PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC – SP

YUK WAH HSIA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
Um estudo sobre seu processo evolutivo nos Estados Unidos, na China e no Brasil

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2013

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC – SP

YUK WAH HSIA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:

Um estudo sobre seu processo evolutivo nos Estados Unidos, na China e no Brasil

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva.

São Paulo

2013

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente, para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____________________________ Local e Data: _______________________

Aos meus pais e ao meu tio,
In memoriam.

AGRADECIMENTOS

Às forças benignas do Universo, que conspiraram a meu favor.

Ao Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, pela paciente orientação, empenho, constante apoio, dedicação e incentivo e, principalmente, pelo exemplo de professor que é e pelas lições que recebi do que é ser verdadeiramente educador matemático.

Às Professoras Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic, Doutora Norma Suely Gomes Allevato, Doutora Sílvia Dias Alcântara Machado e Doutora Célia Maria Carolino Pires que compuseram a banca de qualificação deste trabalho e muito contribuíram com valiosas críticas e sugestões – e que agora participam da banca do meu doutorado.

À Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic, em especial, pela sugestão de estudar o trabalho da pesquisadora Liping Ma, que me deu oportunidade de me reconectar com a terra dos meus antepassados.

À Professora Doutora Norma Suely Gomes Allevato, pela generosidade de me ceder o texto de Schroeder e Lester, a primeira leitura que fiz sobre resolução de problemas, e a tese de Manoel dos Santos Costa, material precioso para minhas reflexões finais.

A todos os professores do Programa e Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP que, ao longo dos últimos quatro anos, muito contribuíram para minha formação como professora e como pesquisadora.

A todos os colegas que ingressaram comigo no doutorado em Educação Matemática da PUC-SP e aos colegas do grupo de segunda-feira.

À Professora Doutora Ana Chiummo, aos Professores Doutor Waldemar de Maio, Doutor Walter Paulette, Mestre Ayrton Barboni, que me incentivaram a trilhar esse caminho de estudo.

Às minhas grandes amigas, Maria Cristina Filipelli, Maria Helena da Silva e Luciana Fajardo Vidigal e ao meu amigo Alberto Horita, que nunca deixaram de me apoiar, incentivar e torcer pelo meu sucesso.

Aos colegas da FATEC: Elisa, Maria Eiko, Maria Iliria, Clemente e Claudinei, que não me deixaram morrer na praia.

À minha família: minhas irmãs e meus irmãos, minhas cunhadas, sobrinhos e sobrinhas, que entenderam meus momentos de ausência, com quem sempre pude contar, nos bons e nos maus momentos.

À Professora Doutora Dalila Maria Pereira Lemos, pela paciente leitura e correção dos meus textos. Amigas para sempre.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que, de alguma forma, colaboraram para a realização desta pesquisa, meu muito obrigado!

A autora

Resumo

O estudo traz resultados da comunidade de pesquisadores matemáticos e algumas práticas já existentes sobre a estratégia de resolução de problemas, tornando-os acessíveis aos professores, tanto em formação quanto aqueles atuando em salas de aula. Ao expor diferentes pontos de vista sobre essa estratégia de ensino, espera-se proporcionar-lhes uma visão das potencialidades dessa metodologia, permitindo maior abrangência na atuação docente, o que pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas de seus alunos. Com essa finalidade, foi realizado um estudo bibliográfico que buscou tecer um quadro teórico sobre resolução de problemas com as características inerentes à cultura de três países diferentes: Estados Unidos, China e Brasil. Do primeiro país, procurou-se enfatizar a perspectiva histórica, sem, contudo, deixar de lado a situação do tema sob o ponto de vista da fundamentação da teoria cognitiva. Ao traçar uma visão histórica do tema ao longo do século XX, foram destacadas as contribuições de Polya, Dewey e Krutetskii, apesar de esse último ser de origem russa, proporcionou um grande impulso para a constituição dos estudos nessa área nos Estados Unidos. Foram destacados enfoques sobre o tema quanto à metodologia de ensino e quanto aos resultados de diferentes interpretações da expressão *resolução de problemas*. É apresentada uma lista de estratégias elaborada por Van de Walle de que os alunos podem lançar mão, quando resolvem problemas. Da China, foi apresentado um breve histórico do ensino da matemática, expondo diversas mudanças nos programas oficiais, para entender a importância dada ao ensino e à aprendizagem dessa disciplina, para alcançar o progresso tecnológico. Foram aqui apresentados alguns resultados da pesquisa de Liping Ma sobre os conhecimentos da Matemática Básica de professores chineses. Procurou-se também mostrar diferenças entre Estados Unidos e China, no que se refere ao entendimento da resolução de problemas. Do Brasil, foram destacados os trabalhos dos grupos nacionais que adotam essa metodologia como linha de investigação, sobretudo os do GTERP da UNESP-Rio Claro, sob a orientação de Onuchic, pioneira na pesquisa sobre desse tema. Esses estudos ensejaram a formação de outros núcleos no país, que desenvolvem trabalhos nessa mesma linha. Os seminários que esse grupo organiza divulgam e discutem pesquisas realizadas a respeito do tema dentro e foram do Brasil. O estudo evidenciou que essa metodologia, sob o ponto de vista teórico-prático, tal como é desenvolvida nos Estados Unidos, é diferente daquela realizada na China. Ficou claro também que os professores chineses, vivenciam a atmosfera do ensino da Matemática no país e 'abraçam' a estratégia. O estudo evidenciou também que os professores de Matemática chineses têm formação aprofundada da Matemática fundamental, o que se reflete na resolução de problemas na sala de aula. No Brasil, apesar de a resolução de problemas ser adotada como linha de pesquisa, ela ficou praticamente restrita aos grupos de pesquisa, pouco chegando às salas de aula.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Processo de desenvolvimento de Resolução de Problemas; Destaques de perspectivas da Resolução de Problemas nos Estados Unidos e China.

ABSTRCT

The study presents results of the research community and some mathematical practices existing on the strategy of solving problems, making them accessible to teachers, in training and those working in classrooms. By exposing different views on this teaching strategy is expected to provide them with a vision of the potential of this methodology, allowing greater scope in teaching practice, which may contribute to the development of mathematical skills and abilities of their students. For this purpose, we conducted a bibliographic study that sought to weave a theoretical framework on problem solving with the characteristics inherent to the culture of three different countries: the United States, China and Brazil. The first country, sought to emphasize the historical perspective, without, however, neglecting the situation of the topic from the point of view of the grounds of cognitive theory. By tracing a historical theme throughout the twentieth century, were highlighted contributions from Polya, Dewey and Krutetskii, despite the latter being of Russian origin, provided a major boost to the constitution of the studies in this area in the United States. Approaches were highlighted on the topic regarding the teaching methodology and the results of different interpretations of the term problem solving. A list of strategies developed by Van de Walle that students can make use when solving probems. A brief history of mathematics teaching in China was presented, exposing several changes in public programs to understand the importance given to the teaching and learning of this discipline to achieve technological progress. Some results of Liping Ma’s research on the knowledge of Basic Mathematics of Chinese teachers are presented. Differences between the U.S.A. and China are showed, with regard to the understanding of problem solving. The work of Brazilian groups that adopt this methodology as a line of research is highlighted, especially the GTERP of UNESP-Rio Claro, under the guidance of Onuchic, a pioneer in research on this topic. These studies gave rise to the formation of other groups in the country, which work along the same lines. The group organizes seminars that disseminate and discuss research conducted on the subject and within Brazil. The study showed that this methodology from the point of view of theory and practice, as developed in the United States is different from that made in China. It also became clear that the Chinese teachers experience the atmosphere of the teaching of mathematics in the country and 'embrace' the strategy. The study also showed that the formation of Chinese mathematics teachers have thorough training in fundamental mathematics, which is reflected in the resolution of problems in the classroom. In Brazil, despite the resolution of problems being adopted as a line of research, it was largely confined to research groups, some coming to classrooms.

Keywords: Problem Solving; Development Process of Problem Solving; Highlights of perspectives on Problem Solving in the United States and in China; Mathematics teacher training.

Sumário

Capítulo 1 – Introdução

1.1 Trajetória Profissional

Minha atuação como professora em cursos de matemática tem revelado que cada vez mais os estudam iniciantes desses cursos apresentam dificuldades não só relativas aos novos conhecimentos e também falta de familiaridades com os conteúdos da educação básica, como, tratamento e operações nos campos numéricos e algébricos, além de representações no contexto matemático de situações expressas na linguagem natural.

Essa motivação foi me direcionando para a procura de possíveis estratégias de ensino que pudessem contribuir para minimizar tais dificuldades.

Depois de trabalhar muitos anos como analista de planejamento financeiro em empresas nacionais e multinacionais, na década de 1990, resolvi trabalhar por conta própria, adquirindo a franquia de um curso de matemática, de origem japonesa. Para conduzir o negócio, não era necessário ser licenciado em Matemática, bastava ter algum conhecimento básico para desempenhar a função de tutora e eu tinha os conhecimentos suficientes para tal propósito, pois cursara dois anos de engenharia e, depois, oito semestres de administração de empresas o que me capacitava para trabalhar como tutora, apesar de não ter concluído os cursos.

Trabalhar como tutora nessa franquia despertou em mim curiosidades e interesses com relação às metodologias de ensino e aos recursos didático-pedagógicos que poderiam ser utilizados para o ensino e a aprendizagem da matemática. Para entender esse processo, ingressei em um curso de Pedagogia em 1997, em que estudei muitas teorias sobre educação, mas não encontrei o que procurava.

Ao concluir a graduação em Pedagogia, senti necessidade de estudar mais e aprofundar meus conhecimentos de matemática e ingressei na Licenciatura em Matemática, em 2001. Confesso que fazer esse curso não foi difícil para mim, porque durante o tempo em que trabalhei com a franquia, estudei muito por conta própria, revisei os conteúdos matemáticos do ensino fundamental e médio, já tinha visto Cálculo no curso de engenharia e de administração de empresas e, nesse último, tinha estudado também matemática financeira e contabilidade.

A importância de ter feito a licenciatura foi por conseguir inter-relacionar e aprofundar os conhecimentos que, antes, eram dispersos, por exemplo, quanto a relacionar o cálculo de juros compostos com a função exponencial e com progressão geométrica, ligando as ideias matemáticas.

Em 2002, ainda cursando a licenciatura em Matemática, eu desisti de trabalhar com a franquia e, para me manter, dava aulas particulares de matemática para os alunos do ensino médio e fundamental II. Para essa mister, entender como ocorre o processo cognitivo do aluno era importante e necessário. Para tanto, procurava sempre novas estratégias, tentando adequar o ensino às diferenças individuais.

Pelo bom desempenho no curso de matemática, fui estimulada pelos professores a me tornar uma docente com o término da licenciatura. A fim de possibilitar essa carreira, ingressei no Programa dos Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, em 2004, iniciando o mestrado. Fui então admitida no grupo de pesquisa “O elementar e o superior em Matemática”, em que um dos projetos de pesquisa é “Componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor”, coordenado pelo Professor Doutor Benedito Antônio da Silva, que desenvolve pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo, a partir de quatro vertentes: o aluno ingressante nos cursos de exatas, o professor da universidade, o professor da educação básica e as dificuldades inerentes aos conteúdos da disciplina do Cálculo.

Durante o período do mestrado, iniciei meus estudos a respeito dos fundamentos para os trabalhos de pesquisas, algo que não aprendi nos dois cursos de graduação. A partir daí, iniciei um estudo de caso com os alunos do curso de licenciatura em matemática, que foram incluídos em minha dissertação. Nesse trabalho, denominado "A utilização do livro didático pelo aluno ao estudar integral”, investiguei o uso do livro didático por estudantes, quando iniciavam o estudo da Integral, com o objetivo de verificar como eles manipulavam o livro para esse propósito e quais registros de representação semiótica eram mais utilizados e de quais estratégias eles lançavam mão ao estudar um conteúdo, a partir da leitura de um texto referente ao assunto Integral.

Essa pesquisa foi realizada mediante proposição de várias tarefas para os participantes resolverem e elas foram inspiradas por um projeto que Duval (1991) desenvolvia naquela época, baseadas em um texto sobre Integral do livro Cálculo I, de James Stewart.

Pude perceber nesse contato com os participantes da pesquisa o entusiasmo deles em iniciar o estudo de um tema pela leitura de um texto, recorrendo aos conhecimentos prévios e, aos poucos, por meio de estratégias conhecidas – como fazer gráficos, tabelas, escrever as conclusões –, os participantes começaram a ter noção do novo conteúdo.

Um fato que chamou minha atenção foi a revelação do gosto daqueles estudantes pela leitura do livro didático: eles mostraram essa capacidade, fato que me surpreendeu. Essa constatação ficou latente, sinalizando a necessidade de novos estudos.

A defesa do mestrado ocorreu em 2006, o que permitiu, posteriormente, minha promoção na universidade em que era docente, de professora auxiliar ao cargo de professora adjunta. Esse fato foi decisivo para eu prosseguir os estudos de pós-graduação.

Ingressei no curso de doutorado da PUC-SP e continuei no Grupo de Pesquisa "O elementar e o superior em Matemática", coordenado pelo Professor Silva, no mesmo projeto "Componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor".

O desenvolvimento desse projeto está organizado em vários subprojetos articulados em diferentes fases e envolvem as componentes de ensino e aprendizagem do Cálculo, tais como: os obstáculos epistemológicos à aprendizagem de limite; a transição da educação básica para o ensino superior, os significados atribuídos à variável; a passagem do estudo de função de uma variável para o de mais uma e seus efeitos no ensino e aprendizagem das derivadas parciais e da integral dupla; a interferência do papel da relação funcional das variáveis na compreensão da derivada; as representações de estudantes, professores e livros didáticos sobre integral; as representações de professores, estudantes e livros didáticos referentes ao ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo; A evolução histórica do número π; a questão da transição da educação básica para o ensino superior; a disciplina inicial de Cálculo em cursos de matemática em universidades brasileiras e seu papel na formação de professores, a partir de 1934; a modelagem, vista como estratégia de ensino, para o estudo de conceitos matemáticos (Silva, 2011).

As pesquisas realizadas nesse ultimo subprojeto permitiram vislumbrar algum tipo de trabalho que pudesse me remeter às inquietações resultantes da pesquisa de mestrado.

Nesse mesmo tempo, como eu ensinava matemática em um curso de licenciatura dessa área, o contato com as dificuldades apresentadas pelos alunos do curso veio a somar questões que contribuiriam para o delineamento do projeto de pesquisa de doutorado, cujo foco é a procura de estratégias que propiciassem a formação matemática desses estudantes para a posterior atuação como professores.

Que estratégias seriam essas? Na procura de respostas para essa indagação, várias leituras foram efetuadas sobre as tendências em Educação Matemática e o tema Resolução de Problemas foi despertando meu interesse porque fez eco àquela impressão deixada pelos participantes da pesquisa do mestrado, quando eles se mostraram tão entusiasmados em aprender de forma diferente daquela com a qual estavam habituados.

Desse modo, sob a orientação do Professor Silva, resolução de problemas foi se tornando o tema da pesquisa, apresentando-se como a estratégia mais adequada à aprendizagem de conceitos matemáticos, com mais participação dos estudantes que, a partir de seus conhecimentos prévios, podiam ser mais ativos e construtores desse processo. E, no caso dos licenciandos em Matemática, o objetivo seria promover neles a percepção de que ser professor é muito mais do que ministrar aulas: é preciso estudar e pesquisar sempre, participando de todas as oportunidades que propiciem aprendizagem.

Nesse contexto, a relevância da pesquisa vai se despontando, porque está sendo tratada a preocupação central da Educação Matemática: promover situações e condições, para que o estudante possa desenvolver competências e habilidades a partir de suas capacidades cognitivas, com a finalidade de construir um novo conhecimento.

A Resolução de Problemas propõe esse cenário como estratégia de ensino e, nessa investigação, o ator principal – o estudante do curso de licenciatura – está nas duas pontas do processo: é aquele se apropria do processo para aprender e, mais tarde, se aproveita do processo aprendido para ensinar.

Sendo assim, surgiu uma indagação: existiriam pesquisas, cujo foco seja a atuação dos professores de Matemática, egressos de cursos de licenciatura que, possivelmente, não os tenham preparado adequadamente para atuar com essa estratégia de ensino?

Para responder a essa pergunta, foi realizada uma busca no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, subordinada ao MEC – a Capes – e, nessa consulta, quando se pesquisaram no campo assunto, as palavras resolução de problemas, foram encontradas cinco mil dissertações e teses. Entretanto, ao fazer um refinamento com as palavras "a metodologia de resolução de problemas e professores de matemática", foram encontradas cinquenta teses e dissertações, das quais apenas duas estão relacionadas com a resolução de problemas e os estudantes dos cursos de licenciatura em matemática, concomitantemente: uma de 2010 e outra de 2012.

A primeira tese, *O processo de ensino-aprendizagem* – Avaliação de geometria através da resolução de problemas: Perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática – é uma pesquisa qualitativa de Célia Barros Nunes, sob a orientação da Professora Doutora Lourdes de La Rosa Onuchic, e teve como foco de interesse o trabalho com geometria euclidiana com estudantes do curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado da Bahia, Campus X.

A segunda tese, *Ensino-Aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas*: Uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de Matemática, igualmente de caráter qualitativo, cujo autor é Manoel dos Santos Costa, sob a orientação da Professora Doutora Norma Suely Gomes Allevato, foi realizada com estudantes de uma universidade pública do Estado do Maranhão. Os instrumentos metodológicos para a coleta de dados foram questionários, observação participante, análise documental e entrevistas, além dos problemas propostos aos licenciandos.

Diante dos dados encontrados, nossa atenção se dirigiu à busca de informações complementares ao que já tinha sido pesquisado pelas autoras citados, para formar as bases teóricas que nos indicassem qual o caminho a ser seguido para um aprofundamento nos estudos direcionados à resolução de problemas.

1.2 Justificativa da escolha do tema

Dado que grande parte da bibliografia encontrada sobre o tema está em língua inglesa, na medida da necessidade, nós mesmas cuidamos de traduzir livremente do original para a língua portuguesa os trechos utilizados nesta tese.

Iniciamos esta seção apresentando um estudo de Niss (2006) sobre a formação matemática dos estudantes e a formação dos professores de matemática em “O projeto dinamarquês KOM e suas relações com a formação de professores”, texto publicado em “Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática” (2006).

Niss (2006) afirma que, quando se analisa a formação matemática dos estudantes e a formação matemática dos professores de matemática, duas perguntas são básicas: a) O que significa dominar a Matemática? b) O que significa ser um bom professor de Matemática? Segundo Niss, esses questionamentos são difíceis e desafiadores, mas deveriam orientar os modos do trabalho em Educação Matemática, embora muitas vezes não se manifeste interesse por essas questões.

Para esclarecer suas ideias, Niss propõe como ponto de partida o seguinte problema:

Suponha que os alunos de uma classe estivessem planejando uma excursão e quisessem contratar uma empresa para esse fim. As pesquisas de preço os levaram a ter que decidir entre duas propostas diferentes, das companhias A e B, respectivamente. A companhia A cobra uma taxa de R$ 150,00 para excursões limitadas a 100 km e um adicional de R$ 3,00 por quilômetro acima desse limite. A companhia B cobra uma taxa de R$ 50,00 para excursões limitadas a 20 km e R$ 2,00 por quilômetro adicional a esse limite. Qual companhia os alunos deveriam escolher? (NISS, 2006, p. 28).

Os seguintes passos são propostos pelo autor para resolver o problema acima.

1º Passo: Matematizar o problema – Representar a distância programada para a excursão por $x\,(km)$, o preço a ser cobrado pela companhia A será $A\,(x)$ e pela companhia B será $B\,(x)$. O valor $A\,(x)$ é 150, se a distância percorrida pela excursão não exceder a 100 km, isto é, para $x \leq 100$ e de $150 + 3(x - 100)$, se $x > 100$. O valor $B(x)$ é 50, se x não exceder 20 km, se $x \leq 20$ e de $50 + 2\,(x - 20)$ se $x > 20$. A solução do problema é obtida, determinando os valores de x para os quais $A\,(x) < B\,(x)$ ou $A\,(x) > B\,(x)$ e, a partir da fixação da distância efetivamente percorrida, optando pelo valor mais econômico.

2º Passo: Especificar em termos matemáticos – Com base na natureza do problema, os possíveis valores de x devem satisfazer $x > 0$.

$$A\,(x) = \begin{cases} 150\; se\; 0 < x = 100\; (x = 0 \\ não\; é\; um\; valor\; relevante\; para \\ o\; problema) \\ 150 + 3 \cdot (x - 100) = 3x - 150, \\ se\; x > 100 \end{cases}$$

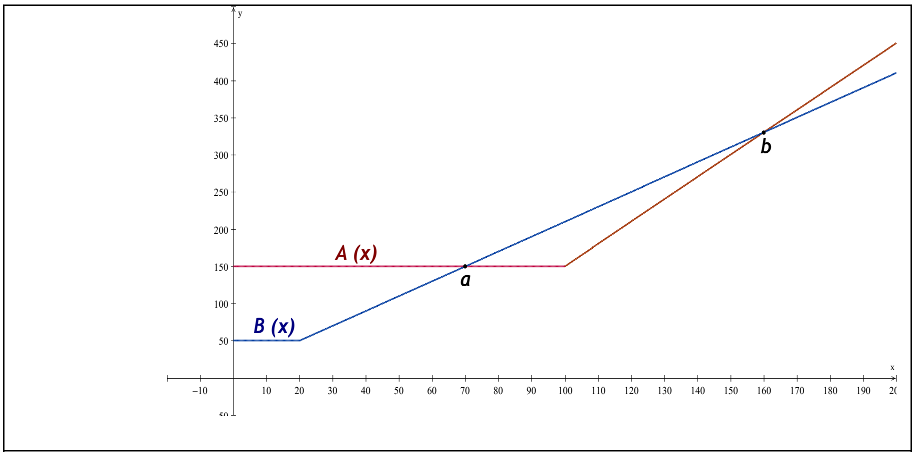
$$B\,(x) = \begin{cases} 50\; se\; 0 < x = 20\; (x = 0 \\ não\; é\; um\; valor\; relevante\; para \\ o\; problema) \\ 50 + 2 \cdot (x - 20) = 2x + 10, \\ se\; x > 20 \end{cases}$$

Q1: Para quais valores de $x > 0,\ A\,(x) < B\,(x),\ A\,(x) > B\,(x)\ e\ A\,(x) = B\,(x),$ respectivamente?

Q2: Baseado no conhecimento atual ou em estimativas realistas de um valor relevante x_0 para x, quais das opções se traduziram no menor valor?

3º Passo: Representar $A\ (x)$ e $B\ (x)$ no mesmo gráfico.

Figura 1 – Representação gráfica das funções A (x) e B (x).



Fonte: Niss, 2006, p. 29

A leitura do gráfico mostra que, quando o valor de $x < a,\ A(x) > B(x),$ quando $a < x < b, B\ (x) > A\ (x)$ e quando $x > b,\ A\ (x) > B\ (x).$

4º Passo: Responder a Q1: Determinam-se os valores a e b
Graficamente, temos para $0 < x < 20, B(x) = 50 < A(x) = 150.$
O valor de a é quando $2x + 10 = 150,$ logo $a = 70$
Da mesma forma, o valor de b é quando $2x + 10 = 3x - 150,$ portanto $b = 160$
Quando $a = 70$, temos $A\ (x) = B\ (x)$ e quando $b = 160,$ temos também $A(x) = B(x)$

5º Passo: Responder Q2:
Se a excursão percorrer uma distância entre 70 e 160 km, então é mais vantajoso optar pela companhia A. Para qualquer outro caso, deve-se escolher a companhia B.
Para valores de x próximos de 70, é indiferente a escolha da companhia A ou B, pois, em ambos os casos, a penalidade será de $2 \cdot |x - 70|$. E o mesmo acontece quando a distância percorrida for próxima de $160\ km$, nesse caso, a penalidade será de $|x - 10|$.

Concluindo, se $x \in [70{,}160]$, deve-se optar pela companhia A; caso contrário, a companhia B. (NISS, 2006, p. 28-30).

Segundo Niss (2006) para realizar o processo acima com sucesso, são necessários os seguintes requisitos:

> a) estar apto a modelar matematicamente uma situação problema, fazendo perguntas e resolver problemas pertinentes àquela situação;
> b) ser sensível para perguntas que podem ser feitas em Matemática e para os tipos de respostas que podem ser esperadas, elementos fundamentais, para o autor, do pensamento matemático;
> c) estar apto a propor, especificar e resolver problemas matemáticos;
> d) raciocinar matematicamente, isto é, formular e justificar proposições, soluções e conclusões;
> e) Usar diferentes representações matemáticas: verbais, gráficas e simbólicas e saber transitar significativamente entre elas;
> f) Saber lidar com o simbolismo e com o formalismo matemático;
> g) saber comunicar assuntos matemáticos;
> h) Usar ferramentas e assistentes matemáticos.
> (NISS, 2006, p. 31).

Desse modo, para responder a pergunta “O que significa dominar a Matemática?”, Niss (2006, p. 33) propõe uma abordagem baseada em competências e divide os oito componentes acima em dois grupos de habilidades, cada um com quatro competências.

> 1º grupo: habilidade para perguntar e responder perguntas em Matemática e com a Matemática.
>
> - Competência de pensamento matemático – dominar modos matemáticos de pensamento;
> - Competência no tratamento do problema – formular e resolver problemas matemáticos;
> - Competência de modelagem – ser capaz de analisar e construir modelos matemáticos concernentes a outras áreas;
> - Competência de raciocínio – estar apto a raciocinar matematicamente.
>
> 2º grupo: habilidade para lidar com a linguagem matemática e seus instrumentos.
>
> - Competência de representação – poder manejar diferentes representações de entidades matemáticas;
> - Competência em simbologia e formalismo – estar apto a manejar a linguagem simbólica e os sistemas matemáticos formais;

- Competência de comunicação – estar apto a se comunicar em, com e sobre a Matemática;
- Competência em instrumentos e acessórios – estar apto; a fazer uso e estabelecer relações com instrumentos e acessórios em Matemática. (NISS, 2006, p. 33-35).

E o autor completa:

> Todas as competências tem natureza dual, isto é, cada uma delas têm duas facetas: uma enfatiza a habilidade de um indivíduo para entender, acompanhar, relacionar, analisar e julgar o trabalho de outros sobre atividades abarcadas por aquela competência, outra enfatiza a própria busca independente do indivíduo em relação a essas atividades. (NISS, 2006, p. 36).

O autor ressalta que essas competências estão intimamente relacionadas entre si, embora sejam distintas. Se uma delas for o foco, as outras podem atuar como auxiliares na especificação e na solução de um dado problema. Elas são especificas à Matemática, englobando todos os níveis educacionais, da escola primária à universidade, percorrendo todos os tópicos: da aritmética à topologia.

Para responder a pergunta “O que significa ser um bom professor de Matemática?”, Niss (2006) explica que um bom professor é aquele que estimula o desenvolvimento de competências matemáticas em seus estudantes e que, para isso, ele também deve possuí-las, além das competências didáticas e pedagógicas, tais como:

- Competência em currículos – Entender, analisar, avaliar, relacionar e implementar currículos e planos de ensino em Matemática. E seria desejável a habilidade para construir novos currículos e planos de ensino.
- Competência pedagógica – Propor, planejar, organizar, orquestrar e realizar o ensino de Matemática, além de criar um amplo espectro de situações de ensino/aprendizagem; descobrir, avaliar, selecionar e criar materiais pedagógicos; inspirar e motivar os alunos; discutir currículos e justificar as atividades de ensino/aprendizagem com os estudantes.
- Competência na detecção de aprendizagem – Descobrir, interpretar e analisar a aprendizagem dos alunos em Matemática, bem como, suas noções, convicções e atitudes para com a disciplina, além de identificar o desenvolvimento e os progressos de cada um.
- Competência em avaliação – Identificar, avaliar, caracterizar e comunicar os resultados da aprendizagem e as competências dos estudantes, bem como, informar e ajudar cada um deles

individualmente, isto é, lidar com categorias diferentes de estudantes, em diferentes cenários, em situações diferentes e em níveis diferentes, prestando atenção às necessidades e oportunidades de cada aluno.

- Competência de colaboração – Colaborar com os colegas, dentro e fora da Matemática e com outros participantes do processo educacional (pais, superiores, autoridades, empregadores) relacionados com o ensino da Matemática.
- Competência de desenvolvimento profissional – Desenvolver a própria competência como professor de Matemática, participando de cursos em serviço, pesquisa, desenvolvimento de projetos e conferências, refletir sobre seu próprio ensino e manter-se atualizado sobre novas tendências.

(NISS, 2006, p. 39-40).

De acordo com o autor, na formação de professores de Matemática, deve-se levar em conta esses componentes pedagógicos e didáticos, além dos matemáticos, para que resulte um ensino específico didaticamente ajustado.

Nesse sentido, destacamos Shulman (1986), que afirma serem três eixos que compõem a base do conhecimento matemático na formação desse professor: a) conhecimento dos conteúdos específicos; b) conhecimento pedagógico do conteúdo; e c) conhecimento do conteúdo no ensino.

O professor deve procurar interligar o terceiro eixo com o primeiro e o segundo e, desse modo, ele faz as escolhas para atingir o seu objetivo de ensino. Então, é imprescindível que o professor em formação conheça os conteúdos matemáticos que vai ensinar, as dificuldades que seus alunos possam apresentar e possua uma bagagem cultural mínima que lhe permita fazer analogias e relacionar com outras disciplinas.

Van de Walle (2008), em sua obra *Elementary and Middle School Mathematics*, cita uma declaração do outrora astronauta e senador John Glenn para o Departamento de Estado Americano de Educação, em 2000, de que 60% de novos empregos no início do século XXI exigirão habilidades que apenas 20% da força do trabalho possuem. O senador constatou que as escolas americanas não estavam formando graduandos com habilidades matemáticas necessárias para uma economia de mercado competitivo.

O autor cita também Thomas Friedman, que discute, no seu livro *The World is Flat* (2007), a necessidade de pessoas com habilidades que se mantenham e que sobrevivam em um cenário de empregos sempre em mudança, disponíveis em um mercado de economia competitiva. Para o economista, há pessoas que conseguem se enquadrar em diversas categorias de trabalho, esses indivíduos com essas habilidades são os *math lovers*, que sempre encontrarão oportunidades e opções em um mundo digitalizado e cercado por algoritmos. O mesmo autor afirma também que cabe ao professor desenvolver essa capacidade em alunos.

Entretanto, Salman Khan, fundador da Khan Academy, plataforma de ensino *on line*, sem fins lucrativos, afirma em artigo da revista *Scientific American*:

> [...] Na maioria das salas de aula, hoje, os alunos sentam, ouvem e anotam enquanto o professor fala. Apesar de haver entre 20 e 300 seres humanos, há pouca ou nenhuma interação. As provas, muitas vezes, são a primeira oportunidade para o professor obter informações reais de como os alunos adquirem conhecimento. Mesmo se a prova indica falhas no entendimento da matéria básica pelos alunos, a aula avança para conceitos mais complexos. (KHAN, 2013, p. 51).

Conforme Delors (1998), o desafio é transformar as informações em conhecimentos e entender que a papel da escola tem de mudar, como exposto a seguir:

> [...] a educação deve se preocupar cada vez com o saber fazer evolutivo, “[...] adaptado à civilização cognitiva, pois é a base das competências do futuro. [...] À educação cabe fornecer, de algum modo, os mapas de um mundo complexo e constantemente agitado e, ao mesmo tempo, a bússola que permita navegar através deles. (DELORS, 1998, p. 89).

Essa visão de educação deve desenvolver reformas que promovam nos alunos a capacidade de aprender a aprender. Segundo Pozo (1994), em *A Solução de Problemas*, na educação básica, os alunos não só necessitam aprender os conhecimentos já elaborados e constituídos pela nossa civilização, como também e, especialmente, adquirir habilidades e estratégias que lhes possibilitem aprender, por si mesmos novos conhecimentos.

Para esse autor, o meio mais acessível para atingir essa finalidade é a resolução de problemas, não somente como uma forma de transmissão de conhecimentos, como também e principalmente, uma maneira de criar atividades educacionais, porque essa estratégia baseia-se em situações abertas e sugestivas, em que os alunos precisam adotar uma atitude ativa e um esforço para encontrar suas respostas e construir seu conhecimento, além de exigir deles o domínio de procedimentos, como também saber recorrer a seus próprios conhecimentos disponíveis. E o autor prossegue:

> [...] Assim, ensinar os alunos a resolver problemas supõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos, respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitida pelo livro-texto ou pelo professor. (POZO, 1994, p. 9).

Destacamos que a expressão “ensinar o aluno a resolver problemas”, de Pozo, pode sugerir diferentes visões a respeito do tema, o que nos leva às ideias de pesquisadores nessa área, como Schroeder e Lester (1989), que identificaram três maneiras diferentes como a Resolução de Problemas pode ser incorporada ao ensino da Matemática:

1. O ensino para resolução de problemas: segundo essa abordagem, frequentemente, se inicia com o ensino de um conceito abstrato, em vez de construir sobre um conhecimento prévio, e depois, resolvem-se problemas para aplicar a habilidade aprendida. Por exemplo, os alunos aprendem o algoritmo da divisão e, quando o dominam, passam a resolver problemas que envolvam a divisão.

2. O ensino sobre resolução de problemas: essa abordagem é o ensino de como resolver problemas, o qual pode incluir a proposta de Polya, como também, as estratégias que permitem ajudar o aluno a resolver um problema, a como fazer um desenho ou um diagrama.

3. O ensino via resolução de problemas: utiliza-se essa abordagem com o intuito de ensinar Matemática por meio de contextos reais, problemas, situações e modelos, que vão permitir aos alunos a construção de

significados para os conceitos abstratos, isto é, partindo de um problema apresentado no início de uma lição, como no ensino para resolução de problemas e para a habilidade que emerge do trabalho com o problema.

Schroeder e Lester (1989) afirmam que, embora teoricamente as três abordagens possam ser isoladas, na prática, elas se entrelaçam e ocorrem em diversas combinações.

Segundo Romanatto (2012), a resolução de problemas permite ao aluno “fazer matemática”, exercitando as suas várias capacidades intelectuais, como também mobilizar estratégias de diversas naturezas para encontrar as respostas, relacionando uma matemática mais intuitiva, mais experimental com a matemática formal. Esse autor ressalta que o papel do professor é essencial, pois deve propor bons problemas, deve acompanhar e orientar a busca por soluções, coordenando a discussão de diferentes respostas encontradas, valorizando caminhos distintos, validando-os e mostrando quando as soluções não funcionam.

Segundo Hiebert et al. (1997, apud VAN DE WALLE, 2008), um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm regras ou métodos, prescritos ou memorizados, nem a percepção por eles de que exista um método de solução especificamente correto.

Van de Walle (2008) aponta os três requisitos que um problema deve ter para se aprender Matemática:

1. O delineamento ou a seleção da tarefa deve levar em conta a compreensão do aluno no momento, com ideias apropriadas para se empenhar e resolver o problema e, ainda, considerá-lo desafiador e interessante.
2. Ao resolver o problema ou fazendo a atividade, o estudante deve estar preocupado antes com o dar sentido à Matemática envolvida e, assim, desenvolver sua compreensão dessas ideias.
3. O estudante deve compreender que a responsabilidade para determinar se as respostas estão corretas e a razão pela qual elas são corretas é dele, e não, do professor.

Van de Walle (2008) afirma que a Matemática é para ser ensinada via resolução de problema, isto é, feita a partir de tarefas baseadas em problemas ou atividades que são os meios pelos quais o currículo matemático é desenvolvido. Para engajar os estudantes nesse fazer matemático, são necessárias tarefas ou atividades baseadas em problemas que requerem raciocínio. As ideias matemáticas são as consequências da experiência em resolução de problemas.

O mesmo Van de Walle (2008) afirma que o ensino via resolução de problemas exige uma mudança de paradigmas, o que significa que o professor vai mudar muito no seu ensino: vai mudar sua filosofia de como ele pensa, de como o aluno aprende e do modo como ele pode melhor ajudá-lo a aprender. Embora o papel do professor pareça menos exigente à primeira vista, porque é o aluno quem pensa nessa situação. Para o autor, ocorre o inverso, porque o professor tem de selecionar tarefas com qualidade que permitam aos alunos aprender o conteúdo e descobrir suas próprias estratégias e soluções.

Ma (1999, apud VAN DE WALLE, 2008) é uma pesquisadora chinesa, para quem o conhecimento do professor de Matemática precisa ser profundo, flexível e adaptativo para se sair bem nesse mister. Desse modo, o professor assume o papel de mediador do conhecimento, ao dar o suporte ao aluno e lhe propiciar estratégias, para que ele possa desenvolver o raciocínio e o senso critico, dotando-o de capacidade para fazer hipóteses e resolver o problema, construindo suas próprias ideias matemáticas, favorecendo o processo de ensino e aprendizagem, tal como propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

Romanatto (2008) corrobora com essa proposta, ao afirmar que:

> [...] no ensino habitual, o professor parece ter mais controle sobre o processo ensino-aprendizagem, na resolução de problemas o docente deixa quase que necessariamente essa aparente situação de conforto, pois essa metodologia de ensino coloca o trabalho docente na perspectiva de um fenômeno complexo. Nesse sentido, em uma aula de resolução de problemas, o professor deve estar preparado para o aleatório, o imprevisto, o inesperado, o não pensado, enfim situações que exigem iniciativa, criatividade assim como tomada de decisões para superá-las. [...] No trabalho docente, partir da resolução de problemas implica também uma mudança na postura do professor, pois, ao invés de

> pedir aos estudantes que perguntem para que ele responda o que acontece é o contrário, o professor pergunta e os estudantes são incentivados a responder. (ROMANATTO, 2008, p. 6).

Onuchic e Allevato (2004) e Reis e Zuffi (2007) afirmam que a resolução de problemas como estratégia de ensino não é fácil, porque as tarefas devem ser planejadas e selecionadas conforme a necessidade do currículo, levando em consideração a compreensão dos alunos.

Segundo Reis e Zuffi (2007),

> [...] os professores que não tiveram anteriormente nenhuma experiência com a resolução de problemas em sua formação, sem o apoio de uma pessoa mais especializada no assunto, dificilmente conseguem lidar, de forma rigorosa e ao mesmo tempo flexível, com esse tipo de atividade em sala de aula.
> (REIS E ZUFFI, 2007, p. 115).

Segundo Coelho e Carvalho (2008), a prática pedagógica de resolução de problemas como partida para o ensino da Matemática representa uma ruptura em relação às práticas tradicionais centradas no professor e baseadas no pressuposto de que se aprende por transmissão de conhecimentos do professor ao aluno.

Por quebrar essa tendência antiga, a resolução de problemas enfrenta dificuldades de operacionalização. As autoras acima citadas explicitam quais são essas dificuldades, ao relatarem um episódio ocorrido em um trabalho de grupo, no qual se discutia a resolução de problemas como prática pedagógica. Após ter recebido a folha com situações problemas variadas, as quais não diziam respeito a nenhum conteúdo especifico do ensino da Matemática, os professores, não podendo classificá-las como problemas de aplicação do conteúdo, assim se manifestaram (as falas dos professores são identificadas por duas letras maiúsculas e a letra P identifica as falas da pesquisadora):

> *PM – Isso daqui... olha, se eu der para os meus, eles não querem fazer.*
> *PT – Eu acho que eu também pensaria assim.*
> *P – Vocês não gostam de trabalhar com problemas?*

> *PT – Acho que não é isso que a gente precisa, coisa mais prática para estar trabalhando. É o que eu gostaria.*
> *PS – Este problema aqui é interessante, mas aí tem que ver várias lições de estatística, de porcentagem, de conjunto... Teoria dos conjuntos.*
> *PT – A teoria dos conjuntos dá no primeiro colegial, né?*
> *P – É legal também sugerir as coisas que vocês gostariam. Seria bom.*
> *PM – Acho que a gente poderia conversar com ela a respeito de algum, porque, por exemplo, eu até acho interessante ela mostrar isso daqui. Mas, se eu passar para os meus... isso aqui não causa encanto nos meus. Não tem encanto nenhum, então eu já até sei, eu já não passo. Se fosse outra coisa assim, sei lá.*
> *P – De que tipos você acha que eles gostariam?*
> *PM – Eu coloco situações assim, ó, por exemplo, o coqueiro... estaca para o coqueiro não cair, calcule o tamanho das estacas, eles gostam. Eles estão acostumados com situações do dia a dia. Se você olhar lá a oitava série, a parte dessas relações é tudo assim: calcular a profundidade de um lago, o aluno quer pôr bandeirolas para a festa da escola em volta e nas diagonais, quantos metros de bandeirolas para ele poder calcular a diagonal.*
> *P – Neste tipo de problema [que a coordenadora propôs], você pode adaptar alguma coisa assim, mais da realidade deles?*
> (COELHO e CARVALHO, 2008, p. 10).

Essas autoras lembram que puderam perceber a resistência dos professores em experimentar resolução de problemas como ponto de partida para o ensino da Matemática na sua prática pedagógica e os motivos alegados são: a falta de condições das salas de aula e as pressões enfrentadas pela escola e pelos pais, para o desenvolvimento do conteúdo programado.

Outro motivo parece ser a necessidade de preparo e planejamento das aulas e o receio de perder o controle dos alunos e das situações, além de o professor ter manifestado seu apego à sua concepção de que a resolução de problemas é para aplicação dos conteúdos matemáticos.

Romanatto (2008) lembra que o trabalho docente a partir da resolução de problemas exige uma mudança de postura diante do ensino, pois, nesse caso, são os alunos que vão desenvolver uma situação proposta pelo professor.

Além da necessidade de mudança de postura, outro agravante para o ensino da Matemática a partir da utilização da estratégia de resolução de problemas pode ser devido à ausência de uma base de conhecimento consistente, a qual envolva aspectos da Pedagogia e da Matemática, bem como, que sejam expostas as possibilidades dessa estratégia para o ensino dessa disciplina.

Essa aparente dificuldade de operacionalização diante da resolução de problemas é corroborada em um estudo realizado por Pires e al. (2013), sobre a incorporação da resolução de problemas em currículos prescritos no Brasil e em países da América Latina, como Argentina, Chile, Paraguai e Uruguai.

Nos depoimentos dos professores de Matemática desses países sobre suas práticas, transcritos a seguir, foi constatada certa sensação de aflição em relação ao uso da estratégia, talvez, por desconhecimento ou talvez a busca por medo do novo paradigma para o ensino, que pode ter lhes causado certo desconforto.

Oliveira (2013, apud PIRES et al.,2013) cita que realizou uma pesquisa, Impactos da Educação Matemática nos currículos prescritos e praticados de Argentina e Brasil, da qual transcrevemos alguns trechos de entrevistas de professores brasileiros e argentinos sobre resolução de problemas.

> Um professor brasileiro dos anos iniciais do Ensino Fundamental em São Paulo/BR, assim se posicionou:
>
> Qualquer situação que é dada para ele resolver, não usando o cálculo pelo cálculo. Por exemplo, se eu escrevo lá, eu ponho na linguagem matemática, calcule um meio, que é metade, de 340. Qual é a metade de 340 pirulitos? (...) O que torna isso situação-problema? (...) É saber que ele quer calcular não é parte, não é um todo. O todo é dado, qual é o todo. Então você vai calcular o que? A parte. (...) É uma situação problema porque ele tem que ler, interpretar e saber que operação ele aplicar, se é adição, subtração, multiplicação, divisão, isso que ele tem que fazer.
>
> (P1, Professora brasileira entrevistada por Oliveira).

Oliveira (2013) observa que a professora citada acima incorporou em seu trabalho a concepção de ensinar matemática para resolver problemas.

Uma professora de escola de Buenos Aires/AR, considera que fazer exercícios e resolver problemas são características do trabalho com a área de Matemática:

> […], la Matemática es superimportante para transmitir eso que estoy diciendo ahora, porque la Matemática es donde los chicos hacen ejercicios de ese conocimiento de forma permanente, los ponen en práctica de forma permanente. Matemática es uno plantea la problematización, es uno de los pilares fundamentales de la Matemática.
> (P3, Professora argentina, entrevistada por Oliveira).

Conforme comentário de Oliveira (2013), essa professora tem a visão subjacente de que a aprendizagem da Matemática passa pela resolução de exercícios, mas, segundo Van de Walle (2008), os requisitos que um problema deve ter para se aprender Matemática são: ser desafiador e interessante, partindo da compreensão do aluno no momento e, para resolvê-lo, a preocupação deve ser desenvolver a compreensão das ideias matemáticas e a responsabilidade pela determinação das respostas corretas é do aluno, e não, do professor.

Cerqueira (2012, apud PIRES et al., 2013) relata sobre um estudo comparativo entre Brasil e Chile a respeito de Educação Matemática e sua influência nos currículos de Matemática desses países, que, em entrevistas com professores chilenos, também identifica menções à resolução de problemas, como um dos itens de inovação curricular.

> No Chile, o eixo principal em todas as séries é o da resolução de problemas. Então, trabalhamos diversas situações contextualizadas que são significativas para os alunos e, depois, apresentamos outras atividades que levem eles à capacidade de abstração. Os livros trazem muitas atividades que ajudam o professor e os alunos a entenderem os conceitos matemáticos. Utilizamos também os recursos a jogos, calculadoras e, em alguns casos, ao uso de softwares. Os softwares são mais utilizados no ensino da Geometria. (P5, professor chileno entrevistado por CERQUEIRA, apud PIRES et al. 2013, p. 11)

Notamos nessa fala do professor um equívoco: problemas contextualizados não significam necessariamente ensino da Matemática via resolução de problemas, na qual, um dos requisitos é apresentar um problema desafiador e interessante – e nem sempre, um problema contextualizado tem esse aspecto.

Pires et al. (2013) apontam que os professores brasileiros entrevistados por Cerqueira (2012) revelam uma prática mais tradicional, por causa de vários entraves referentes às condições de trabalho:

> O trabalho em sala de aula é feito de forma restrita, com aula expositiva em quadro negro (lousa), demonstração do conteúdo e exemplos, seguidos da resolução de exercícios por parte dos alunos. Um trabalho diferenciado como o uso da sala de informática ou debate de ideias com os alunos sentados em círculo é dificultado, em geral, devido à grande quantidade de alunos por sala que ainda ocorre em escolas estaduais em São Paulo aula (normalmente mais de 40 alunos por sala, que confortavelmente, comportaria no máximo 30 alunos), o que, muitas vezes, dificulta inclusive que o aluno possa participar da aula de outras maneiras diferentes de somente “prestar atenção na aula e fazer sua lição no seu lugar.
> (P6, professor brasileiro entrevistado por Cerqueira).

A fala desse professor mostra o desconforto com ruptura provocada por mudança de atitudes, de posturas, situação já descrita por Romanatto (2008).

As entrevistas com os professores brasileiros nas pesquisas realizadas por Dias (2012, apud PIRES et al., 2013) mostram que a utilização da Resolução de Problemas está no discurso desses profissionais, porém mediante compreensões diversas e revelam a dificuldade de se trabalhar com essa perspectiva didática.

> A resolução de um problema não é apenas cálculo, como na maioria das vezes os alunos acham. O aluno precisa avaliar, entender a problemática, buscar alternativas para resolver. O professor deve orientá-lo quanto à possibilidade de soluções diferentes para o mesmo problema. Para mim, é muito importante a conexão de diferentes saberes, mas sinto-me um pouco insegura em determinados momentos. Somente consigo fazer essa conexão com tratamento de informação (uso de tabelas e gráficos) e alguns enunciados de problemas articulando outras áreas. (P7, Professora brasileira, entrevistada por Dias).
>
> A resolução de problemas deveria ser o norteador de toda a Matemática, porém a defasagem dos alunos gera uma deficiência em compreender os problemas e, com isso, poder resolver por meio dos conceitos matemáticos. Mas costumo levar alguns problemas em que não se tenha a necessidade de muita interpretação. (P8, Professor brasileiro, entrevistado por Dias).

Notamos na fala desses professores a necessidade de ter o controle da classe, pois eles só permitem a utilização da resolução de problemas como uma perspectiva didática em situações nas quais eles se sentem mais confortáveis, sem a possibilidade de um imprevisto, de um inesperado.

Para Pires et al. (2013), os depoimentos desses professores mostram um entendimento superficial sobre as proposições da metodologia de resolução de problemas, permitindo que se conjecture que ela está longe de promover benefícios à aprendizagem dos estudantes.

Desse modo, perguntamos por que será que a resolução de problemas – tema de tantos estudos já realizados por tantos países, como mostra Schoenfeld (2007), em *Problem solving around the world*: Summing up the state of the art, sobre a qual explanaremos posteriormente – chega à sala de aula de maneira empobrecida, enfatizando apenas o aspecto algorítmico, sem a utilização das reais potencialidades dessa estratégia para o ensino da matemática?

Será que a resistência dos professores manifesta em pesquisas é produto da dificuldade de acesso deles aos resultados de estudos realizados na academia sobre o tema?

Nesse sentido, propomos apresentar um estudo bibliográfico do tema resolução de problemas em países, como Estados Unidos e China e, posteriormente, faremos uma conexão com o momento brasileiro.

1.3 Roteiro do percurso realizado

No Capítulo 1, estão expostos os questionamentos que conduziram toda esta pesquisa à procura de uma estratégia que possa proporcionar uma aprendizagem mais efetiva aos professores que estão em sala de aula, oferecendo-lhes mais opções para seu trabalho docente.

No Capítulo 2, são apresentados teóricos americanos de renomada capacidade quanto ao tema resolução de problemas. Dentre esses, citamos Kilpatrick, Stanic, Van De Walle e Shoenfeld. É dado destaque especial a

Krutetskii que, mesmo sendo russo, influenciou significativamente os estudos americanos sobre o tema.

No Capítulo 3, estão expostos a metodologia e o modo como os professores chineses de Matemática trabalham com a resolução de problemas.

No Capítulo 4, são descritas como as metodologias são utilizadas na China e nos Estados Unidos, partindo-se de um respeito às profundas diferenças culturais entre ambos, o que afeta a abordagem da resolução de problemas e de todo o modo como se ensina em cada um dos países.

O Capítulo 5 revela o estado em que se encontram os estudos e a aplicabilidade da resolução de problemas no Brasil.

O Capítulo 6 é o momento da reflexão a respeito do percurso trilhado nesta tese e foi possível conhecer o modo como se ensina Matemática por meio da resolução de problemas nos dois países estudados – incluindo-se nesse conhecimento as marcas profundas que distinguem a cultura de cada um. A partir desse estudo, foi possível refletir a respeito acerca da resolução de problemas, tentando aproximar o teórico da prática, quando se trata do ensino dessa disciplina por meio da resolução de problemas.

Capítulo 2 – O ensino da matemática e a resolução de problemas nos Estados Unidos

Ao propor um ensino de Matemática que possibilite ao aluno aprender a aprender, envolvendo-o com a descoberta de conceitos matemáticos, o documento *Agenda for Action*, publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics, publicado nos anos 1980, indicou que, entre algumas opções didáticas, um dos veículos para esse desafio é a resolução de problemas.

Silver (1985) lembra que, a partir das recomendações do NCTM, ficou determinado que a aquisição da habilidade em resolver problemas deve ser um dos objetivos do ensino da Matemática. Desde então, o tema resolução de problemas se tornou um tópico dominante nos encontros profissionais entre os professores dessa disciplina. De acordo com o mesmo autor, poucas vezes na história da Educação, um tema chamou tanto a atenção de pesquisadores e profissionais, simultaneamente.

A pesquisa sobre resolução de problemas não ficou restrita aos Estados Unidos, pois, segundo Lester (1994), no IV Congresso do ICME (International Congress on Mathematical Education), realizado em 1984, em Adelaide, na Austrália, esse tema foi um dos sete principais e permaneceu como tema central nos ICME posteriores. Ainda de acordo com o autor, embora fosse um novo foco de atenção para os educadores matemáticos, a resolução de problemas fora considerada como um aspecto fundamentalmente importante da educação matemática.

Segundo Törner, Schoenfeld e Reiss (2007), por algum tempo, resolução de problemas foi o tema principal de pesquisa e de currículo dos estudos matemáticos em todo o mundo. Algumas vezes, foi destacado como resolução de problemams; algumas vezes, deu-se ênfase a aplicações e, em outras circunstâncias, por meio de diferentes pedagogias, foi vista como elemento facilitador da compreensão de situações matemáticas, individual ou coletivamente.

Esses autores afirmam que a Matemática é universal como um corpo de conhecimentos: teoremas são teoremas em qualquer lugar, da mesma forma, como os aspectos da cognição humana são também quase universais. Igualmente, se sabe que os cérebros humanos, a memória e resolução de problemas funcionam da mesma maneira em todo o mundo. E, embora o conhecimento matemático tenha sido acumulado por milhares de anos, a compreensão sobre o raciocínio e o aprendizado tem crescido exponencialmente nas últimas décadas.

Segundo Silver (1985), a partir dos anos 1980, um progresso notável foi feito para compreender a complexa natureza do pensamento. Os pesquisadores que participaram dessa empreitada eram de diferentes campos, mas, sobretudo, da educação matemática, da psicologia cognitiva, das ciências da educação e da inteligência artificial.

Por outro lado, ainda segundo Törner, Schoenfeld e Reiss (2007), o ensino de Matemática e a condução das pesquisas em raciocínio, ensino e aprendizagem em matemática são questões muito culturais. A organização das escolas, o sequenciamento da matemática e a determinação de quais metas matemáticas são importantes para os alunos, essas questões variam consideravelmente de país para país.

Nesse cenário, procuramos trazer elementos que julgamos necessários para compor um painel a respeito do tema resolução de problemas, para o entendimento da sua importância e da influência que desempenha no ensino e na aprendizagem da matemática de dois países: Estados Unidos e China.

Neste Capítulo, focamos os Estados Unidos, tendo por objetivo apresentar alguns estudiosos, norte-americanos e não americanos, que se preocuparam com a questão do ensino e da aprendizagem da Matemática e que consideraram a resolução de problemas como meio para esse fazer matemática.

Em junho de 1983, foi realizada uma conferência na San Diego State University, focada em resolução de problemas matemático. Esse encontro agregou muitos participantes consultores da National Science Foundation a esse projeto. Esses redigiram ensaios que relatavam novos desenvolvimentos nesse campo de interesse. Entre esses trabalhos, destacamos o de Jeremy Kilpatrick, denominado A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving que, naquela época, trabalhava na University of Georgia.

Esse texto é o primeiro capítulo do livro *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*: Multiple Research Perspectives, cujo editor foi Edward A. Silver. Nele, Kilpatrick (1985) faz uma revisão e sintetiza vários importantes assuntos que tinham sido temas de pesquisa sobre resolução de problemas desde a década de 1960 até meados da década de 1980.

As contribuições de pesquisadores, como Stanic, Van de Walle e outros, são apresentadas junto com as ideias de Polya sobre resolução de problemas. A essas contribuições, se somam as ideias pedagógicas de Dewey e a importância da investigação do psicólogo russo Krutetskii, responsável por alavancar a pesquisa em resolução de problemas nos Estados Unidos.

Destacamos também outro texto, *Problem Solving in the United States: 1970-2008:* Research and theory, practice and politics, de Alan Schoenfeld, publicado em 2007 como parte de um estado da arte sobre resolução de problema, o *Problem Solving around the world:* Summing up the state of the art, compilado por especialistas de várias partes do mundo, que apresentaram as ideias principais de pesquisa: o tema principal no currículo, a relação entre pesquisa e currículo, ambos mediados pela politica educacional em seus respectivos países.

O texto de Schoenfeld (2007) faz uma retrospectiva do ensino da Matemática nos Estados Unidos, de 1970 até 2007, e discute a importância da pesquisa em resolução de problemas em aspectos como política educacional, pesquisa e teoria e currículo.

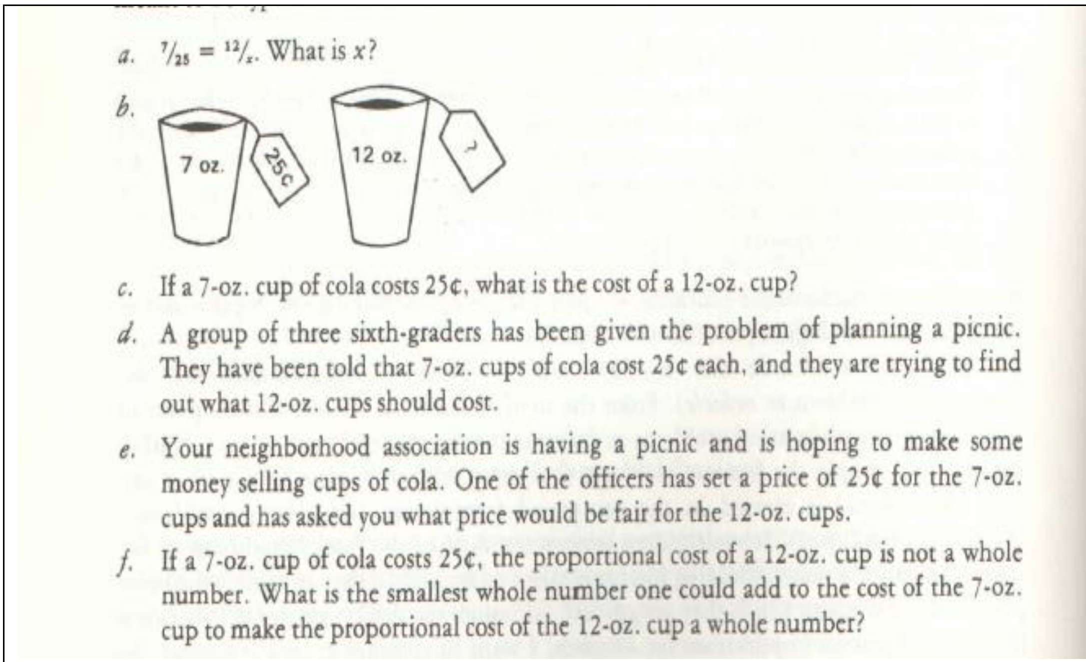
Os dois textos citados formam o fio condutor deste Capítulo, porque, descrevem de alguma forma o desenvolvimento da resolução de problemas nos Estados Unidos.

Iniciamos, então, com as considerações de Kilpatrick (1985) a respeito da resolução de problemas, quando ele questiona o significado do problema.

2.1 O que é um problema

O que é um problema? Kilpatrick (1985) explica que, sob a perspectiva psicológica, um problema é definido comumente como uma situação na qual a meta a ser alcançada tem o caminho bloqueado. Então, sob essa perspectiva, o problema pode ser como uma atividade gerada a partir de um assunto. Essa perspectiva de problema matemático já era compreendida e aceita há cerca de quarenta anos. Então, o autor propôs uma visão um pouco diferente, que se destina a abranger problemas matemáticos, tanto na escola como fora dela, e apresentou seis situações problemas escolhidos para ilustrar vários significados de um problema, as quais que reproduzimos a seguir.

Figura 2: Situações problemas propostas por Kilpatrick.



a. $^7/_{25} = {}^{12}/_x$. What is x?

b.

c. If a 7-oz. cup of cola costs 25¢, what is the cost of a 12-oz. cup?

d. A group of three sixth-graders has been given the problem of planning a picnic. They have been told that 7-oz. cups of cola cost 25¢ each, and they are trying to find out what 12-oz. cups should cost.

e. Your neighborhood association is having a picnic and is hoping to make some money selling cups of cola. One of the officers has set a price of 25¢ for the 7-oz. cups and has asked you what price would be fair for the 12-oz. cups.

f. If a 7-oz. cup of cola costs 25¢, the proportional cost of a 12-oz. cup is not a whole number. What is the smallest whole number one could add to the cost of the 7-oz. cup to make the proportional cost of the 12-oz. cup a whole number?

Fonte: Kilpatrick, 1989, p. 4

Tradução dos problemas

a) $^7/_{25} = {}^{12}/_x$. Qual o valor de x?

b) Essa situação problema apresenta uma representação figurativa. Para resolvê-la, o aluno precisa entender visualmente o que implícito o desenho.

c) Se uma xícara de 7 onças de refrigerante custa 25 cents, qual é o custo de uma xícara de 12 onças?

d) Um grupo de três alunos de sexta série tem de planejar um piquenique e eles sabem que o custo de uma xícara de 7 onças de refrigerante custa 25 cents cada. Eles tentam descobrir o custo de uma xicara de 12 onças.

e) Sua associação de bairro está organizando um piquenique e espera fazer algum dinheiro com a venda de xícaras de refrigerante. Um dos membros estabeleceu o preço de 25 cents para cada xícara de 7 onças e quer de você o preço justo para xícaras de 12 onças.

f) Se uma xícara de 7 onças de refrigerante custa 25 cents, o custo proporcional de uma xícara de 12 onças não é um número inteiro. Qual é o menor número inteiro que pode ser somando ao custo da xícara de 7 onças, para que o custo proporcional da xícara de 12 onças seja um número inteiro?

Das seis situações propostas, a primeira pode ser vista como o equacionamento subjacente a todas outras, porque direciona a procedimentos computacionais. Os problemas "*b*" e "*c*" são simples problemas do tipo muito frequente em livros didáticos, eles são feitos para dar aos alunos a oportunidade de aplicar o que poderia ter aprendido – nesse caso, sobre proporção.

Segundo o autor, o problema "*b*" é algo novo, por ser um problema sem palavras. Esse tipo de problema pode ser visto em livros da decada de 1980, cujos autores estão tentando lidar com as dificuldades que os estudantes têm em problemas de leitura e com a compreensão de texto. O problema "*c*" é o problema de palavras, em seu modo mais tradicional.

Kilpatrick (1985) classifica o problema *"d"* como exemplo de problemas reais. São do tipo que os alunos podem propor ou que lhes são propostos, nos quais eles estão em uma situação realista, que tem significado e devem alcançar uma solução que leva em conta a definição do problema, bem como, a ideia matemática apropriada.

O problema “*e”* envolve alguma ideia matemática, segundo Kilpatrick (1985),e é destinado a exemplificar o tipo que os alunos podem encontrar fora da escola, quando notas não estão em jogo. De maneira limitada, para o autor, o problema “*f”* representa a classe dos problemas matemáticos não rotineiros de certa complexidade e um interesse matemático maior, que poderia levar a considerar a equação diofantina de duas váriaveis.

2.1.1 Como os problemas são resolvidos

De acordo com Kilpatrick (1985), quando foi convidado para revisar artigos para o Yearbook de 1980 – sobre resolução de problemas – do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), no fio condutor da maioria dos manuscritos sobre o tema, havia sempre alguma referência aos trabalhos de Polya. Mas o autor afirma que a atenção sobre os processos da resolução de problemas não foi despertada com trabalhos de Polya, e sim, por pesquisas soviéticas a respeito do assunto, as quais foram traduzidas para o inglês nas décadas de 1960 e 1970.

Então, Kilpatrick (1985) afirma que o trabalho soviético mais influente talvez seja o de Krutetskii (1976), no qual os processos de resolução de problemas usados por alunos talentosos em matemática estimularam pesquisas nos Estados Unidos.

Para o autor, a resolução de um problema complexo exige: (1) uma rica reserva de conhecimentos organizados sobre o conteudo estudado; (2) um conjunto de procedimentos para representação e transformação de problema; (3) um sistema controlado para guiar a seleção de conhecimento e procedimentos.

Esses requisitos para resolver um problema remetem aos passos que Niss propôs para realizar a mesma tarefa, os quais estão descritos na nossa introdução e consiste em expor as diversas competências importantes para se analisar a formação matemática dos estudantes e a formação matemática dos professores.

Nas duas décadas antes de 1985, segundo Kilpatrick (1985), as pesquisas sugeriam que, “devagar e com dificuldade”, era provavelmente a melhor resposta sobre como se aprende a resolução de problemas. Os pesquisadores daquela época constataram que a eficácia do método de ensino dependia bastante da classe de problemas usados na instrução.

Conforme Kilpatrick (1985), nos anos 1980, as várias perspectivas defendidas quanto ao ensino da resolução de problemas matemáticos, com certa simplificação, podiam ser classificadas em algumas categorias de atitudes, dentre as quais destacamos a imitação, a cooperação e a reflexão.

Imitação – de acordo com Kilpatrick (1985), os professores faziam seus alunos compararem suas soluções com a de outro estudante, pois acrediatavam que a modelagem de uma solução poderia servir de modelo, tornando-se a base para o ensino.

Cooperação – o autor destaca que, nos anos 1980, os pesquisadores usavam muito a resolução de problemas em grupo como um veículo para investigações, porque discussões em pequenos grupos poderiam ajudar os estudantes a esclarecerem os conceitos e a treinarem procedimentos que seriam difíceis de serem feitos sozinhos.

Reflexão – Kilpatrick (1985) cita John Dewey, a quem se dá o crédito de ter dito que as crianças “aprendem fazendo”. Papert creditou a Dewey, Montessori e Piaget, os quais teriam dito que “crianças aprendem fazendo e pensando sobre o que fazem.”.

O mesmo autor cita também Silver, quando esse destaca que muitas das sugestões da heurística de Polya eram lembretes metacognitivos – delineados para conseguir que o resolvedor reflitisse sobre seu progresso na resolução de problemas e avaliasse a eficácia do procedimento usado.

2.1.2 O que os pesquisadores aprendem sobre resolução de problemas

Kilpatrick (1985) apresenta resultados de vinte e cinco anos (1960-1985) de pesquisas sobre resolução de problemas.

1- Seja claro com seus objetivos – o professor precisa entender que existem vários tipos de problemas que podem ser utilizados para diferentes metas de ensino, mas um problema ou técnica pode funcionar em um tipo de instrução, e não, em outro. O professor deve ser claro em relação ao tipo de problemas que quer que seus alunos sejam capazes de resolver. O professor deve decidir sobre o que fazer, pois não existem receitas infalíveis que funcionam o tempo todo e os livros/textos disponíveis não são capazes de fornecer ajuda para tal. As pesquisas daqueles anos não proporcionaram muita orientação para oferecer aos professores, ao combinarem técnicas de ensino a seus objetivos.

2- Compreender que resolução de problemas é altamente complexa. – reconhecer que as dificuldades dos alunos para resolverem problemas matemáticos não se limitam a conhecer o vocabulário e compreender a linguagem das sentenças dos problemas.

Uma resolução de problemas bem sucedida depende do grau de conhecimento organizado a respeito de conteúdo, técnicas para representar e transformar o problema, processos metacognitivos para monitorar e guiar o desempenho.

3- Estar preparado para reconhecer que o desempenho na resolução de problemas difícil ajudam a desenvolver o raciocínio – pesquisadores obtiveram algum sucesso, ao conseguirem que estudantes usassem os procedimentos heurísticos quando esses foram explicados, ilustrados e praticados.

4- Conseguir que os alunos mudem de posição – Kilpatrick (1985) cita um princípio de ensino de Polya: “deixe os alunos descobrirem por eles mesmos o quanto é plausível“, isto é, deve-se dar ao aluno a responsabilidade do seu aprendizado. Uma forma de envolver o aluno em resolução de problemas é tê-los formulando e resolvendo seus próprios problemas. Outra forma é levar o aluno a reescrevê-los.

5- Proporcionar um ambiente adequado para resolução de problemas – segundo Kilpatrick (1985), pesquisas na tradição socioantropológica alerta os professores sobre um contrato social negociado nas salas de aula entre o professor e os alunos. O autor cita trabalhos de outros pesquisadores, os quais notaram que seus alunos abordam o problema

> para resolver de maneira impulsiva, prestando atenção sobre as características superficiais da sentença do problema, para decidir que ação realizar. O objetivo do aluno é fazer algo – qualquer coisa. Desse modo, o ensino de resolução de problemas bem sucedido precisa frequentemente transformar os termos de uma situação escolar mediante negociação prévia das instruções.

Em “Teacher´s conceptions of Mathematics and the Teaching Problem Solving”, outro capítulo do livro *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*, de Alba G. Thompson (1989), no qual a autora manifesta sua preocupação com a necessidade de delinear programas que façam mais do que formar professores para ensinar matemática, ela desejava delinear programas que educassem os professores em Matemática, isto é, proporcionar-lhes experiências que expandissem seus conhecimentos de e sobre matemática, pois, sem esse saber, fica difícil eles estarem providos para lidar com discussões em aberto com seus alunos ou capitalizar quanto à exploração das ideias iniciais dos alunos.

Segundo a autora, existe evidência de pesquisa sobre práticas dos professores, especialmente daqueles que estão iniciando e que são fortemente influenciados pela sua experiência como aluno antes de ingressar em curso de métodos de ensino. Desse modo, para a autora, é necessário explorar as formas de articular os cursos de conteúdo matemático com o curso de Pedagogia, para que as experiências de aprendizado de matemática sejam consistentes com o que vai ser ensinado nesse outro curso.

Conforme suas pesquisas, Thompson (1985) está bastante consciente das necessidades dos professores quanto a: (1) viver resolução de problemas antes como solucionador, para que eles possam lidar com ela no seu ensino; (2) refletir sobre o processo de raciocínio usado na resolução de problemas, para ganhar percepções dentro da natureza da atividade; (3) estar familiarizado com a literatura sobre a pesquisa a respeito de resolução de problemas e de seu ensino.

Romanatto (2008) ressalta uma condição importante para o professor adotar resolução de problemas nas suas aulas: ele deve vivenciar a estratégia para experimentar etapas ou aspectos que envolvem resolução de problemas. Por exemplo, ler um problema pode ser considerado como um aspecto de trabalho com os alunos, porque dificuldades com o vocabulário ou com o simbolismo matemático podem ser determinantes para a compreensão ou não do enunciado do problema.

Em *On teaching problems and learning mathematical problem solving*, Schulman (1985) afirma que ser professor exige um conjunto de conhecimentos grande e largamente organizado, não somente aquele que vai ser ensinado como também, o conhecimento do ensino. Além disso, exigem-se vários tipos de esquemas de percepção para compreender o que acontece nas salas de aulas e para compreender o que está sendo dito e o que sendo feito pelos alunos.

2.2 Edward A. Silver

Em "Foundations of Cogntive Theory and Research for Mathematics Problem Solving", no livro *Cognitive science and mathematics educations*,[1] Silver (1987, p. 54) afirma que a educação matemática básica visa auxiliar o estudante médio a obter um razoável domínio nesse campo, já que a aprendizagem é vista como um processo construtivo. Em consequência, o especialista desenvolve seu quadro teorico por meio de suas experiências e exemplos e faz recomendações para o ensino, as quais podem ser implementadas em uma variedade de instâncias específicas no currículo de Matemática.

Silver inicia afirmando que o tempo de ensino é limitado e que se deve maximizar oportunidades para aprendizagem e para o desenvolvimento da proficiência, escolhendo cuidadosamente os exemplos e reconhecendo a natureza construtiva da aprendizagem.

Segundo o autor, sabendo das dificuldades que os estudantes têm em aplicar o conhecimento matemático para resolver problemas, o currículo e o professor devem fornecer aos estudantes oportunidades de ricas situações problemas, as quais permitam utilizar protótipos de situações problemas que

[1] Fundamentos da teoria cognitiva e pesquisa para resolução de problemas em Matemática, em Ciência Cognitiva e Educação Matemática, editado por Alan H. Schoenfeld, em 1987.

facilitem a associação entre situações com conhecimento matemático aplicável, mediante ações de introduzir e desenvolver o ensino de habilidades e conceitos matemáticos.

Para o autor, se assim for feito, será mais fácil aplicar o conhecimento recém-adquirido à situação similar encontrada mais tarde, para a representação mental do conhecimento matemático do aprendiz. Essa representação pode consistir em um entrelaçamento proposicional e processual bem conectado, composto de conceitos particulares, destrezas e conexões ricas entre os elementos daquele conhecimento e situações de problema protótipo ao qual o conhecimento é aplicável.

Silver (1987) afirma ser possível que o ensino baseado em situações problema leve a uma limitação do conhecimento, em contexto vinculado e contexto dependente. Para evitar essa consequência, o ensino deve ser construído em direção a estruturas gerais que incluam não somente exemplos dos protótipos, como também, situações problemas que não foram consideradas anteriormente.

Para o autor, geralmente, se reconhece que os processos metanível – como planejamento, monitoramento e avaliação – são componentes importantes do comportamento de resolução de problemas matemáticos, não obstante, esses processos raramente façam o foco explícito de instrução. Se nosso objetivo é auxiliar os alunos a se tornarem solucionadores de problemas eficazes, então, nossa instrução devem abordar esses processos importantes metanível.

Os alunos podem precisar de instrução explícita para monitorar e avaliar seu comportamento na resolução de problemas e uma técnica bem sucedida é ter os alunos resolvendo problemas em pares, nos quais um age como o solucionador e o outro, como o monitor.

Nessa situação, o papel do monitor é fazer perguntas que esclareçam a natureza da atividade de resolução de problemas do solucionador. Depois de resolver um ou mais problemas, dessa forma, os alunos podem inverter seus papeis. Para os estudantes de níveis de ensino secundário e universitário, essa parece ser uma técnica útil para explorar o papel e a importância dos processos de monitoração e avaliação em solução de problemas.

Segundo Silver (1989), para enfatizar o papel do planejamento, os alunos poderão ser convidados a conceber um plano explícito para a solução de um problema, antes de iniciar os cálculos. Em muitos casos, essa tarefa exige que os alunos desenvolvam uma pesquisa qualitativa, em vez de uma abordagem quantitativa para o problema a ser solucionado.

As análises de problemas qualitativos, no início da solução de um problema, são características do comportamento *expert* em matemática e é possível que os estudantes possam aumentar sua capacidade de resolução de problemas ao se tornarem mais hábeis em planejamento.

Para Silver (1989), se um dos principais objetivos do ensino da Matemática for o desenvolvimento de habilidades dos estudantes para resolver problemas, seria indispensável incluir processos metanível no currículo desses cursos. E até que esses processos recebam uma atenção explícita no currículo, continuaremos a produzir matemática a alunos que sabem muito bem o que fazer em situações de problemas de rotina e simples, mas dotados de pouca competência para lidar com problemas desconhecidos ou complexos.

Silver (1987) explica que, à medida que os alunos aprendem extensivamente e por meio de exemplos, o professor é um exemplo primário de aluno solucionador de problemas de matemática. É mais produtivo para o professor resolver o problema modelo explicitamente em todo seu processo na sala de aula e os livros textos podem ser uma fonte rica de exemplos para seus alunos, podendo gerar compreensão do conhecimento conceitual ou processual daquilo que está sendo estudado. Além disso, os livros didáticos podem – e o fazem muitas vezes – dar exemplos elaborados especificamente para demonstrar as aplicações do conhecimento processual e conceitual. No entanto os livros quase nunca dão exemplos de representação do conhecimento – ou de heurísticas – de processos da resolução de problemas.

Segundo Silver (1987), processos de conhecimento explícito de representação – como a criação de modelos simbólicos, pictóricos, diagramas, gráficos ou de uma situação problema – precisam ser exemplificados e discutidos por professores de Matemática. Os alunos precisam ver que há, muitas vezes, mais do que uma forma de representar as informações em um problema e que as correspondências podem ser feitas *entre* e *dentre* as várias representações. Os alunos ganham habilidade de representação do conhecimento externo e é provável que eles se tornem mais hábeis em lidar com a sobrecarga de memória na resolução de problemas complexos, mas também, desenvolverão mais facilidade para a representação mental da informação matemática.

O professor precisa modelar para o aluno os processos de seleção e implementação de processos heurísticos úteis, tais como: desenhar diagramas ou analisar um problema simples. Para incorporar esses processos em seu repertório de resolução de problemas, os alunos precisam ver os processos utilizados e ouvir as explicações do profesor. A demonstração e a modelagem precisam se concentrar não apenas no que está sendo feito, mas também, sobre o motivo da escolha feita. Uma forma de modelagem heurística e de processo metanível envolve a ação sistematica do professor em episódios de resolução de problemas.

O professor pode apresentar problemas não triviais regularmente a serem resolvidos coletivamente, levanado a discussão ao metanível estratégico. Ele pode também criar problemas para ser resolvidos individualmente ou em grupos e anteceder a sessão de trabalho com uma discussão metanível. Nessa situação, pequenos grupos cooperativos de resolução de problemas poderiam ser especialmente propícios, para fomentar as discussões e análises metanível problema.

Como resultado de suas experiências em sala de aula de matemática, os alunos desenvolvem um conjunto de crenças sobre a matemática e sobre a matemática para resolver problemas.

De acordo com Schoenfeld (1992), a maioria dos alunos do ensino básico e médio acredita que a matemática depende mais da memorização e acredita que, há geralmente uma maneira certa de resolver todos os problemas mathematcos.

Geralmente, o aluno pensa que os problemas de Matemática devem ser resolvidos em poucos minutos. Essas declarações refletem parte do que Silver (1987) rotularia de currículo oculto de Matemática e refletem também as crenças do aluno sobre atitudes em relação a essa disciplina. As crenças dos alunos e suas atitudes foram moldadas por suas experiências matemáticas escolares, apesar do fato de que nem os autores do currículo de Matemática nem os professores que ensinaram os cursos tiveram objetivos curriculares intencionais relacionados com as atitudes dos alunos a respeito das crenças sobre a matemática.

Em sua concepção de currículos dessa disciplina ou de planejamento de atividades de ensino, Silver (1987) afirma que os educadores precisam estar cientes de que o aluno irá integrar sua experiência com sua atividade, experiência ou curso, estando preparado com suas experiências anteriores, para formar ou modificar atitudes em direção às crenças sobre Matemática e resolução de problemas matemáticos. O mesmo autor afirma que se deve ensinar esse currículo oculto, a fim de permitir que o aluno desenvolva atitudes e crenças que reflitam uma visão vibrante, desafiadora, criativa, interessante e construtiva dessa ciência.

Prosseguimos nosso estudo com uma perspectiva histórica delineada por George Stanic e Jeremy Kilpatrick, na qual os autores destacam Polya, considerado o precursor da resolução de problemas no ensino e na aprendizagem da Matemática, e Dewey, com suas ideias pedagógicas que muito influenciaram no ensino, sobretudo na China, no início do século XX. E incluímos também o estudo sobre as habilidades matemáticas dos alunos do psicólogo russo Vadim Andreevich Krutetskii,

2.3 George Stanic e Jeremy Kilpatrick

A história tem mostrado que a resolução de problemas já foi muitas vezes proposta como forma de atividade em salas de aula. George Stanic e Jeremy Kilpatrick (1989) oferecem um painel sobre essa metodologia desde a Antiguidade até o fim do século XX, analisando as diversas contribuições para a área e mostrando também equívocos provocados por essa denominação, no artigo “Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematic Curriculum” (1989, p. 1-22).

Esses autores apontam a existência de problemas em currículo de antigas civilizações, a saber: na egípcia, fazem referência ao Papiro Rhind, texto matemático sob a forma de um manual prático, que contém oitenta e cinco problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.

> O papiro de Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos. (EVES, 2002, p. 70).

Sobre a existência de problemas na civilização chinesa, Stanic e Kilpatrick (1989) citam o livro matemático chinês, *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, datado de 1000 anos a. C..

> Este livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedade, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações, e propriedades dos triângulos, retângulos [...] os chineses repetem o velho hábito dos babilônios de compilar coleções de problemas específicos. O livro também se assemelha à matemática egípcia pelo uso da “falsa posição”, mas a invenção desse processo, assim como a origem da matemática chinesa em geral, parece independente de influência ocidental.
> (BOYER, 2002, p. 134).

Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam que existem três temas envolvidos na resolução de problemas, perpassando desde a Antiguidade até os dias de hoje, os quais são: a) resolução de problemas como contexto; b) resolução de problemas como capacidades; e c) resolução de problemas como arte.

A resolução de problemas como contexto apresenta pelo menos cinco subtemas, todos eles baseados na ideia de que os problemas e suas resoluções são meios para atingir determinados fins, a saber:

- Resolução de problemas como *justificação*: historicamente, os problemas relacionados a experiências do mundo real foram incluídos no currículo para convencer os alunos e os professores o valor da Matemática.
- Resolução de problemas como *motivação*: nesse caso, a motivação está relacionada com a justificação e a conexão é mais especifica.

Como exemplo: um problema específico envolvendo a adição com reagrupamento deve ser usado para introduzir uma série de tarefas que leve à aprendizagem do algoritmo mais eficiente para adicionar números.

- Resolução de problemas como *atividade lúdica*: como o interesse do aluno está envolvido no desenvolvimento de situação, a atividade lúdica está relacionada com a motivação. E, desse modo, os problemas são fornecidos não só para motivar a aprendizagem, mas também, para que permitam algum divertimento com a matemática que os alunos já tenham aprendido, satisfazendo um interesse humano natural em explorar situações não usuais.
- Resolução de problemas como *veículo* – nesse caso, os problemas são explorados não somente para motivar o interesse dos alunos na instrução direta de um tópico, mas também, como veículo para um novo conceito ou técnica a ser aprendida.
- Resolução de problemas como *prática*: este subtema é o que aparece mias frequentemente no currículo matemático: os problemas são usados para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente.

A resolução de problemas como capacidade, segundo Stanic e Kilpatrick (1989), tornou-se dominante para aqueles que veem essa estratégia como uma valiosa finalidade curricular relacionada às mudanças ocorridas no fim do século XIX e no início do seguinte. Para esses autores, muitos educadores, influenciados por Thorndike, acabaram assumindo que o estudo da Matemática melhorava o pensamento dos alunos e, assim, tornar-se-iam mais competentes na resolução de problemas do mundo real.

Santos (2007, p. 1) lembra que Edward Lee Thorndike era um psicólogo reconhecido dentro e fora dos Estados Unidos e um defensor das provas experimentais que esmiuçavam detalhes dos processos de aprendizagem, sistematizavam e estabeleciam leis da aprendizagem e que, por esse motivo, contribuiu tanto para Psicologia quanto para a Educação.

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), embora os problemas fizessem parte do currículo de Matemática, até o início do século XX, a ênfase dada à resolução de problemas pelos educadores matemáticos era devida à crença de que o estudo da matemática melhoraria o raciocínio das pessoas. Essa ideia vem desde os tempos de Platão, quando se acreditava que, estudando Matemática, as pessoas se tornariam mais competentes para pensar, raciocinar e resolver problemas do mundo real.

Ainda, segundo os autores, durante o século XIX, a teoria da disciplina mental acabou fornecendo um quadro para apoiar tais ideias. O quadro teórico daí resultante é a fusão entre a psicologia das faculdades e a tradição das artes liberais, isto é, a mente das pessoas é formada por várias capacidades – percepção, memória, imaginação, compreensão, intuição, razão – e o estudo da Matemática e das línguas clássicas é a forma para o desenvolvimento dessas faculdades.

Nos Estados Unidos, a partir da primeira metade do século XIX, já havia em vários estados departamentos para supervisionar e organizar a educação das escolas públicas. Essa nação tornou o ensino leigo e gratuito, o curso primário, por volta de 1830; o secundário, por volta de 1850; e o profissional para indústria, agricultura e comércio, em 1820. (ARANHA, 1996, p. 81).

Devido às mudanças sociais que ocorreram nos Estados Unidos no final do século XIX, a teoria da disciplina mental entrou em declínio.

Segundo Santos (2007), depois da guerra civil, houve um grande desenvolvimento econômico nos Estados Unidos e, consequentemente, a indústria e o comércio precisavam de um novo tipo de trabalhador para o gerenciamento de negócios. A partir dessa necessidade, surgiu demanda por uma reforma e restruturação das escolas e das universidades quanto a seus objetivos, cursos, currículos e duração, tendo em vista a formação do novo cidadão.

Thorndike (1924) afirma que os temas de suas pesquisas estavam associados à tentativa de modernizar padrões sociais e de escolarização, iniciada no fim do século XIX e no início do século XX. Essa tendência estava relacionada às transformações econômicas e sociais norte-americanas, visando atender às exigências de uma população que aumentava quantitativa e qualitativamente, com a chegada de grandes levas de imigrantes.

Stanic e Kilpatrick lembram que, em 1924, Thorndike ainda lidava com a teoria da disciplina mental, apesar de seu declínio. E, cada vez mais, psicólogos, sociólogos e educadores tomavam posições contra essa teoria, preocupados com a população escolar que cresceu vinte vezes entre 1890 e 1940 em uma sociedade que sofria mudanças drásticas, por causa da industrialização, da imigração e da urbanização. Então, decidiram que o currículo escolar deveria ser alterado – e concordavam que a Matemática era importante, mas argumentavam que muitas pessoas não precisavam saber mais do que a aritmética de 6º ano de escolaridade.

Desse modo, ao discutirem o tema das capacidades, os pesquisadores distinguiram problemas rotineiros e não rotineiros. A resolução dos problemas não rotineiros foi caracterizada como uma habilidade de alto nível a ser adquirida, reservada para os estudantes especialmente capazes, depois de adquirida a habilidade de resolver problemas rotineiros, relacionados a conceitos básicos da Matemática.

No início do século XX, conforme explicam esses autores, existiam dois modos de olhar as pessoas, a educação e o currículo escolar.

A primeira forma de analisar acredita que a teoria da disciplina mental produziu uma visão fundamentalmente otimista da inteligência humana e que seus defensores reconheciam a existência de diferenças entre elas. Entretanto o importante era que todas as pessoas nasciam com as mesmas faculdades e caberia à escola desenvolvê-las, partindo da crença de que todos tivessem tido acesso ao mesmo conhecimento e aos mesmos métodos de instrução.

A segunda visão é baseada no trabalho de Thorndike (1924) e não apresenta essa perspectiva otimista da inteligência humana. Ele e Granville Stanley Hall (1904) promoveram as ideias de que as diferenças individuais regiam a necessidade de expor diferentes crianças a diferentes matérias e diferentes métodos de instrução.

Schoenfeld (1992) relata que, alinhada com as ideias dos educadores a respeito da eficiência social, a educação da escola básica significava instrução em níveis muito elementares. Como exemplo, ele cita que, nos anos 1890, um conjunto de instruções de um distrito escolar orientava os professores para que ensinassem matemática o suficiente para capacitar seus alunos para servirem de balconistas em lojas locais. Enquanto isso, o currículo das universidades era bastante rigoroso, compatível com altos padrões de ensino.

Os universitários estudavam álgebra, geometria e física, mas esse nível de ensino sofisticado estava reservado à elite e atendia poucos estudantes.

Schoenfeld (2007) relata que, nos anos de 1940, durante a Segunda Guerra Mundial, foi um escândalo público quando o Almirante Nimitz se queixou das deficiências matemáticas dos candidatos aspirantes a cargos na marinha e que os recrutas sabiam tão poucos conhecimentos matemáticos que o órgão governamental teve que fornecer treinamento em aritmética, necessária para contabilidade e artilharia.

Stanic e Kilpatrick (1989) contam que, no princípio do século XX, estudiosos – como David Eugene Smith, do Teachers College da Universidade de Columbia, e Jacob William Albert Young, da Universidade de Chicago –. estabeleceram a educação matemática como um campo legítimo de estudos profissionais nas universidades e em outras escolas superiores nos Estados Unidos, pois eles a viam como um veículo essencial para desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos e como a mais apropriada para todos os estudantes.

Para Stanic e Kilpatrick (1989), *a resolução de problemas como arte* é uma visão mais profunda e compreensiva nos currículos escolares de Matemática, que veio à tona com o trabalho de Polya, fazendo ressurgir a ideia da heurística (a arte da descoberta) nos tempos atuais.

Os autores afirmam que, apesar de a discussão sobre métodos e regras para a descoberta e invenção em Matemática já ter sido analisada por matemáticos, como Euclides, Pappus, Descartes, Leibniz e Bolzano, suas ideias não repercutiram nos currículos matemáticos, como as de Polya.

Coube a Polya a tarefa de reformular, estender e ilustrar várias ideias sobre a descoberta matemática, para que os professores pudessem compreender e usar.

2.4 George Polya

George Polya foi um matemático húngaro, de família judaica de origem polonesa que, por causa da Segunda Guerra Mundial na Europa, aceitara o cargo de professor na Universidade de Stanford, em 1942, onde lecionou até 1953. Em 1945, publicou seu livro mais famoso, *How to solve it* (A arte de Resolver Problemas), seguiram-se *Isoperimetric inequalities in mathematical physics* (1951). Depois, vieram *Mathematics and plausible reasoning* (1954) e *Mathematical discovery* (1962-64).

De acordo com Stanic e Kilpatrick (1989), a experiência de Polya quanto à aprendizagem e ao ensino da Matemática levou-o a questionar como as pessoas fazem as descobertas matemáticas. E ele levanta a hipótese de que seria mais interessante para os alunos, se eles percebessem como esse conhecimento é criado, em vez de lhes oferecer uma ciência acabada. Desse modo, os alunos usariam o raciocínio plausível no lugar do raciocínio demonstrativo.

No prefácio do livro *A arte de resolver problemas*, Polya escreve que um problema pode ser modesto, mas se, ao resolvê-lo, despertar a curiosidade e colocar em jogo as capacidades inventivas, essa experiência poderia produzir o gosto pelo trabalho mental. Para o autor, aí se encontraria a grande oportunidade para o professor, porque, ao desafiar o interesse do aluno, apresentando-lhe problemas compatíveis com os seus conhecimentos e auxiliando-o com perguntas estimulantes, o professor estaria incutindo o gosto pelo raciocínio independente e propiciando formas de alcançar essa meta.

Em “Sobre a resolução de problemas de Matemática na high school”, artigo publicado em 1949, Polya enfatiza que grande parte do interesse e da motivação do aluno deve resultar das qualidades inerentes à matemática e ao processo de resolução de problemas e aponta:

- Resolver um problema é encontrar a solução e a dinâmica a serem adotadas, diante de todos os obstáculos e dificuldades apresentados. O fato de conseguir essa resolução é a realização da inteligência humana, nossos pensamentos e ações estão sempre voltados para alguma finalidade.
- A educação tem como foco contribuir para o desenvolvimento da inteligência (ferramenta básica para resolução de problemas). As questões apresentadas a alunos da escola secundária devem ser dosadas ao seu nível de aprendizado. No caso da matemática, existe uma exceção: a abordagem necessária para outras ciências (biologia, física, historia) aqui não se faz presente. Se o aluno tiver um bom professor que o instrua do modo correto, ele é capaz de resolver problemas de nível cientifico, como os teoremas de Euclides. Nessa questão, se localiza a grande oportunidade da matemática: por ser uma ciência muito simples, ela permite uma exigência maior. Para Polya, as obrigações do professor precisam focar ao máximo no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e devem ser:

  – escolher quais os problemas mais apropriados (nível de dificuldade);

  – ter tempo para a apresentação da questão e garantir um bom entendimento; - ajudar de modo conveniente;

  - provocar a sensação de independência nos alunos, para que a resposta possa causar satisfação e a busca de mais;

  - contribuir para seu o desenvolvimento.
- O professor não pode passar adiante o que não aprendeu nem adquiriu.

É necessário que os futuros professores enfatizem em seus currículos suas habilidades, técnicas, praticas e métodos na resolução de problemas.

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), Polya acreditava que a educação visasse desenvolver a inteligência, isto é, que se deve ensinar os jovens a pensar. As crianças devem aprender a aritmética com profunda compreensão, e não, mecanicamente, porque, desse modo, a chance do sucessor é maior, com resultados mais rápidos e permanentes, apesar de ser uma meta mais ambiciosa. E, na escola secundária, a Matemática deve ser ensinada a todos, porque não se sabe quem vai precisar dela profissionalmente.

Polya acredita também que a Matemática consiste de informação e de saber fazer. Saber fazer em matemática é a capacidade de resolver problemas. Em “O Ensino por meio de problemas”, publicado em 1985, na revista *RPM* 07, Polya 9, (1985, p. 11) afirma:

> Ensinar é uma ação complexa que depende em grande parte das personalidades envolvidas e das condições locais. Não existe hoje, uma ciência do ensino propriamente dita e não haverá nenhuma em um futuro previsível. Em particular, não existe método de ensino que seja indiscutivelmente o melhor, como não existe a melhor interpretação de uma sonata de Bethoven. Há tantos bons ensinos quanto bons professores: o ensino é mais uma arte do que uma ciência. (Isso não exclui, é claro, que o ensino possa beneficiar-se de uma atenção judiciosa aplicada às exigências e teorias psicológicas).

Nesse texto, seu autor afirma que a principal tarefa do ensino da Matemática, no nível secundário, é ensinar os jovens a pensar. Esse ensino deveria abranger as atividades mais marcantes do matemático: a descoberta das demonstrações rigorosas e a construção de sistemas axiomáticos. Além disso, outras atividades, tais como:

- reconhecimento e extração de um conceito matemático de uma situação concreta;
- previsão de resultados;
- previsão das grandes linhas de uma demonstração antes de realizá-la em detalhe;
- elaboração das generalizações a partir de casos observados;
- capacidade de raciocínio intuitivo e de argumentação por analogia etc.

Polya considerava que essas atividades são a parte mais instrutiva para o futuro matemático. Para ele, aprender Matemática exige ação e, se o objetivo for desenvolver a inteligência do aluno, deve-se observar a ordem das atividades. Por exemplo: adivinhar é mais fácil do que demonstrar; resolver problemas concretos é mais natural do que construir estruturas conceituais, pois o concreto vem antes do abstrato. A ação e a percepção devem vir antes das palavras e dos conceitos e os conceitos, antes dos símbolos etc. Isso tudo conduz à resolução de problemas matemáticos.

No que tange aos problemas matemáticos, o autor divide-os em dois tipos: os rotineiros e os não rotineiros. São considerados rotineiros aqueles resolvidos mediante aplicação direta e mecânica de uma regra que o aluno não tem nenhuma dificuldade para encontrar, aquele que não apresenta desafio algum à sua inteligência, seguindo apenas as orientações do professor ou do livro e o resultado obtido pelo aluno é apenas a prática de uma instrução.

Polya não exemplificou seu conceito de problemas não rotineiros, mas explicou que esse tipo de problema provoca a tensão e o triunfo da descoberta, além de justificar a profissão do professor de Matemática. A resolução de problemas não rotineiros exige do aluno um verdadeiro esforço que deverá despertar seu interesse, motivando-o. Logo, a escolha do professor deve ser cuidadosa.

Ainda segundo o autor, os problemas devem ter sentido e ter um propósito para o aluno. Além disso, deve ser levada em conta sua apresentação, segundo o principio da aprendizagem ativa; em vez de todo o enunciado, fazer sugestões e deixar aos alunos a tarefa de sua formulação definitiva. E, também, seguindo o mesmo princípio, deixar os alunos descobrirem a solução e suas consequências.

Para Polya (1977), como o objetivo principal do ensino é o desenvolvimento da inteligência do aluno, a ideia de como resolver um problema deve nascer na mente do aluno e o professor deve apenas conduzir, não ajudando demais e evitando interferência. O modo como fazer isso é a proposta de Polya em seu livro *A arte de resolver problemas*. Uma cópia do quadro em que cada passo é descrito é apresentada no Quadro 1, a seguir.

Quadro 1 – Proposta de como resolver um problema, segundo Polya.

Como Resolver um Problema		
		COMPREENSÃO DO PROBLEMA
Primeiro É preciso *compreender* o problema.		*Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?* É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
		ESTABELECIMENTO DE UM PLANO
Segundo Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.		Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que teria a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como ela pode variar? É possível obter os dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
		EXECUÇÃO DO PLANO
Terceiro *Execute* o seu plano		Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
		RETROSPECTO

Quarto *Examine* a solução obtida.		É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isso num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em outro problema?
Fonte: Polya, 1977.		

Polya lembra que, se uma das tarefas do professor é auxiliar o aluno a ser autônomo em seu trabalho, ajudando-o com naturalidade, ele deve se colocar no lugar do aluno, para perceber seu ponto de vista, tentando compreender o que se passa em sua cabeça e fazendo perguntas, para indicar um passo que poderia ter lhe ocorrido.

Então, as quatro fases descritas são importantes, do ponto de vista de Polya, porque evitam que o aluno chegue impulsivamente à solução, sem que tenha verificado cada passo, prevenindo-se de perder os melhores efeitos. Assim, aprender a resolver problemas é como arte prática. E Polya enfatiza a importância de o professor discutir e ilustrar essas técnicas com o aluno, para levá-lo a compreender realmente.

Todas essas questões conduzem a outro texto de Polya, “Aprender, ensinar e aprender a ensinar”, capítulo XIV do livro *Mathematical Discovery* (1962/65), em que o autor apresenta suas opiniões sobre o processo de aprendizagem, a arte de ensinar e a formação de professores, afirmando que o objetivo do ensino da Matemática nos currículos do ensino secundário é ensinar o jovem a pensar. E é tarefa professor tentar desenvolver a capacidade do aluno de usar a informação transmitida.

Polya chamou essa capacidade de pensamento produtivo e, para ele, o pensamento matemático não existe apenas no aspecto formal, relacionado com axiomas, definições e demonstrações rígidas: existe outro aspecto, que é a síntese das generalizações a partir de observações. Essas observações permitem que se faça argumentação por indução e por analogia, além d ensinar também o reconhecimento de conceitos matemáticos e/ou sua extração de situações concretas.

Polya (1962/65) considerava que a resolução de problemas era uma arte prática, tal como nadar, ou fazer esqui ou tocar piano: tais artes são aprendidas por imitação e por prática. Ele reconhecia que as técnicas de resolução de problemas precisam ser ilustradas pelo professor, discutidas com os alunos e praticadas de maneira a compreender, e não, mecanicamente. O autor observou também que, apesar de os problemas rotineiros poderem ser utilizados para cumprir algumas funções pedagógicas do ensino dos alunos, é somente por meio do uso criterioso de problemas não rotineiros que se pode desenvolver a capacidade dos alunos de resolver problemas.

Para Polya (1962/65), somente um professor sensível pode estabelecer o tipo certo de problemas para uma dada aula, porque ensinar é uma atividade humana que requer experiência, gosto e julgamento. Assim, cabe a ele ser criativo, como um músico ou como um poeta para enfatizar nuances diferentes em suas apresentações.

Stanic e Kilpatrick (1989) comentam também o trabalho de John Dewey (1910) para a discussão, pois consideram que as ideias de Dewey complementam as ideias de Polya.

2.5 John Dewey

O educador norte americano John Dewey (1859-1952) foi o primeiro a formular o novo ideal pedagógico, afirmando que o ensino deveria ocorrer por meio da ação (learning by doing), porque, para ele, o conhecimento está voltado para a experiência. As ideias são hipóteses de ação e tornam-se verdadeiras à medida que orientam a ação. Seu valor de instrumento serve para resolver os problemas apontados pela experiência humana, como ensina Aranha (2006).

A escola tradicional originou-se de um mundo, no qual, a educação baseava-se em modelos ideais e se preocupava com a transmissão da maior quantidade possível de conhecimento acumulado, sendo essencialmente intelectualista e livresca.

Na sociedade do século XIX, marcada por transformações sociais, politicas e econômicas, o indivíduo tinha de se preparar para viver nesse meio dinâmico, em constante mutação e, para tanto, era necessário aprender a aprender, interessando-se por métodos e técnicas, com uma ênfase maior nos processos de conhecimento do que no produto. Além disso, acreditava-se que o acesso de todos ao saber, ao promover a democratização do ensino, daria oportunidade à mobilidade social.

Esse movimento conhecido como Escola Nova, surgido no fim do século XIX, com a proposta de encontrar novos caminhos à educação, segundo os quais a criança deve ser o sujeito da educação e deve satisfazer suas necessidades e estimular suas atividades, segundo as especificidades de sua natureza.

Segundo a Escola Nova, o professor não mais transmite o conhecimento, pois a abstração deve ser resultado da experiência e da descoberta do próprio aluno, para quem o conhecimento deve ser compreendido, e não, decorado. Além desse enfoque, visam-se não apenas os aspectos intelectuais, como também, atitudes e a aquisição de habilidades.

A corrente filosófica que privilegia a prática e a experiência na educação é o pragmatismo, o qual se volta para o concreto, para os fatos e para a ação. As teorias tornam-se apenas instrumentos e a verdade não é permanente, pois ela muda e está sempre se refazendo e, desse modo, torna-se útil. O pragmatista não está preocupado somente com a satisfação das necessidades materiais: a ele, interessa também o desenvolvimento integral do homem e da sociedade.

John Dewey sofreu a influência do pragmatismo e se tornou um dos maiores teóricos dos princípios da Escola Nova. Entretanto ele preferia identificar sua teoria como um instrumentalista ou funcionalista, porque as ideias têm valor instrumental para resolver os problemas originários da experiência humana. Essas ideias são hipóteses de ação e se tornam verdadeiras, na medida em que funcionam como orientadoras de ação.

Para Dewey (1910), existem cinco estágios do ato de pensar, quando surge algum problema, os quais são:

1. necessidade sentida;
2. análise da dificuldade;
3. alternativas de solução;

4. experimentação de várias opções, até que o teste mental aprove uma delas;
5. ação como prova final para a solução proposta, que deve ser verificada cientificamente.

Vista assim, a educação é um processo – e não, um produto – e, ao reconstruir a experiência, existe a melhoria permanente da eficiência individual. (GADOTTI, 1997).

No início do século XX, o movimento da Escola Nova tomou forma e muito influiu sobre os sistemas educacionais e sobre a mentalidade dos professores, pois a ideia dessa corrente pedagógica baseava-se em ação e na atividade do aluno. Sua proposta era a de que a educação fosse instigadora da mudança social e, ao mesmo tempo, se transformasse, porque a sociedade estava em mudança (GADOTTI, 1997).

Interessado na formação de um cidadão e no estímulo do processo da socialização da criança, o movimento da Escola Nova empenhava-se no desenvolvimento da individualidade, promovendo a autonomia, o que só era possível em uma escola não autoritária, que permitisse ao aluno aprender por si mesmo (ARANHA, 2006).

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), Dewey não usou a expressão resolução de problemas, ele a designava pensamento reflexivo, pois, para ele, resolver problemas é a essência do pensamento humano e ser capaz de resolver problemas é o que os humanos fazem. No seu livro *How we think* (1910), Dewey discute como o pensamento pode ser treinado, tal a importância que ele dava à capacidade das pessoas de resolver problemas.

Os mesmos autores ainda apontam que, para Dewey, tal como considerava Polya, a ênfase deve ser dada ao professor, mas ele não rejeitou a ideia de que os professores transmitem informações. Ele considerava que a questão era como transformar a informação em um bem intelectual, isto é, a informação deve ser fornecida ao aluno por meio de estímulos, mas não, com a finalidade e a rigidez dogmáticas. Igualmente, deve ser relevante para a reconstituição da própria experiência do aluno.

Segundo Dewey (1910), o professor precisa usar seu conhecimento do conteúdo, para ajudar o aluno a reconstruir a experiência de maneira que a matéria se torne progressivamente mais organizada para sua compreensão.

Stanic e Kilpatrick (1989) mencionam outro texto de Dewey, “A criança e o currículo”, no qual ele afirma que, quando os alunos reconstroem sua experiência, eles constroem um mapa logicamente organizado do conteúdo, embora eles possam usar os que foram construídos por outros como guias para sua aprendizagem. Entretanto essa reflexão não substitui a aquisição do conhecimento por meio dessa jornada.

Assim como Polya, Dewey estava interessado na transformação logicamente organizada do conteúdo em uma experiência significativa para o aluno. Stanic e Kilpatrick (1989) apontam que, para Dewey, o processo do pensar reflexivamente surge dentro da experiência é uma forma de arte, pois ele acredita que os alunos devem ser capacitados em métodos de ataque e solução. Todavia, de acordo com o educador, a destreza está envolvida no pensar reflexivamente ou na resolução de problemas, enquanto o pensar reflexivamente, em si mesmo, não é uma habilidade.

Acredita-se que, para John Dewey (1910), a resolução de problemas era a essência do pensamento humano, porque o fato de estar capacitado para pensar reflexivamente faz de nós seres humanos. Ele acreditava que o pensamento poderia ser treinado e que desenvolver a habilidade das pessoas de resolver problemas era um fim em si. Para ele, os problemas surgiam naturalmente com a experiência e o ensino, enquanto que o aprendizado consiste na reconstrução da experiência que leva à organização progressiva da matéria.

Além disso, a reconstrução da experiência requer um pensamento reflexivo ou uma habilidade para resolver problemas. Dewey não rejeita a ideia de que os professores transmitem informações aos alunos, mas questiona como a informação deveria ser convertida numa vantagem intelectual. Ele acredita que a informação deve ser fornecida em forma de estímulo, e não, com uma finalidade dogmática e rígida. Segundo ele, a informação deve ser relevante para as questões vitais da experiência do próprio aluno. O professor deve usar seu conhecimento do conteúdo para ajudar a criança a reconstruir a experiência, de forma que a matéria se torne progressivamente mais organizada para a criança.

Nas palavras de Dewey (1910, p. 44):

> [...] há habilidade envolvida no pensamento reflexivo, ou resolução de problemas, mas o pensamento reflexivo em si não é uma habilidade. Habilidade prática e formas eficazes dessa habilidade podem ser usadas inteligentemente, e não, mecanicamente apenas quando a inteligência fez parte dessa aquisição.

2.6 Vadim Andreevich Krutetskii

Kilpatrick (1985, p. 7) relata que o trabalho de Polya não gerou atenção da comunidade de pesquisadores americanos a respeito da resolução de problemas e que o interesse só foi despertado com a tradução para o inglês das pesquisas soviéticas, sobretudo com os influentes trabalhos de Krutetskii (1976). Foi esse estudioso quem identificou os processos de resolução de problemas realizados com crianças talentosas em idade escolar, estimulando grande interesse, entre educadores americanos, em estudos de caso e experimentos de ensino.

Em 1976, Kilpatrick, juntamente com Wirszup, editou *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, de Vadim Andreevich Krutetskii (1976). E, no prefácio do livro, Kilpatrick relata que o trabalho de Krutetskii tornou-se conhecido entre psicólogos e educadores matemáticos ocidentais em 1963, quando o psicólogo russo submeteu um artigo sobre habilidades matemáticas ao Décimo Sétimo Congresso Internacional de Psicologia, em Washington (EUA), publicando no mesmo ano uma coleção de trabalhos soviéticos em Psicologia Educacional, os quais continham um artigo de Krutetskii, “Some Characteristics of the Thinking of Pupils with Little Capacity for Mathematics” (1964).

Kilpatrick e Wirszup (1976) afirmam que o trabalho de Krutetskii levantou interesse não só porque ele pareceu ser o único entre os psicólogos russos a investigar as diferenças individuais em habilidades matemáticas, mas também, porque os problemas matemáticos usados por ele em sua pesquisa eram muito variados e engenhosos.

Krutetskii (1976) relatou sua pesquisa em livro composto por quatro seções: na primeira, com quatros capítulos, o autor descreve sua pesquisa e os objetivos; na segunda, com cinco capítulos, ele descreve os métodos e a organização do seu estudo; na terceira, com nove capítulos, ele faz a análise da estrutura da habilidade matemática dos alunos.

No oitavo capítulo, O sistema dos problemas experimentais para investigar habilidades matemáticas dos alunos (The System of Experimental Problems for Investigating Schoolchildren's Mathematical Abilities), o autor descreve os métodos do seu estudo, que fora baseado em setenta e nove problemas separados em vinte e seis séries (vinte e dois aritméticos, dezessete algébricos, vinte e cinco geométricos e quinze de outros temas). As séries foram agrupadas em quatro tipos de informações.

No primeiro capítulo do seu livro *A psicologia das habilidades matemáticas em crianças na idade escolar*, V. A. Krutetskii (1976) declara que o problema do desenvolvimento das habilidades das crianças em idade escolar, para certos tipos de atividades, é de importância crucial para o progresso harmonioso e abrangente da personalidade humana.

O autor enfatiza que o problema das habilidades possui grande valor para a sociedade, porque, por meio da correta distribuição dos recursos humanos, o potencial de cada pessoa poderá ser utilizado ao máximo. Entretanto, a fim de se alcançar esse objetivo, torna-se necessário descobrir e incentivar o potencial dos alunos desde cedo.

Para esse estudioso russo, o problema das habilidades está ligado às diferenças individuais, visto que os seres humanos são diferentes, quando se trata de habilidade, ou seja, nós não possuímos o mesmo potencial em todas as áreas e em todas as atividades. E o autor enfatiza que nenhum estudante é inapto em tudo: pelo contrário, cada um é capaz de entender qualquer matéria na escola, mas "[...] *os alunos são capazes das mesmas coisas em níveis diferentes*.".

Dessa maneira, se um estudante é considerado menos capaz em certa área, isso não significa que ele seja inferior ou sem talento em geral. Assim, é possível generalizar e afirmar que as habilidades humanas não são inatas e que devem ser desenvolvidas ao longo da vida, por meio do estudo e do trabalho. Todavia essas habilidades só poderão ser desenvolvidas, se forem levadas em consideração pela escola.

A fim de corroborar com seu argumento, Krutetskii (1976) cita Budarnyi (1963), um pedagogo de Moscou: “[...] *Não encontramos um único aluno, cujo nível de habilidade fosse tão baixo que ele não pudesse acompanhar a escola*.”. Essa afirmação, no entanto, não significa que todos os alunos devam aprender da mesma maneira ou que os professores devam envidar os mesmos esforços para ensiná-los. Por exemplo, mesmo utilizando os melhores métodos didáticos, um aluno progredirá mais rápida e adequadamente numa matéria do que em outra.

Além disso, alguns alunos apresentam melhores resultados em determinado campo em detrimento de outro. Às vezes, um aluno esforça-se bastante numa área, porém ele não progredirá tanto quanto outro que, na mesma área, apresenta melhores resultados, sem a necessidade de despender igual esforço. Certamente, ambos os alunos possuem capacidade e ambos têm capacidade de apreender os conteúdos do currículo escolar. A capacidade apresentada, todavia, não é a mesma.

Krutetskii (1976, p. 3) chama a atenção para o fato de as habilidades não serem inalteráveis. Elas são “[...] *formadas e desenvolvidas por meio da instrução, prática e domínio de uma atividade*.” Apesar dessas circunstâncias, os professores devem levar em consideração o potencial dos alunos para poder entendê-los melhor e para poder estabelecer métodos que os façam desenvolver mais seu potencial. Portanto a maioria dos professores é a favor da presença de diferenças psicológicas individuais que possam afetar o ensino em crianças em idade escolar.

Krutetskii (1976) explica que o progresso insuficiente não implica necessariamente um nível de habilidade limitado. Todavia, se todas as outras condições permanecerem iguais, “[...] *exercícios semelhantes e semelhantes métodos de ensino produzem resultados diferentes, esses resultados podem ser explicados pelas diferenças nas habilidades dos alunos*.” (1976, p. 4).

O mesmo autor chama a atenção para o fato de que habilidades limitadas apresentadas por determinado aluno em determinada área não libera o professor da necessidade de desenvolver tais habilidades na área em questão da melhor maneira possível. No entanto surge outro problema: é preciso descobrir a área na qual o aluno é mais capaz e desenvolver suas habilidades nessa o mais possível. Esse procedimento permitirá que os alunos mais capazes em determinada área tenham livre acesso ao pleno desenvolvimento de suas habilidades.

Mesmo que os melhores métodos didáticos sejam utilizados na escola, segundo Krutetskii (1976), as diferenças individuais (compreendidas como níveis diferentes de habilidades), não devem ser desconsideradas. Sendo ensinado de maneira correta, cada aluno será capaz de apreender o conteúdo passado pelo professor, mas, ainda assim, haverá diferenças individuais. Em qualquer disciplina, alguns alunos serão relativamente mais capazes e outros, menos. O autor ressalta que aquilo que os professores devem fazer é “[...] *esforçar-se para desenvolver ao máximo todas as habilidades do aluno, dando consideração especial ao desenvolvimento das habilidades principais do aluno, por serem essas o fundamento da sua futura orientação profissional*.” (1976, p. 4). Consequentemente, o cultivo das habilidades e a seleção das capacidades individuais são essenciais.

Esse mesmo autor chega à conclusão de que é necessário melhorar o desenvolvimento da matemática para o progresso de uma série de outras áreas do conhecimento. Esse argumento aplica-se não só à Física e à Astronomia, mas também, à Biologia, Medicina, Arqueologia, Economia, Linguística e outras áreas. Os métodos e o raciocínio matemáticos estarão presentes em todas as ciências, de tal maneira que será difícil encontrar uma área do conhecimento em que não seja necessário o uso da Matemática.

Assim, a necessidade de matemáticos aumentará anualmente em toda parte. O autor sugere que as escolas desenvolvam as habilidades matemáticas dos alunos ao máximo, com o objetivo de melhorar o nível da cultura matemática e, simultaneamente, as escolas devem dar atenção particular aos alunos que mostrarem grandes habilidades nessa área, promovendo o desenvolvimento matemático daqueles que possuem uma aptidão especial para essa ciência.

Krutetskii (1976) conclui, afirmando que os professores de matemática devem trabalhar, a fim de melhorar as habilidades matemáticas de todos os alunos e, ao mesmo tempo, devem dar atenção especial aos alunos que demonstrarem habilidades acima da média nessa área. Em outras palavras, os professores devem auxiliar seus alunos sempre que eles demonstrarem habilidades matemáticas acima da média por meio da organização de trabalhos especiais com esses alunos, por exemplo, para ajudá-los a desenvolver ainda mais suas habilidades.

Krutetskii (1976, p. 350) acumulou dados do seu estudo longitudinal, o qual permitiu-lhe formular um modelo de estruturas das habilidades matemáticas que se destacam no processo de resolução de problemas. São quatro os estágios que compõem esse modelo:

> 1º estágio: consiste em obter informação matemática e diz respeito à habilidade para formalizar a percepção do material matemático e para compreender a estrutura formal do problema.
>
> 2º estágio: é o momento de processar a informação matemática e se refere a:
> a) habilidade para o pensamento lógico na esfera quantitativa e em relações espaciais, símbolos numéricos e alfabéticos – é a habilidade de pensar em símbolos matemáticos.
> b) habilidade para uma rápida e ampla generalização dos objetos matemáticos, relações e operações.
> c) habilidade de encurtar o processo do raciocínio matemático e o sistema das operações correspondentes. Essa habilidade é a de pensar em estruturas reduzidas.
> d) flexibilidade dos processos mentais em atividade matemática.
> e) Empenho em clareza, simplicidade, economia e racionalidade de soluções.
> f) habilidade para uma reconstrução rápida e livre da direção de um processo mental, alternando de um curso de pensamento direto a outro, reverso (reversibilidade do processo mental em raciocínio matemático).
>
> 3º estágio: consiste em reter a informação matemática e se refere a:
> a) memória matemática (memória generalizada para relações matemáticas, características dos tipos, esquemas

> dos argumentos e provas, métodos de resolução de problema e princípios de abordagem).
>
> 4º estágio: é o componente sintético geral e se refere ao aspecto matemático da mente.

Segundo Brito (2010), esses estágios são processados em perfeita sintonia, sendo quase impossível separá-los com um movimento de passagem harmonioso entre eles, de ir e voltar a cada um deles, com a ampliação de compreensão em cada uma das etapas.

Krutetskii (1976) cita também os componentes cujas presenças não são obrigatórias na estrutura do talento matemático, pois são neutros no que se refere a esse respeito, entretanto sua ausência ou não determina o aspecto matemático da mente, os quais são:

1. rapidez dos processos mentais como uma característica temporária, na qual o ritmo individual do trabalho não tem um valor decisivo e o matemático pode refletir deliberadamente, ainda que lentamente, mas muito bem e de maneira profunda.
2. habilidades computacionais (habilidades para cálculos rápidos e precisos, muitas vezes, na cabeça). Sabe-se que existem pessoas capazes de fazer cálculos matemáticos complexos em suas cabeças (quase instantaneamente, elevar ao quadrado e elevar ao cubo números de três algarismos ou extrair raiz quadrada e raiz cúbica de números de seis algarismos), mas são incapazes de resolver qualquer problema complexo. Sabe-se também que existem e existiram fenomenais *calculadores* que não contribuiram para a matemática.
3. memória de símbolos, números e fórmulas, como Kolmogorov (s/d) indicou: muitos matemáticos eminentes não tinham memória excepcional desse tipo.
4. habilidade para conceitos espaciais.
5. capacidade para visualizar relação matemática abstrata e dependências.

Krutetskii (1976) afirma que a estrutura das habilidades matemáticas refere-se às habilidades matemáticas escolares e depende dos métodos de ensino, já que essas se formam durante o ensino.

2.7 Thomas L. Schroeder e Frank K. Lester Jr.

Em 1989, Schroeder e Lester publicaram "Developing understanding in mathematics via problem solving".[2] Nesse estudo, os autores fazem uma avaliação dos resultados dos esforços feitos para tornar a resolução de problemas o foco da matemática escolar na década de 1980.

Segundo Schroeder e Lester (1989), naquela década, a noção de que resolução de problemas devia desempenhar papel proeminente no currículo teve larga aceitação. E, no decorrer dos anos de 1980, muitos recursos foram desenvolvidos em salas de aula, sob a forma de coleção de problemas, listas de estratégias a serem ensinadas, sugestões para atividades e orientações para avaliar o desempenho da resolução de problemas. E tudo isso foi muito útil para ajudar os professores a fazerem da resolução de problemas o foco do seu ensino. Entretanto esse enfoque não proporcionou o tipo de coerência e de clareza necessárias ao modo como alcançar esse objetivo.

Para os autores, provavelmente, a confusão se originasse devido às grandes diferenças entre as concepções individuais e grupais sobre o que significa fazer da resolução de problemas o foco da matemática escolar.

Schoroeder e Lester (1989) propõem mostrar essas diferenças ao distinguir três abordagens para o ensino da resolução de problemas:

(1) ensino sobre resolução de problemas;
(2) ensino para resolução de problemas;
(3) ensino via resolução de problemas.

- o ensino sobre resolução de problemas ocorre quando o professor ensina o modelo de resolução de problemas de Polya, que é um

[2] Desenvolvendo compreensão em Matemática via resolução de problemas.

conjunto de quatro fases independentes no processo de solucionar problemas matemáticos, a saber:

(a) compreensão desses problemas;

(b) delinear um plano de ação;

(c) executá-lo; e

(d) fazer um retrospecto da resolução, discutindo-a.

Schroeder e Lester (1989) lembram que Polya considerava que assim deveria ser a maneira de agir do bom solucionador de problemas matemáticos. Esse bom solucionador deve ser encorajado a se tornar ciente do seu próprio progresso ao longo dos quatro passos descritos. Além disso, inúmeras heurísticas ou estratégias são ensinadas a esses experts, das quais eles podem escolher ou usá-las para o desenho do plano, tais como procurar padrões, resolver um problema mais simples e trabalhar em sentido contrário.

- o ensino para resolução de problemas ocorre quando o professor se concentra em formas, segundo as quais a Matemática a ser ensinada pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. Embora o foco seja a aprendizagem matemática, o propósito essencial é ser capaz de usar o conhecimento matemático e, consequentemente, são dados aos alunos muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas já estudadas, além de oportunidades para que possa aplica-los na resolução de problemas. Nessas condições, o professor está preocupado com a habilidade do aluno em transferir o que foi aprendido em um contexto para outro.

Para Schroeder e Lester (1989), um adepto dessa abordagem pode argumentar que a única razão para aprender Matemática é ser capaz de usar o conhecimento ganho para solucionar problemas.

- o ensino via resolução de problemas ocorre quando os problemas são apreciados com o propósito de ensinar Matemática, mas também, como o principal meio de assim o fazer. Um tópico

> matemático pode ser ensinado com uma situação problema que incorpore aspectos chave e técnicas matemáticas e é desenvolvido com respostas razoáveis para problemas razoáveis. O objetivo é transformar problemas não rotineiros em rotineiros.

Para Schoroeder e Lester (1989), a aprendizagem matemática, dessa forma, pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo de um conceito de técnica matemática) para abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para serem operadas com esses símbolos).

Schoroeder e Lester (1989) afirmam que, embora teoricamente as três abordagens possam ser isoladas, na prática, elas se sobrepõem e ocorrem em diversas combinações e sequências. E, se os desenvolvedores de currículo, os autores de livro ou os professores pretendem fazer da resolução de problemas o foco de ensino, eles precisam estar cientes das limitações inerentes ao fato de aderir exclusivamente às duas primeiras abordagens, pois essas não devem ser vistas como um tópico da Matemática.

Se o ensino sobre resolução de problemas for o foco, o perigo é que ele seja incorporado ao currículo e, assim, em vez de o problema servir de contexto para aprendizagem, ele pode se tornar outro tópico a ser ensinado isoladamente do conteúdo e das relações matemáticas.

Schroeder e Lester (1989) acreditam que essa falha diferente provém do ensino para resolução de problemas, pois, quando essa abordagem é interpretada estreitamente, o ato de resolver problemas é visto como uma atividade em que o estudante se engaja somente após a introdução de um novo conceito ou após o trabalho de habilidade computacional ou algorítmica.

O propósito é dar ao estudante uma oportunidade de aplicar os conceitos e habilidades aprendidos recentemente na solução de um problema do mundo real.

Frequentemente, esse aparece sob um enunciado, como “[...] *usando a divisão para resolver problemas*” e uma amostra do problema é dada como modelo para resolver outros, muito similares, cujas soluções são obtidas seguindo padrões estabelecidos.

Nesses casos, quando o estudante encontra um problema que não segue o exemplo, ele se sente perdido. De acordo Schroeder e Lester (1989), quando é ensinado por essa abordagem, o estudante simplesmente escolhe os números e aplica a operação conforme o exemplo, sem se preocupar com o contexto do problema, podendo obter respostas corretas ou não.

Schroeder e Lester (1989) acreditam que essa abordagem não é a que denominamos resolução de problemas, pois nem mesmo requer raciocínio matemático, além do fato de que o estudante poderia achar que todos os problemas podem ser resolvidos rapidamente e relativamente sem esforço, sem nenhuma necessidade de compreender como a Matemática usada se relaciona com situações reais, as quais, infelizmente, se constituem o mais comum em livros didáticos.

Os autores acreditam que o ensino via resolução de problemas é uma abordagem não adotada implícita nem explicitamente por muitos professores, autores de livro e desenvolvedores de currículos escolares, mas é uma abordagem para ensinar matemática que merece ser considerada, desenvolvida, experimentada e avaliada, porque ela é a mais consistente com as recomendações da comissão dos padrões do NCTM (Conselho Nacional dos Professores de Matemática), o qual considera que:

(1) os conceitos e habilidades matemáticos devem ser aprendidos no contexto de resolver problemas;
(2) o desenvolvimento do processo de raciocínio de alto nível pode ser fomentado por meio de experiências de resolução de problemas; e
(3) o ensino da matemática se realiza em uma atmosfera de investigação orientada para a resolução de problemas.

Schroeder e Lester (1989) pensam que, ao invés de fazer da resolução de problemas o foco do ensino da Matemática, professores, autores de livro e desenvolvedores de currículos escolares devem considerar a compreensão como seu foco e seu objetivo. Ao agirem assim, eles deslocam da estreita visão de que matemática é simplesmente uma ferramenta destinada a resolver problemas para uma concepção mais ampla de que matemática é a maneira de pensar sobre e para organizar a experiência de alguém. Consequentemente, o papel de resolver problemas no currículo passa a ser o meio pelo qual se adquire o conhecimento matemático e um processo para aplicar o que foi aprendido previamente.

Para os autores, o fundamental para a visão de compreensão é ser meta primária do ensino e acreditar que aprendizagem a matemática dos alunos é mais rica quando autogerada, e não, quando imposta pelo professor ou por livro texto.

A vantagem primária do conhecimento autogerado é que ela está atada ao que o aprendiz sabe. Além disso, quando o aluno constrói um novo conhecimento matemático para ele mesmo, ele aprende não apenas conceitos, fatos, habilidades, mas também, o modo como gerir e regular a aplicação desse novo conhecimento. Esse é o benefício por ter adquirido o conhecimento matemático e, dessa forma, os esforços de resolução de problemas são menos suscetíveis ao erro. Os mesmos autores acreditam que o ensino via resolução de problemas e o ensino para compreensão não são apenas compatíveis, como também, mutuamente benéficos.

Para Schroeder e Lester (1989), o sucesso em resolver problemas depende da boa compreensão da informação pelo aluno, além de ser uma ajuda de, pelos menos, quatro diferentes maneiras:

- a compreensão aumenta a riqueza dos tipos de representação que o solucionador de problemas pode construir. E, durante o processo, é necessário que o solucionador internalize a informação do problema, isto é, ele deve desenvolver sua representação. Quanto mais acuradamente ele fizer essa ação e ligar as peças da informação, mais provável será que o problema seja resolvido corretamente.
- a compreensão auxilia o solucionador de problemas no monitoramento da seleção e da execução de procedimentos (estratégias, algoritmos). Desse modo, a resolução de problemas com sucesso exige habilidade para monitorar a seleção e a subsequente execução de procedimentos. Se um bom solucionador compreende a relação entre as condições e variáveis de um problema e consegue

colocá-lo no contexto significativo, é sinal de que ele está bem equipado para antecipar as consequências das várias decisões e ações e para avaliar o progresso a ser feito em direção à solução.

- a compreensão auxilia o solucionador de problemas a julgar a razoabilidade dos resultados. E, assim, a habilidade de criar uma representação interna significativa e apropriada da informação de um problema eleva a habilidade do solucionador para determinar se a resposta faz sentido.
- a compreensão promove a transferência do conhecimento aos problemas relacionados e a sua generalização para outras situações. E, já que a compreensão envolve a habilidade de aplicar um conceito particular, destreza ou procedimento para uma situação não familiar, um indivíduo que tenha uma boa compreensão de certas ideias e técnicas matemáticas será provavelmente capaz de aplicar esse aprendizado em contextos que podem ser muito diferentes daqueles em que originalmente aprendeu a Matemática.

Ainda, segundo Schroeder e Lester (1989), enfatizar a resolução de problemas e enfatizar a compreensão no ensino da Matemática são duas situações que se apoiam mutuamente. Quando os professores ensinam via resolução de problemas, como também, sobre e para a resolução de problemas, eles fornecem a seus alunos um meio poderoso e importante de desenvolver sua própria compreensão e essa, ao se tornar mais profunda e mais rica, habilita ainda mais seus alunos ao uso da matemática para resolver problemas.

2.8 NCTM e Resolução de Problemas

Lester (1994) afirma que duas publicações do NCTM foram importantes para o desenvolvimento do currículo de resolução de problemas na América do Norte: a *Agenda for Action*, em 1980, e o *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, em 1989. Segundo o autor, essas duas publicações foram influentes relatórios sobre educação matemática produzidos nessa década.

Segundo o autor, a primeira publicação, *Agenda for Action*, foi um documento destinado a proporcionar uma direção para o desenvolvimento do currículo e para dar ênfase instrucional para aquela década. Esse foi de fato o grande responsável para a década ser conhecida como a década da resolução de problemas.

Ainda segundo o autor, o NCTM tinha planos mais ambiciosos para os *Standards*, já que eles foram desenvolvidos para ser um documento de ação politica, além de estabelecer normas para a sala de aula, também foi concebido para ser o manifesto da política do currículo da Matemática escolar.

Lester (1994) lembra que, embora a *Agenda* tenha afirmado que “[...] a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar”, não havia sugestões de como o fazer. Os *Standards* deram impressão de que, em 1989, a comunidade matemática já tinha acumulado conhecimentos sobre o ensino e a aprendizagem de resolução de problemas. Entretanto, segundo o autor, esse não era o caso.

Lester (1994) afirma que, desde a publicação da *Agenda*, a resolução de problemas foi o tópico sobre o qual mais se escreveu na área, mas, possivelmente, o menos compreendido. Apesar de os educadores matemáticos concordarem quanto ao fato de o desenvolvimento das competências em resolução de problemas dos estudantes ser um objetivo primário do ensino, esses mesmos educadores admitem que é outra questão decidir como esse objetivo pode ser alcançado.

Depois, em 1991, o NCTM publicou os *Professional Teaching Standards*, os quais foram delineados para estabelecer um quadro teórico que pudesse orientar a reforma da Matemática escolar para década seguinte. Esses padrões estão assentados sobre duas suposições: os professores são figuras chave na mudança das formas como a matemática é ensinada e aprendida nas escolas e essas mudanças exigem que os professores tenham apoio a longo prazo e recursos adequados.

Conforme exposto nos NCTM (1991), os resultados de pesquisas educacionais da Psicologia Cognitiva e da Educação Matemática indicavam que a aprendizagem ocorre quando novas informações e experiências são assimiladas ativamente pelos alunos e, desse modo, eles constroem seus próprios significados.

Então, para a organização, professores eficazes são aqueles que podem estimular os alunos a aprenderem Matemática. Pesquisas educacionais evidenciam que os alunos aprendem essa disciplina bem quando constroem sua própria compreensão matemática, da qual eles se apropriam quando trabalham em grupos, envolvendo-se em discussões, fazendo apresentações e, de outras maneiras, se encarregando de sua própria aprendizagem.

Segundo o NCTM (1991), o tipo de ensino previsto é bastante diferente do que os próprios professores tiveram como alunos nos cursos de Matemática. Desse modo, os professores precisam de tempo para aprender e desenvolver esse tipo de prática docente e, portanto, é muito importante que o professor tenha um desenvolvimento profissional adequado e contínuo, com o auxílio de um bom material de ensino.

De acordo com o NCTM, existem cinco mudanças necessárias no ambiente das salas de aula de Matemática, para mover da prática antiga a um ensino de capacitação dos alunos:

- Em vez de salas de aula com um conjunto de indivíduos, ir para salas de aula como uma comunidade de Matemática;
- Em vez de professor como única autoridade para respostas corretas do raciocínio matemático, ir para a lógica e a evidência matemática como verificação;
- Em vez de procedimentos de memorização, ir para o raciocínio matemático;
- Em vez de ênfase em respostas mecânicas de fatos, ir para conjecturas, invenções e resolução de problemas;
- Em vez de tratar a Matemática como um corpo de conceitos e procedimentos isolados, ir para a conexão da Matemática com suas ideias e aplicações.

Cinco padrões compõem o *Professional teaching standards*, conforme ensina o NCTM (1991) e são:

- Normas para o ensino da Matemática;
- Normas para avalição do ensino da Matemática;
- Normas para desenvolvimento profissional dos professores de Matemática;
- Normas para apoio e desenvolvimento do professor de Matemática e do ensino dessa disciplina.

Destacamos aqui dois desses passos: normas para o ensino da Matemática e normas para o desenvolvimento profissional dos professores dessa disciplina.

Normas para o ensino da matemática – nessa seção, o NCTM (1991) organiza as normas em torno de um quadro, enfatizando as decisões importantes que um professor deve tomar referente ao ensino:

- Definir metas e selecionar ou criar tarefas matemáticas para ajudar os alunos a alcançar essas metas;
- Estimular e gerenciar os discursos da sala de aula, para que tanto os alunos quanto o professor estejam conscientes do que está sendo aprendido;
- Criar um ambiente de sala de aula para apoiar o ensino-aprendizagem da Matemática;
- Analisar o aprendizado do aluno, as tarefas matemáticas e o meio ambiente, para a tomada de decisões do ensino em curso.

Segundo Lester (1994), a publicação dos *Professional teaching standards*, em 1991, teve menos impacto do que o *An Agenda for Action* (1980) e os *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (1989).

2.9 John A. Van De Walle

John Van de Walle, que faleceu em 2006, foi um dos educadores e autores de textos matemáticos mais renomados dos Estados Unidos e do Canadá por quase trinta anos. Ele era professor emérito na Virginia Commonwealth University e ministrou cursos de pós-graduação em educação matemática para professores em serviço e pré-serviço, com foco na abordagem de ensino de resolução de problemas. Ele foi também membro do comitê de materiais educativos do NCTM por vários anos.

Segundo Van De Walle (2010), o ensino via resolução de problemas exige do professor uma troca de paradigma, isto é, ele não deve mudar somente alguns aspectos do seu ensino: precisará, sim, mudar sua filosofia, o modo como pensa o aluno, o modo como esse aprende e como pode melhorar sua aprendizagem. Para tanto, o professor tem de selecionar tarefas de qualidade, para permitir que todos os alunos aprendam o conteúdo imaginado, suas próprias estratégias e soluções. Ademais, o professor deve desenvolver questões de alta qualidade para permitir que os alunos verifiquem e relatem suas experiências, pois esse processo permitirá sua compreensão matemática em um nível mais profundo. E o autor apresenta algumas razões porque se deve adotar o ensino via resolução de problemas, pois esse propicia:

- foco nas ideias e no raciocínio dos alunos – quando resolvem problemas, os alunos estão necessariamente refletindo sobre os conceitos inerentes aos problemas. Conceitos emergentes são mais suscetíveis de serem integrados com os já existentes, assim melhorando a compreensão.
- desenvolvimento da confiança do aluno em sua capacidade do fazer matemático, pois entende que esse faz sentido – toda vez que o professor propõe uma tarefa baseada em problemas e aguarda sua resolução, existe uma mensagem aos alunos "*Eu acredito que você pode fazer isso*.". E sempre que a classe resolve o problema, os alunos desenvolvem sua compreensão e sua confiança. Desse modo, sua autoestima é reforçada.
- oferta de um contexto para o aluno construir significados para o conceito – fornece o contexto, especialmente quando esse é fundamentado em uma experiência familiar ao aluno; apoia o desenvolvimento do conceito matemático e permite uma aprendizagem do conteúdo com sucesso.

- um ponto de entrada para uma gama de alunos – cada aluno começa raciocinando sobre sua tarefa e usando suas próprias ideias. Além disso, o aluno expande essas ideias, que crescem na sua compreensão, ouvindo e refletindo sobre as estratégias de solução de outros. Em contraste, a abordagem dirigida do professor ignora a diversidade, em detrimento da maioria dos estudantes.
- levantamento de dados de avaliação em curso, úteis para tomar decisões instrucionais, ajuda o aluno a ter sucesso – quando o aluno discute ideias, desenha figuras ou usa manipulativos, ele defende suas soluções e avalia aquelas realizadas pelos colegas, fornecendo ao professor um fluxo constante de informação valiosa. Esse levantamento evidencia ricamente a maneira como o aluno resolve problemas, quais concepções inadequadas ele poderia ter e a conexão existente com os novos conceitos. Conhecendo o que o aluno sabe, um professor pode planejar mais efetivamente e acomodar as necessidades dos alunos.

Ainda segundo Van De Walle (2010), estratégias para resolução de problemas são métodos identificáveis para abordar uma tarefa que são completamente independentes do tópico específico ou assunto. Os alunos selecionam ou delineiam uma estratégia e, assim, elaboram um plano. Quando os alunos descobrem estratégias importantes ou especialmente úteis, essas devem ser identificadas, destacadas e discutidas.

Conforme o autor, as seguintes estratégias são comumente encontradas, embora nem todas sejam utilizadas ao mesmo tempo:

- desenhar uma figura, fazer uma representação – usar um modelo para representar um conceito matemático refere-se a qualquer objeto, figura ou desenho que represente o conceito ou no qual a relação para aquele conceito pode ser imposta pela atividade mental. Modelos podem ser um campo de testes para novas ideias. Às vezes, é difícil para o aluno (de qualquer idade) pensar e testar relação abstrata, usando apenas palavras ou símbolos.

- procurar um padrão – a busca de um padrão está no centro de muitas tarefas baseadas em problemas, especialmente, na vertente do raciocínio algébrico. Padrões em números e em operações desempenham um papel enorme na ajuda ao aluno, para ele aprender e dominar as competências básicas, começando nas séries iniciais e continuando no ensino médio e superior.
- encontrar e verificar – uma boa maneira de trabalhar uma tarefa, quando está emperrada, é tentar alguma coisa. Refletir sobre uma tentativa fracassada pode levar a uma ideia melhor.
- fazer uma tabela ou gráfico – gráfico dos dados, tabela de funções, tabela para operações e tabelas envolvendo razões ou medidas são formas importantes de análise ou comunicações. A utilização de gráficos é frequentemente combinada com a procura de padrões como uma forma de solucionar problemas ou para construir novas ideias.
- tentar uma forma mais simples do problema – modificar ou simplificar as quantidades em um problema, de modo que o resultado da tarefa seja mais fácil para entender ou analisar. Solucionando um problema mais simples, algumas vezes, pode levar a discernimentos que, possivelmente, serão usados para resolver o problema original mais complexo.
- fazer uma lista organizada – contabilização sistemática de todos os resultados possíveis em uma situação pode mostrar o número de possibilidades existentes ou verificar se todos os resultados possíveis foram incluídos. Uma área temática, onde as listas organizadas são essenciais, é a probabilidade.
- escrever uma equação – essa estratégia implica converter a questão em números ou símbolos.

Schoenfeld (1992, apud VAN DE WALLE, 2010), expõe sua concepção de metacognição, que se refere a um monitoramento[3] consciente e à regulação[4] do próprio processo de pensamento. Bons resolvedores de problemas monitoram e

[3] Monitoramento – estar ciente de como, quando e por que fazer algo.
[4] Regulação – escolher algo para fazer ou decidir fazer alguma mudança.

regulam seu raciocínio normal e, automaticamente, eles reconhecem quando estão paralisados ou quando não compreendem totalmente e tomam a decisão conscientemente de trocar estratégias, repensar o problema ou procurar um conteúdo que possa ajudar – ou, simplesmente, recomeçar.

Para Van de Walle (2010), o comportamento cognitivo pode ser aprendido e uma forma de ajudar o estudante a aprender a monitorar e regular seu processo de raciocínio consiste em três perguntas:

(1) O que está fazendo?
(2) Por que está fazendo isso?
(3) Como isso pode ajudar?

Segundo o autor, estudantes que usaram essa fórmula mostraram melhor desempenho e, para ele, a chave do sucesso está no desenvolvimento das habilidades metacognitivas para monitorar e refletir sobre o problema a ser resolvido.

Para Van de Walle (2010), podem-se promover processos metacognitivos a partir da interação com o professor, individualmente ou em grupo com outros estudantes, propondo questões para eles responderem. Em séries mais avançadas, cada grupo pode designar um monitor, cujo trabalho é ser o questionador para as questões propostas. À medida que os estudante se tornem mais independentes no seu estudo da Matemática, eles parecem precisar menos do professor para resolver problemas e suas atitudes em relação à matemática mudam, tornando-os mais confiantes e perseverantes em suas tentativas e apreciando o ato de fazer Matemática, porque se sentem confiantes quando seu raciocínio flui, procurando padrões e resolvendo problemas.

John Van de Walle, juntamente com Karen Karp e Jenny Bay-Williams, publicou (2010) a sétima edição do livro *Elementary and middle school mathematics*: Teaching developmentally, considerado o principal recurso para o ensino de K-8 matemática,que foca "[...] *na aprendizagem da matemática para ensinar matemática*."*.* São vinte e três capítulos divididos em duas principais seções, a saber:

- Teaching Mathematics: Foundations and Perspectives (Ensinar Matemática: Fundamentos e Perspectivas)
- Development of Mathematics Concepts and Procedures (Desenvolvimento dos Conceitos Matemáticos e Procedimentos).

A primeira seção desenvolve ideias centrais de aprendizagem, ensino, planejamento e avaliação, além da discussão sobre as perspectivas para crianças de diversas origens e o papel da tecnologia.

A segunda seção concentra-se sobre estratégias pedagógicas e atividades baseadas em problemas que apoiam grande parte do conteúdo do currículo matemático para séries iniciais.

O livro foi planejado para ajudar o professor a compreender matemática e se tornar confiante na sua capacidade para ensinar o assunto aos estudantes. A segunda seção serve como aplicação das ideias centrais da primeira seção. Os capítulos 8 ao 23 foram delineados para ajudar os professores a desenvolverem estratégias pedagógicas e para servirem como recurso ao ensino de conceitos e procedimentos de tópicos, como: conceitos de números, operações, valor relativo e valor absoluto de números inteiros, raciocínio algébrico, conceito de frações, conceito de números decimais e porcentagens etc.

Cada capítulo da seção 2 proporciona um quadro teórico para quem usar, trabalhando independentemente ou com outros especialistas. O autor do livro recomenda iniciar a leitura dos comentários iniciais do capítulo e refletir sobre as “[...] *grandes ideias e as conexões dos conteúdos matemáticos*”*.* E recomenda também que se trabalhe cada atividade com problemas dados. Depois de completar as atividades do capítulo, deve-se escrever e discutir as considerações sobre o conceito estudado.

2.10 Alan H. Schoenfeld

Schoenfeld foi o pesquisador que apresentou um panorama da resolução de problemas nos Estados Unidos no período que vai de 1970 a 2008. Ele inicia seu estudo, afirmando que, nos Estados Unidos, não há um órgão federal equivalente a um Ministério da Educação que coordene a pesquisa e o desenvolvimento educacionais.

Segundo o autor (2007), a história curricular da resolução de problemas nos EUA nos últimos cinquenta anos tem sido pendular, com o foco pragmático do ensino de matemática oscilando entre o ensino para a compreensão (*teaching for understanding*) e o ensino para conseguir fazer (*teaching for mastery*). O currículo tradicional que dominou nos anos 1950 – aritmética no K-8 (jardim de infância até 8ª.); álgebra I, no 9º. ano; geometria euclidiana, no 10º.; álgebra II (e, às vezes, trigonometria), no 11º.; e análise matemática ou preparação para o cálculo, no 12º.

Entre os anos 1980 e 1990, a maioria dos estados americanos exigiu apenas um ou dois anos de Matemática para os alunos receberem um diploma do correspondente ao nosso antigo ginásio. A partir do 9º. ano, a Matemática era opcional e metade dos alunos não optava por ela. O conteúdo do currículo tradicional, apesar de embasado conceitualmente, era voltado à prática, com os alunos aprendendo procedimentos como resolver equações lineares ou quadráticas; como fazer gráficos de equações simultâneas ou resolvê-las analiticamente; fazer construções geométricas ou provar teoremas, com muitos exercícios para dominar as habilidades necessárias.

Schoenfeld (2007) prossegue o estudo, analisando o ensino da Matemática nos EUA e lembrando que, somente em épocas de crises, o poder público deu atenção ao ensino da Matemática, como foi no caso do escândalo da marinha, por ocasião da Segunda Guerra Mundial, quando seus recrutas tiveram de ser capacitados pelo próprio órgão e, mais tarde, em outra ocasião, quando do lançamento do satélite Sputnik pela Rússia, em 1957. Nessa ocasião, a comunidade científica americana se sentiu passada para trás, fato que não podia ser tolerado militarmente pelo governo.

Schoenfeld (1996) lembra que os esforços conjuntos das comunidades matemática e cientifica para superar esse vexame, atualizando seus currículos, resultaram no lançamento da Matemática Moderna (*The New Math*), assunto amplamente divulgado na revista *Educational Studies in Mathematics*. Porém, foi vista como um desastre pela opinião pública, pois os professores primários não se sentiam à vontade para lidar com conteúdos, como teoria dos conjuntos, lógica e aritmética modular, porque eles não tinham estudado e os pais não podiam ajudar seus filhos nas tarefas, porque também não conheciam esses tópicos. Segundo o autor, toda essa situação resultou no movimento *back to the basics* (voltas às bases*)*, varrendo a maior parte da Matemática Moderna das salas de aula durante um grande período dos anos 1970.

Schoenfeld (2007) relata que, em 1980, o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), uma organização profissional para professores de matemática, publicou um panfleto, *An Agenda for Action*: Recommendations for School Mathematics of the 1980´s*.* Esse documento propunha uma direção para o ensino da Matemática, que era a resolução de problemas, com as seguintes recomendações:

> 1) o currículo passa a ser organizado em torno da resolução de problemas;
> 2) para tanto, a definição e a linguagem de resolução de problemas em matemática devem incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que englobem todo o potencial das aplicações de Matemática;
> 3) os professores de matemática deveriam criar ambientes de aula que desenvolvessem a resolução de problemas;
> 4) materiais curriculares apropriados para esse ensino seriam desenvolvidos para todos os níveis;
> 5) programas de matemática deveriam envolver os alunos, apresentando aplicações para todos os níveis;
> 6) pesquisadores e agências de fomento teriam de priorizar pesquisas sobre a natureza da resolução de problemas e as maneiras eficazes de desenvolver solucionadores de problemas.

Ainda, conforme o relato de Schoenfeld (2007), esses pontos eram todos relevantes e são hoje parte do conhecimento do aluno, como tinham sido nos anos 1980. Os cinco primeiros foram, na maior parte, ignorados ao longo dos anos 1980. A resolução de problemas virou um termo da moda, porém sua implementação em classe foi uma paródia, nas palavras do autor: publicações comerciais usaram o rótulo resolução de problemas em edições de livros-texto que, na maioria, eram modificações triviais de textos anteriores voltados para treino em habilidades, com modificações em grande parte apenas retóricas.

Schoenfeld (2007) afirma que, embora invocando o livro *How to solve it* (*Como resolver isso*, que, no Brasil, é conhecido como *A arte de resolver problemas*) de Polya (1945) e seus quatro estágios – entender o problema; traçar um plano; executar o plano; e *olhar o que já foi feito* –, os conteúdos reais continuavam essencialmente os mesmos e, na prática, a *resolução de problemas* significava resolver problemas rotineiros de texto, de uma ou duas etapas, como: "João tinha oito caminhõezinhos. Ganhou mais quatro caminhõezinhos. Quantos caminhõezinhos ele tem ao todo?", ou "João tinha $5,00. Ele comprou uma caneta por $0,39 e um caderno por $2,19. Com quanto dinheiro João ficou?".

Segundo o autor, a *resolução de problemas* nas escolas americanas, nos anos 1980, portanto, resumiu-se a '[...] *resolver problemas (simples) de texto*". As razões para essa atitude eram: a pesquisa do assunto ainda estava no início quando a agenda da NCTM foi lançada, com pouca pesquisa para orientar o desenvolvimento e as metas curriculares daquela época; os professores eram conservadores; as mudanças importantes sempre se deparam com bastante resistência e demandam tempo e trabalho para serem implementadas, mesmo quando elas são desejadas; e a indústria de publicações remava contra mudanças significativas.

Além desses motivos, os autores de livros texto agiam como uma linha de produção, seguindo determinação de si mesmos ou de um aparente líder da área, baseados, sobretudo, em textos anteriormente produzidos. Com a pressa de editar textos de resolução de problemas, nos primeiros anos, as mudanças acabaram mais evolucionistas do que revolucionárias, mais superficiais do que substanciais.

Durante a década de 1980, a base de pesquisa tornou-se mais sólida e a competitividade do país voltou à baila, então em termos econômicos, mais do que em militares. A economia do Japão crescia, enquanto a dos EUA definhava nas décadas de 1970 e 1980.

Nesse contexto, segundo o relato de Schoenfeld (2007), houve maior possibilidade de responder aos pedidos de mudança curricular. O US National Research Council (Conselho Nacional de Pesquisa) formou, então, o Mathematical Sciences Education Board (Comitê Educacional de Ciências Matemáticas, MSEB), que pretendia dar atenção contínua a questões de educação matemática, ao invés de responder a crises periódicas como antes.

Segundo Schoenfeld (2007), no início de 1989, o MSEB escreveu um relatório, *Everybody counts* (Todos são importantes) para dar atenção a múltiplas dimensões, tais como: metas de instrução matemática, dados demográficos (o fracasso e a desistência escolar de Matemática entre latinos, afro-americanos e americanos nativos vinham sendo muito altos) e conteúdos matemáticos (o currículo tradicional era cheio de problemas e urgia realizar mudanças).

De acordo com o autor, logo após esse relatório ser publicado, o NCTM publicou o *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (*Currículo e padrões de avaliação para matemática escolar)*, em 1989, conhecido como *Standards*. Não se trata de um documento de pesquisa, mas sim, de algo produzido por pessoas que conheciam a pesquisa sobre resolução de problemas, a qual fora incluída nas metas de ensino.

A pesquisa das décadas anteriores quanto à resolução de problemas atendia a quatro dos *Standards* do NCTM e foram promovidas novas metas para a sociedade, a saber:

1) trabalhadores com domínio da matemática básica;
2) aprendizado por toda a vida;
3) oportunidade para todos; e
4) eleitorado informado.

Segundo Schoenfeld (2007), está implícito nessas metas um sistema escolar que seja um recurso importante para todos os cidadãos durante sua vida inteira, assim descrito no próprio texto do NCTM (1989, p. 5):

> Cinco metas gerais são previstas das séries K (jardim) até 12ª para todos os alunos:
> 1) aprenderem a dar valor à Matemática;
> 2) tornarem-se confiantes em sua capacidade para a Matemática;
> 3) tornarem-se resolvedores de problemas matemáticos;
> 4) aprenderem a se comunicar pela Matemática; e
> 5) aprender a raciocinar matematicamente. Os alunos devem ser expostos a numerosas e variadas experiências inter-relacionadas que os encorajem a dar valor ao emprego da Matemática, a desenvolver hábitos matemáticos de pensar e a entender e gostar do papel da Matemática nos assuntos dos seres humanos. Devem ser encorajados a explorar, fazer conjecturas e até mesmo a fazer e corrigir erros, para ganhar confiança em sua capacidade de resolver problemas complexos; devem ler, escrever e discutir Matemática; e devem fazer conjecturas, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura.

Schoenfeld (2007) lembra que, tentando manter-se fiel a essa visão, em 2000, a NCTM publicou um sucessor dos *Standards* de 1989, chamado de *Principles and standards for school mathematics* (NTCM, 2000 – *Princípios e normas para matemática escolar*), conhecido como *Principles and standards* – Princípios e Normas –, é uma tentativa de fazer um inventário que reflita sobre o que se aprendeu desde que foi publicado o *Standards*; incorpore o progresso da pesquisa nessa década; e se atualize em relação às mudanças no contexto, tais como o avanço da tecnologia.

Ainda, segundo o autor, em 2006, o NCTM produziu o documento *Curriculum focal points for kindergarten through grade 8 mathematics* (*Pontos focais de currículo de matemática desde o jardim da infância até a 8ª série).*

Schoenfeld (2007) relata que, com ajuda da Fundação Nacional de Ciência – a NSF – o *Standards* mudou a cena política e curricular, mas os que publicavam e vendiam séries de livros texto não concordavam em gastar as grandes quantias incorridas no desenvolvimento de uma nova série curricular, calculado em por volta de $25 milhões. A NSF, a partir dessa constatação, proveu os fundos para desenvolvimento de currículos matemáticos muito diferentes em cada um dos três níveis, elementar (jardim até 6ª série), intermediário (5ª ou 6ª série até 8ª ou 9ª), e secundário (9ª série até 12ª).

E, assim, foram desenvolvidos materiais curriculares que independiam de apoio das empresas e que, depois, poderiam ser comercializados normalmente por quem os desenvolveu. Esse processo tomou tempo, tendo saído sua primeira versão em 1991 – mas sua versão completa somente ficou pronta em meados dos anos 1990.

Os primeiros alunos a passarem por toda a educação escolar com currículo baseado nos *Standards* saíram da escola por volta do ano 2000 e, somente então, os dados sobre o impacto desses currículos começaram a surgir.

Capítulo 3 – O ensino da Matemática e a resolução de problemas na China

Nos últimos anos, educadores e formuladores de políticas tornaram-se cada vez mais conscientes da importância de compreender as práticas educativas de outras nações, porque, segundo Schoenfeld (2007), embora a Matemática seja universal, o modo de ensiná-la é um assunto cultural, inerente a cada nação.

O desempenho de estudantes em avaliações internacionais, como o TIMSS (Trends in International Mathematical and Science Study) e o PISA (Program for International Studeny Assessment), sobretudo, aqueles que se referem a alunos asiáticos, têm chamado a atenção. Inicialmente, foram os alunos japoneses, depois os coreanos e, atualmente, são os chineses.

Há quem não queira considerar os resultados desse último país, por não considerarem representativo o resultado do desempenho dos estudantes participantes, por não serem de diferentes regiões, como ocorre com os demais países. Ainda assim, destacamos a importância de esse fato ter despertado, mais de uma vez, o interesse do mundo ocidental pelo modo como a educação é tratada nos paises asiáticos, sobretudo agora, na China.

3.1 O sistema educacional na China

Em “The changing educacional framework for the teaching of Mathematics in China”, publicado na revista *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, do Centre for Innovation for Teaching of Mathematics (2001), Yanming Wang afirma que, antes de 1949, na China, as escolas eram conduzidas tanto pelo setor privado como pelo estatal. O conteúdo curricular e os sistemas escolares eram quase idênticos. Depois de 1949, a maioria das escolas passa a ser mantida pelo governo, que pode ser o governo federal ou o da província local e o sistema escolar chinês ficou parecido com o esquema americano, como se pode ver a seguir:

- seis anos de elementary school (idade de 6 a 12 anos);

- três anos de junior high school (idade de 12 a 15 anos);
- três anos de senior high school (idade de 15 a 18 anos)

Wang (2001) lembra que, a junior high school e a senior high school abrangem a middle school. Existem também cursos técnicos, comerciais, vocacionais e escolar, destinado a formar professores (como as escolas normais), nas quais, o estudante passa três anos. O estudante pode ingressar nessas escolas depois de concluída a junior high school e após ser aprovado no exame de admissão. O estudante pode tentar entrar na faculdade ou na universidade quando se graduar na sênior high school, após o exame de admissão, equivalente ao nosso vestibular.

De acordo com a autora, faculdades e universidades oferecem cursos de mestrado e de doutorado, como também, cursos de graduação, mas a maioria dos programas de pesquisa educacional e de experimentos são controlados pelo Ministério da Educação.

3.2 Educação matemática na China

Esta seção foi desenvolvida a partir da pesquisa em trabalhos de professores chineses publicados em diferentes fontes: dois no *Journal of Mathematics Education*, considerada uma revista de elevado nível em educação matemática na China, um no *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, uma revista do Centre for Innovation in Mathematics Teaching, da Inglaterra; e um texto de quatro professores chineses, publicado nos *Anais do 12º International Congress on Mathematical Education* (ICME), realizado em Seul, em 2012.

Os pesquisadores americanos Stanic e Kilpatrick (1989) lembram de que, na civilização chinesa, existe um livro dedicado ao estudo da Matemática com nove capítulos, que é sobre a arte matemática ensinada na China e é datado do ano 1000 a.C.

> Este livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedade, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos [...] os chineses repetem o hábito dos babilônios de compilar coleções de problemas específicos. O livro também se assemelha à matemática egípcia, pelo uso da 'falsa posição', mas a invenção desse processo, assim como a origem da matemática chinesa em geral, independente de influência ocidental.
>
> (BOYER, 2002, p. 34).

Em "A Review of China's Elementary Mathematics Education", publicado no *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, Zhang (2005) relata que a educação matemática era bastante desenvolvida na China Antiga. No período da dinastia Sui (581-618 d. C), na escola de matemática do Colégio Imperial, o mais alto instituto educacional da época, havia dois acadêmicos da corte, dois assistentes e oitenta estudantes. Nas dinastias Tang e Song, o tamanho da escola de matemática aumentou, chegando a duzentos estudantes no auge. Entretanto, da era Ming até a era Qing, a educação matemática declinou, porque o exame imperial privilegiava a escrita dos ensaios.

Na dinastia Qing, segundo o autor, a tradicional educação matemática ficou restrita aos esforços individuais, sendo pequena a participação governamental. Depois de 1840, os missionários estrangeiros ensinavam a matemática ocidental em escolas cristãs, embora o ensino não fosse de alto nível. Em 1862, foi inaugurado o Instituto de Astronomia e Matemática em Pequim – e a educação matemática reiniciava.

Em 1898, foi fundado o Colégio da Capital, onde eram oferecidos formalmente os cursos de Matemática. Até 1906, os livros texto de álgebra ainda utilizavam o *layout* da página tradicional, onde se lia verticalmente, de cima para baixo e horizontalmente, da direita para esquerda. As constantes e as variáveis eram escritas em caracteres chineses em vez de serem em letras romanas.

Depois da Revolução de 1911, de acordo com Zhang (2005), com a queda da Dinastia Qing, a matemática elementar era dada em todas as escolas e se baseava no sistema matemático ocidental. De 1919 até 1949, a Matemática chinesa seguia os modelos europeu e norte-americano e os livros texto seguiam também o mesmo padrão. O método de ensino era o tradicional: o professor falava e o aluno ouvia, sem interação entre eles.

Quando a República Popular da China foi fundada, ainda segundo o autor (2005), todo o sistema educacional imitava o modelo soviético. Na década de 1950, a educação matemática elementar tinha as seguintes características: os conteúdos eram condensados e concentrados e eram rigorosamente enfatizadas a lógica e a dedução.

Segundo Zhang (2005), a filosofia do ensino era centrada em professores, no currículo e na metodologia do ensino. Havia cinco conexões essenciais no ensino: a organização da sala de aula, a introdução do novo conteúdo, o ensino do novo conteúdo e a consolidação desse, por meio da prática e da lição de casa.

Em “Development, Problems and Thoughts of New China – PRCs of Mathematics Education”, trabalho apresentado no *12th International Congresso n Mathematical Education* (ICME), em Seul, em 2012, Kuang e al. afirmam que, o Ministério de Educação chinês formou um comitê, em julho de 1952, para elaboração de assuntos escolares. Esse comitê resultou na publicação de um programa de matemática para a escola de nível médio, inspirada no modelo soviético, cuja meta principal era ensinar matemática básica aos alunos e cultivar proficiência delas na prática necessária para resolver diferentes problemas práticos. Era a versão inicial de *two basics* (dois básicos), a saber: o conhecimento básico e as competências básicas (KUANG et al., 2012, p. 2).

Em “Mathematics Education Reforma in Mainland China in the Past Sixty Years: Review and Forecast”, publicado no *Journal of Mathematics Education*, segundo ensina Xie (2009), esse autor lembra que, ao mudar de uma educação tradicional para uma trajetória educacional socialista, todo o sistema educacional chinês tratou de aprender com a visão soviética a partir dos primeiros anos de 1950.

Segundo o autor, nesse modelo, a educação escolar, elementar e o curso médio estavam de acordo com os livros texto e com os métodos de ensino soviéticos, o qual dava grande atenção ao ensino do conhecimento básico e das habilidades básicas, como também, ao arranjo científico e preciso dos livros de texto.

Ainda, segundo Xie (2009), ao adotar o modelo de educação soviética fizeram a educação matemática chinesa perrcorrer o caminho certo em um tempo relativamente curto, mas a limitação da cópia apareceu ao mesmo tempo. Como os cursos soviéticos de educação básica eram de dez anos e os da China, de doze anos, resultou que muitos alunos, ao entrarem na universidade de ciências e de tecnologia, tiveram de aprender conteúdos, como Geometria Analítica. Além disso, ao enfatizar o uso dos livros soviéticos, a critividade e a iniciativa foram bloqueadas.

Xie (2009) afirma que, no período de 1958 a 1961, o governo chinês apresentou a linha geral da construção de um socialismo mais eficiente e a educação matemática adaptou-se a esse slogan político, criticando seriamente a linha antiquada, conforme a política vigente de que, sem destruição, não há construção.

Então, ao criticar a antiga educação matemática, a Universidade Normal de Beijing trouxe o projeto da modernização da Matemática aos ensinos elementar e médio, o qual muito afetou o domínio da educação matemática na China, sob o ponto de vista "*direcionado pelas funções, integrar geometria com álgebra, unir conceitos com procedimentos computacionais.*".

Em maio de 1963, o programa de matemática da escola média em tempo integral foi publicado para uma educação de doze anos (seis anos para a escola primária, seis anos para o correspondente ao nosso ginasial e três anos para o.correspondente ao nosso colegial). Esse programa foi relativamente bem sucedido e influente, sugerindo um foco sobre o ensino dos conhecimentos básicos e cultivando três competencias: a de calcular, a espacial e inferencia logica. A partir desse momento, os programas da educação matemática começaram a visar ao "two basics" e "three abilities" (KUANG et all, 2012, p. 2).

Segundo Xie (2009), ao romper as fronteiras de cada assunto, formando um sistema matemático unido, enfatizando a combinação da teoria com a prática e adicionando novos conteúdos da Matemática moderna, todos esses aspectos se juntaram no projeto. O programa de reformas daquele tempo é muito significativo, pois as sugestões foram úteis para a alteração do mau estado da educação matemática na China.

Segundo Zhang (2005), em 1963, a China reavaliou seu sistema educacional e novas orientações foram criadas, ainda baseadas no antigo sistema educacional da União Soviética, mas levando em conta as próprias condições práticas. As novas ideias ressaltaram o conhecimento básico e as competências básicas e visavam desenvolver as competências dos estudantes em cálculo, imaginação espacial, lógica e análise. Esses conhecimentos enfatizavam o ensino cuidadoso do essencial e a prática intensiva para aprendizagem dos alunos. O ensino nas salas de aula ainda consistia nas cinco conexões, acrescidas de atmosferas mais animadoras nas salas de aula e, também, de atividades de raciocínio para os estudantes. A educação da matemática elementar ganhava um novo peso naquela época.

Conforme Xie (2009), no período de 1961 a 1966, depois de uma reforma que afetou a qualidade da educação matemática, o conhecimento científico e sistemático estava enfraquecido, com o resultado apressado da reforma. Em consequência, a educação matemática sofreu as consequências também. Sob a diretriz "*ajustar, consolidar, enriquecer e melhorar*", o Ministério da Educação elaborou um novo currículo a partir das experiências das províncias e livros matemáticos foram reescritos em 1962, o mesmo ocorrendo com os materiais didáticos para os ensinos elementar e médio, que foram renovados.

Então, por um lado, a educação matemática era caracterizada por uma maior ênfase em transmitir o conhecimento básico aos alunos e melhorar suas competências em calcular e resolver de problemas; por outro lado, estava reconsiderando o que havia sido feito no passado, cujo desenvolvimento fora saudável (Xie, 2009)

Zhang (2005) afirma que os dez anos da revolução cultural de 1966 a 1976 destruíram a educação normal e as atividades de ensino. Não foi diferente com a educação matemática: o currículo da matemática elementar desse período não tinha uma visão sistemática, com ênfase nas aplicações para manufatura e trabalho. Os estudantes aprenderam conhecimento matemático aos pedaços. Consequentemente, a qualidade da educação caiu severamente.

Ainda segundo esse autor, os métodos tradicionais de ensino, ao lado dos currículos da matemática, foram completamente negados na década de 1966 a

1976. A diretriz desse período foi “*encurtar o período de aprendizagem, simplificar o currículo, reformar os livros texto*”, além de terem sido abolidos os exames de ingresso às escolas e de ter deixado a educação matemática sem rumo.

Segundo Xie (2009), as escolas eram administradas abertamente e associadas ao trabalho prático, dando importância a matérias, como medições, cartografia, contabilidade e arquitetura, considerando que o importante era medir, desenhar e contar.

Então, segundo Xie (2009), importantes lições foram aprendidas dessa época e, sem o treino sistemático e sem um bom domínio do conhecimento básico e das práticas básicas, os estudantes eram incapazes de resolver problemas surgidos na prática. O autor assinala a importância da aplicação da Matemática, mas esse não é o único fator, e afirma que não se deve considerar somente o trabalho prático, mas também, lidar com a relação entre o domínio do “two basics” (conhecimento básico e competência básica) e o trabalho prático. Lembra também esse autor que se deve fazer um esforço para melhorar a capacidade básica de analisar e resolver problemas.

Zhang (2005) afirma que, depois de 1976, a educação da Matemática elementar voltou rapidamente aos caminhos anteriores a 1963 e a qualidade do ensino melhorou bastante. Em 1977, o sistema de exames nacionais para ingresso nas universidades foi restaurado e os estudantes mostraram um entusiasmo muito grande por aprender.

Em fevereiro de 1978, o Ministério da Educação formulou o programa de Matemática Secundária para 10 anos de escolarização integral, que mudou o termo competência para calcular para competência para operacionalizar. O termo em competência foi mudado para inferência lógica e para competência foi mudado para raciocínio lógico e se colocou pela primeira vez a expressão cultivar a competência de analisar e resolver problemas (KUANG et all, 2012, p. 2).

De acordo com Zhang (2005), a educação da Matemática Elementar entrou em uma nova era, por meio de intercâmbio com os países ocidentais e novas metodologias foram introduzidas: a prática de testes padronizados foi adotada pelo exame nacional.

Segundo esse autor, o slogan da resolução de problema, proposto pelos educadores matemáticos americanos, espalhou-se em toda a China e a teoria de Polya sobre ensino da resolução de problemas se tornou o material mais estudado pelos professores chineses de Matemática.

Xie (2009) lembra que, com o fim da Revolução Cultural, os exames para ingresso em diferentes níveis de ensino foram renovados e os Currículos Escolares de Dez Anos renovaram os conteúdos educacionais, conforme a diretriz "*valorizar os ensino elementar e médio*", mediante o uso de materiais de ensino estrangeiros avançados.

Mais tarde, em 1986, o currículo da Matemática foi estabelecido legalmente a partir das experiências de reforma dessa disciplina, para permitir que os estudantes aprendessem eficientemente.

O programa de Matemática Integral para escola média de 1986 assinalava que o objetivo do ensino da Matemática do ensino médio era permitir que os estudantes aprendessem o conhecimento matemático básico e as práticas básicas necessárias para o aprendizado posterior da ciência moderna e da tecnologia, cultivando nos estudantes competência operacional, raciocínio lógico e espacial imaginativo, para formar gradualmente a competência de usar o conhecimento matemático para analisar e resolver problemas (KUANG et al., 2012, p. 3).

Em junho de 1992, foram publicados os programas curriculares de Matemática para os nove anos de escola primária e para a escola secundária, os quais atendiam aos requisitos gerais e às exigências precisas sobre as metas do ensino dessa disciplina nos cursos e, especialmente, propuseram pela primeira vez, para desenvolver boas atitudes dos estudantes (KUANG et al., 2012).

Esses autores relatam que os padrões do currículo matemático para educação compulsória, publicado em julho de 2001, determinavam que a tradição de "two basics" sucedia a de "three basics" e foi transformado em "raciocínio matemático", compreensão numérica, compreensão de símbolos, conceitos estatísticos etc. Porém enfatizaram as competências para encontrar problemas, propor problemas, analisar problemas e resolver problemas, aumentando a competência de comunicação matemática. Também foi proposta a dimensão de atitudes de educação matemática como curiosidade, confiança, baseando-se em fatos e raciocínio individual.

Ainda segundo esses autores, em abril de 2011, em nova versão dos padrões do currículo matemático para educação compulsória, foram publicados os “two basics” e “two abilities” (competência para analisar e resolver problemas), que se transformaram em “four basics” (conhecimento básico, práticas básicas, experiências em atividade de matemática básica e raciocínio matemático básico) e “four abilities” (competências para encontrar, propor analisar e resolver problemas).

3.3 Características do ensino de Matemática, segundo o ponto de vista dos professores chineses

Em “Focos fundamentais da educação matemática chinesa: CaracterÍsticas do ensino da matemática na China”, Rongbao Tu e Wei Shen (2010), professores respectivamente da Nanjing Normal University e do Heizhou College de Guandong, apresentam os princípios norteadores fundamentais da educação matemática na China, os quais eram:

- Fortalecer a ideia do ensino dos dois básicos, que se referem ao conhecimento básico e às praticas básicas, que visam estabelecer um sólido alicerce para o posterior estudo e para o desenvolvimento do estudante. Esse princípio já estava escrito no programa de estudos de 1963. Nos dias de hoje, esse tipo de ensino já é fortemente adotado pelos professores chineses de matemática, que se esforçam bastante para a realização dessa ideia de ensino.

- Desenvolver capacidade de raciocínio matemático é muito bem aceito entre os professores de Matemática chineses. Para eles, a Matemática é a ciência do pensamento e desenvolver o pensamento humano é o maior valor da matemática. O programa de estudos de 1963 promoveu a ideia de “*três competências da matemática básica*”, que exigiam o desenvolvimento das competências de raciocínio dos estudantes no ensino da Matemática. Por esse motivo, os professores dessa disciplina têm consciência do seu papel e o usam extensivamente em sua prática docente.

- Preservar a heurística do ensino matemático, tal como propôs Confúcio 2.500 anos antes. Sua essência é não intervir antes que os estudantes tenham feito um esforço para compreender, antes que os estudantes tenham feito um esforço para se expressar. Para Tu e Shen (2010), essa ideia é o tesouro da educação chinesa e o mais importante princípio norteador do ensino.

- Respeitar a abordagem da atividade matemática durante o processo do seu ensino, pois os professores chineses têm insistido na abordagem da atividade matemática, cuja origem vem da teoria de Dewey, "*aprender fazendo*" e da teoria de Polya, "*como resolver problemas*". Esses autores têm uma influência muito grande na educação matemática chinesa.

Várias ideias educacionais chegaram à China cerca de 100 anos antes e, dentre essas, o pragmatismo de Dewey é muito próximo da tradicional ênfase chinesa na praticidade. O *How to solve it*, de Polya, está de acordo com a ênfase consistente chinesa quanto à solução de problemas. Essas duas ideias são facilmente aceitas pelos professores chineses de matemática e se fundem muito bem com o ensino dessa disciplina na China.

Destacamos aqui a importância das teorias educacionais de Dewey na educação chinesa. Em 1919, o filósofo e educador esteve na China, a convite de seus ex-alunos chineses na Columbia University, para uma série de conferências que duraram até 1921.

Segundo Hoyt (2006), a filosofia educacional de Dewey era tão respeitada e valorizada que foi tema da Conferência Educacional da China, em 1922. Suas palestras incluíram ciência politica, ciência social, filosofia e educação e, por meio delas, Dewey esclareceu a forma democrática do pensamento, do fazer e do viver para o povo chinês.

Graças a seus discursos, seus ouvintes chineses entenderam a importância do pensamento reflexivo e do raciocínio na construção da inteligência humana, além de entenderem também que a educação é baseada na ciência e na democracia.

No período em que ocorreu a visita de Dewey, a China encontrava-se em um estado de instabilidade política, econômica e com relações internacionais bastante vulneráveis. Entretanto os pensadores chineses eram muito dinâmicos cultural e intelectualmente, estavam desapontados com o governo daquele tempo e admiravam a democracia e o desenvolvimento industrial dos países ocidentais, ou seja, eles queriam aprender para construir uma nova China.

Segundo Hoyt (2006), Dewey influenciou fortemente a China com a sua promoção da educação civil. Mas ele recomendou que os chineses combinassem as ideias avançadas estrangeiras com seu próprio potencial cultural. Muitos professores da escola básica à educação superior foram inspirados por suas ideias e começaram a ensinar, usando filosofia educacional pragmática.

Um currículo centrado na criança foi desenvolvido e as escolas experimentais, seguindo o modelo da Escola Laboratório de Chicago, de Dewey, foram estabelecidas, usando-se os mesmos livros texto escritos nas duas línguas, inglês e chinês.

Embora as ideias de Dewey tenham sido purgadas dos anos 1950 até 1970 do governo comunista chinês, sua influência nos educadores chineses tem permanecido, tanto que, desde os anos 1980, mais pessoas têm se interessado por suas teorias e por seus livros na China.

A seguir, apresentamos as características no ensino da Matemática na China, segundo Tu e Shen (2010):

- *Objetivos explícitos e conhecimento refinado* – na China, o programa de estudo, os exames e o currículo estabelecem objetivos diferentes para o domínio do conhecimento. Entretanto, para o ensino, esses objetivos precisam ser aperfeiçoados, de modo que se tornem mais operacionais e que, assim, possam ser facilmente entendidos por professores e alunos. Os objetivos do ensino são divididos explicitamente em quatro níveis operacionais: conhecer, compreender, dominar e aplicar agilmente, sendo executados de acordo com ações correspondentes e com exercícios.

Cada capítulo, cada unidade e até cada lição tem seus objetivos específicos (de conhecimento, capacidade e método). Os professores seguem estritamente a hierarquia estabelecida dos objetivos para cada nível. E, a cada lição, os professores delineiam seus planos de lição de acordo com os objetivos do ensino, para consolidá-los.

Os professores preparam exaustivamente cada lição, analisando cuidadosamente os pontos chave e as dificuldades. O grupo de pesquisa de ensino da Matemática Escolar ou os professores da Matemática da mesma série, juntos, preparam as lições e unificam as ideias para o ensino. Eles lidam coletivamente com os objetivos para compreensão dos objetivos matemáticos e para aprofundar a explicação no ato de ensinar e para a seleção dos exemplos correspondentes e dos exercícios.

Os grupos de pesquisa de ensino no nível das províncias, da municipalidade e do distrito fornecem os guias para o ensino e a execução do guia é esperada do governo, que faz as análises dos conteúdos dos livros didáticos.

- *Revisão do conhecimento anterior e desenvolvimento do novo conhecimento* - partir do conhecimento anterior é o principal método de ensino da Matemática nas salas de aulas da China. Nelas, muitos novos conhecimentos são desenvolvidos a partir do conhecimento existente, do mesmo modo como ocorre com a construção do conhecimento humano, com teorias cognitivas e ideias do construtivismo.

Duas possíveis tendências podem acontecer quando é adotado esse método: os estudantes ficam confusos com o conhecimento existente e novas cenas podem ser construídas. Nesse processo, eles são inspirados e motivados a conhecer, descobrir e, então, formar um novo conhecimento, mas também podem experimentar o processo da originação de conhecimento e desenvolvimento.

Por outro lado, o metodo pode ser facilmente distorcido. O processo do desenvolviemnto do conhecimento é igonorado e os professores podem lançar diretamente o novo conhecimento para os estudantes, exigindo deles somente o conhecimento processual, de modo que eles o aceitam passivamente. Para evitar essa possibilidade, tem sido introduzido o novo conhecimento por meio da perspectiva dos problemas da vida real, de situações autênticas ou de problemas matemáticos.

- *Ensino de dois básicos e percepções advindas da familiaridade* - é uma invenção da educação matemática chinesa. Esse método recebe um elevado nivel de atenção no ensino dessa disciplina, que é refletido nos exercícios para cada lição.

- P*ercepções advindas da familiaridade* é uma atitude que não está separada do ensino de "dois basicos" e que pode ser traduzida para "*a prática faz a perfeição*". Essas percepções significam que, aplicando repetitivamente o conhecimento básico em solução de problemas e comprometendo-se em fazer exercício intensivamente – tanto para relembrar como para compreender o conhecimento – e praticando repetitivamente, a capacidade básica se desenvolve também para alcançar aplicação ágil.

- *Compreender com profundidade e praticar com variação* – O ensino da Matemática na China dá muita importância à compreensão profunda de um novo conhecimento. Primeiramente, exige-se uma análise profunda de novos conceitos e frases-chave das novas afirmações, um bom resumo dos elementos chaves e atenção aos pontos importantes do novo conhecimento. Todos esses requisitos levam ao esclarecimento das conexões entre o novo e o conhecimento prévio.

Em segundo lugar, usam-se variações para aprofundar a compreensão da essência do novo conhecimento e as variações referem-se a representar os objetos matemáticos em diferentes *backgrounds* e sob diferentes perspectivas, transformando os atributos não essenciais, enquanto os essenciais são mantidos. Existem dois tipos de variações: *variação conceitual* (que siginfica compreensão dos conceitos de múltiplas perspectivas) e variação de problemas (que significa ensinar a resolver um tipo de problema).

Prática com variação é um aspecto importante da educação matemática na China e as variações são úteis para o estudante alcançar uma compreensão abrangente do novo conceito. Desse modo, essas variações são úteis não somente para construir uma sólida base, mas também, para conduzir ao desenvolvimento de competências.

- *Comunicação matemática e interação professor-estudante* - Por ser a população chinesa muito grande, a carcterística das salas de aula chinesas é ter cerca de sessenta estudantes e se tornam relativamente difíceis atividades, como discutir em pequenos grupos e redigir relatórios representativos. Desse modo, reduzir a possibilidade de aglomeração e aumentar a interação com os alunos em sala de aula tornaram-se a maior preocupação dos professores para o ensino da Matemática.

A comunicação matemática em salas de aula chinesas tem características distintas, tais como:

- Professor pergunta – aluno responde – combinação de fala e escrita; quadro e livro texto; aritmética mental e cálculos escritos;
- Fala-repete, repete novamente, complemento mútuo; corrigir um ao outro;
- Perguntar, replicar com contra exemplos, harmonia para alcançar consenso.

No processo da comunicação professor-aluno, a competência verbal do aluno continua a ser desenvolvida e melhorada do inexato para exato, do frouxo para o rigoroso. Eles precisam alterar a linguagem da vida real para a linguagem matemática, para a linguagem simbólica e para a linguagem gráfica.

- *Penetrar nas ideias e dominar métodos* – a infiltração do pensamento matemático é outra invenção do ensino da Matemática na China. As principais ideias matemáticas são: conversão em problemas equivalentes, solução pela exaustão, transformação geométrica, conversão entre o finito e o infinito e conversão entre a certeza e a incerteza.

O principal método matemático inclui mudança de variáveis, método da eliminação (resolução equações simultâneas), redução de dimensões, formulação de equações, prova pelo contradição, prova pela transposição, método da multiplicação em cruz e coeficientes indeteminados.

Atualmente, o ensino da Matemática está experimentando fortalecer a infiltração do raciocínio matemático e de métodos matemáticos em todas as áreas. No ensino em salas de aula, os professores ajudam os alunos a alcançarem a essência das ideias matemáticas, guiam-nos na aplicação de métodos matemáticos para a solução de problemas, ajudam-nos a refletir e resumir seu aprendizado com ideias matemáticas, além de melhorar a habilidade para resolver problemas.

- *Desenvolver o raciocinio e cultivar a habilidade* - Desenvolver o raciocínio matemático do estudante é uma tradição importante do ensino da Matematica na China. Tradicionalmente, os chineses acreditam que é onde se treina o raciocínio. E a Matemática pode fazer os aprendizes serem inteligentes. É muito bem aceito que a matemática é um dos melhores temas para desenvolver o raciocínio das pessoas.

Segundo Tu e Shen (2010), no ensino da Matemática, os professores dão muita atenção ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, especialmente, quanto a flexibilidade, agilidade, fluência, reflexibilidade e criatividade. No ensino da resolução de problemas, eles defendem o raciocínio independente do aluno, enfatizam a exploração da ideia e encorajam múltiplas soluções. Os professores enfatizam reflexão e encorajam seus alunos a alcançarem o entendimento, obtendo regularidade e facilitando a transferência do conhecimento da reflexão.

A aquisição das três competências matemáticas é um objetivo importante do ensino dessa disciplina na China, que foi introduzido no programa matemático chinês em 1963 e se referem à competência quanto a: operações básicas, imaginação espacial e raciocínio lógico.

Tu e Shen (2010) relatam que, de 1980 a 1990, aconteceu uma discussão em nível nacional a respeito de raciocínio e de competência matemáticos. Experimentos sobre o ensino do pensamento matemático foram ativamente conduzidos e o ensino dessa disciplina melhorou.

Na próxima seção, apresentamos o estudo de Liping Ma sobre educação e habilidades da Matemática Elementar, no qual a matemática chinesa revela o modo como os professores chineses se apropriam da resolução de problemas em suas aula.

3.4 Liping Ma

Em *Problem solving around the world:* Summing up the state of the art, Schoenfeld e al. (2007) afirmam que a resolução de problemas foi, por algum tempo, o maior tema de pesquisa e de currículo no mundo inteiro. E, por esse motivo, é muito difícil perceber o que sendo está sendo estudado e o que está sendo implementado nas salas de aula, porque, apesar de a Matemática como ciência ser universal e a estrutura da cognição humana ser similar, a condução de pesquisas em relação a raciocínio matemático e quanto ao ensino e aprendizagem matemática são assuntos muito mais culturais, cabendo às organizações escolares definir qual é a Matemática que quer ensinar. Desse modo, esse estudo varia de país para país, como mostram os resultados de avaliações internacionais, como o TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) e o PISA (Program for International Student Assessment).

O programa TIMSS compara dados alcançados por alunos americanos de 4ª. a 8ª. séries em Matemática e Ciências com aqueles alcançados por alunos de outros países, desde 1995 e é realizado de quatro em quatro anos.

O PISA é um estudo internacional, coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OECD), cujo objetivo é avaliar os sistemas educacionais do mundo. Atualmente, são comparados os resultados obtidos por estudantes de 15 anos de mais de setenta países, a cada três anos, comparando-os quanto às competências em leitura, matemática e ciências.

A busca de explicação dos resultados desfavoráveis de alunos americanos em relação aos de outros países nesses exames deu origem à investigação de Liping Ma (1999). A pesquisadora chinesa comparou o conhecimento matemático de professores americanos e chineses, relativo aos tópicos da Matemática Elementar que devem ser ensinadas a seus alunos.

Ma nasceu e cresceu na cidade de Shanghai, durante a Revolução Cultural Chinesa, movimento que tinha como um de seus objetivos assegurar uma experiência revolucionária à juventude chinesa e tornar menos elitistas os sistemas educacional, cultural e de saúde do país. Quando ela era estudante do oitavo ano, ocorreu o deslocamento de milhões de estudantes das cidades para as zonas rurais. Ela, juntamente com tantos outros, foi deslocada para uma aldeia numa região montanhosa da província de Jiangxi, para ser reeducada por camponeses.

Meses mais tarde, ela foi convidada pelo chefe da aldeia para ser a professora da escola primária local e sua função seria educar as crianças dos camponeses, muitos deles analfabetos, ainda que ela possuísse apenas oito anos de educação formal. Assim, durante os sete anos seguintes, ela ensinou todas as disciplinas dos cinco anos de escolaridade a duas classes de crianças na mesma sala de aula e, mais tarde, tornou-se diretora dessa escola.

Em 2004, Ma relata em um artigo que seu trabalho de ensino no vilarejo fora extremamente desafiador e que, em busca de respostas para os “por quês” e o “como” de seus alunos, ela desenvolveu grande interesse por leituras a respeito das teorias de educação. Em suas férias, durante uma visita à família em Shanghai, ela foi apresentada ao professor Liu, o mentor que viria a coordenar suas leituras de muitos dos clássicos sobre educação – dentre eles, Confúcio, Platão, Locke, Rousseau, Piaget, Vygotsky e Bruner. Nesse tempo, ela iniciou seus estudos da língua inglesa, a fim de se tornar capacitada para a leitura de textos em sua língua original, conforme as instruções do Professor Liu.

Quando a Revolução Cultural chegou ao fim (1976), Ma já tinha passado da idade prevista para os exames de admissão à faculdade e se submeteu aos exames do programa de pós-graduação. Ela obteve o grau de mestre na Universidade Normal da China Oriental, importante universidade na preparação de professores, situada em Shanghai, onde o professor Liu se tornou reitor. E, como a autora ansiava por estudar ainda mais, posteriormente, prosseguiu seus estudos na Universidade de Michigan, nos Estados Unidos.

Nessa universidade, Ma trabalhou em diferentes áreas, como formação de professores, educação matemática e educação comparada. Ela participou dos trabalhos de desenvolvimento e análise de uma pesquisa de alcance nacional sobre a compreensão matemática dos professores do ensino básico. O resultado da pesquisa deixou-a perplexa com os equívocos revelados por esses professores – tão diferentes daqueles professores que conhecera na China.

Depois de alguns anos, quando sua família escolheu viver na Califórnia, Ma foi admitida no programa de doutorado da Universidade de Stanford, para completar seu curso e elaborar uma pesquisa, com bolsa da Fundação Spencer. Seu orientador foi o professor Lee S. Shulman.

Após a conclusão do doutoramento, Ma recebeu uma bolsa de dois anos de pós-doutorado para trabalhar com Alan Schoenfeld, em Berckeley, onde deu continuidade à sua investigação, que se tornou a base do seu livro *Sabendo e ensinando matemática elementar*.

Para Ma, seu trabalho chamou atenção de diferentes países porque se trata de um estudo comparativo transnacional, alimentado por ambientes de ensino chinês e americano e ilustrando os quadros da educação matemática nesses dois países.

Em seu trabalho, um grupo de professores americanos foi entrevistado e respondeu às questões sobre quatro tópicos da Matemática Elementar. Posteriormente, as mesmas questões foram propostas a um grupo de professores chineses e a comparação das respostas constitui o principal conteúdo de seu livro mencionado.

Em 1989, como estudante de pós-graduação na Universidade do Estado de Michigan, Ma trabalhava como assistente no estudo sobre Formação de Professores e Aprender a Ensinar (Teacher Education and Learning to Teach – TELT), do Centro Nacional de Investigação em Formação de Professores

(National Center for Research on Teacher Education – NCRTE), codificando transcrições de respostas de professores a questões, como a que se segue:

> Imagine que você está ensinando divisão com frações. Para fazer sentido às crianças, algo que os professores tentam fazer é relacionar matemática com outras coisas. Algumas vezes, eles tentam pensar em situações do mundo real ou problemas com histórias para mostrar a aplicação de um conteúdo particular. Qual seria uma boa história ou um bom modelo para: $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$?

Ma ficou bastante chocada com as respostas a essa questão, porque poucos professores deram resposta correta e mais de cem professores, entre aqueles ainda em formação, os novos e os experientes, inventaram histórias que representavam $1\frac{3}{4} \times 2$ ou $1\frac{3}{4} \div 2$. Muitos outros nem conseguiram inventar uma história.

Ma lembrou como ela aprendeu a divisão por frações quanto era aluna da escola primária em Shanghai. Primeiramente, a professora ajudou os alunos a entenderem a relação entre divisão por frações e divisão por inteiros positivos – a divisão permanece o inverso da multiplicação, mas os significados da divisão por frações estendem os significados da divisão por números naturais: o modelo de (medição = measurement) agrupamento no (descobrir quantas metades da unidade existem em $1\frac{3}{4}$) e o modelo de repartição (*the partitive model*), que consiste em encontrar um número, cuja metade seja $1\frac{3}{4}$.

Mais tarde, quando se tornou professora da escola primária, ela encontrou o mesmo entendimento nos colegas. Por que os professores americanos não conseguiram mostrar esse entendimento?

À medida que Ma observava o ensino e a investigação em Matemática Escolar nas escolas americanas, mais intrigada ficava, porque professores experientes e matematicamente seguros e até professores que participavam da reforma do ensino dessa disciplina pareciam não ter conhecimento pormenorizado do que era ensinado nas escolas do ensino básico.

Mais tarde, Ma refletiu sobre o assunto do conhecimento matemático dos professores, quando leu estudos internacionais sobre resultados escolares em

Matemática, os quais evidenciavam que certos estudantes – notadamente, japoneses e chineses – ultrapassavam sistematicamente seus colegas americanos, fato que resultados do TIMSS demonstravam e os investigadores desses estudos descreveram fatores que, talvez, contribuíssem para esse *hiato de aprendizagem* (*learning gap*): diferenças em contextos culturais, tais como: expectativas parentais, sistema número-palavras, organização escolar, quantidade de tempo despendido na aprendizagem da Matemática, conteúdos e sua distribuição nos currículos matemáticos.

Para Ma, o hiato de aprendizagem poderia não ser limitado a estudantes, mas estariam ligados a fatores extrínsecos à sala de aula: poderia ocorrer de o conhecimento dos professores afetar diretamente o ensino e a aprendizagem. Além disso, esse conhecimento seria mais facilmente mudado do que os fatores culturais.

Era estranho para Ma que os professores chineses do ensino básico tivessem melhor compreensão do que seus colegas americanos. Os professores chineses sequer tinham o curso secundário completo, já que, depois do nono ano, recebiam dois ou três anos de escolaridade em escolas normais. Por outro lado, a maioria dos professores americanos tinha, pelo menos, o grau de licenciatura.

A autora suspeitava que os professores do ensino básico dos dois países possuíam conjuntos de conhecimentos matemáticos estruturados de formas diferentes, isto é, o conhecimento sobre os modelos da divisão de um professor da escola primária podia não ser comum entre professores de escolas secundárias ou de universidades.

Então, Ma decidiu confirmar sua suspeita, partindo para uma investigação comparativa, a qual permitiria que coisas diferentes fossem vistas de modos diferentes. Sua pesquisa não se centrou na avaliação do conhecimento dos professores nos dois países, mas sim, na descoberta de exemplos de conhecimento adequado dos professores sobre conteúdos matemáticos. Tais exemplos poderiam estimular mais esforços para se procurar um conhecimento adequado aos professores americanos. Além disso, o conhecimento vindo de professores, em vez de originar enquadramentos conceituais, poderia estar mais perto dos professores e mais fácil para eles entenderem e aceitarem.

Essa investigação de Ma terminou tempos depois e o resultado está descrito no livro S*aber e ensinar matemática elementar* (1999). A pesquisadora descobriu que, embora os professores americanos tivessem sido expostos à Matemática mais avançada durante o ensino secundário e universitário, os professores chineses apresentavam um conhecimento mais extenso daquela ensinada no ensino básico.

Em seu estudo, Ma usou as questões do TELT nas entrevistas, considerando a relevância desses instrumentos no ensino da matemática. Esses instrumentos foram desenvolvidos por Débora Ball para sua dissertação, na qual testou o conhecimento matemático dos professores no contexto de práticas comuns que eles adotam no processo do ensino.

Ball iniciou sua carreira docente em 1974, como professora do 5º. ano, tendo realizado seus principais estudos universitários em línguas inglesa e francesa. Estudou também – e por conta própria – Matemática, para conseguir melhorar seu ensino. Atualmente, ela atua como formadora de professores e ensina educação matemática na Universidade de Michigan, preocupando-se com a análise do trabalho dos professores e com as implicações que sua preparação tem na qualidade do seu ensino.

Conforme Ma (1999), desde o fim da década de 1980, pesquisadores americanos têm se preocupado com o conhecimento dos professores a respeito da Matemática que ensinam.

Para essa pesquisa, as questões das entrevistas foram estruturadas, de modo a sempre introduzir uma ideia matemática num cenário de sala de aula que desempenha um papel crucial. Por exemplo, na questão da divisão de $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, a matemática da divisão por frações foi testada no contexto de uma tarefa familiar de ensino – criar algum tipo de representação realista ou diagrama para esse tópico de ensino. Tal estratégia tem sido útil para examinar o tipo de conhecimento necessário aos professores para ensinar de modo diferente daquele que envolve questões diretas da matéria, como um teste de Matemática.

Segundo Ma (1999), outra razão para se usarem os instrumentos TELT era sua grande cobertura quanto à Matemática Elementar, os quais abrangem todo o campo do ensino e da aprendizagem dessa matéria, compreendendo quatro tópicos: subtração, multiplicação, divisão por frações e relação entre área e perímetro, o que prometia uma imagem relativamente completa do conhecimento dos professores nesse setor do estudo.

Outra razão para o uso dos instrumentos TELT por Ma era a já consolidada base de dados construída pelo NCRTE, a qual favorecia sua investigação, tornando-a mais eficaz e mais relevante para uma pesquisa a respeito da educação matemática nos Estados Unidos.

Apesar de os professores americanos entrevistados pelo TELT terem sido considerados acima da média, Ma tentou obter uma imagem mais representativa do conhecimento dos professores chineses e escolheu cinco escolas primárias, cujas qualidades foram classificadas de *muito boa* até *muito má*.

Ma estava familiarizada com essas escolas antes da ida aos Estados Unidos. Dessas escolas, três estavam localizadas em Shanghai e as outras duas situavam-se em distritos de status socioeconômico e educacional médio, sendo uma delas de muito boa qualidade e outra era uma escola rural de baixa qualidade, com instalações em três aldeias numa área montanhosa. Ma entrevistou todos os professores de Matemática de cada escola, totalizando setenta e dois professores.

Ma entrevistou vinte e três professores americanos e setenta e dois chineses, aos quais apresentou estas quatro questões:

1ª. Questão: Vamos, durante algum tempo, refletir sobre um tópico – subtração com "reagrupamento" – e, em seguida, observe estes problemas:

$\begin{array}{r} 52 \\ \underline{-25} \end{array}$	$\begin{array}{r} 91 \\ \underline{-79} \end{array}$
Como abordaria esses problemas, se fosse ensiná-los no segundo ano? O que diria, se os alunos precisassem entender ou ser capazes de fazer, antes de poderem começar a aprender a subtração com reagrupamento?	

2ª. Alguns professores do sexto ano notaram que vários alunos estavam cometendo o mesmo erro na multiplicação de números de vários algarismos. Quando tentavam calcular 123×645, os alunos pareciam esquecer-se de mover os produtos em cada linha. Eles faziam isto:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1845 \end{array}$$

Ao invés disto:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 79335 \end{array}$$

Embora esses professores tivessem concordado que tal raciocínio era um problema, não chegaram a um acordo quanto ao tratamento que deveriam dar ao fato. O que fariam, se estivessem ensinando no sexto ano e notassem que alguns alunos cometem o mesmo erro?

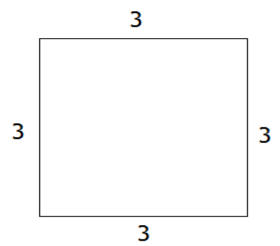
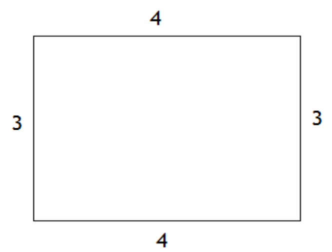
3ª. As pessoas parecem adotar abordagens na resolução de problemas envolvendo a divisão por frações. Como se resolve um problema como este?

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$$

Imagine que vai ensinar a divisão por frações. Para que essa operação tenha algum significado para as crianças, muitos professores tentam relacionar a matemática com outras coisas. Por vezes, tentam arranjar situações da vida real ou histórias-problema, para mostrar a aplicação de um conteúdo particular.

Qual seria uma boa história ou um bom modelo para $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$

4ª. Imagine que uma de suas alunas entra na aula muito entusiasmada e diz que tem um teorema que nunca tinha sido apresentado na aula. Ela explica que, quando o perímetro de uma figura fechada aumenta, a área também aumenta – e mostra esta figura, para provar o que diz.

<table>
<tr><td></td><td>Perímetro = 12 cm
Área = 9 cm^2</td></tr>
<tr><td></td><td>Perímetro = 14 cm
Área = 12 cm^2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Como responderia a essa aluna?</td></tr>
</table>

No livro (1999), que é sua tese de pós-doutorado e no qual cada uma dessas questões compõe um capitulo, Ma descreve as respostas dos professores americanos e, depois, as dos professores chineses e conclui com um debate acerca dos resultados obtidos.

Como nosso interesse não é resumir o livro de Ma, transpomos a seguir as conclusões descritas pela autora, referentes à terceira questão.

Na terceira questão, onde se investigou o conhecimento dos professores a respeito de dois aspectos do mesmo tópico – divisão por frações –, foi solicitado aos professores, americanos e chineses, que calculassem $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$ e que fizessem ilustrações com o significado da operação. Diferentemente das duas primeiras questões – de Matemática Elementar –, a divisão de frações é um tópico avançado da Aritmética, segundo Ma.

Na Tabela 1, a seguir, estão demonstrados os desempenhos dos professores americanos.

Tabela 1 – Dados dos professores
americanos participantes da pesquisa de Ma (1999).
O cálculo de $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ por parte dos 21 professores americanos

Resposta	%	N
Algoritmos correto, resposta completa	43	9
Algoritmo correto, resposta incompleta	9	2
Algoritmo incompleto, resposta incompleta	19	4
Memória fragmentada do algoritmo, sem resposta	24	5
Estratégia errada, sem resposta	5	1

Ma relata que, nessa questão, as lacunas do conhecimento dos professores americanos a respeito dessa matéria ficou mais evidente. Dos vinte e três professores, vinte e um tentaram calcular $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, mas apenas 9 concluíram seus cálculos e obtiveram a resposta correta, dando a seguinte explicação:

> Eu converteria o $1\frac{3}{4}$ em quartos, o que me daria $\frac{7}{4}$. Depois, para dividir por $\frac{1}{2}$, inverteria $\frac{1}{2}$ e multiplicaria. Por isso, iria multiplicar $\frac{7}{4}$ por 2 e obteria $\frac{14}{4}$ e depois dividiria 14 por 4 para voltar a um número misto, $3\frac{2}{4}$, que depois reduziria para $3\frac{1}{2}$.
>
> (MA, 1999, p. 114)

Ma pondera que, para esses professores, o procedimento de cálculo era claro e explícito: converter o número misto numa fração imprópria, inverter o divisor e multiplicá-lo pelo dividendo, reduzir o produto $\frac{14}{4}$ e mudá-lo para um número misto, $3\frac{1}{2}$.

Ma aponta que outros dois professores (dentre os vinte e um entrevistados) calcularam corretamente, mas não reduziram a sua resposta nem a transformaram em número misto, deixando a resolução incompleta; quatro dos vinte e um professores não foram claros no procedimento ou se mostraram inseguros; e uma professora admitiu que não sabia efetuar os cálculos.

Ma continua relatando que, embora 43% dos professores americanos tenham realizado o cálculo $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ corretamente, a maioria não logrou êxito na tentativa de arranjar uma representação para a divisão por frações. Apenas um professor criou uma forma de expressar seu raciocínio conceitualmente correta. Entre os vinte e três professores, seis não conseguiram criar uma história e dezesseis inventaram histórias com concepções erradas, mostrando equívocos sobre o significado da divisão por frações, como confundir a divisão por $\frac{1}{2}$ com a divisão por 2 ou confundir a divisão por $\frac{1}{2}$ com a multiplicação por $\frac{1}{2}$ ou confundir os três conceitos, dividir por $\frac{1}{2}$, dividir por 2 e multiplicar por $\frac{1}{2}$.

Por outro lado, Ma revela que todos os setenta e dois professores chineses efetuaram os cálculos corretamente e deram respostas completas à terceira questão. A maioria deles usou a expressão "*dividir por um número é equivalente a multiplicar pelo seu recíproco*", que é utilizada nos manuais chineses para justificar o algoritmo da divisão por frações, consistente com o destaque dado no currículo matemático do ensino básico chinês às relações entre essas operações e suas inversas.

Os professores argumentaram que a fundamentação lógica para esse procedimento é que os alunos já aprenderam a propriedade comutativa e sabem como tirar e acrescentar parênteses. Eles também aprenderam que uma fração é equivalente à expressão de uma divisão, por exemplo, $\frac{1}{2} = 1 \div 2$. Então, ao usar esses conhecimentos, pode-se escrever a divisão $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ do seguinte modo:

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 1\frac{3}{4} \div (1 \div 2)$$

$$= 1\frac{3}{4} \div 1 \times 2$$

$$= 1\frac{3}{4} \times 2 \div 1$$

$$= 1\frac{3}{4} \times 2$$

Ma relata também que a questão fez lembrar aos professores chineses três outras abordagens:

a) dividir frações usando números decimais:

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 1{,}75 \;\div 0{,}5 = 3{,}5$$

b) aplicar a propriedade distributiva:

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{2}$$

$$= \left(1 + \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{1}$$

$$= (1 \times 2) + \left(\frac{3}{4} \times 2\right)$$

$$= 2 + 1\frac{1}{2}$$

$$= 3\frac{1}{2}$$

c) dividir por uma fração sem multiplicar pelo recíproco do divisor.

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$$

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7 \div 1}{4 \div 2}$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$= 3\frac{1}{2}$$

Segundo Ma (1999), para os professores que propuseram essa abordagem, ela é mais fácil do que o método usual, pois elimina dois passos, inverte o divisor e reduz a resposta final. Entretanto os professores explicaram também que essa abordagem só é possível aos problemas quando tanto o numerador quanto o denominar do dividendo sejam divisíveis respectivamente pelo numerador e pelo denominador do divisor, além de os professores estarem conscientes do significado dos modos de calcular – tornar o procedimento de cálculo mais fácil ou mais simples. Para eles, resolver um problema complexo de modo simples é um dos padrões da comunidade matemática e os alunos devem conhecer vários modos de abordar o problema e devem também ser capazes de avaliar esses modos, podendo, então, optar pelo mais adequado.

Conforme Ma (1999, p. 177), sessenta e cinco dos setenta e dois professores chineses criaram mais de oitenta histórias-problema para o significado da divisão por frações. Doze deles propuseram mais do que uma história; seis não se sentiram capazes para essa tarefa; e um forneceu uma história incorreta, que representava $\frac{1}{2} \div 1\frac{3}{4}$ em vez de $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$.

Dezesseis histórias criadas por professores chineses ilustravam as seguintes ideias:

a) encontrar quantos $\frac{1}{2}s$ existem em $1\frac{3}{4}$; b) encontrar quantas vezes

$1\frac{3}{4}$ é relativamente a $\frac{1}{2}$.

Oito histórias ilustraram apenas a primeira ideia. Exemplos:

> Cortamos uma maçã em quatro partes iguais. Pegamos três partes e juntamo-las a uma maçã inteira. Se $\frac{1}{2}$ maçã for uma porção, quantas porções podemos obter com $1\frac{3}{4}$ maçãs?
>
> (MA, 1999, p.138)
>
> Estava planejado construir uma ponte em 1 mês e $\frac{3}{4}$. Mas, de fato, demorou apenas $\frac{1}{2}$ mês. Quantas vezes o tempo que estava planejado é relativo ao tempo que realmente levou?
>
> (MA, 1999, p. 138).

Sessenta e duas histórias representavam o modelo de repartição da divisão por frações – encontrar um número tal que $\frac{1}{2}$ dele seja $1\frac{3}{4}$. Exemplos:

Dividir uma fração é encontrar um número quando uma parte fracionária dele é conhecida. Por exemplo, se soubermos que $\frac{1}{2}$ de um número é $1\frac{3}{4}$, ao dividir $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ podemos ficar sabendo que esse número é $3\frac{1}{2}$.
Para inventar uma história problema que ilustre esse modelo, digamos que uma variedade de madeira pesa $1\frac{3}{4}$ tonelada por metro cúbico, o que é apenas $\frac{1}{2}$ do peso por metro cúbico de uma variedade de mármore. Quanto pesa um metro cúbico de mármore? Sabemos que $\frac{1}{2}$ metro cúbico de mármore pesa $1\frac{3}{4}$ tonelada. Para saber o peso de um metro cúbico, dividimos $1\frac{3}{4}$, o número que representa a parte fracionária por $\frac{1}{2}$, a fração que $1\frac{3}{4}$ representa e obtemos $3\frac{1}{2}$, o número do todo. O mármore pesa $3\frac{1}{2}$ toneladas por metro cúbico. (MA, 1999, p. 141)

A minha história será: um trem anda para a frente e para trás entre duas estações. Da estação A à estação B, é subida e da estação B à estação A é a descida O trem demorou $1\frac{3}{4}$ hora para fazer o percurso da estação B à estação A. É apenas $\frac{1}{2}$ do tempo que demora da estação A à estação B. Quanto tempo demora o trem para fazer o percurso da estação A à estação B?

(MA, 2009, p. 115).

Segundo Ma (1999), esses professores explicaram a versão fracionária do modelo de repartição da divisão e ela expõe a explicação de um professor sobre o modelo de repartição da divisão por números inteiros, quando as frações são introduzidas.

Com os números inteiros, os alunos aprenderam o modelo de repartição da divisão. É um modelo que pretende encontrar o tamanho de cada um dos grupos iguais que foram formados a partir de uma dada quantidade. Por exemplo, na nossa turma de 48 alunos, que foram agrupados em 4 grupos de igual tamanho, quantos alunos existem em cada grupo?
Sabemos a quantidade dos vários grupos, 48 alunos. Também sabemos o número de grupos, 4. Queremos encontrar o tamanho de um grupo. Por isso, *um modelo de repartição pretende encontrar o valor de uma unidade quando é conhecido o valor de*

várias unidades. Na divisão por frações, contudo, essa condição altera-se. Aqui, o que sabemos não é o valor das várias unidades, mas sim, o valor de uma parte da unidade. Por exemplo, se pagarmos $1\frac{3}{4}$ yuan para comprar $\frac{1}{2}$ de um bolo, quanto custaria um bolo inteiro? Dado que $\frac{1}{2}$ do preço total é $1\frac{3}{4}$ yuan. Para saber o preço total, dividimos $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ e obtemos $3\frac{1}{2}$ yuans. Em outras palavras, *a versão fracionária do modelo de repartição pretende encontrar um número quando uma parte dele é conhecida.*
(MA, 1999, p. 142).

Ma reconhece que a observação do professor é verdadeira, pois encontrar um número quando é conhecida a quantidade de várias unidades e encontrar um número quando uma parte fracionária dele é conhecida são representações de um modelo comum – encontrar o número que representa uma unidade quando determinada quantidade de unidades é conhecida. O que difere é a característica da quantidade: com um divisor inteiro, a condição é que seja conhecido um múltiplo da unidade, mas, com um divisor fracionário, a condição conhecida é uma fração da unidade.

Segundo a pesquisadora, em nível conceitual, essas duas abordagens são idênticas. A mudança no significado é intrínseca ao modelo de repartição. No modelo de agrupamento e no modelo de produto e fatores, a divisão por frações mantém o mesmo significado da divisão por números inteiros, o que pode explicar o motivo pelo qual tantas representações foram geradas por professores chineses.

Ma relata também que três professores utilizaram um modelo mais geral da divisão – encontrar um fator quando se conhecem o produto e outro fator, isto é, *encontrar um fator que, multiplicado por* $\frac{1}{2}$, *origine* $1\frac{3}{4}$., como no problema a seguir:

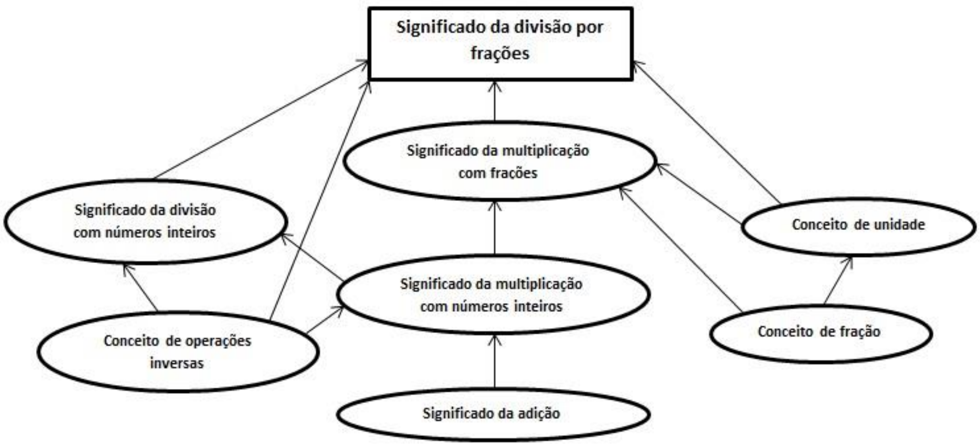
Sabemos que a área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. Digamos que área de um quadro retangular é $1\frac{3}{4}$ metro quadrado e a sua largura é $1\frac{1}{2}$ metro, qual é seu comprimento? (MA, 1999, p. 143).

Ma aponta que esses professores entenderam o multiplicando e o multiplicador como dois fatores com o mesmo estatuto. Essa perspectiva foi legitimada pela propriedade comutativa da multiplicação.

A autora reconhece que as formas como se ensinam o conceito de frações e as operações com frações na China e nos Estados Unidos são diferentes. Os professores americanos tendem a lidar com unidades inteiras reais e concretas (formas circulares ou retangulares) e suas frações. Embora os professores chineses também utilizem essas formas para abordar o conceito de fração, quando ensinam as operações com frações, tendem a usar abstratos e invisíveis (o comprimento de um trecho de estrada, o tempo que leva para completar uma tarefa etc.).

Ma mostra ainda outro aspecto do significado da multiplicação por uma fração: o elemento importante da base de conhecimento. Vários conceitos foram considerados elementos básicos do conhecimento relacionado com o tópico: o significado da multiplicação com números inteiros, o conceito de divisão como operação inversa da multiplicação, os modelos de divisão com números inteiros, o significado da multiplicação com frações, o conceito de fração, o conceito de unidade etc. A Figura 3, a seguir, resume as relações entre esses itens.

Figura 3 – Relações entre divisão e multiplicação com números fracionários.



Fonte: Ma (1999).

Como destacado na Figura 3, Ma acredita que não se aprendem conceitos matemáticos em uma direção única: apesar de o conceito de divisão por frações ser organizado logicamente sobre a aprendizagem prévia de vários conceitos, ele assume um papel de reforço e aprofundamento dessa aprendizagem prévia, isto é, ao refletir sobre o significado da divisão por frações, reforça o entendimento dos conceitos anteriores da multiplicação com números racionais.

A autora ilustra essa explicação com a descrição feita por um professor:

> É a isso que se chama "abrir novos horizontes através da exploração de horizontes antigos". A aprendizagem atual é apoiada pela aprendizagem anterior, mas também, a aprofunda. O significado da divisão por frações parece complicado, porque está construído sobre vários conceitos. Por outro lado, contudo, fornece uma boa oportunidade para os alunos aprofundarem a sua aprendizagem anterior desses conceitos. Tenho a certeza de que, depois de abordar o significado e os modelos da divisão por frações, a referida aprendizagem ficará mais completa do que antes. Aprender é um processo de avanços e recuos.
>
> (MA, 1999, p. 145).

Então, segundo a autora, aprender é um processo contínuo em que o novo conhecimento é apoiado pelo conhecimento anterior, por sua vez reforçado e aprofundado pelo novo. Das entrevistas feitas pela pesquisadora, os professores chineses consideraram "*o significado da multiplicação com frações*" um elemento-chave da base do conhecimento, como afirmou um professor.

> Os conceitos da divisão por frações, tais como "*encontrar um número, quando uma parte fracionária é conhecida*" ou "*encontrar que fração um número é de outro*" etc. parecem complicados. Mas, após termos um entendimento inclusivo do significado da multiplicação com frações, iremos ver que esses conceitos são lógicos e fáceis de entender. Por isso, para ajudar os alunos a entender o significado da divisão por frações, muitos dos nossos esforços não são diretamente dedicados ao tópico, mas sim, à compreensão plena do significado da multiplicação com frações e à relação entre divisão e multiplicação. (MA, 1999, p. 146).

Além disso, os professores chineses também destacaram que os elementos de conhecimentos matemáticos não têm a mesma importância e alguns deles pesam mais que outros, porque desempenham papel mais importante para aprendizagem matemática dos alunos, como é o caso da multiplicação com frações, que tem esse aspecto porque é uma "*intersecção*" de vários conceitos matemáticos.

E a autora continua:

> [...] Uma operação avançada ou um ramo avançado da matemática, normalmente, implica uma forma mais sofisticada de resolver problemas. A multiplicação, por exemplo, é uma operação mais sofisticada do que a adição para resolver alguns problemas e alguns métodos algébricos de resolver problemas são mais sofisticados do que alguns aritméticos. Quando um problema é resolvido de múltiplas formas, funciona como um laço ligando vários elementos do conhecimento matemático. A forma como os professores chineses encararam as quatro operações aritméticas básicas mostra como se orientavam de forma a unificar todo o campo da matemática elementar. (MA, 1999, p. 197).

Desse modo, Ma introduz um conceito relativo ao conhecimento matemático, a Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (CPMF),[5]

> [...] Por compreensão profunda refiro-me a um entendimento do campo da matemática elementar que é profundo (no sentido de completo), amplo e abrangente. Ainda que o termo profundo seja muitas vezes considerado no sentido de profundidade intelectual, as tres conotações – *profundidade, alcance e abrangência* – estão interligadas. (MA, 1999, p. 209)

Segundo Ma (1999), o ensino e a aprendizagem conforme esse conceito tem as quatro propriedades seguintes:

- Conectividade – *um professor com um CPMF tem uma intenção geral de estabelecer conexões entre conceitos e procedimentos matemáticos, desde conexões simples e superficiais entre elementos de conhecimento individuais até conexões complicadas e profundas entre diferentes operações e subdomínios matemáticos. Quando refletida no ensino, essa intenção irá impedir que a aprendizagem dos alunos seja fragmentada. Em vez de aprenderem tópicos isolados, os alunos assimilarão um corpo de conhecimento unificado.* (Ma, 2009, p. 211).

[5] Em inglês: *Profound understanding of fundamental mathematics*.

- Perspectivas múltiplas – *aqueles que alcançaram CPMF valorizaram diferentes facetas de uma ideia e várias abordagens para uma solução, bem como, suas vantagens e inconvenientes. Além disso, são capazes de providenciar explicações matemáticas destas várias facetas e abordagens. Nesse sentido, os professores podem encaminhar os seus alunos para uma compreensão flexível da disciplina.* (Ma, 1999, p. 212).

- Ideias básicas – *professores com CPMF mostram atitudes matemáticas, estão particularmente conscientes dos* "*conceitos e princípios básicos da matemática simples mais poderosos "(por exemplo, a ideia de igualdade) e tendem a revisitar e reforçar estas ideias básicas.". Colocados perante estas ideias, os alunos são não apenas encorajados a abordar os problemas, mas também orientados no sentido de conduzir uma atividade matemática efetiva.* (MA, 1999, p. 212).

- Coerência longitudinal – *professores com CPMF não estão limitados ao conhecimento a ser ensinado em determinado ano escolar. Pelo contrário, eles alcançaram um entendimento fundamental de todo o curriculum da matemática elementar. Com CPMF, os professores estão prontos para explorar a qualquer momento uma oportunidade de rever conceitos cruciais que os alunos estudaram anteriormente. Também sabem o que os alunos irão aprender mais tarde, e aproveitam para lançar as bases próprias dessa aprendizagem* (MA, 2009, p. 212).

E a autora continua ainda:

> Essas quatro propriedades estão inter-relacionadas. Enquanto a primeira propriedade, conectividade, é uma característica geral do ensino da matemática por parte de um professor com CPMF, as outras três – perspectivas múltiplas, ideias básicas e coerência longitudinal – são ligações que conduzem a diferentes aspectos

> da compreensão significativa da matemática – alcance, profundidade e abrangência (MA, 2009, p. 213).

E completa sua explicação:

> [...] Quando ensinam, os professores organizam suas bases de conhecimento de acordo com o contexto de ensino. As conexões entre tópicos alteram-se com o fluir do ensino. Um elemento central numa base de conhecimento para um tópico pode tornar-se num elemento marginal na base de conhecimento para outro, e vice-versa. (MA, 1999, p. 213).

Shulman (2010), no prefácio da edição aniversário do livro *Saber e ensinar matemática elementar*, faz a apresentação de sua orientanda e esclarece que, apesar de o livro ser um comparativo entre professores de matemática chineses e americanos, suas contribuições são também teóricas. O cerne do livro é a análise que a autora faz do tipo de compreensão que distingue os dois grupos de professores. Embora os chineses tenham estudado menos matemática que os americanos, seus conhecimentos são mais profundos, flexíveis e adequados para o ensino.

Shulman (2010) destaca que a autora, ao expor a compreensão do conteúdo matemático, revela que sua ideia é profundamente pedagógica. Ao propor conhecer as diferenças entre os conhecimentos e a compreensão de professores chineses e americanos, a concepção da autora sobre compreensão é exigente: ela desenvolve uma concepção da compreensão matemática, enfatizando os aspectos dos conhecimentos que mais poderão contribuir para a capacidade do professor de explicar ideias matemáticas importantes aos estudantes.

Desse modo, ela estipula quatro propriedades da compreensão matemática – ideias básicas, conectividade, representações múltiplas e coerência longitudinal – oferecendo um enquadramento eficaz para a apreensão do conteúdo matemático necessário ao entendimento e à orientação do pensamento das crianças em idade escolar.

Segundo Schulman (2010), no livro de Ma, as descobertas mais importantes da autora estão relacionadas ao entendimento do trabalho dos professores e ao desenvolvimento de sua carreira profissional a longo prazo.

Para a autora, os professores chineses continuam a aprender matemática e a apurar a compreensão dos conteúdos ao longo de suas carreiras e reflexões e seminários sobre os conteúdos das suas aulas fazem parte desse aprendizado contínuo. Essas oportunidades não são oferecidas aos professores americanos e esses ensinam durante muitos anos sem aprofundar a compreensão dos conteúdos que ensinam. Por outro lado, os professores chineses trabalham em ambientes onde as oportunidades de aprendizagem são criadas continuamente.

Ainda de acordo com Shulman (2010), o trabalho de Ma pode ser direcionado àqueles que, nas universidades, ensinam Matemática a futuros professores, apesar de ele focar os trabalhos dos professores do ensino básico.

Na China, os futuros professores aprendem a Matemática necessária para o ensino com os próprios professores do ensino básico e médio; melhoram esses conhecimentos nas escolas de formação de professores; mantêm e desenvolvem o seu conhecimento na prática docente.

Simultaneamente, nos Estados Unidos, a solução para seus professores reside no desenvolvimento de estudos de matemática mais eficazes nos cursos de licenciatura e, nesses programas, não existem espaços para o ensino da matemática fundamental que permitam uma compreensão profunda da disciplina, pois nem é reconhecida sua importância no ensino universitário.

Na edição de aniversário do livro *Saber e ensinar Matemática Elementar* (Ma, 2010), Schoenfeld faz uma introdução em que esclarece que se trata de um livro que traz uma oportunidade de aprendizagem àqueles que gostam do ensino e da aprendizagem dessa ciência. Ele destaca que a autora sabe do que fala e foca nas ideias matemáticas muito acertadamente.

Esse tipo de compreensão é o que Schoenfeld, como matemático, gostaria que seus estudantes tivessem, pois é a matemática em que as habilidades e a compreensão estão profundamente se interferindo.

Ainda, segundo Schoenfeld, no mundo de Ma e no dele, fazer um algoritmo de subtração, baseado na aritmética de base 10 ou divisão por frações – que pode ser entendida de diferentes maneiras – envolve operações em cujo sentido a Matemática não é arbitrária.

Como educador matemático, Shoenfeld destaca a importância do trabalho de Ma, quando essa pesquisadora pergunta quais as diferentes maneiras como se podem apresentar *frações*, para ajudar os alunos a desenvolverem uma profunda compreensão sobre esse conceito.

É preciso saber quantas histórias podem ser inventadas para representar a divisão $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ e para entender a razão do como é feita essa operação. Essa amplitude de conhecimento fornece uma estrutura de suporte para o modo como a matemática elementar deveria ser entendida.

Para finalizar este Capítulo, destacamos a afirmação de Kuang e al. (2012): de que, apesar de um passado glorioso no campo da matemática, representado por clássicos, como o *Nove Capítulos*, realizações como calcular o número π até a sexta casa decimal no século V e a criação de *Triângulo de Yanghui*, (conhecido como Triângulo de Pascal), no século XII, propondo *Teorema de Resíduos Chinês*, a China, em tempos modernos, criou poucos matemáticos de ordem mundial e raramente obteve realizações matemáticas de nível mais alto. Até os dias atuais, nenhum cidadão chinês venceu um prêmio Fields, que é atribuído desde 1936. Esse fato é o que impulsiona os educadores matemáticos na China contemporânea.

Capítulo 4 – Diferentes Perspectivas da Resolução de Problemas nos Estados Unidos e na China

Como Schoenfeld (2007) afirmou, o ensino da Matemática reflete os aspectos culturais de um povo. Neste Capítulo são expostas as potencialidades da estratégia da resolução de problemas e o modo como essa é utilizada nos Estados Unidos e na China. Aqui, são apontados alguns aspectos que evidenciam as diferenças no ensino da Matemática nesses dois países, quando se trata da resolução de problemas e são também expostas diferenças quanto à formação de professores dessa área nesses dois países.

Para entendermos as diferenças culturais entre esses países, vamos nos respaldar no estudo de Bingjie Wang, “A Comparative Study of Mathematics Educational Research in China and English Speaking Countries As Represented in Journals”, no qual, o autor compara quatro revistas sobre educação matemática: uma chinesa, com o *Journal of Mathematics Education* (JME), três internacionais em língua inglesa, *Educational Studies in Mathematics* (ESM), *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME) e *For the Learning of Mathematics* (FLM).

Esse estudo baseia-se em edições dessas revistas de 2009 e foram entrevistados membros do conselho editorial de cada uma delas, para complementar informações. Foram analisadas essas quatro revistas, tendo como objetivo efetuar análises qualitativas das entrevistas e dos textos, assim considerados, para se alcançar um mapa intelectual necessário ao estudo comparativo. Essa pesquisa foi realizada na University of British Columbia, na Faculty of Graduate Studies, em 2011.

Nisbett (apud WANG, 2011) analisou em seu livro, *The Geography of Thought* (2003) o como e o por quê de os asiáticos pensarem de forma diferente dos ocidentais. Esse autor acredita que diferenças quanto aos hábitos de pensar são resultantes de diferentes filosofias adotadas em diferentes regiões, as quais se infiltraram em vários aspectos da vida dos habitantes de uma região e acabam se tornando parte da vida dessas pessoas.

Segundo Wang (2011), China é um país de herança confucionista, tal como Taiwan, Singapura, Japão e Coreia. Como uma das filosofias mais antigas do mundo e dominante na China, o confucionismo enfatiza a educação, fato que influencia a concepção chinesa vigente sobre educação. Embora a filosofia de Confúcio tivesse sido proibida pelo governo por motivos políticos, sua influência está enraizada no estilo de vida do povo chinês, no seu dia a dia, no comportamento e até na comunicação.

De acordo com o autor, grande parte da tradição filosófica chinesa está enraizada na tradição confucionista do saber por meio da reflexão. Assim, a educação não fica na superfície humana: ela exige que os alunos aprendam como ser bem ajustados e como se adaptar a seu meio ambiente, valorizando que eles tenham capacidade para lidar com o conhecimento, e não se preocupem apenas em acumular conhecimentos.

Além disso, segundo Wang (2011), culturas baseadas no confucionismo veem o mundo como um todo, com um conjunto de relações, enfatizando o sentido e o valor do todo sobre seus componentes. Essa visão caracteriza uma abordagem holística e dialética, diferentemente das culturas ocidentais que recebem influência das tradições intelectuais da Grécia Antiga, que enfatizava o pensamento analítico.

Para Nisbett (2003, apud WANG, 2011) os orientais são educados para prestar mais atenção a contextos e relações, ao invés de objetos, preferindo explicar o mundo por meio de relações de abordagem holística apoiando-se no conhecimento baseado em experiências.

Esse povo é também mais propenso a buscar um meio termo, quando confrontados em aparente contradição ao invés de insistir na correção de um argumento em detrimento de outro. Talvez, por esse motivo, os pesquisadores chineses se concentrem mais em buscar *insights* a partir de contextos, ao invés de usar métodos empíricos para testar hipóteses, ensinam Zhao et al. (2008, apud WANG, 2011).

Wang (2011) afirma que o principal objetivo da filosofia confucionista é “cultivar pessoas virtuosas” como um todo e torná-las qualificadas como membro de uma comunidade.

Na China Antiga, as responsabilidades das pessoas eram caracterizadas como lealdade à nação e piedade filial aos pais. O indivíduo é considerado menos importante na sociedade chinesa em comparação com o valor da comunidade.

O autor ainda lembra que o exame imperial, que durou 1.300 anos (605-1905) foi um sistema delineado para selecionar os melhores funcionários administrativos para a burocracia do estado e teve uma grande influência sobre a sociedade e sobre a cultura da China imperial, portanto, ser um funcionário público ainda é uma ocupação popular.

Nisbett (2003, apud WANG, 2011) afirma que, em países de língua inglesa como Estados Unidos, Reino Unido e Canadá, de tradições grega, latina e cristã, o individualismo é mais forte, tendo uma natureza científica, histórica e sistemática mais forte. As tradições epistemológicas ocidentais possuem um ponto de vista analítico do mundo e são caracterizadas por investigações empíricas.

A partir dessas considerações, prosseguiremos este trabalho, no qual são apresentadas diferenças quanto à abordagem da resolução de problemas nos Estados Unidos e na China. Respaldada nas considerações tecidas nos capítulos anteriores, parece-me pertinente relacionar a questão do ensino de Matemática por meio da resolução de problemas com a formação de professores de Matemática nesses dois países.

Dois estudos são aqui apresentados e ambos discorrem sobre formação de professores de Matemática nos Estados Unidos e na China e sobre perspectivas de cada país em relação à resolução de problemas.

4.1 The teacher development continuum in the United States and China: Summary of a workshop

Em 1999, com a publicação do livro de Liping Ma, *Knowing and teaching elementary mathematics*: Teacher´s understanding of fundamental mathematics in the united states and china, no qual a autora examina os tipos de conhecimento que um professor do ensino elementar precisa ter para, efetivamente, transmitir a seus alunos.

Mais tarde, no mesmo ano, Roger Howe, membro do U. S. National Commisision on Mathematics Instruction (USNC/MI) revisou o livro *Notices of the american mathematical society* e concluiu que esse livro tem lições para todos *policymakers* educacionais. Esse livro chamou a atenção de muitos matemáticos e educadores matemáticos a respeito do ensino matemático chinês.

Alguns anos depois, o Professor Howe assistia à conferencia internacional sobre educação matemática, quando uma frase em especial despertou sua atenção: os educadores chineses sempre falam de professores *superrank*, professores com a honra de “classe especial”, uma designação honorária na carreira de um professor chinês que envolve responsabilidades especiais para liderança, desenvolvimento profissional e pesquisa.

Embora não exista designação equivalente nos Estados Unidos, os papeis comuns dos professores mestres nos dois países são instrutores de matemática e consultores, coordenadores de tecnologia, professores preceptores, revisores etc.

Como era algo que os educadores americanos queriam conhecer, o Professor Howe compartilhou a informação com USNC/MI e esse órgão patrocinou o workshop “The Teacher Development Continuum in the United States and China”, com o propósito de examinar a estrutura da profissão do ensino da matemática nos Estados Unidos e na China.

O workshop foi organizado e levou especialistas em educação matemática americanos e chineses, os quais, juntos, discutiram métodos e técnicas do desenvolvimento profissional comumente usados em seus países. A oficina teve apresentações convidadas e discussões focadas no processo do desenvolvimento do professor nos Estados Unidos e na China, já que a vida desses professores é estruturada para receber desenvolvimento continuamente.

Essa atividade trouxe professores americanos e chineses experientes e altamente qualificados e todos trabalham com desenvolvimento profissional (como professores mestres, mentores ou preceptores).

Comparar e contrastar as funções e o status dos professores mestres nos dois países foram os principais objetivos desse encontro. Uma síntese do workshop e um vídeo de treze minutos, com os destaques desse encontro estão em http://sites.nationalacademies.org/pga/biso/ICMI/.

O workshop foi realizado em Newport Beach, Califórnia, entre 31 de julho e 2 de agosto de 2009 e contou com quarenta educadores matemáticos, matemáticos, pesquisadores educacionais e especialistas em educação matemática, tanto americanos quanto chineses. Havia participantes de três regiões da China: Beijing, Shanghai e da Província de Jiangsu, além de vários estudiosos chineses residentes nos Estados Unidos.

Uma estudante de doutorado da Universidade de Califórnia (Irvine), Xiaoqing Chen, proporcionou a tradução com assistência de vários estudiosos bilíngues entre os participantes chineses e sino-americanos. A oficina foi planejada e organizada por dois membros do Board on International Scientific Organizations (Ana Ferrera e Kofi Kpikpitse) e teve também a assistência de cinco membros de USNC/MI: Patrick ScottNew (do Mexico Higher Education Department); Joseph G. Rosenstein (da Rutgers University); Janine Remillard (da University of Pennsylvania); Roger Howe (dea Yale University) e Ann Lawrence (da Capito Hill Day School, já aposentada).

4.1.1 Educação matemática na China

Liping Ma iniciou os trabalhos da oficina com um painel comparativo da educação matemática na China e nos Estados Unidos. Ela foi professora de escola elementar por sete anos na China, antes de obter o grau de mestre em formação de professores na East China Normal University e um doutorado na Stanford University. Baseando-se no seu conhecimento e na experiência vivida nos dois países, ela apresentou sua avaliação das semelhanças e diferenças nos dois sistemas.

Iniciando com a organização da educação, Ma afirma que a educação na China é dividida em seis anos de escola elementar, três anos de escola média (correspondente ao nosso ensino fundamental II – importa destacar que esses nove anos são compulsórios) e três anos de colegial (semelhante ao ensino médio brasileiro e que não são compulsórios). Para ingressar no ensino médio, presta-se a um exame muito competitivo, com 50% das escolas que oferecem educação geral e 50% oferecem educação vocacional. Os pais proporcionam auxílio para seus filhos frequentarem o ensino médio e bolsas de estudo são disponíveis para famílias muito pobres. O horário das aulas é das 8h às 17h15 para o ensino médio, na China e, em muitas escolas americanas, as aulas têm início às 7h15 e duram até 14h15.

Geralmente, uma escola em cada cidade é designada para prover educação especial aos estudantes com deficiências. Não existe educação em casa na China, diferentemente dos Estados Unidos. E são poucas as ofertas de atividades atléticas ou não acadêmicas. Entretanto muitos estudantes participam de atividades, tais como: a preparação para testes, incluindo o exame para o ingresso às universidades e outras atividades realizadas no período após o horário das aulas. Ao contrário dos Estados Unidos, na China, os estudantes só podem fazer o exame uma única vez.

Muitos alunos de escolas elementares aprendem Matemática com professor especializado nessa área, mas isso não é tudo: nos primeiros dois anos do ensino elementar, os professores de matemática podem também dar aulas de chinês. Em alguns lugares, professores de Matemática podem dar também aulas de ciência, apesar de essa disciplina não ser uma parte proeminente no currículo da escola elementar chinesa. Nas escolas da zona rural ou em áreas remotas, um professor da escola elementar pode ensinar todas as matérias, como acontece frequentemente nas mesmas situações nos Estados Unidos. Todavia haver professores especializados em Matemática, ensinando em escolas elementares é mais comum na China do que nos Estados Unidos.

O ensino da Matemática na China, usando notação ocidental teve início em 1894, quando o missionário americano Calvin W. Mateer publicou o primeiro livro de aritmética em chinês, usando os algarismos indo-arábicos escritos horizontalmente, ao invés de verticalmente. Quanto ao ensino elementar obrigatório, esse só foi instituído na China em 1904, cinquenta e dois anos depois de a lei da escolarização obrigatória ser aprovada em Massachusetts.

Ma relata que a cultura chinesa enfatizou o ensino e a aprendizagem por milhares de anos e lembra que, aproximadamente, durante a mesma época (469 - 399 a.C), vivia Sócrates na Grécia,

Confúcio (552 – 479 a.C) escreveu intensivamente sobre a função dos professores na sociedade. Seus ensinamentos sempre fizeram parte da educação chinesa, o que não acontecia com Sócrates, na Grécia.

Vem dos ensinamentos de Confúcio o profundo respeito aos professores na China – o que Ma chama de a parte invisível da educação chinesa. Mesmo durante a Revolução Cultural Chinesa, quando os livros foram abandonados, as ideias sobre ensino e aprendizagem foram preservadas na cultura.

Nos dias de hoje, professores de qualquer nível, na China, ainda são altamente respeitados pelos alunos e por seus pais, segundo apresentação de Shiqi Li, professor da educação matemática na East China Normal University.

Ma explica que, para aperfeiçoar seu ensino, os professores chineses têm recursos extras, como o intercâmbio regular entre colegas e a recente pesquisa sobre educação. Enquanto isso, nos Estados Unidos, o principal recurso intelectual para professores é um conjunto de ideias novas sobre educação, produzidas por pesquisas educacionais e muitos deles não conhecem as teorias diretamente, mas aprendem as abordagens baseadas nessas e as implementam em suas salas de aula. Paralelamente, ocorrem trocas regulares de conhecimentos e experiências entre professores na China, fato menos frequente em escolas elementares americanas.

Ainda de acordo com a exposição de Ma, na China, é comum que professores assistam às aulas dadas por outros professores e, depois, forneçam ao professor comentários sobre sua atuação. Os professores mestres também dão aulas demonstrativas para todos os professores na escola. É comum também que haja toda semana um tempo para os professores de Matemática discutirem o ensino, em grupos ou divididos por categorias. Os tópicos comuns para discussão são reflexões sobre as aulas, ajuda para temas difíceis e problemáticos, conexões entre conteúdos, além de analisarem os erros dos alunos, seus métodos de solução e compartilharem experiências bem sucedidas.

Algumas vezes, professores discutem também educação matemática com professores de outras escolas, com especialistas das universidades ou professores mestres de outras cidades. Outro participante do workshop, o professor mestre Hongyan Zhao estima que os professores de Matemática chineses gastem um terço de seu tempo na escola, preparando aulas, outro terço no ensino e outro terço do seu tempo ocupado em discussões com outros professores.

Ma conta que as provas, na China, são focadas nos exames dados no fim do ensino fundamental e no fim do ensino médio, as quais determinam a entrada dos alunos no ensino médio e na universidade, respectivamente. Há também um exame final geral de Matemática, no nível do distrito ou da cidade, que é voluntário. É considerado um importante fator de julgamento do professor a aprovação de seus alunos em exames para ingresso nas escolas do ensino médio e nas universidades. Recentemente, em cidades maiores, outros fatores do desempenho dos professores têm sido avaliados, tais como a avalição feita por seus colegas e por seus estudantes.

Segundo Ma, recentemente, a educação matemática na China tem passado por mudanças importantes. Esforços de reforma têm sido moldados, conforme os padrões desenvolvidos por NCTM, que têm procurado fazer o ensino dessa disciplina ser mais eficaz para todos os estudantes. Por exemplo, as salas de aulas na China têm sido organizadas, tradicionalmente, de tal forma que o debate dos estudantes se torne difícil, mas os professores chineses reconhecem que o debate pode beneficiar o aprendizado e tem incentivado os estudantes a participarem, ainda que suas salas de aula não estejam montadas para essa finalidade.

Na China, os futuros professores de Matemática são preparados de diferentes maneiras e a preparação mínima exigida para ser um professor da escola elementar é a realização de um programa de três anos de estudo em escola normal, focada especificamente na preparação de professores. Para ensinar no ensino médio e no fundamental (nosso antigo ginasial), exige-se quatro anos de curso no nível de grau bacharel.

Futuros professores empenham-se na prática do ensino durante sua preparação e, quando começam a trabalhar, os novatos são supervisionados pelos mentores indicados pela escola, junto com os quais eles preparam suas aulas. O professor novato assiste às aulas de seu mentor e esse revisa seus planos de aula e lhe dá o *feedback*.

Na China, existe uma classe de professores, denominada *Superrank Teacher*, nome dado àqueles que possuem uma habilidade profissional individual e que servem como modelo para outros professores, especialistas em ensino, reputação e realizações na educação matemática, segundo detalha Jiang Qi, do Suzhou Research Institute for Education Science, no workshop.

Espera-se que o ensino do *Superrank Teacher* apresente praticidade, inovação e flexibilidade. Essa classe de professores deve desenvolver ideias próprias para o material e para estratégias de ensino. Eles devem ter uma compreensão sistemática da Matemática, além de dever saber: a) como integrar o ensino dessa disciplina com Psicologia em sala de aula; b) como analisar livros com compreensão profunda; c) como usar erros e equívocos dos alunos como novos itens a serem ensinados; d) como avaliar o progresso da aprendizagem; e como refletir sobre sua prática de pesquisador.

Para alcançar esse nível, os professores precisam interagir com outros docentes, pesquisadores e especialistas, compartilhando com todos o que aprenderam. O número desse tipo de professores é baixo e o processo de avaliação é muito restrito, pois eles são observados por outros professores e juízes independentes em suas aulas; discutem suas lições e seu ensino com outros professores *superranqueados*, além de fazerem publicações de suas pesquisas.

4.1.2 Educação matemática nos Estados Unidos

Esse quadro foi fornecido por Edward Liu, da Graduate School of Education da Rutgers Universtiy, e chama a atenção para o fato de que a descrição pode não ser correta em algum estado ou cidade, porque os Estados Unidos são um grande país com variações consideráveis entre regiões, distritos e escolas.

O sistema educacional americano é descentralizado e fragmentado e a preparação e o posterior credenciamento, as condições de trabalho e as definições de função são estabelecidos em níveis locais de estado e são aproximadamente 14.500 distritos escolares, cuja política educacional é feita por conselhos escolares locais.

Os Estados Unidos não têm um currículo nacional e, devido ao controle local, escolas podem se submeter às frequentes mudanças de política ou de currículo. Segundo comentário de Liu, um professor pode ser um veterano com muita experiência no currículo da Matemática, mas, subitamente, um novo conselho escolar chegar e mudar o currículo ou a abordagem. Depois dessa mudança, tudo poderá ser novo para esse professor. As aulas que ele preparou podem não ser mais de grande valor ou úteis no novo contexto.

Nos Estados Unidos, o ensino tende a ser associado com imagens individualistas e heroicas. E professores bem sucedidos são carismáticos, têm personalidade firme, são dedicados e servem como inspiração para seus alunos. A própria profissão de ensinar tem uma cultura que enfatiza autonomia e privacidade, a qual tem resistido às intervenções de fora, apesar de essa tradição estar mudando vagarosamente.

O ensino também tem uma cultura de igualitarismo que resiste às distinções baseadas em especialidade e mérito. Todos os professores têm o mesmo status, pagamento igual e o mesmo direito de ensinar da maneira como preferir. Além disso, o ensino tem uma cultura de antiguidade, porque, quando se faz distinção entre professores, o critério é sempre pela antiguidade.

Esses aspectos culturais do ensino têm mantido a profissão relativamente não estratificada nos Estados Unidos e há pouca diferenciação nas descrições de funções e na remuneração.

Ainda, segundo o relato de Liu, os professores no início de carreira têm oportunidades limitadas para aprendizagem e alguns procedimentos de entrada. Espera-se que novos professores comecem o seu primeiro dia prontos para ensinar com plena disposição. Esse aspecto tem passado por mudanças graduais em algumas partes do país, onde são oferecidos programas de desenvolvimento profissional e de residência para professor, proporcionando uma entrada mais gradual na profissão e uma experiência de longo termo para novatos.

Segundo Maria Tatto, do College of Education, da Michigan State University, a formação de futuros professores e o desenvolvimento profissional na prática desses não têm proporcionado oportunidades para ensinar o que eles precisam saber para serem eficientes.

Tatto é a principal pesquisadora de um estudo comparativo internacional quanto à politica educacional conhecida como Teacher Education Study in Mathematics (o TEDS-M), no qual se procura conhecer as características e oportunidades para aprender dos professores das séries iniciais de dezessete países. Os resultados dessas oportunidades e o impacto delas em professores novatos e veteranos ainda não estavam disponíveis, quando foi realizado o workshop, dificultando nossas conclusões a respeito desse estudo.

Segundo Tatto, os dados do estudo mostram que, nos Estados Unidos, a formação de professores, o recrutamento e a remuneração são bastante descentralizados. Todos os estados exigem professores que tenham grau de bacharel, incluindo estudos de Pedagogia para uma credencial inicial e muitos estados exigem também cursos adicionais ou o grau de mestre e outros ainda têm provisão para certificação alternativa que permite que as pessoas que não preenchem todos os requisitos ensinem, ainda que temporariamente.

A formação dos professores é proporcionada por um número grande de organizações, entre faculdades, universidades, escolas distritais, agências do estado e organizações particulares. Segundo Tatto, mais de um mil e trezentas faculdades e universidades oferecem programas de formação de professores em diversos graus de educação.

O TEDS-M também avaliou a qualidade dos professores candidatos, usando suas notas do SAT.[6] Futuros professores, antes candidatos à educação

[6] O **SAT** (sigla para *Scholastic Aptitude Test* ou *Scholastic Assessment Test*) é um exame educacional padronizado nos Estados Unidos, aplicado a estudantes do ensino médio, para servir de critério para

elementar com certificação em Matemática tendiam a ter as notas mais baixas que a media dos graduados em faculdades. Os candidatos à licenciatura para a educação secundária em áreas especificas, como matemática, tinham notas medias maiores no SAT.

Por outro lado, Mari Muri, uma participante da oficina e consultora sênior do Project to Increase Mastery of Mathematics and Science na Wesleyan University, observou que a maioria dos professores do ensino elementar americanos é formada como generalista, e não tem Matemática na sua formação, feita em período entre seis horas e doze horas de crédito, o que os torna inseguros para ensinar essa disciplina.

Essa professora expôs o que é necessário, para que os professores da escolar elementar ensinem bem: eles precisam de uma sólida instrução básica em Matemática e crença de que essa é importante; e precisam também de uma perfeita compreensão da Pedagogia, por exemplo, saber como ensinar crianças com estilos de aprendizagem e experiências diferentes.

Outra professora, Janine Remillard, da University of Pennsylvania's Graduate School of Education, observou que a educação americana se baseia de alguma forma em um modelo de produção: pensa-se a educação como uma fábrica, onde se têm *inputs* e recebem *outputs*. O *input* seria o aluno não ensinado, o ensino acontece no sistema e o resultado é a criança que aprende.

Jennifer Bay-Williams, da Universidade of Louisville foi presidente da Association of Mathematics Teacher Educators e é co-autora do livro *Elementary and Middle School Mathematics*, explica que os Estados Unidos estão investindo muito esforço e energia para mudar esse modo de pensar sobre o ensino.

4.2 The Cultivation of Problem-solving and Reason in NCTM and Chinese National Standards

Nesse texto, Xuehui Xie, da Escola de Educação da Universidade Normal de Nanjing, faz uma análise comparativa entre a resolução de problemas nos

admissão nas universidades norte-americanas (semelhante ao ENEM brasileiro, embora as universidades não se baseiem somente nas notas dos alunos para aprová-los). (Wikipedia, acesso em 02/10/2013).

padrões publicados pelo NCTM, dos Estados Unidos, e os padrões publicados pelo Ministério da Educação (MOE) da China, mostrando as diferenças entre os padrões quanto às formas de alcançar a competência em resolução de problemas e raciocínio.

Esse estudo foi publicado em 21 de outubro de 2004 pela revista do Centre for Innovation in Mathematics Teaching (CIMT), da the School Education da University of Exeter, na Inglaterra.

O Centro para a Inovação em Ensino da Matemática (CIMT) foi criado em 1986 e concentra na investigação e no desenvolvimento curricular em ensino e aprendizagem de Matemática, com o objetivo de unificar e melhorar o progresso matemático em escolas e faculdades. A Web-Site do CIMT foi iniciada em maio de 1995 e foi transferida para o servidor da Universidade de Plymouth, no fim de julho de 2005.

Xie (2004) afirma que tanto o NCTM como o MOE consideram a competência em resolução de problemas como a meta principal da educação matemática. Os dois órgãos acreditam que a estratégia inclui aspectos intelectuais e não intelectuais. Os primeiros referem-se a diferentes competências, a saber: competência para formular, propor e investigar problemas matemáticos; competência para procurar obter estratégias adequadas; competência para aplicar o conhecimento adquirido; e competência para refletir e monitorar os processos do raciocínio matemático.

Os aspectos não intelectuais incluem o ato de cultivar as disposições positivas, como persistência, curiosidade e confiança; a compreensão do papel da Matemática na realidade; e a tendência para explorar novo conhecimento a partir de perspectivas matemáticas. Os dois órgãos também acreditam que a educação matemática deva alimentar o raciocínio indutivo e dedutivo.

Xie (2004) afirma que, apesar de o NCTM e o MOE possuírem ideias similares sobre a extensão e os papeis da resolução de problemas e raciocínio, existe uma diferença, quando são examinados detalhadamente.

Destacamos que a resolução de problemas, segundo o NCTM, é especificada não somente como um fim, mas também, como uma abordagem.

A esse respeito, Xie (2004) esclarece:

> Problem solving means engaging in a task for which the solution method is not known in advance. In order to find a solution, students must draw on their knowledge, and through this process, they will often develop new mathematical understandings. Solving problem is not only a goal of learning mathematical, but also a major means of doing so.
>
> (NCTM, 2000, p. 51, apud XIE, 2004).[7]

Xie (2004) enfatiza os Padrões do NCTM (1980, 1989 e 2000), os quais indicam a competência em resolução de problemas como uma meta abrangente da educação matemática. O órgão propõe que resolução de problemas deva ser o foco da Matemática Escolar e que essa deva ser organizada em torno da resolução de problemas como um método de pesquisa e aplicação, para compreensão dos conteúdos matemáticos e construção de novo conhecimento matemático, acreditando que, centralizando a aprendizagem matemática em resolução de problemas, auxiliaria os estudantes a aprenderem os conceitos em contextos motivadores, conforme exposto no texto abaixo.

> Instruction should be developed from problem situations. As long as the situation are familiar, conceptions are created from objects, events and relationships, in which operations and strategies are well understood […] Situations should be sufficiently simple to be manageable but sufficiently complex to provide for diversity in approach. They should be amenable to individual, small-group, or large-group instructions, involve a variety of mathematical domains, and be open and flexible as to the methods to be used.
>
> (NCTM, 1989, p. 11, apud XIE, 2004).[8]

---

[7] Resolução de problema significa engajar em uma tarefa para a qual o método de resolução não é conhecido, de antemão. Para encontrar uma solução, estudantes devem extrair do seu conhecimento, e por meio desse processo, eles desenvolverão frequentemente nova compreensão matemática. Resolver problemas não é somente uma meta da aprendizagem matemática, mas também, o principal meio de fazê-la.

[8] O ensino deve ser desenvolvido a partir das situações problema. Contanto que as situações sejam familiares, concepções são criadas a partir de objetos, acontecimentos e relações, em que operações e estratégias são bem compreendidas. [...] Situações devem ser suficientemente simples para ser controláveis e suficientemente complexas para fornecer diversidade em abordagens. Elas devem ser acessíveis para o ensino individual, pequeno grupo ou grande grupo, envolvendo uma variedade de domínios matemáticos e devem ser abertas e flexíveis como os métodos a serem usados.

Segundo Xie (2004). a ideia de que os estudantes obtêm novo conhecimento matemático por meio da resolução de problemas leva o NCTM a dar prioridade ao uso de situações problema dentro e fora da matemática, alegando que essa disciplina, quando compreendida a partir de situações problema, torna mais facilmente lembrado esse conhecimento pelos estudantes, mesmo depois de muitos anos, pela simples reflexão sobre as situações problema. Além disso, o NCTM também acredita que, deixando o aluno aprender em seu tempo, ele colhe o benefício de desenvolver seu próprio processo de aprendizagem, incorporando sua personalidade, sua peculiaridade e sua própria linguagem.

> The idiosyncratic representation constructed by students as they solve problems and investigate mathematical ideas can play an important role in helping students understand, and solve problems, and providing meaningful ways to record a solution method, and to describe the method to others [...]. It is important that students have opportunities not only to learn conventional forms of representation but also to construct, refine, and use their own representations as tools to support learning and doing mathematics. (NCTM, 2000, p. 67, apud XIE, 2004).[9]

Outra característica da resolução de problemas do NCTM apontada por Xie (2004) é a noção dos problemas abertos, definida como:

> Situations that allow students to experience problems with “messy” numbers or too much or not enough information or that have multiple solutions, each with different consequences.
> (NCTM, 1989, p. 76, apud XIE, 2004).[10]

Conforme Xie (2004), para o NCTM, tais problemas preparam mais adequadamente os estudantes para resolverem problemas que eles, provavelmente, encontrarão no seu cotidiano.

[9] As representações idiossincráticas construídas pelos estudantes, enquanto eles resolvem problemas e investigam ideias matemáticas, podem desempenhar um papel importante para auxiliá-los a compreender e resolver problemas e fornecendo formas significativas para gravar um método de solução e descrever o método para outros. É importante que os estudantes tenham oportunidades não somente para aprender formas convencionais de representação, mas também, para construir, refinar e usar suas próprias representações, como ferramentas para apoiar a aprendizagem e o fazer matemático.

[10] Situações que permitem aos estudantes experimentar problemas com números confusos ou com muitas informações ou informações insuficientes ou que tenham muitas soluções, cada um com consequências diferentes.

Outro ponto que chama a atenção nos padrões do NCTM, tal como é apontado por Xie (2004), é a ênfase no uso de estratégias múltiplas para resolução de problemas e a recomendação aos professores para que estimulem os alunos a aplicarem essas estratégias, as quais incluem o uso de materiais manipulativos, tentativa e erro, tentar valores especiais ou casos, adivinhar e checar, listar todas as possibilidades, coletar e organizar dados em tabelas, procurar padrões a partir das tabelas, desenhar diagramas e trabalhar retrospectivamente. O autor observa que o conhecimento prévio não desempenha papel significante na resolução de problemas do NCTM, embora o órgão defenda seu uso.

Xie (2004) mostra que o NCTM leva em consideração as disposições matemáticas como um objetivo importante da educação matemática, atribuindo-lhes papel vital na educação matemática e assume que elas são mais bem adquiridas por meio de muitas atividades de resolução de problemas, ao listar suas características, como:

> a) confiança em usar Matemática para resolver problemas, comunicar ideias e raciocinar;
> b) flexibilidade em explorar ideias matemáticas e experimentar métodos alternativos em resolver problemas;
> c) boa vontade em perseverar nas tarefas matemáticas;
> d) interesse, curiosidade e inventividade em fazer matemática;
> e) inclinação a monitorar e refletir no seu próprio raciocínio e desempenho;
> f) avaliação da aplicação da matemática em situações levantadas em outras disciplinas e experiências cotidianas;
> g) apreciação do papel da matemática em nossa cultura e seu valor como uma ferramenta e como uma linguagem.
>
> (NCTM, 1989, p. 233, apud Xie, 2004).

Segundo Xie (2004), desenvolver o raciocínio dos estudantes é também um objetivo do NCTM, ao especificar que o fato de estudantes deverem reconhecer o raciocínio é baseado em hipóteses e regras. Eles devem ser incentivados a fazer conjecturas, prevendo um aumento na habilidade de raciocínio, começando com a estratégia de tentativa e erro e, depois, estratégias de conjectura, conforme o extrato abaixo:

> Informed guessing is a major pathway to discovery [...] Young children will express their conjectures and describe their thinking in their own words and often explore them using concrete materials and examples. Students at all grades levels should learn to investigate their conjectures using concrete materials, calculators and other tools, and increasingly through the grades, mathematical representations and symbols. They also need to learn to work with other students to formulate and explore their conjectures and to listen to and understand conjectures and explanations offered by classmates. NCTM, 2000, p. 56, apud XIE, 2004).[11](

Nesse trecho citado, Xie (2004) mostra que o NCTM dá preferência a que os estudantes aprendam Matemática a partir de suas próprias experiências e acredita na competência humana inata de resolver problemas, que é possível de ser desenvolvida. Ele recomenda também que os estudantes aprendam um com outro pela comunicação e pelo trabalho conjunto. Ensina também que os estudantes vão progredir naturalmente em raciocínio sistemático no seu próprio tempo à medida que alcançarem séries mais avançadas.

Ainda segundo o autor, o NCTM incentiva os estudantes a selecionarem e usarem vários tipos de raciocínios e métodos, especialmente, o método da tentativa e erro, para justificarem suas hipóteses e soluções.

Do mesmo modo, o NCTM não fornece uma definição de raciocínio sistemático: apenas lista os métodos informais, para criar raciocínio em diferentes graus e níveis de ensino, como mostra o extrato a seguir:

> Systematic reasoning is a defining feature of mathematics. It is found in all content areas and, with different requirements of rigor, at all grade levels. For example, first graders can note that even and odd numbers alternate; third grades can conjecture and justify informally, perhaps, by paper folding that the diagonals of a square are perpendicular. Middle-grades students can determine the likelihood of an even or odd product when two number cubes are rolled and the numbers that come up are multiplied. And high

[11] Adivinhação informada é o principal caminho para a descoberta [...] Crianças pequenas, expressando suas conjecturas e descrevendo seu raciocínio nas suas próprias palavras, usam o material concreto e exemplos. Estudantes de todas as séries devem aprender a investigar suas conjecturas, usando material concreto, calculadoras e outras ferramentas e, nas séries mais avançadas, representações matemáticas e símbolos. Eles também precisam trabalhar com outros estudantes, para formular e explorar conjecturas desses, ouvir e compreender a explicação dada por eles.

> school students could be asked to consider what happens to a correlation coefficient under linear transformation of the variables.
> (NCTM, 2000, p. 56, apud XIE, 2004).[12]

De acordo com Xie (2004), está implícita no trecho acima uma teoria de desenvolvimento cognitivo, sugerindo que, se deixados bem à vontade e colocados em ambientes favoráveis, os estudantes experimentariam um movimento de resolução de problemas, do não sistemático para o sistemático. O autor faz uma hipótese de que o impulso mental, por meio de estágios cognitivos, poderia acontecer com mais sucesso e mais rapidez, mediante ajuda de um professor e entrando com dados mais estruturados. O pesquisador sugere mais investigações a esse respeito.

Enquanto isso, segundo Xie (2004), o Ministério da Educação chinês considera promover a competência em resolução de problemas como a principal meta da educação matemática. Esse órgão enfatiza que o desenvolvimento da habilidade em raciocínio dos estudantes é a essência da competência matemática, conforme o trecho abaixo:

> Being able to observe, experiment, compare, conjecture, analyze, synthesize, abstract and generalize; being able to reason by induction, deduction and analogy; being able to express their own thoughts and opinions logically and appropriately; being able to apply mathematical concepts, principles, thought and methodologies to differentiate mathematical relations; and being able to form high-order thinking skills.
> (MOE, 2000, apud XIE, 2004).[13]

Em seu texto, Xie (2004) explica que o trecho acima ilustra duas diferenças entre os pontos de vista de MOE e do NCTM. Enquanto o órgão chinês busca

[12] Raciocínio sistemático é uma característica que define matemática. É encontrado em todas as áreas do conteúdo e com diferentes exigências de rigor, em todos os níveis. Por exemplo, os de primeiro ano podem notar que números pares e impares se alternam; os de terceiro ano podem conjecturar e justificar informalmente, por dobradura, que as diagonais de um quadrado são perpendiculares; os de ginásio podem determinar a probabilidade de um produto par ou impar quando dois dados são lançados e os números que aparecem nas faces são multiplicados; os do (nível) colegial podem ser questionadas quanto ao que acontece com o coeficiente de correlação sob transformação linear das variáveis.

[13] Ser capaz de observar, experimentar, comparar, conjecturar, analisar, sintetizar, abstrair e generalizar; ser capaz de raciocinar usando indução, dedução e analogia; ser capaz de expressar seus próprios pensamentos e opiniões logicamente e apropriadamente; ser capaz de aplicar conceitos matemáticos, princípios e pensamentos e metodologias para diferentes relações matemáticas; e ser capaz de formar competência de raciocínio de alta ordem.

guiar estudantes para os tais processos de raciocínio, como análise e síntese, abstração e generalização, o NCTM enfatiza o desenvolvimento de outros tipos de processo de raciocínio, como conjectura, reflexão etc. Para o órgão chinês, o processo de aprendizagem matemática é também um processo por meio do qual as competências de abstração e síntese são desenvolvidas.

Espera-se que os estudantes identifiquem as características gerais de suas observações de coisas particulares e as apliquem em novas situações; que sejam capazes de aplicar o que eles aprenderam resolvendo problemas ao invés de serem colocados em situações piloto, para desenvolver sua competência em resolução de problemas. Essa perspectiva é muito diferente daquela do NCTM, em que a resolução de problemas não é apenas uma finalidade, mas também, uma abordagem para alcançar a competência em resolução de problemas.

Xie (2004) lembra que o MOE define resolução de problemas e raciocínio como:

> Problem-solving: being able to solve mathematical problem occurring in daily life, workplace and in the other subject-matter; being able to use mathematical language to express, communicate and form mathematical thinking. (MOE, 2000, apud XIE, 2004).[14]
>
> Reasoning: being able to develop mathematics conjectures through observation, experimentation, induction and analogy, and being able to seek evidence or prove their conjectures; being able to clearly and systematically express their thinking process; and being able to use mathematical language to discuss and question the reasonableness during the communication with others.
> (MOE, 2001, apud XIE, 2004).[15]

Xie (2004) afirma que, embora pareçam similares, as metas do NCTM e do MOE, o último não menciona que os estudantes aprendem por eles mesmos, o que pode ser visto na meta especificada na educação matemática do ensino ginasial:

[14] Resolução de problemas: ser capaz de resolver problemas que ocorrem na vida cotidiana, local do trabalho e em outras disciplinas; ser capaz de usar a linguagem matemática para expressar, comunicar e formar raciocínio matemático.

[15] Raciocínio: ser capaz de desenvolver hipóteses matemáticas por meio de observação, experimentações, indução e analogia e ser capaz de buscar evidências ou provar suas conjecturas; ser capaz de expressar claramente e sistematicamente seu processo de raciocínio; e ser capaz de usar a linguagem matemática para discutir a razoabilidade durante a comunicação com outros.

> Enable each student to learn fundamental algebraic and geometric knowledge and skills, which are essential for each person to adjust to daily life, to succeed in workplace, and for advance study; further educate computation skills; develop thinking ability and spatial concepts; enable them to apply the knowledge they learned to solve simple realistic problems; gradually form mathematical creativity; foster positive mathematics disposition; and form preliminary dialectical materialistic point of view. (MOE, 2000, National Mathematics Guideliness, apud XIE, 2004).[16]

Para Xie (2004), o trecho acima mostra que o MOE considera que o papel desempenhado pelos professores e pelo ensino é significativo na aprendizagem matemática dos estudantes e enfatiza que o domínio do conhecimento matemático dos professores é necessário para promover gradualmente o processo da competência do raciocínio e da competência em resolução de problemas.

Segundo Xie (2004), o MOE define o que é conhecimento matemático, habilidades e diversas competências, como também, os diferentes níveis de competências e habilidades.

A competência do pensamento matemático tem quatro níveis: o primeiro é saber que os estudantes são capazes de reconhecer e identificar, diferenciar e classificar o que eles aprendem no nível perceptual; o segundo é compreender – os estudantes devem ter conhecimento teórico; ser capazes de usar linguagem matemática para expressar um significado –; ser capazes de conhecer função e saber a conexão entre diferentes partes do conhecimento matemático; o terceiro nível consiste em dominar – os estudantes devem ser capazes de analisar, computar e tomar decisões e serem capazes de explicar e justificar suas decisões –; devem ser capazes de aplicar o conhecimento aprendido em novas situações na base da compreensão; o quarto nível consiste em aplicar flexivelmente – os estudantes devem ser capazes de sintetizar e integrar o conhecimento recentemente aprendido e competências com outro conhecimento prévio; e

[16] Possibilitar a cada estudante aprender álgebra fundamental, geometria e habilidades, que são essenciais para cada pessoa se ajustar ao cotidiano, para ter sucesso no local do trabalho e para estudos avançados; adquirir mais habilidades de computação; desenvolver competência de raciocínio e conceitos espaciais; possibilitar aos estudantes aplicar o conhecimento aprendido para resolver problemas realistas simples; gradualmente, formar criatividade matemática; promover disposição matemática positiva; e formar ponto de vista preliminar dialético materialista.

devem ser flexíveis e razoavelmente capazes de selecionar e aplicar o que aprenderam para resolver problemas práticos.

Xie (2004) dá exemplos: no primeiro estágio, de um estudo de geometria, os alunos aprenderiam e reconheceriam triângulos, retângulo e outras formas. No segundo, os alunos conheceriam as características dessas formas e suas relações, tais como: um retângulo pode ser dividido em dois triângulos; baseando-se nessas relações, os alunos obteriam a fórmula para calcular a área do triângulo. No terceiro, os alunos dominariam a fórmula e seriam capazes de usá-la para calcular a área do triângulo e, no quarto nível, os alunos usariam a fórmula flexivelmente para resolver problemas, mediante o uso de formas compostas por triângulos, retângulos etc.

Ainda de acordo com Xie (2004), o MOE considera que as habilidades têm três níveis: imitar, resolver problemas matemáticos independentemente e transferir. No estágio de transferir, estudantes devem ser capazes de fazer conexões com outro conhecimento, transformar problemas complexos em mais simples e alcançar a estrutura fundamental que unifica conceitos matemáticos e conhecimento. A estrutura fundamental refere-se à interconexão entre conhecimento matemático e raciocínio matemático e a metodologia refletida dentro.

Além disso, o processo a partir da imitação para resolver problemas independentes (está solta) indica que o MOE defende que o estudante aprende com o professor, em vez de aprender com seu próprio esforço e sozinhos, como propõe o NCTM. Primeiramente, os estudantes ganham experiência com sua participação na aprendizagem do conteúdo matemático; depois, os estudantes concordam, aceitam e apreciam matemática e, no terceiro estágio, os estudantes internalizam o que eles aprendem.

O MOE enfatiza a internalização na aprendizagem matemática e esse fato resulta em dois tipos de processos de aprendizagem. Conforme o NCTM, aprende-se fazendo e por tentativa e erro – o que pode ser sua forma de internalização. Parece que o ministério chinês enfatiza um processo pelo qual ideias, métodos e habilidades são introduzidos de fora e praticadas e usadas até serem completamente internalizados e compreendidos.

Finalmente, Xie (2004) afirma que, para o NCTM, o termo resolução de problemas é usado para se referir tanto a uma finalidade como a uma abordagem. E, parao MOE, resolução de problema é, sobretudo, um objetivo. O NCTM acredita que os estudantes desenvolvem naturalmente a habilidade para a resolução de problemas por meio de sua exploração do conhecimento matemático.

Em geral, o MOE propõe esta sequência: dominar conhecimento matemático e habilidades, internalizar esses conhecimentos e habilidades, formar a competência do raciocínio matemático e formar a competência da resolução de problemas.

Nessa sequência, o estudante aprende matemática sob a orientação de professores, logo, o modelo de tentativa e erro não é incentivado como uma estratégia para aprender matemática, segundo acredita o MOE. Por outro lado, o NCTM faz uso do método de tentativa e erro como uma estratégia importante, porque os estudantes são colocados em situações piloto nas salas de aula desde o inicio.

Aparentemente, NCTM acredita que competência matemática se origine nos estudantes, enquanto o MOE enxerga imitação e internalização como fundamentos importantes para desenvolver o processo mental dos estudantes.

De acordo com a linha do NCTM, os estudantes aprendem de maneira mais adequada fazendo. Recomenda-se que os estudantes usem material manipulativo e que eles possam medir, gravar e procurar padrões nos dados que observam em resolução de problemas. Essas estratégias não são usadas como métodos importantes na aprendizagem matemática chinesa.

Como o NCTM propõe desenvolver a competência em resolução de problemas por colocá-los em situações problema, incentivando-os a manipular objetos e a usar tentativa e erro, o raciocínio indutivo é o principal foco, apesar de ser mencionado o raciocínio dedutivo.

Por outro lado, o MOE propõe desenvolver resolução de problemas e raciocínio, em que os professores demonstrem o desenvolvimento por meio de processos e auxiliem os estudantes a dominarem métodos e metodologias e matemáticas subjacentes.

O processo primário de aprendizagem do NCTM sugere que se deve conjecturar, monitorar, refletir e validar; o do MOE propõe comparar e contrastar, analisar e sintetizar, abstrair e generalizar do particular para o geral e do empírico para o teórico.

Teorias diferentes do desenvolvimento cognitivo parecem estar na base dessas abordagens. MOE trabalha em estágios do conhecimento, cada um construído sobre o anterior e o processo se inicia com as explicações do professor, a ser modelado durante a completa internalização do estudante. O NCTM não trabalha desse modo e existe uma teoria subjacente do movimento autoiniciado de resolução de problemas de esforços não sistemáticos para sistemáticos, porém as complexidades desse processo não são explicadas.

Com este capítulo, tivemos o propósito de ressaltar que diferenças culturais direcionam a formação de professores de Matemática que, por sua vez, vão embasar a utilização das potencialidades da resolução de problemas no ensino da matemática. Procuramos desvelar aspectos sobre diferentes enfoques dados por dois países de diferentes culturas, a fim de disponibilizar, para a área de Educação Matemática, aspectos plurais que possam contribuir para uma maior abrangência na utilização da estratégia de resolução de problemas na atuação dos professores.

Capítulo 5 – O ensino da Matemática e a resolução de problemas no Brasil

O primeiro curso superior visando à formação de matemáticos e de professores de Matemática no Brasil, segundo Lima (2012), foi criado na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, em 1934. Até aquele momento, como não havia no país instituições que se ocupassem do ensino dessa ciência em nível superior, as escolas do exército, da marinha e das escolas de engenharia eram encarregadas desse ofício.

Ainda, segundo relato desse autor, no início, o curso oferecido pela FFCL durava três anos e o formando recebia o grau de bacharel em Matemática. Para obter o título de licenciado na mesma ciência, era preciso cursar mais um ano de formação pedagógica no Instituto de Educação. Quando esse instituto foi agregado à Universidade de São Paulo, originando a Seção de Educação da FFCL, as disciplinas pedagógicas passaram a ser ministradas pela própria instituição.

Conforme Moreira e David (2007), os cursos de licenciatura no Brasil iniciaram-se já com duração de três anos para a formação específica e mais um ano para a formação pedagógica. O saber disciplinar específico era considerado relevante para a formação profissional do professor e a formação pedagógica se reduzia à 'didática', nome atribuído ao conjunto de técnicas úteis para a transmissão do conhecimento acumulado nos primeiros três anos. Esse modelo de formação de professor era referido como "3+1" ou "bacharelado + didática", ensinam Moreira e David (2007, p. 13).

Em *Novos desafios para os cursos de licenciatura em matemática*, Pires (2000) afirma que esse tipo de funcionamento não permitiu a construção de um curso com identidade de licenciatura, porque ser professor era uma opção a mais além de ser um bacharel, um pesquisador na área de Matemática.

Segundo Moreira e David (2007), a partir da década de 1970, mudanças estruturais começam a ocorrer na configuração dos cursos de licenciatura devido à crescente preocupação com o papel social e político da educação. E se destacava a formação do professor com atribuição de uma importância maior aos métodos apropriados de transmissão, já se apontando para a necessidade de aprofundar a formação do professor como educador.

Desse modo, os cursos de licenciatura passaram a incluir disciplinas, como Sociologia da Educação, Política Educacional e outras, além das disciplinas de conteúdo específico, planejadas e ensinadas por especialistas.

Em *Novos desafios para os cursos de licenciatura em Matemática*, Pires (2000, p. 10) destaca que:

> Por sua vez, nos cursos específicos de licenciatura, mesmo com estudos mostrando que os ingressantes geralmente têm formação básica de qualidade insuficiente, por vezes feita em cursos supletivos, essas condições reais não são levadas em conta, ou seja, não são considerados os pontos de partida nem as necessidades desses alunos.

E a autora continua:

> Além disso, ao longo do curso, cabe ao professor em formação um papel passivo de receptor de informações e executor de propostas e não coparticipante do planejamento do próprio processo de formação. (PIRES, 2000, p. 11).
> [...]
> As modalidades convencionais de comunicação (aula expositiva, seminário, palestra) são privilegiadas em detrimento de outras, tais como intercâmbio de experiências, observação de classe de professores experientes, uso de recurso de comunicação para “trazer a prática” à discussão, atividades de simulação de situação-problemas etc.

Para Nacarato e Passos (2007), os cursos de licenciatura em Matemática no Brasil eram regulamentados por uma legislação bastante inadequada para as atuais exigências da formação docente. O modelo “3+1” (três anos de conteúdos matemáticos voltados ao bacharelado e um ano de disciplinas pedagógicas) era muito criticado e as pesquisas em educação matemática apontavam para um tipo de curso que dirigisse a formação de um profissional capaz de enfrentar os desafios propostos pela demanda escolar, proveniente das camadas mais populares da população, decorrente da expansão da obrigatoriedade da educação básica, desvinculando a licenciatura do bacharelado.

Entretanto com a promulgação das Diretrizes Curriculares Nacionais dos cursos de Matemática (Parecer CNE/1302/2001), a dicotomia foi reforçada, quando se colocou a licenciatura em plano secundário e de importância menor em relação ao bacharelado: enquanto o bacharel deve ter uma sólida formação, com base na pesquisa, o licenciando terá algumas visões de conteúdos específicos. Contribui para essa diferenciação o fato de a carga horária mínima estabelecida para o curso de licenciatura em Matemática ser de 2.800 horas, posteriormente transformado em máximo para a maioria das instituições privadas. Em consequência, essas organizaram seus cursos de forma a terem integralizadas essas horas em apenas três anos.

Delor (1998) afirma que o papel da escola é se preocupar com o saber evolutivo e munir o aluno com bússola e mapas, para ele navegar no mundo atual, no qual informações e avanços tecnológicos são contínuos e fluem com uma rapidez cada vez maior.

A esse respeito, Pires (2000) destaca que o papel reservado à educação é o de promover o desenvolvimento harmonioso das pessoas e da sociedade, na tentativa de possibilitar a diminuição da pobreza, da exclusão e das opressões. E, nesse cenário, a escola ideal deve fornecer ao aluno as bases culturais para que ele possa selecionar as informações e melhor interpretá-las.

Pires (2000) lembra que a formação de um profissional em educação deve levar em conta o *aprender a aprender* e, no caso do professor de Matemática, é imprescindível que ele tenha uma sólida base conceitual de conhecimento matemático e seja capaz de auxiliar seus alunos a se tornarem aptos para o exercício ao qual se dedicam, aproveitando-se ao máximo das oportunidades oferecidas pelo mundo atual impregnado das mais variadas tecnologias.

E Pires (2000) enfatiza que esse novo perfil de professor demanda dos cursos de licenciatura a elaboração de programas que desenvolvam as competências profissionais, as quais eram pouco privilegiadas até então. E a autora destaca as competências referentes à formação matemática dos professores dessa ciência, a saber:

- capacidade de compreender a Matemática com base numa visão histórica e crítica, tanto no estado atual como nas várias fases de sua evolução;

- capacidade de relacionar vários campos dessa ciência para elaborar modelos, resolver problemas e interpretar dados;

- capacidade de trabalhar com conceitos abstratos na resolução de problemas;

- capacidade de interpretar e representar dados graficamente.

Para a autora, o desenvolvimento dessas competências demanda sólidos conhecimentos sobre matemática e conteúdos ensinados nas seguintes disciplinas: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística etc., destacando-se as relações dessas disciplinas com o mundo real, suas aplicações em outras disciplinas e demais aspectos que proporcionam a compreensão do que venha a ser a atividade matemática;

- currículo – com a visão global dos currículos para o ensino fundamental e médio e dos currículos da Matemática, os professores se tornam hábeis em elaborar seus projetos de ensino, definindo bem o objetivo para cursos, séries ou ciclos, como também, a seleção de conteúdos, de acordo com a faixa etária. A autora sugere que as análises dos livros didáticos devam se inserir nesse item.

Dentre os vários princípios metodológicos, destacamos a afirmação de Pires (2000), quando lembra que, desde o início da formação, o futuro professor precisa trabalhar com situações problema contextualizadas, porque as competências profissionais são formadas processualmente, numa dinâmica dialética ação-reflexão-ação, transformando a prática em conhecimento e vice-versa.

É ainda Pires (2002, p. 48) quem aponta:

> Ninguém promove o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo. Ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina nem a constituição de significados que não possui ou a autonomia que não teve oportunidade de construir.

Em relação a esse novo cenário de práticas educativas com o conhecimento matemático, Romanatto (2009, p. 1) assim se expressa:

> [...] a resolução de problemas se apresenta com um dos caminhos mais promissores para o 'fazer matemático' em nossas salas de aula. Sabemos que toda disciplina tem um corpo de conhecimento e uma lógica peculiar (a sua especificidade). No caso da matemática, essa especificidade é a resolução de problemas. É o que postulava Descartes: '[...] não nos tornaremos matemáticos, mesmo que decoremos todas as demonstrações, se o nosso espírito não for capaz, por si, de resolver qualquer espécie de problemas.

A metodologia da resolução de problema tem sido foco de interesse no movimento da educação matemática, cujo objetivo deve permitir que o aluno seja agente do seu próprio aprendizado, ao argumentar e se apropriar de ideias matemáticas de situações problema, desafiando o aprendiz a mobilizar seu conhecimento prévio e fazendo-o refletir sobre os resultados.

É também de Romanatto (2009) a consideração da importância do papel desempenhado pelos professores nas disposições para resolução de problemas, ao criarem ambiente propício que encoraje seus alunos a se arriscarem e explorarem problemas, compartilhando o malogro e o sucesso; questionando seus pares para desenvolverem confiança em suas habilidades, e tendo disposição para a resolução de problemas. Mas, segundo o autor, para que assim ocorra, os professores precisam vivenciar a metodologia de resolução de problemas em sua formação.

Segundo Zuffi & Onuchic (2007), a metodologia de resolução de problemas tem sido tema de pesquisas em muitos países e, no Brasil, a partir de 1997, esse enfoque foi fomentado a partir da publicação do livro *A resolução de problemas na matemática escolar*, publicado em 1980 pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) que contou com a organização de Stephen Krulik e Robert Reys.

Domingues (1997), tradutor desse livro para a língua portuguesa, esclarece que o texto é composto por vinte e dois artigos de especialistas, na maioria americanos, o qual inicia com a reprodução do livro de Polya, *Sobre a resolução de problemas de matemática na high school* (1949).

Os dezoito artigos seguintes tratam da resolução de problemas sob diferentes pontos de vista, sempre preocupados com a realidade das salas de aula. O vigésimo e o vigésimo primeiro artigos se ocupam da medição do nível de habilidade em resolução de problemas e com a eficácia dos planos de ensino que visam ao desenvolvimento dessa habilidade. O último artigo é uma bibliografia comentada com o propósito de auxiliar os leitores na busca de material sobre o assunto. O autor enfatiza que, entre esses textos, permeiam ideias de Polya e, sobretudo, seu plano de quatro etapas.

5.1 Grupo de Trabalho em Resolução de Problemas

No panorama brasileiro, o Grupo de Grupo de Trabalho em Resolução de Problemas (o GTERP) é coordenado pela Professora Lourdes de la Rosa Onuchic, da UNESP-Rio Claro, o qual tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, investigação e produção científica na linha de pesquisa de resolução de problemas. O grupo adota a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da resolução de problemas para todos os níveis de escolaridade.

O GTERP teve sua origem quando a Professora Onuchic foi convidada para participar do grupo de pesquisadores do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática na UNESP, de Rio Claro, em 1989. Ao se familiarizar com a área, após muitos estudos, ela escolheu resolução de problemas como eixo da sua área de pesquisa, depois de conhecer os trabalhos de pesquisadores americanos de diversas universidades daquele país (ONUCHIC, 2008).

Alunos de mestrado e doutorado do programa de pós-graduação em educação matemática, com pesquisas na linha de resolução de problemas são também membros do GTERP. São igualmente participantes desse grupo os ex-alunos do programa que desejam dar continuidade a suas pesquisas, como é o caso da Professora Allevato, que atua hoje como docente na UNICSUL, onde é vice-coordenadora do programa de pós-graduação na área do ensino de Ciências e Matemática. E, sob sua orientação, já foram defendidas onze dissertações de mestrado e uma tese de doutorado, todos abordando temas ligados à resolução de problemas.

O GTERP tem sido considerado a sede de produções científicas nessa área, sejam essas em nível de dissertações ou de teses, graças à linha adotada e difundida pelas pesquisadoras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato. Desde o início de suas atividades, em 1989 até o fim de 2011, já haviam sido defendidas dezessete dissertações de mestrado e quatro teses de doutorado na área, além de muitas outras publicações científicas.

Segundo Allevato & Onuchic (2007), a característica marcante do GTERP é a busca constante pelo desenvolvimento de estudos a respeito das questões relacionadas a ensino-aprendizagem-avaliação, tanto sob o ponto de vista do professor como do aluno. Sendo assim, as produções do grupo – dissertações, teses e outros trabalhos acadêmicos – sempre procuram narrar e analisar situações em sala de aula em todos os níveis de ensino.

Para atingir essa finalidade, os trabalhos são pautados pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, por meio da resolução de problemas, considerada como um caminho importante para ensinar matemática, e não somente, como mais uma forma de ensinar e resolver problemas.

Onuchic & Allevato (2011, p. 81) historiam:

> Envolvidos com o tema resolução de problemas e assumindo a concepção de trabalhar matemática através da resolução de problemas, o GTERP passou a empregar a palavra composta ensino-aprendizagem, dentro de uma dinâmica de trabalho para a sala de aula, que passamos a entender como uma metodologia. Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que esses três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como participante ativo, aprenda e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção do conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. Do outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

> Chamamos a esse processo de trabalho uma forma pós-Polya de ver resolução de problemas.
> [...]
> Na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas, o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Essas autoras citam Van de Walle (2001), quando ele define claramente o que é um problema:

> [...] um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Para elas, é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que está interessado em fazer.
> (2011, p. 82)

As mesmas autoras lembram ainda:

> [...] É verdade que, entre os diversos autores e trabalhos já publicados, podem ser encontrados muitos conceitos de problema adjetivados, refletindo qualidades específicas que deles se esperam: problemas de fixação, exercícios, problemas abertos, problemas fechados, problemas padrão, problemas rotineiros e não rotineiros, quebra-cabeças, desafios entre outros. Na realidade, são todos problemas e os adjetivos expressam diferentes tipos de problemas que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias. (ONUCHIC & ALLEVATO, 2011, p. 81).

Para adotar essa metodologia, segundo as autoras, é necessário que o professor e os alunos mudem suas posturas e atitudes em relação ao trabalho em sala de aula. O professor escolhe e elabora problemas apropriados ao conteúdo que ser construir, passando ao aluno maior responsabilidade pela aprendizagem que se quer atingir. Por outro lado, o aluno deve assumir sua responsabilidade em mudar sua postura em sala de aula. Os papeis de cada um mudam, o que nem sempre é fácil.

Onuchic & Allevato (2011, p. 82) destacam as ideias de Van de Walle et al., quando esses justificam o esforço do aluno, já que a resolução de problemas promove as seguintes ações:

- coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido;
- desenvolve o poder matemático nos alunos, ou seja, a capacidade de pensar matematicamente, de utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
- desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que essa faz sentido. A partir dessa, a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
- fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar o aluno a obter sucesso com a matemática.
- empolga os professores que ensinam dessa maneira e, posteriormente, eles não querem voltar a ensinar da forma dita *tradicional*. Eles se sentem gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios;
- ajuda na formalização de conceitos e teorias matemáticos, feitos pelo professor e esse passa a fazer mais sentido para os alunos.

Dentre as pesquisas concluídas desse grupo, destacamos a tese *O processo ensino-aprendizagem – Avaliação de geometria através da resolução de problemas*: Perspectivas didático-matemáticas na forma inicial de professores matemática*,* de Célia Barros Nunes (2010), sob a orientação da Professora Onuchic.

Essa pesquisa tem como foco de interesse o trabalho com geometria euclidiana realizado com estudantes do curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado da Bahia, Campus X, cujo objetivo é investigar, compreender e evidenciar as potencialidades didático-matemáticas da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas para aprender geometria.

Para tanto, foram criados e aplicados dois projetos de ensino para as disciplinas Didática da Matemática e Laboratório de Ensino de Matemática II, ministradas pela pesquisadora. Ela percebeu que a dupla Didática da Matemática e Laboratório de Ensino de Matemática II é necessária à formação de professores e que é importante também levar os futuros professores a repensarem seu conhecimento matemático e as estratégias de ensino e aprendizagem. Além disso, destaca a necessidade de se buscar um ensino de qualidade com a participação dos alunos, trabalhando de modo cooperativo e colaborativo, tudo por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Esse trabalho chamou nossa atenção porque houve dificuldade em encontrar pesquisas que tratassem da resolução de problemas e da formação matemática do professor de matemática, concomitantemente, já que nosso foco de interesse é saber se a resolução de problemas pode contribuir para a formação matemática dos professores dessa disciplina.

Nunes (2010, p. 331) relata que, na aplicação dos dois projetos criados,

> [...] os estudantes apresentaram dificuldades, ao serem solicitados para argumentar, mesmo quando a favor de seus raciocínios matemáticos, em justificar, em conjecturar e em generalizar talvez pela insegurança no domínio dos conceitos matemáticos específicos, chegando a afirmar que [...] trabalhar com a metodologia de resolução de problemas não é tarefa fácil para o professor, pois esse precisa de tempo, maturidade, muita reflexão e pesquisa para lecionar.

A segunda tese, *Ensino-Aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas*: Uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de matemática, igualmente de caráter qualitativo, cujo autor é Manoel dos Santos Costa, sob a orientação da Professora Doutora Norma Suely Gomes Allevato, foi realizada com estudantes de uma universidade pública do Estado do Maranhão. Os instrumentos metodológicos para a coleta de dados foram questionários, observação participante, análise documental e entrevistas, além dos problemas propostos aos licenciandos.

Essa pesquisa procurou responder à questão: como (futuros) professores de Matemática, em formação inicial, exploram o conceito de proporcionalidade através da resolução de problemas? Para responder a essa pergunta, foi delineada uma pesquisa qualitativa, cujo desenvolvimento ocorreu por meio de encontros do pesquisador com os estudantes, com leituras de textos que os levavam a se conscientizarem do papel do professor, da importância do conhecimento matemático e da metodologia da resolução de problemas.

Conforme Costa (2012), durante as leituras dos textos, foram reveladas lacunas de conhecimento com relação ao conteúdo estudado, sobretudo, quando se trata de fazer conexão entre esse e outros ramos da Matemática. Os participantes também tinham desconhecimento em relação ao ‘quando’ (ano escolar) e como (deveriam ensinar tal conteúdo).

O pesquisador também ressalta a importância do trabalho em grupo, que possibilitou a mobilização e a produção de novos saberes,

> [...] os licenciandos tiveram oportunidade de construir e compreender algumas estratégias utilizadas pelos colegas, [...] a comunicação, a reflexão e o diálogo com e entre os (futuros) professores foram elementos essenciais para a compreensão da metodologia como também a ampliação dos conhecimentos matemáticos. (COSTA, 2012).

Ainda segundo Costa (2012), os participantes da pesquisa sentiram-se desafiados e motivados para resolverem os problemas, partindo sempre de onde estavam os seus conhecimentos prévios. Houve interação entre os (futuros) professores, gerando um ambiente de aprendizagem mais autônoma e significativa. E, embora tenham considerado que trabalhar com essa metodologia de ensino é difícil, apresentaram bons motivos para utilizá-la em suas (futuras) aulas.

O pesquisador percebeu que a metodologia ajudou os participantes da investigação a serem agentes na construção do seu saber e, além disso, revelou que eles tinham lacunas de conhecimento em relação ao conteúdo “proporcionalidade”. Contudo, ao vivenciarem a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, esses licenciandos foram capazes de mobilizar novas estratégias de resolução de problemas, ao utilizarem o pensamento quantitativo (que envolve algoritmos numéricos) e qualitativo (que analisa e explica as estratégias envolvidas na resolução).

5.2 Seminários promovidos pelo GTERP: I SERP e II SERP

O GTERP promove seminários sobre resolução de problemas e o I Seminário em Resolução de Problemas – o I SERP – realizou-se de 30 a 31 de outubro de 2008, na UNESP-Rio Claro, com o nome de “Múltiplos olhares sobre Resolução de Problemas Convergindo à Aprendizagem”. Esse seminário teve como meta proporcionar aos participantes momentos de reflexão e troca de experiências e compartilhamento de diferentes olhares sobre a Resolução de Problemas com vistas ao trabalho na sala de aula e apresentou diferentes linhas metodológicas e diferentes trabalhos sobre o tema.

O II SERP foi realizado de 10 a 11 de novembro de 2011, também na UNESP-Rio Claro, com o nome “O estado da arte da pesquisa em Resolução de Problemas” e contou com discussões e palestras proferidas por pesquisadores que atuam em diferentes centros de pesquisa em Resolução de Problemas no Brasil e no mundo. Os objetivos desse encontro com estudantes, professores e pesquisadores nessa linha de investigação foram:

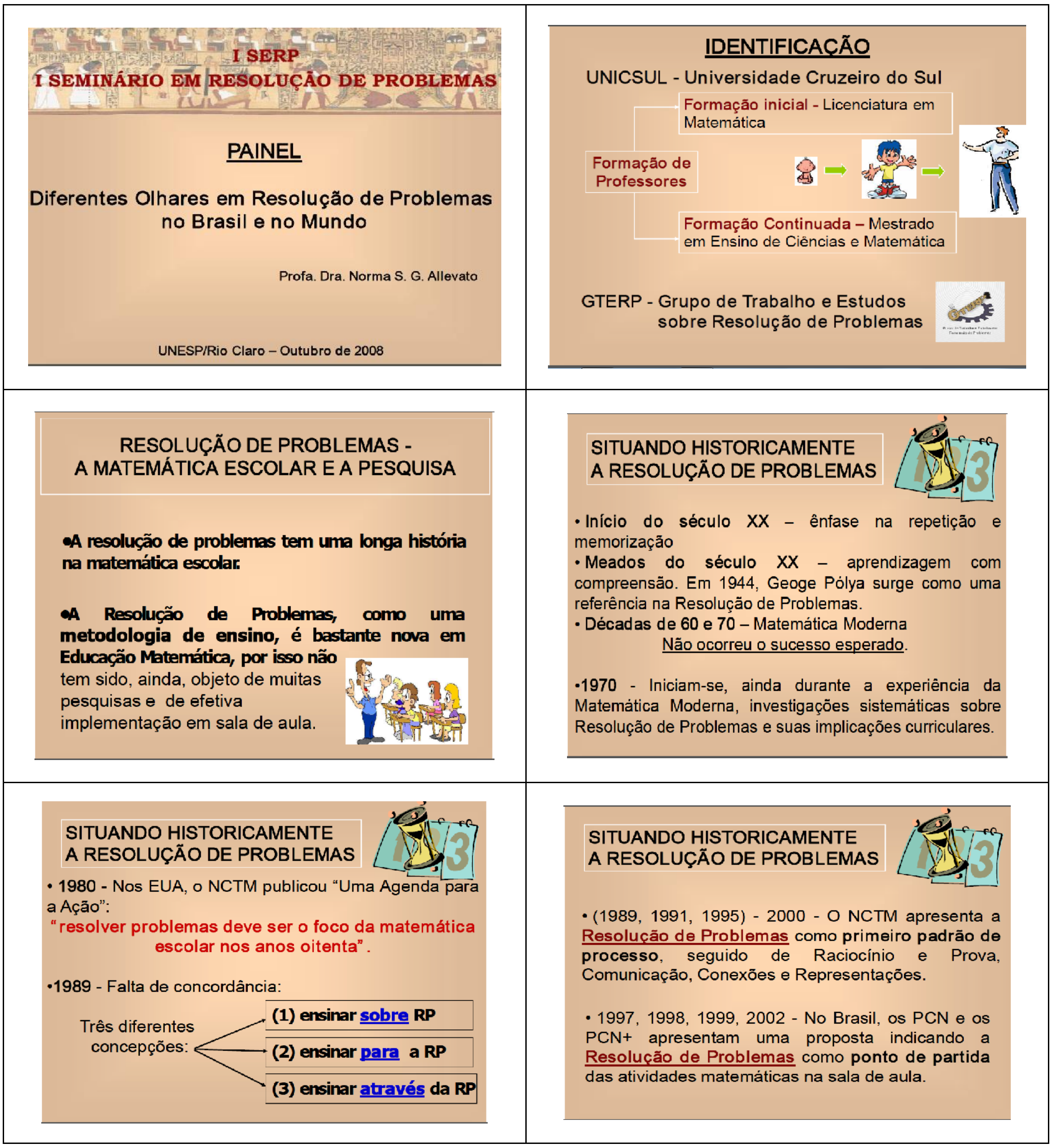
- refletir sobre diferentes metodologias de trabalho em sala de aula, apoiadas em resolução de problemas;
- possibilitar maior integração entre os professores que atuam na rede escolar e os pesquisadores que trabalham nessa linha de investigação;
- compartilhar conhecimentos sobre as diversas experiências de ensino e de pesquisas desenvolvidas a partir da resolução de problemas por professores e alunos de pós-graduação;
- relacionar a resolução de problemas a outras áreas do conhecimento: formação inicial de professores de matemática e de modelagem matemática.

Dentre as várias apresentações nesses seminários, destacamos a de Allevato (2008), no qual, a autora faz uma retrospectiva da evolução da resolução de problemas no século XX.

Outra atividade importante foi a palestra de encerramento, proferida pela professora Onuchic, tanto no seminário de 2008 quanto no de 2011.

São expostos na Figura 4, a seguir, os diapositivos apresentados por Allevato no seminário de 2008.

Figura 4 – Diapositivos apresentados por Alevatto (2008)
no I Seminário do SERP.



ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO
DE MATEMÁTICA
ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FUNDAMENTOS

Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver”. (ONUCHIC, 1999, 215).

Ensino-Aprendizagem-Avaliação: ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores do conhecimento, integrando a avaliação ao processo, com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentar a aprendizagem e reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO
DE MATEMÁTICA
ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FUNDAMENTOS

Trata-se de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. (ALLEVATO, ONUCHIC, 2007; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005).

ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO
DE MATEMÁTICA
ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FUNDAMENTOS

Ressalte-se que o conteúdo necessário, ou mais indicado, para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula. O problema proposto aos alunos, que chamamos problema gerador, é que conduzirá ao conteúdo que o professor planejou construir naquela aula.

ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO
DE MATEMÁTICA
ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

SUGESTÃO

SUGESTÃO

1) Formar grupos e entregar a atividade.
2) Observar e incentivar.
3) Auxiliar nos problemas secundários.
4) Registrar as resoluções na lousa.
5) Realizar uma Plenária.
6) Buscar um consenso.
7) Formalizar o conteúdo.

EXEMPLO

Problema gerador

SOMA DE ABDOMINAIS

Como parte de seu programa de ginástica, Beto decidiu fazer abdominais Toda manhã. Em 1º de abril ele fez apenas uma; no dia 2 de abril fez três abdominais; no dia 3 de abril ele fez cinco e no dia 4 de abril fez sete. Suponha que Beto tenha continuado a aumentar o número de abdominais a cada dia, seguindo este padrão durante todo o mês de abril. Quantas abdominais ele fez no dia 15 de abril? Quantas abdominais ele fez até o dia 15 de abril?

REFLEXÕES

Este problema foi aplicado a professores participantes de um mini-curso. Havia professores em formação e em exercício nos níveis de educação infantil até ensino superior. Os participantes elaboraram uma relação de conteúdos que poderiam ser trabalhados através desse problema gerador: números naturais, números ímpares, números quadrados, raiz quadrada, soma de Gauss, equações, seqüências, P.A., soma dos termos de uma P.A., funções, função afim e função quadrática, seqüência de Fibonacci e Princípio de Indução Finita.

A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas representa uma nova forma de trabalho em sala de aula em que as atividades são sempre fundamentadas em problemas.

BIBLIOGRAFIA

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Teaching Mathematics in the Classroom Through Problem Solving. In: ICME11- International Congress on Mathematical Education, 11., 2008. Monterrey, México: Universidad Autónoma de Nuevo León. Disponível em http://tsg.icme11.org/document/get/453

ALLEVATO, N. S. G., ONUCHIC, L. R. A Sala de Aula, a Pesquisa em Educação Matemática e a Produção Científica do GTERP In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9, 2007, Belo Horizonte. Anais... Cd-rom, Belo Horizonte: SCIM/SA, 2007.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino – aprendizagem – avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – Uma possibilidade para o trabalho em sala de aula. In: Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul, 7, 2006, Águas de Lindóia. Anais... Cd-rom, São Paulo: Zapt Editora Ltda, 2006.

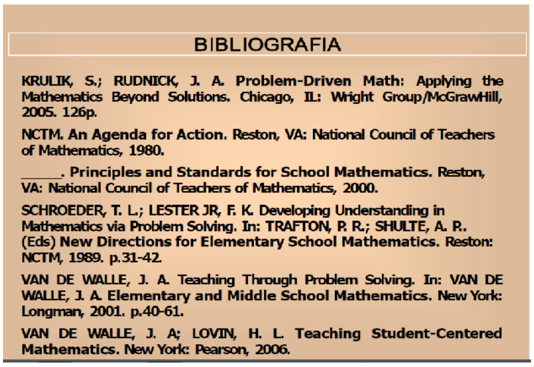
BIBLIOGRAFIA

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org) Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org). Educação Matemática - pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. O Ensino de Números Racionais e Proporcionalidade através da Resolução de Problemas. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 12., 2007. Anais ... Santiago de Queretaro: Benemérita Escuela Normal de Querétaro, 2007. 1 Cd-rom.

ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G. Implementando aulas de Matemática fundamentadas na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 4, 2007a, Canoas. Anais... Cd-rom, Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2007.



Fonte: Alevatto, I SERP-2008.

Allevato (2008) afirma que a resolução de problemas como metodologia de ensino é uma prática nova em educação matemática e, por essa razão, não tem sido objeto de pesquisa nem de implementação em salas de aulas, mas tem merecido atenção de investigações sistemáticas, às quais se somam suas implicações curriculares a partir de 1970, quando a matemática moderna era foco da instrução matemática nas escolas.

Onuchic (2008, p. 6) relata que...

> [...] A importância dada à resolução de problemas é, portanto, recente e somente nessa década é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização da Educação Matemática, em termos de resolução de problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas que a configuravam como um conjunto de fatos, como o domínio de procedimentos algorítmicos ou como conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. No fim dos anos 1970, a resolução de problemas emerge, ganhando espaço no mundo inteiro. Em 1976, no 3rd International Congress on Mathematical Education, ICME 3, em Karlsruhe (Alemanha), a resolução de problemas se apresentou sob a forma de um dos temas de trabalho para o congresso.

Em sua apresentação, Allevato (2008) relata que, em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicou *Uma agenda para a ação*, no qual se esclarece que *resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar nos anos oitentas*.

Nesse mesmo encontro, Onuchic afirma que, durante essa década, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, com enfoque na sala de aula, sob a forma de coleção de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Esse material serviu para auxiliar os professores quanto à metodologia de resolução de problemas.

No encontro referido, Allevato cita três diferentes concepções a respeito da resolução de problemas, propostas por Schroeder e Lester (1989), a saber: ensino sobre resolução de problemas, ensino para a resolução de problemas e ensino através da resolução de problemas. Tais divergências mostram certa falta de concordância entre os pesquisadores, fato que, segundo os autores, no momento em que se resolvem problemas, as três formas podem emergir, uma dando suporte a outra.

Segundo Onuchic (2008), no fim da década de 1980, a resolução de problemas começa a ser pensada como uma metodologia de ensino e como ponto de partida para o ensino de matemática e o aluno passa a ser centro do processo do ensino. A autora afirma que essa nova visão apoiava-se nos estudos desenvolvidos pelo NCTM que publica *Principles and Standards for School Mathematics*. Nessa publicação, a resolução de problemas é destacada como um dos padrões de processo para o ensino de matemática.

Em *Pesquisa em resolução de problemas*: Caminhos, avanços e novas perspectivas, Onuchic & Allevato (2011) afirmam que o NCTM fez um grande esforço a partir da década de 1980 e durante a década seguinte, com o intuito de auxiliar os professores.

As autoras se apoiam em uma sequência de publicações para comprovarem esse fato:

> [...] *Curriculum and Evaluation Standars for the School Mathematics* (NCTM, 1989), *Professional Standards for School Mathematics* (NCTM, 1991) e *Assessment Standards for School Mathematics* (NCTM, 1995). Esse esforço culminou com a publicação dos Standards (2000), oficialmente denominado *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), no qual são enunciados seis princípios (equidade, currículo,

> ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia); cinco padrões de conteúdo (números e operações, álgebra, geometria, medida e análise de dados e probabilidade); e cinco padrões de procedimento, dos quais o primeiro é a resolução de problemas, seguido por raciocínio e prova; comunicação; conexões e representação. (ONUCHIC & ALLEVATO, 2011, p. 79).

E são ainda as mesmas autoras que continuam:

> Foi, de fato, a partir dos *Standards 2000* que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática *através* da resolução de problemas. Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo coconstrutores de seu próprio conhecimento e os professores, os responsáveis por conduzir esse processo.
> (ONUCHIC & ALLEVATO, 2011, p. 79)

Em "Pesquisa em resolução de problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas" (2011), artigo publicado na revista *Bolema*, Onuchic & Allevato relatam, citando Lambdin e Walcott (2007, p. 3), que o ensino de matemática passou por seis fases identificáveis com diferentes ênfases, conforme exposto no Quadro 2, a seguir, organizado por esses pesquisadores americanos.

Quadro 2 – Relações entre as fases da educação matemática e as teorias psicológicas de aprendizagem.

Fases	**Principais Teorias e Teóricos**	**Foco**	**Como atingir**
Exercícios e prática (aprox. de 1920 a 1930).	Coneccionismo e associacionismo (Thorndike).	Facilidade de cálculo.	Rotina, memorização de fatos e algoritmos.
Aritmética significativa (aprox.1930 – 1950s).	Teoria da Gestalt.	Compreensão de ideias e habilidades aritméticas. . Aplicações da matemática em problemas do mundo real.	Ênfase nas relações matemáticas. Aprendizagem incidental. Abordagem de atividade orientada.
Matemática Moderna (aprox. de 1960 a 1970s).	Psicologia do desenvolvimento, teoria sociocultural (ex.: Bruner, Piaget e Dienes).	Compreensão da estrutura da disciplina.	Estudo das estruturas matemáticas. Currículo em espiral. Aprendizagem por descoberta.
Voltas às bases (aprox. nos anos 1970s).	(Retorno) ao coneccionismo.	(Retorno à) preocupação com o desenvolvimento do conhecimento e das habilidades.	(Retorno à) aprendizagem de fatos por exercício e prática.

Resolução de problemas (aprox. 1980s).	Construtivismo, psicologia cognitiva e teoria sociocultural (Vygotsky).	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático.	Retorno à aprendizagem por descoberta. Aprendizagem através da resolução de problemas.
Padrões, avaliação, responsabilidade (aprox. 1990 até o presente).	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural vs renovada ênfase na psicologia experimental (NCLB).[17]	Guerras matemáticas: preocupação com a alfabetização matemática dos indivíduos vs. preocupação com a gestão dos sistemas educacionais.	NSF[18] – desenvolvimento de currículos baseados em padrões e orientados ao estudante vs foco na preparação para os testes com expectativas específicas.

Fonte: Traduzido por esta pesquisadora a partir de Lambdin e Walcott (2007, p. 5, apud ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.77).

Essas fases merecem atenção, segundo seus autores, porque, a cada fase, existe uma correspondência na educação e cada fase tinha suas características e novas práticas eram introduzidas na Educação Matemática. Além disso, algumas fases foram também vivenciadas em outros lugares do mundo, exercendo influência nos rumos da Matemática Escolar desde então.

Conforme se vê no Quadro 2, já exposto, a pesquisa sobre resolução de problemas teve seu início nos anos 1980, embora o livro tivesse sido publicado em 1945. Esse livro, *A arte de resolver problemas*, é de Polya, considerado o pai da resolução de problemas. A tradução desse livro para a língua portuguesa foi publicada em 1986.

Kilpatrick e Wirszup (1976) afirmam que a comunidade americana da educação matemática começou a considerar a pesquisa sobre resolução de problemas como forma de ensinar matemática com a divulgação da pesquisa de Krutetskii (1976). Seu trabalho chamou atenção por ter se destacado dentre aqueles apresentados por psicólogos russos, quando investigavam as diferenças individuais em habilidades matemáticas, mas também, por causa dos problemas matemáticos utilizados por ele, considerados muito variados e engenhosos.

O interesse sobre o trabalho de Krutetskii coincide com o foco que incidia sobre o desenvolvimento do conhecimento e das habilidades na década de 1970.

As autoras mostram que, ao relacionarem o *Standards 2000* com o quadro de percurso histórico de Lambdin e Walcott (2007), destaca-se a fase em que esses autores apresebtavam a aprendizagem através da resolução de problemas

[17] NCLB – No Child Left Behind Act – Nenhuma Criança Ficará para Trás.
[18] NSF – National Science Foundation – Fundação Nacional de Ciência.

como uma solução para o aprendizado da Matemática, cuja tendência é o desenvolvimento de currículos baseados em padrões.

Na esteira do *Standards 2000*, a Professora Isabel Vale, de Portugal, apresentou seu *trabalho* "Resolução de tarefas com padrões em contextos figurativos: exemplos de sala de aula"*,* no II SERP*.* Essa investigação despertou muito interesse no público – e nesta pesquisadora também –, por ser uma forma diferente de abordar a resolução de problemas.

Vale (2011) afirma que, na tentativa de definir e caracterizar a Matemática, vários autores recorreram a padrões e outros, à resolução de problemas, como ela expressa:

> Assim, o conhecimento matemático poder ser desenvolvido através do estudo de problemas que envolvam padrões, em que a álgebra surge como um modo de generalizar e representar esse conhecimento, tornando-se difícil separar estas perspectivas. Desta exploração de problemas de padrão emerge a generalização, que é uma das componentes mais importantes do conhecimento matemático, e que é a base do pensamento algébrico, conceito em que a visualização tem um papel relevante, sobretudo nos níveis mais elementares. Os padrões podem sugerir abordagens numéricas, visuais e mistas, contudo, tradicionalmente, os professores têm tendência para explorar os padrões mais do ponto de vista numérico do que do figurativo, tornando muitas das vezes mais difícil ou mesmo impossível, para alguns, chegar à generalização. O nosso recente envolvimento no projeto Padrões pretende mostrar como este tema permite construir e ampliar conceitos matemáticos, sobretudo dando significado a esses conceitos, assim como a procedimentos e ideias matemáticas, muitas das vezes aprendidos sem significado e sem relação entre si, e permite, sobretudo, resolver problemas dentro e fora da matemática. Mostra também de que modo uma aula de matemática desenvolvida através de tarefas desafiadoras que envolvam a exploração de padrões pode potencializar capacidades transversais nos estudantes como sejam a comunicação, as representações, as conexões, o raciocínio. Pretende-se realçar, por um lado, a importância da visualização, não só como componente fundamental para a compreensão de propriedades geométricas, mas também, numéricas e, por outro lado, a necessária flexibilidade na compreensão de factos e relações numéricas e/ou geométricas. (VALE, 2011, p. 3)

Para discutir esse ponto de vista, Vale (2011, p. 4) propõe a seguinte tarefa:

Observe a sequência

4, 7, 10,13

Determine o termo de ordem 20

Para a autora, “ver” envolve reconhecer que há uma diferença constante 3 entre os termos da sequencia e perceber que encontrar o próximo termo é só adicionar 3 ao anterior. E ela apresenta a mesma situação em um contexto figurativo, como:

Observe a sequência

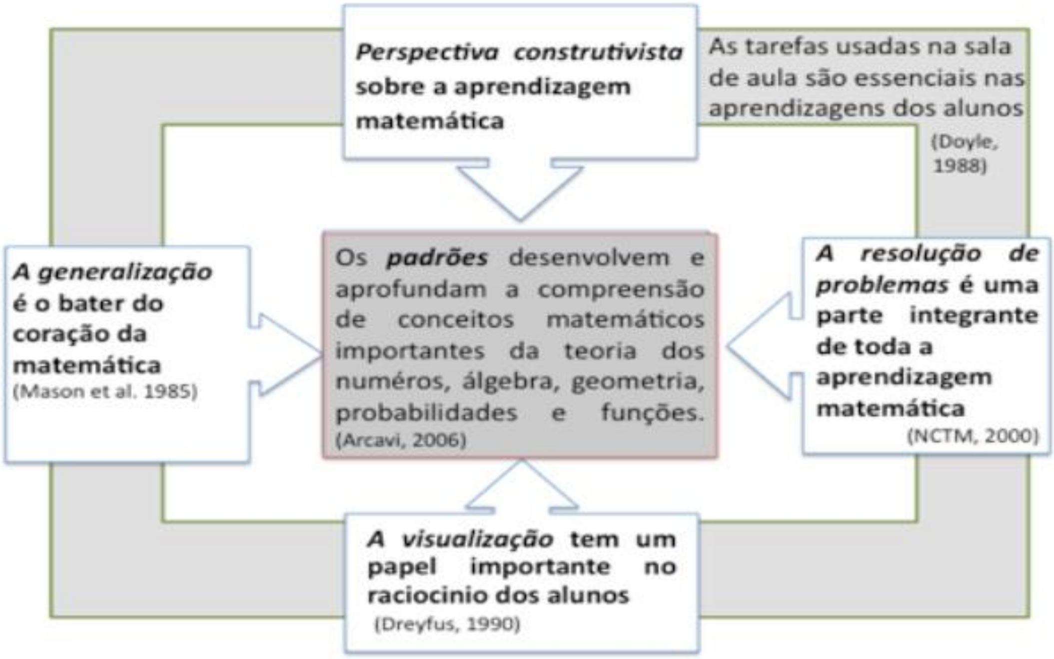
Determine o termo de ordem 20

E a autora explica que é preciso...

> [...] proporcionar o desenvolvimento do pensamento matemático através de uma abordagem com recurso à exploração de tarefas desafiantes com padrões, em contextos figurativos, e explorar diferentes modos de generalização que estejam relacionados com diferentes formas de ver esses padrões e que possam ter significado para os alunos. Mais do que desenvolver nos alunos capacidades que lhes permitam escrever uma fórmula é importante que consigam compreender a origem e o significado dessa fórmula ou regra e raciocinar de modo a convencerem-se a eles próprios e aos outros, da validade dessa regra ou fórmula que obtiveram através da generalização, recorrendo a raciocínios sobre os números e/ou figuras. (VALE, 2011, p. 4).

A seguir, na Figura 4, transcrevemos o diagrama em que a autora sintetiza os pressupostos da proposta didática apresentada.

Figura 5 – Pressupostos da proposta didática de Vale (2011).



Vale (2011) afirma que, quando as crianças entram na escola, possuem bons potenciais em suas capacidades de visualização, imaginação, conjectura, generalização e expressão. Então, cabe ao professor estar atento e recorrer a diferentes caminhos que permitam explorar essas habilidades em seus alunos. O tema dos padrões pode contribuir para atingir esse objetivo, por ser motivador e desafiador, envolvendo e mobilizando muitos conceitos e ideias de várias áreas da matemática, propiciando conexões entre eles.

A autora relata que essa proposta didática tem sido desenvolvida com os alunos do ensino básico e há percepção de que o reconhecimento de padrões existentes nos números, nas formas e no mundo a nossa volta é o início de uma exploração que auxilia os alunos a resolverem problemas, conduzindo a uma melhor compreensão da matemática e os tornando mais bem preparados para o trabalho em funções e álgebra, do que aqueles que não tiveram essa oportunidade.

Ainda do mesmo seminário II do SERP, destacamos a apresentação “O olhar do formador de professores para a pesquisa em resolução de problemas no Brasil”, da Professora Doutora Maria Ignez Diniz (2011). Seu trabalho despertou nossa atenção por causa do tema tratado: a relação entre a formação do professor de matemática e a resolução de problemas.

Diniz (2011) relata que, na década de 1980, o tema resolução de problemas foi difundido entre os educadores brasileiros a partir da divulgação de publicações americanas e por meio dos primeiros mestrados e doutorados de brasileiros orientados por pesquisadores daquele país. Essa foi a década em que a educação matemática se fortaleceu, porque os estudiosos buscaram entender e intervir no aperfeiçoamento de professores, tornando possível melhorar a aprendizagem dos alunos nessa área.

A pesquisadora conta que, da mesma forma como ocorreu nos Estados Unidos, outras influências, como a francesa, também chegaram ao Brasil e a Didática da Matemática ganha importância na tendência de compreender e investigar a construção de conceitos.

Conforme Diniz (2011), a resolução de problemas ficou restrita a grupos mais diretamente ligados à formação de professores nos estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Espírito Santo. Os primeiros trabalhos enfatizavam a heurística de Polya e utilizavam os mesmos problemas descritos no livro *A arte de resolver problemas.*

A resolução de problemas foi tratada como um tópico de ensino isolado, supondo-se que o desenvolvimento das habilidades para resolver problemas se realizasse pela aprendizagem de conceitos e procedimentos básicos praticados na resolução de problemas. Acreditava-se ser possível resolver problemas municiando os alunos com estratégias a partir de diferentes tipos de problemas novos e não rotineiros. A resolução de problemas foi tratada com algo independente das ideias essenciais da Matemática, da compreensão e dos processos de aprendizagem.

Ainda, segundo Diniz (2011), no fim dos anos 1990, outras pesquisas sobre resolução de problemas chegam ao Brasil e, com elas, seu significado entre os formadores de professores se amplia e se diversifica, graças a trabalhos a respeito de crenças de alunos e de professores, com o aumento de intercâmbio entre pesquisadores portugueses, franceses e brasileiros.

Nesse contexto, consolidam-se os grupos de formação de professores, destacando o projeto Fundão da UFRJ, o GTERP, da UNESP-Rio Claro, o CAEM, do IME/USP, e o Mathema como um grupo de fora das Universidades. A autora destaca o fato relevante que foi a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (os PCNs), como documento de caráter oficial em que se encontram orientações para o ensino pautado pela resolução de problemas.

Diniz (2011, p. 9) ressalta que...

> [...] Apesar de os objetivos da pesquisa em educação matemática serem a melhoria do ensino, a pesquisa em resolução de problemas nem sempre se revelou de forma determinante nos modelos de formação de professores no Brasil, ao longo dos últimos trinta anos. Observa-se que há um distanciamento significativo entre a pesquisa e o que chega aos professores de forma direta ou pela formação continuada.

E Diniz (2011, p. 9) conclui com esta afirmação:

> A formação continuada que espelha a pesquisa no Brasil ficou restrita aos próprios grupos de pesquisa, sem canais efetivos para que os resultados das investigações se reflitam em mudanças significativas na formação da maioria dos professores de matemática do Brasil.

5.3 Outros estudos

Dentre as leituras realizadas a respeito de resolução de problemas, encontramos outros estudos que utilizaram esse tema para suas investigações, dentre os quais está a tese *Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas*: Uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii, de Gladys Denise Wielewski (2005), da PUC-SP, sob a orientação do Professor Doutor Michael Otte.

Essa tese pretendeu indicar características e dimensões do pensamento matemático, em termos teóricos e experimentais, que pudessem ser úteis aos professores, quanto ao processo de ensino, ao desenvolvimento de ideias matemáticas e ao delineamento do contexto de aprendizagem. O aporte teórico foi de Krutetskii (1976) e outros como Gowers (2000) e Poincaré (1908).

Segundo Wielewski (2005), sua investigação foi exploratória e envolveu treze estudantes da Universidade Federal de Mato Grosso, sendo nove do curso de licenciatura plena em matemática e quatro, do curso de ciências de computação. A pesquisa foi composta por três momentos: o primeiro, foi destinado a responder um questionário com perguntas subjetivas acerca da matemática e das preferências dos respondentes quanto à forma de pensar e de lidar com essa ciência; o segundo foi reservado à resolução de treze problemas matemáticos; e o último consistia em responder a outro questionário com perguntas subjetivas para se obterem informações acerca da experiência desses estudantes na atividade de resolução de problemas.

Como resultado, chegou-se à conclusão de que o pensamento matemático deve ser considerado sob diferentes parâmetros, os quais podem auxiliar na caracterização mais completa do pensamento matemático.

Há também trabalhos realizados pelo Grupo de Pesquisas em Psicologia da Educação Matemática da FE-UNICAMP, sob a coordenação da Professora Doutora Márcia Regina Ferreira de Brito, que trata basicamente da aplicação da Psicologia Educacional à Matemática, prioritariamente à Matemática Escolar.

Segundo Brito (2011, p. 37), a solução de problemas não é considerada um tipo de aprendizagem, mas sim, a reorganização dos conceitos e princípios na estrutura cognitiva, como se explica a seguir:

> A solução de problemas é entendida como uma forma complexa de combinação dos mecanismos cognitivos disponibilizados a partir do momento em que o sujeito se depara com uma situação para a qual precisa buscar alternativas de solução.
> Pode ser definida como um processo cognitivo que visa transformar uma dada situação em uma situação dirigida a um objetivo, quando um método óbvio de solução não está disponível para o solucionador. Apresenta quatro características básicas: é cognitiva, é um processo, é dirigida a um objetivo e é pessoal, pois depende do conhecimento prévio do individuo. A solução de problemas é altamente dependente dos conceitos e princípios anteriormente aprendidos. Esses, disponibilizados na memória e combinados de forma a levar ao resultado final, permitem que a estrutura cognitiva, se amplie e inclua elementos novos, sejam os

> relativos ao conhecimento declarativo ou ao conhecimento de procedimentos.

Ainda, segundo a mesma autora (2011, p. 38),

> [...] pela estreita relação entre a solução de problemas (do ponto de vista da psicologia) e as exigências das disciplinas escolares, o entendimento sobre a solução de problemas teve um grande avanço; para isso, contribuíram os estudos sobre inteligência, o desenvolvimento de testes psicológicos e toda a pesquisa desenvolvida ao longo do século passado.

Brito (2011) afirma que a pesquisa sobre a solução de problemas é importante porque pode ressaltar diversas reações e processos cognitivos superiores, como a percepção, a representação, a imaginação e a formação de imagem mental, a retenção e a recuperação de informações contidas na memória. A autora cita Krutetskii (1976), quando esse destaca que os indivíduos matematicamente habilidosos, ao elaborarem a representação de um problema, são capazes de diferenciar três elementos em um problema: as relações que possuem significado matemático básico; as quantidades não essenciais para aquele tipo de problema, mas que são essenciais naquela variante; as quantidades supérfluas para aquele problema específico.

A mesma autora afirma que o estudo das habilidades e da inteligência sempre ocupou um papel central no grupo desde 1992 e, ao definir habilidade, ela mostra que existem diferentes tipos de habilidades, tais como:

- Habilidade analítica: analisar teorias, criticar experimentos, avaliar conceitos.
- Habilidade criativa: gerar novas teorias, elaborar novos experimentos, imaginar como as teorias necessitariam ser modificadas, se certos pressupostos mudassem.
- Habilidade prática: usar conceitos, teorias e dados para conhecer e melhorar a vida cotidiana e o contexto de inserção.

Brito (2011) lamenta o fato de a escola estar mais interessada em desenvolver a habilidade analítica e o pensamento crítico, esquecendo-se de outros aspectos. E encerra seu texto, exemplificando as habilidades matemáticas:

- habilidade para pensar logicamente, na área das relações espaciais e quantitativas, dos números e símbolos alfabéticos e para pensar em símbolos matemáticos;
- habilidade para generalizar de forma abrangente e rápida os conteúdos matemáticos, as relações e as operações;
- habilidade para resumir os processos matemáticos e os sistemas correspondentes de operações, além da habilidade para pensar por meio de estruturas reduzidas.

Em pesquisa recentemente publicada – "Resolução de problemas em currículos de Matemática em alguns países da América Latina" (2013), Pires et al.[19] apresentam os resultados de um estudo comparativo a partir da análise dos currículos prescritos por órgãos oficiais destes países: Chile, Paraguai, Argentina e Uruguai. Cada um desses países foi confrontado com as sugestões do Ministério da Educação do Brasil, sempre em busca de dados comuns, relacionados à resolução de problemas.

Esses estudos referem-se à recomendação do uso da resolução de problemas como metodologia do ensino da Matemática, por haver carência de dados a esse respeito, e os objetivos propostos para a pesquisa foram os seguintes:

- identificar impactos havidos quando da formulação dos currículos prescritos e praticados nesses países;
- identificar aspectos comuns e particularidades nos currículos de Matemática desses países e as formas de organização desses;
- buscar dados que revelem adesão/rejeição dos professores às propostas oficiais; e

[19] Esta pesquisa foi realizada sob a coordenação da Profa. Dra. Célia Maria Carolino Pires e contou com os seguintes participantes: Dermeval Santos Cerqueira, Emilio Celso de Oliveira, Luciane S. Rosembaum e Marcelo de Oliveira Dias, em projeto financiado pelo CNPq e desenvolvido dentro do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática na PUC-SP.

- encontrar indícios de que tem havido de forma efetiva a aplicação do que consta dos currículos propostos oficialmente.

Especialmente, no que se refere ao uso do recurso didático da resolução de problemas, os resultados apontados nesse estudo indicam que têm havido "[...] interpretações equivocadas de concepções pedagógicas [...] de ideias inovadoras [...]" (BRASIL, 1997, p. 22) e, em consequência, "[...] a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva da resolução de problemas ainda são bastante desconhecidos (sic)." (idem, ibidem).

Dentre as recomendações feitas pelo MEC em documentos do ensino fundamental, os professores entrevistados na pesquisa revelam que há confusão metodológica e terminológica quanto ao modo como devem utilizar a resolução de problemas em sala de aula. Além dessa crítica os professores revelam que há situações em que os alunos não reconhecem o exemplo apresentado como um problema realmente, ao passo que, em outras situações, as dificuldades parecem inexistentes, dados a diferença entre o desenvolvimento intelectual e o nível de conhecimentos deles.

No documento do MEC (BRASIL, 1998, p. 41), está explícito que a situação problema não deve ser vista como uma definição dada, mas sim, como o ponto de partida para um estudo e que os problemas não devem ser vistos como "[...] um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório". Destacam também que "[...] aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema"; e que os conceitos matemáticos devem ser sempre articulados com outros já conhecidos, graças à generalização que o aluno se torna capaz de operar.

Importa aqui destacar que, nesse mesmo documento (BRASIL, 1998), está explicitamente explicado que a metodologia de resolução de problemas não deve ser considerada como uma atividade desenvolvida paralelamente, e sim, como uma orientação da aprendizagem, pois sua função deve ser a de favorecer a apreensão de conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas propriamente ditas.

Desse modo, a situação problema proposta deve ser o ponto de partida de uma atividade e está longe de ser sua definição, já que o aluno deverá partir do que se propõe e utilizar seus conhecimentos prévios para elaborar um ou muitos procedimentos de resolução, mediante tentativas, simulações, formulações de hipóteses, elaborações específicas de estratégias etc. que sejam facilitadoras dessa abordagem que lhe foi proposta.

No mesmo documento, há orientações para elaboração de estratégias à disposição do professor que opta pela resolução de problemas, dando-lhe diretrizes para utilizar essa metodologia em aulas, para que o aluno possa optar por diferentes procedimentos – realizar simulações e tentativas ou, ainda, formular hipóteses –; comparar suas hipóteses com as de outros colegas; validar procedimentos mais adequados etc.

Usando esse tipo de raciocínio, o mais importante não será que o aluno acerte o resultado final, mas sim, que seja capaz de questionar o problema e saber o passo a passo para sua resolução, usando nesse procedimento sua reflexão e construindo o seu conhecimento.

Espera-se que o uso de sua reflexão e a construção do seu conhecimento possam contribuir paulatinamente para que o aluno aprenda a questionar e ir em busca de diferentes soluções para o mesmo problema proposto, desse modo, ampliando significativamente seu raciocínio matemático.

Há também no texto do MEC (1988) recomendação expressa para que esse modo de raciocinar seja estimulado no ensino fundamental, em seus dois níveis. E, para tanto, indicam que esse recurso metodológico seja utilizado, para substituir o uso mecânico de um raciocínio mais elementar que possibilite ao aluno elaborar jogos intelectuais que lhes permitam estimular seu interesse e aguçar sua curiosidade e seu espírito de investigação. O resultado desse estímulo será a melhor articulação entre conceitos, procedimento e atitudes do aluno.

Seguindo essa linha metodológica, os alunos deverão ser capazes de:

a) resolver os problemas por seus próprios meios;
b) elaborar questões a respeito;
c) usar estratégias criativas – ou se limitar às soluções convencionais.
d) gerenciar seus conhecimentos em relação a procedimentos e conceitos matemáticos;
e) ampliar sua visão do mundo, aí incluídos seus conceitos sobre problemas e sobre a Matemática em si;

f) desenvolver sua autoconfiança.

Em relação ao Ensino Médio, os PCNs propõem que a resolução de problemas esteja vinculada a competências e habilidades referentes *a investigação e compreensão*, quais sejam as de saber:

a) Identificar o problema, compreendendo seu enunciado e formulando questões pertinentes em relação a ele;
b) Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
c) Formular hipóteses e conseguir prever seus resultados;
d) Selecionar as estratégias viáveis para a resolução do problema;
e) Interpretar e criticar resultados;
f) Utilizar e distinguir raciocínios indutivos e dedutivos;
g) Fazer e validar hipóteses, conseguindo relacionar, experimentar e recorrer a modelos, esboços, fatos conhecidos etc.; e
h) Discutir ideias e elaborar argumentos convincentes.

Os pesquisadores que elaboraram essa publicação acreditam que foi dada pouca ênfase à resolução de problemas propriamente dita, pois a preocupação maior do MEC diz respeito a questões relacionadas ao contexto e à interdisciplinaridade. Todavia há questões interessantes a respeito de resolução de problemas, modelagem matemática e metodologia de projetos.

Em relação à metodologia da resolução de problemas, os pesquisadores destacam a perspectiva desafiadora, tal como é sugerida, a qual proporciona o rompimento de limitações a problemas fechados e amplia o espaço para abordagens de problemas abertos (situações problema) que conduzem o aluno à realização de testagem e a tentativa de hipóteses e validação de sua investigação.

Considerações Finais

De todos os seres que vivem no planeta Terra, os homens são os únicos que moldam a natureza, para que essa lhes seja útil a seu modo. Assim foi desde os primórdios da humanidade e, hoje, o mundo se encontra totalmente transformado pela ciência e pela tecnologia, graças ao conhecimento e a suas aplicações. A matemática dá suporte a essas modificações.

No início da civilização, muitos povos se fixavam em torno de grandes rios, como foi caso da Mesopotâmia, deixando ser nômades. Esses povos desenvolveram tecnologias para tornar eficientes a produção de alimentos e seus utensílios em geral. À medida que a população crescia, mais necessidades surgiam e essas demandas exigiam mais conhecimentos e, para atender a toda essa demanda, houve necessidade de se desenvolver a palavra escrita e a Matemática.

Diferentemente das necessidades da Matemática para fins práticos – como ocorria na Babilônia –, na Grécia, a preocupação era a fundamentação filosófica dos conhecimentos matemáticos. Exemplo desse aspecto do pensamento grego é a proposta feita por Anaxágoras, no século V a. C., para a construção de um quadrado que tivesse a mesma área de um círculo.

Desse modo desde o início e de problema em problema de ordem prática, a Matemática – como campo de conhecimento – foi sendo tecida e diferentes civilizações contribuíram para essa tessitura: a babilônica, a egípcia, a chinesa, a hindu, a árabe etc. Assim, essa ciência progrediu até os dias de hoje, tornou-se universal e, atualmente, é tão importante que, se algum país desejar alcançar desenvolvimento econômico e tecnologia, não poderá prescindir do ensino e da aprendizagem – eficaz e eficiente – da Matemática.

Apesar de o problema sempre ter sido o veículo para o ensino da Matemática, como mostra a história desse estudo, somente agora recentemente (na década de 1980) essa metodologia mereceu atenção maior por parte da comunidade dos professores americanos dessa disciplina.

Durante as décadas de 1980 e 1990, no século XX, a metodologia de resolução de problemas foi um dos temas mais pesquisados e estudados nos Estados Unidos, conforme lembra Lester (1994), mas, possivelmente, esse tenha sido o tópico menos compreendido do currículo matemático.

Essa dificuldade está refletida na introdução do nosso estudo, quando mostramos situações em que os professores deixam transparecer equívocos em relação à metodologia de resolução de problemas.

A importância da resolução de problemas como metodologia de ensino repousa no fato de que ela possibilita a mobilização de competências e habilidades, como exposto na análise feita por Niss (2006), na introdução do nosso trabalho, ao resolver um problema. Essas competências podem ser desenvolvidas por meio da educação, como afirma Krutetskii (1976).

Além disso, para Schoenfeld (1992), a resolução de problemas pode propiciar a metacognição, que consiste no monitoramento e na regulação do próprio pensamento e que são, respectivamente, a capacidade de estar ciente de como e por que fazer alguma coisa, além do modo como escolher fazer algo ou como se decidir a fazer mudanças.

Esse pesquisador lembra que os bons resolvedores de problemas monitoram seu raciocínio frequente e automaticamente e reconhecem quando estão emperrados ou quando não compreendem plenamente a situação proposta. Eles tomam decisões conscientes para trocar estratégias; repensam o problema; procuram obter conhecimento de conteúdos relacionados que poderiam ajudar a encontrar uma solução ou, simplesmente, reiniciam o processo.

O objetivo do nosso estudo foi trazer ideias já desenvolvidas na comunidade de pesquisadores matemáticos e algumas práticas já existentes sobre resolução de problemas, tornando-as acessíveis aos professores que estão em formação ou em sala de aula, que trabalham com ensino da matemática.

Nesse sentido, por meio de um estudo bibliográfico, buscamos mostrar os diferentes pontos de vista da metodologia da resolução de problemas, para o ensino da Matemática e dois países despertaram nosso interesse quanto ao uso desse recurso: os Estados Unidos e a China.

Quando optamos por um estudo bibliográfico sobre resolução de problemas, os Estados Unidos despertaram nosso interesse por causa da existência de farto material de pesquisa nessa área, publicado por diversos consultores do NCTM, o principal órgão que estabelece padrões de como ensinar Matemática nesse país.

A China foi outra escolha nossa, por ser uma nação que tem chamado a atenção mundial por sua participação crescente na economia mundial nos últimos anos e que, também, tem despertado interesse a respeito do modo como vem sendo tratado seu sistema educacional.

Outra razão da escolha desses dois países está relacionada ao aspecto cultural que, segundo Schoenfeld (2007), influi nos sistemas educacionais. Os Estados Unidos é um país com quinhentos anos de história e capitalista; a China é um país milenar que, nos últimos cem anos, passou por importantes transformações políticas e, atualmente, está indo ao encontro do capitalismo, embora ainda mantenha fortes traços do comunismo.

Ao oferecer diferentes pontos de vista em relação à resolução de problemas, ensejamos proporcionar aos professores em formação e em salas de aula a percepção de que, por meio dessa estratégia, eles podem alcançar uma compreensão matemática mais profunda que lhes permite uma atuação mais abrangente como professor e contribui para que seus alunos possam desenvolver habilidades e competências com o aprender fazendo, desse modo, capacitando-os a serem cidadãos do século XXI.

Nesse contexto, no Capítulo 1, fizemos um estudo bibliográfico apoiado em teóricos americanos, cujas pesquisas divulgadas muito nos esclareceram em relação à metodologia e vimos que a resolução de problemas não é uma metodologia única, pois é composta de várias vertentes e por contribuições do campo psicológico e histórico, porque, sendo a educação um campo essencialmente humano, a resolução de problemas não seria imune às diversas transformações sociais e econômicas ocorridas nos séculos XX e, sobretudo, às tecnológicas do século XXI.

No Capítulo 2, iniciamos com o estudo de Kilpatrick (1985), quando ele introduz a noção do que é um problema, ao citar seis situações problema geradas por uma única expressão matemática. O autor também mostrou a importância do papel do professor no ensino da matemática no contexto da resolução de problemas. Influências políticas e econômicas são acrescidas a essa importância por Stanic e Kilpatrick (1989).

Vimos que o pai da resolução de problemas é Polya, matemático polonês que se refugiou nos Estados Unidos por causa da Segunda Guerra Mundial e, nesse país que o acolhei,, ele escreveu o livro A arte de resolver problemas, publicado em 1945, conhecido e citado por todos aqueles que pesquisam e estudam essa metodologia. Entretanto as recomendações feitas por Polya referentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática incluídas em seu livro não receberam a merecida consideração por estudiosos americanos.

Segundo Kilpatrick (1976), a comunidade da educação matemática americana começou a dar maior importância à metodologia da resolução de problemas quando conheceu o trabalho de Krutetkii (1976), com a tradução do seu livro *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, porque o psicólogo russo utilizou problemas matemáticos para conhecer as habilidades que são mobilizadas para resolver problemas e distinguir os indivíduos matematicamente habilidosos.

Nesse Capítulo apresentamos também o estudo feito por Schroeder e Lester (1989), que introduzem três enfoques diferentes quanto ao ensino da Matemática, utilizando a metodologia da resolução de problemas – o ensino sobre resolução de problemas, o ensino para resolver problemas e o ensino via resolução de problemas. Esses diferentes enfoques são o resultado das diferentes interpretações da expressão resolução de problemas.

Silver (1987) procurou situar a resolução de problemas matemáticos como uma teoria cognitiva para pesquisa.

Uma sequência de diretrizes para os professores norte-americanos foi publicada pelo NCTM em 1989, indicando o modo de utilizar resolução de problemas e muito material foi produzido na esteira desse esforço, culminando com a publicação dos Standards 2000, oficialmente conhecido como *Principles and Standards for School Mathematics*, no qual são enunciados seis Princípios (Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia); cinco

Padrões de Conteúdo (Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de Dados e Probabilidade); e cinco Padrões de Procedimento, dos quais o primeiro é a resolução de problemas e o segundo, raciocínio e prova; depois, comunicação, conexões e representação.

Mostramos ainda neste Capítulo o estudo de Van de Walle (2008), cujo livro é aborda as principais ideias sobre ensino, aprendizagem, planejamento e avaliação, além de sugerir estratégias pedagógicas e atividades baseadas em resolução de problemas que apoiam todo conteúdo da Matemática elementar.

Desse modo, conseguimos formar um quadro com as principais ideias relacionadas à resolução de problemas e percebemos que, longe de ser unânime, ela é um amálgama de diferentes pontos de vista sobre o tema, como mostra Schoenfeld (2007), em *Problem Solving in the United States*, 1970-2008.

Os Capítulos 3 e 4 originaram-se graças à sugestão da Professora Onuchic, por ocasião da nossa qualificação, quando nos recomendou a leitura do trabalho Liping Ma (1999), que concluiu seu doutorado em 1999, ao fazer um comparativo dos conhecimentos matemáticos de professores americanos do ensino básico com os conhecimentos matemáticos dos professores chineses do mesmo nível de ensino.

Mostramos um cenário a respeito do ensino da Matemática, no qual percebemos, por relatos da história dessa ciência na China, que os chineses puderam ter conhecimentos da matemática hindu e utilizavam sua escrita, para estudá-la até o século XIX. A escrita ocidental, usando os algarismos indo-arábicos, começou a ser introduzida em escolas chinesas pelo missionário americano Calvin Wilson Mateer, durante os anos de 1880.

Em seu livro texto, esse estudioso apresentou o sistema de numeração indo-arábico aos chineses, cuidadosa e profundamente, além dos algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão. É desse pesquisador a composição de todos os tipos de problemas práticos que se enquadravam facilmente na vida cotidiana chinesa. Ma (2010) chamou essa época de “aurora da moderna educação matemática chinesa”.

Durante a década de 1920, educação chinesa recebeu também uma contribuição do pedagogo americano John Dewey. Suas ideias influenciaram fortemente os estudantes chineses que estudavam nos Estados Unidos e eles, ao retornarem à China, acabavam difundindo toda a base filosófica de Dewey, que tinha algumas semelhanças com a filosofia de Confúcio, ao defender a aprendizagem por intermédio da atividade pessoal do aluno.

Zhang (2005) relata que, a partir de 1949, quando o regime comunista se instalou na China, o modelo adotado para a educação matemática foi o soviético, com ênfase rigorosa em lógica e dedução e o ensino era centrado em três elementos: professor, currículo e metodologia de ensino.

Em 1963, o sistema educacional chinês foi discutido e novas diretrizes foram criadas, baseando-se no modelo soviético e considerando as condições práticas chinesas. As novas ideias enfatizavam as habilidades básicas e tinham como meta desenvolver habilidades como cálculo, imaginação espacial, lógica e análise.

Os dez anos da revolução cultural (de 1966 a 1976) destruíram a educação normal e as atividades de ensino. E, depois de 1976, a Matemática elementar retornou aos moldes de antes de 1963, melhorando o nível da qualidade do ensino e restaurando o sistema nacional de exames para admissão nas universidades. O slogan da resolução de problemas alcançou a China.

Desse modo, as ideias de Polya formaram o material mais estudado por professores chineses. Depois de 1990, a nação inteira fez da educação uma prioridade, para levar o país a ocupar as primeiras posições na economia mundial, por meio da tecnologia e educação.

Percebemos que o ensino da Matemática na China moderna teve três fases de influências principais: a norte-americana no início, depois a soviética; e, novamente, a americana com as ideias da resolução de problemas de Polya. Apesar de a educação não ter sido obrigatória na China até 1904, a cultura chinesa sempre acentuou a importância do ensino e do professor.

Ma (2010) afirma que, até hoje, os ensinamentos de Confúcio permanecem com uma parte da educação chinesa.

Ma ressalta uma característica dos professores chineses: sua adesão ao esforço de estudar metodologia e desenvolver estratégias de resolução de problemas matemáticos. O autor lembra que existe uma troca de experiência dos professores em resolução de problemas, cujo foco é desenvolver estratégias específicas para a resolução de problemas. E mais: os professores mais experientes tutelam o professor no início da carreira, inclusive podendo assistir aulas um do outro, com produção de relatórios para serem discutidos.

A tese de Ma (1999) procurou entender os resultados desfavoráveis dos alunos americanos nos testes internacionais em Matemática, em relação a outros países e comparou a formação matemática dos professores de matemática americanos e chineses, quanto aos tópicos da Matemática Elementar que eles devem ensinar aos alunos.

No decorrer de seu estudo, Ma (1999) introduziu um novo conceito relativo ao conhecimento matemático: o conhecimento profundo da Matemática Fundamental, que tem quatro características: a conectividade, as múltiplas perspectivas, as ideias básicas e a coerência longitudinal.

Para mostrar como esse ensino se realiza, escolhemos uma atividade descrita no seu livro que, a partir da proposta de um problema e exclusivamente por meio de uma expressão matemática, sem qualquer contextualização, Ma propõe a professores americanos e chineses, a formulação de situações problema que as que contextualizem.

Essa situação nos remete àquela descrita no primeiro Capítulo, quando Kilpatrick (1985) indaga “o que é um problema?”. Vimos, então, que muitas ideias divulgadas pela comunidade americana são, de alguma forma, adotadas por professores chineses no seu ensino.

No Capítulo 5, iniciamos com breves notas sobre o curso de formação de professores de Matemática no Brasil e apresentamos a evolução da Resolução de Problemas, focando principalmente nos trabalhos do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – o GTERP – do Curso de Pós-graduação da Unesp de Rio Claro. Esse curso teve início na década de 1980, sob a orientação da Professora Onuchic. Seminários foram organizados por esse grupo, para discutir resultados, para aprofundar os estudos sobre o tema e integrar pósgraduandos, professores, alunos e pesquisadores da área da Educação Matemática.

Encontramos poucas teses ou dissertações que tratam da formação matemática do futuro professor dessa disciplina com foco na resolução de problemas. Desses trabalhos, foram destacados dois: o da Professora Doutora Célia Barros Nunes, sob a orientação da Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic, e outro do Professor Doutor Manoel dos Santos Costa, sob a orientação da Professora Doutora Norma Suely Gomes Allevato.

Expusemos os resultados da tese da pesquisadora Gladys Denise Wielewski, sob a orientação do Professor Doutor Michael Otte, da PUC-SP, que enfatizou o pensamento matemático segundo o ponto de vista do psicólogo russo Krutetskii e, posteriormente, o ponto de vista da Professora Doutora Márcia Regina Ferreira de Brito, da Unicamp, acerca das habilidades envolvidas na resolução de problemas, sob o ponto de vista da Psicologia da Educação.

Com este estudo, esperamos contribuir com elementos teóricos sobre resolução de problemas, os quais possibilitem ao professor de Matemática – tanto aqueles ainda em formação, quanto os demais já em salas de aula – perceber a potencialidade dessa estratégia, pois não se trata de uma via de mão única, que deve ser percorrida com espírito de investigador, para descobrir as ramificações que possam conduzir ao conhecimento significativo da dessa ciência: ao mesmo tempo em que o professor pode aproveitar dos elementos teóricos, que ele consiga revertê-lo para a sala de aula.

E, desse modo, que se rompam definitivamente as barreiras que opõem gabinetes de órgãos públicos ligados à educação, a academia e o professor na sala de aula.

Reflexões Finais

Nossa pesquisa buscou investigar se resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas dos futuros professores de matemática, em parte, essa pergunta foi respondida, porque, ao estudar a metodologia, percebemos que ela pode proporcionar situações que contribuam para o desenvolvimento de sua atuação docente.

Entretanto esse fato pode implicar mudanças de atitudes, tais como: os professores dos cursos de licenciatura poderão se adaptar aos novos ventos? E, segundo as palavras de Romanatto (2008), o professor precisa vivenciar a resolução de problemas, para poder ensinar Matemática por meio dessa estratégia, pois ensinamos como aprendemos.

Nossa cultura escolar pode não propiciar aos professores um ambiente semelhante ao da China, pois, nesse país, os professores discutem suas experiências de salas de aula e trocam experiências entre si, além de que os professores chineses iniciantes são tutelados por aqueles já mais experientes. E, ainda mais, o professor iniciante entra para a carreira docente sob a orientação de um colega mais experiente, podendo até assistir às aulas dele.

No Brasil, como afirmou Diniz (2011), até as pesquisas ficam restritas a seus respectivos grupos. A mudança de paradigmas necessita ser provocada pelos grupos de pesquisadores, divulgando ainda mais seus resultados, para que esses alcancem as salas de aula.

Esta tese revela também que diferenças culturais influenciam no ensino da disciplina e os chineses se concentram mais em buscar insights a partir de contextos, enquanto os americanos são mais analíticos e buscam experiências para testar hipóteses, justificando perspectivas diferentes ao adotar a resolução de problemas.

Por outro lado, mostramos que o tema resolução de problemas carece de mais elementos que exponham a potencialidade dessa estratégia no ensino da Matemática, o que aponta para a necessidade de outras pesquisas que possam contribuir para a maior abrangência no ensino e na aprendizagem dessa ciência.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. (2004). Novas reflexes sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (orgs.). **Educação Matemática: Pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez. p. 213-231.

ARANHA, M. L. A. (2006). **História da Educação e da Pedagogia:** Geral e Brasil. 3ª. ed. rev. e ampl. São Paulo: Moderna.

BOYER, C. B. (2002). **História da matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda.

BRASIL. (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais**. Matemática: 1º e 2º Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB.

BRASIL. (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB.

BRASIL. (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB.

BRASIL. (2006). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, vol. 2. Brasília: MEC/SEB.

BRITO, M. R. F. (2010). Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (org.). **Solução de problemas e a matemática escolar.** 2ª ed. Campinas (SP): Editoras Alínea.

CERQUEIRA, D. S. (2012). **Um estudo comparativo entre Brasil e Chile sobre a educação matemática e sua influência nos currículos de Matemática desses países.** Tese de Doutorado. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

COELHO, M. A. V. M. P.; CARVALHO, D. L. (2008). **A resolução de problemas: Uma prática pedagógica inovadora?** Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/31ra/trabalhos/GT19-3178. Acesso em 20/06/2013.

COSTA, M. S. (2012). **Ensino-aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas**: Uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de matemática. 292p. Tese de doutorado em ensino de Ciências e Matemática. Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo.

DELORS, J**.** (1998) **Educação, um tesouro a descobrir**. Relatório para UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI, 1998. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ue000009.pdf. Acesso: 01/07/2012.

DEWEY, J. (1910). **How we think.** New York (USA): The Barnes & Noble Library of Essential Reading.

DIAS, M. O. (2012). **Educação matemática e sua influência nos currículos prescritos e praticados:** Um estudo comparativo entre Brasil e Paraguai. Tese de Doutorado. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

DINIZ, M. I. (2008). Por que resolução de problemas. In: **I SERP - I Seminário em Resolução de Problemas. UNESP**. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos.html. Acesso: 30/04/2012

_______. (2011). O olhar do formador de professores para a pesquisa em resolução de problemas no Brasil. In: **II SERP – II Seminário em Resolução de Problemas.** Disponível em: www2.rc.unesp.br/serp/. Acesso: 30/04/2012.

EVES, H. (2002). **Introdução à historia da matemática**. 3ª ed. Campinas (SP): Editora da UNICAMP, 844p.

GADOTTI, M. (1997) **História das ideias pedagógicas**. Série Educação. 5ª. Ed. São Paulo: Ática.

HOYT, M. W. (2006) John Dewey's legacy to China and the problems in Chinese society. In: **Transnational Curriculum Inquiry**. Disponível em: http://nitinat.library.ubc.ca/ojs/index.php/tci. Acesso em: 22/02/2013.

HSIA, Y. W. (2006). **A utilização do livro didático pelo aluno ao estudar Integral**. Dissertação de mestrado. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

KHAN, S. (2013). Basta de ensino tradicional. In **Scientific American Brasil-Portugal**, Ano 11, n. 136.

KILPATRICK, J. (1985). A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. In: Silver, E. A (Ed.). **Teaching and Learning Mathematical Problem Solving**: Multiple Research Perspectives. New Jersey (USA): Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

KRULIK, S; REYS, R. (2010). **A resolução de problemas na matemática escolar**. 1ª. ed. São Paulo: Atual.

KRUTETSKII, V. A. (1976) **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Chicago (IL): The University of Chicago Press.

KUANG, K.; XIE, Y.; ZHANG, Q.; SONG, N. (2012) Development, Problems and Thoughts of new China (PRC)'S Mathematics Education. In: **12th International Congress on Mathematical Education**. 08/07-15/07. **COEX**, Seoul (Korea). Disponível em: http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0954.pdf. Acesso em: 30/09/2013.

LESTER JR., F. K. (1985). Methodological Considerations in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction. In: Silver, E. A. (Ed.) **Teaching and Learning Mathematical Problem Solving**: Multiple Research Perspectives. New Jersey (USA): Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

______. (1994). Musings about mathematical problem-solving research:1970-1994. **Journal for Research in Mathematics Education**. Vol. 25. Nº 6. 25th Anniversary Special Issue. p. 660-675. Published by: National Council of Teachers of Mathematics. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/749578. Acesso: 13/07/2010.

LIMA, G. L. (2012). **A Disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da Universidade de São Paulo**: Um estudo do seu desenvolvimento, de 1934 a 1994**.** Tese de Doutorado. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MA, L. (2009). **Saber e ensinar matemática elementar**. Lisboa: Gradiva. 276p.

______. (2010). **Knowing and teaching elementar mathematics**. Anniversary Edition. New York (USA): Routhledge. 199p.

NACARATO, A. M; PASSOS, C. L. B. (2007). As licenciaturas em matemática no estado de São Paulo. Horizontes, p. 169 – 180. Disponível em: http://www.usf.edu.br/itatiba/mestrado/educação/uploadAddress/Horizonte. Acesso: 30/07/2011

NCTM. (1980). **An Agenda for Action**: Recommendations for School Mathematics in the 1980´s. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (1991). **Professional Standards**: for School Mathematics. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (1995). **Assessment Standards for School Mathematics**. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2000). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

NISS, M. (2006). O projeto dinamarquês KOM e suas relações com a formação de professores. In: BORBA, M. C. (Org.) **Tendências internacionais em formação de professores de Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica.

NUNES, C. B. (2010). **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas**: Perspectivas didático-pedagógicas-matemáticas na formação inicial de professores de Matemática. Tese de doutorado no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP-Rio Claro, SP.

OLIVEIRA, E. C. (2013). **Impactos da educação matemática nos currículos prescritos e praticados na Argentina e no Brasil.** Tese de Doutorado. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. (2011) **Pesquisa e resolução de problemas**: Caminhos, avanços e novas perspectivas. Rio Claro (SP). **Bolema**. v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulos.

ONUCHIC, L. R. (2008). **I SERP** – Palestra de Encerramento: Uma história da resolução de problemas no Brasil e no mundo. Disponível em: www.rc.unesp.br/serp. Acesso: 30/07/2011

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. (2004). **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org). **Educação matemática**: Pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez. p. 213-231

PAIVA, M. A. V. Saberes do professor de matemática. **Educação Matemática em Revista**. Ano 9, edição especial, p. 95-104, mar. 2002.

PIRES, C. M. C; CERQUEIRA, D. S.; OLIVEIRA, E. C.; ROSENBAUM, L. S.; DIAS, M. O. (2013). R**esolução de problemas em currículos de matemática de alguns países da américa latina**. No prelo.

PIRES, C. M. C. (2000). Novos desafios para os cursos de licenciatura em matemática. **Educação Matemática em Revista**. Ano 7, nº 8, p. 10-15, jun. 2000.

_______ (2002). Reflexões sobre os cursos de licenciatura em matemática. **Educação Matemática em Revista.** Ano 9, edição especial, p. 44-56, mar. 2002

POLYA, G. O. (1977) **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 203p.

______. (1962/65) **Mathematical discovery**. Wiley, Vol. 1 e. 2.

______. (1985) O ensino por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**. n. 7, p. 11-16. São Paulo.

______. (1987) Os dez mandamentos para professores. **Revista do Professor de Matemática**. n. 10, p. 2-10.

______. (2010) Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S; REYS, R. **A resolução de problemas na matemática escolar**. 1ª. ed. São Paulo: Atual.

POZO, J. I. (org.) (1998). **A solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed.

REIS, M. M. V.; ZUFFI, E. M. (2007). Estudo de um caso de implantação da metodologia de resolução de problemas no ensino médio. **Bolema**. Rio Claro (SP). Ano 20, p. 113-137.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas salas de aula de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p. 299-311, mai. 2012. Disponível em: http://www.reveduc.ufscar.br. Acesso: 22/07/2012.

_______. Resolução de problema na formação de professores e pesquisadores**. I SERP.** Rio Claro: outubro/2008. Disponível em: www.rc.unesp.br/serp/. Acesso: 30/07/2011.

SANTOS, I. B. (2007). Edward Lee Thorndike e a conformação de um novo padrão pedagógico para o ensino da matemática – Estados Unidos, primeiras décadas do século XX. Disponível em: www.sbem.com.br/files/ix enem. Acesso: 09/09/2012.

SCHOENFELD, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: Research and theory, practice and politics. **ZDM Mathematics Education**. Karlsruhe. V. 39. p. 537-551. Disponível em: http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario. Acesso: 30/07/2011.

_______. (1992) Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making. In: D. Grouws (Ed.). **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning**. p. 334-470. New York (USA): MacMillan. Disponível em: http://hplengr.engr.wisc.edu/Math Schoenfeld.pdf. Acesso: 11/03/2011.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.) **New directions for elementary school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. p. 31-42.

SHULMAN, L. S. (1985) On Teaching Problem Solving and Solving the Problems of Teaching. In: SILVER, E. A (Ed.) **Teaching and learning mathematical problem solving**: Multiple research perspectives. New Jersey (USA): Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

SILVA, B. A**.** (2011). Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. In: **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 394-413.

SILVER, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. In: SILVER, E. A (Ed.) **Teaching and learning mathematical problem solving**: Multiple research perspectives. New Jersey (USA): Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. A. (1990) Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.) **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. V. 3, 3^{rd}. Ed. Reston, VA: NCTM, p. 1-22.

THOMPSON, A. G. (1985). Teacher´s conception of mathematics and the teaching of problem solving. In: Silver, E. A (Ed.) **Teaching and Learning Mathematical Problem Solving**: Multiple Research Perspectives. New Jersey (USA): Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

TÖRNER, G.; SCHOENFELD, A. H.; REISS, K. M. (2007). Problem solving around the world: Summing up the state of the art. **ZDM Mathematics Education**. V. 39: p. 353. Disponível em: http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario. Acesso em: 30/07/2011.

TU, R.; SHEN, W. Fundamental Focuses of Chinese Mathematics Education: Characteristics of Mathematics Teaching in China. **Journal of Mathematics Education**. December 2010. Vol. 3, nº 2, p. 160-169. Disponível em: http://educationforatoz.com/images/13.Rongbao_Tu_Wei_Shen.pdf. Acesso em: 10/11/2012.

VALLE, I. (2011). A Resolução de Problemas em Portugal: uma visão através do novo programa de matemática do ensino básico. In: **II SERP – II Seminário em resolução de problemas** – 2011. Disponivel em: http://www2.rc.unesp.br/gterp. Acesso: 13/09/2012

VAN DE WALLE, J. A; KARP, K. S.; BAY-WILLIAMS, J. M. (2008). **Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally**. 7th ed. Boston (MA): Pearson Education.

XIE, M. (2009) Mathematics Education Reform in Mainland China in the past sixty years: Reviews and Forecasts. In: **Journal of Mathematics Education**. June, Vol. 2 nº 1, pp. 121-130. Disponível em: http://educationforatoz.com/images/_9_Mingchu_Xie_Final.pdf. Acesso em: 10/11/2012

XIE, X. (2004) The cultivation of Problem-Solving and Reason in NCTM and Chinese National Standards. In: **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**. Oct. 12th. Disponível em: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/xuehuixie.pdf. Acesso em: 30/09/2013

WANG, Y. (2001) The Changing Educational Framework for the Teaching of Mathematics in China. In: **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**. May, 17th. Disponível em: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ywchinmt.pdf. Acesso em: 10/11/2012.

WIELEWSKI, G. D. (2005). **Aspectos do Pensamento Matemático na Resolução de Problemas**: Uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii. Tese de doutorado. Programa dos Estudos Pos-graduados em Educação Matemática. PUC-SP, São Paulo.

ZHANG, L. (2005). A Review of China's Elementary Mathematics Education. In: **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**. Oct., 25th. Disponível em: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/zhang.pdf. Acesso em: 10/11/2012

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. (2007). O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **Revista Iberoamericana de Educacion Matemática**. Septiembro de 2007, n.11, p.79-97