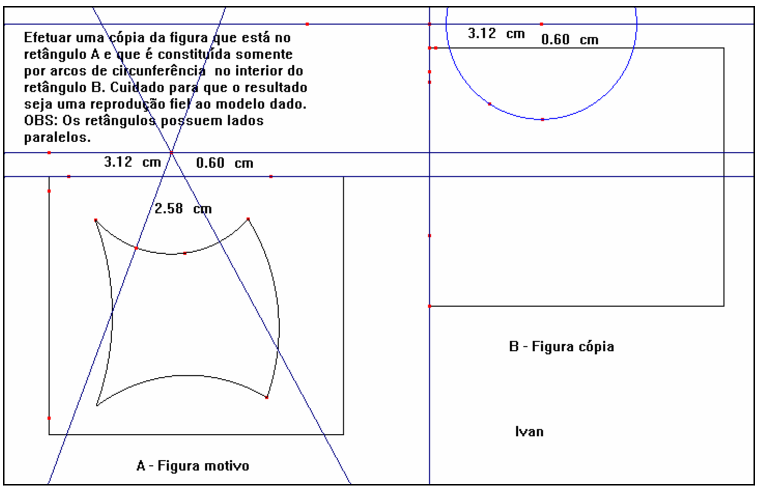
Desta sessão, participaram 10 alunos que seguiram até o final da nossa pesquisa. Quatro alunos que representavam as duplas D6 e D7 ficaram ausentes desta e das próximas atividades, por motivos de ordem pessoal. Estas duplas não estavam sendo observadas, apenas verificamos seus registros. Continuaremos a pesquisa analisando as duplas D1 à D5 com os mesmos 3 observadores.

Foi possível verificar como primeiras estratégias de solução em duas duplas que traçaram mediatrizes em relação aos lados do retângulo A, na tentativa de criar uma referência cartesiana. Estas duas duplas (D1 e D4) continuaram suas estratégias unindo pontos correspondentes entre os retângulos e formaram um prisma.



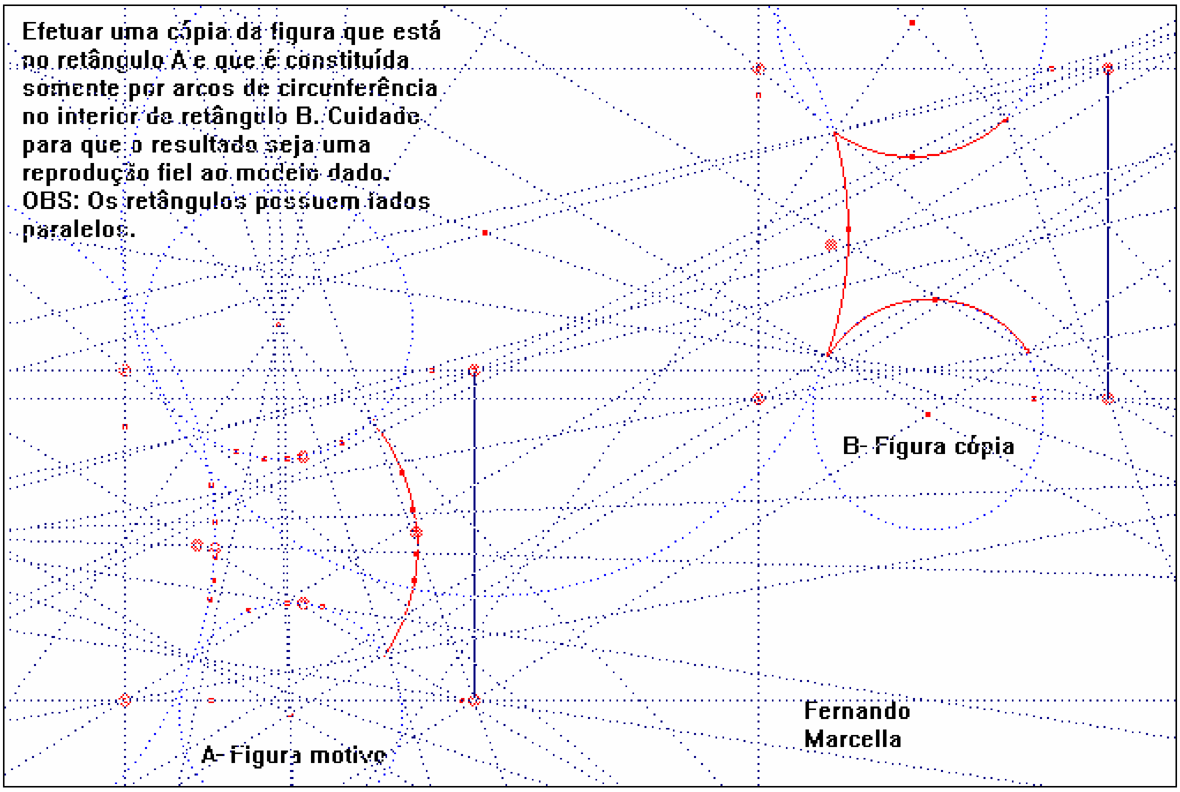


Uma outra dupla (D3) utilizou a referência cartesiana quando encontrou o centro de uma circunferência no retângulo B por meio da transferência de medidas em relação às retas paralelas dos lados do retângulo A.



O uso de referências cartesianas como estratégia para resolução desta atividade, já era esperado por nós, embora soubéssemos que tal método traria dificuldades à dupla, pois ele necessita de um número maior de operações aumentando a margem de incertezas na apuração dos resultados por parte dos alunos.

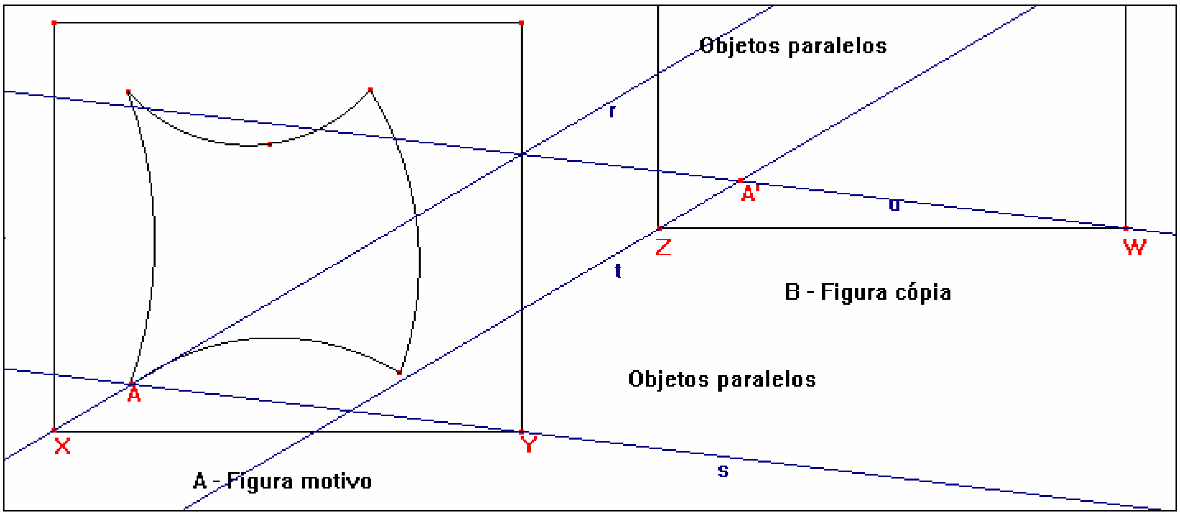
De qualquer forma a dupla D5 articulou com muita desenvoltura uma referência não cartesiana, mas sim oblíqua. Segue uma cópia da tela do Cabri-Géomètre-II com o comando esconder-mostrar ativado, ou seja, mostrando todos as construções utilizadas por estes alunos e não deixadas expostas para não "congestionar" o desenho.



Para facilitar a compreensão das idéias desta dupla, reproduzi uma parte de sua construção. Esta dupla fez os seguintes passos:

a) criou as retas r ($\overleftrightarrow{AX}$) e s ($\overleftrightarrow{AY}$).;

b) usando o botão retas paralelas criou a reta u ($\overleftrightarrow{A'W}$) e t ($\overleftrightarrow{A'Z}$). Na intersecção destas o ponto A' no interior do retângulo B correspondente fiel ao ponto A.



Esta estratégia foi reutilizada pelo menos oito vezes como mostra o desenho dos objetos escondidos na tela do Cabri-Géomètre-II, para a localização dos centros das circunferências de cada arco, e de cada extremidade do desenho não poligonal a ser copiado.

A dupla D2 fundamentou suas ações de construção na característica do Cabri-Géomètre-II em construir e "arrastar" figuras na tela. Isto é, uma vez que encontraram o raio da circunferência que gerou o arco, esta dupla construiu uma circunferência de mesmo raio e "arrastou" para uma posição que fosse conveniente e, por tentativa e erro, tentaram construir a cópia solicitada. A busca das medidas efetuadas no modelo na respectiva cópia norteava sua ações.

Passamos a apresentar as respostas de cada dupla na justificativa que a cópia é fiel ao modelo dado colhidas no roteiro/questionário dos alunos:

D1: "Todas as medidas dos arcos da figura A são idênticas ao da figura B"

D2: "Como o arco montado era o mesmo das circunferências nós supomos que então estava correta"

D3: "Pois transferi todas as medidas exatamente iguais com as técnicas já citadas" (esta dupla se refere aos passos descritos no item anterior no qual mostraram a utilização de uma referência cartesiana na construção de sua atividade).

D4: "As figuras tem a mesma medida".

D5: "Com as medida dos ângulos e dos arcos que são as mesmas".

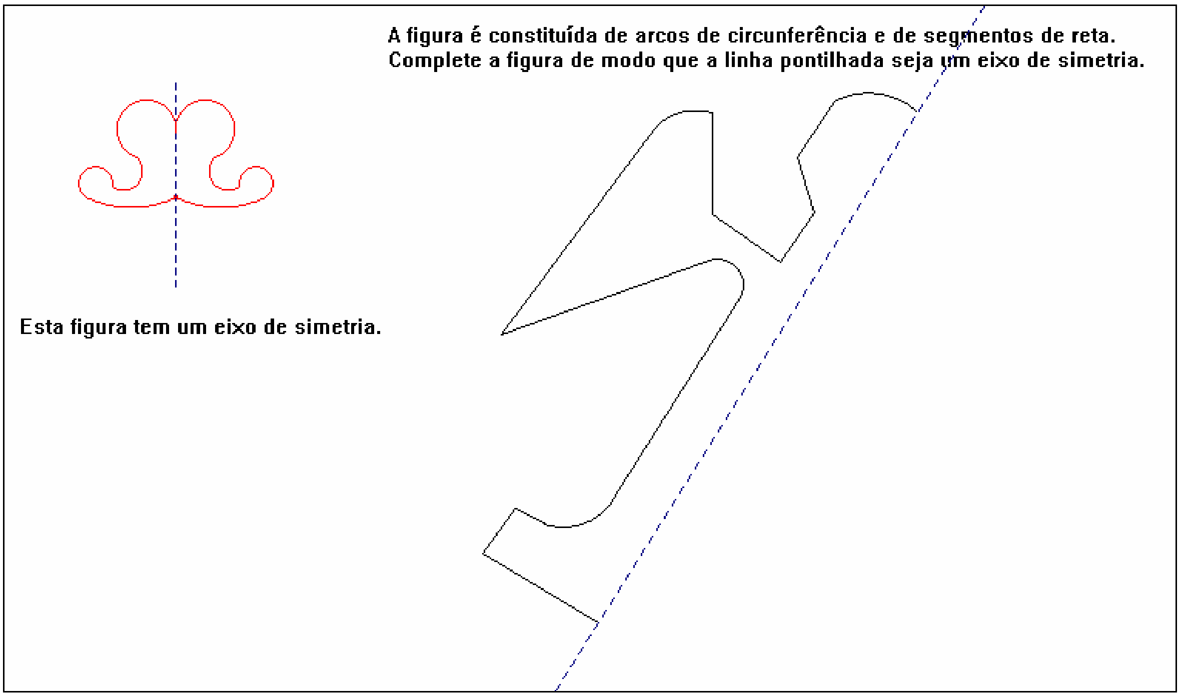
É possível verificar que todas as duplas fazem referência à justificativa da igualdade do valor da medida na sua argumentação de prova de que construiu uma figura "cópia fiel" (de fato está associado aqui o conceito de congruência).

Todas as duplas argumentaram a igualdade das medidas entre as figuras no sentido da validação.

A estratégia de resolução da dupla D5 caminha entre o nível G1 e G2, pois eles utilizaram, ainda que não explicitamente, da propriedade do paralelogramo, ou seja, da congruência entre lados opostos paralelos.

SIMETRIA AXIAL - *fase 1*

Semelhante ao idealizado na atividade da Translação na *fase 1*, os alunos deveriam completar uma figura simétrica em relação ao eixo pontilhado, figura esta constituída de arcos de circunferência e de segmentos de reta.



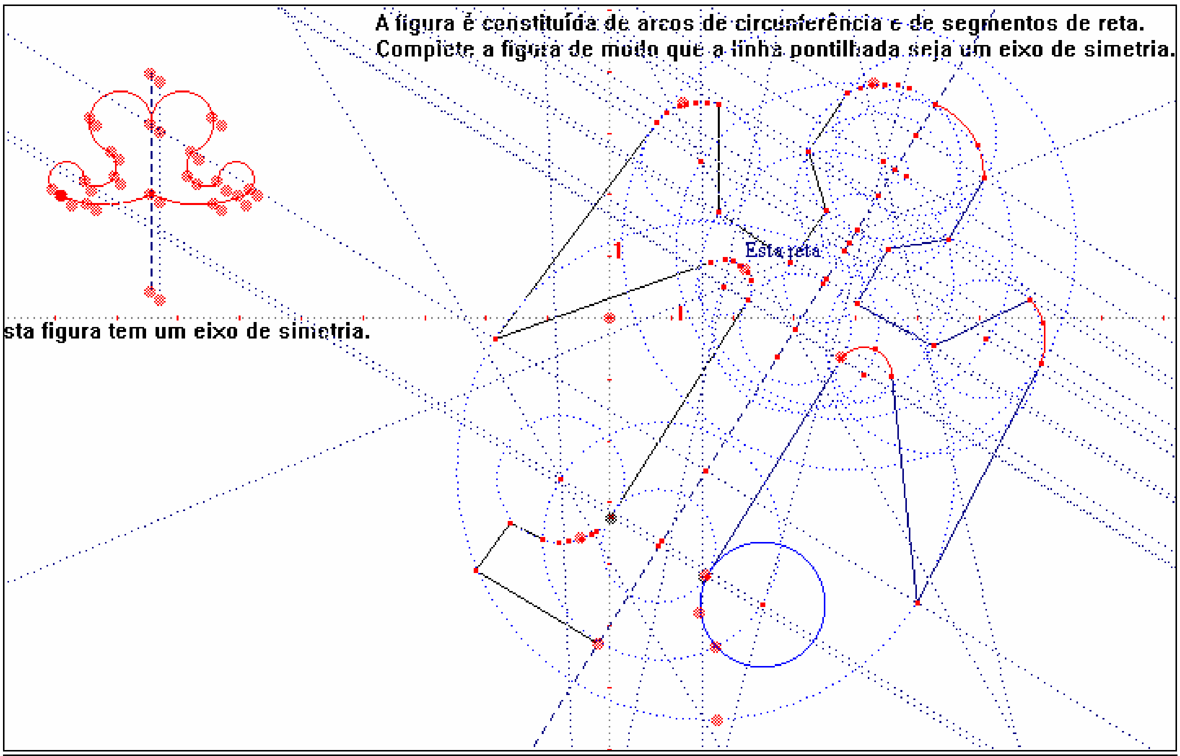
Parece que as duplas encaminharam a estratégia anunciada na análise a priori relativa a menor distância de pontos correspondentes ao eixo de simetria. Apresentaremos a resolução da dupla D5, onde pudemos observar a utilização de retas perpendiculares para encontrar pontos correspondentes no semi-plano oposto em relação ao eixo de simetria da figura.

"Usando reta perpendicular ao eixo de simetria passando pelos pontos de intersecção então com circunferências e compasso fomos achando pontos para traçar os segmentos e a curvatura das cordas".

Os alunos conjeturaram a possibilidade de eqüidistância entre pontos correspondentes em relação ao eixo de simetria. Utilizaram retas perpendiculares associadas com a construção de pontos estratégicos eqüidistantes com o uso do compasso.

Como justificativa apresentaram o seguinte discurso:

D5: "Um lado é o oposto do outro".



Observando os registros das demais duplas podemos verificar uma preocupação com as congruências de medidas de elementos correspondentes. Passo a descrever algumas dessas justificativas:

D1: "A distância de um ponto ao eixo de simetria é a mesma do ponto correspondente ao mesmo eixo. É como se colocasse um espelho perpendicularmente ao eixo".

D2: "Ela é equidistante à metade e à cópia da outra metade."

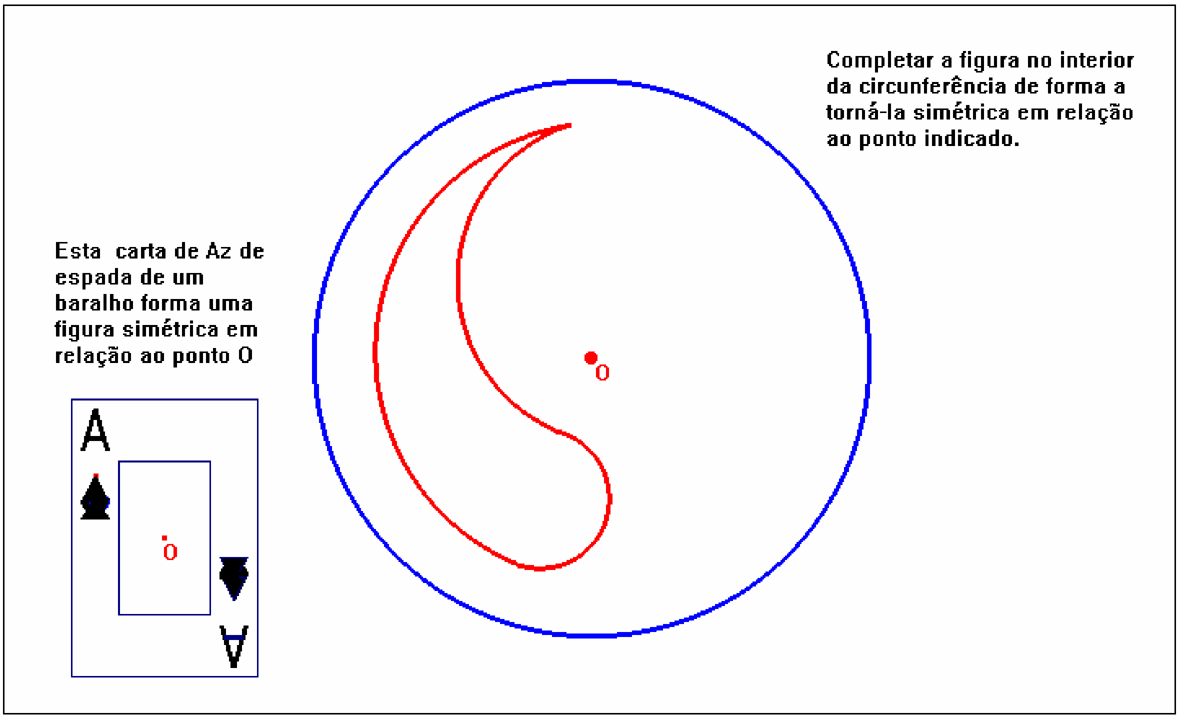
D3: "medimos todos os lados"

D4: Porque nos baseamos nela para fazer a outra metade."

Ainda que os alunos estivessem utilizando uma estratégia correta para a resolução da situação problema, foi possível observar que a tarefa lhes era custosa e oferecia possibilidade de muitos erros, dado o exagerado número de operações necessário para executá-la. Isto também é uma característica prevista na *fase 1* da Dialética Ferramenta-Objeto, em que a situação proposta não é impossível de ser resolvida com outra estratégia sem ser a simetria axial. No entanto, a mesma é a ferramenta adaptada adequada para a resolução desta situação.

SIMETRIA CENTRAL - *fase 1*

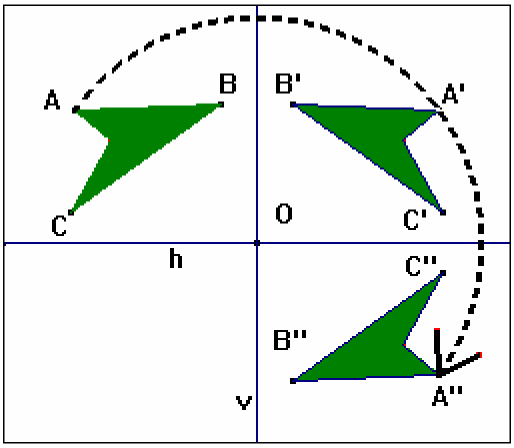
Uma vez apresentado o modelo de uma figura simétrica em relação a um ponto, pedia-se para completar a figura maior de forma a deixá-la simétrica em relação ao ponto O central.



Lembrando que a Dialética Ferramenta-Objeto na *fase 1* permite aos alunos fazerem pesquisas para responderem a uma determinada situação problema e que, para resolvê-la, a ferramenta adaptada é o conceito a ser introduzido, temos um incremento de possibilidades na resolução desta situação, podendo utilizar também as demais transformações anteriormente vistas.

Esta situação evidenciou-se com a estratégia de solução adotada pela dupla D5 para resolver a situação proposta na fase relativa à simetria central, onde os alunos utilizaram a simetria axial para resolvê-la.

Uma combinação de duas simetrias axiais em relação a eixos perpendiculares é equivalente a uma simetria central cujo centro de simetria é o ponto de intersecção destes eixos. A figura a seguir ilustra esta combinação, ou seja, $\sigma_O = \rho_v \times \rho_h$, onde σ_O é uma simetria central em relação ao ponto O, ρ_v é uma simetria axial em relação a reta v e ρ_h é uma simetria axial em relação a reta h. O é o ponto de intersecção das retas h e v perpendiculares entre si.



A dupla D5, resolveu a situação proposta na atividade relativa à simetria central, usando a simetria axial da forma como descrito acima três minutos após o início da atividade de pesquisa e ação no Cabri Géomètre-II. Transcrevo a resposta do seguinte item do roteiro-questionário: Descrever os passos que você fez para realizar esta tarefa.

D5: "Fez uma reta em cima do ponto, depois uma perpendicular a esta reta. Depois usamos simetria axial e do desenho formado fizemos outra simetria."

Segundo o registro do observador desta dupla, foi feito uma referência cartesiana com eixos perpendiculares com origem no ponto O do desenho. Por conjetura, a dupla observou a possibilidade de efetuar uma simetria axial em relação ao eixo vertical e, posteriormente ao desenho obtido, uma nova simetria axial em relação ao eixo horizontal, resolvendo desta forma a tarefa.

Isto pode nos mostrar a apreensão dos conceitos anteriormente vistos nas outras seqüências e a articulação dos mesmos em ação. Ainda que os conceitos relativos à simetria axial tivessem sido recém vistos, esta dupla se apropriou dos mesmos e não hesitou em utilizá-los e de forma satisfatória.

Não obstante esta criativa solução, a mesma dupla D5, motivada pela solução encontrada de acordo com os registros de áudio, seguiu a pesquisa buscando nova estratégia e conseguiu apresentar uma outra possibilidade de solução à situação problema relativo à simetria central.

Uma vez que nas institucionalizações das transformações geométricas translação e simetria axial utilizamos o botão rastro para enfatizar os aspectos onde as mesmas operam ponto a ponto e não somente em figuras, os alunos conjeturaram a possibilidade de mover um ponto sobre o objeto e visualizar a imagem deste ponto construindo a figura simétrica em relação ao centro O.

Para tal, traçaram uma reta por pontos correspondentes no modelo da figura simétrica (carta do Az) apresentada na atividade em relação ao centro desta figura. Observaram a eqüidistância entre os pontos simétricos em relação ao centro, ou seja, observaram que os pontos simétricos pertencem a uma circunferência de centro O com raio igual à metade da distância dentre estes pontos.

Em seguida, criaram um ponto sobre o objeto da figura que era necessário completá-la tornando-a simétrica em relação ao ponto indicado na atividade. Posteriormente, construíram uma circunferência de centro O de raio determinado pela distância deste ponto O e o ponto criado sobre a figura a ser completada. Ao mover o ponto ao longo da figura, era possível observar uma circunferência de centro O alterando o seu raio. Em seguida, a dupla construiu uma reta passando pelo centro O e este ponto sobre a figura.

Uma vez acionado o botão rastro nos pontos concorrentes da circunferência e desta reta, pontos estes simétricos em relação ao centro O, o Cabri-Géomètre-II traçava o objetivo solicitado pela atividade.

Trata-se da resolução da atividade de uma forma muito criativa. A dupla, além de considerar as características principais da transformação simetria central (ou também chamada rotação, ou giro de 180º), pôde utilizar as ferramentas do Cabri-Géomètre-II para cumprir a tarefa. Os instrumentos que utilizaram não foram convencionais. Apontamos um avanço na maneira de como esta dupla D5 conduziu a tarefa mostrando indícios de uma atividade que foi além da percepção e da visualização, apresentando características que apontam para um nível G2 segundo Parzysz.

"Ligamos circunferências a qualquer ponto de algum arco, então fizemos uma reta ligando esse ponto ao ponto O, com o rastro no ponto de intersecção entre a reta e a circunferência copiamos os arcos."

Com relação as demais duplas, elas fizeram as pesquisas na busca da solução conjeturando a construção de pontos simétricos em relação ao centro O por meio de transferência de medidas ora por compasso, ora pelo botão transferência de medidas.

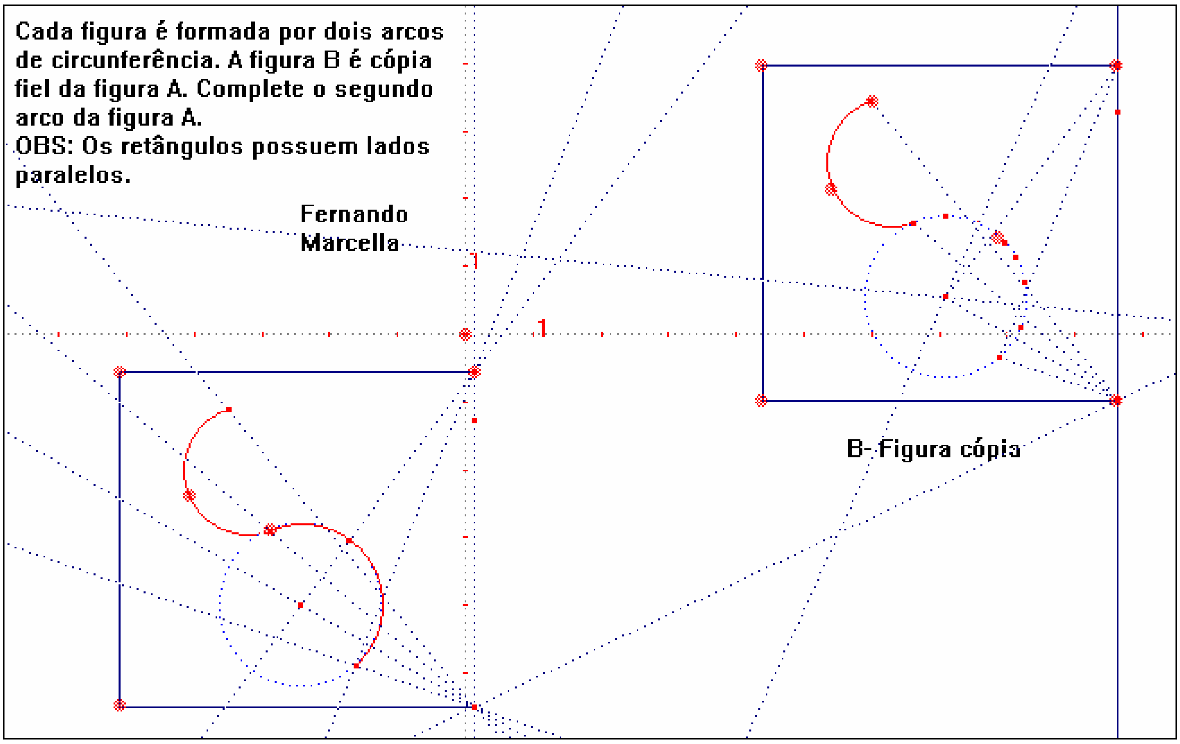
4.4.3.2. <u>FASE 2. - Pesquisa do novo implícito.</u>

Nesta fase, os alunos realizaram as tarefas na tentativa de explorar as características de cada transformação geométrica. Faremos uma análise do encaminhamento da dupla D5 para as três transformações: translação, simetria axial e simetria central. Não obtivemos diferenças significativas nas estratégias usadas pelas demais duplas D1 a D4.

TRANSLAÇÃO - <u>*fase 2*</u>

a) Discussão das principais características

Foi apresentada para os alunos uma atividade com dois retângulos. A dupla deveria completar os desenhos dos retângulos de forma a obter uma cópia fiel dos mesmos.



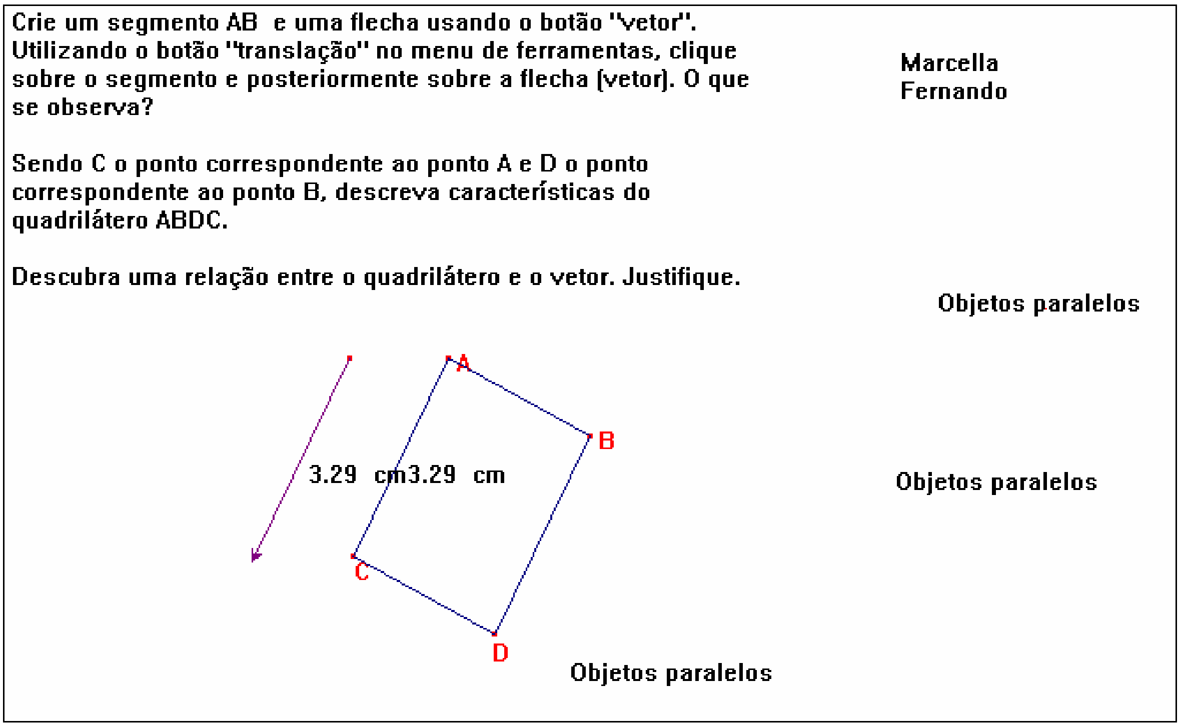
A dupla D5 iniciou sua pesquisa seguindo a mesma estratégia iniciada na atividade da translação - fase 1. Eles utilizaram a referência por pontos no retângulo e traçaram retas paralelas a segmentos correspondentes a figura cópia e figura motivo.

Eles encontraram o centro do arco da circunferência da figura cópia e, por meio da construção de paralelogramos, localizaram com exatidão o centro do arco da figura motivo. Após a determinação do raio da circunferência do arco a ser copiado e dos pontos extremos deste arco completaram sua tarefa.

A atividade apresentada colaborou para fixar conceitos de paralelismo entre segmentos correspondentes dos dois modelos de retângulos (a dupla usou com bastante desenvoltura esta estratégia).

No roteiro eles registraram o paralelismo entre os segmentos correspondentes.

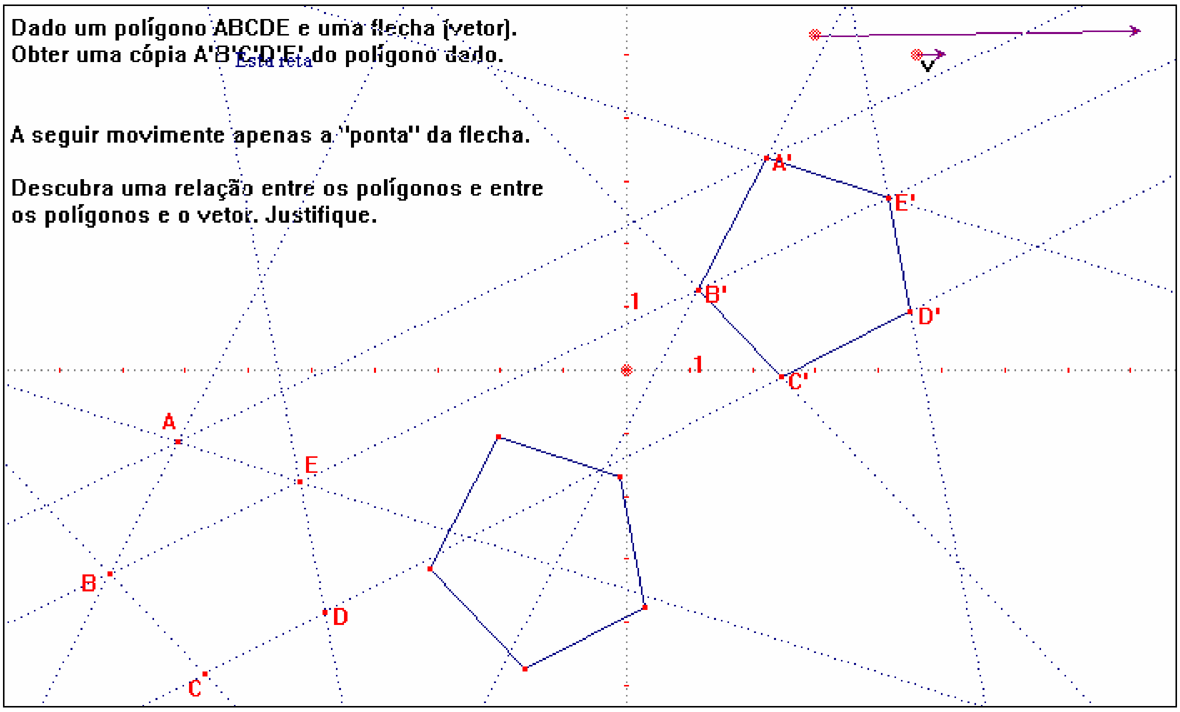
b) A translação como caixa preta.



A dupla D5 apresentou resultado satisfatório na execução da tarefa. Conforme previsto na análise a priori foi estudado o segmento CD criado com o segmento AB. A dupla conjecturou o paralelismo e congruência entre os segmentos AB e CD. Utilizaram a ferramenta do Cabri-II e verificaram as medidas do segmento AC e do vetor criado.

No entanto, em seus registros a dupla D5 não afirmou ser o quadrilátero formado um paralelogramo.

c) A translação como ferramenta



Primeiramente os alunos utilizaram a estratégia das retas paralelas e fizeram uma cópia do polígono ABCDE uma vez que criaram um ponto E' como referência.

No entanto, quando os alunos da dupla D5 passaram a fazer conjectura sobre o vetor observaram a possibilidade de utilizar a translação para a construção de um novo polígono.

É possível observar que mesmo com a ferramenta de translação, os alunos pensaram na tarefa de uma maneira pontual, ou seja, efetuaram a translação de cada um dos vértices do polígono ABCDE . Posteriormente, a translação dos pontos A', B', C', D', E' , é que a dupla construiu os segmentos formando os lados do polígono A'B'C'D'E'. Em outras palavras, a dupla não operou uma translação de um polígono para outro polígono mediada pelo vetor $\vec{v}$.

Após a construção do 2º polígono, ao "arrastar" o vetor $\vec{v}$, os alunos registram:

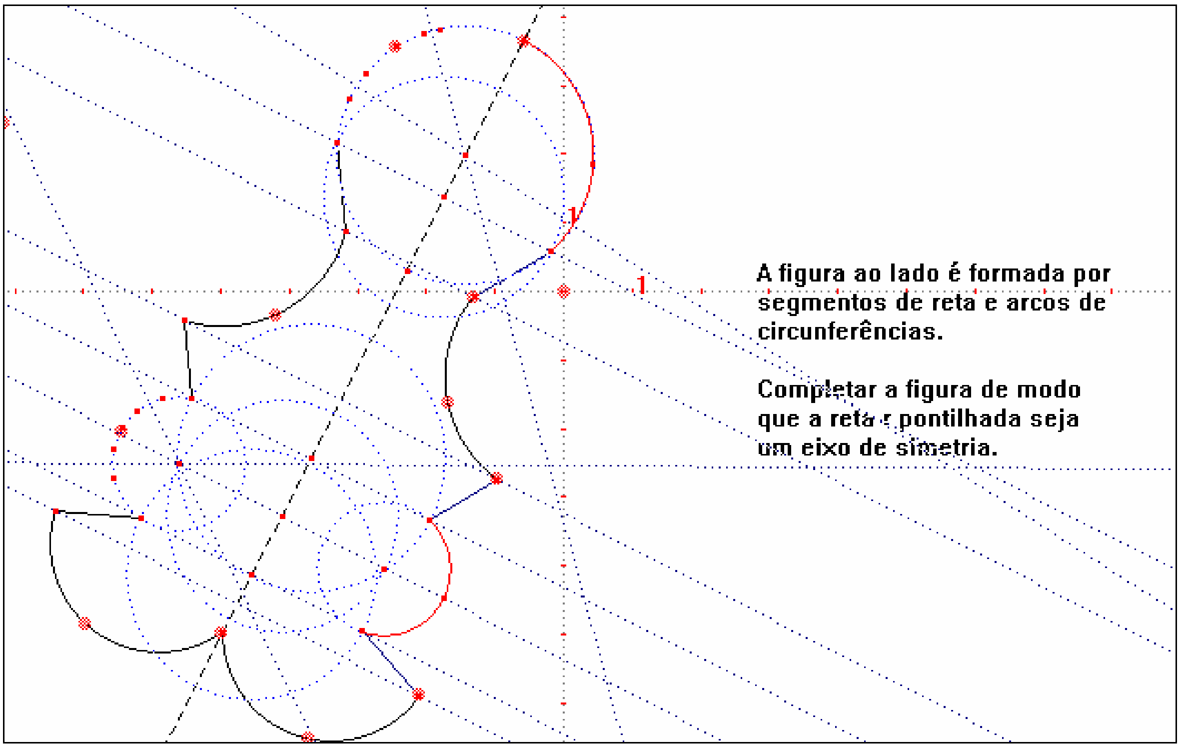
"Os polígonos são iguais. Apenas o polígono criado por translação se movimenta, não alterando seu tamanho"

Ainda que os alunos tenham feito a relação corretamente, ou seja, apresentado que os polígonos obtidos são congruentes ao inicial, não foi registrado nenhum elemento de justificativa com relação à congruência. É possível observar que com a construção do 1º polígono por meio das retas paralelas, eles transitam com a idéia do paralelismo entre segmentos correspondentes e se pode também observar que a dupla transita também sobre o aspecto da congruência entre segmentos correspondentes.

Com relação às demais duplas D1 à D4 podemos enfatizar o aspecto de que utilizam o discurso e os registros de congruência entre as medidas dos segmentos correspondentes. Existem evidências da relação entre comprimento do vetor e da distância de pontos correspondentes da translação. Neste momento da pesquisa, os alunos estão formando os principais conceitos relativos à translação.

SIMETRIA AXIAL - ***<u>fase 2</u>***

a) Discussão das principais características.

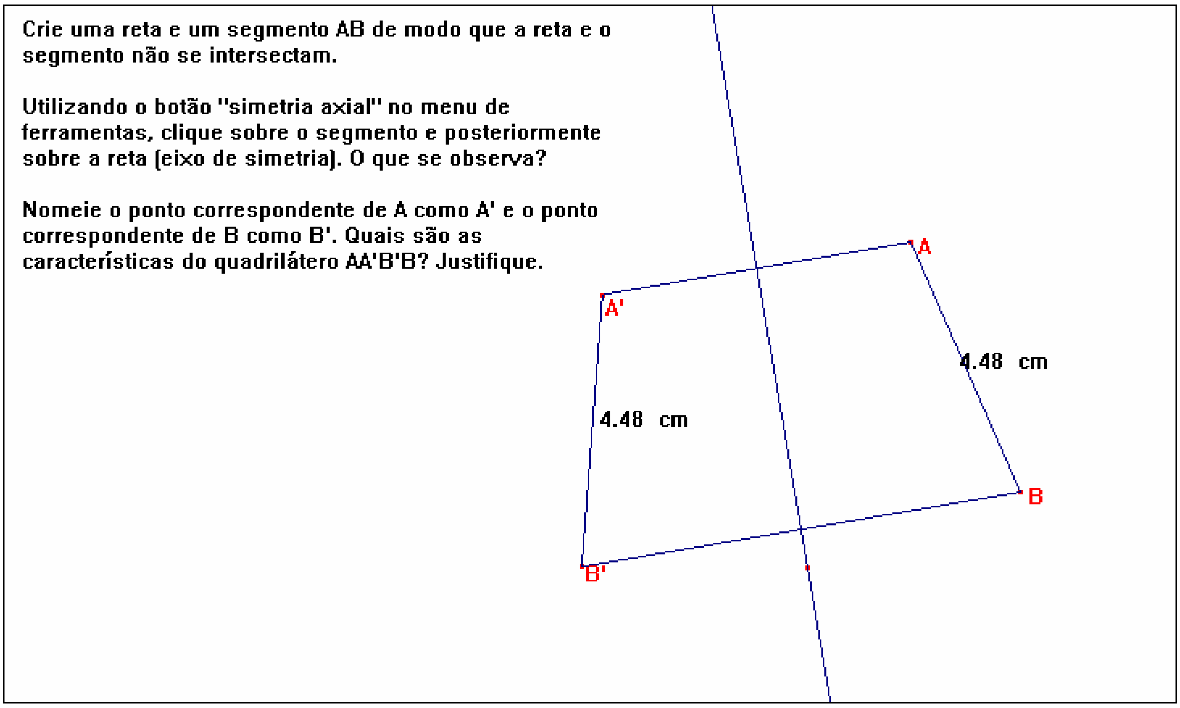


"Com retas perpendiculares e circunferências para achar a curvatura dos arcos e a distância de cada ponto"

Os alunos não tiveram dificuldades em conjecturar e perceber que bastava encontrar pontos correspondentes ao eixo de simetria.

Uma construção importante de se observar é o fato de os alunos localizarem o centro da circunferência relativa a um dos arcos da figura apresentada. Observaram que o centro da circunferência estava posicionado sobre o eixo de simetria e completarem a figura identificando o ponto limite inferior do arco oposto ao semi-plano determinado pelo eixo de simetria.

b) a Simetria axial como caixa preta



Esta atividade permitiu apresentar o botão da simetria axial para os alunos. Apresentaram a seguinte resposta com relação a pergunta: Utiilzando o botão “simetria axial” no menu de ferramentas, clique sobre o segmento e posteriormente sobre a reta (eixo de simetria). O que se observa?

“Que é um espelho”

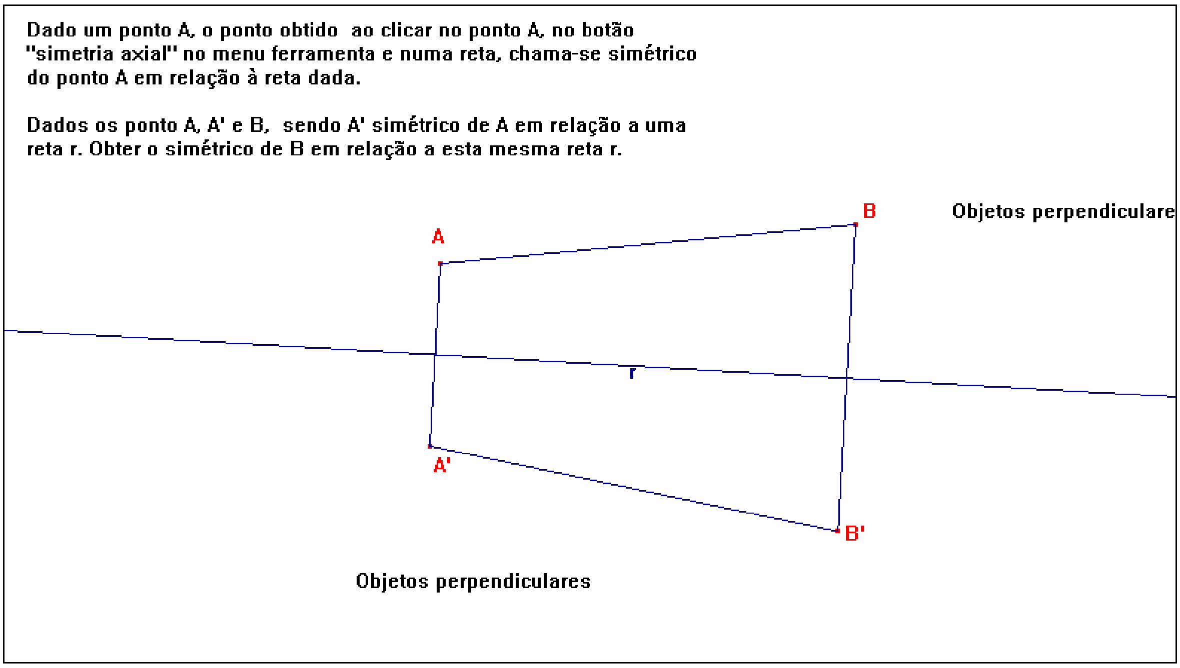
Concluímos que está presente para a dupla D5 a idéia do espelho, e que o comportamento da simetria axial é muito parecido ao efeito de um espelho na figura.

Quando questionado sobre a característica do quadrilátero AA’B’B a dupla apresentou a seguinte resposta:

"O lado AB sempre vai ser igual ao lado A'B' enquanto os outros 2 lados podem variar. Os lados AA' e BB' sempre são paralelos."

Podemos deduzir destas afirmações que os alunos conseguiram apreender que o quadrilátero AA'B'B é um trapézio isósceles, ainda que eles não tenham usado esta denominação. As propriedades de paralelismo e eqüidistância em relação ao eixo de simetria dos pontos correspondentes ficaram bastante evidenciados. Além disso, existe uma ênfase ao fato da congruência do segmento AB em relação ao segmento A'B'.

c) a Simetria axial como ferramenta na localização do eixo de simetria



"Traçamos um segmento de A a A', usamos a mediatriz para achar o eixo de simetria, e com a simetria axial achamos o B'."

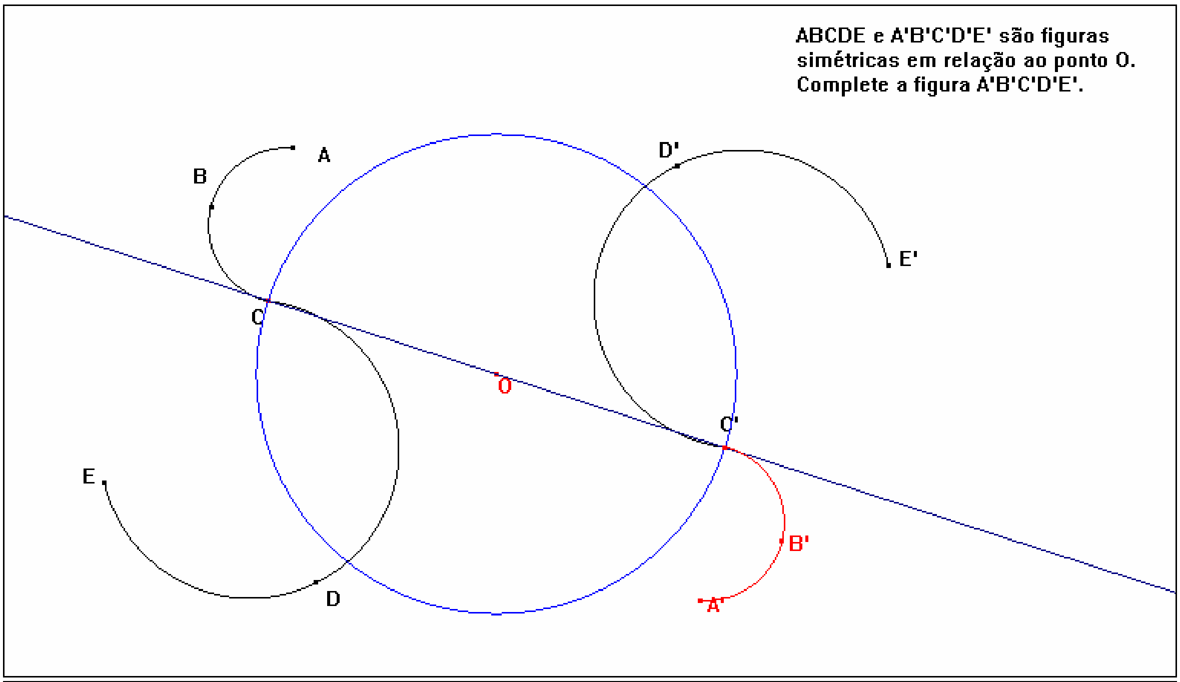
Esta atividade foi apresentada para que as duplas pudessem apreender que o eixo de simetria é de fato a mediatriz dos pontos eqüidistantes de uma figura simétrica em relação a uma reta. Podemos observar que, primeiramente, eles construíram o segmento AA'. Uma vez que a idéia do perpendicularismo em relação ao eixo de simetria estava presente nas atividades anteriores, o uso da mediatriz não apresentou dificuldades. A dupla D5 rapidamente utilizou a construção da reta mediatriz em relação ao segmento AA' e encontraram uma reta que atendia às características de eixo de simetria. Utilizaram o botão de simetria axial, encontraram a imagem de B em B' e puderam construir o segmento BB'. Certificaram -se que estes segmentos são perpendiculares. Não verificaram a congruência.

"Que a reta r faz o papel de 'espelho'. Um é o oposto de outro."

Novamente a dupla D5 utiliza explicitamente o termo espelho para explicar que o ponto A' é o simétrico de A em relação à reta *r*. Conforme previsto nas nossas análises a priori, o fato de os resultados desta transformação serem vivenciados em ações cotidianas como nos espelhos, poderiam induzir os alunos a este tipo de resposta.

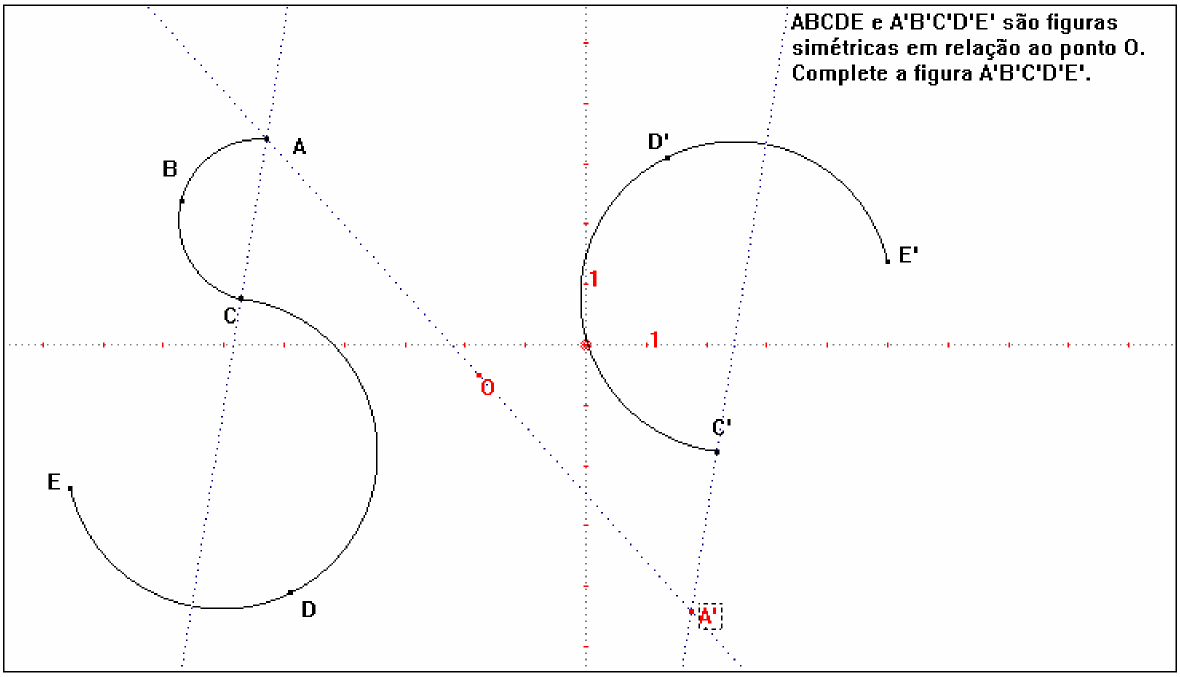
SIMETRIA CENTRAL - *<u>fase 2</u>*

a) Discussão das principais características



Para estudar as características da transformação simetria central, foi organizada esta atividade de forma que as duplas completassem os arcos indicados, sabendo-se previamente que eram figuras simétricas em relação ao ponto O.

Primeiramente a dupla D5 localizou o ponto A' simétrico de A em relação a O. Este ponto foi localizado pela intersecção da reta AO com uma reta paralela a reta AC onde o ponto C' também pertence a esta reta.



"Fizemos uma reta AC e uma AO fizemos uma paralela a AC passando por C e achamos o ponto A', então usamos o rastro como na atividade anterior; também poderíamos achar o ponto B' da mesma forma que achamos A' e usar o arco para copiar."

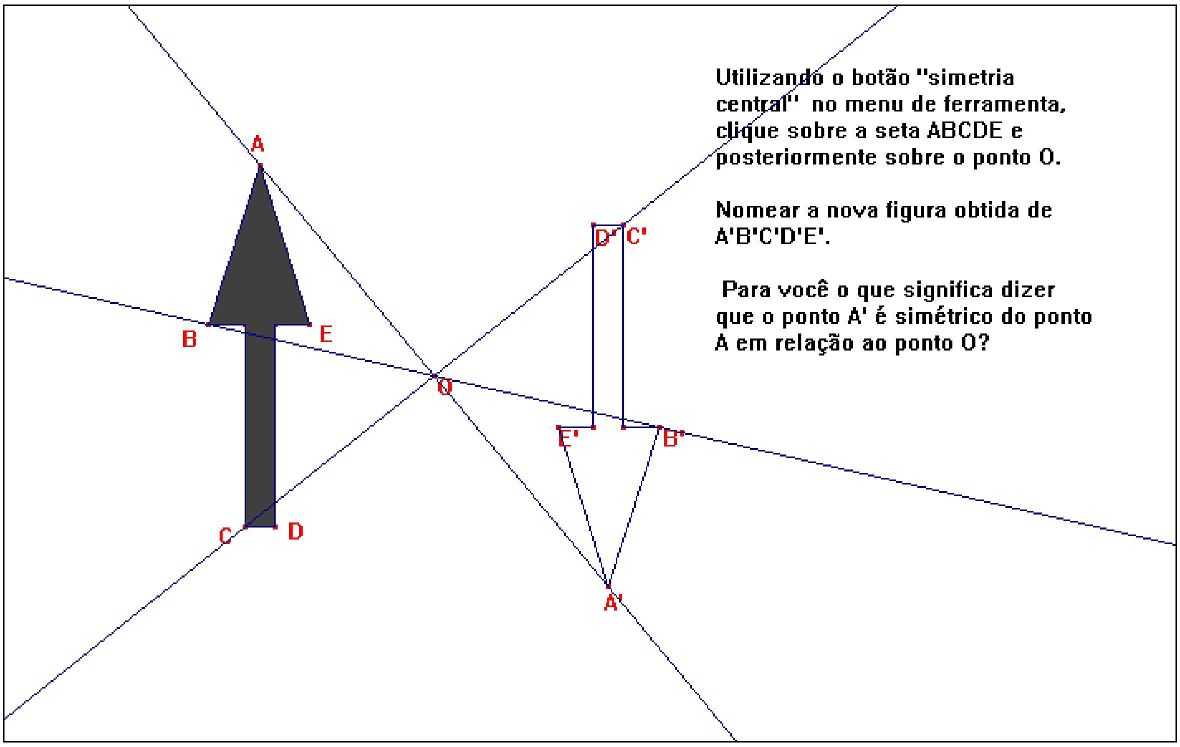
É possível observar que a dupla D5 articulou a idéia de eqüidistância entre pontos correspondentes. E, ainda que intuitivamente, os registros apresentam referências ao ponto O com as características de centro de simetria. Podemos observar que ele é usado como referência entre todas as medidas dos demais pontos.

b) Apresentação do botão simetria central e o uso do mesmo como caixa preta

A dupla D5 rapidamente utilizou o botão simetria central e localizou os pontos A', B', C', D', E'. Mais uma vez, as duplas tiveram a oportunidade de vivenciar a experiência e visualizar uma figura simétrica em relação a um ponto. O motivo apresentava o aspecto de giro de 180º pelo fato de as setas serem apontadas para a mesma direção, porém com sentidos opostos.

A dupla D5 apresentou a seguinte resposta para dizer o que o ponto A' é o simétrico do ponto A em relação ao ponto O.

"Significa que a distância entre o ponto A e O é a mesma entre o ponto O e A'."



4.4.3.3.<u>FASE 3. - Explicitação e institucionalização local. Retorno para a solução da situação problema proposta inicialmente na *fase 1*</u>

Todas as duplas utilizaram a respectiva ferramenta disponível no Cabri-Géomètre II para resolver o problema proposto. Nenhuma dupla utilizou outra estratégia além do uso imediato do botão translação, simetria axial ou simetria central.

Isto pode ser um indício de que a Dialética Ferramenta-Objeto trouxe benefícios para o estudo destes conceitos nesta organização de atividades. Os alunos mostraram até esse momento uma apreensão das principais características das transformações geométricas e reconheceram nas devidas atividades que, com certa facilidade, usando a ferramenta adequada, obtiveram êxito na conclusão dos objetivos.

4.4.3.4.<u>FASE 4. - Institucionalização</u>

Nesta fase, os alunos realizaram atividades que permitiram ao pesquisador fazer a institucionalização, ou seja, o momento em que os conhecimentos são socializados e nivelados. O pesquisador ou professor revisou as principais características de cada transformação geométrica, fez suas conclusões, formalizou os conceitos envolvidos. Uma vez que o botão rastro também estava acionado no momento do uso das transformações geométricas respectivas, os alunos puderam visualizar aspectos pontuais da transformação. Foi possível observar as transformações ponto a ponto, seja esta transformação translação, simetria axial ou simetria central.

TRANSLAÇÃO - ***fase 4***

De acordo com o exposto nas análises a priori, para preparar a conceituação da translação, os alunos realizaram as experiências que evidenciavam as características do vetor utilizado nas translações. Posteriormente, usaram o botão da ferramenta translação disponível no Cabri-Géomètre-II e realizaram a translação de um triângulo por meio de um vetor já dado.

Descrevemos as justificativas dos alunos referentes às características do botão translação:

D1: Ela translada a figura desejada no sentido e com o mesmo comprimento do vetor.

D2 : O botão translação auxilia junto ao vetor para copiar o que quisermos.

D3: Quando movimentamos a figura original, a cópia da mesma se movimenta.

D4: Translação é uma cópia ponto a ponto, com sentido, direção e tamanho e a distância em relação entre o ponto e o ponto criado, em função do vetor.

D5: Ele copia fielmente a figura usando o vetor; a distância de cada ponto das figuras será a mesma do vetor

Entendemos dessas justificativas que as características de invariância de medidas entre as figuras envolvidas na transformação ficaram evidenciadas pelas respostas, pois estas apresentam palavras como cópia, mesmo comprimento, mesma distância. Além de os alunos associarem a idéia das características do vetor determinar direção, sentido e distância entre os elementos transladados.

Estes elementos presentes nas respostas dos alunos são vestígios que apresentam uma evolução. Utilizando o referencial teórico de Parzysz e lembrando que nossas atividades iniciaram no G0 (Geometria Concreta), encaminharam-se para o G1 (Geometria Espaço-gráfica) pelo uso do Cabri-Géomètre II e que, por força das justificativas, apontam para um outro tipo de nível G2 (Geometria Proto-axiomática).

Um resultado interessante é a afirmação das duplas D4 e D5 a respeito de que a translação é algo que afeta ponto a ponto. Possivelmente, sejam indícios de que os alunos estejam reconhecendo aspectos pontuais da transformação, já enfatizados nas atividades da institucionalização.

SIMETRIA AXIAL - *fase 4*

A atividade relacionada à *fase 4*, por meio da criação de uma reta *r* e um ponto *A* fora dela, solicitava ao aluno que estudasse o simétrico desse ponto *A* em relação a esta reta.

Encontramos as seguintes respostas das duplas sobre o que queria dizer que o ponto *A'* é o simétrico de *A* em relação à reta *r*:

D1: "A' e A são os extremos de um segmento. Pelo ponto médio desse segmento passa uma reta r perpendicularmente, sendo esta o eixo de simetria".

D2: "Quer dizer que eles tem a mesma medida em relação à reta r, são eqüidistantes."

D3: "... porque fizemos o ponto médio; meio dos pontos A e A', vão ter a mesma medida... porque é perpendicular ao elemento A e A'. A reta r é uma mediatriz".

D4: "Em relação à reta r os dois pontos são simétricos (um ponto, no caso o A, representa outro ponto, com a mesma distância e localização, no caso A')".

D5: "...que a reta r faz o papel de 'espelho'. Um é oposto de outro"

Também nesta atividade encontramos elementos evidenciando os principais conceitos envolvidos na transformação simetria axial. A dupla D1 articulou muito bem suas palavras na busca do significado de *A* e *A'* (simétrico em relação à reta *r*). Nas demais duplas encontramos os termos eqüidistância, perpendicularismo em relação ao eixo *r*, associação do eixo de simetria como a mediatriz de pontos simétricos.

Mais uma vez, de acordo com o referencial Parzysz, esses elementos apontam para uma condução da atividade para o nível G2 (Geometria Proto-axiomática).

SIMETRIA CENTRAL - ***fase 4***

É possível verificar que as justificativas dos alunos são expressas de forma não formalizada. Nos seus discursos, notam-se a apreensão das principais características das transformações estudadas, mas não encontramos em todas as nossas atividades justificativas formalizadas e fundamentadas em argumentos geométricos. Não há um encadeamento lógico de demonstrações rigorosas. Possivelmente esta não deve ser uma prática dos alunos em sala de aula.

Foi proposto por uma atividade a construção de uma figura simétrica (bandeirinha) em relação a um ponto O. Transcrevo as observações e as justificativas das relações entre as bandeirinhas e o ponto O.

D1: "Os segmentos são paralelos aos correspondentes simétricos. Qualquer figura feita em um lado e feita com os pontos respectivos simétricos serão congruentes".

Justificativa: "As medidas dos segmentos são iguais e, pela ferramenta de perguntas vimos que são paralelos".

D2: "Ponto O e bandeiras ➔ é o ponto médio. Bandeiras e bandeiras ➔ a medida dos lados dos pares são iguais."

D3: "Bandeirinhas e bandeirinhas ➔ Têm as mesmas medidas. Bandeirinhas e ponto O ➔ Ligando os pontos correspondentes ao outro (A,A' // B,B'...) o ponto O sempre vai ser o ponto médio."

D4: "A distância de cada ponto das bandeiras são iguais, em relação ao ponto O"

Justifique: As bandeiras são simetricamente opostas. Se elas são simétricas, quer dizer que cada ponto de uma bandeira, corresponde o mesmo ponto opostamente.".

D5: O é ponto médio entre qualquer ponto simétrico das bandeirinhas.

Justifique: Como já falamos as bandeiras são simétricas."

As respostas explicitam as principais idéias da simetria central em relação a um ponto. Observamos um discurso que privilegia as características da congruência, paralelismo de segmentos correspondentes, centro da simetria (D5: *O é ponto médio entre qualquer ponto simétrico das bandeirinhas*).

Recordando que as atividades seguiram-se em forma cronológica para os alunos e apenas para as análises das mesmas estão sendo feitas nesta ordem de acordo com as fases da Dialética Ferramenta-Objeto, há, entre cada discurso apresentado, um lapso de tempo e outras atividades intercaladas.

O ciclo das atividades relativas à simetria axial só iniciou com o término do ciclo das atividades da translação. Analogamente para o ciclo das atividades da simetria central. Desta forma, além das características apresentadas em cada discurso das respectivas transformações podemos observar um salto qualitativo na forma de expressão dos alunos, demonstrados pelo uso mais adequado dos termos matemáticos eonvolvidos.

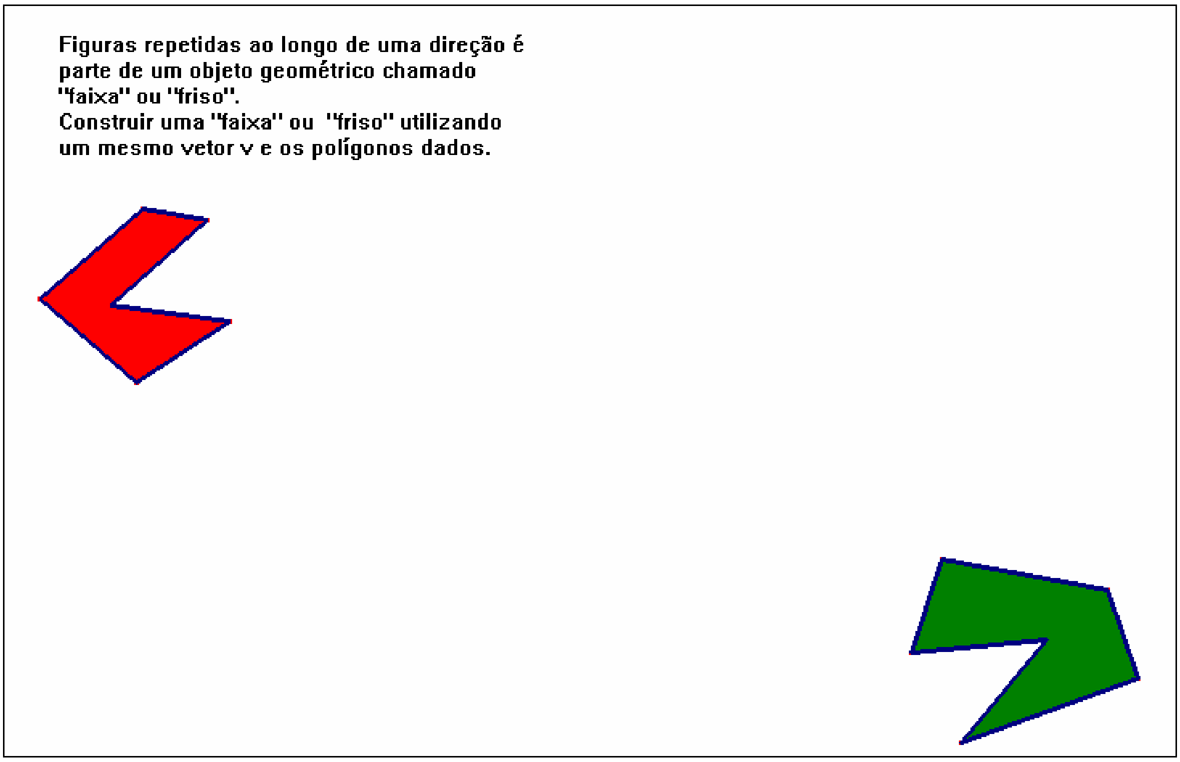
Esta observação pode trazer mais alguns indícios no avanço dos alunos na tentativa de formalizarem suas idéias por meio de deduções mais rigorosas do ponto de vista matemático.

4.4.3.5.FASE 5. - Familiarização

Usamos os frisos na familiarização das transformações geométricas recém institucionalizadas. E também foi possível observar que todos os alunos apresentaram resultados satisfatórios no cumprimento dos objetivos de cada atividade. Isto vai ao encontro de que a organização das atividades de acordo com a proposição da Dialética Ferramenta-Objeto pode trazer efetivos significados aos alunos na formação de certos conceitos.

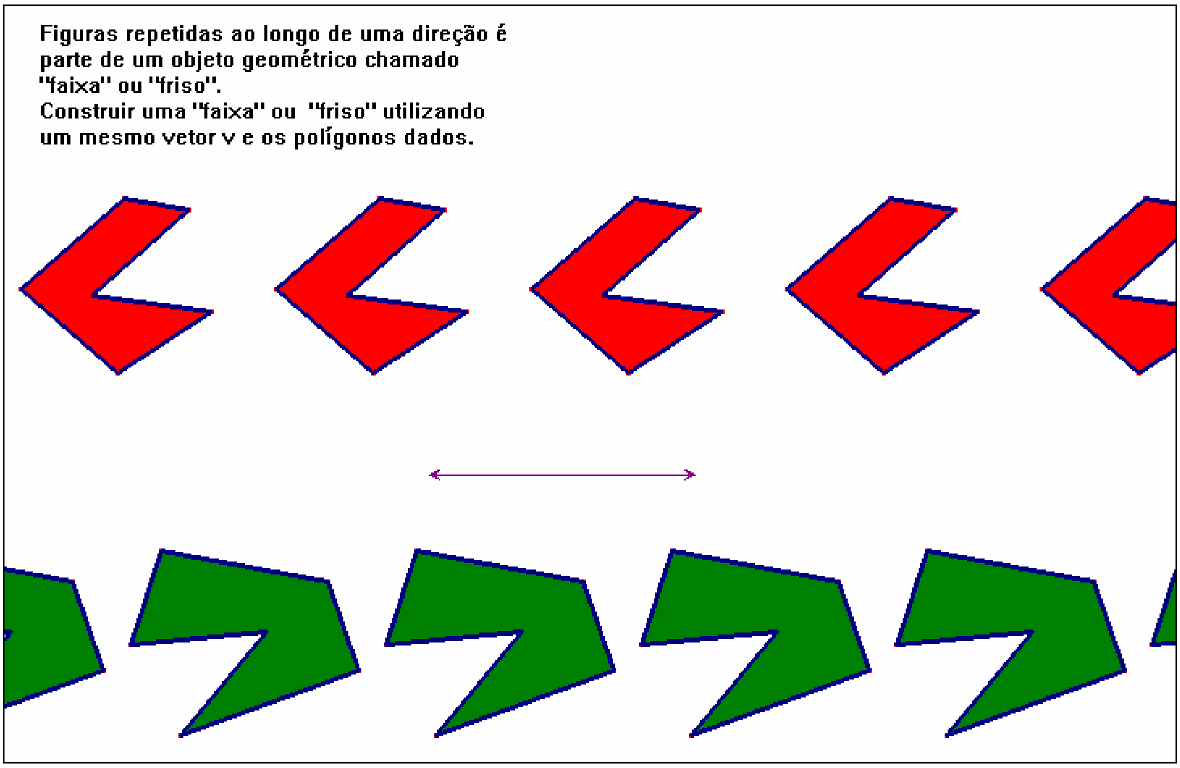
TRANSLAÇÂO - ***fase 5***

A translação foi a primeira transformação estudada pelos alunos, do ponto de vista cronológico.



Apresento o quadro de solução da dupla D2, em que os alunos usaram a criatividade e construíram um vetor $\vec{v}$ e $-\vec{v}$ com o mesmo comprimento sobrepostos garantindo desta forma que estes vetores possuam além de mesmo comprimento, também mesma direção. Assim, puderam preencher o friso com as figuras dadas. Conforme discutimos nas análises a priori, era necessário que o aluno além de criar o vetor $\vec{v}$, ele não teria condição de fazer as translações necessárias com os polígonos vermelho e verde, pois o aluno não tinha a mobilidade oferecida pela janela do programa, isto é, os polígonos foram construídos nos limites inferior e direito da tela do Cabri-Géomètre II.

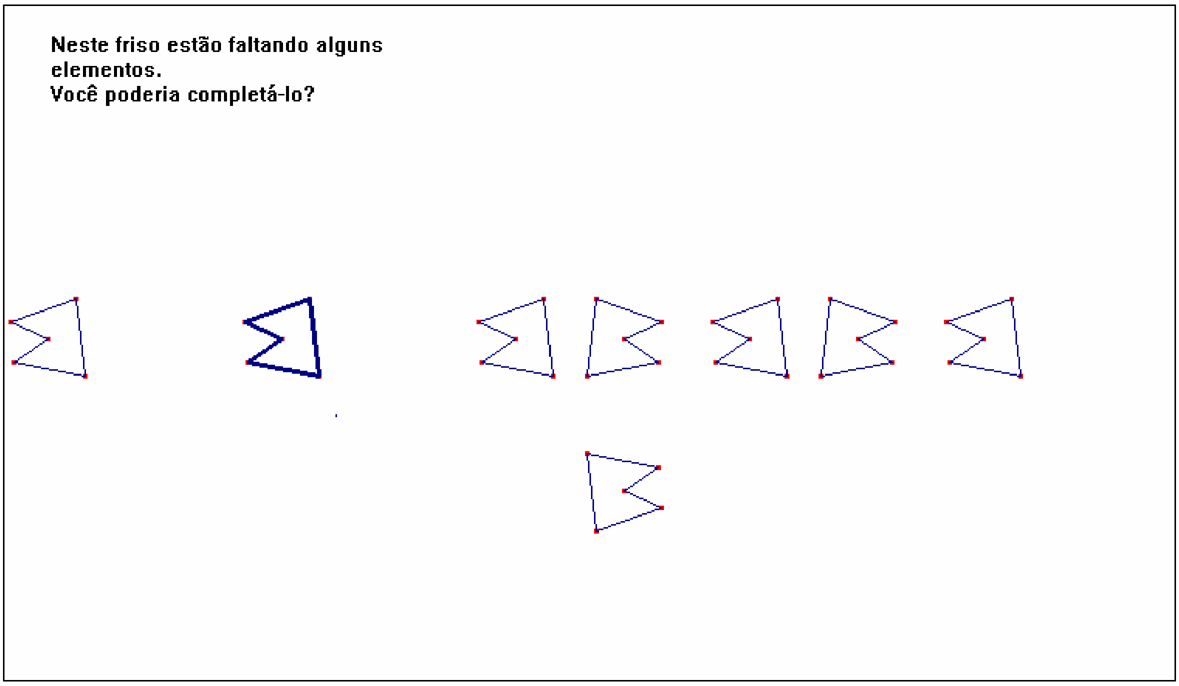
Analisando o quadro apresentado, podemos visualizar que a dupla D2 construiu dois vetores sobrepostos com sentidos contrários.



As demais duplas D1, D3, D4 e D5 criaram um vetor e efetuaram algumas translações. Quando perceberam a limitação imposta pela atividade na qual seria necessário construir um outro vetor de mesmo comprimento e direção, mas de sentido contrário, duas duplas, D4 e D5, utilizaram as figuras já transladadas e, por meio de pontos correspondentes, desenharam o vetor de sentido contrário. As outras duas duplas remanescentes D1 e D3 construíram uma circunferência cujo centro era a origem do vetor desenhado. Criaram, posteriormente, um novo vetor diametralmente oposto.

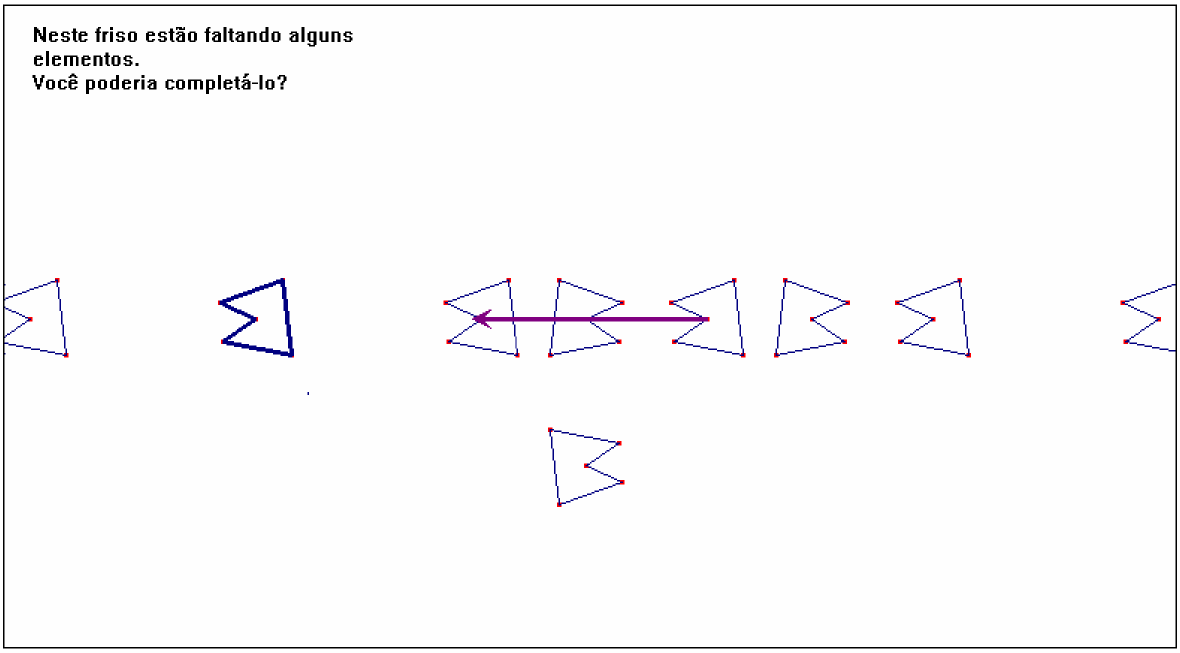
SIMETRIA AXIAL - *fase 5*

A *fase 5* inicia com uma atividade onde os alunos puderam usar o novo conceito recém apreendido como ferramenta desta nova situação problema.

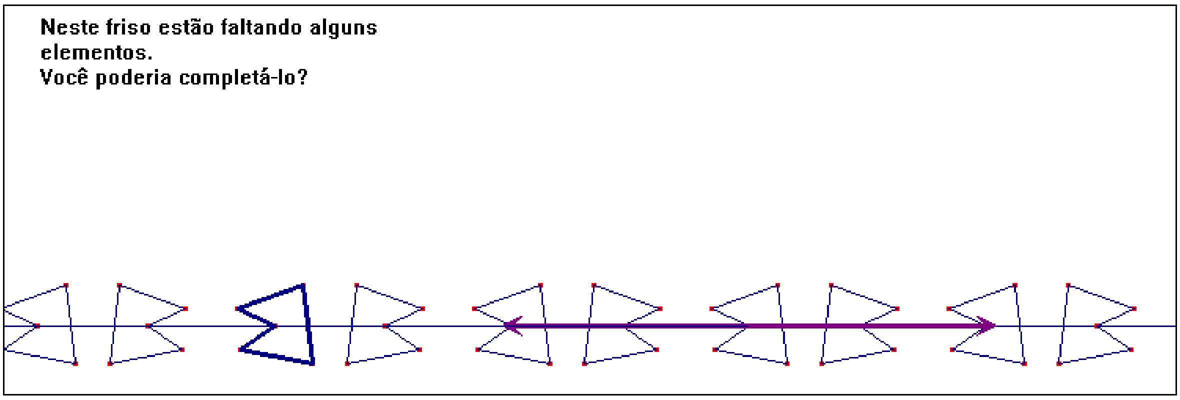


Apresento a seguir alguns quadros formados pela dupla D5 a fim de reconstruir suas principais idéias.

"Usando vetor, ligando 3 polígonos usamos translação com o polígono do meio preencher o friso ..."



A dupla D5 entendeu a necessidade de preencher o friso e identificou um vetor para poder efetuar as translações necessárias. No entanto, o vetor construído apresentava um sentido para a esquerda o que permitiu fazer todas as translações à esquerda. A dupla, para poder preencher o friso, percebeu a necessidade de encontrar um outro vetor com mesmo módulo, direção, mas sentido oposto ao anterior. E assim o fez.

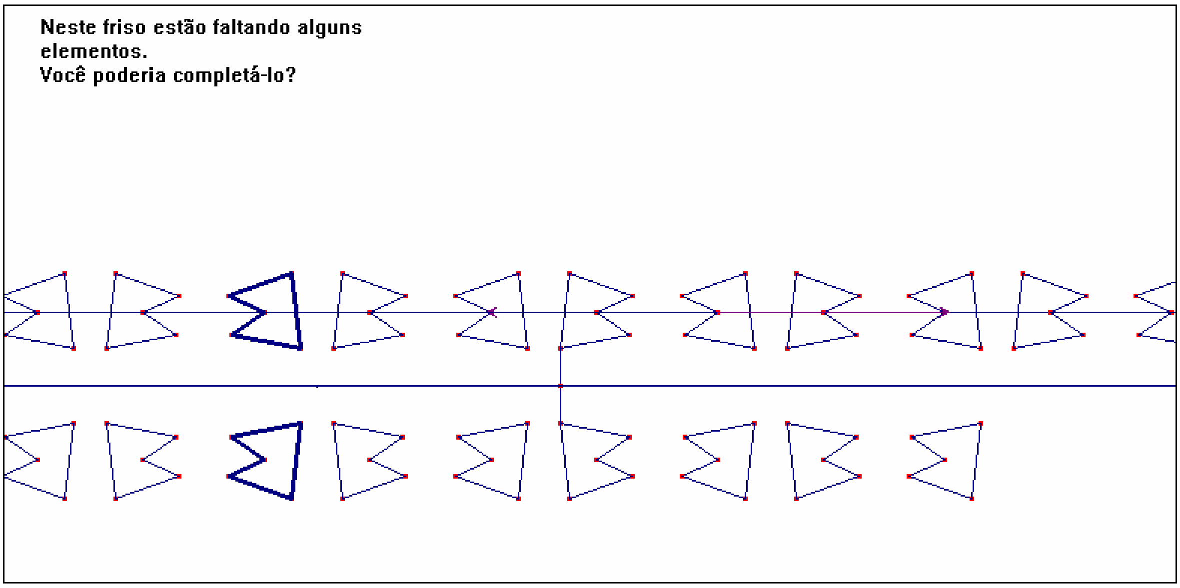


Neste ponto, cronologicamente, a dupla já havia percorrido a trajetória do ciclo da Dialética Ferramenta-Objeto relativo as tarefas da Translação. É possível destacar a destreza desta dupla em tratar a situação de forma que primeiramente ocorrera o uso da translação como parte da solução na construção e preenchimento dos frisos.

No entanto, encontraram um obstáculo em como proceder para completar a o friso na parte inferior.

Após algumas conjecturas, tomaram a reta suporte da direção dos vetores construídos no friso na parte superior. Uniram dois pontos correspondentes de duas figuras do friso. Encontraram a reta mediatriz deste segmento, e, por fim, efetuaram diversas simetrias axiais dos elementos do friso da parte superior, criando assim a parte inferior.

"... e para fazer o de baixo achamos o ponto médio entre os polígonos já desenhados e usando simetria axial para copiá-lo."



Para completar o friso na parte inferior também usaram os vetores disponíveis tanto para as translações à esquerda quanto à direita.

Pudemos observar que o uso das translações para o preenchimento dos elementos do friso foi muito espontâneo. A dificuldade maior foi na localização do eixo de simetria que permitiu a construção da parte inferior do friso. E mesmo assim, após alguns elementos estarem disponíveis, a opção da dupla foi de completar o friso com as translações.

Possivelmente, os elementos como frisos e as tarefas organizadas de acordo com a Dialética Ferramenta-Objeto permitiram um maior entendimento dos conceitos envolvidos nas tarefas. Isto quer dizer, a dupla usou a translação para responder esta atividade e a fez como um conhecimento antigo, apropriado apresentando muita desenvoltura.

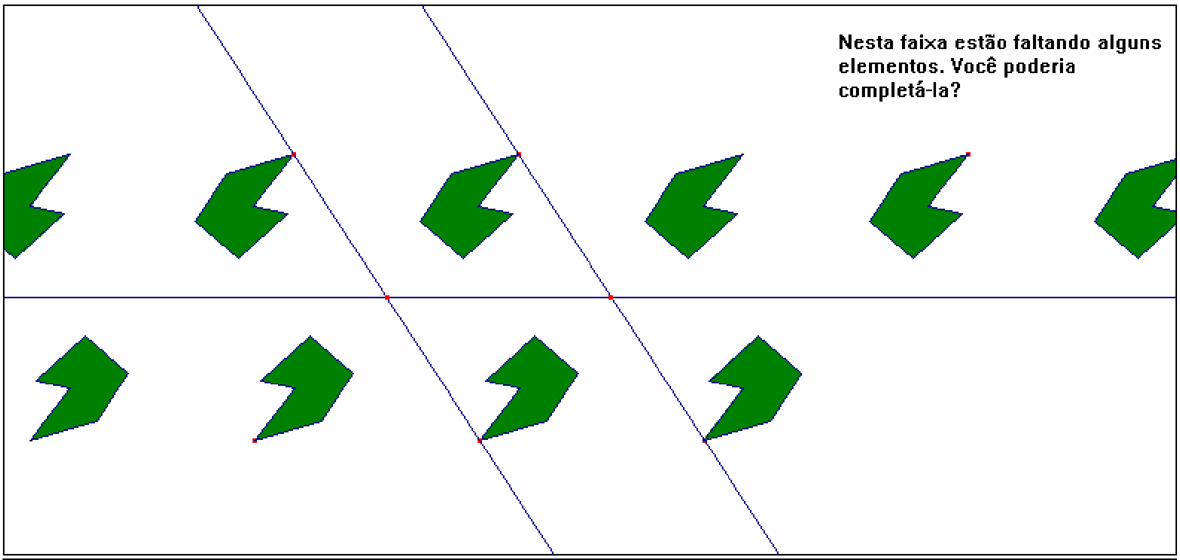
SIMETRIA CENTRAL - ***fase 5***

Como as tarefas anteriores propostas na fase 5 das respectivas transformações geométricas de translação e simetria axial, as duplas deveriam preencher um friso com as transformações simetria central e translação. A forma como estão dispostos os elementos deste friso criaram uma situação problema de solução não trivial.

Fazendo a análise da descrição da dupla D3 e dos seus quadros do Cabri-Géomètre II, podemos observar primeiramente a união de dois pontos correspondentes em semi-planos opostos em relação à reta. A intersecção destas retas formou um ponto utilizado como centro da simetria da faixa.

Usando a ferramenta de simetria central, a dupla D3 preencheu a faixa criando os polígonos simétricos em relação a este ponto encontrado.

A atividade foi criada de forma que os alunos, uma vez que privilegiassem a simetria central no uso da solução desta situação, necessitassem criar mais pontos de referência. A dupla D3 o fez ao traçar uma reta paralela a criada obliquamente em relação ao friso, tomando um novo ponto de centro de simetria.



"Depois de acharmos o ponto 'K' usamos simetria central. Foi preciso fazer mais uma dessa reta para completar todo o friso."

Encontramos nas estratégias das demais duplas, D1, D2 D4 e D5, o uso da translação. Uma vez determinado um vetor e seu oposto paralelo à direção da reta apresentada na atividade, os alunos preencheram a faixa.

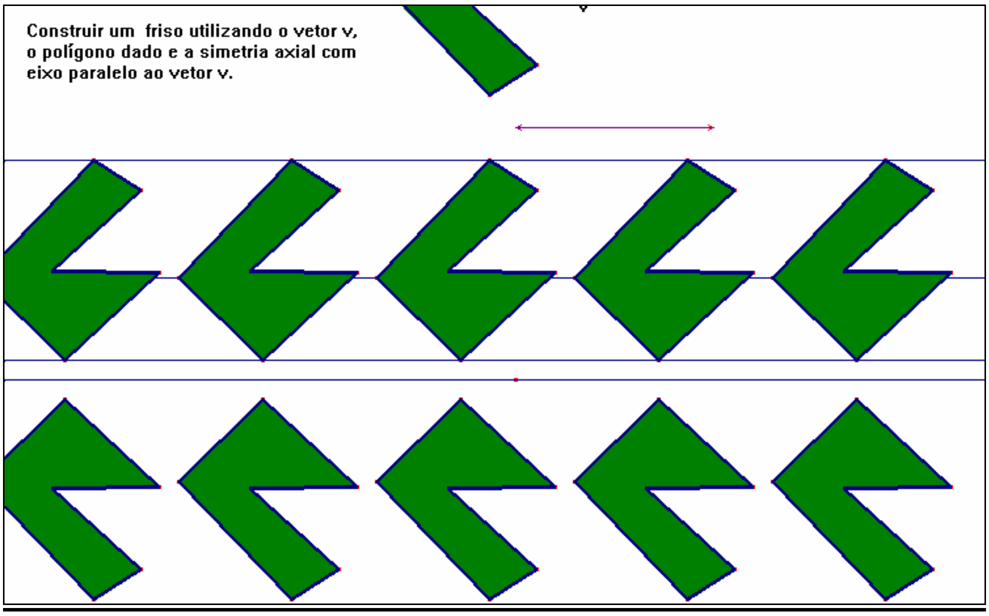
4.4.3.6.<u>FASE 6. - Tornando a tarefa complexa</u>

TRANSLAÇÃO - *fase 6*

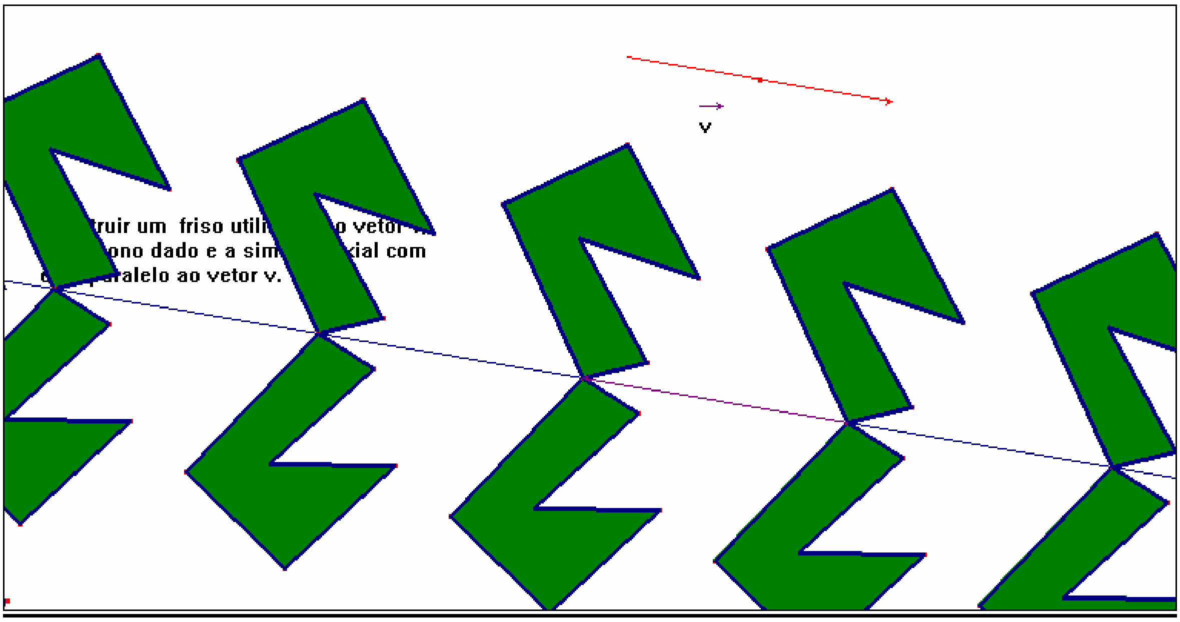
Fizemos a escolha de não utilizarmos uma atividade específica para uso mais complexo da translação, pois este objetivo estaria permeado nas futuras atividades com o uso das simetria axial e simetria central.

SIMETRIA AXIAL - ***fase 6***

Os alunos responderam acertadamente a esta atividade. Para tipificá-la descrevo a estratégia da dupla D5. Criaram um eixo paralelo ao vetor dado e, por meio da simetria axial, desenvolveram um polígono simétrico em relação a este eixo. Uma vez disponível um par de polígonos em semiplanos opostos em relação ao eixo recém construído, criaram os demais polígonos por meio da translação de vetor $\vec{v}$ dado. Para preencher a faixa no sentido oposto, sobre o vetor dado, construíram o outro vetor oposto $-\vec{v}$.

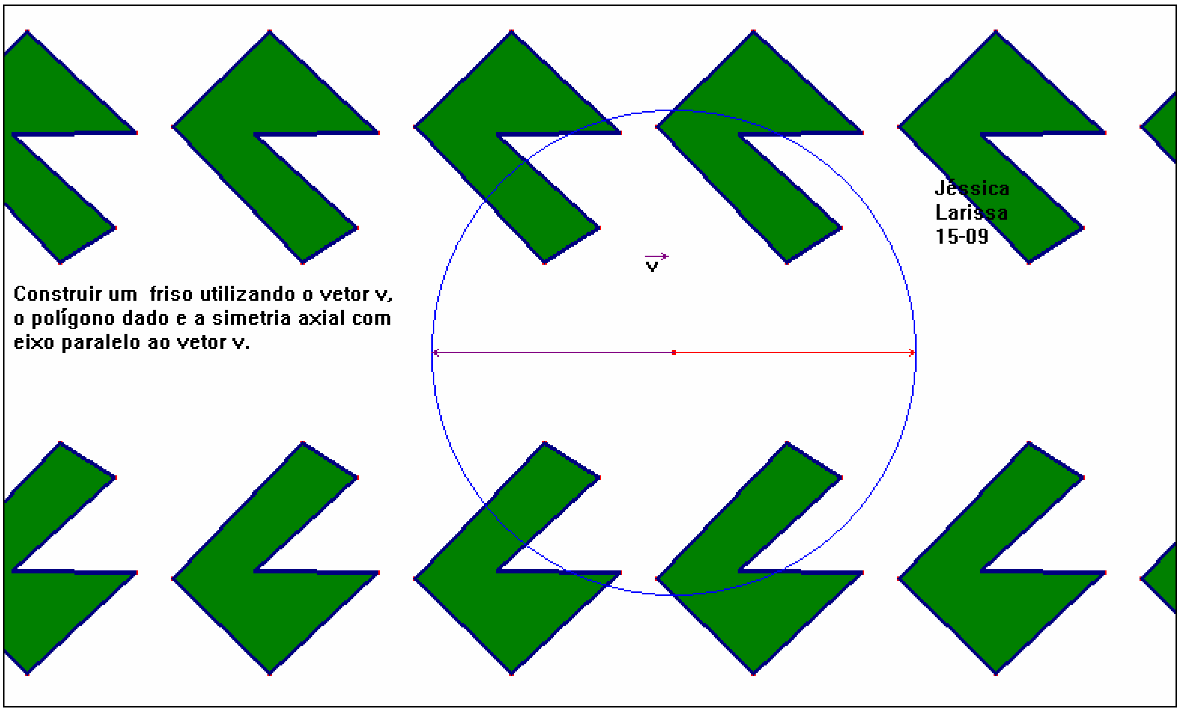


Fato interessante que deve ser referenciado é a possibilidade da conjectura por parte dos alunos com o Cabri-Géomètre II. A dupla D1 apresentou um friso inclinado em relação a horizontal. Ou seja, após a construção conforme orientado pela tarefa, alteraram a direção do vetor dado e foi possível visualizarem a correspondência e aceitaram este friso como sua resposta .



Estamos apresentando as análises da última fase da segunda parte de uma seqüência de atividades. É possível observar a criatividade e a forma muito relevante da exposição dos quadros de respostas. Segue um quadro da dupla D2, em que os alunos se preocuparam em deixar os vetores vinculados a uma circunferência, e como tal, puderam conjecturar as possíveis situações respostas.

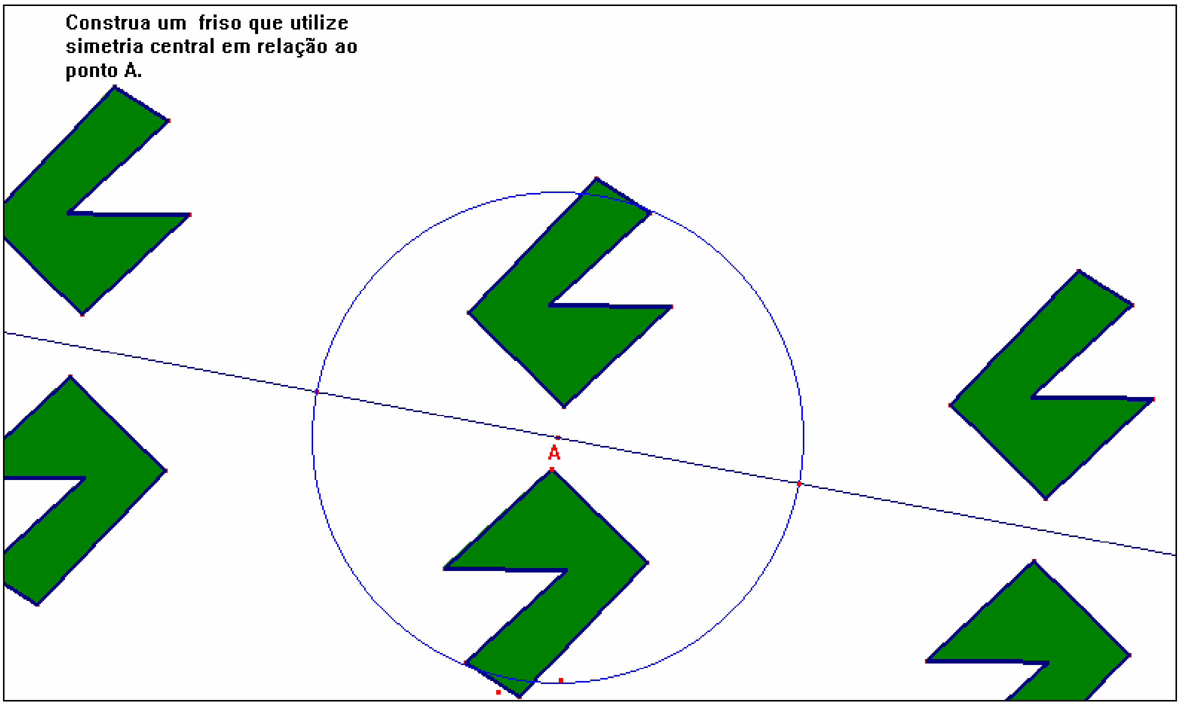
Possivelmente isto seja indício que mostram no uso dos frisos em ambiente informático e, na organização das tarefas dispostas, apresentem possibilidades que permitam ao aluno a conjectura de diversas formas de representar suas respostas.



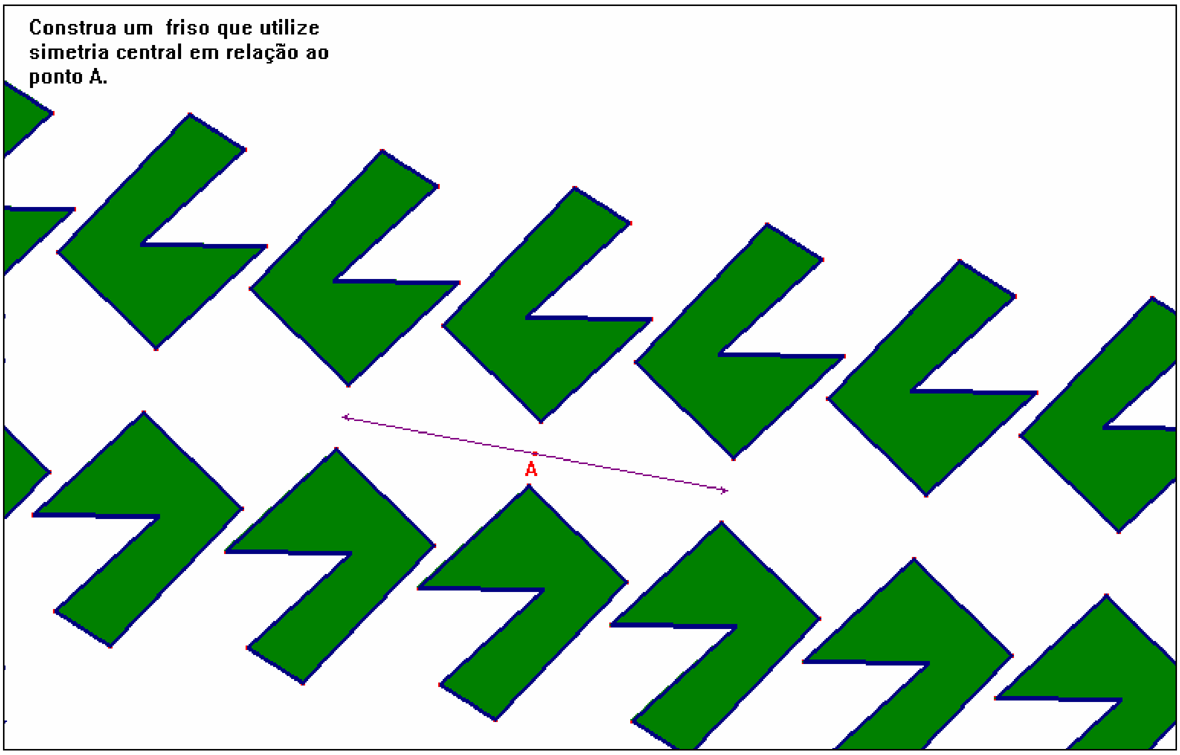
SIMETRIA CENTRAL - ***fase 6***

Encontramos nesta atividade um discurso já bastante diferenciado em relação aos primeiros. Novamente os alunos não utilizam uma forma fundamentada para suas argumentações e realizações de prova. No entanto, é possível observar um salto qualitativo no seu vocabulário por meio de uma mudança no seu discurso com relação à descrição dos passos para a solução da situação proposta na fase 6. Passo a apresentar a descrição e o respectivo quadro efetuado pela dupla D1 com duas respostas para a mesma atividade.

D1: 1º Achei a mediatriz entre os dois polígonos. Tracei uma circunferência de centro A com um raio qualquer. Determinamos os pontos de intersecção da circunferência com a mediatriz e usamos simetria central alternadamente para criar um friso.



D1: 2º Após achar a mediatriz entre os polígonos tracei uma circunferência qualquer e fiz dois vetores com início no centro e extremidade na circunferência de modo que um é o -v do outro e transladei os polígonos pelos vetores.



4.4.4. Atividade do 4º módulo - Reinvestimento

Neste último módulo apresentado na forma cronológica, os alunos vivenciaram a oportunidade de poderem utilizar os conceitos recém vistos no módulo 3 (Transformações geométricas -Translação, Simetria Axial, Simetria Central) em situações de familiarização (aqui como *fase 5*) e de exercícios mais complexos (aqui como *fase 6*), de acordo com a Dialética Ferramenta-Objeto. Iniciaremos nossas análises pela visita à Pinacoteca Benedito Calixto.

4.4.4.1. Visita à Pinacoteca Benedito Calixto

Uma primeira relevante verificação, ao chegarem e adentrarem nos recintos cobertos com as pinturas nas paredes finamente decoradas com motivos ornamentais, os alunos surpreenderam-se com a beleza do local e, espontaneamente, tivemos citações com associações dos frisos que estavam sendo vistos com os trabalhados nas atividades anteriores.

Isto pode ser um grande indício na significância das atividades realizadas na seqüência de atividades.

Posteriormente à visita monitorada, nos jardins do casarão, os alunos receberam uma tarefa que consistia em encontrar transformações geométricas presentes em algumas faixas.

Verificando os resultados nas folhas de respostas dos alunos, pudemos observar claramente que todas as duplas, sem exceção, apresentaram em sua descrição menção às transformações geométricas presentes (Veja anexo V - alunos 4º módulo Classificação das faixas da Pinacoteca).

De forma adequada, a dupla D3 reforçou em sua resposta a ausência da simetria central nestas faixas e, da mesma forma que as demais duplas, marcaram a lápis alguns eixos de simetria presentes.

Esta tarefa foi realizada em um ambiente descontraído, nos jardins da Pinacoteca. Os alunos dispunham de lápis e régua para a execução da atividade e o roteiro. Dentre os exemplares de faixas escolhidos (Anexo V alunos 4º módulo Classificação das faixas da Pinacoteca) o de nº 2 mereceu um destaque na análise, pois nenhuma dupla assinalou o eixo de simetria horizontal. Para a mesma foto é possível observar 3 faixas, das quais em duas existem simetrias axiais com eixo paralelo ao vetor da translação não lembradas pelos alunos. Possivelmente dado seu reduzido tamanho.

Em oposição a este fato, as faixas que apresentavam simetrias axiais com eixos perpendiculares à direção do vetor, foram assinaladas (reta representada tracejada).

Na totalidade das respostas, as duplas se preocuparam em marcar o vetor responsável pela translação das figuras nas faixas, localizando-o por meio de pontos correspondentes.

Na medida em que estavam respondendo a esta atividade, os alunos reconheceram que as faixas que estavam estudando estavam desenhadas nas paredes do casarão. Uma vez encerrada esta atividade, os alunos foram convidados a pesquisar em que cômodo da casa cada faixa se encontrava.

Novamente houve a transposição do visto e estudado na atividade realizada em papel e lápis no jardim da casa com as pinturas internas nas paredes.

4.4.4.2. Reclassificação das faixas

Para esta atividade foram entregues quinze faixas reproduzidas em papel (ANEXO VII) e um espelho. A atividade indica que as duplas façam associações entre as faixas de modo que tenham algo em comum (ANEXO VI Alunos 4º módulo Re-Classificação de Faixas).

Como previsto pela Dialética Ferramenta-Objeto, esta atividade de reclassificação de faixas situa-se na *fase 6* onde se utiliza o novo conceito apreendido em situações mais complexas.

Conforme previsto nas análises a priori, os alunos não tiveram dificuldades em reconhecer as transformações geométricas. É possível extrair das declarações que todos reconheceram a presença da translação:

D2 : "... todos têm translação."

D3: "... em todas as figuras podemos utilizar a ferramenta de translação.
... todas as faixas admitem a translação, pois essa ferramenta faz uma cópia fiel da figura desejada, então, o processo pode ser utilizado em todos os frisos".

D4: "Translação: todas possuem, porque se são frisos, elas são figuras que se repetem."

D5: "Translação através dos vetores desenhados ➔ Todas".

A dupla D1 apontou a presença da translação em todas as faixas exceto na correspondente a de nº 12 (ANEXO VII-c 2/3). Esta faixa é do tipo $\mathcal{F}_2$ (Rotação de meia volta com translação). Claramente a dupla ficou equivocada, pois não conseguiu identificar um motivo, elemento que se repete ao decorrer da faixa. Esta dificuldade foi prevista na análise a priori.

Para a simetria axial e simetria central, podemos encontrar várias citações que evidenciam um entendimento do conceito, ainda que eventualmente ocorram alguns casos omissos. Para exemplificar: uma faixa $\mathcal{F}_2^1$ (reflexão vertical e reflexão horizontal com translações) apresenta um ponto de simetria e contém uma reta de simetria. Na maioria das vezes, os alunos conseguiram identificar simetrias axiais com eixo paralelo à faixa, mas alguns poucos alunos não registraram a presença da simetria axial com eixo perpendicular a faixa, ou vice-versa.

E também, já que há simetria axial com eixo paralelo e perpendicular à faixa, então há também a simetria central em relação aos pontos de intersecção destes eixos. E aí também ocorrem algumas falhas, pois não há menção a esta transformação.

Seguem alguns discursos mais significativos quanto à justificativa do agrupamento das faixas pelas transformações pertencentes a mesma.

D3: "... Já quanto as figuras que admitem o recurso de simetria axial, é porque as figuras se completam como um espelho. E por fim, as figuras que admitem a simetria central, é quando temos um ponto no meio, no centro ou na metade da figura."

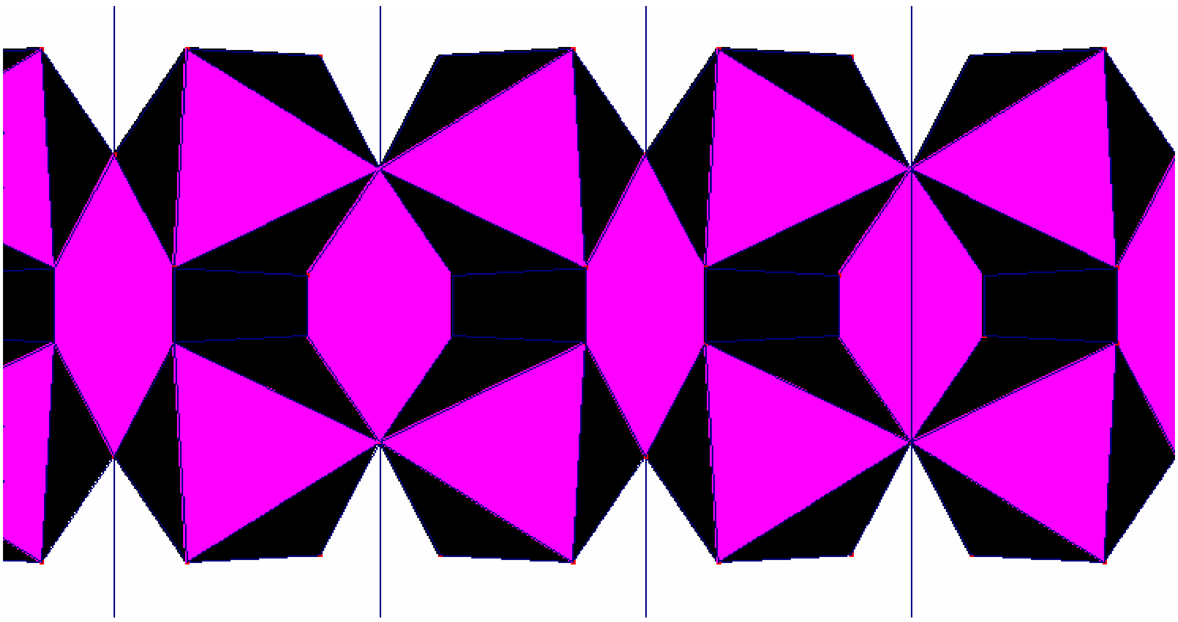
D4: "Simetria central ... por que se você girar um dos lados 180º, irá resultar o outro lado."

4.4.4.3. Construção de faixa

Nossa última atividade solicitada aos alunos foi a criação de faixas. Eles puderam de uma forma livre, exercer a criatividade para elaborar alguns modelos. Apresento alguns resultados produzidos por alunos com alguns comentários a respeito das transformações geométricas presentes nas faixas.

A tarefa tinha como objetivo incentivar a criatividade e registrar as articulações entre as transformações geométricas estudadas por meio dos frisos. Todos os alunos apresentaram exemplares nos quais encontramos as três transformações estudadas.

Aluna Ja.



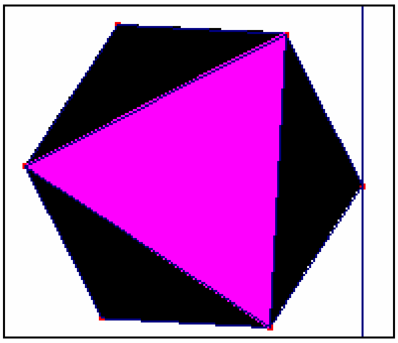
Esta aluna construiu uma faixa que apresenta claramente o uso da translação e simetria axial relativa a eixos, a saber:

a) eixos perpendiculares em relação à direção do vetor da translação;

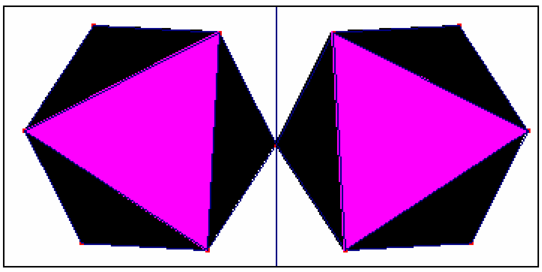
b) eixo central, neste caso horizontal, paralelo a direção do vetor.

No entanto, a aluna também usou a simetria central além da translação e da simetria axial como descrito a seguir.

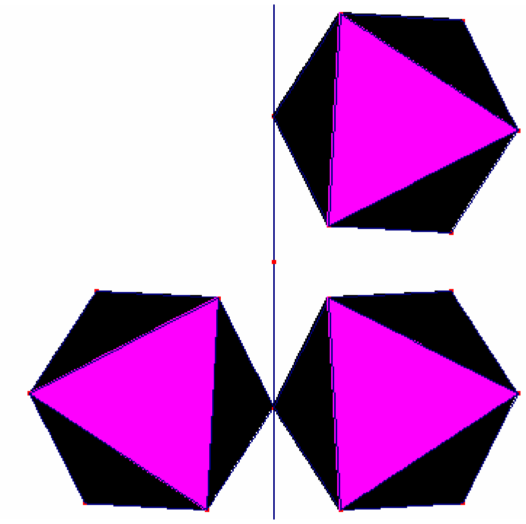
Revisando sua construção por meio do uso do Cabri-Géomètre II pudemos observar que a aluna construiu um hexágono regular. Posteriormente um triângulo eqüilátero com vértices coincidentes ao hexágono. Em seguida, uma reta a partir de um dos pontos do hexágono.



Esta reta foi utilizada como eixo de simetria para a construção do segundo polígono à direita da figura inicial, utilizando-se uma transformação simetria axial.

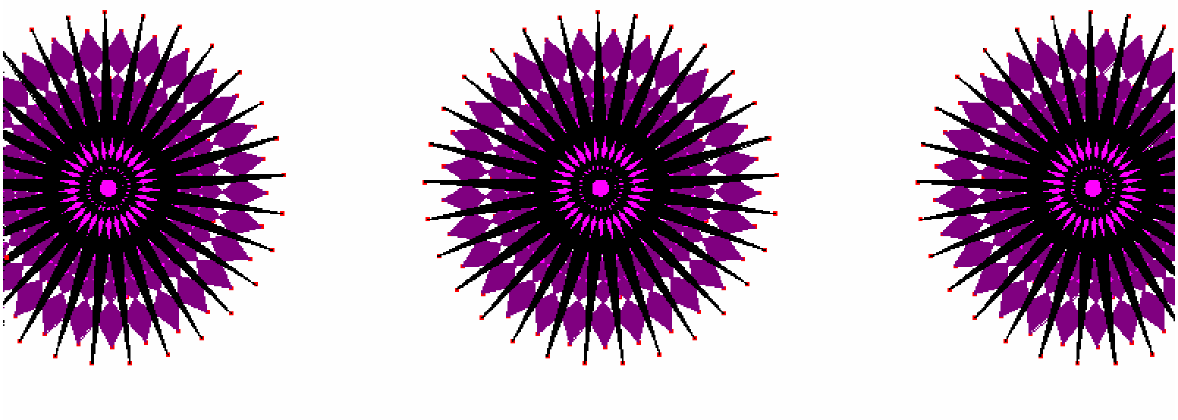


Para dar continuidade ao seu trabalho, criou um ponto nesta reta e formou outro polígono simétrico em relação a este ponto, ou seja, utilizou também a simetria central.



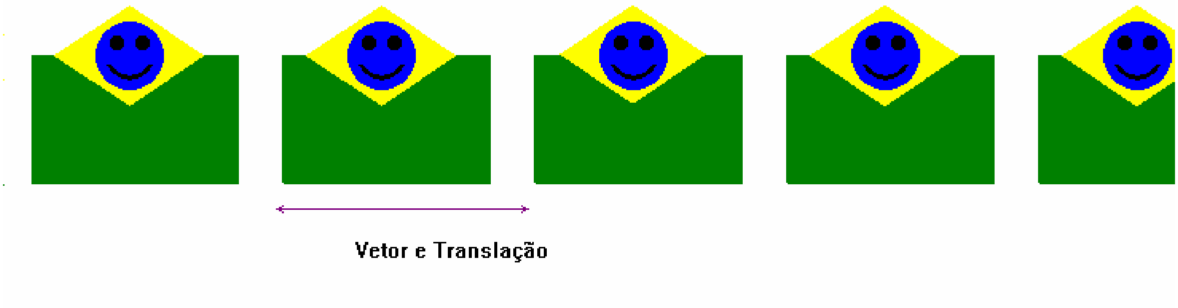
Estamos constatando pela produção da aluna uma articulação envolvendo as transformações geométricas estudadas. Sua produção tem traços criativos.

Aluna Je.



Esta faixa foi produzida utilizando a construção de polígono estrelado e, posteriormente, translação por um vetor.

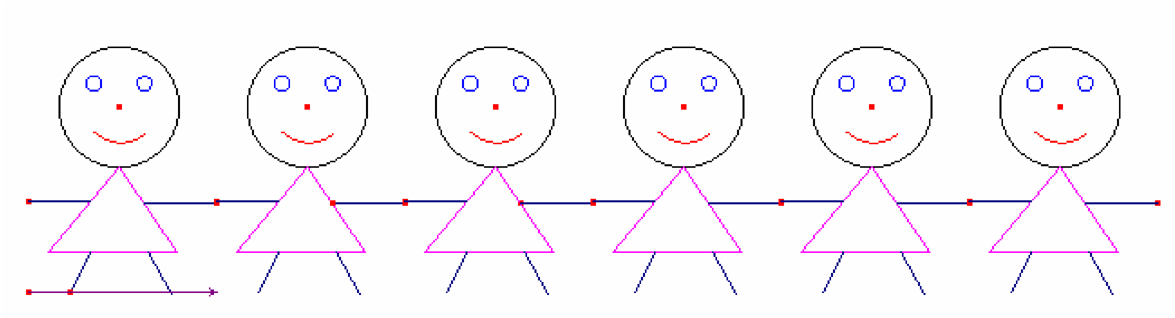
Aluno Fe.



Evidencia-se pela produção do friso do aluno Fe sua preocupação em mostrar que a transformação geométrica que gerou a faixa foi a translação e cujo vetor utilizado foi deixado anexo.

O desenho nos mostra que o aluno construiu dois vetores de mesmo módulo e direção, porém com sentidos contrários. A revisão por meio do Cabri-Géomètre-II da construção de sua produção mostra que o aluno efetuou a translação em dois sentidos de mesma direção.

Aluna Ca.



A produção da aluna Ca apresenta o registro do vetor utilizado na translação que reproduziu a figura inicial e formou o friso.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Examinando a trajetória da pesquisa por meio da metodologia da Engenharia Didática, pudemos elaborar uma seqüência de atividades a fim de introduzirmos conceitos das transformações geométricas: translação, simetria axial e simetria central.

Buscamos elementos durante todo nosso trabalho para verificarmos a hipótese de que o uso dos frisos com o Cabri-Géomètre II contribui para articular e dar significado aos conceitos de translação, simetria axial e simetria central.

O uso do Cabri-Géomètre-II foi muito importante, pois este ambiente de geometria dinâmica permite um cenário onde o aluno é um elemento ativo na construção de seu conhecimento. Ele participa e pode, por conjecturas no ir e vir de suas tentativas e possíveis confrontações de respostas e validações que o software permite que se faça, avançar com seus conhecimentos.

As atividades desta pesquisa foram elaboradas segundo a Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady. Todas as atividades cumpriram papéis importantes nas suas respectivas fases e o encadeamento destas atividades foi fundamental na construção dos significados dos conceitos matemáticos das transformações geométricas.

Em nossas considerações iniciais, apresentamos os sete tipos possíveis de frisos com suas respectivas transformações geométricas presentes. A articulação que este ente matemático permite foi muito interessante, pois pudemos verificar o envolvimento dos alunos e suas habilidades crescerem na resolução de problemas apresentados em ordem crescente de dificuldades e complexidades relativas à construção destes frisos.

Excetuando o módulo 1 em que onde ocorrera a familiarização com o software Cabri-Géomètre II, a partir do módulo 2, os resultados dos alunos mostraram que não houve classificação das quinze faixas dadas por características das transformações geométricas presentes nas mesmas, como fora previsto nas análises a priori.

Para promover a pesquisa das características das transformações geométricas que gostaríamos que os alunos reconhecessem nos frisos era preciso introduzir o conceito das transformações.

Dessa forma, baseado ainda na Dialética Ferramenta-Objeto, um novo ciclo foi criado e proposto aos alunos. Ciclo este específico e completo (Módulo 3), com o objetivo de introduzir o conceito de translação. Desde que todos os frisos possuem translação, iniciamos nossas atividades por este conceito.

Do ponto de vista da pesquisa, os arquivos dos quadros de respostas dos alunos e a revisão da construção dos desenhos feita pelos mesmos foram peças fundamentais na resposta da questão de pesquisa, pois permitiram que fizéssemos as análises a posteriori de cada atividade para que pudéssemos confrontar com as análises realizadas a priori, segundo a metodologia da Engenharia Didática.

Aspectos manipulativos, tangíveis na condução das primeiras atividades, caracterizando uma Geometria Concreta (G0) segundo Parzysz foram evoluindo para uma geometria Espaço-gráfica (G1) no ambiente informatizado.

Nos resultados apresentados no módulo 3, evidenciam-se considerações dos alunos acerca das características de cada uma das transformações geométricas. Estes resultados apontam indícios dedutivos na forma da condução da atividade. São vestígios que apontam para uma direção do que Parzysz nomeia de Geometria Proto-axiomática (G2).

Quando analisadas as estratégias de resolução das atividades, foi possível observar a importância do uso do botão rastro nos momentos de institucionalização. Esta ferramenta disponível no Cabri-Géomètre-II favoreceu a visualização e a apreensão de aspectos fundamentais das transformações geométricas sob o ponto de vista pontual. Tal situação ficou muito evidente conforme as considerações na análise a posteriori da atividade relativa a simetria central - *fase 1*. Os alunos construíram a imagem de uma figura simétrica em relação a um ponto fixo na atividade. Para isto, localizaram geometricamente um ponto imagem em relação a outro ponto pertencente a figura dada. Acionaram o botão rastro para este ponto localizado geometricamente. Uma vez que "arrastavam" o ponto pertencente à figura, desenhavam não só a imagem deste ponto, mas sim a imagem da figura completa.

A escolha dos frisos para articular estes conhecimentos das transformações geométricas foi muito importante. Este ente matemático proporcionou várias situações problemas, uma vez que os alunos eram postos à prova na construção de frisos com a transformação geométrica recém vista para finalizar cada ciclo da Dialética Ferramenta-Objeto.

Nas análises a posteriori relativas à reclassificação das quinze faixas feitas inicialmente, observa-se um salto qualitativo nas respostas apresentadas. Isto evidencia que a organização proposta no uso da Dialética Ferramenta-Objeto pode ser relevante no tratamento dos conceitos de transformações geométricas: translação, simetria axial e simetria central.

Não obstante, todos os resultados favoráveis obtidos com o uso do Cabri-Géomètre II e os frisos nas atividades envolvendo as transformações geométricas, a pesquisa ainda contemplou o aspecto artístico presente nos frisos.

A visita realizada na Pinacoteca Benedito Calixto, Santos, permitiu aos alunos um retorno espontâneo no reconhecimento das transformações geométricas presentes nos frisos pintados nas paredes do interior deste casarão finamente decorado com pinturas artísticas deste importante artista.

Na avaliação dos frisos produzidos pelos alunos no final de nossa seqüência de atividades, encontramos diversos exemplares muito criativos. É evidenciado nestes exemplares, o uso das transformações translação, simetria axial e simetria central presentes nos frisos.

Este trabalho limitou-se a estudar as transformações geométricas por meio dos frisos. E como já explicitado, há uma limitação nos sete tipos de frisos em que ocorrem estas transformações. Outra abordagem rica e interessante a ser explorada é o estudo das transformações geométricas presentes nos padrões de pavimentação do plano que fica como sugestão para futuras pesquisas.

BIBLIOGRAFIA

ALSINA,C.;PÉREZ,R.;RUIZ,C. *Simetria dinámica*. Madrid: Síntesis, 1989.

ALVES, S.; GALVÃO,M.E. *Um estudo Geométrico das Transformações Elementares*. Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 1996.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques,*Grenoble:La Pensée Sauvage-Éditions,v.9.3,p.281-308, 1988.

BALACHEFF,N.; KAPUT,J. Computer-based Learning Environments in Mathematics. In:nd. (Ed.) *International Handbook in Mathematics Education.* London: Kluwer, 1996,p.469-501.

BALDIN,Y.Y. *Atividades com Cabri-II para cursos de licenciatura em matemática e professores do ensino fundamental e médio*. São Carlos: UFSCar,2002.

BALDIN,Y.Y. et al. Um estudo Geométrico de Classificação de Isometrias do Plano com Cabri-Géomètre-II : *I Cabri World 99* PUC, São Paulo.SP,1999.

BARBOSA,R.M. *Descobrindo padrões em mosaicos*.São Paulo:Atual,1993.

BKOUCHE, R . *De La Geometrie et Des Transformations* .REPERES – IREM n. 4, p.134-158, juillet.1991.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Ed.Blücher,1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto.Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental – Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

________ Ministério da Educação e do Desporto.Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHEVALLARD,Y. *Estudar Matemáticas* – O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução por Dayse Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COMMANDINO,F. *Euclides - Elementos de Geometria*. Adicionados e ilustrados por Roberto Simson, 2 ed. São Paulo: Cultura,1944.

DOUADY, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignemant des mathématiques*. These de doctorat d'etat. Universite Paris VII. Paris, 1984.

DOUADY, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet.* Recherches en didactique des mathématiques, Paris, v.7, n.2, p.5-31, 1986.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução por Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995.

EVES, H. *Tópicos da História da Matemática*. São Paulo: Atual, 1992.

GOMBRICH,E.H. *A História da Arte*. Tradução por Álvaro Cabral. 16 ed. Rio de Janeiro: LTC,1999.

HEALY,L. Blurring distinctions between the empirical and the theoretical/The roles of examples in the proving process. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, PUC-SP, v.2, n. 2, 2002a.

HEALY,L. Identifying and explaining geometrical relationship: iteractions with robust and soft Cabri constructions. *24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Hiroshima: Japan, p. 103-117, 2002b.

HEALY,L. (S.) *Iterative Design and Comparison of Learning Systems for Reflection in Two Dimensions*. Tese de Doutorado. University of London, Intitute of Education, 2002c.

LABORDE, C. et al.*Géométrie avec Cabri, scénarios pour le lycée.*Collection Objectif MultiMédia, CRDP de l'académie de Grenoble,chap.4,p.95-98 , 2001.

LABORDE ,C. The computer as part of the learning environment : the case of geometry. In C. Keitel, & K. Ruthven, (Eds.) *Learning from Computers: Mathematics education and technology.* New York: Springer Verlag, p. 48-67, 1993

MABUCHI, S.T. *Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. *Dialética ferramenta objeto.* In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma introdução.* 2 ed. São Paulo: EDUC, 2002. p.115-134.

MARTIN,G.E. *Transformation Geometry.* An introduction to simetry. New York: Springer Verlag, 1982.

PARZYSZ, B. *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1.*Extrait du colloque de la COPIRELEM. Tours, 2001.

PASTOR,A;Rodriguez,A. *El Grupo de las Isometrías del Plano.* Madrid: Síntesis, 1996.

PIAGET, Jean, GARCIA, Rolando. *Psicogénese e História das Ciências*. Traduzido por Maria Fernanda de Moura Rebelo Jesuino, 1ed. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

RUOFF, É. B. L. *Isometria e Ornamentos do Plano Euclidiano*. São Paulo: Atual, 1982.

ANEXOS

ANEXOS - LISTA

ANEXO I

1ª Sessão – Classificação das faixas 11-08-2004

Nome:____

Nome:____

1. Você recebeu 15 faixas e um espelho. Faça as associações entre elas de modo que tenham <u>algo em comum</u>. <u>*Justifique*</u> suas respostas.

ANEXO I-a

1ª atividade: Classificação das faixas

Aluno 1 ___________________________ Aluno 2 ________________________________

Hora início: _______________ Hora término: _____________ ___/___/____

Quais os primeiros critérios que os alunos tentaram utilizar para classificar as faixas?
____
____
____
____

Alguns termos chaves (paralelismo, figuras repetidas, etc.) poderão ser proferidos nas análises dos alunos. Assinale-os na ordem em que foram usados:
____
____
____
____

Assinale na sua opinião:
O grau de dificuldade encontrado pelos alunos para a execução desta atividade:
(   ) muito   (   ) razoável   (   ) pouco   (   ) nenhum

Qual foi a faixa mais polêmica? (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15)
Por quê?
____
____
____
____

Qual foi a faixa que mais chamou a atenção? (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15)

Por quê?

____

____

____

____

Comentários:

____

____

____

____

____

____

ANEXO II

Nome:______________________________ (__/__/04)

Nome:______________________________

2ª Sessão -Atividade 1

1. Abrir o arquivo A1.fig.

2. Efetuar uma cópia da figura que está no retângulo A e que é constituída somente por arcos de circunferência no interior do retângulo B.

Cuidado para que o resultado seja uma reprodução fiel ao modelo dado.

3. Descreva os passos para realizar esta tarefa.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

4. Como você justificaria o fato de a cópia criada ser fiel ao modelo dado?

____
____
____
____
____
____
____
____
____

2ª Sessão - Atividade 2a (__/__/04)

1. Abrir o arquivo A2.fig.
2. Cada figura é formada por dois arcos de circunferência. A figura B é cópia fiel da figura A. Complete o segundo arco da figura A.
3. Descreva e justifique os passos para realização desta tarefa.

2ª Sessão - Atividade 2b (__/__/04)

1. Abrir o arquivo A3.fig
2. Crie um segmento AB e uma flecha usando o botão "vetor".
3. Utilizando o botão "translação" no menu de ferramentas, clique sobre o segmento e, posteriormente, sobre a flecha (vetor). O que se observa?

4. Sendo C o ponto correspondente ao ponto A e D o ponto correspondente ao ponto B, descreva características do quadrilátero ABDC.

5. Descubra uma relação entre o quadrilátero e o vetor. Justifique.

2ª Sessão - Atividade 2c (__/__/04)

1. Abrir o arquivo A4.fig.

2. Dado um polígono ABCDE e uma flecha (vetor), obter uma cópia A'B'C'D'E' do polígono dado.

3. Descreva os passos para realização desta tarefa.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

4. A seguir movimente apenas a "ponta" da flecha. Descubra uma relação entre os polígonos e entre os polígonos e o vetor. Justifique.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

2ª Sessão - Atividade 3 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo A5.fig. e refazer a Atividade 1, reescrita abaixo.

2. Efetuar uma cópia da figura que está no retângulo A e que é constituída somente por arcos de circunferência no interior do retângulo B.

Cuidado para que o resultado seja uma reprodução fiel ao modelo dado.

3. Descreva os passos para realização desta tarefa.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

4. Como você justificaria o fato de a cópia criada ser fiel ao modelo dado?

____
____
____
____
____
____
____
____
____

2ª Sessão - Atividade 4a (__/__/04)

1. Abrir o arquivo A6.fig.
2. Crie um hexágono regular ABCDEF e um quadrado WXYZ, ambos com centro em O.
3. Faça seis cópias do quadrado WXYZ com centros nos vértices do hexágono ABCDEF de modo que as posições dos quadrados sejam as mesmas que a do quadrado WXYZ.

4. Descreva e justifique seu procedimento.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

2ª Sessão - Atividade 4b (__/__/04)

1. Abrir o arquivo A7.fig.

2. Refaça a atividade anterior (Atividade 4a), porém utilizando a ferramenta "translação" e o menor número possível de vetores. Quantos vetores você precisou determinar para fazer esta atividade? Descreva e justifique seu procedimento.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

2ª Sessão - Atividade 4c (__/__/04)

1. Abrir o arquivo A8.fig.

2. Faça uma translação da figura segundo o vetor v e observe as duas figuras.

3. Quais as características do botão translação? Justifique.

2ª Sessão - Atividade 5 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo A9.fig.

2. Figuras repetidas ao longo de uma direção é parte de um objeto geométrico chamado "faixa" ou "friso".

3. Construir uma "faixa" ou "friso" utilizando um mesmo vetor v e os polígonos dados.

4. Descreva seus passos para realização desta tarefa.

ANEXO II-a

Nome:______________________________ (__/__/04)

Nome:______________________________

Hora início ______ 2ª Sessão -Atividade 1

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim ( ) Não

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____

____

____

____

____

____

____

2. Quais foram as primeiras estratégias de resolução utilizadas pelos alunos?

____

____

____

____

____

____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? ( ) Sim

( ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____

____

____

____

____

____

Hora início ______ 2ª Sessão - Atividade 2a (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____
____
____
____
____
____
____

2. Quais foram as primeiras estratégias usadas? Houve referência a segmentos ou retas paralelas? Foi possível constatar a idéia de pontos correspondentes?

____
____
____
____
____
____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? ( ) Sim

( ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____
____
____
____
____
____
____

Hora início ______ 2ª Sessão - Atividade 2b (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____
____
____
____
____
____
____

2. Os alunos demonstraram preocupação em verificar se suas afirmações para justificar suas conjecturas eram verdadeiras?

____
____
____
____
____
____

3. O reconhecimento do paralelogramo foi feito de forma natural ou dificultosa? A idéia de paralelismo emergiu por parte dos alunos?

____
____
____
____
____
____
____

5. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

6. Comentários

____
____
____
____
____
____
____

Hora início ______ 2ª Sessão - Atividade 2c (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

(   ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____
____
____
____
____
____
____

2. Os alunos verificaram que os polígonos eram congruentes? Verificaram as medidas dos segmentos e dos ângulos internos?

____
____
____
____
____
____

3. Os alunos fazem referências à direção do vetor e à direção da figura transladada?

____
____
____
____
____
____

4. Houve referência à atividade 1 que não tinha sido eventualmente resolvida?

____
____
____
____
____
____

5. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

6. Comentários

____
____
____
____
____
____
____

Hora início ______ 2ª Sessão - Atividade 3 (__/__/04)

1. A resolução desta atividade passa pelo uso de um vetor. Os alunos se manifestaram de alguma forma, seja por gesto ou por algum outro comportamento, de que houve apreensão deste conceito? Ficou claro para eles que a translação dá conta de resolver esta situação problema?

____
____
____
____
____
____
____

2. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? ( ) Sim

( ) Não. Hora término ________.

3. Comentários

____
____
____
____
____
____
____

Hora início ______ 2ª Sessão - Atividade 4a (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

(   ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____
____
____
____
____
____
____

2. Após a criação dos polígonos, qual foi a primeira estratégia usada para resolver esta atividade?

____
____
____
____
____
____
____

3. Quantos vetores foram criados para resolver esta atividade?________

4. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

5. Comentários

____
____
____
____
____
____
____

Hora início ______ 2ª Sessão - Atividade 4b (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____
____
____
____
____
____
____

2. Quantos vetores foram criados para resolver esta atividade?________

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? ( ) Sim

( ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____
____
____
____
____
____
____

Hora início ______ 2ª Sessão - Atividade 4c (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____
____
____
____
____
____

2. Os alunos usaram prontamente a translação ou ainda apresentaram alguma outra estratégia para resolver esta atividade?

____
____
____
____
____
____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? ( ) Sim

( ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____
____
____
____
____
____
____

Hora início ______ 2ª Sessão - Atividade 5 (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

(   ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____
____
____
____
____
____

2. Quais estratégias os alunos utilizaram para resolver a translação do polígono verde que está à direita na parte de baixo da tela?

____
____
____
____
____
____
____

3. Houve dificuldade e iniciativa em construir um vetor para poder efetuar as translações pedidas?

____
____
____
____
____
____
____

4. Eram citadas pelos alunos as características dos vetores nas atividades?

____
____
____
____

5. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

6. Comentários

____

____

____

____

____

____

____

ANEXO III

Nome:______________________________ (__/__/04)

Nome:______________________________

3ª Sessão -Atividade 1

1. Abrir o arquivo B1.fig.

2. Está sendo apresentada uma figura que tem um eixo de simetria e uma outra figura constituída de arcos de circunferência e de segmentos de reta. Complete esta figura de modo que a linha pontilhada seja um eixo de simetria.

3. Descreva os seus passos para realização desta tarefa.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

4. Como você justificaria que a linha pontilhada é um eixo de simetria?

____
____
____
____
____
____
____
____
____

3ª Sessão - Atividade 2a (__/__/04)

1. Abrir o arquivo B2.fig.

2. A figura apresentada é formada por segmentos de reta e arcos de circunferências. Completar a figura de modo que a reta r pontilhada seja um eixo de simetria.

3. Descreva e justifique seus passos para realização desta tarefa.

3ª Sessão - Atividade 2b (__/__/04)

1. Abrir o arquivo B3.fig

2. Crie uma reta e um segmento AB de modo que a reta e o segmento não se intersectam.

3. Utilizando o botão "simetria axial" no menu de ferramentas, clique sobre o segmento e posteriormente sobre a reta (eixo de simetria). O que se observa?

4. Nomeie o ponto correspondente de A como A' e o ponto correspondente de B como B'. Quais são as características do quadrilátero AA'B'B?

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

3ª Sessão - Atividade 2c (__/__/04)

1. Abrir o arquivo B4.fig.

Dado um ponto A, o ponto obtido ao clicar no ponto A, no botão "simetria axial" no menu ferramenta e numa reta, chama-se simétrico do ponto A em relação à reta dada.

2. Dados os pontos A, A' e B, sendo A' simétrico de A em relação a uma reta r. Obter o simétrico de B em relação a esta mesma reta r.

3. Descreva seus passos para realização desta tarefa.

____
____
____
____
____
____
____

4. O que significa dizer que o ponto A' é o simétrico de A em relação à reta r?Justifique.

3ª Sessão - Atividade 3 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo B5.fig. e refazer a Atividade 1, reescrita abaixo.

2. Está sendo apresentada uma figura que tem um eixo de simetria e uma outra figura constituída de arcos de circunferência e de segmentos de reta. Complete esta figura de modo que a linha pontilhada seja um eixo de simetria.

3. Descreva seus passos para realização desta tarefa.

4. Como você justificaria que a linha pontilhada é um eixo de simetria?

3ª Sessão - Atividade 4 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo B6.fig.

2. Crie uma reta e um ponto A fora dela. Construir o simétrico de A em relação a esta reta. Movimente o ponto A e observe o ponto A'.

3. Utilize a ferramenta traço: clique no botão "rasto" no menu de ferramenta e posteriormente nos pontos A e A'.

4. Movimente novamente o ponto A. O que você observa?

3ª Sessão - Atividade 5 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo B7.fig.

2. Está sendo apresentado um friso onde estão faltando alguns elementos. Você poderia completá-lo?

3. Descreva seus passos para realização desta tarefa.

3ª Sessão - Atividade 6 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo B8.fig.

2. Construir um friso utilizando o vetor v, o polígono dado e a simetria axial com eixo paralelo ao vetor v.

3. Descreva seus passos para realização desta tarefa.

ANEXO III-a

Nome:_______________________________ (__/__/04)

Nome:_______________________________

Hora início ______ 3ª Sessão -Atividade 1

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim ( ) Não

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____

____

____

2. Quais foram as primeiras estratégias de resolução utilizadas pelos alunos?

____

____

____

____

____

____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? ( ) Sim

( ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____

____

____

Hora início ______ 3ª Sessão - Atividade 2a (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____

____

____

____

2. Quais foram as primeiras estratégias usadas? Houve referência a segmentos ou retas perpendiculares ao eixo de simetria? Foi possível constatar a idéia de pontos correspondentes?

____

____

____

____

____

____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____

____

____

____

Hora início ______ 3ª Sessão - Atividade 2b (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

(   ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário para a dupla?

____

____

____

____

2. Os alunos demonstraram preocupação em verificar se suas afirmações para justificar suas conjecturas eram verdadeiras?

____

____

____

3. O reconhecimento do trapézio <u>isósceles</u> foi feito de forma natural ou dificultosa? A idéia de paralelismo emergiu por parte dos alunos?

____
____
____
____
____
____

4. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

5. Comentários

____
____
____
____

Hora início ______ 3ª Sessão - Atividade 2c (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

(   ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário para a dupla?

____
____
____
____

2. Os alunos conseguiram encontrar a reta r? Descreva as estratégias utilizadas.

(   ) sim

____
____
____
____

( ) não

____

____

____

____

3. Houve referência à atividade 1 que não tinha sido eventualmente resolvida?

____

____

____

4. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? ( ) Sim

( ) Não. Hora término ________.

5. Comentários

____

____

____

Hora início ______ 3ª Sessão - Atividade 3 (__/__/04)

1. A resolução desta atividade passa pelo uso da simetria axial. Os alunos se manifestaram de alguma forma, seja por gesto ou algum outro comportamento, de que houve apreensão deste conceito? Ficou claro para eles que a simetria axial é suficiente para resolver esta situação problema?

( ) Sim

____

____

____

( ) Não

____

____

____

____

2. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

3. Comentários

____

____

____

____

Hora início ______ 3ª Sessão - Atividade 4 (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

(   ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário para a dupla?

____

____

____

____

2. Com o uso do traço, os alunos relacionaram alguma dependência entre os pontos A e A'? Algum aluno falou em função?

____

____

____

____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____

____

____

____

____

Hora início ______ 3ª Sessão - Atividade 5 (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário para a dupla?

____
____
____
____

2. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente?

( ) Sim. Qual foi a estratégia utilizada?

____
____
____
____

( ) Não.

Hora término ________.

3. Comentários

____
____
____
____

Hora início ______ 3ª Sessão - Atividade 6 (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário para a dupla?

____
____
____
____

2. Os alunos utilizaram primeiro a simetria axial ou a translação? Houve menção em utilizar um outro eixo de simetria sem ser paralelo ao vetor?

____
____
____
____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____
____
____
____
____
____
____

ANEXO IV

Nome:______________________________ (__/__/04)

Nome:______________________________

4ª Sessão -Atividade 1

1. Abrir o arquivo C1.fig.

2. Está sendo apresentada a figura de uma carta de baralho que possui uma figura simétrica em relação a um ponto O. Complete a outra figura maior no interior da circunferência de forma a torná-la simétrica em relação ao ponto indicado.

3. Descreva seus passos para realização desta tarefa.

4ª Sessão - Atividade 2a (__/__/04)

1. Abrir o arquivo C2.fig.

2. A figura apresentada é formada por arcos de circunferências. ABCDE e A'B'C'D'E' são figuras simétricas em relação ao ponto O. Complete a figura A'B'C'D'E'.

3. Descreva e justifique os passos que você fez para realizar esta tarefa.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

4ª Sessão - Atividade 2b (__/__/04)

1. Abrir o arquivo C3.fig

2. Utilizando o botão "simetria central" no menu de ferramenta, clique sobre a seta ABCDE e posteriormente sobre o ponto O.

3. Nomear a nova figura obtida de A'B'C'D'E'.

4. Para você, o que significa dizer que o ponto A' é simétrico do ponto A em relação ao ponto O?

____
____
____
____
____
____
____

4ª Sessão - Atividade 3 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo C4.fig. e refazer a Atividade 1, reescrita abaixo.

2. Está sendo apresentada a figura de uma carta de baralho que possui uma figura simétrica em relação a um ponto O. Complete a outra figura maior no interior da circunferência de forma a torná-la simétrica em relação ao ponto indicado.

3. Descreva seus passos para realização desta tarefa.

4ª Sessão - Atividade 4 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo C5.fig.

2. Construa uma figura simétrica em relação ao ponto O e nomei-a de A'B'C'D'.

3. Descubra uma relação entre as bandeirinhas, e as bandeirinhas e o ponto O.

4. Justifique.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

4ª Sessão - Atividade 5 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo C6.fig.

2. Nesta faixa estão faltando alguns elementos. Você poderia completá-la? Descreva seus passos para realização desta tarefa.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

4ª Sessão - Atividade 6 (__/__/04)

1. Abrir o arquivo C7.fig.

2. Construa um friso que utilize simetria central em relação ao ponto A.

3. Descreva seus passos para realização desta tarefa.

ANEXO IV-a

Nome:________________________________ (__/__/04)

Nome:________________________________

Hora início ______ 4ª Sessão -Atividade 1

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim (   ) Não

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____

____

____

2. Quais foram as primeiras estratégias de resolução utilizada pelos alunos?

____

____

____

____

____

____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? ( ) Sim

( ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____

____

____

Hora início ______ 4ª Sessão - Atividade 2a __/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

2. Quais foram as primeiras estratégias usadas? Houve referência a alguma outra transformação geométrica anteriormente vista? Foi possível constatar a idéia de pontos correspondentes?

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

Hora início ______ 4ª Sessão - Atividade 2b (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

(   ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário para a dupla?

2. Os alunos demonstraram dificuldade em reconhecer os pontos A', B', C', D' e E' como correspondentes a A,B,C,D e E?

____
____
____
____
____
____
____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____
____
____
____

Hora início ______ 4ª Sessão - Atividade 3 (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

(   ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário dado para a dupla?

____
____
____
____

2. Os alunos se utilizaram do ponto de simetria O? Descreva as estratégias utilizadas.

(   ) Sim

____
____
____
____

(   ) Não

____
____
____
____

3. Houve referência à atividade 1 que não tinha sido eventualmente resolvida?

____
____
____

4. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

5. Comentários

____
____
____

Hora início ______ 5ª Sessão - Atividade 4 (__/__/04)

1. Os alunos utilizaram uma linguagem precisa para justificar a congruência entre as bandeirinhas e a relação entre as bandeirinhas e o ponto O?
(   ) Sim

____
____
____

(   ) Não

____
____
____
____

1. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

2. Comentários

____
____
____
____

Hora início ______ 4ª Sessão - Atividade 5 (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? (   ) Sim

(   ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário para a dupla?

____
____
____
____

2. Os alunos perceberam que caso utilizassem apenas a translação seria possível resolver este problema? Os alunos mediram a distância entre dois pontos situados no eixo de forma a construir a faixa com os elementos que estavam ausentes?

____
____
____

3. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente? (   ) Sim

(   ) Não. Hora término ________.

4. Comentários

____
____
____
____
____

Hora início ______ 4ª Sessão - Atividade 6 (__/__/04)

1. Houve entendimento da proposta? ( ) Sim

( ) Não. Qual foi o esclarecimento necessário para a dupla?

____

____

____

____

2. Os alunos conseguiram fazer a proposta satisfatoriamente?

( ) Sim. Qual foi a estratégia utilizada?

____

____

____

____

( ) Não

Hora término ________.

3. Comentários

____

____

____

____

ANEXO V

5ª Sessão – A - Classificação das faixas 29-09-2004

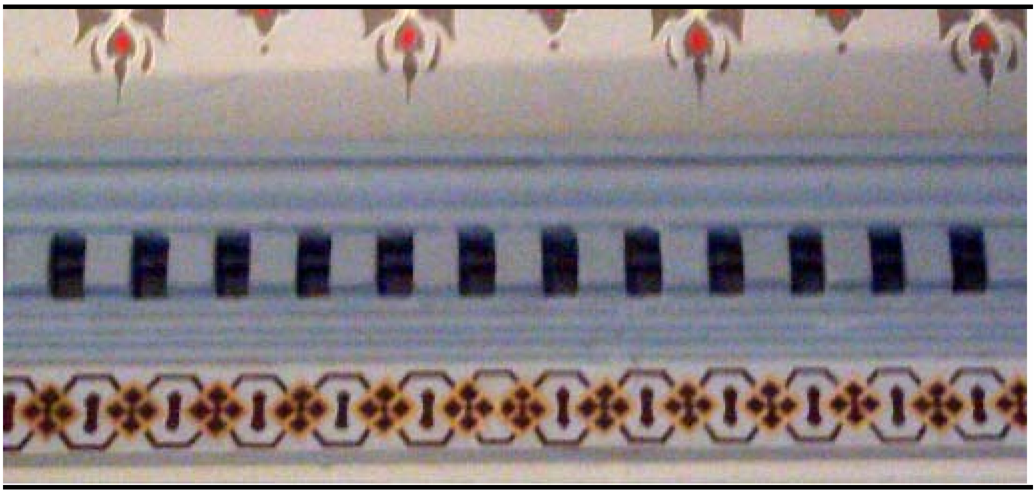
Nome:____

Nome:____

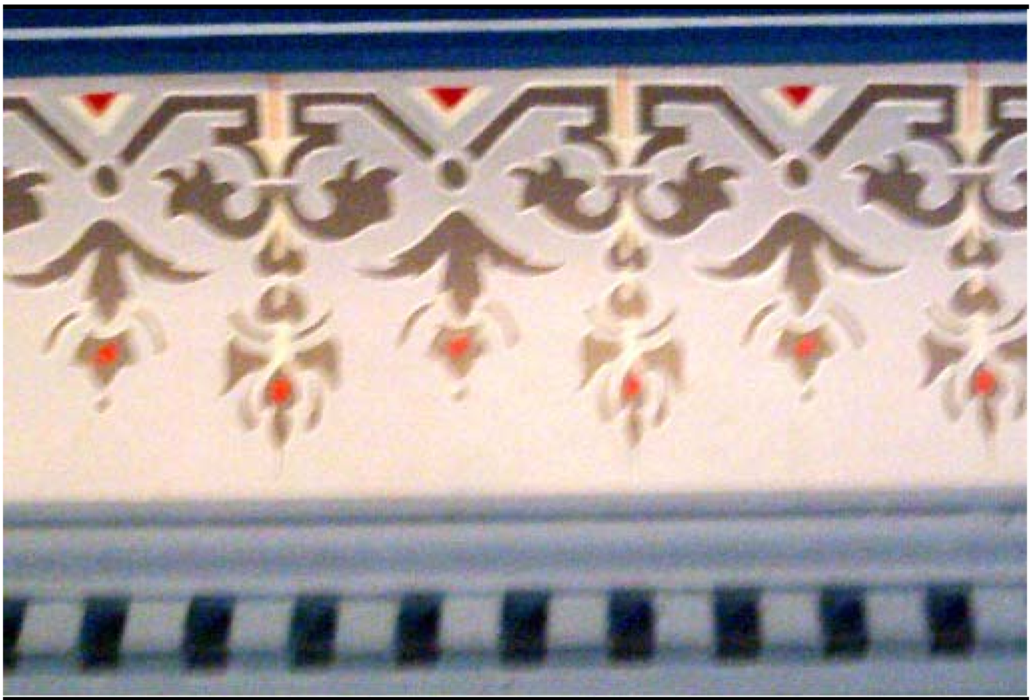
1. Enumere as transformações geométricas presentes nas faixas. *Justifique* suas respostas.

1

2



3

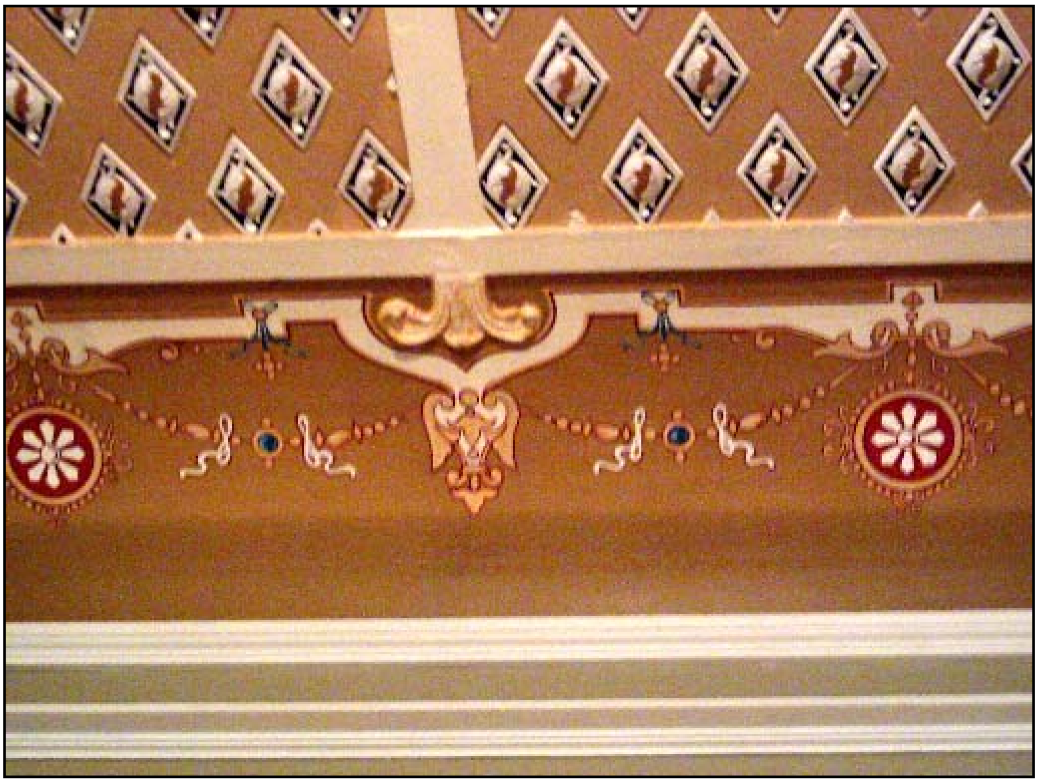


ANEXO V alunos 4º módulo Classificação das faixas da Pinacoteca

4

5

6



ANEXO V alunos 4º módulo Classificação das faixas da Pinacoteca

ANEXO VI

5ª Sessão – Classificação das faixas 29-09-2004

Nome:____

Nome:____

1. Você recebeu 15 faixas e um espelho. Faça as associações entre elas de modo que tenham algo em comum. *Justifique* suas respostas.

ANEXO VI-a

1ª atividade: Re-classificação das faixas

Aluno 1 ___________________________ Aluno 2 ________________________________

Hora início: _______________ Hora término: _____________ ___/___/____

Quais os primeiros critérios que os alunos tentaram utilizar para classificar as faixas?

____

____

____

____

Alguns termos chaves (paralelismo, figuras repetidas, etc.) poderão ser proferidos nas análises dos alunos. Assinale-os na ordem em que foram usados:

____

____

____

____

Assinale na sua opinião:

O grau de dificuldade encontrada pelos alunos para a execução desta atividade:

( ) muito ( ) razoável ( ) pouco ( ) nenhum

Qual foi a faixa mais polêmica? (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15)

Por quê?

____

____

____

____

Qual foi a faixa que mais chamou a atenção? (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15)

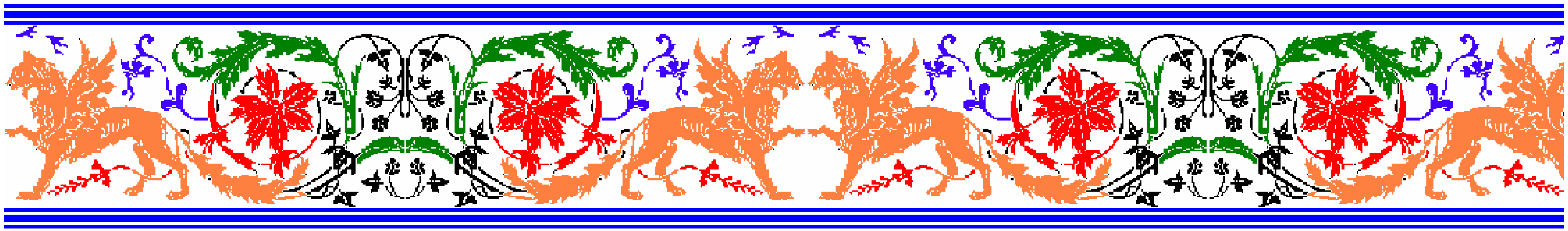
Por quê?

Comentários:

1

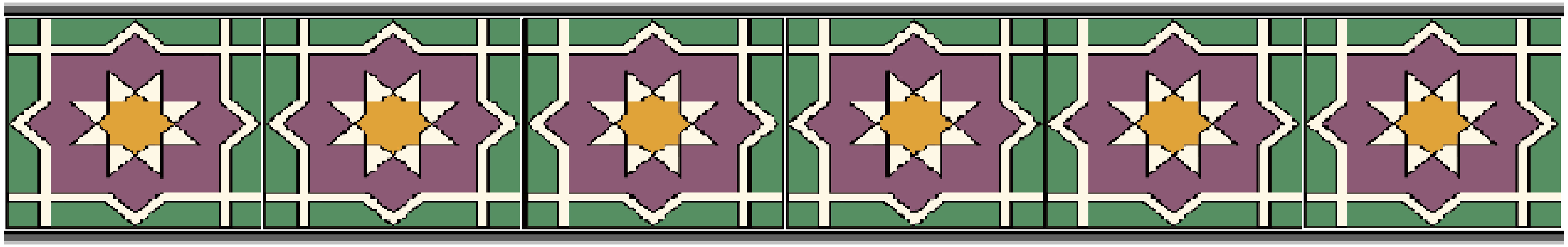
2

3



Faixas $\mathcal{F}_1^2$ Reflexão vertical com translações

4

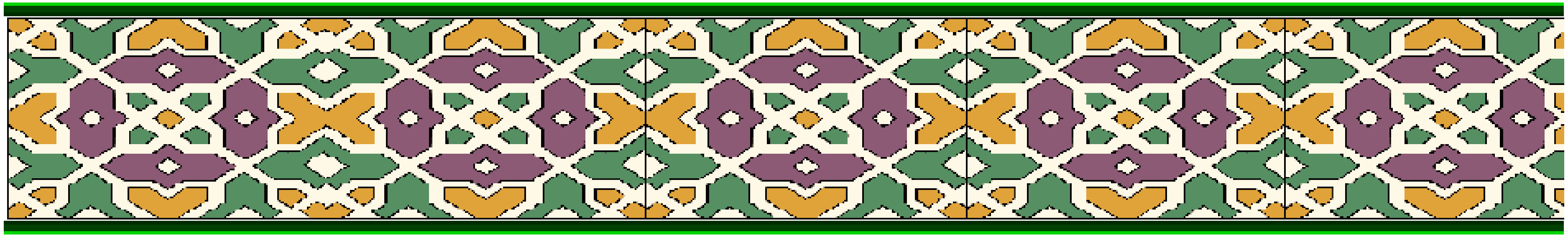


5

6

Faixas $\mathcal{F}_2^1$ Reflexão vertical e Reflexão horizontal com translações

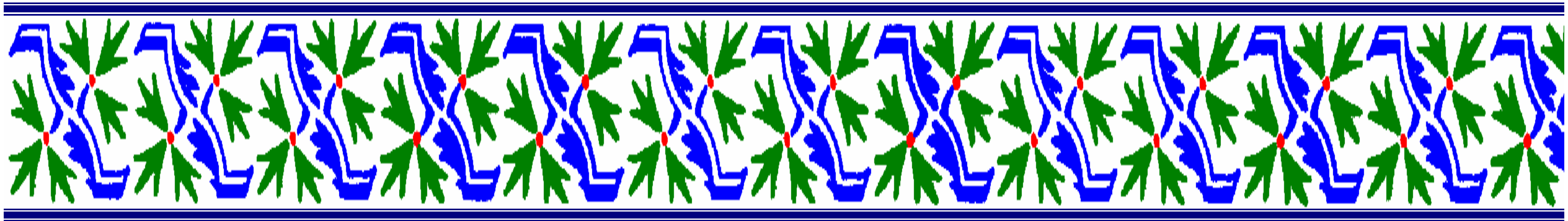
7



Faixas $\mathcal{F}_2^1$ Reflexão vertical e Reflexão horizontal com translações

8

9



10

Faixas $\mathcal{F}_2$ Rotação de meia volta com translação

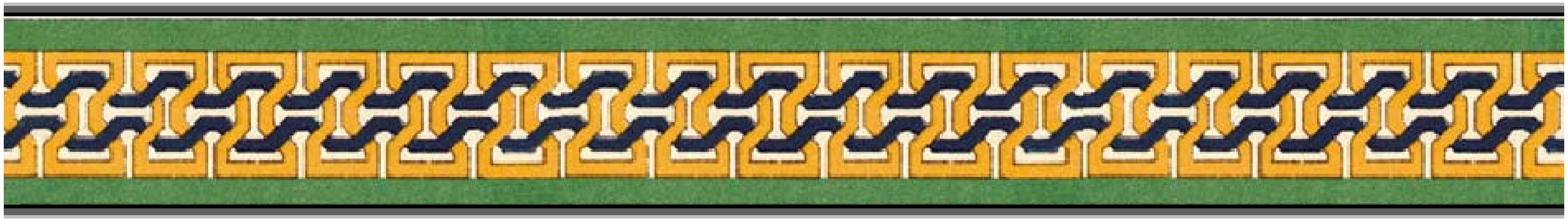
11

12

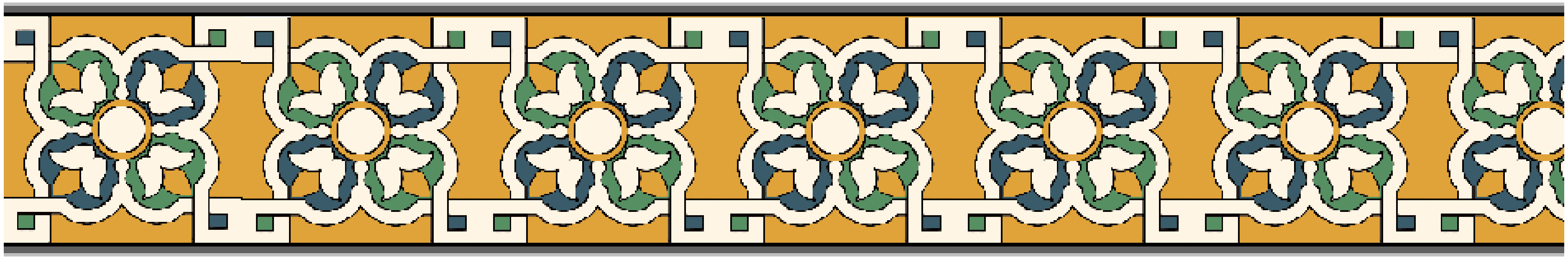
13

Faixas $\mathcal{F}_2$ Rotação de meia volta com translação

14



15



Faixas $\mathcal{F}_2$ Rotação de meia volta com translação