Zoraide Lúcia do Nascimento Padredi

As “Alavancas Meta” no discurso do professor de Álgebra Linear

Mestrado em Educação Matemática

PUC - SP

2003

Zoraide Lúcia do Nascimento Padredi

As “Alavancas Meta” no discurso do professor de Álgebra Linear

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob orientação da* ***Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado****.*

São Paulo

2003

Banca Examinadora

Aos meus pais (in memoriam), que sempre vibraram com as minhas realizações.
Aos meus filhos, genros, nora e netos.

AGRADECIMENTOS

A ***Deus***, refúgio e amparo nas horas mais difíceis dessa caminhada.

A minha orientadora, ***Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado***, por seu estímulo, compreensão e críticas construtivas, que possibilitaram o desenvolvimento dessa dissertação e o meu crescimento como aprendiz de pesquisadora.

Aos professores da banca examinadora, ***Professor Doutor Rômulo Lins*** e ***Professora Doutora Sônia Pitta Coelho***, pela atenção e pelas valiosas contribuições.

Aos amigos, ***Professor Doutor Vincenzo Bongiovanni***, ***Professor Drauzio Pires de Campos*** e ***Professor Tadeu Frutuoso Amado***, que sempre me incentivaram a retornar aos estudos e acompanharam esse trabalho.

À amiga e colega, ***Professora Elita Cezar Argemon***, que gentilmente realizou a revisão desse trabalho.

À ***Universidade Católica de Santos***, pelo apoio financeiro durante esses anos de Mestrado.

A todos os ***Professores do Programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP***, pela atenção e pelos conhecimentos adquiridos.

A todos os ***colegas da PUC-SP*** e da ***UNISANTOS***, pelo companheirismo e carinho durante esse percurso.

A Autora

RESUMO

Este trabalho objetivou investigar recursos “meta” sugeridos por professores para facilitar a compreensão da noção de base de um espaço vetorial. Foram realizadas entrevistas com 6 professores universitários. A análise dessas entrevistas utilizou como suporte teórico os trabalhos do grupo francês composto por Dorier, Robert, Robinet e Rogalski, sobre “alavancas meta”, assim como os princípios de Harel para ensino e aprendizagem da Álgebra Linear. Concluiu-se, com a indicação de diversos recursos “meta” que são passíveis de se tornarem alavancas para a compreensão dos alunos .

Palavras-chave: Álgebra Linear, base, metaconhecimento matemático, alavanca meta, entrevista.

ABSTRACT

The purpose of this work is to investigate “meta” resources suggested by teachers, to contribute to the students’ better comprehension of the notion of basis of vectorial space. In doing so, six teachers were interviewed. The analysis of the interviews supported by Dorier, Robert, Robinet and Rogalski ideas about “meta lever” and the Harel’s principles for the teaching and learning of Linear Algebra. The conclusion presents different Meta resources that could became “meta lever” for students’ better comprehension.

Key words: Linear Algebra, basis, metacognition, meta lever, interview.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A disciplina Álgebra Linear, nos últimos anos, tem sido foco de estudo de diversos pesquisadores da área de Educação Matemática, por ser uma disciplina que consta do currículo de diversos cursos, como: Ciências da Computação, Matemática, Física, Engenharia, entre outros. Além disso, o alto índice de reprovação constatado aqui no Brasil, conforme pesquisas realizadas na UNICAMP (in Celestino 2000), caracteriza-a como uma disciplina-problema. Essa caracterização não ocorre somente no Brasil, pois segundo Dorier e seu grupo (pesquisadores franceses), além do problema da abordagem das noções da Álgebra Linear, o formalismo, a generalização, a simplificação e a unificação inerentes à Álgebra Linear são também responsáveis pelas dificuldades apresentadas pelos alunos no ensino/aprendizagem dessa disciplina.

Esse grupo de pesquisadores franceses ressalta a necessidade de pesquisas a respeito da utilização de "alavancas meta" no ensino/aprendizagem da Álgebra Linear, alavancas essas que surgem principalmente no discurso de professores e autores de livros didáticos.

No capítulo I, além de construir a problemática e a justificativa dessa dissertação, apresento o referencial teórico "Alavanca Meta", desenvolvido por Jean Luc Dorier e seu grupo e as pesquisas realizadas por Harel. Esse referencial já foi utilizado por Araújo (2002) e atualmente está sendo utilizado por outros alunos do Programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP, pois existe um objetivo maior do grupo de pesquisa ao qual estou inserida, que é o de destacar possíveis alavancas meta sobre a noção de base, assim como investigar os efeitos dessas alavancas sobre a aprendizagem.

Com o objetivo de analisar os recursos “meta” que surgem no discurso de seis professores de Álgebra Linear sobre a noção de base de um espaço vetorial finitamente gerado, ainda no capítulo I apresento a metodologia, ressaltando a técnica e os procedimentos metodológicos utilizados para realizar essas entrevistas.

No capítulo II, elaboro um tópico guia e o analiso dentro da perspectiva de criar aos entrevistados um ambiente em que pudessem explanar de uma maneira espontânea a respeito dos itens selecionados. Ainda nesse capítulo, analiso as entrevistas de acordo com os itens do tópico guia, destacando as principais falas do professor, procurando propiciar ao leitor uma visão detalhada da entrevista e encerrando cada uma delas com uma conclusão parcial, onde destaco os recursos “meta” apresentados por esses professores, assim como algumas idéias interessantes que surgiram em seus discursos.

Finalmente, no capitulo III, apresento as conclusões, destacando os metaconhecimentos sugeridos, passíveis de se tornarem alavancas para a melhor compreensão dos alunos.

CAPÍTULO I

Problemática e objetivo

Nestes 28 anos em que trabalho com Álgebra Linear, em cursos como Licenciatura em Matemática e Ciências da Computação, tenho constatado a dificuldade que o aluno apresenta com sua aprendizagem. Essa preocupação me levou a integrar o grupo de estudos "Álgebra e Análise: especificidades, inter-relações e relações com outros domínios da matemática nos diversos níveis de ensino", dentro do qual se insere o subgrupo de estudos, cujo objetivo especifico é o de investigar questões relativas ao ensino/aprendizagem da Álgebra Linear.

As dificuldades apresentadas pelos alunos, ao enfrentarem um primeiro curso de Álgebra Linear, não ocorrem somente no Brasil (cf: pesquisa Unicamp, in Celestino, 2000), mas também em vários outros países. O livro "L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE EN QUESTION", editado por Jean Luc Dorier (1997), trata desse tema de forma abrangente, apresentando não só os resultados das pesquisas de Dorier como também de outros pesquisadores de diferentes países. Dentre as conclusões do livro em epígrafe, Jean Luc Dorier ressalta que, em relação às pesquisas a serem feitas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra Linear:

> Dois grandes eixos de pesquisa parecem se destacar para um futuro imediato: perseguir pesquisas sobre a utilização de alavanca meta e sobre a avaliação de seus efeitos reais sobre a aprendizagem, e (DORIER, 1997, p. 296)

Dorier reserva todo um capítulo do livro citado para esclarecimentos sobre o significado dado ao termo alavanca meta. Nele, o autor esclarece que quando no ensino se dão informações sobre o funcionamento da matemática, o uso de seus conceitos, em resumo, quando se fala SOBRE a matemática, se está utilizando um recurso meta (matemático), que poderá se tornar uma “alavanca“ para o aluno compreender a noção, o tema abordado. Quando esse recurso é passível de se tornar essa “alavanca”, o grupo de Dorier denomina-o alavanca meta.

Assim, o discurso do professor, ou a apresentação de um tema no livro didático, funcionará como alavanca meta, caso neles existam informações capazes de levar o aluno a uma reflexão sobre seus próprios conhecimentos, seus erros, seus procedimentos, ajudando-o na apreensão de uma nova noção matemática. É importante acrescentar que não só o discurso do professor, mas qualquer atividade proposta e/ou elaborada por ele, que facilite a compreensão de alguns alunos sobre uma noção, ou um tópico, são consideradas alavancas meta.

Além de evidenciar a importância das alavancas meta, Dorier apresenta algumas noções elementares da Álgebra Linear, que julga merecerem atenção dos pesquisadores, tais como: combinações lineares, dependência e independência linear:

> Até mesmo as noções elementares como aquelas de combinação linear ou independência e dependência lineares revelam conter um procedimento cognitivo talvez mais forte do que parecia à primeira vista. Nesse sentido, as análises do “terreno" e o estudo epistemológico permitem melhor “cercar” as dificuldades e suas origens. Este trabalho fica a prosseguir (DORIER, 1997, p. 297)

Essas noções estão ligadas intrinsecamente à noção de base de um espaço vetorial. Daí, a importância de investigações sobre as abordagens dadas à noção de base, quando de seu ensino, em um primeiro curso de álgebra linear.

Confirmando o que foi apontado por Dorier, os problemas de compreensão dos alunos sobre as noções elementares de Álgebra Linear têm sido objeto de estudo de alguns investigadores de Educação Matemática. Em especial, a noção de base de um espaço vetorial que mereceu a atenção de Amarildo M. Silva e Rômulo Lins, que apresentaram resultados de seus estudos no artigo “An analysis of the production of meaning for the notion of basis in Linear Álgebra” (2002).

Outro trabalho que trata da noção de base é a tese de doutorado de Ahmed Behaj, defendida em 1999, cujo título é "Elements de Structurations à propos de l'enseignement et l'apprentissage à long terme de l'algèbre linéaire". Nesse trabalho, Behaj (in Dorier, 1997) entrevista professores e alunos com o objetivo de analisar as diferentes ligações que se podem fazer com as noções elementares de espaço vetorial, subespaços vetoriais, famílias geradoras, livres, ligadas, base e dimensão. Segundo o autor, podem-se articular essas noções de diversas maneiras, por exemplo: uma base é uma família livre e geradora, mas também é uma família livre maximal ou uma família geradora minimal.

Por outro lado, é importante ressaltar que qualquer conhecimento “científico”, para ser ensinado, sofre uma transposição didática, isto é, passa por transformações realizadas para adaptá-lo ao ensino. Ahmed Behaj e Gilbert Arsac apresentaram uma pesquisa de título “La conception d’un cours d’Algèbre Linéaire” (1998), na qual eles discutiram a maior ou menor interferência de diferentes professores de Álgebra Linear na transposição didática desse assunto em seus cursos. Sob esse ponto de vista, investigaram a natureza e a hierarquia dos imperativos que condicionam a preparação do curso de Álgebra Linear, entrevistando professores de uma Universidade de Marrocos e chegando à seguinte conclusão:

> ...cada professor tem seu ponto de vista sobre a forma de elaborar um texto do saber, o que conduz a diferenças mesmo entre dois cursos que seguem o mesmo plano (de ensino)[1].(BEHAJ, A ARSAC, G., p. 362)

---

[1] Os termos entre parênteses foram por mim acrescentados para melhor compreensão do texto.

Essa investigação e a análise feita pelos autores revelaram que a autonomia de cada professor, tanto na elaboração de suas aulas quanto no desenvolvimento das mesmas, oscila de acordo com uma maior ou menor dependência do livro didático e da atividade de pesquisa do professor. O que os levou a concluir que o professor tem uma liberdade maior no preparo e desenvolvimento de suas aulas do que aquela prevista na teoria da ”transposição didática", desenvolvida por Chevallard (2001), pois segundo esse autor, “o professor não atua na transposição didática”, só faz adaptações.

Tendo em vista a importância da transposição didática, Claudia Araújo, em sua dissertação de mestrado (2002), analisou o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial em três livros didáticos, os mais utilizados em universidades tradicionais paulistas e chegou à conclusão de que havia pouco metaconhecimento matemático passível de se tornar alavanca meta para o estudante.

Se por um lado essa constatação de Araújo tenha dado conta da quase inexistência de possíveis alavancas meta nesse “veículo” importante da transposição didática, por outro lado, as considerações de BEHAJ/ARSAC sobre a possível interferência do professor na transposição da álgebra linear sugerem que haja possibilidade de se encontrar possíveis alavancas meta do assunto, desenvolvidas pelos professores.

A importância dada por Dorier às pesquisas sobre alavancas meta para o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, principalmente no que concerne às noções elementares, assim como os resultados de Araújo e a interferência do professor na transposição didática que foi destacada por Behaj e Arsac em suas pesquisas, levaram-me a considerar as seguintes questões:

1. Como o professor de Álgebra Linear aborda a noção de base em seu **discurso?**
2. Quais os metaconhecimentos evidenciados nesse **discurso**?
3. Quais desses metaconhecimentos podem ser destacados como possíveis **alavancas meta**?

Em função das questões levantadas acima, decidi investigar quais os metaconhecimentos matemáticos sobre base de um espaço vetorial surgem no discurso de professores de álgebra linear, e quais desses metaconhecimentos podem ser destacados como possíveis alavancas meta para o ensino/ aprendizagem da noção de base.

Fundamentação Teórica

Introdução ao quadro teórico

Esta introdução visa esclarecer a origem do termo metacognição e o significado desse termo, assumido ao longo do tempo, por diferentes pesquisadores do assunto, sejam eles da área de psicologia ou mais especificamente da área de matemática ou de educação matemática.

O conceito de “metacognição”, de acordo com Grangeat (1999), surgiu nos Estados Unidos nos anos setenta, com trabalhos sobre a memória humana. Jerome Brunner e JH. Flavell estão entre os pesquisadores que trabalharam no tema.

JH. Flavell (1985) foi o primeiro a definir “metacognição” como sendo “a cognição sobre a cognição”.

> A metacognição refere-se aos conhecimentos do sujeito relativos aos seus próprios processos e produtos cognitivos [...] Remete também para o controlo activo, a regulação e a orquestração desses processos. (FLAVELL in GRANGEAT et al, p. 22)

Flavell diferencia os metaconhecimentos em quatro categorias, de acordo com os objetos sobre os quais eles incidem: <u>sobre as pessoas</u> e o próprio indivíduo (representações que o indivíduo pode ter); <u>sobre as tarefas</u> (conhecer o fato de que, por exemplo, um texto de matemática não se lê da mesma maneira que um texto de romance); <u>sobre as estratégias</u> (onde os metaconhecimentos incidem sobre maneiras mais eficazes de resolver uma determinada atividade e sobre métodos de trabalho) e <u>sobre a interação</u> entre as três categorias anteriores.

Segundo Doly, a tese de Jean Piaget sobre “tomada de consciência” e “análise reflexiva” contribuiu para o conceito de metacognição de Flavell e de outros.

Apesar de o termo metacognição não estar presente nos trabalhos de Piaget, Doly destaca que esse termo se identifica parcialmente com a “tomada de consciência”, que explica as modalidades de passagem da inteligência prática de natureza sensório-motora à inteligência abstrata de natureza cognitiva e operatória.

> De uma inteligência que “tem êxito” (PIAGET, 1974b) através de uma acção inconsciente dela própria e das razões do seu êxito, o sujeito passa a uma inteligência “formal”, capaz de escolher e justificar a sua estratégia, que “compreende” como ela faz para fazer. O que supõe uma tomada de consciência quer das razões do êxito, quer dos fracassos ultrapassados e das estratégias e conhecimentos construídos. (DOLY in GRANGEAT et al, 1999, p. 27)

Doly interpreta a análise reflexiva de Piaget como sendo o nível de reflexão que o professor deve propiciar ao aluno, fazendo-o refletir sobre os seus procedimentos, as suas produções pessoais e depois, fazendo-o comparar umas às outras, para daí extrair regras, estratégias e conhecimentos eficazes.

As pesquisas realizadas por Piaget, que constam em sua obra “A tomada da consciência” (1974) e a análise reflexiva são também citadas por Aline Robert e Jacqueline Robinet (1996) como um trabalho precursor da metacognição em matemática:

> ...a idéia de abstração reflexiva como motor da construção do conhecimento. (PIAGET in ROBERT e ROBINET, 1996, p. 152)
>
> ...a análise reflexiva faz parte integrante do trabalho do matemático em alguns momentos de reorganização. (PIAGET e GARCIA in ROBERT e ROBINET, 1996, p. 152)

As autoras ressaltam, além do trabalho de Piaget, os de Polya sobre métodos e os de Glaeser sobre heurística. Esses autores, segundo Robert e Robinet, "...anteciparam as idéias muito próximas daquelas que nos interessam aqui sem necessariamente usar o vocabulário atual (metacognição)". (ROBERT e ROBINET, 1996 p. 152)

Polya criou um método para ajudar os alunos a adquirirem estratégias gerais para a resolução de problemas e auxiliar o professor a desenvolver nesses alunos essa capacidade. O professor, colocando-se no lugar do aluno e percebendo o seu ponto de vista, através de indagações e sugestões do tipo "Qual é a incógnita?", ou "Considere a incógnita" ou ainda "Quais são os dados?", entre outras (POLYA, 1978), poderá levar o aluno, indiretamente, a perceber as operações mentais típicas, úteis para a resolução de problemas.

Robert e Robinet (1996) destacam que Glaeser (1971), em um capítulo da sua obra "Matemática para o aluno professor", desenvolveu idéias análogas às de Polya quando apresentou o papel necessário da heurística e dos métodos sistemáticos na resolução de problemas e também defendeu o ensino de elementos sobre a atividade matemática aos futuros professores.

Apesar de os trabalhos de Polya e de Glaeser serem contemporâneos aos de Flavell sobre metacognição, eles não evidenciam referências a esse trabalho. No entanto, observa-se que as preocupações desses dois autores em, através dos métodos e da heurística, ocasionar possíveis reflexões nos alunos, condizem com as afirmações de Develay a respeito das atividades metacognitivas:

> Há metacognição cada vez que existe um recuo em relação à acção para a analisar [...]. Eles (os alunos) fazem e vêem-se a si próprios fazer para compreenderem como fizeram [...]. O qualificativo de actividade metacognitiva ficará reservado a todos os instantes no decurso dos quais os alunos se interrogam sobre as suas estratégias de aprendizagem a fim de englobar a compreensão num sistema de explicação que possam reutilizar posteriormente. (DEVELAY in GRANGEAT et al, 1999, p. 27)

Nesse mesmo tema, em um artigo recente, González (1998) desenvolveu a noção de Tarefa Intelectualmente Exigente (TIE), uma estrutura teórica que vincula a resolução de problemas com a metacognição, a qual utilizou como base para construir o modelo MRP, "...o qual é apresentado como uma interpretação metacognitiva dos esforços intelectuais que uma pessoa realiza quando está dedicada à busca da solução de problemas." (p. 63)

> A vinculação entre metacognição e TIE se estabelece quando o executor: (a) toma consciência dos objetivos que pode lograr realizando a tarefa... (b) reconhece que existe mais de uma via para levar a cabo a tarefa, ou que não tem nenhuma disponível no momento, ou a via que conhece não é aplicável ou resulta inadequada para a tarefa em questão, e (c) identifica os aspectos da estratégia empregada que resultam favorecedores ou dificultadores para executar a tarefa, estabelecendo condições para sua aplicabilidade, criando bases para a generalização e/ou transferência. (GONZÁLEZ, 1998, p. 70)

Para González, as TIEs proporcionam aos alunos a reflexão e não a memorização; e nem a aplicação direta de algoritmos ou de receitas pré-concebidas. As tarefas são elaboradas de maneira a levar o estudante a pensar e raciocinar de maneira autônoma.

Na realidade, tanto Polya quanto Glaeser e González apresentaram recursos que o professor pode utilizar, através de seu discurso e/ou atividades, para auxiliar o aluno a refletir sobre o seu conhecimento, os seus erros, os caminhos a utilizar, reorganizando-se se necessário, quando está frente a um problema que precisa resolver.

Além dos citados acima, temos diversos autores, que através de seus trabalhos e pesquisas procuram estudar os metaconhecimentos que têm sido apontados como fatores importantes para melhor compreensão da matemática.

Quadro teórico

O grupo de pesquisadores franceses, composto por Jean Luc Dorier, Marc Rogalski, Aline Robert e Jacqueline Robinet (citadas anteriormente), entre outros, e doravante denominado simplesmente por "grupo francês", tem-se dedicado, desde o final da década de 80, a investigar o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.

O "grupo francês" constatou que não existem situações problema acessíveis a alunos de um primeiro curso de Álgebra Linear, que dêem origem ao desenvolvimento das principais noções a serem estudadas, pois ou as situações existentes são elementares demais e podem ser resolvidas sem o recurso da Álgebra Linear ou exigem conhecimentos da própria disciplina ou conhecimentos mais profundos de outras teorias. A partir dessa constatação, o grupo sugere que se realizem pesquisas sobre alavancas meta e utilização da informática para enfrentar as dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem de Álgebra Linear.

Mas, o que é metaconhecimento matemático para o "grupo francês"?

> Nós utilizamos o prefixo meta diante da palavra conhecimento ou cognitivo ou cognição para designar os elementos de informação ou dos conhecimentos SOBRE a matemática, sobre seu funcionamento, sobre sua utilização, sobre sua aprendizagem, quer eles sejam gerais ou apenas ligados a um domínio particular. (ROBERT e ROBINET, 1996, p. 156)

O "grupo francês" passou a designar como alavancas meta, esses metaconhecimentos matemáticos presentes no discurso do professor ou nas atividades que atuem sobre os conhecimentos dos estudantes, sobre a sua maneira de aprender, e possibilitem aos alunos refletirem sobre os objetos matemáticos da Álgebra Linear.

> A palavra alavanca se relaciona à idéia de introduzir em um momento bem escolhido de aprendizagem um elemento permitindo aos estudantes compreender melhor a natureza epistemológica da álgebra linear. O prefixo substantivado “meta” significa que essa alavanca favorece uma reflexão sobre a própria atividade matemática. (DORIER, 1998, p. 216)

Dentre estas possíveis alavancas meta, Dorier ressalta as informações constitutivas do conhecimento matemático, as constitutivas do funcionamento matemático e as de natureza epistemológicas.

As informações constitutivas do conhecimento matemático podem ser, por exemplo, os métodos e as (re) organizações. O professor, através de seu discurso associado a atividades, pode gerar reflexões nos alunos sobre os procedimentos aplicáveis a um problema, qual o melhor método, o que é comum à resolução de um conjunto de problemas semelhantes:

> A interação do problema matemático com a alavanca meta visa a desencadear, dentro de um contexto que o estudante está se apropriando, uma reflexão sobre as contribuições da teoria dos espaços vetoriais em termos de unificação, generalização e simplificação. (DORIER, 1998, p. 217)

As informações constitutivas do funcionamento matemático, como por exemplo: informações sobre jogo de quadros (algébrico, geométrico, numérico, etc.) como um recurso para que o aluno se reorganize para resolver os problemas, ou ainda, como um recurso utilizado para uma melhor compreensão de noções da álgebra linear; informações sobre o papel dos exemplos e contra-exemplos como questionamentos passíveis de “alavancar” conceitos; ou ainda, informações sobre a passagem do antigo para o novo como elemento “meta”, que auxiliaria o aluno quando a mudança de pontos de vista é necessária. Segundo os autores, os metaconhecimentos podem integrar os conhecimentos precedentes e as representações que os alunos já possuem aos novos conhecimentos.

> Por mudança de quadros ou de pontos de vista (ver Douady 1986), entendemos que o ensino está organizado de tal modo que o curso e exercícios enfatizam a tradução do mesmo conceito ou questão, de um quadro em outro (do formal ao numérico, do numérico ao geométrico, etc...) ou levam os estudantes a uma mudança de ponto de vista sobre uma noção (por exemplo, vendo uma equação linear $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + + a_{1n}x_n=0$ como uma n-upla (a_{11}, a_{12} , ..., a_{1n}), a fim de passar do uso de uma combinação linear de equações para a noção de posto de um conjunto de n-uplas, etc...). (ROGALSKI in DORIER et al, 2000, pp. 136-137)

As informações sobre a natureza dos conceitos a introduzir devem procurar esclarecer a natureza particular desses conceitos, a idéia de que alguns servem para resolver problemas particulares; outros para unificar, classificar, generalizar a posteriori; outros, ainda, são extensões de conceitos já introduzidos.

> Ter recursos sobre o ensinamento, conforme os momentos propícios e bem determinados, conforme as reflexões ou as atividades de ordem meta, é uma maneira de levar em conta a natureza particular dos conceitos da álgebra linear. Um dos objetivos é de esclarecer a natureza desses conceitos (o que é uma equação linear geral? Relação entre posto de vetores e posto de equações, etc.). Um outro fim é o de provocar entre os estudantes uma atividade de reflexão sobre certos conceitos matemáticos (por exemplo: qual é o papel dos axiomas dos espaços vetoriais?) (ROGALSKI in DORIER et al (1997), p. 164)

Dorier (1997) elaborou uma seqüência de ensino para introduzir axiomaticamente a noção de espaço vetorial, que, segundo o autor, caracteriza o papel possível de uma reflexão epistemológica.

Utilizou um texto introdutório à seqüência que continha, além de argumentos não habituais, de caráter meta, equações para serem resolvidas, tendo por base o seguinte: dados três elementos a, b e x de um conjunto E munido de uma lei T, a afirmação “$xTa=b$ equivale a $x=bT(a^{-1})$” justifica-se pela utilização de três axiomas da definição de grupo. Os alunos teriam cerca de duas semanas para ler e resolver os exercícios, sendo explicitado que o texto desenvolvia argumentos de um tipo não habitual. Segundo o autor: “Esse documento é então uma introdução à seqüência propriamente dita sobre espaços vetoriais e ao mesmo tempo sobre o plano matemático e sobre o plano de análise reflexiva.” (DORIER et al, 1997, p. 193).

Os alunos foram orientados para resolver as equações, explicitando as propriedades que estavam utilizando, com a finalidade de se obter um conjunto dessas propriedades. No final dessa fase da seqüência obtém-se, segundo Dorier, mais ou menos doze propriedades.

Na fase seguinte, os alunos são orientados a procurar quais as propriedades podem ser deduzidas umas das outras. No fim da seqüência, obtém-se a definição de espaço vetorial sobre o corpo dos racionais, que seria generalizado para espaços vetoriais sobre o corpo dos reais.

> A seqüência, que é baseada sobre as competências e conhecimentos anteriores, tende a dar aos estudantes um conhecimento enriquecido de uma dimensão meta sobre as estruturas algébricas e sua razão de ser... [...] Nós utilizamos essa seqüência duas vezes. Em cada vez os estudantes foram bastante ativos. Suas reações e suas respostas mostram que eles são aparentemente capazes de seguir a idéia que consiste em construir uma axiomática sobre as bases propostas na seqüência. Eles deram, eles próprios, boas propriedades para resolver as equações lineares, ficaram interessados e se mostraram capazes de encontrar quais propriedades podem ser deduzidas umas das outras. (DORIER et al, 1997, pp. 194-195)

É preciso salientar também o papel do professor como orientador, propondo atividades que possam ser discutidas em grupo, ou em dupla, possibilitando aos alunos um apoio necessário para o que eles não sabem fazer sozinho. O professor executa as atividades falando, interrogando-se a si próprio, apontando possíveis erros, reorganizando o seu raciocínio verbalmente, de maneira a incentivar os alunos ao questionamento nos grupos de trabalho, à correção dos seus próprios erros, à reorganização de seus procedimentos, assim como à explicitação desses procedimentos.

> De uma perspectiva interacionista (ver Vygotsky, por exemplo), tal reflexão pode promover uma maior comunicação entre os estudantes do que a própria matemática e pode lhes dar a oportunidade de se envolver ativamente em sua aprendizagem. Essas reflexões são elementos sobre o conhecimento matemático, aliás, resolver um problema é exatamente isso: agir sobre o conhecimento matemático. Esta forma de “action aid” (ajuda na ação) pode ser particularmente interessante aos estudantes se ela lhes permitir ver como certos conhecimentos podem ser reutilizados ou reciclados, em diferentes situações, poupando assim tempo e energia. (DORIER et al, 2000, p. 153)

O “grupo francês” destaca a dificuldade que existe em se separar o que é matemática do que é SOBRE a matemática (“meta”), pois essa diferenciação depende dos alunos envolvidos com o conhecimento em questão. O que é “meta” para alguns pode ser que seja a própria matemática para outros.

> ... usaremos a palavra “meta”, de preferência, em relação à matemática se há para o receptor do discurso uma relação com o elemento da matemática para aprender, em parte ainda, então, não aprendida, o que justifica que não se pode assimilar estes elementos da matemática a menos que seja interessante distingui-los dos conhecimentos matemáticos comuns. Poder-se-ia ainda dizer que certos conhecimentos terão um estatuto de conhecimentos ou metaconhecimentos de acordo com o tratamento que é possível se aplicar com os alunos. (ROBERT e ROBINET,1996, p. 156)

Robert (1996) dá um exemplo que ilustra bem o que foi explicitado acima: o seguinte teorema “sejam a e b dois reais, se para todo inteiro positivo n, $b < a < b+1/n$, então $a = b$”, é utilizado por professores no primeiro ano de uma faculdade na França, como um método que permite demonstrar a igualdade de dois números reais. Na realidade, este teorema requer um bom conhecimento das noções de seqüência e de números reais, que serão estudados com mais profundidade em anos posteriores. “O estatuto do método (metaconhecimento), assim atribuído, é provisório: com o tempo, os alunos se apropriarão do conhecimento correspondente, e o terão integrado ao conhecimento deles sobre os reais.” (ROBERT e ROBINET, 1996, p. 157).

Os autores também destacam as pesquisas de Brunner sobre a antecipação, ressaltando que nas intervenções “meta”, o professor propõe, às vezes, intervenções que podem parecer mais difíceis e que levam poucos alunos ao sucesso; assim como muitas intervenções são superficiais, chegando a ser “...como receitas suplementares, sem muita eficácia”. Na realidade, precisa haver um “...desequilíbrio dinâmico entre metaconhecimentos e conhecimentos...”.

> Numa perspectiva construtivista (no sentido amplo) nos perguntamos se essas intervenções (meta) contribuem para criar um certo desequilíbrio, desequilíbrio dinâmico entre metaconhecimentos e conhecimentos, como uma corrente de ar entre o que é esperado, previsto, antecipado formalmente, e o que se deve colocar dentro. Se o desequilíbrio é muito grande, não acontece nada; mas se a margem é suficientemente pequena, os alunos são ajudados a adentrar no desconhecido... Isto é talvez, a abordagem das teorias de Brunner concernentes à antecipação.(DORIER et al, 1997, p. 188)

Convém destacar aqui o trabalho de pesquisa realizado por Harel, que consta de um dos capítulos do livro coordenado por Dorier (1997) e que trata de três princípios necessários para o ensino/aprendizagem da Álgebra Linear: o da concretização, o da necessidade e o da possibilidade de generalização ou generabilidade. São princípios que, quando utilizados, procuram gerar reflexões *sobre* a matemática, tendo, portanto, um caráter “meta”.

> Uma condição preliminar à realização do princípio da concretização é que o estudante construa sua compreensão de um conceito sobre um contexto que lhe seja concreto. (HAREL in DORIER, 1997, p. 223)

Para Harel, a geometria a duas e a três dimensões será o concreto para se introduzir o conceito de gerador, de dependência linear, de base, entre outros, para que depois o estudante possa abstrair esses conceitos na Álgebra Linear. É a passagem do antigo (Geometria Analítica) para o novo (Álgebra Linear), que Dorier e seu grupo destacam como uma possível alavanca meta para o ensino/aprendizagem da Álgebra Linear.

O segundo princípio, o da necessidade, complementa o principio da concretização. Segundo Harel, para que o estudante possa aprender, deve sentir uma necessidade intelectual pelo que está sendo ensinado.

> Para que o estudante aprenda, ele deve sentir uma necessidade por aquilo que está sendo ensinado. Por "necessidade", nós entendemos uma necessidade intelectual, em oposição a uma necessidade social e econômica. (HAREL in DORIER, p. 226)

Harel destaca ainda que o princípio da necessidade situa-se na linha da teoria Piagetiana e nos trabalhos de didatas franceses sobre a teoria das situações didáticas de Brousseau (1984) ou sobre a noção de problemática de Balacheff (1990). Segundo Harel, é preciso desencadear um desequilíbrio, através de diversos problemas, para que o estudante reconsidere suas ações anteriores e se reorganize, procurando novos meios de resolução. As situações didáticas devem promover um ambiente em que o estudante possa abstrair de maneira reflexiva as suas concepções matemáticas. As atividades devem propiciar aos estudantes a tomada de consciência de que estão procurando soluções para os seus próprios problemas e conflitos e não que esses problemas foram fornecidos pelo professor de uma maneira arbitrária.

O princípio da necessidade de Harel está associado à idéia do "grupo francês" de "...esclarecer a natureza dos conceitos..." assim como à de "...provocar entre os estudantes uma atividade de reflexão sobre certos conceitos matemáticos."

Segundo Harel os dois princípios da aprendizagem, o princípio da concretização e o princípio da necessidade são complementados pelo terceiro princípio, chamado de princípio da possibilidade da generalização. Ele afirma:

> Quando o ensino tem relação com um modelo concreto, isto é, um modelo que satisfaz o princípio da concretização, as atividades didáticas no interior desse modelo devem permitir e encorajar a generalização de conceitos. (HAREL in DORIER, p. 228)

Como exemplo, Harel destaca que o conceito de base para alunos iniciantes deve ser explorado de maneira que, a partir de um sistema de geradores qualquer, se crie uma necessidade para a representação do vetor através desse sistema, de maneira única, ou seja, de modo que esse sistema de geradores seja minimal. Essa idéia, segundo o autor, pode ser generalizada para qualquer espaço vetorial.

A seqüência de ensino aplicada por Dorier para introduzir axiomaticamente a noção de espaço vetorial, citada anteriormente, é um exemplo da utilização dos três princípios. Essa seqüência baseia-se em conhecimentos anteriores e “... tende a dar aos estudantes um conhecimento enriquecido de uma dimensão meta sobre as estruturas algébricas e a sua razão de ser...”.

Tendo por base as pesquisas de Harel, entre outras, Araújo (2002), em sua dissertação, ao analisar os metaconhecimentos matemáticos apresentados no discurso dos autores Callioli, Domingues e Costa, do livro didático “Álgebra Linear e Aplicações”, destacou em sua conclusão duas características meta utilizadas pelos autores que “...dependendo da forma em que são empregadas têm condições de se constituir em alavanca meta em praticamente todos os assuntos.” (p. 45)

> A primeira característica é a de partir de conhecimentos da geometria em duas e três dimensões. Aqui, os autores dão indícios de que buscarão partir de conhecimentos de Geometria Analítica para generalizá-los. O que indica que, ao menos implicitamente, os autores estão apoiando a idéia de Harel sobre dois de seus 3 princípios o da "concretização" e o da "possibilidade de generalização".
>
> Para introdução da noção de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, os autores comparam algumas das características do conjunto V de vetores da Geometria Analítica com as do conjunto $M_{mxn}(IR)$ das matrizes reais retangulares para concluírem que tais conjuntos aparentemente distintos, possuem uma mesma estrutura algébrica. Somente depois apresentam a noção formal de espaço vetorial sobre IR. Partem de conhecimentos antigos, "concretos" no sentido de Harel para generalizarem via definição. (ARAÚJO, 2002, p. 45-46)

Evolução do termo alavanca meta

Como foi utilizada a teoria do "grupo francês" e de Harel para a fundamentação das minhas análises, assim como alguns resultados de experimentação da minha pesquisa foram relacionados com as conclusões de Araújo, que também utilizou esses teóricos; e visto que ao apresentar tais autores, às vezes, eles se referem ao termo metamatemática, meta isoladamente, metaconhecimento entre outros, exponho a seguir uma breve explicação sobre a evolução do uso desses termos.

Através das leituras realizadas, constatei que Dorier, na segunda parte da sua tese de doutoramento, propõe a utilização de alavancas metamatemáticas (e não alavanca meta) na elaboração de seqüências de ensino para álgebra linear:

> Através desse trabalho, levantamos igualmente o problema da adaptação de certas ferramentas e métodos didáticos às especificidades do ensino superior e da natureza epistemológica dos conceitos da álgebra linear; em resposta a essas questões, propomos de modo concreto a utilização de alavancas metamatemáticas na elaboração de seqüências de ensino. (DORIER, 1990)

Dorier, em artigo de 1991, discorre sobre a sua tese de 1990 e diz apoiar-se sobre as reflexões de Robert, A. (1987a), que sugere a utilização de alavancas metamatemáticas (e não alavancas meta) para responder a certas especificidades da álgebra linear. Portanto, o termo metamatemática(o) era utilizado por esses pesquisadores pelo menos desde de 1987.

> Uma escolha importante a sublinhar é que, o discurso metamatemático que tem o professor ao longo de toda a sessão seja acompanhado de uma atividade constante dos estudantes. Esta complementaridade parece um ponto essencial para permitir consolidar o discurso sobre uma atividade que o ilustre. (DORIER, 1991, p. 356)

Robert e Robinet, em um artigo de 1996, citado anteriormente, que retrata uma conferência realizada em 1993, discorrem sobre os metaconhecimentos matemáticos. As autoras utilizam somente o termo “meta”, “metaconhecimento matemático”, e não mais o termo metamatemática, que aparecia em artigos anteriores. E em um determinado parágrafo, explicitam o seguinte:

> Anunciamos imediatamente que nesta exposição não figurará jamais a metamatemática: com efeito, essa palavra criada por Hilbert, designa um ramo particular da matemática que se ocupa dos fundamentos lógicos de certas teorias, e não tem portanto nada (ou quase) nada a ver com nossa proposta.” (Robert e Robinet, 1996, p. 149).

Através de leituras de outros artigos: Dorier (1995), Robert e Robinet (1996), Dorier et al (1997), Robert (1998), Dorier (1998), Dorier et al (2000), constatei que, a partir de 1993, o “grupo francês” passou a utilizar somente os termos metaconhecimento matemático, meta e alavanca meta, com os respectivos significados já colocados anteriormente, termos estes que são utilizados em minha pesquisa.

Metodologia da Pesquisa

Abordagem metodológica

Para poder analisar o discurso do professor de ***Álgebra Linear***, procurando as possíveis alavancas meta utilizadas por ele para desenvolver a noção de base de um espaço vetorial, decidi desenvolver esta investigação segundo uma abordagem descritiva e interpretativa, próprias da pesquisa qualitativa.

André (2001) ressalta as características de uma pesquisa qualitativa, discutidas por Bogdan e Biklen (1982) no livro “A Pesquisa Qualitativa em Educação”. Dentre elas, destaco aquelas que caracterizam esta investigação, quais sejam: os dados coletados são predominantemente descritivos, incluindo transcrições de entrevistas e de depoimentos; o papel principal é o do pesquisador, procurando capturar a “perspectiva dos participantes”, isto é, a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas; a preocupação com o processo e com o significado é muito maior do que com o produto.

> Ao considerar os diferentes pontos de vista dos participantes, os estudos qualitativos permitem iluminar o dinamismo interno das situações, geralmente inacessível ao observador externo. (LÜDKE & ANDRÉ, 2001, p. 12)

O método de coleta de dados

Na pesquisa qualitativa, segundo Lüdke (2001), dentre as diversas técnicas para coleta de dados, a entrevista, em grupo ou individual, é uma das principais. Ela é utilizada em quase todos os tipos de pesquisas nas ciências sociais, podendo ser empregada na combinação com outros métodos, ou não.

> A grande vantagem da entrevista sobre outras técnicas é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informante e sobre os mais variados tópicos. (LÜDKE & ANDRÉ, 2001, p. 34)

Para Lüdke (2001), existem três tipos de entrevistas individuais: a não estruturada, a estruturada e a semi-estruturada (ou não totalmente estruturada). A não estruturada permite uma maior liberdade de percurso, enquanto que a estruturada assemelha-se à aplicação de um questionário que tem por objetivo a obtenção de dados mais uniformes entre os entrevistados, pretendendo uma comparação imediata com fins estatísticos. Entre essas duas, situa-se a semi-estruturada (ou não totalmente estruturada ou menos estruturada) na qual o entrevistador segue um roteiro ou tópico guia, que pode ser adaptado durante o transcorrer da entrevista ou para as entrevistas subseqüentes.

> Parece-nos claro que o tipo de entrevista mais adequado para o trabalho de pesquisa que se faz atualmente em educação aproxima-se mais dos esquemas mais livres, menos estruturados. (LÜDKE & ANDRÉ, 2001, p. 34)

Tanto Lüdke (2001) quanto Gaskell (2002) destacam os cuidados especiais que são necessários com a entrevista:

- O guia ou roteiro deve ter uma ordem lógica e contemplar os tópicos principais a serem desenvolvidos durante a entrevista, para que não se desperdice nem o tempo do entrevistado, nem o do entrevistador.

- As perguntas precisam ser elaboradas de maneira que o entrevistado se sinta convidado a falar longamente, com tempo para reflexão, mas ao mesmo tempo possibilitando ao entrevistador alguns questionamentos específicos.
- O entrevistado precisa ser respeitado, garantindo-se a ele o sigilo e anonimato; assim como é necessário que o horário marcado e o tempo de entrevista que forem combinados sejam cumpridos.
- O entrevistador precisa estar preparado para ouvir com paciência e saber estimular o fluxo natural de informações por parte do entrevistado.
- O entrevistador não deve induzir o rumo das respostas, procurando respeitar as opiniões e as impressões do entrevistado.
- A problemática focada na entrevista deve ser familiar ao entrevistado para que o mesmo possa discorrer sobre ela com facilidade.

> ...na entrevista a relação que se cria é de interação, havendo uma atmosfera de influência recíproca entre quem pergunta e quem responde. Principalmente nas entrevistas não totalmente estruturadas, onde não há a imposição de uma ordem rígida de questões, o entrevistado discorre sobre o tema proposto com base nas informações que ele detém e que no fundo são a verdadeira razão da entrevista (LÜDKE E ANDRÉ, 2001, p. 33).

Procedimentos metodológicos

O intuito deste trabalho, conforme já especificado anteriormente, é de “captar” no discurso do professor de Álgebra Linear o que é passível de se tornar uma alavanca meta para a compreensão da noção de base de um espaço vetorial. Para tanto, foi necessário criar um “cenário” para obtenção desse discurso.

Antevi duas possibilidades: uma seria observar aulas de diferentes professores quando do desenvolvimento do assunto, outra seria entrevistar diferentes professores de álgebra linear sobre o tema.

Dado que meu interesse era aumentar a possibilidade do encontro de tais alavancas meta, decidi optar pela segunda possibilidade, pois o professor, sem os limites impostos pela atuação em sala de aula, poderia apresentar o discurso que ele consideraria ideal para a abordagem da noção de base. Além disso, a observação de aulas imporia um limite ao número de professores selecionados, pois seria inviável assistir às aulas dos diversos professores, em locais diferentes, as quais ,além do que, ocorreriam na mesma época do ano.

Com essa perspectiva, escolhi a técnica de entrevista semi- estruturada, por acreditar que seja aquela que tem melhores condições de revelar o desenvolvimento da noção e dos recursos meta, eventualmente utilizados pelo professor em sala de aula, isto é, aquela que permite ao professor desenvolver livremente suas idéias sobre o assunto. Por outro lado, a necessidade de obter o máximo de informações sobre o tema e de economizar o tempo despendido, fez-me optar por construir um guia que facilitasse manter o foco nas observações referentes ao intuito da pesquisa.

O guia da entrevista semi-estruturada, em anexo, foi elaborado utilizando uma análise à priori, que levou em conta três aspectos. Primeiro, as possíveis maneiras de abordar os temas de interesse; segundo, evitar a indução das respostas; terceiro, tornar claro que o que desejava obter era o discurso meta em si, isto é, que não pretendia analisar o professor e sua competência, mas as possíveis contribuições existentes na coleta do material “meta”, presentes em seu discurso.

Ao mesmo tempo em que elaborava o guia da entrevista, procurei informações via internet sobre professores das universidades públicas do estado de São Paulo, universidades essas que constaram da pesquisa realizada pela UNICAMP (in Celestino, 2000) sobre as disciplinas-problema, após o que, criei critérios para a seleção dos professores a serem entrevistados. Selecionei, segundo esses critérios, sete professores, dos quais seis aceitaram minha proposta de entrevista, sendo três de universidades particulares e três de universidades públicas.

No primeiro contato com tais professores, por telefone ou pessoalmente, expliquei o objetivo da pesquisa, garantindo o anonimato do entrevistado. Forneci o tempo necessário para tal entrevista e pedi, ainda, autorização ao professor para gravar a entrevista em áudio.

As entrevistas foram áudio gravadas e em duas delas, um observador esteve monitorando o gravador. Anotei palavras, frases que julguei necessárias para eventuais perguntas e esclarecimentos. Essas fitas foram transcritas para facilitar a análise da entrevista e possibilitar a consulta da mesma pelo leitor desta obra.

Elaborei a análise do material coletado, caso a caso, procurando destacar os recursos “meta” que surgiram nos discursos dos professores, os quais, à luz do quadro teórico, são passíveis de se tornar alavancas meta para o ensino/aprendizagem da noção de base de um espaço vetorial.

Após cada análise do discurso do professor entrevistado, apresentei uma conclusão parcial, enfatizando os elementos “meta” passíveis de favorecer uma reflexão sobre a noção de base, assim como recursos “meta” não relacionados diretamente com essa noção, mas que considerei interessantes para o ensino/aprendizagem da Álgebra Linear.

Finalizei cada conclusão parcial com observações feitas pelo professor sobre o ensino de álgebra linear e sua contextualização. Tais elementos podem estar diretamente ligados aos recursos que surgiram no discurso do entrevistado.

CAPÍTULO II

Pesquisa Empírica

Introdução

Neste capitulo apresento primeiramente os critérios de escolha dos professores entrevistados, e na seqüência, descrevo a elaboração e a análise à priori do guia da entrevista. Após o que, apresento a entrevista com cada um dos professores, segundo o seguinte padrão: primeiramente uma breve explicação da forma como ocorreu a entrevista, depois a caracterização do professor, seguida da análise do discurso do professor, destacando os recursos “meta” presentes em sua explanação; finalmente, resumo, em uma conclusão parcial, esses recursos “meta” passíveis de se tornarem alavancas meta.

Critérios de escolha de professores de álgebra linear para serem entrevistados*:*

A população de professores de Álgebra Linear do estado de São Paulo é grande, pois essa matéria é ministrada em vários cursos de exatas, não só nas licenciaturas e bacharelados em Matemática como, dentre outros, nos cursos de Engenharia, Física, Arquitetura, Ciências da Computação. Para a seleção dos sujeitos de pesquisa, utilizei os seguintes critérios:

- Selecionei, na sua maioria, mestres e doutores, tanto da área de Educação Matemática quanto da área de Matemática Pura ou Aplicada, apoiada nas conclusões da pesquisa de Behaj e Arsac:

> O estatuto de pesquisador dos professores interrogados aparece como importante no sentido de que todos, ... mostram opiniões que são muitas vezes evidentemente influenciadas por seus conhecimentos matemáticos. Podemos também atribuir a esse estatuto uma independência bem grande, à vista das proposições de ensino, presentes nos livros didáticos.(BEHAJ e ARSAC pág. 361)

Essa independência, provavelmente se traduz em uma maior autonomia na abordagem de temas de Álgebra Linear, e esse fato pode ter como decorrência o uso de alavancas meta, advindas da experiência como pesquisador. Além disso, o professor que se interessa por temas da Educação Matemática pode ter incorporado em sua atividade docente alguns resultados sugeridos pela leitura de autores como Polya, Glaeser e Dorier, entre outros.

- O tempo de docência também foi levado em conta, pois ao longo do tempo do ensino de um determinado assunto, o professor vai desenvolvendo uma abordagem própria, um perfil didático singular, o que, em tese, deve enriquecer seu discurso, seu plano de aula, em suma, os recursos utilizados para facilitar a compreensão dos alunos.

- Selecionei três professores de universidades públicas. Isto porque acredito que o discurso do professor depende de sua “clientela” e os alunos das universidades públicas geralmente vêm de um ensino médio melhor, tendo mais acesso a informações e instrumentos de cultura. Esperava com isso obter maior diversidade no discurso dos professores.

- Selecionei os professores das escolas particulares das cidades de São Paulo e Santos, pela maior proximidade de meu trabalho.

- Dei preferência aos professores das universidades públicas do estado de São Paulo, das cidades mais próximas de Santos, para facilitar em termos de tempo despendido com a locomoção para tais locais.

Elaboração e análise à priori do guia da entrevista.

O guia da entrevista foi elaborado contemplando 3 fases.

A primeira fase visa conhecer a relação do professor com a Álgebra Linear: - relação de docência, há quanto tempo e em quais cursos ministrou aulas de álgebra linear e, - relação de pesquisa, se utiliza Álgebra Linear em suas pesquisas de matemática e/ou educação matemática.

Os tópicos do guia para a primeira fase são os seguintes:

- Formação acadêmica: bacharelado, licenciatura, mestrado, doutorado, pós-doc...
- Tipo de pesquisa que já fez ou faz (em Matemática Pura, Aplicada ou Educação Matemática).
- Docência de Álgebra Linear (tempo, tipo de curso).

Os tópicos acima são importantes, pois dependendo da formação acadêmica, do tempo de docência e do tipo de curso em que trabalhou, poderá ocorrer um discurso do entrevistado mais direcionado ou não, para as aplicações, ou para uma diversidade de abordagem das noções ou ainda para as suas pesquisas, que podem estar relacionadas ou não à Álgebra Linear.

A segunda fase tem o objetivo de obter dados sobre o contexto em que ocorre o curso de Álgebra Linear. É a fase da caracterização da disciplina no tempo e no espaço do Curso.

O primeiro item,

> Importância da Álgebra Linear para a formação do aluno,

visa compreender a maior ou menor valorização dada pelo professor a suas aulas sobre o assunto, o que certamente influenciará a reflexão e ênfase dedicada à elaboração do curso por esse docente e refletirá em seu discurso em sala de aula.

O segundo item,

> tópicos prioritários em um primeiro curso de Álgebra Linear,

visa verificar se, ao enumerar os tópicos principais, o professor dá destaque para a definição de base de um espaço vetorial como um dos principais da Álgebra Linear. Nesse discurso, se ocorrer essa prioridade à definição de base, o entrevistado poderá trazer algum elemento “meta” utilizado por ele em suas aulas.

O terceiro item,

> relação da Álgebra Linear com outras matérias do Curso (aplicações, etc),

visa observar se o entrevistado utiliza no seu discurso, em sala de aula, essas possíveis relações da Álgebra Linear com outras disciplinas, evidenciando a utilização ou não de futuras aplicações. Esse discurso poderá ter um caráter “meta” se o professor discorrer sobre a natureza dos conceitos a serem introduzidos:

> O professor pode desenvolver a idéia de que esses conceitos não são da mesma natureza, não são todos introduzidos pelo mesmo tipo de razão. Alguns servem para resolver problemas particulares (cf. números e medidas), outros para unificar, classificar, generalizar a posteriori (limites, Álgebra Linear...), outros enfim são extensão de conceitos já introduzidos...(DORIER et al, 1997, p. 187)

O quarto item,

> necessidade de pré-requisitos para acompanhar um primeiro curso de Álgebra Linear,

tem por objetivo motivar o entrevistado a explicitar os objetivos principais e a metodologia utilizada na abordagem que adota para as noções de Álgebra Linear. Pretendo levantar principalmente a utilização ou não de questões e conceitos anteriores para o desenvolvimento de noções, pois, segundo Dorier:

> ... os alunos têm representações, conhecimentos e automatismos, é preciso que eles integrem os novos conhecimentos aos precedentes, os metaconhecimentos podem participar dessa integração, em certos momentos precisos, de modo limitado e provavelmente diferenciado segundo os indivíduos, e sob certas condições. (DORIER et al, 1997, p. 188)

O quinto e sexto itens:

> Taxa de aprovação de Álgebra Linear;
> Comentários sobre a frase de Plancherel: "De todos os cursos que havia dado, o de Álgebra Linear era de longe aquele que parecia mais difícil aos estudantes",

são tópicos propostos para instigar a fala do professor sobre a sua preocupação ou não com o ensino/aprendizagem da Álgebra Linear; se em seu departamento ocorre o questionamento ou não a respeito dessa disciplina no currículo do curso, ou ainda se ocorreram ou não reflexões sobre uma reestruturação da metodologia adotada.

> O trabalho do didata consiste em conceber uma atividade matemática bem escolhida e um contrato apropriado que provoquem uma reflexão adequada sobre a natureza de certos conceitos.(DORIER et al, 1997, p. 191).

As questões específicas que constam da terceira fase foram elaboradas com o intuito de liberar o professor para falar a respeito de como deve ser abordada e desenvolvida a noção de base, explicitando os recursos e métodos que julga importante utilizar para atingir o objetivo apontado anteriormente.

Os itens:

abordagem da noção de base;
atividades propostas;
exercícios;
exemplos mais utilizados,

visam esclarecer as atividades e os exercícios propostos: se o entrevistado utiliza a heurística, os métodos, entre outros recursos. Além disso, imagino que o professor se refira a questões do tipo: - o trabalho é realizado pelos alunos em grupo e/ou individualmente? - ele responde a todas as perguntas dos alunos ou recorre a outros alunos para debater a resposta, aponta erros possíveis, procurando gerar nos alunos uma atitude reflexiva perante as atividades e os exercícios? - ele utiliza somente exemplos, ou também contra-exemplos?

Sobre esse tipo de questionamentos , Dorier afirma:

> As informações constitutivas do funcionamento matemático: por exemplo, informações sobre o papel dos jogos de quadros na resolução de problemas (cf. abaixo), o papel dos questionamentos, dos exemplos e dos contra-exemplos, o papel da localização dos parâmetros numa questão matemática, o papel do controle, etc... (DORIER et al, 1997, p. 185, 186).

O item,

analogias,

tem o propósito de trazer à tona recursos que podem ser utilizados pelo professor em seu discurso, que tenham, segundo Dorier, um caráter “meta”:

> Alguns comentários que acompanham o discurso estritamente matemático, têm uma função bastante conjuntural, além disso, não é somente sua relação precisa com os conteúdos em jogo que conta. Pensamos nas intervenções para ajudar os estudantes a seguir a todo momento a exposição que é feita dos conhecimentos, a se colocar no fio do discurso (estruturação); ...(DORIER et al, 1997, p. 210)

Os itens:

aplicações;
utilização do livro didático,

têm por objetivo: - saber se o professor propõe pesquisas em livros didáticos e/ou opta por um livro texto, e como utiliza esse livro; - se há informações sobre aplicações da Álgebra Linear por parte do professor, ou ainda, propostas de pesquisas a respeito dessas possíveis aplicações.

O último item,

existência de dificuldades dos alunos com a noção de base,

visa verificar se há o questionamento sobre a existência ou não de dificuldades dos alunos com a noção de base. Esse questionamento poderá gerar novas reflexões do entrevistado, de maneira a retomar na sua fala alguma estratégia que utilize para suprir essas dificuldades durante o desenvolvimento dessa noção e na continuidade do curso.

Por exemplo, quanto mais facilmente reconhecível é o erro do estudante, mais difícil é formular um teorema concernente a esse erro. É através de uma análise genuína da matemática envolvida e do ensino recebido, testado e enriquecido por entrevistas detalhadas com estudantes que cometem erros, que a escolha do caminho que levou ao erro pode ser identificada.(DORIER et al, 2000, p. 175)

Entrevistas

A fim de facilitar a leitura, coloquei os trechos que correspondem às palavras do entrevistado, transcritas ipsis litteris, em quadros. Acrescentei, em alguns quadros, explicações que julguei necessárias para uma melhor compreensão do texto, as quais aparecem entre parênteses.

Na transcrição da fala do professor, as reticências foram utilizadas para retratar uma pausa mais longa, ou mudança repentina de assunto do professor; as reticências entre colchetes, [...], para indicar que retirei extratos do discurso do professor.

Com a finalidade de garantir o anonimato dos entrevistados, estes receberam a denominação de professor X, independentemente de sexo, e foram distinguidos por sobrenomes fictícios como: professor Almeida, Brito, Cunha, Duarte, Freire e Gonçalves.

Entrevista com o professor Almeida

Sobre a entrevista:

A entrevista ocorreu no horário determinado pelo professor entrevistado e durou cerca de 50 minutos, sem interrupções. Foi realizada em uma sala do campus da universidade, no qual exerce sua docência, estando presentes: o entrevistado e a entrevistadora.

Caracterização do docente entrevistado

O professor Almeida leciona numa universidade privada do estado de São Paulo há 27 anos. Fez mestrado em Matemática, na área de Álgebra, e atualmente está fazendo doutorado em Educação Matemática.

Análise do discurso do entrevistado

Fase da contextualização da Álgebra Linear nos cursos

Ao discorrer sobre a importância da Álgebra Linear, Almeida afirmou:

> ... para os alunos, a Álgebra Linear é, digamos assim, o primeiro contato com a linguagem algébrica básica. Eles vêm do Ensino Fundamental e Médio muito fracos nessa escrita, sem rigor. Eles até usam álgebra, lógico, mas, o rigor da linguagem, eles não têm, e eles vêm com muitos...muitos tipos de erros.

A importância da Álgebra Linear foi destacada pelo entrevistado como sendo a disciplina que introduz o aluno na questão do rigor da linguagem algébrica, isto é, põe o aluno em contato pela primeira vez com a linguagem algébrica, que será utilizada e também enriquecida por outras disciplinas.

Almeida afirmou ainda, que esse rigor :

> ... é fundamental...desde esse início dessa linguagem, como os próprios resultados da Álgebra Linear para os cursos.

Assim, o professor indicou a importância da Álgebra Linear como ferramenta fundamental para outros cursos do currículo universitário.

Na continuidade da entrevista, ao ser questionado sobre os tópicos prioritários em um primeiro curso de Álgebra Linear, Almeida destacou, entre outros, a noção de base:

> ...eu acho que é fundamental o conceito de espaço, subespaço, l.i., a base e a dimensão que é o primeiro invariante. Ter uma idéia bem fundamentada dessa parte. As transformações, desde o momento que é um curso de computação, as transformações no plano são muito importantes, quer dizer a parte de transformação linear. E, para o curso de engenharia é muito importante você chegar em autovalor, autovetor.

Almeida, sem interrupção por parte da entrevistadora, enveredou a explanar sobre o desenvolvimento das noções do curso, desde a definição de espaço vetorial até a definição de base:

> E eu começo o curso conversando com eles que a gente vai fazer um estudo muito parecido com aquele que ele fez, ou até deveria ter feito no ensino médio, no fundamental, de estudar conjuntos, propriedades de conjuntos. Só que a gente está num momento que a gente faz um estudo de todos os conjuntos ao mesmo tempo no lugar de fazer conjunto como eles viam, separados: vamos estudar matriz; vamos estudar polinômios; vamos estudar números complexos. E agora é uma forma de estudar todos ao mesmo tempo desde que tenham uma estrutura básica.

O entrevistado inicia o curso de Álgebra Linear *informando* aos alunos o que eles vão estudar: “E eu começo o curso conversando com eles que a gente vai fazer um estudo muito parecido com aquele que ele fez...”, procurando semelhanças com conteúdos já estudados: “...conjuntos, propriedades de conjuntos...”. O professor ressalta alguns conjuntos estudados como matrizes, polinômios, números complexos, informando que serão estudados no curso dentro de uma estrutura mais geral, destacando assim o caráter generalizador da Álgebra Linear. Dessa forma, o professor está *informando sobre a natureza dos conceitos matemáticos a serem desenvolvidos.*

> Então eu começo o curso discutindo com eles os conjuntos que eles conhecem e as propriedades. Então, eles ficam falando, se sabem...: Qual conjunto? Como é que se opera dentro desse conjunto? Depois de toda essa discussão que eles apresentam, a gente vai escolhendo... até chegar na estrutura de espaço vetorial. Quer dizer, alguma coisa que contemple a todos com as operações que eles conhecem. Aí a gente vai para [...] uma operação diferente, que para eles é assim algo muito difícil de aceitar; que você pode inventar jeito de somar matrizes diferentes, quer dizer, posso criar... mas que não vai ter mais a estrutura [...] E eu vou sempre tentando montar para eles uma dificuldade, ou uma intenção nova para definir novos conceitos, uma necessidade de um novo conceito.

Segundo o exposto, Almeida costuma provocar para que os alunos questionem: “Então, eles ficam falando, se sabem...: Qual conjunto? Como é que se opera dentro desse conjunto?”, mostrando que os próprios alunos estão dando importância às operações que dão estrutura de espaço vetorial a um conjunto. E também tenta “... montar para eles uma dificuldade, ou uma intenção nova...” para propiciar tanto uma reflexão sobre o tema quanto *uma necessidade* do novo conceito a ser abordado. A idéia de propiciar *a necessidade* vem exemplificada na continuidade da sua fala, ao discorrer sobre o interesse na criação de um critério prático para decidir se um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço vetorial:

> Então, quando a gente trabalha a estrutura de espaço, é muito trabalhoso para você mostrar que aquele conjunto é um espaço vetorial. Aí, eu peço para eles procurarem dentro dos espaços vetoriais, conjuntos que continuam sendo espaços. E daí, a gente discute, porque eles acham que (aquele) conjunto adotou as operações. Então isso daqui vai ser equivalente. Daí a gente tira a noção de subespaço. E ao saber que ele é espaço vetorial, que ele vem de uma estrutura de espaço vetorial, eu posso diminuir o meu trabalho. Então aí é lucro ter uma definição. [...] É rico ter a definição, porque vai diminuir o meu trabalho, porque a gente passa a aula inteira vendo se um conjunto é um espaço vetorial!

É interessante notar que além da *necessidade*, o professor apresenta a idéia de *lucro*, de *vantagem*, qual seja, a existência do teorema sobre a equivalência entre a definição de subespaço vetorial e o critério prático que permite verificar se um dado conjunto é um subespaço vetorial, possibilitando reduzir o tempo: de oito propriedades passa-se à verificação de duas operações para o subconjunto visado quando afirma: “...vai diminuir o meu trabalho, porque a gente passa a aula inteira vendo se um conjunto é um espaço vetorial!”

A seguir, o professor disse:

> E, nesses termos, quando a gente vai para base, etc., a gente quer representar um conjunto que tem infinitos elementos e trabalhar esse conjunto com menos elementos. Então, aí vem primeiro a de gerador. Mas aí eu quero ter o mínimo trabalho possível, aí vem o independente. Então é nesses termos que eu estou trabalhando com eles.

É importante notar que o próprio Almeida distingue, em seu discurso sobre a Álgebra Linear, a noção de base. Essa noção, segundo suas palavras, surge também da *necessidade* e do *lucro*: "...trabalhar esse conjunto com menos elementos..." e "quero ter o mínimo trabalho possível...", reiterando a utilização de um recurso "meta" sobre o assunto.

Ao discorrer sobre a Álgebra Linear, Almeida ressaltou:

> O difícil na Álgebra Linear é você motivá-los em termos de aplicações. Eles questionam, eles perguntam: ah, mas, para que serve isso, de ficar trabalhando assim, etc., com uma representação abstrata? Eles falam que [...] não tem aplicação que a gente visualize. Porque as aplicações vão ser nos outros cursos lá na frente, quer dizer, eles precisavam dominar o resto do curso para serem capazes de perceber as aplicações.

Almeida levanta a questão de que as aplicações da Álgebra Linear só podem ocorrer após a aprendizagem de um primeiro curso sobre o assunto, ou seja, para que ele possa apresentá-las, o aluno necessita de mais conhecimento que o disponível durante um primeiro curso. Se o professor não consegue aplicações, também não consegue situações problema para motivar os alunos à introdução das noções da Álgebra Linear, o que corrobora as afirmações de Dorier e seu grupo sobre a falta de situações problema adequadas a um primeiro curso de Álgebra Linear. Embora tenha feito essa observação, o professor ressalvou:

> Então, eu tenho usado, por exemplo, ... aplicação da computação gráfica, tipo assim imagens que você... deturpa a imagem dependendo da transformação do plano que você usa. Você pode ampliar, minimizar e fazer qualquer tipo de deformação. Então isso aí ajuda que eles aceitem o curso.

Neste caso, Almeida apresenta a *computação gráfica* como recurso “meta” para a noção de transformação linear.

Na continuidade, ao falar sobre os pré-requisitos para um primeiro curso de Álgebra Linear, o professor colocou que um bom curso de Geometria Analítica é “um ponto de apoio” e complementou:

> Porque, eu vou lá na Geometria Analítica para ir buscar os conceitos, a necessidade que eu estou aqui, eu vou buscar na Geometria Analítica, que eles já viram no IR^2, no IR^3, sabem manipular; o vetor, segmento orientado eles sabem também manipular, aí eu trago para cá. Eu vou buscar o conceito que eles viram lá. E daí a gente vai usar para qualquer espaço vetorial, vai generalizar esse conceito. Então a gente faz essa transmissão, digamos assim, entre as duas disciplinas ...

No trecho acima, o professor caracteriza em seu discurso, além da *necessidade*, “...a necessidade que eu estou aqui, eu vou buscar na Geometria Analítica...”, os outros dois princípios da teoria de Harel: o da *concretização*, “...eles já viram no IR^2, no IR^3, sabem manipular; o vetor, segmento orientado eles sabem também manipular...” e o da *generabilidade*, “...E daí a gente vai usar para qualquer espaço vetorial, vai generalizar esse conceito”.

O professor estimou a reprovação nos cursos de Álgebra Linear em:

> ...daria uns 30%, talvez, já considerando esses que desistem.

e, apesar do alto índice de reprovação apresentado pelo professor, ao refletir sobre a frase de Plancherel, Almeida expressou assim sua opinião:

> ...é capaz que probabilidade (seja) muito mais difícil para eles do que Álgebra Linear...

Fase do desenvolvimento da noção de base

A resposta de Almeida, ao ser argüido sobre a abordagem da noção de base, foi:

> Bom, para eu chegar em base, primeiro eu trabalho com espaço e subespaço. Depois [...] eu coloco para eles que a idéia é: uma maneira de representar esse conjunto usando elementos**.** Antes disso a gente viu também o que é combinação linear: tem elementos do conjunto que você pode também representar usando outros e a gente faz bastante exemplos disso. É... até verificando que tem várias maneiras de representar um elemento usando outros**.**

Assim, o professor apresenta a idéia de representar todos os elementos de um espaço vetorial, utilizando apenas alguns desses elementos, enfatizando um trabalho anterior com combinações lineares de vetores. E prosseguiu:

> Depois de explorar muito bem isso, a gente quer buscar no conjunto, uma maneira de representá-lo usando elementos de modo a não ter que considerar os infinitos (o número infinito deles), já que têm alguns que eu consigo representar usando os outros. Como em Geometria Analítica eles já têm um pouco dessas noções, aí eles começam...alguns até vêm já direto com a idéia de base, mas eu não quero. Eu quero gerador. Então como é que eu consigo obter, quais os vetores que eu preciso para conseguir obter os outros? Então, trabalhando nisso vem a idéia de gerador. Então a gente consegue achar geradores de um conjunto. Então, em geral a gente trabalha primeiro no IR^2 e no IR^3, porque na Geometria Analítica foi onde eles trabalharam.Só que a gente vê que não tem uma maneira só, não tem só um conjunto de geradores. Tem vários, no IR^2.

Almeida, apoiado nas noções já estudadas na Geometria Analítica, diz instigar os alunos a refletirem primeiro sobre a noção de gerador "...como é que eu consigo obter, quais os vetores que eu preciso para conseguir obter os outros?" recorrendo aos conhecimentos anteriores para utilizá-los na nova estrutura, que é a de espaço vetorial. É a passagem do *antigo para o novo*. E continuou :

> E aí a gente vai para a lei da economia: o mínimo de vetores possível de onde sai a condição de independência. Então a base vem como conseqüência: que é uma maneira de eu trabalhar o conjunto, de eu conhecer o conjunto, de eu representar o conjunto usando um mínimo de vetores. Aí vem a base.

O professor, citando a *lei da economia*, propicia ao aluno uma oportunidade de refletir sobre a razão de estar desenvolvendo as noções de dependência linear juntamente com a de sistemas geradores. Fica evidente a procura de recursos "meta" por esse professor. Almeida continuou, contando:

> E, é lógico, a gente faz para o IR^2, o IR^3, e o próximo passo, a gente transporta para os outros conjuntos, porque eles só viram no IR^2 e no IR^3, na Geometria Analítica. Então a gente puxa daí: [...] bom, a gente chegou nesses geradores, será que com matriz eu também consigo? Será que com complexo, eu também consigo? Complexo é mais fácil porque eles têm a representação no plano.[...] Para polinômios ...?

Depois de apontar a *necessidade*: "...a gente quer buscar no conjunto, uma maneira de representá-lo usando elementos de modo a não ter que considerar os infinitos...", apresenta a *concretização*: "é lógico, a gente faz para o IR^2, o IR^3, e o próximo passo, a gente transporta para os outros conjuntos, porque eles só viram no IR^2 e no IR^3..."; e o caminho para a *generalização* "...será que com matriz eu também consigo? Será que com complexo, eu também consigo?... Para polinômios ...?" Novamente, o professor ressaltou a utilização dos três princípios de Harel em seu discurso, o que caracteriza um recurso "meta", passível de se tornar uma alavanca meta.

Na continuidade da entrevista, Almeida descreveu as atividades que costuma propor, da seguinte maneira:

> As atividades que eu proponho para eles, [...] a gente precisa de uma coisa, a gente trabalha dentro do conjunto, aí tira esse conceito por necessidade, cria, monta, formaliza e em seguida dá uma atividade.

O entrevistado, ao se referir ao desenvolvimento de um conceito matemático, em sua descrição coloquial, afirmou: “a gente precisa de uma coisa“, que pode ser entendido como “precisa de uma noção”, e continuou descrevendo como vai sugerindo aos alunos a necessidade dessa noção (coisa), para, somente depois, formalizá-la. Aqui, mais uma vez, aparece um recurso “meta” utilizado pelo professor.

> Essa atividade em geral eu ponho eles para trabalharem em grupo...com material deles para trabalharem, porque é muito difícil no início para eles começarem a escrever. Então eles trabalham em duplas, mas eu procuro fazer nisso assim uma dinâmica constante, porque enquanto você está fazendo uma descrição com a classe toda, quando as turmas são grandes, você não tem o domínio de segurar a atenção...e parece para eles, que eles estão entendendo tudo, mas na hora que se propõe para fazer uma coisa sozinhos (em duplas, sem auxilio do professor) é que eles percebem o quanto ainda eles precisam para conseguir dominar. Então essa seqüência de atividades vai ajudando a eles a localizar: olha, estou conseguindo fazer isso...parecia tão fácil quando a gente estava fazendo todos juntos (o professor na lousa dirigindo a classe).

Depois de criar a *necessidade* e de formalizar o conceito, Almeida disse que propõe atividades aos alunos, que devem realizá-las em grupo. Aqui o termo “atividades” significa “exercícios”, utilizando a noção desenvolvida anteriormente. Ao comentar sobre as vantagens do trabalho em dupla para a resolução dos exercícios, o professor afirmou: ”...na hora que se propõe para fazer uma coisa sozinhos que eles percebem o quanto ainda eles precisam para conseguir dominar.” O professor aqui está se referindo à oportunidade de reflexão dos alunos sobre as noções desenvolvidas e o auxílio mútuo. Segundo Dorier, este tipo de atividade em grupo pode promover uma maior comunicação entre os estudantes e pode-lhes dar oportunidade de se envolver ativamente em sua aprendizagem, gerando reorganizações *sobre* o conhecimento matemático. Esse tipo de atividade proposta pelo entrevistado é um recurso “meta”, passível de se tornar uma alavanca meta.

O entrevistado acentuou que, ao corrigir os trabalhos de seus alunos, ressalta a importância da linguagem matemática:

> ... eu só dei sugestões para você melhorar a sua linguagem. [...] fala: Álgebra Linear, álgebra, qualquer representação matemática é uma história, tem que ter começo, meio e fim. Eu falo para eles: você não pôs o happy end, que é depois de tudo isso que você demonstrou, qual a conclusão? [...]. Para que você fez tudo isso? [...] olha, se isso e isso acontece, a definição diz que então isso é verdade, ou o teorema, estou garantindo que isso é verdade. Isso é uma história. Para entender[...] Tem que ter as palavras, a vírgula, o eu, entendeu? Para dar uma seqüência, e tem que ter começo, meio e fim. Você se propõe a fazer, desenvolve e põe a sua conclusão. Isso é muito gozado, eu brinco com eles, eu falo: a sua história não tinha nem um elo de ligação no meio dela.

Assim, Almeida sugeriu uma analogia da resolução de uma atividade, exercício de matemática, com uma história, “...que tem que ter começo, meio e fim.”

Essa analogia com a história pode auxiliar o aluno a refletir a respeito das suas resoluções e buscar a compreensão das noções estudadas, procurando os “elos de ligação” da teoria com a atividade em questão. Este tipo de discurso é *sobre* como se expressar em matemática e passível de se tornar uma alavanca meta para o aluno.

Almeida, ao responder sobre as analogias que utiliza, ressaltou a “Analogia, lá da Geometria Analítica...”, reforçando o papel da Geometria Analítica como apoio para as novas noções, isto é, o uso da passagem do *antigo para o novo*.

> Mas, à medida que eu vou tirando: esse aqui é combinação linear dos outros, este não fica, este aqui é combinação linear dos outros, este não fica, até que chega numa hora que ninguém mais é combinação linear de ninguém, então esse aqui é o mínimo que eu preciso, sem o nome, mas eles já chegam no mínimo de vetores para conseguir gerar o espaço._Aí a gente renova que isso aí era o conceito de l.i. e que esse conjunto que tem essas condições serve para representar o conjunto inteiro, o espaço vetorial, e é o conjunto de vetores que é a base.

Conclusão parcial

Almeida, constantemente em seu discurso, procura trazer *informações sobre a natureza dos conceitos matemáticos* a serem introduzidos e *informações constitutivas do conhecimento matemático*, ou seja, falar *sobre* a matemática, o que poderá provocar reflexões dos alunos sobre os conceitos abordados.

O professor, desde o começo da entrevista, apresenta em seu discurso a noção de base como sendo um sistema de geradores minimal, reiterada ao longo da entrevista.

Para trabalhar com a noção de base desse ponto de vista, o professor inicia a reflexão sobre a *necessidade* de uma base para o espaço vetorial através da idéia da vantagem de representar todos os elementos de um espaço vetorial, utilizando apenas alguns desses elementos. O professor continua respeitando o *princípio da necessidade*, ao refletir sobre o *lucro* que se obtém ao *economizar* tempo e trabalho. Esse ponto de vista, sobre base como um sistema de geradores minimal, conforme idéia de Harel, já citada anteriormente, permite a generalização por parte do aluno da noção de base para qualquer espaço vetorial.

O entrevistado faz uso do *principio da concretização*, *passagem do antigo para o novo*, ao afirmar que “vai à Geometria Analítica buscar” o conceito de base dos conjuntos IR^2 e IR^3 para daí tentar *generalizar* para outros espaços vetoriais.

Convém destacar também o trabalho do professor com as atividades que propõe que sejam feitas ora em grupo, para proporcionar o auxílio mútuo, a discussão das noções necessárias à resolução dos exercícios entre eles e conseqüente reflexão sobre essas noções, ora individualmente, em que procura, através de uma analogia com uma história “que tem começo, meio e fim”, ocasionar a apresentação das resoluções dos problemas propostos, de maneira formal, com argumentos matemáticos, explicitando e favorecendo uma reflexão sobre o conteúdo dos mesmos.

Os recursos descritos acima podem se tornar alavancas meta para o ensino/aprendizagem da noção de base de um espaço vetorial.

Alguns recursos meta apresentados por Almeida, embora não estejam relacionados diretamente com a noção de base, são interessantes no desenvolvimento de um curso de Álgebra Linear como um todo, pois podem se tornar alavancas meta para os alunos. Por exemplo, a *necessidade* do teorema do critério prático para se saber se um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço vetorial, é evidenciada pela diminuição de tempo e trabalho, subjacente à idéia de lucro e vantagem. Outro recurso “meta” é o de relacionar a computação gráfica com a Álgebra Linear quando da abordagem das transformações do plano.

Finalmente, explicitarei algumas idéias subjacentes ao discurso de Almeida que podem ter influenciado as escolhas dos recursos meta, por ele apresentados. Quanto à contextualização da disciplina nos cursos, Almeida destaca a Álgebra Linear como sendo a disciplina que introduz o aluno na questão do rigor algébrico, isto é, no formalismo, e coloca a noção de base como um dos tópicos prioritários de um primeiro curso de Álgebra Linear. O entrevistado calcula o índice de reprovação desse curso em torno de 30%.

Entrevista com o professor Brito

Sobre a entrevista:

A entrevista ocorreu no horário determinado pelo professor entrevistado e durou cerca de 50 minutos, sem interrupções. Foi realizada em uma sala do campus da universidade, no qual o professor leciona, estando presentes: o entrevistado, um observador e a entrevistadora.

Caracterização do docente entrevistado:

O professor Brito leciona numa universidade pública do estado de São Paulo há 30 anos. Fez mestrado em Matemática, na área de Topologia e o doutorado em Física-Matemática. Realiza pesquisas na área de ensino de matemática do ensino superior, sendo autor de livro didático de Álgebra Linear.

Análise do discurso do entrevistado

Fase da contextualização da Álgebra Linear nos cursos

O professor Brito explicou a importância da Álgebra Linear da seguinte forma:

> Eu acho que a Álgebra Linear é muito importante porque ela [...] meio que sistematiza, dá um pouco de sentido àquelas coisas que eles aprendem: sistemas, matrizes, é aonde cabe muito bem a Álgebra Linear, quer dizer, o aluno entende o porquê daqueles sistemas. Há o desenvolvimento geométrico, inclusive ele pode ser visto com essa ferramenta, a Álgebra Linear [...] a própria parte das transformações [...] é básico para que ele possa entender cálculo, análise, problema dos autovalores. Então, eu acho que é uma ferramenta super importante para [...] aquela coisa de você sistematizar um pouco o seu raciocínio. A Álgebra Linear, eu acho que faz um papel de organização do nosso raciocínio.

O professor Brito destaca a importância da Álgebra Linear tanto para que o aluno perceba como os sistemas lineares e as matrizes, por exemplo, vão constituir um campo, isto é, como sistematização de assuntos antes tratados separadamente, quanto como uma disciplina que é ferramenta para outras como para o cálculo e a análise. O entrevistado ainda ressalta a importância da Álgebra Linear como organizadora e sistematizadora do raciocínio matemático.

Na continuidade da entrevista, ao responder sobre os tópicos prioritários para um primeiro curso de Álgebra Linear, Brito destacou:

> Bom, matrizes, com certeza. Sistemas. Resolução de sistemas, essa parte. As transformações lineares, também, vistas sob o ponto de vista de matrizes. Autovalores e autovetores. A parte de diagonalização de matrizes, quer dizer, matrizes é o centro, e aí você olhar essas matrizes sob os vários aspectos, como a matriz de um sistema, como a matriz de uma transformação linear, como o que que significa você diagonalizar essa matriz em termos da transformação linear que você tem. Talvez olhar esse foco sob os vários pontos de vista que ele pode oferecer. Que seria mais? É, basicamente isso, num primeiro curso.

Observemos que o professor não incluiu a noção de base de um espaço vetorial entre os tópicos prioritários, mas quando descreveu a maneira como costuma abordar essa noção, lembrou não ter ressaltado a sua importância e disse:

> ...Aquela hora eu não falei de base, mas na verdade, é o conceito fundamental da Álgebra Linear.

Quanto à relação da Álgebra Linear com outras matérias do curso, o professor respondeu:

> Então, na verdade quando você faz Álgebra Linear, você tenta...você puxa lá para os sistemas, para a parte de Geometria Analítica, vamos dizer assim, você faz essa colagem e você também olha para a parte de quando você fala na diagonalização, você faz a ponte lá com, por exemplo, polinômios de Taylor para a classificação de matriz linha, de funções de várias variáveis, você precisa dessa parte. E, para equações diferenciais você precisa de autovalores e dos autovetores. E, a oportunidade é quando você faz, mais lá para frente, por exemplo, variáveis complexas e pede para o aluno resgatar, a coisa das transformações, do plano no plano, tal.

Brito, no trecho acima ressaltou, entre outras, a relação que ocorre entre a disciplina Álgebra Linear e a Geometria Analítica, e quando explanou sobre os pré-requisitos para o ensino de Álgebra Linear disse:

> Em geral ele (o curso de Álgebra Linear) pede Geometria Analítica, mas eu não vejo não. Acho que é um curso que pode começar do zero, só que o problema, talvez, seja um pouquinho da maturidade. O aluno tem que ter um pouquinho...ele tem que aprender a raciocinar em termos da álgebra. E, talvez, a Geometria Analítica seja um pequeno...é...exercício para isso.

Brito, ao afirmar que a Álgebra Linear "é um curso que pode começar do zero", indicou que não vê necessidade de pré-requisito para o desenvolvimento do assunto. No entanto. citou a Geometria Analítica, que geralmente é considerada pré-requisito em programas de Álgebra Linear, como tendo o "papel" de fazer o aluno "raciocinar em termos de álgebra", isto é, no seu entender a Geometria Analítica seria um pequeno exercício para isso.

Quanto à taxa de aprovação de Álgebra Linear, Brito teve a seguinte opinião:

> Os cursos que eu dei não têm diferença em termos de Cálculo e de Álgebra Linear, eu acho que fica em torno de 25% de reprovação. Mas, eu não tenho assim uma visão disso. Mas, é um curso que tem uma alta evasão. O aluno vê que se ele não está entendendo muito bem aquela nova técnica, aquela nova linguagem, ele se desanima e daí ele cai fora, ele tranca a matrícula. Isso a gente percebe bastante.

Assim, o índice de reprovação em Álgebra Linear, segundo Brito, é por volta de 25%, isso sem incluir os alunos desistentes. É interessante notar que o professor não leva em conta nesse índice aquele aluno que “cai fora”, segundo ele próprio, porque “se desanima”, não entende.

E quanto à frase de Plancherel, Brito disse:

> Eu acho...não. Eu acho que eu não concordo, não. Os alunos têm mais dificuldade, talvez, no Cálculo II, na parte vetorial do cálculo II, do que na Álgebra Linear, na minha experiência.

Fase do desenvolvimento da noção de base

O professor Brito, ao explicar como desenvolve a noção de base, iniciou assim:

> Bom, eu costumo enfatizar o seguinte: o que é um espaço vetorial? Então, você trabalhando com um espaço vetorial de dimensão finita, quer dizer, num primeiro curso você só fala nos reais, você não vai falar de espaço vetorial sobre um corpo. Então, uma coisa bem concreta.

Para Brito, *o concreto* é o fato de se trabalhar com espaços vetoriais reais de dimensão finita. E continuou:

> ... o que a gente tem de ferramenta na Álgebra Linear? A gente tem as duas operações nos espaços. Sabe somar e multiplicar por um escalar. É isso. Então, eu falo: “tudo que a gente for fazer, essas são as nossas duas coisas que a gente vai carregar na mão. A gente não sabe fazer mais nada aqui. Então, a gente tem que aproveitar ao máximo essas duas operações, essas duas coisas que esses espaços têm”.

Neste trecho, Brito utiliza uma analogia para designar o papel das operações adição e multiplicação por um escalar na estrutura de espaço vetorial: elas seriam as únicas ferramentas da Álgebra Linear. É o início de um discurso que traz *informações sobre a natureza dos conceitos matemáticos a serem introduzidos.*

Como veremos, no desenrolar do seu discurso, a noção de base começa a nascer a partir dessas ferramentas que são as operações do espaço vetorial. O professor utiliza um discurso *sobre* a Álgebra Linear: “...então a gente tem que aproveitar ao máximo essas duas operações, essas duas coisas que esses espaços têm...” procurando criar as condições para as noções seguintes que irão culminar na noção de base.

Retomando o discurso do professor sobre a abordagem da noção de base, temos:

> ... o que essa estrutura nos dá. Ela é de uma riqueza tal que você não precisa de muita coisa para exibir alguém, ou seja, como é que você caracteriza um elemento genérico do seu espaço? O fato dele (o espaço vetorial, ter um número infinito de elementos) ser infinito, não te traz nenhuma dificuldade pelo seguinte: [...] porque basta um número finito de vetores “bem comportados” para que você consiga exibir qualquer outro elemento. Então, que seriam esses vetores “bem comportados” e qual seria esse número?

O entrevistado fez mais uma analogia, desta vez, entre vetores *bem comportados* e os elementos de uma base. Fato esse que poderá instigar a curiosidade e a reflexão do aluno: "...porque basta um número finito de vetores *bem comportados* para que você consiga exibir qualquer outro elemento". Há no trecho acima, um discurso de caráter "meta", que continuou no desenrolar de sua explanação:

> A gente vai, aí faz a coisa mais concreta com o plano, com o IR^2, o IR^3**,** percebendo então o que significa ser, por exemplo, no IR^2, dois vetores "bem comportados", são aqueles dois que não estejam na mesma reta. [...] Para depois sair aí a noção de que: no IR^2, se você não tem dois vetores colineares são porque eles têm que ser linearmente independentes.

Para explicar vetores *bem comportados*, Brito recorreu à Geometria Analítica, ao IR^2, onde retomou a noção de vetores linearmente independentes, relacionando-a com: vetores não colineares, vetores que não estão na mesma reta e vetores *bem comportados*. Dessa forma, o professor estava usando *o princípio da concretização* de Harel e o ponto de vista da passagem do *antigo para o novo*. E continuou:

> Aí eu costumo fazer desenhos, quer dizer, pego dois vetores quaisquer e pego um terceiro vetor no plano e vamos então expressar esse vetor genérico em função daqueles dois vetores dados. Faz na lousa, usa a lei do paralelogramo. Aí, percebendo o que seriam aquelas componentes, daquele vetor na direção de dois vetores dados para achar os alfas lá da vida, a combinação linear. E, aí faz para o IR^3, faz a mesma coisa. Aí volta, na questão, por exemplo, da Geometria Analítica de que se você tem um plano, você tem três pontos. Por que que esses três pontos então, não colineares, determinam um plano?

O professor, no trecho acima, continuou se referindo ao quadro da Geometria Analítica, fazendo desenhos familiares aos alunos para relacioná-los com o conceito de vetores linearmente independentes. Ele estava trabalhando a *concretização* dessa noção no *antigo* para depois utilizar no *novo,* o que, segundo Dorier e seu grupo, caracteriza uma possível alavanca meta. Está preparando também a noção de conjunto de geradores de um espaço vetorial: "Aí, percebendo o que seriam aquelas componentes, daquele vetor na direção de dois vetores dados para achar os alfas lá da vida, a combinação linear". Essa noção de sistema de geradores e também a de vetores linearmente independentes surgiram na sua fala em seguida:

> Aí, você volta na questão de você ter ali dois vetores linearmente independentes que vão gerar um espaço, chamando a atenção que esse plano tem que estar na origem para poder falar de espaço vetorial. Por isso que a gente trabalha então com todos os vetores na origem. Então, tenta resgatar essa coisa da álgebra, da Geometria Analítica, em termos de espaços de dimensão menor do que três no IR^3. Então, pega as retas pela origem, pega os planos pela origem e aí por isso que eu falo que talvez a Geometria Analítica seja importante porque você retoma com eles a questão de que você tem um "grau de liberdade", dois "graus de liberdade".

O professor, na seqüência do seu discurso, já está falando sobre a base, sem oficializar o conceito quando lembra que existem "ali", na representação do R^3 no quadro, dois vetores linearmente independentes, que vão gerar um espaço vetorial. O entrevistado chama a atenção para o fato de que esse plano deve conter a origem dos eixos cartesianos, para que este seja um espaço vetorial. Ele implicitamente está utilizando a idéia de "conjunto maximal de vetores linearmente independentes" de um espaço vetorial. Brito continua utilizando exemplos da Geometria Analítica em seu discurso, fazendo a ligação com os subespaços do IR^3. Ao falar sobre os subespaços do R^3, os planos, retas que contêm a origem ou que passam pela origem no desenho, Brito utilizou outra analogia: *grau de liberdade*, melhor especificado a seguir:

> Costumo falar para eles, por exemplo, que: quando você faz uma reta, está bom, você precisa, na verdade você tem um "grau de liberdade", você precisa de um vetor para gerar essa reta e um ponto obviamente. Se esse espaço é um espaço vetorial, você precisa simplesmente de um vetor porque essa reta tem que passar pela origem.

Mais uma vez, o professor, sem falar explicitamente em base, está antecipando essa noção, e também a noção de dimensão de um espaço vetorial. Esses conceitos: linearmente independente, sistema de geradores, base e dimensão vão se entrelaçando no seu discurso, assim como os fios da sua *colchinha de crochê*, que é a nova analogia que apareceu na continuidade de sua fala:

> Agora, quando você pega o plano, se você tiver retas paralelas, você não consegue "amarrar" aquilo, é como se você fosse fazer...eu faço uma "colchinha de crochê", uma "toalhinha". É que se você tem que tecer alguma coisa, você precisa ter fios em duas direções pelo menos, senão você não consegue tecer nada, não é? Aí, então, não adianta você juntar um monte de retinhas, não é? Você tem que ir entrelaçando isso, tem que ir fazendo uma malha. Então, você precisa de duas direções para fazer o plano, então, a gente volta no plano e aí vê...E aí, o que significa, então, você escrever um vetor como combinação linear de dois?

Com a analogia, tecer uma *colchinha de crochê*, ou uma *toalhinha*, o professor está procurando fazer seus alunos refletirem *sobre* as noções de independência linear: "quando você pega o plano, se você tiver retas paralelas, você não consegue "amarrar" aquilo...". E sobre sistemas de geradores: "Você tem que ir entrelaçando isso, tem que ir fazendo uma malha...você precisa de duas direções para fazer o plano...". Observemos que, mais uma vez, temos um discurso "meta", fundamentado na analogia que é um discurso *sobre* a matemática. E, na continuidade de sua fala:

> Porque eles ficam com aquela sensação de que você só pode fazer com sistema ortogonal, não é? E não. E aí, você tem então os dois vetores e, você acha quais são as componentes desse vetor em relação a dois vetores quaisquer linearmente independentes, no sentido de que eles não estão na mesma reta.

O entrevistado mostra uma preocupação com uma possível generalização que pode ocorrer advinda da Geometria Analítica que é "...a sensação de que você só pode fazer com sistema ortogonal...". Com a analogia *colchinha de crochê* procura evidenciar que, no IR^2, quaisquer dois vetores linearmente independentes podem gerar outro vetor e que se pode encontrar as componentes desse vetor. Na continuidade de sua fala, retomou a analogia *graus de liberdade*:

> Aí, depois, passo um pouquinho para as matrizes, quer dizer, a qual (espaço) que está relacionado? As matrizes, por exemplo, dois por dois, com o espaço vetorial IR^4. Estabelecer essa coisa de que você tem quatro "graus de liberdade"**.** Então, "grau de liberdade**"** aí, é muito forte, no sentido da dimensão do espaço. Para que eles tenham essa noção de quantos elementos eles precisam para que eles consigam gerar aquele espaço que eles querem e de uma "maneira ótima", no sentido assim, não preciso mais do que aquilo, aquilo lá é suficiente.

Brito, com a noção de dimensão dada através da analogia *grau de liberdade*, relaciona o espaço vetorial das matrizes 2x2 com o espaço vetorial IR^4, procurando reforçar a importância da quantidade de vetores necessários para gerar o espaço vetorial de uma "maneira ótima", ressaltando assim a importância e a necessidade da noção de base: "... não preciso mais do que aquilo, aquilo lá é suficiente". Dessa maneira, o entrevistado continua falando sobre a matemática e *fornecendo informações sobre a natureza dos conceitos matemáticos que são introduzidos.*

> Espaços vetoriais de mesma dimensão têm o mesmo papel dentro da Álgebra Linear, ocupam menos espaço, na verdade. Quer dizer, você pode identificar um IR^4 com as matrizes 2X2, sem problema nenhum, sabendo como que você faz essa identificação, quer dizer, então eu acho que essas coisas...na verdade o conceito de base é um conceito que facilita o seu trabalho dentro da Álgebra Linear. E esse talvez seja a questão fundamental da Álgebra Linear, ou seja, aí talvez more a dificuldade do aluno, até que ele perceba esse conceito. Aquela hora eu não falei de base, mas na verdade, é o conceito fundamental da Álgebra Linear.

Com a noção de dimensão, Brito ressalta que os espaços vetoriais de mesma dimensão podem ser identificados entre si, antecipando dessa maneira a noção de isomorfismo entre espaços vetoriais, e também destaca o quanto é fundamental a definição da base como uma noção que facilita o trabalho dentro da Álgebra Linear.

Ao responder sobre atividades que propõe aos alunos, Brito explicou mais detalhadamente por que as duas operações do espaço vetorial são importantes ferramentas para a noção de base:

> É...preparando, na verdade, assim. Eu digo assim: bom, agora, a gente vai ver o conceito que vai permitir com que a gente trabalhe nessa nova estrutura aí que a gente está aprendendo [...]. E aí eu vou chamando a atenção, quer dizer, quando você pega um vetor e escreve como combinação linear dos outros, o que é que você está fazendo? Você está usando a estrutura, você está somando coisas, que você sabe fazer, você está multiplicando um vetor por um número. É a única coisa que você sabe fazer. Então, chamar a atenção para a necessidade da gente organizar aquele espaço, ou seja, de aproveitar aquelas operações que estão definidas nele para a gente [...] facilitar a nossa vida dentro da Álgebra Linear. Então, assim, eu vejo bastante a base, eu olho o conceito de base como aquele facilitador de descobrir elementos lá dentro.

O professor, no trecho acima, continua ressaltando a importância da estrutura, pois as suas operações, “única coisa que você sabe fazer”, possibilitam escrever um vetor como combinação linear dos outros. Ressalta ainda a *necessidade* (princípio de Harel) de organizar aquele espaço através das operações e de introduzir novas noções que irão facilitar a descoberta de novos elementos dentro da estrutura.

Brito, ainda ao falar sobre as atividades que propõe, ponderou sobre a dificuldade que os alunos possuem com a noção de base, principalmente com a sua formalização:

> ...com todo esse trabalho aí, eles não conseguem chegar na definição sozinhos. Mas, eles ficam com uma noção do que é. Eles não conseguem é formalizar, escrever direitinho aquilo, mas eles conseguem perceber o que é que significa gerar aquele espaço. [...] Então, esse processo, eu acho que é um processo que...para mim também foi assim quando eu estudei Álgebra Linear. Teve um dia que dá um click assim na gente. Você percebe que está trabalhando com a estrutura, então, por isso que eu falo muito dessa estrutura para os alunos, para ver se eles conseguem, eles mesmos lá dentro, fazerem um click. Porque, para mim foi claro assim, foi muito claro o dia que, nossa...então é tudo isso [...] E aí o raciocínio fica muito simples. Mas, até que você não consiga fazer essa, essa imersão aí no...ela fica um pouco abstrata.

Brito, através da sua própria experiência como estudante, ressalta que existe um processo inerente a cada um, que está diretamente ligado à necessidade de se compreender que se está lidando com uma estrutura, a estrutura de espaço vetorial, para que possa ocorrer um “click”, de forma que o raciocínio fique mais simples. Segundo o entrevistado, esse processo não se esgota no ato da formalização da definição e explicou melhor esse pensamento ao responder sobre as aplicações da Álgebra Linear:

> Como que a estrutura de espaço vetorial e as transformações lineares, elas se dão tão bem que para que você determine uma transformação linear basta que você saiba qual é o valor dela em dois vetores que não seja, quer dizer, se você estiver no IR^2, obviamente. Então, no IR^2, você pega uma transformação linear e você sabe que ela leva dois vetores, um lá e o outro aqui. Se esses dois vetores forem "bem comportados", no sentido de serem linearmente independentes no IR^2, ou seja, é uma base no IR^2, você sabe a sua transformação. Então, esse é um outro ponto, que aí começa a clarear para eles a questão da dimensão. Se você...então você consegue recuperar uma transformação linear, ou seja, saber exatamente como que ela atua em qualquer vetor, sabendo em dois. No IR^3, em três, e por aí vai. [...] O conceito de base eu acho que ele é construído durante o curso. [...] as transformações lineares, ela é determinada pelo o que acontece na base, aí ele volta lá, compara aquela definição e eu acho que esse é um processo que vai...libertando o conceito.

Para o entrevistado, é no desenvolver do curso que se constrói a noção de base. Quando se estudam as transformações lineares, o aluno tem a oportunidade de retomar e "clarear" a noção de base e de dimensão, de "libertar o conceito" de base. Dessa maneira, reforça a sua importância e aplicabilidade para as noções posteriores, como a de transformação linear. Segundo Dorier, é importante permitir aos estudantes verem, através de recursos "meta", como certos conhecimentos podem ser reutilizados ou reciclados, em diferentes situações, poupando-lhes assim tempo e energia.

E, ao falar da dificuldade do aluno com a noção de base, ressaltou novamente a necessidade do "click" que deve ocorrer no aluno sobre a noção, na hora certa para esse aluno:

> Eu acho que esse conceito, ele, quer dizer, em geral, muitos alunos passam sem saber esse conceito de base. Eu acho que muitos alunos também, talvez, consigam ter esse click aí, mais para o final do curso. Mas, eu diria que quando eles estão...já lá, talvez, fazendo análise, fazendo [...] equações diferenciais...Esse conceito eu acho que vai sendo construído no decorrer do processo dele assim de formação. Eu acho que não é um conceito [...] que você tem garantia de que ele tenha Domínio, quando ele acaba o curso de Álgebra Linear. Eu acho que tem alguns alunos que conseguem isso que são aqueles que talvez conseguiram abstrair e perceber a ferramenta nova que eles têm na mão.

O professor ressalta novamente, no trecho acima, que a noção de base vai se tornar mais clara talvez no final do curso, ou quando ainda o aluno estiver cursando análise, equações diferenciais. Os alunos que conseguem, segundo o entrevistado, são aqueles que perceberam “a ferramenta nova que eles têm na mão”, ou seja, a *concretização* se faz a partir da *necessidade* dessa ferramenta. E finaliza seu discurso com a analogia do *presente* a ser descoberto pelo aluno:

> É como a gente ganhar um presente. Às vezes você ganha um presente, não está preparado para aquele presente e você vai guardar ele e na hora que você achar que está preparado, você vai lá e pega. Então, eu vejo assim um pouco a matemática e principalmente a Álgebra Linear. É um presente, no sentido assim: uma ferramenta poderosíssima que vocês tiveram numa hora que talvez vocês ainda não saibam usar. Vai ter que amadurecer um pouquinho mais, mas ele está ali presente, ele está, está construído, vamos dizer em algum nível da sua instrução consciente que você vai em algum momento [...] se apropriar. Então, você leva o presente para casa, começa a fazer as suas...que nem um marceneiro...os seus trabalhos com ele.

Conclusão parcial

O professor apresenta em seu discurso a idéia de base como conjunto maximal de vetores linearmente independentes, idéia essa expressa em diferentes momentos, principalmente por meio do apelo a *graus de liberdade*.

Brito, durante a sua entrevista, além de *fornecer informações sobre a natureza dos conceitos matemáticos a serem introduzidos* e *informações constitutivas do conhecimento matemático*, procura, através das operações que dão a estrutura de espaço vetorial, adição e multiplicação por escalar, gerar a *necessidade* (princípio de Harel) de uma noção (a de base) que organize o espaço e facilite o trabalho dentro dessa estrutura.

O entrevistado não isola as diferentes noções de dimensão, dependência linear, base e isomorfismo em sua fala. Ele articula, trama essas noções de uma forma circular, sem estabelecer prioridade a nenhuma delas ao longo do discurso. Essa forma de expressão enfatiza a ligação entre essas idéias, o que pode fazer com que as idéias subjacentes ao estudo dos espaços vetoriais se revelem.

Em sua "trama", utilizou uma série de analogias, como: *vetores bem comportados*, *colchinha de crochê, grau de liberdade,* para instigar a necessidade da noção de base e de dimensão. Além disso, utilizou a passagem do *antigo para o novo*, tendo o quadro da geometria analítica como antigo (princípio da concretização de Harel) para, através das analogias citadas, ocasionar reflexões a respeito das noções de base e de dimensão.

O professor deixou claro em seu discurso que as noções introduzidas durante um primeiro curso, em especial a de base, vai "clareando" aos poucos para alguns alunos, como por exemplo quando trata de transformações lineares, sendo que cada um tem a sua hora certa para compreender essa noção.

Os discursos acima são todos *sobre* a matemática, com um caráter "meta" passíveis, segundo Dorier, de se tornarem alavancas meta.

Destacamos algumas idéias interessantes que surgiram no discurso do entrevistado, ao falar sobre a contextualização da Álgebra Linear nos cursos, idéias essas que podem estar relacionadas com os recursos “meta” que aparecem em seu discurso.

Brito considera a Álgebra Linear importante para organizar o raciocínio, sistematizar, dar um pouco de sentido a algumas coisas que os alunos aprendem e cita como exemplo os sistemas e matrizes.

Quanto à noção de base, quando o professor respondeu sobre os tópicos prioritários, não destacou essa noção, mas, mais tarde, ao falar sobre a abordagem da noção, ressaltou não tê-la colocado como prioritária e reformulou, dizendo que é fundamental para o desenvolvimento do curso de Álgebra Linear.

Brito relacionou a Álgebra Linear com outras noções das disciplinas do Curso, como as equações diferenciais e polinômio de Taylor.

Apesar de dizer que em geral um curso de Álgebra Linear “pede” Geometria Analítica, o professor não a considera como um pré-requisito para a Álgebra Linear.

O índice de reprovação em Álgebra Linear, segundo Brito, é de 25%, sem incluir os alunos desistentes, mas não considera a Álgebra Linear como uma das disciplinas mais difíceis, mas sim o Cálculo II.

Entrevista com o professor Cunha

Sobre a entrevista

A entrevista ocorreu no horário determinado pelo professor entrevistado e durou cerca de 50 minutos, sem interrupções. Foi realizada numa sala de aula do campus da universidade, no qual o professor exerce sua docência, estando presentes: o entrevistado, um observador e a entrevistadora.

Caracterização do docente entrevistado

O entrevistado, denominado como professor Cunha, leciona em uma universidade pública do estado de São Paulo há 12 anos. Ministrou Álgebra Linear, entre outras disciplinas, em diversos cursos, tais como Ciências da Computação, Física, Licenciatura e Bacharelado em Matemática, assim como em cursos de pós-graduação. É bacharel em Física e mestre e doutor em Matemática.

Análise do discurso do entrevistado

Fase da contextualização da Álgebra Linear nos cursos

O professor Cunha, ao responder sobre a importância da Álgebra Linear, disse:

> ...A Álgebra Linear talvez seja a tradução da nossa idéia de homogeneidade, a idéia de linearidade. Outro dia mesmo, num curso que nem é de Álgebra Linear, Cálculo, eu pus um problema: uma indústria produz tal coisa em tal tempo. Quanto tempo precisaria para produzir tantas máquinas? [...] Na hora ele usa regra de três. E aí então, tão logo responderam, eu comecei: se a fábrica fecha aos sábados e domingos? Isso muda? Se, fecha para alguns? Isso muda? Se falha a energia? E você começa a pôr os obstáculos. Aí eles percebem: [...] não sei por que, está na nossa cabeça uma certa linearidade de ver, que é a homogeneidade.

O entrevistado levantou a questão de que as pessoas em geral recorrem espontaneamente à linearidade para resolver problemas, mesmo que não sejam lineares. Indicou também uma de suas formas de levantar essa questão com os alunos. Nesta fala, o professor se refere à homogeneidade, no sentido em que há uma homogeneidade natural de tratar os problemas como se fossem todos lineares.

> Então, a Álgebra Linear talvez seja a coisa mais simples que se tem para tirar da natureza, ou da nossa idéia [...] Como formalizá-la? E essa idéia de linearidade, como eu vou formalizar [...] a Álgebra Linear é que faz isso. É ela que permite transladar. É ela que permite esticar, não é? Então, é...não poderia ter algo mais importante para você ver que, que você está criando a ferramenta para traduzir todas essas suas noções e talvez ela seja uma disciplina difícil justamente porque ela tenha essa coisa de tão natural, não é?

Neste trecho, o professor destacou que a Álgebra Linear vem satisfazer a *necessidade* da formalização da "linearidade". É interessante notar que na fala "a Álgebra Linear talvez seja a coisa *mais simples* que se tem...", seguida de "e talvez ela seja uma disciplina difícil...", Cunha revela sua visão de que, se por um lado há simplicidade nas idéias da Álgebra Linear, por outro, há dificuldade em sua aprendizagem. O que corrobora a impressão de Revuz (in DORIER, 2000), quando destaca, na introdução do livro: "É um aparente paradoxo do desenvolvimento matemático que as grandes idéias fecundas são intrinsecamente simples, mas sendo necessário muito tempo e muito esforço para desenvolvê-las."

Quando o entrevistado apresentou a Álgebra Linear como sendo "... ela que permite transladar. É ela que permite esticar, [...] você está criando a ferramenta para traduzir todas essas suas noções...", ele está introduzindo o interlocutor no universo da Álgebra Linear de uma forma dinâmica, apelando a sua intuição.

Essa maneira de apresentar a importância da Álgebra Linear tem um caráter “meta”, que em aula pode se caracterizar como alavanca meta para alguns alunos, pois esse discurso está relacionando uma noção *antiga* e *quotidiana*, linearidade, com uma estrutura nova que será apresentada aos alunos e, além disso, está fornecendo aos estudantes *informações sobre a natureza dos conceitos matemáticos a serem introduzidos.*

Essa maneira de *fornecer informações sobre os conceitos a serem introduzidos* e a idéia da linearidade continuou em seu discurso quando respondeu a respeito de quais são os tópicos prioritários para um primeiro curso de Álgebra Linear:

> Num primeiro curso de Álgebra Linear?[...] as transformações lineares. [...] elas (as transformações) têm que ser dadas de uma forma aplicada...ligadas nos vários problemas, na geometria, nas próprias questões do cálculo que você pode abordar, olhando a linearidade ou pelo menos a perda da linearidade [...] O único tópico de Álgebra Linear é transformações lineares...

No trecho acima, Cunha indicou como tópico mais importante do curso, aliás, como único tópico, a noção de transformação linear, e destacou a necessidade de trabalhar com essa noção de forma aplicada. Isso justifica seu modo de apresentar a matéria como aquela que permite modelizar o “esticar” e “transladar”, citados anteriormente. Essas idéias de “para o que serve?”, “como utilizar?”, têm certamente caráter “meta”.

É interessante notar, na continuidade da sua resposta, o fato de o professor sugerir uma inversão na apresentação dos tópicos de Álgebra Linear:

> ... primeiro preciso falar no “ambiente”, onde essas coisas acontecem, essas transformações, por isso preciso falar de espaço vetorial antes, eu poderia inverter, e falar do que eu preciso no meu espaço, para falar de uma transformação que tivesse essa propriedade, que depois eu chamaria de linear...

Assim, o entrevistado, reafirmando a priorização da noção de transformação linear, sugeriu a inversão da ordem que usualmente é utilizada nos livros didáticos, conforme atesta resultado de pesquisa de Claudia ARAUJO (2002). Isto é: primeiro os aspectos intrínsecos da estrutura de espaço vetorial e depois os extrínsecos, das relações entre espaços vetoriais, as transformações lineares. Segundo ele, a partir das transformações lineares, cria-se a necessidade de um "ambiente", ambiente esse que seria o dos conjuntos que possuem estrutura de espaço vetorial.

O professor criou outra analogia quando falou em *ambiente*, como sendo a estrutura de espaço vetorial, cujas propriedades seriam necessárias para o desenvolvimento de transformações lineares. Mais uma vez, está procurando com o seu discurso justificar a *necessidade* (princípio de Harel) do estudo dessa estrutura e ao mesmo tempo *informar a respeito da natureza dos conceitos matemáticos a serem introduzidos.*

Ao responder sobre a relação da Álgebra Linear com as outras matérias do curso, o professor indicou primeiramente:

> ...com relação aos outros cursos...em geral, tentam buscar nos fenômenos não lineares aproximações, quase sempre, aproximações por coisas lineares. Dito isso, já não precisa dizer mais nada.

Assim, ao relacionar o assunto com os outros assuntos do curso, o entrevistado ressaltou a importância da Álgebra Linear para as outras matérias, no fato de que, ao tentarem resolver problemas não lineares, elas apelam para aproximações lineares. Ele acrescentou:

> ... tem um pressuposto de que o linear é o mais simples. Se o aluno não entende essa simplicidade da linearidade, ele (dará pouco valor) para você estudar derivada, [...] estudar plano tangente.

O professor ressaltou a importância de fazer o aluno perceber que o linear é o mais simples, de que há vantagens na linearização dos problemas, principalmente daqueles que não são lineares. Exemplificou, então, com a noção de derivada, plano tangente, quando do estudo de Cálculo. Continuando sua fala:

> Eu diria do ponto de vista mais geral, prático da Álgebra Linear pensada como uma coisa que é dada para todas as ciências exatas, mas do ponto de vista estrito da matemática, não tem dúvida, é a estrutura mais simples, não é? E ela tem...ela é que vai servir de modelo para as várias outras estruturas.

Neste trecho, o professor indica a necessidade de certas noções da Álgebra Linear tanto para o desenvolvimento da disciplina em si quanto para os outros cursos de álgebra que abordam o estudo de estruturas algébricas, ressaltando sempre que o aluno deve entender a simplicidade da linearidade para poder valorizar as noções a serem desenvolvidas.

O entrevistado, ao responder sobre a necessidade de pré-requisitos para um primeiro curso de Álgebra Linear, ressaltou:

> ...eu vejo assim, tipo: com um pouquinho de Geometria Analítica, eu dou um excelente curso de Álgebra Linear. Com um pouquinho de Geometria Analítica, projeções, projeções paralelas ao plano, projeções, não é? Todo esse tipo de projeção, ortogonais, ou projeções em qualquer direção, qualquer que seja. Essa daí e as outras idéias, translações, dilatações, tudo isso...Se o cara tiver um "traquejinho" ele descobre a linearidade nisso. Então, não vejo mais do que isso como necessidade de a gente começar um curso de Álgebra Linear.

Cunha destacou que há a necessidade de "um pouquinho de Geometria Analítica", principalmente projeções, projeções paralelas ao plano, projeções em qualquer direção, dando a entender que necessita da *concretização* (princípio de

Harel) advinda de um curso de Geometria Analítica para que o aluno possa descobrir a linearidade.

Quanto ao índice de reprovação em um primeiro curso de Álgebra Linear, Cunha respondeu:

> ...esse ano, por exemplo, não estou dando Álgebra Linear. [...] a sala está enorme, está cheia, ou seja, houve muita reprovação, também. [...] Mas, olha, isso não é específico de Álgebra Linear. Esse índice...Geometria Analítica, pelo que eu sei, também está super enorme a turma [...] Eu acho que tem problema é... Álgebra Linear sem esse apelo da Geometria Analítica fica difícil. E nossos alunos não têm condição de acompanhar, nem sequer um curso de Geometria Analítica, hoje, não é? Então. [...] eu acho que este tipo de reprovação tem sido alto em tudo, em todas as disciplinas.

O professor coloca tanto a Álgebra Linear quanto a Geometria Analítica com um número grande de reprovações, e destaca novamente que a Álgebra Linear necessita da Geometria Analítica. Destaca ainda o fato de a reprovação também ser grande em Geometria Analítica, o que acarreta dificuldades para o curso de Álgebra Linear.

Ao responder sobre a frase de Plancherel, Cunha disse:

> Olha, valeria a pena ver se ele quando, em que situação ele deu esse curso, não é? Se foi um primeiro curso, se era um curso já pós onde os alunos já tinham tido outros contatos com a matemática, porque o que eu acho que é difícil na Álgebra Linear é a axiomatização, da forma como é feita [...] os textos em geral também, para mostrar que ele está ganhando alguma coisa [...] colocam alguns exemplos que eles chamam, eles mesmo chamam de patológicos, não é? E aí o aluno se assusta mais ainda, não?

O professor ressaltou a dificuldade existente com a axiomatização em Álgebra Linear, questionando a maneira como é apresentada em alguns livros, que utilizam exemplos patológicos, que acabam assustando os alunos e explanou sobre uma experiência que realizou em sala de aula:

> ...eu fiz um teste uma vez, me pareceu que é interessante, que é o seguinte: não chamar a operação chamada usualmente de soma, de soma e nem de multiplicação. Com as operações estabeleça um símbolo que não seja essa cruzinha da soma, carregue isso por bastante tempo. Carregue por mais tempo, não tenha pressa [...]. Parece que quando é feito isso ele ganha melhor noção do que ele está fazendo. Eu tive essa impressão. E tento fazer isso sempre. Algumas turmas, às vezes, a gente se antecipa demais em mudar a notação, porque, para a gente mesmo, é difícil ficar nessa [...] Ele vai no texto, o texto também está [...] chamando de soma. Então, esse contraste é difícil.

O professor sugeriu que, ao utilizar outros símbolos para as operações dos espaços vetoriais: “Com as operações estabeleça um símbolo que não seja essa cruzinha da soma, carregue isso por bastante tempo. Carregue por mais tempo, não tenha pressa [...]. Parece que quando é feito isso ele ganha melhor noção do que ele está fazendo.”, o aluno perceberia melhor a importância das operações que dão estrutura de espaço vetorial a um conjunto. No entanto, ele mesmo levantou a questão de que, se o aluno consultar o livro didático, este recurso pode não ter o mesmo efeito, pois o livro apresentará o nome e sinal das operações. Apesar desse empecilho apresentado pelo livro didático, esta estratégia evidencia uma manobra “meta”, que pode ser utilizada para discutir as propriedades requeridas pela estrutura a ser estudada.

Fase do desenvolvimento da noção de base

Nessa fase da entrevista, quando o professor explanou sobre a sua maneira de abordar a definição de base, colocou, de início, que é um pouco difícil se desviar do tradicional, pois em Geometria Analítica já é apresentada a noção de base aos alunos. No entanto, a seguir, o seu discurso tomou duas direções.

Num primeiro momento do discurso, o professor sinalizou com um significado para a noção de base:

> ...se você me disser base, essa palavra como ela tem significado dado no português para a gente, já é uma coisa forte...ela só vai ter significado para os alunos quando eles derem valor em substituir algum espaço estranho, um conjunto que ele não tem muita familiaridade, substituir esse conjunto por um conjunto que lhe seja mais familiar. Se ele achar que IR^n é um conjunto mais familiar, não é? [...] As coisas que estão acontecendo nesse espaço eu vou ter a sua representação num outro espaço. Lá eu manipulo e volto, não é?

O professor, além de ressaltar que a palavra base "...já é uma coisa forte...", pelo seu próprio significado no português, explicitou a idéia de substituirmos um espaço estranho, ao qual não estamos acostumados, por um espaço mais conveniente, através das transformações lineares, dos isomorfismos, para valorizar a noção de base. E na continuidade de sua fala:

> Então a idéia de base ela nasce aí: eu quero fazer o que logo depois você chama de isomorfismo em Álgebra Linear, não? [...] E...quando você der valor e tiver interesse nessa coisa de manipular com um espaço que lhe é mais familiar, você naturalmente tem o conceito de base, não é? Porque é só ela que permite, através do espaço, criar uma n-upla de números reais**.**

O professor continuou explicitando a idéia de antecipar a noção de transformação linear, ou ainda, a idéia de que transformação linear deve ser aquela noção que criará a *necessidade* das outras noções da Álgebra Linear.

Essa maneira de utilizar uma noção matemática, que não é o foco de estudo no momento, para auxiliar o aluno na reflexão sobre um novo conhecimento matemático, é destacada por Robert e Robinet (1996) como uma possível alavanca meta.

Em um segundo momento, o professor sinaliza com mais um ponto em que o aluno pode dar valor para a noção de base:

> Quando eu dou Álgebra Linear nunca falo de matriz até chegar o ponto de falar matriz de uma transformação linear, e daí é claro, é ter a base, o interesse, mas esse é interesse técnico, na verdade, porque a hora que você associa uma matriz e que você verifica que a composição de transformações em termos das suas matrizes é aquela nossa...Eu uso isso para definir multiplicação de matrizes. Olha, eu quero criar uma matriz, associada a essa composta, a partir das matrizes das outras duas. Então, pronto, eu crio. E daí eu te dou a definição de como criar aquela matriz. De repente você dá para os alunos aprenderem a multiplicar matrizes e ela sai como conseqüência do que eu quero depois. Eu quero ver como que é a matriz associada à composta das duas matrizes [...] O aluno, de novo ganha um valor, dá um valor à idéia de base, não é verdade?

Levando em conta que a compreensão da noção de base vai ocorrendo no transcorrer do curso, o entrevistado exemplifica esse ponto de vista, explicitando a maneira que utiliza para desenvolver com os alunos a noção de matriz de uma transformação linear. Em especial, a composta de transformações lineares com a qual define o produto de matrizes. E continua:

> Bases criadas... a partir da base criar uma matriz. E isso tem vantagens. Vantagens reais, a técnica mesmo, não tem...mesmo que depois você possa esquecer a transformação...primeiro você esquece o espaço quando joga em IR^n, entra a base. Depois você pode, também usando a noção de base, esquecer a própria transformação linear e olhar para aquelas coisas de matrizes. Puxa vida, ele está num "ambiente", digamos, bem favorável, não é? E...então a base... não vai aparecer assim de uma vez ou outra, todo o interesse na determinação de criar o conceito de base. Fora aí, os outros problemas: [...] criar bases apropriadas para você descrever um fenômeno, estudar a geometria de alguma transformação linear. Bom, de novo base.

Nesses dois momentos, o entrevistado antecede conteúdos, como a idéia de isomorfismo. Utiliza informações *sobre o funcionamento da* Álgebra Linear e aplicações, "criar bases apropriadas para você descrever um fenômeno, estudar a geometria de alguma transformação linear". Dessa forma, está procurando auxiliar o aluno a criar a *necessidade* da noção de base e a partir dessa necessidade, valorizar essa noção. Neste caso, temos mais um recurso "meta".

Outra idéia importante, a de base como sendo o conjunto minimal que gera o espaço, apareceu em seu discurso quando respondeu a respeito das atividades e exercícios que utiliza em suas aulas para o desenvolvimento da noção de base.

> ...a idéia de você pegar um espaço gerado num conjunto grande de vetores e fazer o processo inverso: pedir para eles (irem) retirando coisas desnecessárias. Levá-los a um ponto de falar [...] agora não consigo tirar mais...Você pedir para eles justificarem: como é que você consegue garantir para mim que não vai tirar mais? Como que isso vai acontecer? Como que você pode ter certeza que você não vai conseguir tirar mais?

Observemos como o professor simulou um diálogo com alunos, em que procurou ressaltar a noção de independência linear com o ato de “jogar fora o que é desnecessário” e a pergunta “como é que você consegue garantir para mim que não vai tirar mais?” O professor está mais uma vez falando *sobre* a Álgebra Linear, e continuou:

> ...está extraindo as combinações [...] ele não sabe que você vai pegar um conjunto gerando um espaço unidimensional, um conjunto gerando um bidimensional, e pede para ele um conjunto maior do que dois, incluindo uma base lá. De três e quatro e pede para ele ir tirando. Então, isso dá uma curiosidade [...] . Por que que ele não conseguiu mais, não é? Quer dizer, mas claro que você fazendo o apelo já na Geometria Analítica. Ele aceita desde que esteja ali, pelo menos em dimensão menor ou igual a três, o processo vai.

Na simulação do diálogo com os alunos, Cunha não fala que está procurando uma base, ou seja, procura, através do processo de retirar vetores que são combinações lineares dos outros, instigar a curiosidade dos alunos ressaltando a questão do “Por que que ele não conseguiu mais?”. Essa questão, ao ser respondida, retoma a noção de um conjunto de geradores com vetores linearmente independentes, da Geometria Analítica, surgindo a idéia de base.

Na seqüência de sua explanação sobre as atividades e exercícios que propõe, Cunha disse:

> ...nós temos um departamento curioso, o pessoal é bastante preocupado com a alternância da forma, tentativa, sabe. Tem um exemplo prático: um professor outro dia escreveu uma apostila de Álgebra Linear, que ele estava confiante é... que o problema da...do estudo de dependência linear vinha do nome. Os alunos não conseguem entender dependência e independência linear porque trazem com essa palavra...linearmente independente e dependente, um significado estranho que a gente não consegue: é...dependente, dependente do quê? E algumas coisas desse tipo.E aí então ele começou a usar um outro palavreado: o conjunto é xpto, ele fala. O conjunto é xpto se acontece...tá lá a definição que ele dá. Ele é da Educação Matemática, ele escreveu umas coisas aí sobre as conclusões que ele chegou das diferenças que se faz dentro do curso ou não. Ele fez isso com uma turma e com a turma, do diurno e noturno. Então, diurno, ele fez de um jeito, noturno fez...é a mesma aula, exceto pelo nome e ele detectou diferenças, ele comentou essas coisas...Mas, esse departamento tem, tem umas curiosidades, talvez por ter a Educação junta, não sei...

O entrevistado relata em seu discurso uma experiência realizada por um professor do seu departamento, experiência essa que tem um caráter meta, ressaltando o quanto esse departamento se preocupa em procurar alternativas para o ensino/aprendizagem das disciplinas sob sua responsabilidade. Destacou ainda o fato de que o departamento possui "...a Educação junta...", dando a entender que talvez esse fato ocasione maiores questionamentos a respeito das metodologias utilizadas nas diversas disciplinas.

Cunha, ao responder sobre as analogias, traz em seu discurso mais sugestões sobre a *necessidade* da noção de base:

> Você pode falar da idéia de base...o que que eu estou querendo quando estou usando uma palavra como essa? Base. [...]. Base é aquilo em cima do qual eu construo o resto, não é? Então, mas você constrói como: ah, eu construo por combinações lineares. Então, se ele achou interessante combinação linear, se ele acha que realmente vale a pena fazer combinação linear. [...] então, se ele acha interessante falar em coordenadas, está feita a boa explicação para ele do que é base. Porque, base é aquilo que eu quero para construir as outras coisas, mas construir como? A receita é que não tem outra em Álgebra Linear. É combinação linear.

A idéia acima, segundo o professor, tem por suporte a valorização ou não, o interesse ou não, que a noção de combinações lineares despertou no aluno, pois o ato de dar um conjunto e dele retirar vetores que não servem, apóia-se no fato de que esses vetores que vão ser retirados são escritos como combinação linear de outros que talvez permaneçam no conjunto. No seu discurso surge a idéia da "economia" que se tem ao retirar os vetores desnecessários, podendo-se criar um conjunto com um número menor de vetores. Mais uma vez, o professor está com um discurso "meta", criando a *necessidade* da noção como: "base é aquilo que eu quero para construir as outras coisas".

Outra idéia importante, a da *concretização*, apareceu em seu discurso, quando falou da utilização de exemplos da Geometria Analítica. Essa idéia permaneceu no seu discurso quando falou sobre as dificuldades que o aluno possui com a noção de base:

> Então, é muito estranho, que eles possam ter essa dificuldade. Eu não acho que seja assim tão grave, eu acredito que dá para trabalhar com eles, e eles captarem bem a noção. Acho que dá, mas com muitos exemplos de geometria. Sem exemplos de geometria, não vai adiantar, não é?

O professor, nos trechos acima, sugere mais uma vez a mudança de quadro para a Geometria Analítica, que, para ele, poderá auxiliar o aluno na compreensão da noção de base através da *concretização* nesse quadro. Através desses exemplos, o professor está, segundo Dorier, ocasionando reflexões sobre *informações constitutivas do funcionamento matemático***.**

Outro aspecto importante que apareceu em seu discurso é a maneira como utiliza o livro didático, como uma estratégia para discutir idéias matemáticas sobre o assunto em questão.

> Então, o livro é bom, é bom, para você discutir assim: olha, está vendo o que ele está fazendo, ele já está falando a palavra soma [...] Está vendo...o perigo que é isso...o cara está usando a palavra soma, então ele está querendo que você de fato pense nas propriedades que você tem da soma [...] Por outro lado [...] ele quer que você transfira essas noções para outros conjuntos. Então, você não acha que é perigoso você começar já a falar a palavra soma e o cara depois nunca mais se desfaz daquela idéia de número real. Portanto, é onde ele divide vetor, não é verdade? [...] Eu gosto dos textos para isso, para discutir com eles essas coisas, mas...a crítica é boa, não é? Quando você faz essa discussão [....] já não incorrem mais no erro (de dividir um vetor por outro vetor)

Através do seu exemplo, utiliza a discussão em grupo, procurando ressaltar a maneira como o autor introduz a palavra soma para espaço vetorial, ou seja, da mesma maneira que é utilizada no conjunto dos números reais. Esta forma de utilizar o texto didático para levantar discussões sobre pontos que ocasionam erros, ou generalizações abusivas, como a de dividir um vetor por outro como se estes fossem números reais, tem um caráter meta, segundo Dorier; além disso, a forma de promover questionamentos sobre o que está escrito nos livros pode auxiliar a desenvolver o senso crítico dos alunos prevenindo-os sobre possíveis erros.

Conclusões parciais

Cunha, constantemente em seu discurso, traz *informações constitutivas do conhecimento matemático* e *informações sobre o funcionamento da matemática*, ou seja, fala *sobre* a matemática, inclusive antecipando noções como transformação linear e isomorfismo, o que poderá provocar reflexões dos alunos sobre os conceitos abordados.

Cunha, ao instigar a curiosidade do aluno com a idéia de retirar vetores desnecessários de um sistema de geradores, traz em seu discurso a noção de base como sendo um sistema de geradores minimal.

O professor, desde o início da entrevista, quando começa a falar sobre a importância da Álgebra Linear, ressalta a noção de linearidade que os alunos já possuem como o mais simples, relacionando-a com a Álgebra Linear.

O professor traz em seu discurso uma maneira de trabalhar a Álgebra Linear, *antecipando* a noção de transformação linear, que deve ser dada de uma forma aplicada, para assim criar a *necessidade* das outras noções, entre elas a de base. Para realizar essa antecipação, Cunha utiliza a Geometria Analítica como o *concreto*.

Outra idéia interessante que aparece em seu discurso é a *antecipação* da noção de isomorfismo entre espaços vetoriais para substituir espaços estranhos por um mais *concreto* (mais familiar) que é o IR^n, para valorizar a noção de base: "Porque é só ela (base) que permite, através do espaço, criar uma n-upla de números reais."

O professor, em seu discurso, procura valorizar e criar a necessidade da noção de base *informando sobre a natureza dos conceitos a serem introduzidos*, como quando destaca a maneira como introduz a multiplicação de matrizes através da composição de transformações lineares, ressaltando mais uma vez a utilidade da base.

O professor também realiza trabalhos em grupo, utilizando o livro didático para gerar questionamentos por parte dos alunos sobre pontos que podem ocasionar erros ou mesmo generalizações abusivas.

Esses recursos ressaltados por Cunha têm todos um caráter “meta” e segundo Dorier e seu grupo, passíveis de se tornarem alavancas meta.

Temos ainda um recurso “meta” ressaltado por Cunha, que não está diretamente ligado com a noção de base, mas sim com a definição de espaço vetorial, quando sugere substituir os símbolos usuais para as operações de adição e multiplicação por um escalar por outros símbolos para daí retirar as propriedades subjacentes à definição de um espaço vetorial.

O professor, quando discorre sobre a contextualização da Álgebra Linear nos curso, ressalta algumas idéias interessantes que serão destacadas a seguir.

Para Cunha, a Álgebra Linear é importante como uma ferramenta que traduz a idéia de linearidade, procurando relacionar a Álgebra Linear com as outras matérias do curso que “...tentam buscar nos fenômenos não lineares aproximações, quase sempre, aproximações por coisas lineares.”

O professor considera transformações lineares como “o único tópico de Álgebra Linear” e propõe em seu discurso uma inversão na seqüência das noções em um curso de Álgebra Linear que deveria ser iniciado por transformações lineares.

Cunha considera a Geometria Analítica como sendo pré-requisito (um pouquinho) para a Álgebra Linear.

O professor ressaltou o índice de reprovação em Álgebra Linear como sendo alto, assim como em outras disciplinas. Destaca que: “...nossos alunos não têm condição de acompanhar nem um curso de Geometria Analítica, hoje...”

Entrevistado: professor DUARTE

Sobre a entrevista

A entrevista ocorreu no horário determinado pelo professor entrevistado e durou cerca de 45 minutos, sem interrupções. Foi realizada na casa do entrevistado, estando presentes: o entrevistado e a entrevistadora.

Caracterização do docente entrevistado

O professor Duarte leciona em uma universidade privada do estado de São Paulo há 19 anos. É licenciado em Matemática e fez especialização em Metodologia do Ensino Superior.

Análise do discurso do entrevistado

Fase da contextualização da Álgebra Linear nos cursos

Ao explanar sobre a importância da Álgebra Linear para a formação do aluno", Duarte disse:

> Olha, eu sinto que embora os alunos tenham uma resistência muito grande, depois que eles pegam o jeito, porque eles têm que entender como é que funciona a Álgebra Linear, eles passam. Pelo menos nas minhas turmas da computação, eu chego a estar mais entusiasmado com eles, porque eu acredito que não sei se porque, eles na computação, eles precisam de um certo trabalho lógico..., de um certo desenvolvimento seqüencial equilibrado, e eles acabam gostando da Álgebra Linear, o que eu não sinto na licenciatura.

Embora o entrevistado não tenha abordado o tema específico da questão, ele revelou como interpretava as dificuldades, rejeições dos alunos pela Álgebra Linear, isto é, pela não compreensão de seu (da Álgebra Linear), "funcionamento". Assim, provavelmente, ao longo do curso, ele se preocupa em esclarecer esse funcionamento. Aqui percebo duas possibilidades de interpretação do que significa, para Duarte, “compreender o funcionamento da Álgebra Linear”. A primeira seria a de, na realidade, compreender o método axiomático do desenvolvimento do assunto, de acordo com o trecho: “na computação, eles precisam de um certo trabalho lógico..., de um certo desenvolvimento seqüencial equilibrado”. A segunda seria, simplesmente, o aluno compreender como será avaliado, “depois que eles pegam o jeito, porque eles têm que entender como é que funciona a Álgebra Linear, eles passam.”

> ... Álgebra Linear, na computação, é no primeiro ano. Começa inclusive um pouquinho com matriz, porque eles não viram nada disso [...], então começava um pouquinho com matrizes, antes de entrar em espaço vetorial. Dava tempo do professor de Geometria Analítica falar de vetores...
>
> Na licenciatura eles têm Geometria Analítica no primeiro ano e depois a Álgebra Linear é no segundo. Quer dizer, eles já têm aquele fundamento de vetores.

O entrevistado, no trecho acima, esclareceu a situação dos alunos com os quais trabalhava a Álgebra Linear, em relação ao curso de Geometria Analítica. A seguir, indicou :

> Porque aí, depois, eu associava todas aquelas características dos vetores, para poder definir como um conjunto que tem outros conjuntos com as mesmas características, que são os chamados espaços vetoriais.

Este foi um dos trechos da entrevista em que Duarte indicou necessitar da noção de vetores, desenvolvida em Geometria Analítica, para abordar a estrutura de espaço vetorial “...para poder definir como um conjunto que tem outros conjuntos com as mesmas características, que são os chamados espaços vetoriais...”. Araujo, em sua dissertação (2002), já havia destacado frase semelhante a essa, ao analisar o livro de Álgebra Linear de Callioli et al, como sendo um recurso “meta”, que ao mesmo tempo respeita os princípios de concretização e de generabilidade de Harel.

Duarte, respondendo à questão sobre os tópicos prioritários para um primeiro curso de Álgebra Linear, disse:

> Eu pego espaços, sub-espaços, depois eu pego...base e dimensão... pego transformação linear, puxo um pouquinho para transformações lineares,...na parte da definição mesmo...saberem qual transformação é linear ou não; na transformação, núcleo e imagem...eu chego? Na licenciatura, que são 2 e depois mais 2, eu chego até a dar um pouquinho de ...espaço com produto interno...não dá para avançar mais nisso daí...

O professor colocou a noção de base entre os prioritários, e ao responder sobre a relação da Álgebra Linear com as demais matérias do curso, destacou:

> É ...associando a outras disciplinas... quer dizer, associada à Geometria Analítica, claro...é tudo um pouco no outro...mas...

O professor sugeriu a utilização da passagem do *antigo para o novo*, isto é, da Geometria Analítica para a Álgebra Linear, recurso “meta” esse que foi também destacado por Araújo em sua análise do livro de Callioli et al, já citado.

Quando o professor discorreu sobre a necessidade ou não de pré-requisitos para um primeiro curso de Álgebra Linear, ressaltou:

> Ah...eu acho que precisa, bastante. Primeiro: precisa de matriz [...] Então, eu começo com matrizes [...] Precisa de noções de vetores, claro e...por isso eu dou este tempo...para o professor de Geometria Analítica começar a falar de vetores, tudo o mais, antes de eu entrar nos espaços vetoriais [...] E o resto é novidade para eles. Eles... só sabem trabalhar no concretinho...

Essa idéia de iniciar o curso de Álgebra Linear desenvolvendo tópico sobre matrizes corresponde exatamente à seqüência proposta pelo livro de Callioli et al. A razão dada por Duarte, de esperar que o professor de Geometria Analítica introduza a noção de vetor, para somente depois "... entrar nos espaços vetoriais...", destaca sua preocupação de partir do conhecido, *antigo para o novo*, tendo o professor explicitamente declarado a idéia da *concretização "* ...só sabem trabalhar no concretinho..."

Quanto à taxa de reprovação em Álgebra Linear, Duarte respondeu:

> eu acredito...uns 40%...que é o que fica na computação.

o que confirma uma alta taxa de reprovação, já referida anteriormente em pesquisa realizada pela UNICAMP.

Fase do desenvolvimento da noção de base

Ao falar sobre sua abordagem para a noção de base, o entrevistado afirmou:

> ...eu começo falando dos conjuntos de geradores. Então, a hora que eles conseguem pegar um elemento genérico de um certo conjunto; desse elemento genérico partir para um conjunto de geradores, fazendo uma combinação linear, com as letras, com as quais eles formaram o conjunto genérico, eles partem para o conjunto de geradores. Depois...eu só falo em conjunto de geradores**.** Depois, eu explico para eles que alguns conjuntos são linearmente dependentes, outros independentes, porque eles já têm noção pela Geometria Analítica. Só que eles não podem, para todos os casos da Álgebra Linear usar o determinante, por exemplo, para definir se é l.i. ou l.d.. Então, aí eu dou a definição, eles aprendem a definir se é l.i. ou l.d.. Daí vem a definição de base, onde eu coloco que a base é um conjunto de geradores obrigatoriamente linearmente independente. Então, a definição sai de dois conceitos anteriores que eles tiveram. Então... e aí para eles fica, acho que fica uma fala boa.

Duarte desenvolve a noção de base pela justaposição das noções de sistemas de geradores com a noção de independência linear. Exatamente o desenvolvimento proposto pelo livro de Callioli et al.

Falando sobre as atividades que costuma propor sobre base, Duarte comentou:

> É difícil para eles entenderem que tem várias bases. Eu tenho que às vezes mostrar meio concretamente como é que funciona, para eles colocarem ... porque um acha uma base, outro acha outra. Eles acham aquilo meio estranho. Então quando a gente trabalha com escalonamento; aí eu coloco para eles que esses daqui são equivalentes a esses daqui, você está só mudando a forma...Então se isso aqui é uma base, você chega lá no final dizendo que esse aqui é uma base, todos aqueles que eram equivalentes também seriam uma base. Aí eles começam a entender um pouco melhor que tem mais do que uma base.

O professor utiliza o método do escalonamento de uma matriz para sugerir que os vetores representados pelas linhas de cada uma das matrizes, obtidos em cada fase do escalonamento, constituem geradores de um mesmo espaço vetorial; e que os vetores diferentes do vetor nulo, obtidos na forma final do escalonamento, constituem uma base desse espaço e aqueles vetores das outras formas matriciais anteriores até a final, que correspondem aos vetores da base, por sua vez, também constituem uma base. Dessa maneira, Duarte afirma: "...eles começam a entender um pouco melhor que tem mais do que uma base." Esse método é um recurso "meta" para evidenciar a existência de inúmeras bases para um espaço vetorial diferente do trivial, $\{0\}$.

Duarte, ao falar sobre as analogias que costuma utilizar, reforçou novamente a utilização da Geometria Analítica como apoio para as noções de Álgebra Linear:

> Eu me reporto à parte dos vetores da Geometria Analítica. Eu pego aquela base, ortogonal, que eles já conheceram, já trabalharam, e começo daí a explicar que existe sempre uma base e que não é só aquela, que existem outras, não só para o IR^3, mas para os outros subespaços também. Eu faço um paralelo assim com a Geometria Analítica.

E também, quando falou sobre os exemplos que mais utiliza:

> É, eu trabalho com o IR^2, com o IR^3, trabalho também com o conjunto de matrizes, certo?. Não costumo pegar a parte de polinômios, porque aí é o tempo...você teria que dar toda a teoria dos polinômios...Trabalho com o IR^n. Então, quando você quer dar um pouquinho mais de trabalho... para eles, você pega o IR^4, qualquer coisa assim. [...]. Não pego polinômios, não trabalhamos com complexos, não daria também.

Os espaços vetoriais privilegiados por Duarte são IR^2, IR^3, e "...quando quer dar um pouquinho mais de trabalho..." o IR^4, todos eles espaços vetoriais sobre IR, não trabalhando com os espaços vetoriais de polinômios nem de números complexos.

E quando Duarte falou sobre os exercícios, destacou:

> Eu estudei no Callioli. [...] eu acho assim que ele tem uma seqüência que...que dá para eu organizar dentro do tempo que eu tenho. Embora existam outros livros, eu procuro... eu... procuro mesmo, seguir o Callioli e pego exercícios do Callioli. Invento um pouco de exercícios, porque se você pega esse livro, esse e aquele, tem tudo mais ou menos a mesma coisa [...] Então, às vezes crio alguns exercícios também, mas é nesse sentido, mas baseado no Callioli.

Nesta parte do discurso, o professor explicitou o que em sua fala ficou patente, isto é, que utiliza o livro de Callioli et al no preparo de suas aulas "procuro mesmo, seguir o Callioli e pego exercícios do Callioli". É importante notar que o professor se restringe não somente aos capítulos iniciais desse livro como também a alguns dos espaços vetoriais aí tratados, tais como: o IR^2, o IR^3, o IR^4 e todos eles espaços vetoriais sobre os reais.

Conclusões parciais

Duarte não só estudou como utiliza o livro didático de Álgebra Linear de Callioli, Costa e Domingues como apoio e roteiro para as suas aulas. Por isso percebemos que os recursos "meta" utilizados pelo professor em seu discurso constam entre os recursos "meta" levantados por Araújo (2002) na análise desse livro: a utilização da passagem do *antigo para o novo* e de dois dos três princípios de Harel, o da *concretização* e o da *generabilidade*. Utiliza também o método do escalonamento para esclarecer a existência de mais de uma base do mesmo espaço vetorial.

Duarte sugere que a noção de base deve ser apresentada como justaposição de conjunto de gerador com conjunto linearmente independente (a mesma maneira apresentada no livro de Callioli et al).

Quando o professor falou sobre a contextualização da Álgebra Linear nos cursos, destacou base, entre outras, como tópico prioritário em um primeiro curso de Álgebra Linear. Relacionou a Álgebra Linear com a Geometria Analítica e ressaltou a necessidade de pré-requisitos, tais como: matrizes e vetores da Geometria Analítica.

Para Duarte, a taxa de reprovação na disciplina Álgebra Linear no Curso de Computação em que ministra aulas está em torno de 40%.

Entrevistado: professor Freire

Sobre a entrevista

A entrevista ocorreu no horário determinado pelo professor entrevistado e durou cerca de 60 minutos, sem contar os 15 minutos de interrupção. Foi realizada em sua casa, estando presentes: o entrevistado e a entrevistadora.

Caracterização do docente entrevistado

O professor Freire lecionou em universidades privadas e em uma faculdade pública de tecnologia do estado de São Paulo. Atualmente leciona em uma universidade privada. Leciona há 30 anos em diversos cursos. Fez mestrado em Matemática, na área de Álgebra.

Análise do discurso do entrevistado

Fase da contextualização da Álgebra Linear nos cursos

O entrevistado, ao responder sobre as pesquisas que realizou, ressaltou:

> Minhas aulas sempre foram de forma um pouco diversa do próprio livro que a gente usava [...] paralelamente eu sempre usei outros tipos de coisas, principalmente, porque sempre fui apaixonado pela parte de matemática aplicada, então sempre eu queria ligações com aplicativos, dentro de Álgebra Linear. Ainda hoje, a gente trabalha com aplicativos de Álgebra Linear...a própria computação gráfica é todinha Álgebra Linear, praticamente só trabalha com Álgebra Linear.

O entrevistado iniciou seu discurso falando sobre a sua formação e experiência acadêmica, destacando que sempre teve uma maneira própria de preparar as suas aulas, “...diversa do próprio livro que a gente usava...” e da sua paixão pela parte da matemática aplicada. Ressaltou ainda que atualmente trabalha com a parte aplicada da Álgebra Linear em cursos como Ciências da Computação e Engenharia da Computação.

> Estou na computação.Mas é,...por exemplo, computação gráfica é toda Álgebra Linear, mais matemática, Álgebra Linear aplicada. Mas, agora, temos a parte de álgebra muito pesada também na parte de ciências da computação, na área de autômatos.Temos matemática lá na área de tratamento de sinais, na engenharia, mas a Álgebra Linear é um instrumento agora para mim, como se fosse o Cálculo, entendeu, a mesma coisa. Então, transformações lineares, bases, dimensões, o espaço, espaços gerados, essas coisas, são coisas corriqueiras, coisas comuns, sem as quais eu não faria nada mesmo, nada.

O professor ressaltou a grande importância da Álgebra Linear para os cursos de Ciências da Computação e Engenharia. Convém notar que o professor atualmente leciona disciplinas específicas desses cursos em séries mais avançadas, que já tiveram um primeiro curso de Álgebra Linear.

Quando falou sobre a importância da Álgebra Linear para a formação dos alunos, reportou-se a um curso básico, ressaltando novamente o problema das aplicações:

> ...o aluno de matemática, por exemplo, ele é ávido por aplicações, mas ao mesmo tempo, a gente não pode dar aplicações, porque também ele não tem formação, não tem preparo para entender o que vem em seguida [...] para uma massa de informações que fosse sólida em seguida. Como é que a gente vai falar em aplicação na computação gráfica, se a gente não avançar na computação gráfica. Então, a gente acaba perdendo...Quem dá aula de Álgebra Linear, acaba perdendo o escopo da Álgebra Linear, porque tem que dar um curso de Álgebra Linear, não pode dar um curso de computação gráfica. Então, na hora que dá esse curso, por exemplo, para o básico, é de prometer apenas que tem aplicação, não tem alternativa...você pega exemplos simplórios, não pode pegar exemplos sofisticados...

A opinião do professor sobre as aplicações num primeiro curso de Álgebra Linear corrobora a de Dorier e seu grupo, que em seus artigos destacam a necessidade de uma formação mais sólida por parte dos alunos para possibilitar a criação de situações problema advindas de possíveis aplicações, situações problema estas que poderiam servir para a introdução de novas noções. E essa formação só ocorre durante o desenvolvimento da própria disciplina e nas séries seguintes, o que torna difícil, num primeiro curso de Álgebra Linear, trabalhar com aplicações.

E na continuidade de sua fala, ao explicar melhor o que seriam “exemplos simplórios”, destacou:

> Simplório aí, é só no coloquial, na forma coloquial, não pode ser na forma formal, tem que ser na forma coloquial. Fala por exemplo em base, o que é base? Qual é o propósito da base? Falar que a base tem o propósito de sintetizar o espaço, que é dele que sai tudo, parte de cada vetor da base. Uma combinação linear desses vetores dá um ponto genérico do espaço. Espaço aqui no sentido mais genérico possível, espaço de palavras, [...] espaço de objetos. As coisas mais esquisitas do mundo.

O professor expressa a idéia de que o discurso não pode ser formal, mas sim na forma coloquial e sem ser argüido especificamente sobre base, começou a falar sobre essa noção: “...o que é base? Qual é o propósito da base? Falar que a base tem o propósito de sintetizar o espaço, que é dele que sai tudo... Espaço aqui no sentido mais genérico possível, espaço de palavras, [...] espaço de objetos...”. E continua, dando o seguinte exemplo:

> Pode ser também, espaço de posição propriamente dita, que eu uso também na mecânica, por exemplo: um objeto...um observador está vendo o objeto nas posições 1, 2 e 3; outro observador, o mesmo objeto, está vendo em outra posição, 4, 7, 8. O referencial de cada um deles, é um diferente do outro [...] Na hora de transmitir essas mensagens desses dois observadores há a necessidade de um instrumento que modifique essas coordenadas, um para o outro, não pode passar...eu emito 1, 2, 3, o outro tem que receber 3, 4, 5. E reciprocamente, um fala 3, 4, 5 , o outro tem que receber 1, 2, 3. Então, essas mudanças de base são quotidianas, toda hora, toda hora.

O exemplo é sobre mudanças de base que, segundo o entrevistado, são "quotidianas": "...um observador está vendo o objeto nas posições 1, 2 e 3; outro observador, o mesmo objeto, está vendo em outra posição, 4, 7, 8....". O professor, sem falar em base, procura colocar a necessidade de "...um instrumento que modifique essas coordenadas...eu emito 1, 2, 3 e o outro tem que receber 3, 4 e 5." Na realidade, esse exemplo o professor utiliza como uma "provocação" para a abordagem da noção de base, como vem explicitado no transcorrer da entrevista, quando, na fase explícita sobre o desenvolvimento de base, explana sobre o assunto.

E quando o professor discorreu sobre os tópicos prioritários para um primeiro curso de Álgebra Linear, novamente destacou a noção de base:

> Dimensão, base, espaço gerado, ...subespaço...até a parte de ...autovetor, autovalores. Essa parte é fundamental.

Ao responder sobre a relação da Álgebra Linear com outras matérias do curso, Freire ressaltou:

> A parte de matemática (curso de Matemática) tem de levar em consideração a parte de Geometria Analítica, é ligado à Geometria Analítica, a parte de equações diferenciais, curso de equação. Agora, na engenharia é sensacional, a partir do segundo ano...terceiro ano, a gente tem Álgebra Linear aí...até o quarto ano, até o quinto ano de engenharia tem Álgebra Linear, todinha. Não sou eu, é pré-requisito. Sem Álgebra Linear não vale nada.

O professor ressaltou, principalmente para o curso de Matemática, a relação da Álgebra Linear com a Geometria Analítica. Mas quando explanou sobre a necessidade ou não de pré-requisitos para um primeiro curso de Álgebra Linear, Freire respondeu:

> Não, não, não precisa não. Naturalmente, o cara tem que ter feito vestibular, tem que ter uma certa vocação para ciências exatas. Não vamos pegar uma pessoa que ... inábil em fazer certas operações matemáticas elementares de aritmética, não é?

O professor relaciona a Geometria Analítica com a Álgebra Linear, mas não acha que há a necessidade de se ter um curso de Geometria Analítica antes de um primeiro curso de Álgebra Linear, mas sim que essas duas disciplinas ocorram simultaneamente no mesmo ano letivo.

> Álgebra Linear, Geometria Analítica não é tão chocante para os alunos [...] Acho que (Álgebra Linear) deve ficar no primeiro ano [...] eu sei que é chocante, mas [...] tanto na engenharia quanto na matemática, tem que entrar no primeiro ano, tem que saber que tem que ter um comportamento formal [...] por exemplo, não pode colocar, tem carga horária muito grande no primeiro ano, tem que tirar uma das duas, (Geometria Analítica ou Álgebra Linear) e botar no segundo, tem que ser Álgebra Linear [...] Mas se puder, puder fazer junto. seria o ideal.

E quando respondeu sobre a taxa de aprovação de Álgebra Linear, disse:

> Naquela época...eu sou dos anos setenta, setenta-oitenta. Então para aquela época lá, não tinha problema, não. Os problemas maiores lá não eram Álgebra Linear, não. O problema maior, mais chocante para eles era Cálculo, era Análise.

O entrevistado, apesar de achar "chocante" a Álgebra Linear e a Geometria Analítica para os alunos, considera o Cálculo e a Análise mais "chocantes" ainda. A sua observação vem de encontro aos resultados da pesquisa realizada pela Unicamp (in Celestino 2000), que destaca a Álgebra Linear, a Geometria Analítica e o Cálculo entre as disciplinas que mais reprovam.

Fase do desenvolvimento da noção de base

O professor Freire, ao responder sobre como abordava a noção de base, ressaltou:

> Eu começava realmente com a posição, com a geometria. Começava na reta, pegava uma unidade...como você localiza um objeto na reta, certo? Como você localiza um objeto no espaço? Aí eu pegava as duas retas, mexia um pouquinho uma das duas retas e ao invés de colocar na ortogonal, diria ...mudando um pouquinho aqui o ângulo, não é a mesma coisa? Colocava um mapa cartográfico, [...] um ponto na esfera, aqueles mapas de cartografia, aqueles mapas esquisitos, esferas terrestres, geodésicas, coordenadas, por exemplo, latitude tal, longitude tal, percebendo realmente que precisava de dois números para posicionar, coisas assim. São os elementos fundamentais de localização.

O professor utiliza o quadro da geometria sob o ponto de vista da posição, da localização: "...um mapa cartográfico, [...] um ponto na esfera, aqueles mapas de cartografia, aqueles mapas esquisitos, esferas terrestres, geodésicas, coordenadas, por exemplo, latitude tal, longitude tal, percebendo realmente que precisava de dois números para posicionar, coisas assim...", para justificar a necessidade de dois elementos para posicionar algo no plano, três no espaço.

Dessa maneira, Freire analisa a noção de coordenadas com *exemplos diversos*, com um discurso *sobre* a matemática e procurando propiciar tanto uma reflexão sobre o tema quanto uma *necessidade* do novo conceito a ser abordado. Está, ainda, fornecendo *informações constitutivas do funcionamento matemático e sobre a natureza dos conceitos a introduzir.*

Na continuidade do seu discurso sobre a abordagem da noção de base, Freire destacou como um problema a definição formal de vetores linearmente independentes:

> O problema da independência linear? Ah, sem dúvida. Tinha que ser feito isso de uma maneira...primeiro, maneira intuitiva [...] não adianta você pegar um vetor que um é múltiplo do outro [...] por exemplo, no caso da reta, você pega, ao invés de um metro , pega dois metros, qual é a diferença entre um e o outro [...] Um desse mais um desse, continua naquele segmento lá, você não sai fora. Se você quiser sair fora, vai ter que sair fora desse número [...], não pode ser mais um número múltiplo do outro [...]. Isso você faz para dois, depois você pula para três, aí você pula para n. [...] naquela parte inicial, tanto no primeiro ano, como no segundo ano, esse negócio de provar que tem um elemento diferente de zero, todos são zero, não é palpável para eles. Não é verdade?

Segundo o exposto, Freire disse que para contornar a dificuldade que existe com a definição formal de vetores linearmente independentes, o professor deve procurar "uma maneira intuitiva" para introduzir essa noção e sugere no seu discurso, "não adianta você pegar um vetor que um é múltiplo do outro [...] por exemplo, no caso da reta, você pega, ao invés de um metro, pega dois metros, qual é a diferença entre um e o outro?" Ele procura mostrar a *necessidade* de ir para um plano, de ir para um espaço, para depois *generalizar i*ndo para uma dimensão n. Freire demonstrou estar à procura de recursos "meta", com um discurso *sobre* a matemática.

Na continuidade, retomou a idéia que colocou quando contextualizava a Álgebra Linear, ou seja, a de que há a necessidade de se utilizar a forma coloquial para a introdução de noções da Álgebra Linear:

> ...você ter um comportamento coloquial, precisa muita bagagem, desculpe da expressão. É muito mais difícil, escrever na forma coloquial do que você escrever na forma formal. [...] na forma coloquial, você amarrar as coisas, a forma histórica, de necessidade do ser humano a respeito...as provocações internas, os pensamentos até você chegar naquela definição, naquele teorema. O teorema tem que vir de umas perguntas, [...] de uma provocação, não pode surgir, pronto, teorema ou propriedade; que coisa propriedade, por que que isso aqui é uma propriedade, que interesse tem essa propriedade?

Convém ressaltar que no discurso do entrevistado aparece claramente a necessidade de recursos "meta" para o ensino/aprendizagem da Álgebra Linear. O professor voltou a ressaltar a forma coloquial, agora na maneira de escrever, como sendo difícil de se "...amarrar as coisas, a forma histórica, de necessidade do ser humano a respeito...as provocações internas, os pensamentos até você chegar naquela definição, naquele teorema." E sugeriu a necessidade de uma provocação para abordar uma noção, como exemplifica na continuidade de seu discurso:

> Eu aplicava mesmo aquele negócio de satélite, de comunicações entre naves espaciais, brincava com essas coisas. [...] Eu me lembro muito bem desse negócio aí, eu falava que um sujeito estava num satélite, o sujeito estava lá em cima, estava vendo um objeto na posição 1, 2 e 3, sabe. Eu falava, 1, 2 e 3, lá embaixo eu olhava 1, 2, 3, não tinha nada. Todo mundo falava, está na cara, porque você está olhando do outro lado [...] eles percebem que 1, 2, 3 no céu é diferente de 1, 2, 3 na Terra.Tem que ter um referencial, então essa era uma brincadeira que eu fazia. Esse é um dos exemplos... esse do espaço, da base e do espaço, é típica.

Observemos que no seu discurso coloquial, as provocações, as analogias e as informações sobre a natureza dos conceitos matemáticos são metaconhecimentos matemáticos que podem se constituir em alavancas meta para os alunos, ocasionando reflexões a respeito da noção de base a ser introduzida.

> ...eu acho que a parte fundamental, nesse negócio todo da base mesmo, é incutir neles (alunos) os elementos primitivos, a partir dos quais nós construímos o conceito, o espaço. Isso que é fundamental. E como que constrói as nossas coisas? A partir de moléculas? De átomos? É a partir desses elementos que aí sim, são os nossos tijolinhos, que a partir dos quais nós construímos todo o resto.

Os elementos da base, segundo Freire, deveriam ser “incutidos” nos alunos como elementos primitivos, como átomos, moléculas que irão dar origem ao espaço, como os *tijolinhos*. E voltou a falar sobre independência linear:

> Agora, sobre a independência linear, é outra conversa. [...] Não pode colocar tijolos sempre na mesma direção. Se você coloca tijolos na mesma (direção) você só faz uma reta. Se você quiser uma parede, vai ter que colocar um em cima do outro. Então, além de você fazer um ao lado do outro, você tem que colocar também um em cima do outro, senão você não vai fazer uma parede, você vai fazer apenas uma linha uma fileira de tijolinhos [...]. Aí na hora que você faz um em cima do outro, você faz uma dimensão diferente daquela que você tinha...

O professor, usando a analogia *tijolos*, ressaltou a maneira de se criar uma parede, uma outra dimensão, de gerar um espaço vetorial. Se os *tijolos* forem colocados enfileirados, cria-se como se fosse uma linha, ou seja, uma “reta” (esquecendo-se as dimensões do tijolo). “Se você quiser uma parede, vai ter que colocar um em cima do outro. Então, além de você fazer um ao lado do outro, você tem que colocar também um em cima do outro, senão você não vai fazer uma parede, você vai fazer apenas uma linha, uma fileira de tijolinhos...” E continuou:

> Então, eu não me empenharia muito, não teria muita preocupação nesse negócio de base, não daria tanto atenção, porque a medida que a coisa ia se desenvolvendo, essa base tem que ser inerente, assim como a gente não pode agigantar molécula, quando a gente fala que o corpo é formado de moléculas. A gente não pode ficar só na molécula, tem que falar no corpo. A molécula é a molécula, e a molécula é um componente do corpo. É a mesma coisa no espaço. A gente não pode ficar só na base. Então, é [...] claro que é o objeto fundamental, mas existem coisas as quais a gente constrói a partir da base. Então, a parede para mim é mais importante do que a base. Então, eu olho na parede...o meu propósito de olhar para construir a parede. Eu sei que tenho que fazer com as duas dimensões para construir a parede. Isso é importante de saber, mas não é ...não é agigantar. Tem que colocar na condição correta dela. A base é base para gerar o espaço, agora o espaço...é do nosso interesse de descobrir todas as propriedades de espaço, o máximo possível, todas as características do espaço o qual nós construímos.

O professor explicitou que a noção de base é importante, mas não pode existir sozinha, separada do seu corpo, ou seja, da noção de espaço vetorial e de todas as propriedades, características desse espaço que está sendo construído: “Então, a parede para mim é mais importante do que a base. Então, eu olho na parede...o meu propósito de olhar para construir a parede. Eu sei que tenho que fazer com as duas dimensões para construir a parede.”

Conclusões parciais

O professor Freire, desde o início da sua entrevista, ressaltou a sua preocupação com um desenvolvimento do curso de Álgebra Linear utilizando aplicações, não deixando de destacar a dificuldade em se encontrar essas aplicações compreensíveis aos alunos em um primeiro curso de Álgebra Linear. Essas aplicações corresponderiam a situações didáticas, o que Dorier ressaltou como situações ou muito simples, que podem ser resolvidas sem a ajuda da Álgebra Linear, ou situações em que teria que se usar outras teorias mais avançadas.

A sugestão dada por Freire é a de se utilizar uma *forma coloquial* e *provocações* para introduzir as noções da Álgebra Linear. Em seu discurso, fornece alguns exemplos, através de *analogias*, como a dos *tijolinhos*, para gerar uma outra dimensão; a dos átomos como elementos primitivos para darem origem ao espaço vetorial; e o da geometria de posição, de localização, como mapas cartográficos, esferas terrestres, posição de um objeto observado de locais diferentes.

A noção de base como um conjunto maximal linearmente independente aparece no discurso de Freire quando coloca a idéia de *tijolos e de parede,* referindo-se à dimensão do espaço vetorial.

Freire, com a sua *forma coloquial*, as suas *provocações* e as suas *analogias,* procura gerar a *necessidade* de uma noção, assim como *concretizar* essa noção para depois *generalizá-la*. São os princípios de Harel.

A *forma coloquial* é também uma maneira de se falar *sobre* a matemática, *fornecendo informações constitutivas do funcionamento da Álgebra Linear*. Além disso, constantemente o professor está *fornecendo informações sobre os conhecimentos matemáticos a serem introduzidos*, destacando a importância e a utilização desses conhecimentos na própria Álgebra Linear e em outras disciplinas existentes nos cursos em que ministrou aula. Temos, portanto recursos “meta”, passíveis de se tornarem alavancas meta.

Freire, quando discorre sobre a contextualização da Álgebra Linear nos cursos, ressalta a importância dessa disciplina para os cursos de Ciências da Computação e Engenharia, assim como a noção de base, entre outras, como prioritária para um primeiro curso de Álgebra Linear.

O professor relaciona a Álgebra Linear com as outras disciplinas como uma ferramenta para a computação gráfica, a área de autômatos, a área de tratamento de sinais e equações diferenciais.

Segundo Freire, não há necessidade de pré-requisitos para um primeiro curso de Álgebra Linear e quanto à taxa de aprovação, para o entrevistado, nos anos setenta e oitenta, não havia grandes índices de reprovação nessa disciplina.

Entrevistado: professor Gonçalves

Sobre a entrevista

A entrevista ocorreu no horário determinado pelo professor entrevistado e durou cerca de 50 minutos, sem interrupções. Foi realizada em uma sala do campus da universidade, no qual o professor trabalha, estando presentes: o entrevistado e a entrevistadora.

Caracterização do docente entrevistado

O professor Gonçalves lecionou numa universidade privada do estado de São Paulo e atualmente leciona numa universidade pública também do estado de São Paulo. Possui 26 anos de docência em várias disciplinas, mas principalmente em Álgebra Linear. Fez mestrado, doutorado e livre docência, sempre na área de álgebra.

Análise do discurso do entrevistado

Fase da contextualização da Álgebra Linear nos cursos

O professor, ao responder sobre a importância da Álgebra Linear para a formação dos alunos, disse:

> Dentro do curso ela tem uma importância grande porque ela é uma ferramenta que vai ser utilizada em várias...durante o curso todo [...] Dentro do curso (Matemática e Engenharia) é uma ferramenta importante, eles vão ver isso daí durante o curso todo. Então, a gente dá esse... toque, da importância que a Álgebra Linear tem no curso, principalmente como ferramenta para as outras disciplinas.

Gonçalves ressaltou a importância da Álgebra Linear para os alunos como uma ferramenta necessária para várias outras disciplinas que eles irão estudar durante os cursos de Matemática e Engenharia. Esse tipo de discurso *fornece informações sobre a natureza dos conceitos a serem introduzidos*, portanto trata-se de um recurso “meta”.

Ao falar sobre os tópicos prioritários em Álgebra Linear, incluiu o de noção de base, entre outras:

> Tem-se que falar em base e dimensão, espaços vetoriais, claro, a definição, sub-espaços vetoriais, é importante, a definição; transformações lineares e transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita, aí temos alguns resultados importantes, principalmente quando você tem espaços vetoriais de mesma dimensão, sobre um mesmo corpo eles são isomorfos. Tem muitos resultados, principalmente no caso de dimensões finitas que são importantes. Depois, transformações lineares sobre esses espaços e matriz de uma transformação linear. Esses são os tópicos que tem que ser feitos dentro da Álgebra Linear.

E, quando Gonçalves falou sobre a relação da Álgebra Linear com outras disciplinas do curso, ressaltou:

> Tem nessa parte de equações diferenciais...deixa eu pensar...o que que tem mais? Agora eu não lembro.Tem dentro da própria álgebra. Isso sem dúvida. Dentro de outros cursos de álgebra eles vão ver algumas definições que envolvem espaços vetoriais.

O professor relaciona a Álgebra Linear com os outros cursos de álgebra que existem na grade curricular, mas ao responder sobre a necessidade de pré-requisitos para um primeiro curso de Álgebra Linear, disse:

> Eu acho que precisa. Pelo menos essa parte de vetores, e Geometria Analítica, acho que... porque exatamente uma aplicação principal da Álgebra Linear é a parte de vetores ou então, teria que ser dada no próprio curso, ou alguma coisa por aí**.** Porque, por exemplo, nos cursos aqui, principalmente da licenciatura ou bacharelado, um pré-requisito é vetores e geometria, ou seja, geometria com enfoque vetorial. Então, esse é um pré-requisito que é exigido. Na engenharia não é exigido, porque o que acontece: você faz isso no curso, no próprio curso. Então acho que é importante isso daí**,** principalmente como motivação para a Álgebra Linear, uma generalização exatamente disso daí.

Gonçalves ressaltou a Geometria Analítica como pré-requisito e como motivação para a Álgebra Linear. Segundo o exposto, o professor utiliza em suas aulas a passagem do *antigo para o novo*, colocando os vetores da Geometria Analítica como o *concreto* para depois caminhar para a *generalização,* que seriam os vetores de um espaço vetorial.

O entrevistado disse sobre a taxa de aprovação em um primeiro curso de Álgebra Linear:

> De um modo geral, até que tem sido boa a aprovação. Álgebra Linear em si, passando a questão da linguagem, que é uma linguagem nova que os alunos vão passar a aprender... então de início, no curso, tem-se um pouco de dificuldade para se tratar nessa linguagem, mas o curso de um modo geral não é um curso difícil. [...] normalmente o índice de aprovação tem sido razoável. Não tem sido assim...assim...desesperador, um índice de reprovação muito alto. Não tem acontecido isso. Eles vão mal no início do curso, mas depois que eles se adaptam à linguagem, aí eles caminham.

Gonçalves, professor de uma das universidades públicas de São Paulo que consta da pesquisa realizada na UNICAMP (in CELESTINO, 2000), sob o seu ponto de vista, não considera a Álgebra Linear uma disciplina difícil, mas ressaltou o problema da linguagem considerando que “...depois que eles se adaptam à linguagem, eles caminham.” Segundo sua opinião, o índice de reprovação não é muito alto.

Fase do desenvolvimento da noção de base

Ao discorrer sobre como aborda a noção de base, o professor disse:

> ...a noção de base, eu coloco para os alunos, exatamente o fato que muitas noções que eu expressaria com o vetor genérico seriam retratados. Então, fica mais fácil, principalmente quando se trabalha com espaços vetoriais de dimensão finita. Então, por exemplo, eu tenho uma transformação linear, um exemplo, se você quiser determinar qual transformação linear e não soubesse a transformação...agora, se você pega uma base, você tem todas as informações que você quer em função da base. No caso da dimensão finita então, fica muito mais fácil para você determinar propriedades dessa transformação linear...informações essas em cima de uma base.

Gonçalves afirmou que antecipa a idéia de transformação linear para exemplificar uma *necessidade* para a noção de base, “...eu tenho uma transformação linear, um exemplo, se você quiser determinar qual transformação linear e não soubesse a transformação...”, para justificar a de base, “...agora, se você pega uma base, você tem todas as informações que você quer em função da base.” E continua:

> Antes de dar a definição de base. É importante, porque você está trabalhando com espaços vetoriais de dimensão finita, você está trabalhando com um número finito de vetores e... a parte de base também é importante, como eu falo para os alunos: quando você trabalha com espaços vetoriais sobre os reais. Então, [...] todos de dimensão n sobre os reais são isomorfos ao IR^n. Então fica mais fácil você trabalhar com espaços...exatamente sabendo a condição da dimensão. Eu dou um enfoque para eles justamente sobre isso.

O professor, no seu discurso, diz informar aos alunos a importância de estar trabalhando com espaços vetoriais de dimensão finita, em particular sobre o conjunto dos números reais, antecipando as noções de isomorfismo e de dimensão para justificar a noção de base: "....todos de dimensão n sobre os reais são isomorfos ao IR^n. Então fica mais fácil você trabalhar com espaços... "

> E aquela história de que todo vetor é combinação linear de uma base...o vetor genérico, se você souber o comportamento dele numa base, fica muito mais fácil para você estudar. Exatamente, por causa disso, você tem as relações de espaço de dimensão finIta, quando você fala de dimensão, então na realidade [..] você trabalha com coordenadas. Exatamente por que você tem uma base. Isso pode simplificar bastante.

Para o professor, o fato de trabalhar com espaços de dimensão finita facilita, pois está-se trabalhando com coordenadas advindas da existência de bases. Nos trechos acima, o professor estava i*nformando sobre a natureza dos conceitos a serem desenvolvidos no curso de Álgebra Linear*, procurando instigar a curiosidade nos alunos, assim como criar a *necessidade* da noção de base através da vantagem de se realizar cálculos com coordenadas.

Quando o professor respondeu sobre as atividades que propõe para os alunos, tivemos o seguinte discurso:

> No caso da licenciatura, eu pensei, além de dar exercícios para os alunos fazer um TG, trabalho em grupo desenvolvido na sala de aula. Reunidos em grupos, no máximo de 5 alunos, propor um trabalho, baseado em alguma... é... desenvolvimento teórico e eles fazem entre si... tem que discutir entre eles esse desenvolvimento, com consulta também a livros, ao professor. Depois eu corrijo e devolvo para eles esse trabalho. Esses trabalhos em grupo têm surtido bons efeitos.

O professor disse que utiliza trabalhos em grupo para a realização de atividades, algumas teóricas, com consulta a livros e ao professor, o que pode gerar reflexões por parte dos alunos em relação às noções que estão sendo trabalhadas; e também criar um ambiente para se discutir novas noções que podem surgir em conseqüência das já trabalhadas. Este tipo de atividade, segundo Dorier e seu grupo, tem um caráter “meta”.

E na continuidade de sua fala, disse:

> ...a parte de base tem uma questão que é complicada para eles entenderem, aquela história de linearmente independente e linearmente dependente. Isso daí, não sei por que, todos os anos os alunos têm dificuldades de entender isso daí. Então a gente trabalha com uma aula normal, tentando explicar para os alunos. Depois que entra com o trabalho em grupo para eles discutirem eventualmente algumas questões.

O professor ressaltou a dificuldade que os alunos possuem com o conceito de vetores linearmente dependentes e linearmente independentes e então, depois de uma aula “normal”, propõe trabalho em grupo para que os alunos possam rediscutir os conceitos através das questões propostas. E continuou explicando:

> A gente propõe algumas questões, ou mesmo práticas, para eles verificarem se é l.i. ou l.d. e depois faz umas questões teóricas para eles desenvolverem, mesmo depois as que não tenham sido dadas em sala de aula, para que desenvolvam completamente no trabalho em grupo.

O professor reforçou, de novo, que no trabalho em grupo, propõe umas “...questões teóricas para eles desenvolverem...”, o que segundo o seu discurso anterior tem o objetivo de criar um ambiente para os alunos discutirem e também aprofundarem essas noções.

> Depois faço a abordagem de base num desenvolvimento normal. Naquelas mais ... complicadas recai exatamente a questão do l.i. ou l.d.. Então vão ter mais dificuldade de fixar esse conceito.

O professor voltou a ressaltar a dificuldade que os alunos possuem com as noções de vetores “l.i. e l.d.” e continuou explicitando como introduz a noção de base:

> É a definição clássica de base, que é um conjunto l.i. e que gera o espaço. Isso que é uma base de um espaço. Quer dizer, inicialmente tem aquela história de que a base, na realidade, é o menor conjunto, menor entre aspas, que gera o espaço vetorial. O menor conjunto que gera o espaço vetorial.

O professor citou, em seu discurso, a definição clássica de base que usa a justaposição e também fez menção à idéia de base como sendo o menor conjunto que gera o espaço vetorial, mas não explicitou se trabalha ou não com os alunos essa idéia da base como um sistema de geradores minimal.

Quando Gonçalves respondeu sobre as analogias que utiliza, disse:

> Talvez com o IR^n. O IR^2, o IR^3, tentando mostrar que...ou então pegando a base canônica.

O professor ressaltou a utilização dos espaços vetoriais da Geometria Analítica, o IR^2, o IR^3, e as respectivas bases canônicas como sendo analogias que utiliza para facilitar o entendimento da noção de base. O professor explicou que os alunos têm um curso de Vetores e Geometria antes do curso de Álgebra Linear:

> O curso é Vetores e Geometria. Neste curso a gente já diz que os espaços vetoriais, a Álgebra Linear é uma generalização exatamente do curso que eles tiveram de vetores. Vetores, exatamente eles trabalham no IR^3, eles falam no V^3, então a gente faz uma generalização exatamente dessas idéias dos vetores. E nos vetores, a gente fala de base, veja bem, eles já viram tudo isso daí. [...] Então, a gente faz a ligação com o V^3. Como a gente faz: dá exemplos e a gente diz que aquilo que eles viram passam a ser um exemplo agora do que nós estamos fazendo aqui, os espaços vetoriais. Passamos um semestre inteiro falando sobre vetores e geometria.

Gonçalves, segundo o exposto acima, utiliza a passagem do *antigo para o novo*: retoma a noção de base no concreto, que para ele é o IR^3, "...E nos vetores, a gente fala de base, veja bem, eles já viram tudo isso daí...", para depois *generalizar*: "...a Álgebra Linear é uma generalização exatamente do curso que eles tiveram de vetores." Os princípios de *concretização* e de *generabilidade* de Harel, assim como a passagem do *antigo para o novo*, que têm um caráter "meta", parecem estar presentes no trabalho de desenvolvimento da noção de base realizado por Gonçalves.

Na continuidade da entrevista, Gonçalves falou sobre a aplicação da Álgebra Linear que utiliza em seus cursos:

> Então, uma das aplicações que eu faço com eles, mas não é...mas eu não avanço muito. Mas é só uma motivação, seria a base da teoria dos códigos com detecção de erros. Mas, acho importante isso daí porque tem grandes aplicações de transmissão de dados por satélites...transmissão de informações via computador, transmissão de e-mails...Então é uma aplicação que eu dou, mas eu não estendo muito porque é um curso todo [...] Eu acho que deveria ser dado até um curso sobre isso. Porque teoria dos códigos, além de ter uma aplicação grande, é um curso de matemática.

O professor ressaltou a apresentação da teoria dos códigos com detecção de erros em seu curso de Álgebra Linear, por ser uma teoria que utiliza algumas noções da disciplina e que tem grandes aplicações, demonstrando sua preocupação em motivar os alunos. Temos aqui um recurso "meta".

Conclusões parciais

Gonçalves, no seu discurso, antecipa as noções de dimensão, transformação linear e isomorfismo para justificar e criar a *necessidade* da noção de base, ressaltando a importância de estar trabalhando com espaços vetoriais de dimensão finita, pois todos são isomorfos ao IR^n. Esse isomorfismo é importante, pois o professor coloca o *concreto* como sendo a Geometria Analítica, com o IR^2,

IR^3, e a Álgebra Linear como a sua *generalização*. Observemos que o professor utiliza a passagem do *antigo para o novo* e os três princípios de Harel.

O professor afirma, em seu discurso, apresentar a noção de base como a justaposição de um sistema de geradores com um conjunto linearmente independente.

Convém destacar também a sua preocupação de realizar trabalhos em grupo, propondo atividades que possam ocasionar reflexões por parte dos alunos, ampliando as noções já trabalhadas em sala de aula. Além disso, demonstra uma preocupação com aplicações, citando a teoria dos códigos como uma que apresenta para os alunos para justificar a noção de base. Esses recursos utilizados pelo professor têm um caráter "meta" e são passíveis de se tornarem alavancas meta.

Gonçalves, ao falar sobre a contextualização da Álgebra Linear nos cursos, ressalta a disciplina como uma ferramenta para os outros cursos e destaca a noção de base de um espaço vetorial entre as prioritárias para um primeiro curso de Álgebra Linear.

O professor destaca ainda a Geometria Analítica como pré-requisito para a Álgebra Linear e relaciona essa disciplina com equações diferenciais e algumas noções dentro da própria álgebra.

O índice de reprovação para Gonçalves é razoável, ressaltando que os alunos "vão mal" no início do curso com o "problema da linguagem" em Álgebra Linear, mas que passando esse período de adaptação, os alunos "passam a aprender".

CAPÍTULO III

Conclusão

Este trabalho investigou quais os metaconhecimentos matemáticos sobre a noção de base de um espaço vetorial emergiram do discurso de seis professores universitários entrevistados. As análises feitas apontaram não só os recursos meta relativos à noção de base como também aqueles recursos, de ordem mais geral, que surgiram ao longo das entrevistas. Além disso alguns dados relativos à caracterização dos professores e contextualização da Álgebra Linear em relação aos cursos de graduação foram levados em conta, dado que, enriquecerão a compreensão de alguns aspectos que poderão ter influenciado ou justificado a sugestão desses recursos.

Alguns recursos meta já apareceram nos comentários dos entrevistados quando procuravam contextualizar a Álgebra Linear nos cursos de graduação. Isto havia sido previsto nas análises à priori das entrevistas. Por exemplo, o item - a importância da Álgebra Linear para os cursos - possibilitou diversas reflexões dos entrevistados; entre elas, a de que a Álgebra Linear é uma ferramenta importante para os outros cursos e a de que, não existem aplicações que pudessem inspirar a elaboração de situações problema condizentes com os conhecimentos dos alunos de um primeiro curso, o que corrobora as afirmações do “grupo francês”, em seus artigos.

A Álgebra Linear é tida pelos entrevistados como uma das matérias mais difíceis, mas não como a mais difícil. O índice de reprovação nessa disciplina, segundo os professores, está em torno de 25% a 40%. Ressalte-se que, embora a Álgebra Linear tenha esse nível de reprovação, os professores parecem aceitá-lo como um fato normal e inexorável, pois como alguns explicitam, o formalismo da Álgebra Linear é que a torna difícil .

A noção de base foi destacada como prioritária para um primeiro curso de Álgebra Linear pela maioria dos entrevistados. Surgiram três abordagens diferentes dessa noção no discurso dos professores: como um sistema de geradores minimal, como um sistema maximal linearmente independente e como uma justaposição de um sistema de geradores com um conjunto linearmente independente.

A idéia de um sistema de geradores minimal pode gerar reflexões dos alunos sobre a vantagem de se conseguir um número mínimo de vetores para gerar o espaço, induzindo-os a compreender a necessidade de serem vetores linearmente independentes. A idéia de um conjunto maximal de vetores linearmente independentes pode gerar reflexões sobre a necessidade de se conseguir o maior conjunto linearmente independente que dará origem ao espaço, surgindo daí naturalmente a noção de sistema de geradores. Tanto uma idéia como outra explicitam uma articulação, entre as duas noções, vetores linearmente independentes e sistema de geradores dando origem ao conceito de base. São recursos "meta" passíveis de se tornarem alavancas meta.

A utilização de uma forma coloquial para a introdução de noções como a de base e de outras que estão intrinsecamente ligadas a essa foi exemplificada através de analogias: "vetores bem comportados", "grau de liberdade", "colchinha de crochê", "ambiente", "lucro", "economia", "tijolos", "parede". Estas analogias podem se tornar alavancas meta para o ensino/aprendizagem de algumas noções e idéias da Álgebra Linear.

Uma analogia que não está diretamente ligada à noção de base, mas que é interessante ressaltar, é a "história que tem começo, meio e fim" utilizada para ocasionar reflexões sobre a maneira dos alunos apresentarem as resoluções dos exercícios propostos, destacando a maneira formal com argumentações matemática, propiciando uma reflexão sobre os conteúdos dos mesmos.

Outra possível alavanca meta é o recurso de se enfatizar as operações adição e multiplicação por um escalar, como as ferramentas que estão inerentes à de espaço vetorial e que bastam para caracterizar um elemento genérico do espaço vetorial através de um número finito de vetores “bem comportados” desse espaço. Temos um discurso sobre a Álgebra Linear que ocorre desde o início do curso, procurando ocasionar reflexões por parte dos alunos e motivação para a noção de base .

Convém ressaltar também a utilização da passagem do antigo para o novo, tendo a Geometria Analítica como o antigo. Esse recurso faz parte das *informações constitutivas do funcionamento matemático* que auxilia o aluno quando a mudança de pontos de vista é necessária, integrando os conhecimentos precedentes aos novos conhecimentos, portanto, um recurso “meta” passível de se tornar uma alavanca meta, utilizado por diversos livros didáticos e destacado por Araújo em sua dissertação.

Além disso, a Geometria Analítica é utilizada como o *concreto* para gerar reflexões dos alunos sobre a noção de dependência linear, de sistema de geradores e de base. Assim como a forma coloquial e as analogias, já citadas acima, são utilizadas para criar a *necessidade* dessa noção. A *concretização* e a *necessidade* são utilizadas para a *generalização* da noção de base. São os três princípios de Harel (concretização, necessidade e generabilidade), que surgem no discurso e que podem auxiliar no ensino/aprendizagem da Álgebra Linear, sendo portanto possíveis alavancas meta.

Outra idéia importante que surgiu no discurso dos entrevistados foi a de antecipar a noção de transformação linear e a de isomorfismo entre espaços vetoriais para criar a *necessidade* da noção de base. Esse tipo de recurso, de se utilizar noções que não são o foco do momento para justificar outras, foi indicado por Robert e Robinet (1996) como uma possível alavanca meta.

Outro recurso “meta”, que é caracterizado por Dorier como uma possível alavanca meta e que é utilizado por todos os professores, é o de *fornecer informações sobre a natureza das noções a serem introduzidas*, relacionando a Álgebra Linear com noções de outras disciplinas do curso (Geometria Analítica, Equações Diferenciais, Cálculo), com conceitos que serão explorados posteriormente (isomorfismos, transformações lineares) dentro do próprio curso ou ainda como extensões de conceitos já introduzidos (linearidade).

Foram sugeridos alguns recursos de ordem metodológica, que podem ter como resultado uma melhor compreensão dos assuntos tratados. Por exemplo, o fato de utilizar trabalho em grupo, com o intuito de propiciar um “debate” entre os elementos, pode gerar reflexões sobre as noções tratadas. A utilização do livro didático como um meio de provocar reflexão dos alunos sobre pontos que podem ocasionar erros e generalizações abusivas constitui também um recurso meta. Por exemplo, o fato de alguns alunos associarem as propriedades conhecidas da adição e multiplicação dos números reais com as operações de adição e multiplicação por um escalar de um espaço vetorial qualquer, acarreta o erro de dividir um vetor por outro vetor.

Ao destacar alguns recursos “meta” passíveis de se tornarem alavancas meta, espero propiciar uma abertura para novas pesquisas sobre as alavancas meta em sala de aula, assim como para a elaboração de seqüências que avaliem alguns desses recursos levantados nessa pesquisa. Outrossim, espero ocasionar reflexões por parte dos professores que lerem essa obra a respeito da utilização de recursos “meta” em suas aulas.

BIBLIOGRAFIA

ARAÚJO, C. C. V. B. **A metamatemática no livro didático de álgebra linear**. São Paulo, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

BEHAJ, A. La Structuration du savoir. In: DORIER, J.L. et al. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question**. França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, p. 286-289.

BEHAJ, A.; ARSAC, G. La conception d'un cours d'Algèbre Lineaire. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, França, v.18, n° 3, p. 333-370, 1998.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. São Paulo, 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

CHEVALLARD, I. et al. **Estudar Matemáticas. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**, tradução Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001, cap. 9.

DORIER, J. L. **Contribuition à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique** (1990). Disponível em http:/ www.inrp.tr/ didactique/ theses/ maths/ Dorier.htm. Acesso em 26 de dezembro de 2002.

DORIER, J. L. Sur l’enseignement des concepts elémentaires d’Algebre Linéaire à l’université. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, França, vol 11, n° 23, p. 325-354, 1991.

DORIER, J. L. Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. **Kluwer Academic Publishers, Netherlands,Educational Studiers in Mathematics**, n° 29, p. 175-197, 1995.

DORIER, J. L. et al. **L’enseignement de l’algèbre linéaire en question**. França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, Cap. 4.

DORIER, J. L. et al. **L’enseignement de l’algèbre linéaire en question**. França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, p. 291-297.

DORIER, J. L. État de l’Art de la recherche en Didactique. A propos de l’enseignement de l’Algèbre Linéaire à l’université**. Recherches en Didactique de Mathématiques**, França, vol 18, n° 2, p. 191-230, 1998.

DORIER, J. L. et al. **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000, p.151-245.

GASKELL, G.; BAUER, M. W. **Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som**. Tradução de Pedrinho A. Guareschi. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2002, cap. 3.

GONZÁLEZ, E. G. Metacognicion y tareas intelectualmente exigentes. **ZETETIKÉ**, Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade de Campinas, vol.6, n.9, p. 59-87, Jul./Dez. de 1998.

GRANGEAT, M. et al. **A Metacognição, um apoio ao trabalho dos alunos**. Portugal: Porto Editora Ltda, 1999, p. 7-59.

HAREL, G. Sur trois principes d’aprentissage et d’enseignement: le cas de l’algèbre linéaire. In: DORIER, J. L. et al. **L’enseignement de l’algèbre linéaire en question**. França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, Cap. 5.

LODI, J. B. **A entrevista: Teoria e Prática**. São Paulo: Editora Pioneira, 8ª edição, 1998.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. Coleção Temas Básicos de Educação e Ensino. São Paulo: EPU Editora Pedagógica e Universitária Ltda., 2001, p. 11-53.

MARTINS, J. Pesquisa Qualitativa. In: Fazenda, I. et al. **Metodologia da Pesquisa Educacional**, São Paulo: Cortez Editora, 1997, p. 49 -58.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo. Uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**. UNESP – Rio Claro, São Paulo, 1993, p. 271-279.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

REVUZ, A. In DORIER, J. L. et al. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question**. França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, prefácio, p. 9-13.

ROBERT, A.; ROBINET, J. Prise Compte du Meta en Didactique des Mathematiques. **IREM**, Université Paris VII, vol.21, p. 1-63, 1996.

ROGALSKY, M. L'enseignement d'algèbre linéaire experimente a Lille. In: DORIER, J. L. et al. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question**. França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, Cap. 3.

SILVA, A. M. ; LINS, R. An Analysis of the production for the notion of basis in linear algebra. In**: Program of the 2nd International Conference on the teaching Mathematics (at the undergraduate level)**, 2002, Grécia, Anais...University of Crete, p. 108.

APÊNDICES

Apêndice 1

“Guia” da entrevista:

1ª fase: Caracterização do professor e suas atividades acadêmicas:

- Formação acadêmica: bacharelado, licenciatura, especialização, mestrado, doutorado, pós doc...
- Tipo de pesquisa que já fez ou faz (em Matemática Pura, Aplicada ou Educação Matemática).
- Docência de Álgebra Linear (tempo, tipo de curso).

2ª fase: Contextualização de Álgebra Linear nos cursos:

- Importância da Álgebra Linear para a formação do aluno.
- Tópicos prioritários em um primeiro curso de Álgebra Linear.
- Relação de Álgebra Linear com outras matérias do curso (aplicações etc.).
- Necessidade de pré-requisitos para acompanhar um primeiro curso de Álgebra Linear.
- Taxa de aprovação de Álgebra Linear.
- Comentários sobre a frase de Plancherel: ”De todos os cursos que havia dado, o de Álgebra Linear era de longe aquele que parecia mais difícil aos estudantes.”

3ª fase: Desenvolvimento da noção de base:

- Abordagem da noção de base
- Atividades propostas.
- Exercícios.
- Exemplos mais utilizados.
- Analogias
- Aplicações.
- Utilização de livro didático.
- Existência de dificuldade dos alunos com a noção de base.

Transcrição – professor Almeida.

Iniciei a entrevista explicando os objetivos da mesma e garantindo o anonimato do professor e da Instituição.
Duração da entrevista: 50 minutos.
Instituição: privada.
Entrevistador (E); entrevistado (Almeida)

E: Eu vou perguntar para você a sua formação acadêmica?
Almeida: Eu sou formada em matemática pela PUC-SP. Eu me formei em 75. Depois eu fiz os cursos de pós-graduação em Estatística na USP; fiz todos os créditos, mas não fiz tese. Depois eu vim fazer Matemática, Mestrado na PUC-SP. Terminei em 90...mais ou menos...depois até posso dar o ano certinho, não lembro. Sob a orientação da Prof.a Silvia Machado, que foi em Álgebra Genética né, o meu mestrado. E depois eu fiz alguns cursos na Educação Matemática, a uns dois ou três anos atrás e agora estou no doutorado em Educação Matemática. Essa é a minha formação.

E: E em álgebra linear você trabalha há quanto tempo?
Almeida: Eu trabalho em álgebra linear com alunos da matemática, da engenharia, da computação desde de 76. Em 76 eu já dava aula de álgebra linear, só que não é freqüentemente, quer dizer, não são todos os anos que eu dei aula de álgebra linear. Álgebra linear, às vezes eu dou aula e passa uns dois, três anos, às vezes eu não dou, mas, durante esse período, vira e mexe eu estou dando aula de álgebra linear nesses cursos.

E: E...como é que você vê assim, você acha que é importante álgebra linear para os alunos desses cursos que você trabalha?
Almeida: É...p'ros alunos, a álgebra linear é, digamos assim, o primeiro contato com a linguagem algébrica básica. Eles vêm do ensino fundamental e médio muito fracos nessa escrita, sem rigor. Eles até usam álgebra, lógico, mas, o rigor da linguagem, eles não tem e eles vêm com muitos ...muitos tipos de erros, mas é da própria formação, é do próprio professor que trabalhou com eles. Então, a gente percebe e consegue identificar vícios da representação da linguagem algébrica, mas você percebe que é em grupos, quer dizer, é um tipo de defeito que eu não sei porquê, não é nem o mesmo professor do ensino médio, mas eles vêm. Por exemplo: tinha um aluno que uma vez me apresentou numa prova um pontinho para dizer a multiplicação e depois vinha uma soma, por exemplo. E o pontinho para ele era os parênteses... entendeu? Quando ele via aquele ponto é porque ia multiplicar tudo que vinha na frente. Aí eu chamei a atenção na aula, etc. e acho que algum aluno meio desatento, na outra atividade que eu dei pôs um pontinho bem grande, como se eu não tivesse enxergado, era por isso que eu estava perguntando! Porque era muito forte p'ra ele isso: que o pontinho substituía os parênteses. Entendeu? Então, a gente percebe a importância para eles...é fundamental...desde esse início dessa linguagem, como os próprios resultados da álgebra linear p'ros cursos. O difícil na álgebra linear é você motivá-los em termos de aplicações. Eles questionam, eles perguntam: ah, mas, para que que serve isso, de ficar trabalhando assim, etc., com uma representação abstrata, eles falam, que a gente não tem aplicação que a gente visualize. Porque as aplicações vão ser nos outros cursos lá na frente, quer dizer, eles precisavam dominar o resto do curso para serem capazes de...de perceber as aplicações. Então, eu tenho usado, por exemplo, na computação, uma parte da computação gráfica. Então, tem alguns livros, em particular um deles, que a gente recebeu não faz muito tempo, que tem exemplos de aplicação da computação

gráfica, tipo assim imagens que você... deturpa a imagem dependendo da transformação do plano que você usa. Você pode ampliar, minimizar e fazer qualquer tipo de deformação. Então isso aí ajuda que eles aceitem o curso. E eu começo o curso conversando com eles que a gente vai fazer um estudo muito parecido com aquele que ele fez, ou até deveria ter feito no ensino médio, no fundamenta, de estudar conjuntos, propriedades de conjuntos. Só que a gente está num momento que a gente faz um estudo, hã...de todos os conjuntos ao mesmo tempo no lugar de fazer conjunto, conjunto como eles viam, separados: vamos estudar matrizes, vamos estudar polinômios, vamos estudar números complexos. E agora é uma forma de estudar todos ao mesmo tempo desde que tenham uma estrutura básica. Então, eu começo o curso discutindo com eles os conjuntos que eles conhecem e as propriedades. Então, eles ficam falando: se sabem que conjunto, como é que operaciona dentro desse conjunto. Depois de toda essa discussão que eles apresentam, a gente vai escolhendo... até chegar na estrutura de espaço vetorial. Quer dizer, alguma coisa que contemple a todos com as operações que eles conhecem. Aí a gente vai para a parte...uma operação diferente, que para eles é assim algo muito difícil de aceitar, que você pode inventar jeito de somar matrizes diferentes, quer dizer, posso criar... mas que não vai ter mais a estrutura. Por isso que eles aprenderam as operações daquele jeito, etc., essa discussão. E eu vou sempre tentando montar para eles uma dificuldade, ou uma intenção nova para definir novos conceitos, uma necessidade de um novo conceito. Então, quando a gente trabalha espaço vetorial, que eles ficam tentando acostumar um pouco com a linguagem, com a representação, porque eles ficam...meio pensando: "eu não sei o que você quer que eu escreva"... porque eles passam em cima das propriedades que eles nunca viram. Porque que corta aqui, corta ali e some, desaparece, entendeu? As operações que estão atrás, as propriedades das operações que possibilitam fazer essas, hã...simplificações algébricas que eles usam sem nem pensar. Então, aí você tem que retornar, porque não foi visto dessa maneira. Eles viram quase como técnicas, mesmo. Muitos professores não sabem os fundamentos de muitas coisas. Dão como técnicas, essas coisas. Então, quando a gente trabalha a estrutura de espaço, é muito trabalhoso para você mostrar que aquele conjunto é um espaço vetorial. Aí, eu peço para eles procurarem dentro dos espaços vetoriais, conjuntos que continuam sendo espaços. E daí, a gente discute, porque eles acham que conjunto, adotou as operações, então isso daqui vai ser equivalente. Daí a gente tira a noção de subespaço. E p'ra saber que ele é espaço vetorial, que ele vem de uma estrutura de espaço vetorial, eu posso diminuir o meu trabalho. Então aí é lucro ter uma definição. Eu só preciso, quer dizer, eles acabam fechando a definição de subespaço. Quando você tira uma estrutura de uma estrutura de espaço você tira um subconjunto, dá para você verificar poucas coisas. Aí eles acham lucros. É rico ter a definição, porque vai diminuir o meu trabalho, porque a gente passa a aula inteira vendo se um conjunto é um espaço vetorial! E, nesses termos, quando a gente vai para base, etc., a gente quer representar um conjunto que tem infinitos elementos e trabalhar esse conjunto com menos elementos. Então, aí vem primeiro a de gerador. Mas aí eu quero ter o mínimo trabalho possível, aí vem o independente. Então é nesses termos que eu estou trabalhando com eles.

E: E...você até já foi falando aí no seu discurso, mas quais são os tópicos prioritários num primeiro curso de álgebra linear?
Almeida: Num primeiro curso? Num primeiro curso de álgebra linear eu acho que é fundamental você chegar, num curso digamos de um ano, eu acho que é fundamental o conceito de espaço, subespaço, li, a base e a dimensão que é o primeiro invariante. Ter uma idéia bem fundamentada dessa parte. As transformações, desde o momento que é um curso de computação, as transformações no plano são muito importantes, quer dizer a parte de transformação linear, né. E, para o curso de engenharia é muito importante você chegar em autovalor, autovetor. Então eu acho que essa parte aí, é uma parte que...são os itens mais importantes da gente trabalhar.

E: E a relação da álgebra linear com as outras matérias do curso, como você vê isso?
Almeida: Bom, assim: a gente vai percebendo a relação da álgebra linear com outras matérias do curso quando você entra, por exemplo, no curso de função, quando você entra nas transformações. Então, você percebe o quão limitada foi a noção de função que ele teve. Porque no curso de Cálculo, em geral, eles trabalham com função de IR em IR, ou de IR^2 em IR^2, no máximo, quando trabalha. Então, você ter que se preocupar em ter um espaço...um domínio e um contradomínio, que podem ser conjuntos diferentes, é...é difícil p'rá eles trabalharem. Então aí eu vou cobrar do cálculo, vou pedir p'ro cálculo fazer um monte de outras coisas, né, p'rá chamar a atenção, porque é preciso definir quem é esse domínio. O cálculo trabalha muito com eles o domínio, o contradomínio, mas...e a imagem, a função injetora, sobrejetora, mas quando eles vão para a álgebra linear, eles não conseguem fazer essa transposição...é outra coisa, lá era cálculo e agora eles estão vendo álgebra linear. Então, eu fico buscando, porque mais ou menos eu sei como é que eles trabalham lá no cálculo. Então eu vou buscar: vocês lembram quando no cálculo vocês viram assim. A gente está fazendo exatamente a mesma coisa, só que o conjunto domínio, contradomínio não é mais só IR e IR. E essa parte de transformar, da transformação linear para fazer um isomorfismo entre espaços vetoriais e ....de representar por meio de matrizes, a gente trabalha bastante e aí a computação adora, porque eles sabem que eles vão precisar representar uma matriz para poder ir para o computador. Então eu uso isso como trunfo. A gente vai conseguir fazer com que qualquer espaço vetorial possa ser representado por um espaço de matrizes, fazendo um isomorfismo. Eles acham isso muito, muito legal. Aí a gente começa a trabalhar. No lugar de fazer a função que ele tanto detesta, a gente pode multiplicar...usar a matriz para fazer a transformação. Aí, eles acham legal. Mas, alguns têm dificuldade com matriz, então na engenharia a gente só dá, às vezes, um enfoque bem grande, porque eles têm dificuldades em manipular matriz, operacionalizar. E...a parte de sistemas lineares tem uma dificuldade que a gente tem que transpor também. Eles têm muita dificuldade em solução...eles acham que sistema linear é coisa fácil, que eles já viram. Na hora que aparecer sistema eu me viro, ou por substituição, ou por adição, a gente chega na resposta. Mas quando o sistema é indeterminado, eles não sabem dar a resposta. A resposta tem mais variáveis livres do que possível, então você precisa dar um método. Eu trabalho com escalonamento e...mas, eles vêem a importância, mas na hora h eles voltam para a substituição. É um trabalho que tem que ser o ano inteiro...que álgebra linear, todos os conceitos que você vai trabalhar no fim você cai em sistema linear, homogêneo, que tem uma solução ou infinitas. E daí depende o que você vai definir. Então com isso a gente trabalha bastante. Todo conceito, você volta em sistema linear. Mas, mesmo assim a gente percebe que: eles têm dificuldades, você trabalha, eles aceitam, conseguem fazer, mas, na hora em que é colocado o problema, eles voltam lá atrás e vão resolver só por substituição e vão dar a resposta errada. É muito interessante.

E: E assim, você vê necessidade de pré-requisitos num primeiro curso de álgebra linear?
Almeida: Num primeiro curso de álgebra linear...pré-requisitos? Olha, eu vejo... que seria muito melhor se eles tivessem já uma discussão sobre sistemas lineares...você vai fazendo alguns exemplos, de novo. Então, se eles tivessem uma boa formação em discutir solução de sistema linear, eles não teriam...na hora que eles estão preocupados com um conceito, ainda ter que voltar p'rá dificuldade de sistema linear. Agora, fazer separado antes de começar o curso sistema linear, matrizes e números complexos e aí começar o curso de álgebra linear p'rá usar, não funciona. Não funciona. Eles teriam que vir amadurecidos do ensino médio. Agora, sem ter, não adianta fazer no início ou meio, um curso de revisão. Não funciona, porque na hora h que você vai precisar lá, não teve tempo de amadurecer. Aí lá você vai ter que fazer de novo. Então, não desenvolveu...no próprio curso, você vai trabalhando essas noções. Mas, lógico, se ele conhecer muito bem o conjunto de matrizes, de polinômios e números complexos, o IR^3 ou IR^2, que a geometria analítica trabalha bastante, isso já é um ponto de apoio. Porque, eu vou lá na

geometria analítica para ir buscar os conceitos, a necessidade que eu estou aqui, aí eu vou buscar na geometria analítica, que eles já viram no IR^2, no IR^3, sabem manipular; o vetor, segmento orientado eles sabem também manipular, aí eu trago p'rá cá. Eu vou buscar o conceito que eles viram lá. E daí a gente vai usar para qualquer espaço vetorial, vai generalizar esse conceito. Então a gente faz esse...essa transmissão, digamos assim, entre as duas disciplinas, bastante. Não resta a menor dúvida, se eles tivessem como pré-requisitos conhecer esses conjuntos que a gente já vai usar, muito bem o sistema linear, etc., seria muito melhor, mas a gente sabe que não tem isso, hoje.

E: E, como é que é a taxa de aprovação em álgebra linear, nesses anos todos que você trabalhou?
Almeida: Nesses anos, eu diria que é... de reprovação? Em torno de uns 20%, 30%, muitas vezes até porque eles acabem desistindo, eles não vêm no curso. Não por dificuldade, né, eu acho que eles não...não desistem do curso porque não conseguem acompanhar. É que eles vão...às vezes, é porque trabalha, falta, né. Estou falando dos três cursos em geral, porque a matemática a gente tem poucos alunos. Mas, daria uns 30%, talvez, já considerando esses que desistem. São poucos os alunos que realmente se dedicam e acabam reprovados. Pelo menos, assistem todas as aulas, fazem as atividades, né, eles conseguem. E, eu achei interessante, uma aluna da engenharia, um dia falou: ah, vou assistir aula, sobre o que que é, probabilidade ou álgebra linear? Eu falei: probabilidade. Ah, se fosse álgebra linear ainda eu ia. Ela gostou mais da álgebra linear do que de probabilidade que é uma matemática aplicada, você tem exemplos práticos. Ela preferia o mais abstrato, o algébrico. Eu achei interessante.

E: É...tem uma frase do Plancherel: "De todos os cursos que havia dado, o de Álgebra Linear era de longe aquele que parecia mais difícil aos estudantes." Você concorda com isso?
Almeida: Não. O...calcular probabilidade, o conceito fundamental, né, tendo a parte de condicional independente, se pegar um problema de probabilidade e resolver, isso é muito mais difícil p'ros alunos. E é...é um problema de aplicação, mas eles não conseguem organizar o raciocínio com os poucos conceitos que ele precisa saber, conhecer, organizar p'rá entender o problema e arrumar uma estratégia de solução p'rá ele. Isso é muito mais difícil do que álgebra linear. A álgebra linear, eles têm...como é que eu vou dizer...p'rá resolver os problemas de álgebra linear, não são tão aplicáveis, eles não dependem de uma interpretação, como por exemplo...eu comparo com probabilidade, porque são duas coisas que eu estou sempre trabalhando. Então, é capaz que probabilidade é muito mais difícil p'rá eles do que álgebra linear. Porque álgebra linear, aos poucos eles vão conseguindo escrever, vão aprendendo a linguagem, a representação. Eles reclamam um pouco que os conceitos são muito parecidos, né, então eles têm que separar. Acho que na cabeça deles eles falam: modelo p'rá essa coisa, modelo para esse conceito. Acho que eles devem fazer o maior delírio na cabeça deles. Mas, pelo menos tem um modelo, que quando você quer mostrar que um conjunto é base você teria essas condições. Você não depende de interpretar o problema, você só está dependendo do conjunto, né, as operações, como é que você operacionaliza naquele conjunto, como é que representa. Se eles conseguirem entender a representação, se eles derem conta dessa...ele não tem dificuldade, eles só precisam ter o que for preciso p'rá mostrar que é base, o conceito. Muito diferente de um problema de probabilidade que tem uma história, que você tem que interpretar e ainda arrumar uma estratégia para resolver. Então, eu acho que álgebra linear não é, difícil.

E: Bom, o meu trabalho é, mais especificamente sobre a noção de base. Até, você já falou bem de base, mas de uma maneira geral como é que você trabalha. Eu gostaria de saber como é que você faz a abordagem da noção de base? Se pudesse, que você falasse isso como se fosse uma aula, né.

Almeida: Bom, p'ra eu chegar em base, primeiro eu trabalho com espaço ou subespaço, depois a gente busca...a colocação que eu faço para eles, eu estou repetitiva, talvez...

E: Não. É ótimo.
Almeida: É...eu coloco p'rá eles que a idéia é que: uma maneira de representar esse conjunto usando elementos. Antes disso a gente viu também o que é combinação linear: tem elementos do conjunto que você pode também representar usando outros e a gente faz bastantes exemplos disso. É... até verificando que tem várias maneiras de representar um elemento usando outros. De vez em quando a gente só tem um jeito de usar...representar um elemento do conjunto usando outros. Então, isso a gente explora fazendo exercícios. E como eles vão cair em sistemas...se ele é indeterminado, quer dizer aquele não era uma base, às vezes não consegue representar, né, o sistema dá impossível, não dá para representar aquele vetor como combinação dos outros. Depois de explorar muito bem isso, a gente quer buscar no conjunto, uma maneira de representá-lo usando elementos de modo a não ter que considerar os infinitos, já que têm alguns que eu consigo representar usando os outros. Como em geometria analítica eles já têm um pouco dessas noções, aí eles começam...alguns até vêm já direto com a idéia de base, mas eu não quero. Eu quero gerador. Então como é que eu consigo obter, quais os vetores que eu preciso para conseguir obter os outros? Então, trabalhando nisso vem a idéia de gerador. Então a gente consegue achar geradores de um conjunto. Então, em geral a gente trabalha primeiro no IR^2 e no IR^3, porque na geometria analítica foi onde eles trabalharam. Só que a gente vê que não tem uma maneira só, não tem só um conjunto de geradores. Tem vários, no IR^2. E aí a gente vai p'rá lei da economia: o mínimo de vetores possível de onde sai a condição de independência. Então a base vem como conseqüência: que é uma maneira de eu trabalhar o conjunto, de eu conhecer o conjunto, de eu representar o conjunto usando um mínimo de vetores. Aí vem a base. Hã... conseqüentemente vem o teorema da invariância, a dimensão e aí a gente trabalha mais hã... com exemplos discutindo, para eles chegarem que são invariantes quando a base vai ter que ser. Na matemática, a gente ainda trabalha um pouco as demonstrações, né, teorema da invariância, a gente vai por etapa, depois a gente monta o teorema inteiro. Os vários subitens, digamos assim, do teorema da invariância. Já na engenharia e na computação a gente não tem tanto cuidado com esse trabalho da demonstração, vem mais assim de forma intuitiva. E é lógico, a gente faz para o IR^2, o IR^3, e o próximo passo, a gente transporta para os outros conjuntos, porque eles só viram no IR^2 e no IR^3, na geometria analítica. Então a gente puxa daí e depois a gente vai, à medida que você vai fazendo: bom, a gente chegou nesses geradores, será que com matriz eu também consigo? Será que com complexo, eu também consigo? Complexo é mais fácil porque eles têm a representação no plano. O difícil é que eles não conhecem muito bem os números complexos e a representação no plano de Argand-Gauss, mas enfim, é um pouco mais fácil, né. Hã...p'rá polinômios já, no curso de engenharia não é tão importante e da computação, o mais importante é número complexo e matrizes e o IR^n. São esses os conjuntos que a gente trabalha mais. Mas, na matemática a gente tem esse cuidado de trabalhar com os polinômios, são muito importantes p'rá eles, tem que tocar nesse conjunto e a parte da demonstração, né. É mais formal, que eu procuro trabalhar na matemática. Mas, turma da matemática também tem uma deficiência muito grande, na formação. Então a gente trabalha, arduamente. É. No curso da engenharia e da computação, não, agora não. Aqui, os nossos cursos estão com duas aulas por semana, muito pouco. Na matemática, ainda a gente tem quatro. Mas, na engenharia e na computação a gente tinha 3. Agora, a gente tá na engenharia com 3 e na computação com 2.

E: E assim, as atividades que você propõe, os exemplos que você utiliza em seu curso?
Almeida: As atividades que eu proponho p'rá eles, em geral assim...depois de cada discussão, de cada conceito construído, porque mais ou menos assim a gente precisa de

uma coisa, a gente trabalha dentro do conjunto, aí tira esse conceito por necessidade, cria, monta, formaliza e em seguida dá uma atividade. Essa atividade em geral eu ponho eles para trabalharem em grupo, hã...com material deles para trabalharem, porque é muito difícil no início para eles começarem a escrever. Então eles trabalham em duplas, mas eu procuro fazer nisso assim uma dinâmica constante, porque enquanto você está fazendo uma descrição com a classe toda, quando as turmas são grandes, você não tem o domínio de segurar a atenção...e parece p'rá eles que eles estão entendendo tudo, mas na hora que se propõe para fazer uma coisa sozinhos é que eles percebem o quanto ainda eles precisam p'rá conseguir dominar. Então essa seqüência de atividades vai ajudando a eles a localizar: olha, estou conseguindo fazer isso...parecia tão fácil quando a gente estava fazendo todo junto. Então, essa atividade...como tem, de vez em quando eu faço uma atividade individual, sem consulta, aviso para eles se prepararem, porque ele tem perceber que ele tem que ir estudando aos poucos para essa coisa ir amadurecendo. Quando eu represento... e a maior dificuldade nas atividades da álgebra linear é que na correção eu tenho o dobro do trabalho, eu escrevo o dobro deles, do que eles, porque eu gosto de na aula seguinte já devolver com todos os comentários para ir aperfeiçoando, digamos assim, essa notação que ainda não está boa. Assim eu vou sabendo quando... como é que eles estão me acompanhando e dou o retorno. Muitas vezes eu falo: olha, agora depois de todo esse retorno, porque fica mais vermelho do que o preto deles, digamos assim. Eles dão risadas, eles falam: puxa, você pôs aqui que estava muito bom e olha aqui tudo vermelho! Não, eu só dei sugestões para você melhorar a sua linguagem. Eles ficam meio assim e falam: puxa ela disse que estava muito bom, mas olha aqui. Então refaça. Eu peço para eles anotarem as sugestões que eu dei e refazer, p'rá ver como fica mais claro, que a gente brinca assim, fala: álgebra linear, álgebra, qualquer representação matemática é uma história, tem que ter começo, meio e fim. Eu falo p'rá eles: você não pôs o happy end, que é depois de tudo isso que você demonstrou, qual a conclusão? Você vê que essa condição, essa condição, essa condição e para. P'rá que que você fez tudo isso? Como quem diz, é uma maneira de você falar: olha, se isso e isso acontece, a definição diz que então isso é verdade, ou o teorema, estou garantindo que isso é verdade. Isso é uma história. Quando você pega o fio daquela história em matemática tem que por assim, portanto, que é uma maneira da pessoa ler e ter uma seqüência nessa história. P'rá entender._Porque, ele tem mania de por só, sabe, aquela seqüência matemática, uma embaixo da outra e acha que já fizeram muito. Não, você tem que, p'rá quem está lendo, isso é uma história. Tem que ter as palavras, a vírgula, o eu, entendeu? P'rá dar uma seqüência, e tem que ter começo, meio e fim. Você se propõe a fazer, desenvolve e põe a sua conclusão. Isso é muito gozado, eu brinco com eles, eu falo: a sua história não tinha nem um elo de ligação no meio dela.

E: E assim, mais especificamente em base, você lembra de atividades, nesse sentido que você colocou, mas alguma coisa específica que você usa antes de definir base, ou mesmo depois? Você tenta fazer um trabalho, um exercício...?
Almeida: Bem, depois, porque na verdade a base vem como conseqüência da nossa discussão lá de representar conjunto. Bom, então eu tenho esses vetores que conseguem representar o conjunto e é o mínimo que eu tenho. Então, a gente trabalha ah...um pouco buscando lá na geometria analítica a idéia de base que eu tenho, que é importante p'rá geometria analítica. Transporta p'ros outros espaços vetoriais e os exercícios ficam de...como é que eu vou dizer assim...de fixação mesmo, de...de...de representar a linguagem num conjunto, noutro, num espaço, noutro e tentar perceber que em todos esses conjuntos, às vezes eu dou vários exercícios assim: verifique se é base, se não é...essa parte de discussão e ver que não importa se é matriz, se é polinômio, se é complexo, o que a gente está fazendo sempre é a mesma estrutura, para verificar que é base e quando não é como é que eu justifico isso. Mas, nenhuma aplicação, digamos assim, mais diferenciada do que isso. Do que isso, do que fazer, compará-los com todos, o que eu fiz aqui, o que eu fiz lá, né. P'rá ver se o conceito é o mesmo ou...só muda o

tipo do conjunto, mas se você for comparar linha a linha, você está fazendo a mesma coisa, nesses termos. Ou quando não é, qual é a discussão. Porque que não é, como é que eu justifico.

E: Você falou em aplicações, você trabalha na parte de base, você trabalha com alguma aplicação, levanta alguma aplicação p'rá eles?
Almeida: Relacionada a base, nunca ...alguma coisa assim especial que me chame a atenção. Um pouquinho de trabalho diferente que a gente faz é com as transformações no plano, mesmo. Que dá p'rá fazer alguma coisa...é lógico que a transformação no plano você vai fazer em cima da base, né. Você transforma os vetores e aí você pode transformar figuras, etc. Mas, o fundamental é como é que esses vetores daqui da base com os vetores de lá da base do outro conjunto. Mas, nada muito especial.

E: Você usa alguma analogia quando está explicando p'rá eles o que é base?
Almeida: Analogia lá da geometria analítica. Eu vou buscar na geometria analítica, porque já foi discutido com eles esse conceito: de base, de dependência, quer dizer, p'rá gente sair...como eles já tiveram essas noções, provavelmente, na geometria analítica, então quando eu vou dizer, o mínimo de vetores, a economia, eles já vem com a independência. Porque a gente discute o gerador, as combinações lineares, o gerador e daí na economia eles vêm com o conceito de independência que eles têm. Porque que precisa ter esses vetores? Porque que esse aqui é dispensável? Porque é combinação dos outros, então não precisa estar aqui. Continua eliminando até que eu vou chegar numa base. Daí ninguém mais é combinação linear de ninguém. Então, tem que ter a idéia, o conceito de li. Alguns vêm com o conceito pronto, já falam que é li, mas não todos. Mas, à medida que eu vou tirando: esse aqui é combinação linear dos outros, este não fica, este aqui é combinação linear dos outros, este não fica, até que chega numa hora que ninguém mais é combinação linear de ninguém, então esse aqui é o mínimo que eu preciso, sem o nome, mas eles já chegam no mínimo de vetores p'rá conseguir gerar o espaço._Aí a gente renova que isso aí era o conceito de li e que esse conjunto que tem essas condições serve p'rá representar o conjunto inteiro, o espaço vetorial, e é o conjunto de vetores que é a base.

E: E assim, você acha que eles têm muita dificuldade com a noção de base, não tem, tranqüilo, como é...?
Almeida: Eles até usam bem. Eu não sei até onde, isso eu acho que nunca a gente vai conseguir saber, até onde eles têm o conceito de base realmente, porque acho que no IR^2, no IR^3, eles até têm uma visão. Na hora que você muda de espaço vetorial, eles têm assim uma certa, como é que eu vou...? Não sei se é uma certa barreira, uma certa dificuldade, porque eles não têm mais essa visualização que nem no espaço, no plano, e eles conseguem ver, do que é l.i., do que é l.d., então você transfere, eles transferem, algebricamente eles fazem, mas eles ...eu não sei até onde eles têm a compreensão de simplesmente transpor o conceito com matriz. Vai ter matrizes l.i.? Eles perguntam, mas como é que é matriz li? Eu falei: não é, é um meio de representar um espaço. Eles acham que vão poder visualizar geometricamente aquilo que eles vêm no IR^2, no IR^3. Então, eu não sei se são capazes de usar, são capazes de responder questões se são ou não, se é base ou não é, se é li, se não é, mas eu não sei até onde eles só estão mecanicamente, tecnicamente, sei lá qual é o termo mais adequado, fazendo ou se eles realmente estão conseguindo abstrair esse conceito. Eu acho que isso a gente não consegue... Eles respondem as atividades que a gente faz. Não sei até onde. Não sei se com o passar do tempo vai ficar alguma coisa desses conceitos, realmente.

E: Quando você utiliza mais p'rá frente, nas transformações, você... percebe alguma coisa, ou é tranqüilo p'rá eles usar em transformação...?

Almeida: Não, não. Acho que não traz...não vem com dificuldade essa noção de base, não. Eu acho que isso aí vem...fica tranqüilo, não me incomoda durante o resto do curso. Não tenho grandes, não tenho. A noção de base não... Eu acho que, pelo menos do jeito que a gente trabalha, ela é suficiente para eles terminarem o curso. Nunca apareceu, quer dizer, isso aqui eles não estão conseguindo fazer porque a noção de base está com alguma coisa que não foi bem compreendida e trabalhada. Eu nunca percebi isso.

E: Você se utiliza de livro didático ou apenas você indica p'rá eles...?
Almeida: Eu dou na bibliografia, né, alguns livros de álgebra linear, mas no curso não, na aula não e nem falo: vamos fazer os exercícios da página tal do livro. Eu não consigo. Porque, dependendo do comportamento deles, eu vou criando os problemas, os exercícios para eles fazerem. Porque, é gozado como a visão deles, de vez em quando eles falam, porque eles querem fazer modelo p'ra tudo, né? Se não tiver isso, como é que fica? Aí eu já bolo um problema. Porque a álgebra linear tem essa vantagem: você cria problemas, pela experiência que a gente tem e a visão que a gente tem, que vai acontecer exatamente o que eles querem com os vetores. Então você cria espaços, subespaços, transformação, para acontecer isso, aquilo, função injetora se você quer, etc. e você vai criando já problemas, que pode ser transformação, que pode não ser, você cria na hora. Então, não tem como pegar do livro para copiar exercícios, não consigo.

E: E esse trabalho em sala de aula é escrito, não?
Almeida: Bom, isso a gente faz. Faço, não é freqüente, não é assim, mas periodicamente durante o curso eu trago vários livros de álgebra linear. E aí, é aula biblioteca, eu falo p'rá eles. Então eu ponho isso: encontre um problema disso e resolva. Então ficam com os livros, aí eles trocam, vão encontrando, alguns problemas. Então, eles têm que folhear os livros. Logo no começo do ano eu costumo fazer uma aula biblioteca porque os alunos, são vários, então eles ficam trocando de mão. Para eles conhecerem os livros. Aí vários alunos já adotam um que eles gostaram mais. Em geral eles adotam um. Esse daqui fala do jeito que eu gosto, entendeu? Então, eles acabam adotando um, mais ou menos um livro, e aí eles já vão para a biblioteca buscar. Eu, inclusive, tenho o cuidado de pegar da biblioteca e trazer. Quer dizer: eles sabem que aquele lá está na biblioteca. Alguns anotam até o código, já. Então, quando eu trago é para eles aprenderem, se eles abrirem o livro, lá tem alguém comentando um pouco diferente, fazendo uma outra abordagem que talvez p'rá eles diga mais do que aquela discussão que a gente fez em sala de aula. Então, eu trago os livros nesse sentido. Então, tem atividades de vez em quando que é encontrar problemas sobre isso, isso, eu vou dando, ou então, para eles lerem os conceitos e comentar. Ou se isso apresentou alguma coisa p'rá aquilo que ele já tinha visto aqui. Então, não é constante, não dá, o nosso tempo é...mas periodicamente eu me cobro em fazer essa aula biblioteca. Hoje, é aula biblioteca. Aí eu venho com aquele calhamaço, distribuo e eles têm que trocar. Eles têm que, mais ou menos, passar a mão em todos aqueles que estão circulando. Aí eu os divido em grupos. Tem um grupinho que vê esse livro, escolhe isso, aí troca com o grupinho dali, mais ou menos assim. E funciona legal. Eu fiz essa experiência, não faz muito tempo, não tinha o hábito de fazer isso. Eu só falava: olha, livro e biblioteca existem para a gente ir lá pesquisar. É muito diferente, falar. Não resolve. Aí um dia eu pensei: quer saber, ao invés de ficar falando, falando, eu vou levar os livros. Foi ótimo. Foi a melhor experiência. Aí eu passei a fazer com freqüência em todos os cursos. Gostei bastante dessa iniciativa de trazer os livros de álgebra linear que a gente têm. É lógico, alguns que eu acho que são com uma linguagem mais accessível para eles. Foi uma experiência ótima e tem ajudado bastante eles. Eles perdem aula, eles vão para aquele livro que eles gostaram. É interessante isso.

Transcrição: professor Brito

Iniciei a entrevista explicando os objetivos da mesma e garantindo o anonimato do professor e da Instituição.
Duração da entrevista: 50 minutos.
Instituição: pública.
Entrevistador (E); entrevistado (Brito)

E: Eu gostaria que você começasse falando da sua formação acadêmica. Bem rapidamente, só para eu ter uma idéia, para encaixar dentro dos padrões de quem eu estou entrevistando. O perfil do profissional.
Brito: Certo. Então, eu fiz o bacharelado aqui na Universidade. Sou filha da Universidade em todos os sentidos, né. E aí já fui contratada, assim que me formei fui contratada. Estou aqui há trinta anos e eu me formei e fiz mestrado em matemática na área de topologia, matemática pura. Depois fui para o doutorado ainda na matemática pura. Tive algumas, hã...um período que eu tive que me ausentar, fui para Maringá e tal. Então meu doutorado ficou um pouco enrolado. E quando eu voltei, eu mudei de área, fui para Física-Matemática. Então terminei meu mestrado na Física –Matemática. E depois disso venho atuando na verdade no ensino de graduação, tentando fazer a minha pesquisa nessa área. Então, nos últimos...desde 96, praticamente, eu tenho trabalhado nesse sentido aí. Em várias disciplinas de cálculo. Estou escrevendo um livro agora com atividades computacionais, mexo bastante com essa parte da tecnologia, enfim. Então, estou nesse...e atualmente sou coordenadora também, da graduação.

E: E, a docência de álgebra linear, quanto tempo?
Brito: A docência de álgebra linear desde...aliás, eu fui contratada primeiro...a primeira...a primeira disciplina que eu dei foi álgebra linear. Em 73, eu acho. Aí, depois, acho que em 82, mais ou menos, nós fizemos uma experiência de...a primeira experiência assim de ensino, vamos dizer, com TV. Então nós trabalhamos com a disciplina de álgebra linear e, a gente fazia as aulas, programava as aulas na televisão e depois passávamos para os alunos no horário, no horário de aula mesmo e aí a gente ia acompanhando, depois fazia exercícios e...uma experiência aí, vamos dizer, pioneira nesse sentido. A gente tem...eu tenho a fita dessas coisas. E depois disso... nós temos o nosso livro, né, quer dizer, foi uma primeira, uma primeira experiência com os textos escritos, que a gente escreveu alguma coisa para poder ter aqueles registros e aí nós começamos a escrever esse livro, cuja primeira edição acho que foi de oitenta e pouco, 82, 83...Não me lembro mais. Tem três edições, já. Então, de longa data essa experiência.

E: E como é que você vê a importância da álgebra linear para a formação do aluno?
Brito: Eu acho que a álgebra linear ela é muito importante por que ela tem um caráter...meio que sistematiza, dá um pouco de sentido para aquelas coisas que eles aprendem, por exemplo: sistemas, matrizes, né, matrizes é aonde cabe muito bem a álgebra linear, quer dizer, o aluno entende o porque de... daqueles sistemas. Há o desenvolvimento geométrico, inclusive ele pode ser visto com essa ferramenta, a álgebra linear. É...determinante, né. E...a própria parte das transformações, né. E...porque isso aí eu acho que é uma...é...básico para que ele possa entender cálculo, análise, problema dos autovalores. Então, eu acho que é uma ferramenta super importante p'rá compreensão, não diria nem para a compreensão, mas assim aquela coisa de você sistematizar um pouco o seu raciocínio, né. Organizar. Então, a álgebra linear, eu acho que faz um papel desse, de organização do nosso raciocínio.

E: E quais são os tópicos prioritários que você acha que devem ser num primeiro curso de álgebra linear?
Brito: Bom, matrizes, né, com certeza. Sistemas, né. Resolução de sistemas, essa parte. As transformações lineares, também, vistas sob o ponto de vista de matrizes. Autovalores e autovetores. A parte de diagonalização de matrizes, quer dizer, matrizes é o centro, e aí você olhar essas matrizes sob os vários aspectos, como a matriz de um sistema, como a matriz de uma transformação linear, como o que que significa você diagonalizar essa matriz em termos da transformação linear que você tem. Talvez olhar esse foco sob os vários pontos de vista que ele pode oferecer. Que seria mais? É, basicamente isso, né, num primeiro curso. E aí eu acho que como aplicações fazer a classificação das cônicas de uma maneira que também, mais uma vez vai sistematizar as equações do 2° grau, com duas variáveis. Então, o aluno vai poder desvendar aquele mistério daquelas equações lá, encarando aquilo como uma coisa bilinear, uma parte linear e diagonalizando a tal matriz. Então, acho que é isso, quer dizer, se o aluno sair de lá sabendo diagonalização de cônicas e quádricas, eu diria que álgebra linear ...cumpriu.

E: E a relação da álgebra linear com outras matérias do curso, você...em licenciatura que a senhora trabalha, não?
Brito: É. Então, na verdade quando você faz álgebra linear, você tenta...você puxa lá para os sistemas, para a parte de geometria analítica, vamos dizer assim, você faz essa colagem e você também olha para a parte de quando você fala na diagonalização, você faz a ponte lá com, por exemplo, polinômios de Taylor para a classificação de matriz linha, de funções de várias variáveis, você precisa dessa parte. E, p'rá equações diferenciais você precisa de autovalores e dos autovetores. E, a oportunidade é quando você faz, mais lá p'rá frente, por exemplo, variáveis complexas e pede para o aluno resgatar, né, a coisa das transformações, do plano no plano, tal. Você olha agora por outro aspecto, você pode enriquecer o aluno com... com a, quer dizer, quando ele trabalhou lá transformações de IR^2 em IR^2, agora você vai trabalhar com funções de C em C e fazer essa ponte, essa ligação entre essas...uma estrutura a mais né, que produz. O que que isso acarreta em termos de riqueza, né, de uma análise, complexa daí, né. E eu tenho trabalhado, quer dizer, eu tenho oportunidade de trabalhar com os alunos da licenciatura, nos laboratórios, né. Então, principalmente laboratórios 5 e 6. Eu dei uma vez cada um deles. Isso é feito no 5° semestre e o outro é no 6° semestre. E, e como eu tenho mexido com cálculo, com o programa matemática, então eu aproveitei esses dois momentos para fazer as várias junções, né, de conhecimentos dos alunos. Então, eu pegava um determinado assunto, por exemplo, distâncias ópticas, e você vê sobre vários pontos de vista aquilo, sobre a geometria analítica, sobre a álgebra linear, sobre o cálculo. Então, foi uma coisa muito interessante.

E: A álgebra linear é dada em que semestre?
Brito: Terceiro semestre.

E: Um semestre só?
Brito: Não, é segundo semestre. É um semestre só. É depois de geometria analítica e cálculo I, né. Na verdade, é.

E: Você vê a necessidade de pré-requisitos para acompanhar um primeiro curso de álgebra linear?
Brito: Em geral ele pede geometria analítica, mas eu não vejo não. Acho que é um curso que pode começar do zero, só que o problema, talvez, seja um pouquinho da maturidade, né. O aluno tem que ter um pouquinho...ele tem que aprender a raciocinar em termos da álgebra, né. E, talvez, a geometria analítica seja uma pequeno...é...exercício para isso, né.

E: E, como é que é a taxa de aprovação de álgebra linear, de uns anos para cá?
Brito: Olha, isso eu não posso te dizer, viu. Realmente, eu não tenho acompanhado. Os cursos que eu dei não têm diferença em termos de cálculo e de álgebra linear, eu acho que fica em torno de 25% de reprovação. Mas, eu não tenho assim uma visão disso, né. Mas, é um curso que tem uma alta evasão. O aluno vê que se ele não está entendendo muito bem aquela nova técnica, aquela nova linguagem, né, ele se desanima e daí ele cai fora, ele tranca a matrícula. Isso a gente percebe bastante, mas...eu percebi nos cursos que eu dei, né. Mas , como eu falei eu não tenho disso tudo, uma clareza a respeito.

E: Tem uma frase aqui do Plancherel. Ele fala assim: “De todos os cursos que eu havia dado, o de álgebra linear era de longe aquele que parecia mais difícil aos estudantes.” Você concorda com essa afirmação dele?
Brito: Bom. Eu acho...não. Eu acho que eu não concordo, não. Os alunos tem mais dificuldade, talvez, no cálculo II, na parte vetorial do cálculo II, do que na álgebra linear, na minha experiência.

E: Bom. A minha dissertação, ela trabalha com o desenvolvimento da noção de base. E, eu gostaria assim que você me falasse, como é que você nesses anos, como é que você abordou a noção de base para os alunos? Como se fosse uma seqüência de aulas, como é que você costuma fazer para abordar a noção de base?
Brito: Seqüência de aulas...? Bom, eu costumo enfatizar o seguinte: o que que é um espaço vetorial? Então, você trabalhando com um espaço vetorial de dimensão finita, tal. Tudo, quer dizer, num primeiro curso você só fala nos reais, você não vai falar de espaço vetorial sobre um corpo. Então, uma coisa bem concreta. E, e o que que a gente tem de ferramenta, o que que a gente tem de ferramenta na álgebra linear? A gente tem as duas operações nos espaços. Sabe somar e multiplicar por um escalar. É isso. Então, eu falo: “tudo que a gente for fazer, essas são as nossas duas coisas que a gente vai carregar na mão. A gente não sabe fazer mais nada aqui. Então, a gente tem que aproveitar ao máximo essas duas operações, essas duas coisas que esses espaços têm. Bom, são claro, são conjuntos infinitos cheios de detalhes e tal.” Então eu falo bastante nisso. Mas, assim, qual é a...quer dizer, o que que é que essa, essa estrutura nos dá. Ela é de uma riqueza tal que você não precisa de muita coisa p’rá, p’rá exibir alguém, ou seja, como é que você caracteriza um elemento genérico do seu espaço, né? O fato dele ser infinito não te, não te...traz nenhuma dificuldade pelo seguinte, porque exatamente, porque basta um número finito de vetores “bem comportados” para que você consiga exibir qualquer outro elemento. Então, que que seriam esses vetores “bem comportados” e quais seriam esse número? A gente vai, aí faz a coisa mais concreta, né, com o plano, com o IR^2, o IR^3, percebendo então o que significa ser dois, dois, por exemplo, no IR^2, dois vetores “bem comportados”, são aqueles dois que não estejam na mesma reta, né. E, então o que que...p’rá depois sair aí a noção de que: no IR^2, se você não tem dois vetores colineares são porque eles têm que ser linearmente independentes. Aí eu costumo fazer desenhos, quer dizer, pego dois vetores quaisquer e pego um terceiro vetor no plano e vamos então expressar esse vetor genérico em função daqueles dois vetores dados. Faz na lousa, usa a lei do paralelogramo. Aí, percebendo o que seriam aquelas componentes, né, daquele vetor na direção de dois vetores dados para achar os alfas lá da vida, a combinação linear. E, aí faz para o IR^3, né, faz a mesma coisa. Aí volta, na questão, por exemplo da geometria analítica de que se você tem um plano, você tem três pontos. Porque que esses três pontos então, não colineares, determinam um plano. Aí, você volta na questão de você ter ali dois vetores linearmente independentes que vão gerar um espaço, chamando a atenção que esse plano tem que estar na origem para poder falar de espaço vetorial. Por isso que a gente faz, a gente trabalha então com todos os vetores na origem, né. Então, tenta resgatar essa coisa da álgebra, do...do...da geometria analítica, né, em termos de espaços de dimensão menor do que 3 no IR^3. Então, pega as retas pela origem, pega os planos pela origem e aí por isso que eu falo que talvez a

geometria analítica seja importante porque você retoma com eles a questão de que você tem um “grau de liberdade”, dois “graus de liberdade”. Costumo falar para eles, por exemplo, que: quando você faz uma reta, tá bom, você precisa, na verdade você tem um “grau de liberdade”, você precisa de um vetor para gerar essa reta e um ponto obviamente. Se esse espaço é um espaço vetorial, você precisa simplesmente de um vetor porque essa reta tem que passar pela origem. Agora, quando você pega o plano, se você tiver retas paralelas, você não consegue “amarrar” aquilo, é como se você fosse fazer...eu faço uma “colchinha de crochê”, uma “toalhinha”. “É que se você tem que tecer alguma coisa, você precisa ter fios em duas direções pelo menos, se não você não consegue tecer nada”, né. Aí, então, não adianta você juntar um monte de retinhas, né. “Você tem que ir entrelaçando isso, tem que ir fazendo uma malha.” Então, você precisa de duas direções para você fazer o plano, então, a gente volta no plano e aí vê...E aí, o que que significa então você escrever um vetor como combinação linear de dois? Porque eles ficam com aquela sensação de que você só pode fazer com sistema ortogonal, né, e não. E aí, você tem então os dois vetores e aí você acha quais são as componentes desse vetor em relação a dois vetores quaisquer linearmente independentes, aí, no sentido de que eles não estão na mesma reta. Aí, depois, passo um pouquinho para as matrizes, quer dizer, qual que é...qual que está relacionado? As matrizes, por exemplo, dois por dois, com o espaço vetorial IR^4. Estabelecer essa coisa de que você tem quatro “graus de liberdade”. Então, “grau de liberdade” aí, é muito forte, no sentido da dimensão, né, do espaço. Para que eles tenham essa noção de quantos elementos eles precisam p’rá que eles consigam gerar aquele espaço que eles querem e de uma “maneira ótima”, no sentido assim, não preciso mais do que aquilo, aquilo lá é suficiente. Trabalho um pouquinho também com os polinômios, também retomando com eles a coisa do...que eles já sabem o que é um polinômio e aí...Eles sabem o que é um polinômio, mas eles não sabem a estrutura que os espaços dos polinômios têm. Então, aí também a gente explora um pouquinho. E essa coisa de que os espaços vetoriais são todos de mesma dimensão, né... espaços vetoriais de mesma dimensão são sempre...têm o mesmo papel dentro da álgebra linear, ocupam menos espaço, na verdade, né. Quer dizer, **v**ocê pode identificar um IR^4 com as matrizes 2X2, sem problema nenhum, sabendo como que você faz essa identificação, quer dizer, então eu acho que essas coisas...na verdade o conceito de base é um conceito que facilita o seu trabalho dentro da álgebra linear. E esse talvez seja o...a questão fundamental aí da álgebra linear, ou seja, aí talvez more a dificuldade do aluno, até que ele perceba esse conceito. Aquela hora eu não falei de base, mas na verdade, é o conceito fundamental da álgebra linear.

E: Quando você chega na definição, você formaliza a definição de base? Como é que...ela fica formalizada como?
Brito: Ela fica formalizada bem, bem do jeito formal, mesmo, ou seja, é um conjunto...uma base é um conjunto de vetores do seu espaço, não nulos, conjunto linearmente independente, né, e que gera o seu espaço, no sentido que todo vetor do li pode ser escrito em função dos vetores dados. Então, é bem...

E: E o tipo de atividade que você propõe para eles? Exercícios, exemplos mais utilizados? Você já falou até um pouco. Assim, tem alguma coisa...alguma atividade feita com eles...antes, depois...? Como é que você vai trabalhando?
Brito: Então, eu trabalhei...É que eu tenho feito bastante cálculo. Então, eu estou um pouco fora da álgebra linear. Mas, eu lembro que eu fiz na...eu fiz dois exercícios interessantes. Um deles foi um...quando eu estava trabalhando lá com transformações lineares, mais para o fim das transformações, quando...o teorema da dimensão e da imagem e do núcleo, eu fiz um resgate de tudo que era p’rá trás, assim, no sentido de que, olhando aquela transformação, encarando aquilo como...como uma matriz, né, em relação à base canônica, você sempre pode olhar aquela matriz e... é eu fiz um exercício meio programado com eles, quer dizer, de várias fases para que eles resgatassem lá a

noção dos sistemas. Quer dizer, tinha a ver a dimensão da imagem com o posto, o posto com as questões das soluções dos sistemas lineares. Que que seria o sistema linear homogêneo? O que isso tinha a ver com o núcleo daquela transformação. Então, na verdade eu fiz um resgate lá do começo da álgebra linear, quer dizer, relacionei, olhando a...a noção de base, agora, né, a noção da transformação linear e da matriz associada, a dimensão do espaço, da imagem e do núcleo e aquele teorema, com as coisas que eles tinham visto anteriormente de sistemas lineares. E, quando eu fiz no computador, quando eu fiz a...aliás eu dei a álgebra linear e fiz uns exercícios com eles. Fiz algumas aulas no laboratório e aí eu me lembro que eu fiz o seguinte:... aliás, esse exercício é muito interessante, porque teve uma época que nós fizemos uma "caretinha" no computador usando a noção de curvas. Então, você faz um monte de curvas e você pode desenhar depois alguma coisa que você queira com aquelas curvas. Você está fazendo uma figura, parametrizando aquela figura e aí nós fizemos a imagem daquela "caretinha" por transformações lineares. Então, aí vira a careta de ponta cabeça, roda, gira os olhos e depois os mesmos exercícios eu fiz com variável complexa, aí já deformando essa caretinha. E essa careta também pode... quer dizer se eu pegar aquelas transformações, aí você trabalha com movimentos rígidos que não vão alterar aquilo...Foram exercícios que eles adoraram, porque na verdade eles criaram primeiro a figura que eles iam trabalhar no plano, e aí depois brincaram com as transformações lineares. Dá um pouquinho de trabalho porque você tem que aplicar em cada partinha e como é um desenho feito por várias partes, então você tem que aplicar a sua transformação em cada uma das partes. Mas, foi um exercício que eu acho que eles aproveitaram bem, no sentido de perceberem o que que é uma transformação do plano no plano.

E: E agora quanto... assim, a definição de base, na época que você faz a definição de base, você lembra de alguma atividade, alguma coisa? Ou, os exemplos que você mais utiliza? Você também já falou, mas alguma coisa mais específica da definição de base.
Brito: Deixe eu ver se tem alguma coisa que possa...Eu me lembro que eu faço sim, faço toda uma folhinha, quer dizer faço, fiz, né. Assim, acho que são umas quatro folhas. Uma, duas, três, quatro. É...preparando, na verdade, assim. Eu digo assim: bom, agora, a gente vai ver o conceito que vai permitir com que a gente trabalhe nessa nova estrutura aí que a gente está aprendendo...de uma maneira organizada e p'rá perceber assim a importância daquelas operações que a gente definiu no começo, que é a de soma e multiplicação. E aí eu vou chamando a atenção, quer dizer, quando você pega um vetor e escreve como combinação linear dos outros, o que é que você está fazendo? Você está usando a estrutura, você está somando coisas, que você sabe fazer, você está multiplicando um vetor por um número. É a única coisa que você sabe fazer. Então, eu...sempre enfatizando que aquelas equações que a gente coloca, a gente só coloca porque a gente sabe o que aquilo significa, né. Quer dizer, o seu espaço permite que você faça isso. Acho que é a primeira vez que eles realmente percebem a necessidade da organização de uma, quer dizer, porque a definição de base, porque a definição de espaço vetorial? Então, chamar a atenção p'rá eles p'rá necessidade da gente organizar aquele espaço, ou seja, de aproveitar aquelas operações que estão definidas nele p'rá que a gente, hã...como é que fala...a gente...facilitar a nossa vida dentro da álgebra linear. Então, assim, eu vejo bastante a base, eu olho o conceito de base como aquele facilitador de descobrir elementos lá dentro, né. Então, eu vou assim, né, faça...como é que seriam todos os subespaços de IR^2? Quais os possíveis subespaços de IR^2? Então, ficaria lá: é o zero e a reta que passa pela origem. Então, vamos lá agora para o IR^3: o zero, a reta que passa pela origem, os planos pela origem. E aí o que que caracteriza esses espaços? Como é que você consegue o, hã... IR^2? Olha para esse espaço. Como é que você pode caracterizar isso com um número finito de elementos? Então eles vão tirando quem é o espaço, conseguem com dois vetores. O fato de estar passando pela origem, você pede que eles passem pela. Então, você precisa simplesmente de dois vetores, né, linearmente independentes, que não estejam na mesma reta. Então, eu vou

preparando isso com os conceitos básicos deles nas noções de reta e de plano que...então p’ra tentar essa...Eles não chegam, né, eu acho. Não conseguem chegar por eles mesmos, com todo esse trabalho aí, eles não conseguem chegar na definição sozinhos. Mas, eles ficam com uma noção do que que é. Eles não conseguem é formalizar, escrever direitinho aquilo, mas eles conseguem perceber o que é que significa gerar aquele espaço. O que que não são vetores...porque quando você está trabalhando no IR^3, quer dizer, é fácil você falar que dois vetores não colineares, então ele tem que ser li, né. Então, essa noção eles tem assim fácil. Então, o que eles não tem é a maneira de escrever. Então, esse processo, eu acho que é um processo que...p’rá mim também foi assim quando eu estudei álgebra linear. Teve um dia que faz... dá um click assim na gente. Você percebe que você está trabalhando com a estrutura, então, por isso que eu falo muito dessa estrutura para os alunos, para ver se eles conseguem, eles mesmo lá dentro, fazer um click, né. Porque, p’rá mim foi claro assim, foi muito claro o dia que, nossa ...tá, então é tudo isso. Quer dizer, a transformação é linear porque preserva a soma e a multiplicação por escalar; é o que a gente tem ali dentro, é isso. Então, a hora que você percebe...quer dizer, na verdade, você entra naquela estrutura, né. E aí a coisa fica, o raciocínio fica muito simples. Mas, até que você não consiga fazer essa, essa imersão aí no...ela fica um pouco abstrata.

E: E, assim, também você já falou aí...tem alguma analogia mais que você utiliza para auxiliá-los na compreensão da noção de base?
Brito: Não me lembro não. Não, acho que não. Eu já falei em “grau de liberdade”. Já falei da coisa da “colchinha” lá, das direções. Eu acho que é ...não me lembro...

E: E aplicações? É...o que que você vê como aplicações da álgebra linear?
Brito: Então, as aplicações, eu acho que elas são inúmeras. A parte de equações, de autovalores e autovetores, por exemplo, é a parte que tem, quer dizer, que bem fundamentada aí em termos de aplicações, no cálculo, equações diferenciais, polinômio de Taylor, função de várias variáveis. As cônicas, quer dizer, quando você, as quádricas, né, quando você faz o estudo de máximos e mínimos de funções de várias variáveis, na verdade você aproxima a sua superfície num ponto de máximo ou de mínimo, né, por uma quádrica, ou seja um parabolóide virado de boca p’rá baixo ou p’rá cima, ou uma selinha e aí você está simplesmente fazendo assim, uma aproximação de 2° grau daquela, daquela superfície. E você está trabalhando então com as quádricas, que são gráficos de funções. Então, aí dá para a gente fazer essa...várias analogias aí, que a gente tem as quádricas, vistas na álgebra linear que são hiperbolóides, elipsóides e tal. E a gente tem muitos deles que não são gráficos de funções, mas a gente tem os parabolóides, em particular o elíptico e o hiperbólico que são funções e esses são aqueles que vão classificar as funções de várias variáveis. A gente saber quando que a gente tem o máximo, quando a gente tem o mínimo, quando a gente tem uma sela. E p’rá isso, a gente está na verdade, o polinômio de Taylor de duas variáveis é uma equação do 2° grau e, você está diagonalizando aquilo lá, você está achando os autovalores. Na verdade, você está classificando aquele polinômio. Então, uma aplicação boa que eu gosto de fazer. Em equações diferenciais, eu trabalho pouco com equações diferenciais, mas nos sistemas a gente tem bastante aplicação. Tem livros novos já de álgebra linear que fazem muitas aplicações, né. A parte de rotação no espaço é uma coisa muito bonita, já trabalhei bastante com isso. P’rá você virar alguma coisa no IR^3, a ferramenta da álgebra linear é muito importante, quer dizer, você pega simplesmente uma matriz, né, aplica no seu elemento e você leva ele p’rá onde você está querendo. Aliás, no IR^3, precisaria de mais matrizes, mas...Ah, então, uma coisa que eu não falei em base e que pode, acho que pode voltar agora, é a coisa de ....quer dizer, como que a estrutura de espaço vetorial e as transformações lineares, elas se dão tão bem que ...hã...para que você determine uma transformação linear basta que você saiba qual é o valor dela em dois vetores que não seja, quer dizer, se você estiver no IR^2, obviamente. Então, no IR^2,

você pega uma transformação linear e você sabe que ela leva dois vetores, um lá e o outro aqui. Se esses dois vetores forem “bem comportados”, no sentido de serem linearmente independentes no IR^2, ou seja, é uma base no IR^2, você sabe a sua transformação. Então, esse é um outro ponto, que aí começa a clarear para eles a questão da dimensão. Se você...então você consegue recuperar uma transformação linear, ou seja, saber exatamente como que ela atua em qualquer vetor, sabendo em dois, né. No IR^3, em três, e por aí vai. E aí...essas coisas vão assim, vamos dizer, vão fazendo um caminho que vai percebendo...O conceito de base eu acho que ele é construído durante o curso. Na verdade, quando, mesmo que você fez a definição, tal, tal, você vai trabalhando...eu acho que assim, ele vai sendo construído e aí eu acho que talvez, lá por essa parte aí agora, das transformações lineares, que leva...que ela é determinada pelo o que acontece na base, aí ele volta lá, compara aquela definição e eu acho que esse é um processo que vai...libertando o conceito.

E: Você utiliza livro didático? Você adota ou só dá bibliografia, como é...?
Brito: Bom, em geral eu adoto o meu. Mas, eu tenho...uso ...eu ponho uma bibliografia de referência, ponho um livro texto, acho que é importante o livro texto. Não esse livro, mas algum livro. Eu acho que o aluno tem que ter um livro para se familiarizar, para estudar, para fazer exercício, para saber aonde que ele vai encontrar as coisas. Tem sempre uma bibliografia de referência, no sentido de que se algum aluno queira...quiser se aprofundar em alguma coisa. E tem os meus livros que eu uso, às vezes, para fazer coisas mais modernas ou coisa mais aplicada. O livro do Anton tá muito bonito, né. Ele tem várias aplicações. Então, eu tenho usado assim e eu tenho colocado ele como referência, mas eu tenho usado...acho que a última vez que eu dei álgebra linear, eu não me lembro, faz o que, uns dois ou três anos, eu usei ele como referência. Mas, eu uso livro texto, sim.

E: E, você acha que os alunos têm dificuldade com a noção de base?
Brito: Eu acho que sim. Eu acho que esse conceito, ele, quer dizer, em geral, muitos alunos passam sem saber esse conceito de base. Eu acho que muitos alunos também, talvez, consigam ter esse click aí, mais para o final do curso. Mas, eu diria que quando eles estão...já lá, talvez, fazendo análise, fazendo cálculo de várias, não, equações diferenciais...Esse conceito eu acho que vai sendo construído no decorrer do processo dele assim de formação. Eu acho que não é um conceito que fica na álgebra linear que você tem que...que você tem garantia de que ele tenha domínio, quando ele acaba o curso de álgebra linear. Eu acho que tem alguns alunos que conseguem isso que são aqueles que talvez conseguiram abstrair aquilo e perceber a ferramenta nova que eles tem na mão. É como a gente ganhar um presente. Às vezes você ganha um presente, não está preparado para aquele presente e você vai guardar ele e na hora que você achar que você achar que está preparado, você vai lá e pega, né. Então, eu vejo assim um pouco a matemática e principalmente a álgebra linear. É um presente, no sentido assim, uma ferramenta poderosíssima que vocês tiveram numa hora que talvez vocês ainda não saibam usar. Vai ter que amadurecer um pouquinho mais, mas ele está ali presente, ele está, está construído, vamos dizer em algum nível da sua instrução consciente que você vai em algum momento, como é que a gente fala, se apropriar, né. Então, você leva o presente para casa, começa a fazer as suas...que nem um marceneiro, né, começa a fazer as suas ...os seus trabalhos com ele.

Transcrição: professor Cunha.

Iniciei a entrevista explicando os objetivos da mesma e garantindo o anonimato do professor e da Instituição.
Duração da entrevista: 50 minutos.
Instituição: pública.
Entrevistador (E); entrevistado (Cunha)

E: A primeira coisa que eu gostaria que o senhor falasse é sobre a sua formação acadêmica?
Cunha: Formação acadêmica? Sou bacharel em Física em São Carlos e sou mestre e doutor em matemática também pela USP de São Carlos.

E: E a docência de álgebra linear? Quanto tempo que o senhor...?
Cunha: Bom. Eu estou aqui nessa instituição há 12 anos e desde então é bem freqüente...Nós aqui não temos, não temos uma cadeira fixa, não é. Nós a cada semestre revezamos, cada semestre...a disciplina tem anualmente, mas é raríssimo um professor dar mais de duas vezes uma disciplina. Mas, é...seguido, eu digo, né. Seguido, é raríssimo. Mas, se eu disser isso, eu pelo menos... como você pega turmas diferentes eu poderia dizer que todo ano eu leciono álgebra linear, não é. Então, mesma turma, nunca duas vezes seguidas, mais que duas vezes, mas considerando turmas diferentes então ensinado bastante essa disciplina, né. Na verdade, aqui tem a Computação, a Física, que tem álgebra linear, a matemática então, a computação noturna e diurna. Então tem bastante álgebra linear por aqui.

E: Matemática, é licenciatura?
Cunha: E bacharelado.

E: Bacharelado.
Cunha: É. O ensino de álgebra linear aqui é dividido...nós temos: Introdução à álgebra linear para os alunos...ambos, que é o primeiro curso no 2° semestre para a licenciatura e o bacharelado. Estão juntos ainda, né. 2° semestre do primeiro ano. Depois, hã...tem um curso de álgebra linear que é só para bacharelado e é optativo para a licenciatura.

E: Como é que o senhor vê assim a importância da álgebra linear para a formação do aluno desses diversos cursos?
Cunha: Eu acho que a álgebra linear ela talvez seja a tradução da nossa idéia de homogeneidade, a idéia de linearidade. Outro dia mesmo, num curso que nem é de álgebra linear, cálculo, eu pus um problema: uma indústria produz tal coisa em tal tempo. Quanto tempo precisaria para produzir tantas máquinas? Na hora, menino usa regra de três, não é verdade? Na hora ele usa regra de três e aí então tão logo responderam e eu comecei: se a fábrica fecha aos sábados e domingos? Isso muda? Se fecha p'rá alguns? Isso muda? Se falha a energia? E você começa a por os obstáculos. Aí eles percebem: não, professor, realmente tem um monte de problema aí que eu desconsiderei. Hã...e... não sei porque, está na nossa cabeça uma certa linearidade de ver, que é a homogeneidade. As coisas, os fenômenos acontecerem iguais, em intervalos devidos, guardada a proporção, intervalos...Então, a álgebra linear talvez seja a...coisa mais simples que se tem p'rá tirar da natureza ou da...da...da nossa idéia essas coisas que tão, tão simples assim. Como formalizá-las, né? E essa idéia de linearidade, como eu vou formalizar isso que eu acredito que as coisas que acontecem aqui também poderiam estar acontecendo na China, na Indonésia, não é?Como...a álgebra linear é que faz isso.

É ela que permite transladar. É ela que permite é...esticar, não é? Então, é...não poderia ter algo mais importante para você ver que, que você está criando a ferramenta p'rá traduzir todas essas suas noções e talvez ela seja uma disciplina difícil justamente porque ela tenha essa coisa de tão natural, não é? De tão natural que a linearidade é uma coisa que está na cabeça das pessoas porque, a gente quando pensa, pensa na situação mais simples. Eu não ponho as complicações todas ao mesmo tempo, mesmo porque fica intratável. E a álgebra linear é isso, não é? É tirar as complicações, é por a situação mais simples, né. Eu acho que a importância é aí, rebobino, a importância é essa. Ver que nós estamos, quando estamos formalizando uma coisa que é da mais natural da gente quando esquecemos as complicações.

E: E quais são os tópicos prioritários que o senhor vê num primeiro curso de álgebra linear?
Cunha: Num primeiro curso de álgebra linear? É, não poderia ser diferente...hã... as transformações lineares, né? Mas com isso, eu quero dizer assim: elas têm, têm que ser dadas com uma, de uma forma muito, muito aplicada. Aplicada...ligadas nos vários problemas, na geometria né, nas próprias questões do cálculo que você pode abordar, olhando a linearidade ou pelo menos a perda da linearidade. Então, diríamos: não tem outro assunto em álgebra linear, o outro assunto é transformações lineares, né? Não tem jeito de falar qual é o tópico mais importante em álgebra linear porque o único tópico de álgebra linear é transformação linear, né? Claro que isso se emenda em vários tópicos com dificuldades a serem abordadas tudo de uma vez, mas inicialmente é transformação linear, né? Como, primeiro preciso falar no "ambiente" onde essas coisas acontecem, essas transformações, por isso preciso falar de espaço vetorial antes, mas ela...eu poderia inverter, eu poderia inverter e falar do que que eu preciso no meu espaço para falar de uma transformação que tivesse essa propriedade que depois eu chamaria de linear. Então, o espaço vetorial é só ...hã...o "ambiente" apropriado, mas o assunto importante e único , eu diria de álgebra linear é transformação linear, não existe outro assunto em álgebra linear.

E: E a relação da álgebra linear com as outras matérias do curso?
Cunha: Relação? Bom, quando você pergunta relação aí você já tem alguma coisa uma vontade de entender, uma coisa mais específica de trabalho, assim. Hã...eu acho que pode ser pensado como relação os outros cursos, hã...em geral, tentam buscar nos fenômenos não lineares aproximações, quase sempre, aproximações por coisas lineares. Dito isso, já não precisa dizer mais nada, né? Mas, é claro, que com isso tem um pressuposto de que o linear é o mais simples. Se o aluno não entende essa, essa simplicidade na linearidade ele pouca vantagem dá p'rá você estudar, derivada, não é? Ele pouca vantagem dá para você estudar plano tangente. Pouca...pouca...não vai dar valores, quer dizer, são só as dificuldades. Que ele não viu que aquela necessidade de você falar de um plano tangente em cada ponto dentro do fato de você não ter uma estrutura linear na superfície, quer que seja, né? Então, isso eu diria do ponto de vista mais, é...geral, prático da álgebra linear pensada como uma coisa que é dada para todas as, as ciências exatas, mas do ponto de vista estrito da matemática, não tem dúvida, é a estrutura mais simples, não é? E ela tem...ela é que vai servir de modelo para as várias outras estruturas. Você vai depois estudar grupos, não é? Anéis, não sei o quê. Então, qualquer que seja isso de estruturas algébricas você tem que ter um modelo na sua cabeça, hã... p'rá criar outros, né? Outros espaços e a álgebra linear é essa fonte. Então, a relação é direta, não é? É perfeita. Claro que, você poderia acertar um curso axiomatizado, imediato das estruturas algébricas. Vamos falar de anéis, vou falar de homomorfismo de grupos, quer dizer, isso vem de isomorfismo, vem de transformações lineares, então ela é a fonte inspiradora para quase todo o resto, não?

E: E o senhor vê necessidade de pré-requisitos p'rá acompanhar um primeiro curso de álgebra linear?
Cunha: Pré-requisitos? Não. Eu vejo necessidade...bom, claro, não posso ensinar álgebra linear p'rá minha mãe. Ela não teria menor condição, mas eu vejo assim, tipo: com um pouquinho de geometria analítica, eu dou um excelente curso de álgebra linear. Com um pouquinho de geometria analítica, projeções, projeções paralelas ao plano, projeções, né? Todo esse tipo de projeção, ortogonais, ou projeções em qualquer direção, qualquer que seja. Essa daí e as outras idéias, translações, dilatações, tudo isso...Se o cara tiver um traquejinho ele descobre a linearidade nisso. Então não vejo mais do que isso como necessidade de...de a gente começar um curso de álgebra linear.

E: E como é que é a taxa de aprovação em álgebra linear?
Cunha: A taxa? Hã...olha, eu sou suspeitíssimo para falar nisso daí, porque eu... a minha taxa de aprovação é baixa em qualquer curso. Então, posso dizer isso em álgebra linear, mas, em geral...esse ano, por exemplo, não estou dando álgebra linear. E não fui eu quem deu álgebra linear o ano passado...? Não fui eu, não, não fui eu. E...e a sala está enorme, está cheia, ou seja, houve muita reprovação, também. Então, isso não quer dizer que seja, que seja eu. Mas, olha, isso não é específico de álgebra linear. Esse índice...geometria analítica, pelo que eu sei, também está super enorme a turma e...também não fui eu que dei GA p'rá eles. Eu acho que tem problema é... álgebra linear sem esse apelo da geometria analítica fica difícil. E nossos alunos não têm condição de acompanhar, nem sequer um curso de geometria analítica, hoje, né? Então. Quanto a álgebra linear você não vai fazer distinção alguma...essa é uma pergunta que eu acho que não ajuda no...no processo que se possa querer estar investigando, porque eu acho que este tipo de reprovação tem sido alto em tudo, em todas as disciplinas.

E: Tem uma frase aqui do Plancherel. Ele fala assim: "De todos os cursos que havia dado, o de Álgebra Linear era de longe aquele que parecia mais difícil aos estudantes." Você concorda? Discorda?
Cunha: Olha, valeria a pena ver se ele quando, em que situação ele deu esse curso, não é? Se foi um primeiro curso, se era um curso já pós onde os alunos já tinham tido outros contatos com a matemática, porque o que eu acho que é difícil na álgebra linear é a axiomatização, da forma como é feita, que p'rá você...que você em geral, os textos em geral também, p'rá mostrar que ele está ganhando alguma coisa além da...das coisas da geometria euclidiana é...eles começam...alguns textos colocam alguns exemplos que eles chamam, eles mesmos chamam de patológicos, né? Não é? E aí o aluno se assusta mais ainda, não? Há uma outra...uma outra coisa que eu fiz um teste uma vez, me pareceu...Pareceu-me que é interessante, que é o seguinte: não, não chamar a operação chamada usualmente de soma, de soma e nem de multiplicação. Com as operações estabeleça um símbolo que não seja essa cruzinha da soma, carregue isso por bastante tempo. Carregue por mais tempo, não tenha pressa de...ah, vamos começar a denotar por soma, vamos chamar de soma...olha, veja, essas propriedades são análogas a... Não faça isso. Leve aquilo um pouco mais adiante. Parece que quando é feito isso é...ele ganha melhor noção do que que ele está fazendo. Eu tive essa impressão. E tento fazer isso sempre. Algumas turmas, às vezes, a gente se antecipa demais em mudar a notação...porque p'rá gente mesmo é difícil ficar nessa...toda a hora você esquece e acaba pondo aquilo lá. Ele vai no texto, o texto também está pondo tudo mais e chamando de soma. Então, esse contraste é difícil. E se você pedir para um aluno não abrir um livro é uma coisa muito pouco delicada, né? Eu acho que seria extremamente proveitoso não deixá-los ver certos livros aí, né? E...então, eu não posso discordar dele, da sua...da fala do Plancherel, você falou? Não posso discordar, mas...eu...se eu me lembrar como que é o meu sofrimento quando eu vou falar em vetor como classe de equivalência, de eqüipolência, não é nada menos difícil de que qualquer coisa em álgebra linear para os meus alunos, não. É tão difícil quanto...Claro que tem o apelo... na

geometria analítica de alguma forma eles se livram pelo apelo intuitivo, pelos...desenhos, e aí vai, então isso mascara. Mas a dificuldade, se for levada a fundo, ela existe tal qual na álgebra linear. E se na álgebra linear você fica, foge um pouquinho dos exemplos geométricos, aí ele não tem onde, aonde pisar, ele vai encontrar dificuldade, né? Mas, a dificuldade não é diferente de quando eu começo a falar em espaços métricos. Eu estou dando espaços métricos agora. Na hora que você começa a falar das noções, outras distâncias, né? A noção de distância na sua generalidade, a dificuldade é a mesma. Você falar de bola, pela noção de distância é terrível, p'rá ele se desprender da noção de bola que ele tem. Então, não dá p'rá dizer que a álgebra linear seja de longe...

E: Então, a minha dissertação ela se prende mais ao desenvolvimento da noção de base...
Cunha: À noção de base.

E: À noção de base. Então, eu gostaria, assim que o senhor falasse agora, hã... como é que o senhor aborda a noção de base? Se pudesse me dar uma seqüência de aulas, mais ou menos, como o senhor faz esse trabalho, né?
Cunha: É... a noção de...eu acho que é um pouco difícil de desviar do tradicional, mesmo porque em geometria analítica nós temos, nós temos a noção de base, não é verdade? Então, você...você...não pode ir nessa direção e quando usa essa palavra, também não...não...não consegue deixar os alunos se desprender da noção que ele já tem lá, hã... Agora...se você me disser base, é que essa palavra como ela tem significado dado no português p'rá gente, já é uma coisa forte, é...ela só vai ter significado para o aluno quando eles derem valor em substituir algum espaço estranho, um conjunto que ele não tem muita familiaridade, substituir esse conjunto por um conjunto que lhe seja mais familiar. Se ele achar que IR^n é um conjunto mais familiar, né? Então, você pode falar p'rá ele: olha, de que forma a gente poderia é...fazer um glossário, né? As coisas que estão acontecendo nesse espaço eu vou ter a sua, a sua representação num outro espaço. Lá eu manipulo e volto, né? Então a idéia de base ela nasce aí: eu quero, quero fazer o que logo depois você chama de isomorfismo em álgebra linear, não? Na verdade você quando vai fazer isso que é esse isomorfismo entre um espaço e um... que pode ser de cara desagradável, não é? Só isso, só de cara, porque ele é tão desagradável quanto qualquer espaço de funções, não é mesmo? E...quando você der valor e tiver interesse nessa, nessa coisa de manipular com um espaço que lhe é mais familiar, você naturalmente tem o conceito de base, não é? Porque é só ela que permite você através do espaço criar uma n-upla de números reais. Então, em geral eu tento, em geral eu tento fazer isso. Às vezes, desisto, no meio do caminho eu dou uma definição como qualquer livro, mas isso...depende muito de turma. Tem turma que você consegue ter alguém dando valor nessa identificação e aí você põe base desse jeito. Porque, é claro, se você falar assim: oh, a base é um conjunto maximal linearmente independente...isso não é nada, não é mesmo? Não é nada p'rá ninguém, né? E...então, você pode...pode explorar e aquela forma primeiro: olha, quero...muito bem, você vai falar, vai falar de isomorfismo antes deles saberem que estou falando de isomorfismo, né? E aí, você cria a base. Então...Há uma coisa assim de...uma coisa também de economia na definição, aliás, você sabe que eu já, já, já percebi algumas coisas assim quando eu estava falando de textos, isso não tem a ver com a questão básica que você está dizendo. Mas, é que eu me lembrei, não posso deixar de falar. Você pega a maioria dos livros de álgebra linear, ele faz um tratamento de matrizes, no começo, né? Então vai, fala de matrizes. Depois vai usar matrizes como exemplo de...de...bases, de elementos de espaços vetoriais. Isso é uma aberração, não é verdade? Eu não consigo, eu não consigo é...entender que um aluno vá achar algum interesse, por mais que alguns livros ainda falam: ah, é uma organização em uma tabela, produção de não sei o quê. Se eu vou falar de algum livro, mesmo que... se você...pensar bem, isso é uma coisa maluquíssima, né? Você falar um arranjo que só o que você pode acrescer, poderia por numa n-upla, não é?

Uma forma assim ou, um outro...qualquer outro tipo de arranjo. Porque daquele jeito lá? Quando eu dou álgebra linear nunca, desses...nunca falo de matriz até chegar o ponto de falar matriz de uma transformação linear e aí, e daí é claro, você é...ter a base, o interesse, mas esse é interesse técnico, na verdade, porque a hora que você associa uma matriz e que você verifica que a composição de transformações em termos das suas matrizes é aquela nossa...eu uso isso p'rá definir multiplicação de matrizes. Olha, eu quero criar uma matriz, né? Associada a essa composta, a partir da matriz das outras duas. Então, pronto, eu crio. E daí eu te dou a definição, né, de como criar aquela matriz. De repente você dá para os alunos aprenderem a multiplicar matrizes e ela sai como conseqüência do que eu quero depois. Eu quero ver como que é a matriz associada à composta das duas matrizes. Aí, nesse ponto, você também começa a ter é...certas facilidades técnico-operacionais, multiplicar linha por coluna, somar, coisas, coisas algorítmicas, coisas que você pode por no computador e ele fazer, tudo o mais. O aluno, de novo ganha uma...um valor, dá um valor à idéia de base, não é verdade? Bases criadas... a partir da base criar uma matriz. E isso tem vantagens, tem. Vantagens reais, a técnica mesmo, não tem...mesmo que depois você possa esquecer a transformação...primeiro você esquece o espaço quando joga em IR^n, entra a base. Depois você pode, também usando a noção de base, esquecer a própria transformação linear e olhar para aquelas coisas de matrizes. Puxa vida, ele está num ambiente, digamos, bem favorável, né? E...então a base... não vai aparecer assim de uma vez ou outra, também, todo o interesse na determinação da...criar o conceito de base. Fora aí, os outros problemas: criar bases apropriadas, que seriam os outros... diagonalização...canõnicos...criar bases apropriadas p'rá você descrever um fenômeno, estudar a geometria de alguma transformação linear. Bom, de novo base. Esse é um conceito que demora, vai crescendo, mas é bobagem falar que é um conjunto maximal que é linearmente independente. Isso é bobagem.

E: E as atividades que o senhor propõe quando está tratando de base, ou antes, ou depois? E os exemplos e exercícios que o senhor utiliza mais de base, exemplos e exercícios quando esta tratando da noção de base?
Cunha: Olha, eu só poderia tentar lembrar do que eu fiz da última vez que eu dei. Acho que já faz dois anos, hã...um, um ano faz que eu fiz. Porque eu não tenho aula preparada, é, de um ano p'ro outro, certo? Eu saio da aula, rasgo o papelzinho. Depois, é outra turma, né? Não adianta a mesma aula, né? Que será que eu andei fazendo? Eu...na verdade, eu estou...estou aqui pensando como eu poderia fazer se eu fosse dar o curso de Introdução à álgebra linear, porque eu nunca dei esse curso de Introdução, eu sempre dou... Dei álgebra linear, é...bom. Quando eu dou p'rá computação assim, eles também entram em idéia...todas as noções da álgebra linear, só que de uma forma mais rápida, mais...mais tranqüila. Agora, em álgebra...no curso de álgebra linear, base é uma coisa dada. Eu começo de espaço com produto interno, entendeu? Então, eu já estou...eu dei um curso de verão agora no mestrado, na Federal de São Carlos de álgebra linear. Daí, essas coisas são todas já supostas sabidas, não é? Então, eu estou tentando lembrar que que eu fiz da última vez que eu dei na computação um curso de álgebra linear.É...não me lembro o que eu fiz da última vez, mas a idéia de que...a idéia de você pegar um espaço gerado num conjunto grande de vetores e fazer o processo inverso: pedir p'rá eles retirando coisas desnecessárias, não é? Hã...levá-los a um ponto de falar...que eles vão falar, agora não consigo tirar mais...Você pedir para eles justificar: como é que você consegue garantir p'rá mim que não vai tirar mais? Como que isso vai acontecer? Como que você pode ter certeza que você não vai conseguir tirar mais? Mais combinações lineares, por certo, está extraindo as combinações e aí...então, e aí você pode partir do caso...quer dizer, ele não sabe que você vai pegar um espaço, um conjunto gerando um espaço unidimensional, um conjunto gerando um bidimensional, e pede p'rá ele um conjunto maior do que dois, incluindo uma base lá. De três e quatro e pede p'rá ele ir tirando. Então, isso dá uma curiosidade, eu acho que isso dá uma

curiosidade nele. Porque que ele não conseguiu mais, né...quer dizer, mas claro que você fazendo o apelo já na geometria analítica, né, ele, ele aceita desde que esteja, ali pelo menos em dimensão menor ou igual a três, o processo vai. Então, em geral, não tem muita novidade, não. Tem alguma coisa que eu pensei...Aqui, você sabe, esse nosso departamento, não sei, eu não conheço vários outros didáticos, nós temos uma...um departamento curioso, o pessoal é bastante preocupado com a alternância da forma, tentativa, sabe. Tem um exemplo prático, um professor outro dia escreveu uma apostila de álgebra linear, que ele estava confiante é... que o problema da...do estudo de dependência linear vinha do nome. Os alunos não conseguem entender dependência e independência linear porque trazem com essa palavra...linearmente independente e dependente, um significado estranho que a gente não consegue: é...dependente, dependente do quê? E algumas coisas desse tipo.E aí então ele começou a usar um outro palavreado: o conjunto é xpto, ele fala. O conjunto é xpto se acontece...tá lá a definição que ele dá.Trata com aquilo, trata com aquilo... Depois ele escreveu. Ele é da Educação Matemática, ele escreveu umas coisas aí sobre as conclusões que ele chegou das diferenças que se faz dentro do curso ou não. Ele fez isso com uma turma e com a turma, do diurno e noturno. Então, diurno, ele fez de um jeito, noturno fez...é a mesma aula, exceto pelo nome e ele detectou diferenças, ele comentou essas coisas...Mas, esse departamento tem, tem umas curiosidades, talvez por ter a Educação junta, não sei.E...então a gente tem muitas formas, faz muitas tentativas...talvez seja por isso difícil de responder p'rá você, qual o encaminhamento...eu poderia estar tentando lembrar o último mesmo. O penúltimo, já não sei. A gente muda muito...muda muito. Hã...o fato é que a gente deixa os alunos olharem nos livros p'rá eles não falarem que a gente não tem livro texto. Mas que a gente não gosta, a gente não gosta.

E; O senhor lembra de alguma analogia que o senhor faz para auxiliar o aluno na compreensão da definição de base, enfim...?
Cunha: ...Analogia? ...não....seria analogia com o quê? Quer dizer... Base não tem analogia com nada. É base. Base...o que você pode explorar, o nome e tentar deixar claro com isso, quer dizer...pode, não digo que você não pode fazer isso com geometria analítica e conseguir alguma coisa mais interessante que não desviasse da matemática. Porque eu tenho muito dessas histórias de aplicações, sabe? Achando que isso motiva o aluno com certas...isso mascara o aluno, eles pensam que entendem a idéia e não entendeu nada. Entendeu aquele probleminha lá que você também já dá a solução ao fazer o que você chama de motivação. Tem que tomar um cuidado enorme. Eu acho ...eu não acredito em motivação. A motivação é a vontade de entender aquilo que está escrito. P'rá mim essa é a única motivação que existe. Ah, agora, ..., modelos, né, são outras coisas. A gente tem que criar alguns modelos, mas não podem ser modelos extraídos assim muito do real, como você poderia dizer. A matemática não é real, mesmo. Ela não tem nada de real. Hã...veja...você pode falar da idéia de base...o que que eu estou querendo quando estou usando uma palavra como essa? Base. É aquilo que a partir do qual eu faço o resto, né? Base é aquilo em cima do qual eu construo o resto, não é? Então, mas você constrói como: Ah, eu construo por combinações lineares. Então, se ele achou interessante combinação linear, ele acha que realmente vale a pena fazer combinação linear, que no fundo... então, se ele acha interessante falar em coordenadas, tá feito a boa explicação p'rá ele do que é base. Porque, base é aquilo que eu quero p'rá construir as outras coisas, mas, é...construir como? A receita é que não tem outra em álgebra linear. É combinação linear. Eu não vejo, eu não quero estragar a sua entrevista, mas eu fiquei curioso para saber. Depois você me fala. O que você entende por analogia e o que é que você faz, né?

E: Bom, o senhor já falou que não utiliza livro didático, né? Mas, dá como referência?
Cunha: É, não utilizo para os alunos, eu utilizo p'rá mim, né? Quando eu quero não fazer alguma coisa eu procuro num texto. Isso eu não posso fazer. A gente tem que olhar

qualquer livro de um olhar muito crítico, sob um olhar muito crítico, né? Nossos alunos, infelizmente...e é curioso, você já percebeu, se você levar um texto que tenha algum erro e tentar discutir, a dificuldade de citar isso para o aluno porque a coisa escrita é uma coisa muito forte p'rá nós, né? Então, p'rá nós e isso é para o mundo inteiro, o que está escrito é...é lei, não? Então, você leva e tenta discutir e você sempre, por mais que você...que as pessoas acreditem em você, eles acreditam se você não for contra alguém, né? Não for contra algum Deus, então eles podem, eles têm uma certa relutância. Então, o livro é bom, é bom, para você discutir assim: olha, tá vendo esse... o que ele está fazendo, ele já está falando a palavra soma...isso é uma coisa que eu gosto muito em licenciatura, né? Quando está junto a turma, tá vendo...o perigo que é isso...o cara está usando a palavra soma, então ele está querendo que você de fato pense nas propriedades que você tem da soma, se é que você já pensou nessas propriedades. Por outro lado ele não quer isso, ele quer que você é...transfira essas noções para outros conjuntos. Então, você não acha que é perigoso você começar já a falar a palavra soma e o cara depois nunca mais se desfaz daquela idéia de número real. Portanto, é onde ele divide vetor, não é verdade? É aonde ele divide vetor...Eu gosto dos textos p'rá isso, p'rá discutir com eles essas coisas, mas...a crítica é bom, né? Quando você faz essa discussão eles ficam é...eles mesmo já não ocorrem mais no erro, não. Mas, se eles chegarem ao texto antes de você, é complicado. É muito complicado. Ontem, no curso de cálculo, falei de equação da reta tangente, tinha falado em derivada. Aí, o menino foi olhar num livro, abriu...eu passei exercícios, ele estava ali em grupo, é...metade da aula, aí eles estavam trabalhando, o menino foi: olha aqui, então, eu tirei aqui desse livro essa equação. Eu falei: mas porque você tirou do livro? Ah, porque está falando que é essa a equação da reta tangente. Mas, eu não falei qual é a equação da reta tangente. Ele falou: ah é, mas é diferente do que você falou aqui...Aí eu falei: mas, aí, se você fizer você não chega aí. Ah é, chega. Eu não sei porque ainda ele foi buscar no livro. É claro, que no livro está ali uma receita, com umas letrinhas postas no lugarzinho que ele tem que por o número, tudo certinho, né? E já no meu não tinha. Então, o texto é um perigo.

E: O senhor, hã...o senhor acha que os alunos têm dificuldade com a noção de base?
Cunha: Acho que não. Acho que com a noção em si, não. De base, não. Não vejo, é...mesmo porque isso só é um nome depois, né? Porque você precisou de independência linear. Depois está querendo uma coisa é...maximal. Isso daí depois vira só um nome, não vejo. A dificuldade que eu posso ver é a coisa que eu disse até agora que é ele dar valor à noção de base. Essa é a dificuldade. Agora, com ela em si eu não sei, não é...se p'rá eles também significa um nome só a mais, não sei.

E: Quando o senhor utiliza mais p'rá frente em transformação linear, quando estuda a noção de núcleo, de Kernnel...eles ficam com dificuldades ou eles trabalham numa boa?
Cunha: É...a questão, quando você dá a receita p'rá extrair base, essas coisas, a partir de um conjunto de gerador eu introduzo base assim, como eu estava falando, em geral eu faço isso, né? Já vai extrair a partir de um conjunto de geradores, base. Agora, se você der um espaço é...lá meio estranho p'rá eles e pedir p'rá eles determine uma base...eles têm dificuldades, né? Então, um espaço onde... encontrem uma base para esse espaço. Aquilo que você sempre faz com os teoremas...pega um vetor, depois pega o próximo, é...esse conjunto é l.d. ou l.i.? Ah, é li. Então, vamos pegar um outro. Vou pegando fora, vou pegando fora. Toda vez que eu faço isso, é...todo texto, perdão, todo texto faz isso, né? E se você pedir p'rá ele fazer isso num espaço, encontre uma base desse espaço, ele não usa o teorema, a demonstração do teorema, ele não usa. É uma coisa esquisita. Agora, quando você dá aquela matrizinha e fala escalona, aí eles acham. Mas, não sabem o que estão fazendo. Eu até vou dizer então que...quem não sabe fazer isso, não sabe o que é base. Então, disso eu vou falar p'rá você, então ele tem dificuldades com bases, não é? Mas, contradizendo o que eu estava falando: ah, eles não tem dificuldades**.** Eles não têm dificuldades com o nome. Não é uma coisa que

incomoda, mas há, mas tá aí...Agora o cara que, o cara que entendeu a base no sentido de... daquilo que ele precisa para obter a partir de combinações lineares, mas ele...ele extrai uma base de um conjunto que você der. E aí, de um jeito ou do outro ele extrai uma base. O problema é que os livros rapidamente dão aquela coisa de escalonar, né? Isso é muito triste. Já joga, já joga, para o caso que já está em IR^n. Eu falo assim eu vou dar, eu vou dar um...um...um espaço aí que não tem cara de IR^n, e peço p'rá ele arrumar uma base. Isso é um problema difícil para os alunos. Os livros já adotam que está em IR^n, e aí precisa escalonar. Então, já falou o que que é base. Então não precisava mais nada, né? É uma pena. Mas, hã...É, é complicado, porque é difícil falar que um aluno...se eu der um espaço, o espaço das funções contínuas com uma definição nula não sei aonde, se eu der um espaço desse...extrai uma base p'rá mim e ele não conseguir. Eu fico, eu fico preso de dizer que ele não entendeu o que é base, porque pode ser que encontrou dificuldades técnicas, aí, p'rá...p'rá coisa, da mesma forma que a gente encontra dificuldades técnicas p'rá diagonalizar, ou seja, p'rá encontrar uma base interessante, sabendo o que é base. Mas encontra uma dificuldade técnica desenvolvida que pode não ser...Eu acho que difícil dizer eles não entendem, o que é base a partir dessas noções, né? Agora, o teorema esse que você falou, da dimensão do núcleo, uma outra coisa: você já percebeu que tristeza que é a apresentação do teorema do núcleo, esse que é chamado de teorema do núcleo e imagem aí nos textos. É mais ou menos aquilo que eu estava falando, porque muitas vezes alguns jogam para o espaço quociente, que vive noutro lugar, mistura a dimensão das coisas. Isso é terrível. Você... com poucos exemplos de geometria analítica, você consegue é...fazê-lo entender o teorema do núcleo e imagem de dimensão um, dois e três, pelo menos, né? Qualquer que seja a dimensão do núcleo...e daí há uma demonstração no caso geral. É razoável, então, vamos fazer mais essa demonstração, ela é exaustiva. Tem que considerar casos, caso a caso, a dimensão é essa. Então, o...tem que ser aqui. E aí,mas você pode, você pode fazer...explorar isso geometricamente e ...Eu já cheguei a fazer isso num curso de álgebra linear que...supostamente não era aonde eu devia ter feito...Isso é p'rá ser visto num curso de introdução, mas eu sabia que os meus alunos não estavam legal naquilo, e aí eu fui fazer. Os alunos adoraram aquilo. Não imaginavam que o teorema do núcleo e da imagem é aquilo, não é? Quer dizer, ta vendo, ninguém precisa saber esse teorema, esse resultados que estamos tratando: dimensão dois, ou três, por essas demonstrações. Demonstrações são...mascaram, mascaram muito. Eu acho...tem um texto agora, eu não vou dizer...tem um texto aí, álgebra linear, álgebra do Tomas Banckson. É um livro muito elegante de álgebra linear. É...talvez um dos poucos livros, se não for o único, aonde ele está falando de coisas lineares, mas dá exemplos e pede para o cara verificar coisas que estão acontecendo em coisas não lineares, né. Então, é um excelente, um excelente texto. A gente tem tentado usar o texto sempre que possível aqui, no introdução à álgebra linear. Eles têm usado, esse texto é muito bom. Hã...então, tua pergunta era quanto a dificuldade em base, não vejo que seja diferente de outras coisas. Agora...interessante, porque se você falar assim: tome um plano...encontre uma...dá a equação de um plano passando pela origem. Fala: veja ele como um sub-espaço do IR^3, e encontre uma base, eles têm dificuldades. E, por outro lado, eles estão enxergando, uma base ali são dois vetores é...não paralelos. E eles têm a dificuldade de lidar com a equação do plano com que eles vão obter dois vetores nessa condição. Então, é estranho, né? Então, é muito estranho. Que eles possam ter essa dificuldade. Eu não acho que seja assim tão grave, eu acredito que dá p'rá trabalhar com eles, e eles captarem bem a noção. Acho que dá, mas com muitos exemplos de geometria. Sem exemplos de geometria, não vai adiantar, não é?

Transcrição: professor Duarte.

Iniciei a entrevista explicando os objetivos da mesma e garantindo o anonimato do professor e da Instituição.
Duração da entrevista: 45 minutos.
Instituição: privada
Entrevistador (E); entrevistado (Duarte).

E: O primeiro item ....que você fale um pouco sobre a formação acadêmica... o que você fez? Licenciatura, bacharelado, ..., se fez alguma extensão ...
Duarte: Eu fiz licenciatura em matemática e depois eu fiz a especialização em Metodologia do Ensino Superior... parti pr'a ... cheguei a fazer um curso de matemática, mesmo, de especialização em matemática, mas na época que eu tinha de fazer o trabalho e apresentar, que era tudo em francês, eu separei ... eu tive que dar uma parada e aí depois quando eu fui fazer, o que tinha à disposição era esse outro, eu comecei tudo de novo e fiz em Metodologia do Ensino Superior.

E: Quanto tempo foi de curso?
Duarte : Foram três semestres.

E: Faz tempo que você fez?
Duarte : Foi em 83...foi em 1986 que eu me formei.

E: Você fez algum tipo de pesquisa na época?
Duarte: Na época a gente fez pesquisa, mas era mais na parte pedagógica. Então, teve uma pesquisa a respeito...que foi em torno do.. era Freud e a aprendizagem... a gente teve que fazer todo um paralelo com aquilo que Freud...as etapas né, estudadas por Freud e as etapas de aprendizagem dos alunos . Foi um trabalho que a gente teve que apresentar, que me coube. Cada um teve um trabalho lá e esse foi o que eu tive de apresentar como um trabalho de conclusão.

E: Que nem um TCC, então?
Duarte: Isso.

E: E o tempo de docência que você tem?
Duarte: Eu comecei em 84. Em 84, eu comecei exatamente ....exatamente...álgebra linear?...não foi... comecei com Cálculo. Depois o Vincenzo precisou se afastar da turma da manhã, aí ele pediu para que eu o substituísse. Daí eu comecei com a álgebra linear na engenharia da computação.

E: Em 85?
Duarte: 85, 86. Você quer dados corretos?

E: Não, não precisa não. Tudo bem. Isto tem a ver mais com a amizade da gente. E... Como você vê qual é a importância da álgebra linear para a formação do aluno?
Duarte: Olha, eu sinto que embora os alunos tenham uma resistência muito grande, depois que eles pegam o jeito, porque eles tem que entender como é que funciona a álgebra linear. Eles passam .... pelo menos nas minhas turmas da computação, eu chego a estar mais entusiasmada com eles, porque eu acredito que não sei se por que eles na computação, eles precisam de um certo trabalho lógico..., de um certo desenvolvimento

seqüencial equilibrado, e eles acabam gostando da álgebra linear, o que eu não sinto na licenciatura.

E: Engraçado?!
Duarte: É inacreditável. Mas...

E: E na computação. Quanto tempo você trabalha, mais ou menos?
Duarte: Na computação...nós temos o quê... na computação estou há quatro anos.

E: Quatro anos. E licenciatura, você trabalhou...?
Duarte: Na licenciatura trabalhei 3 anos, mais ou menos....4.

E: E Além da licenciatura?
Duarte: Era sempre na engenharia, chamava-se engenharia eletrônica, que agora já não tem mais, tem engenharia da computação. Foi quando eu entrei para dar álgebra linear no lugar do Vincenzo. Então eu dava álgebra linear de manhã na engenharia eletrônica e depois eu passei, eu parei, não estava dando álgebra linear...aí dei alguns anos na licenciatura e há quatro anos estou dando é na computação. Comecei a dar, porque antigamente não era eu, era outra pessoa que dava.

E: Então você estava falando assim, que para computação você vê um interesse maior...
Duarte: Eu vejo um interesse maior dos alunos. Eu acho que... abre uma certa forma diferente de você trabalhar, por exemplo, é difícil eles entenderem quando eu falo "a", em álgebra linear, que aquilo é um número, e...e que aquele número ele não, ele..., e se eu falar "b" eu estou falando de outro número e que pode até ser igual, mas isso para eles é uma confusão tão grande. Então eles não conseguem entender, mas na hora que eles entendem, eu acho que para eles... não sei se eles aplicam ou se eles tem outras disciplinas não... não voltadas para álgebra linear, mas outras disciplinas aonde eles tem que usar esse tipo de raciocínio em cima de uma coisa mais abstrata. Eu sei que eles se entusiasmam e gostam. Existe também na computação um professor que trabalha comigo em paralelo e que trabalha no MATLAB com os problemas de álgebra linear. Então aí ele vai para o computador com o aluno, porque eu não sou chegada ao computador, certo.

E: Entendi.
Duarte: Então tem um professor que trabalha junto comigo na disciplina. Inclusive está aí um livro que eu recebi o ano passado que, a cada capítulo da álgebra linear, ele coloca uma série de exercícios, como normalmente, depois uma série de exercícios no MATLAB. Então a gente tem trabalhado com isso daí. Eles não gostam muito...gozado que... na hora que... o coordenador propôs isso, eu achei que seria um fato motivador. Mas, eu não sei...ele não tem muito interesse, não. Quando eu falo que vem o professor para propor o trabalho, eles ficam: "não, não, a gente faz na mão mesmo, não...". Não sei, ou se eles não conseguiram, ou se eles não gostam do MATLAB em si... que é complicadinho o MATLAB, né. E... eles... chiam um pouquinho, mas eu acho que é um trabalho que eu pensei que fosse fazer o maior sucesso com eles, entende? Porque é pegar o aluno que vê a álgebra linear, meio assim, no que que eu vou usar isso, né?... E vai com o computador com aquilo tudo. Mas eles não... mas eu sinto que eles se interessam mais. Eles vão à aula, participam. Porque a gente não tem muito tempo, né?

E: Quantas aulas são por semana?
Duarte: Duas aulas!

E: Duas suas e duas dele?
Duarte: Não, não, o trabalho dele é extra. Então ele propõe o trabalho e depois ele fica no laboratório, dois ou três dias que ele está por lá, ele se propõe, se o aluno precisar, ir lá.

E: É aula extra?
Duarte: É, mas não faz parte nem da carga horária, nada. Esse é um trabalho para fazer fora, entende? É que ele como orientador, nessa parte do MATLAB, ele tem lá os dias em que ele fica no laboratório e o aluno pode procurar por ele lá.

E: Isso entra na sua avaliação também, não?
Duarte: Não. Quer dizer, entra pelo trabalho que ele faz, né. Ele me dá: quem fez, quem apresentou, quem estava bem, razoável e, tem uma pontuação de trabalho. Porque eu dou trabalho e dou prova. Então, quando ele faz o trabalho, então junto com o meu trabalho aparece a nota dele, também. É avaliado.

E: E assim, ele propõe se...é toda semana, de quinze em quinze dias?
Duarte: Não, é esporádico, não é... Porque ele trabalha com todos os alunos da computação. Então assim, num bimestre ele está comigo, no outro bimestre ele pega cálculo, por exemplo, que às vezes até está comigo também, mas aí já é para outra disciplina. Ele vai fazendo um rodízio. Ele pega umas três, quatro disciplinas num bimestre e depois no outro bimestre não pega aquelas que já tinha feito. É um trabalho meio esporádico porque... você sabe que tudo que acarreta um certo custo... para a universidade, além daquilo que já é habitual, é difícil de você ter... como exigir uma constância ou uma carga horária maior, entende? Mas eu tenho tido uma experiência muito agradável na ciência da computação com álgebra linear.

E: E o período que você deu aula em licenciatura, assim como é que era, você achava álgebra linear importante para o curso? Para a formação?
Duarte: Importante, lógico, eu acho importante. Mas o aluno da licenciatura, meu Deus do céu, eu estou muito preocupada com isso, ele é muito fraco, muito fraco. Por exemplo, para... animar alguma coisa assim, tenho vários livros de álgebra linear. Então eu levava os livros, certo dia quando eu ia dar alguma coisa, para que eles lessem a definição. Cada um iria ler num livro, junto com dois ou três, um grupo e depois com suas próprias palavras tentassem definir, aqui. Depois das definições informais a gente passaria para uma definição formal. Leva um tempo que você não tem para fazer sempre, né? Mas o resultado era triste. Falta de interpretação naquilo que estava escrito, da falta de entendimento da leitura. Tem livros que são livros pesados, mas tem livros que tem ali a definição, clara, lógica, objetiva. Então eu sinto uma dificuldade grande. Eu já fiz algumas vezes na computação, embora o tempo seja menor ainda, eu tenho que dar toda a álgebra linear em duas aulas por semana...

E: Um ano?
Duarte: Um ano. Então é complicado.Já na licenciatura, são duas aulas por semana, mas tem a álgebra linear, 1 e a 2, né! Que agora vai ser 1, 2, 3 e 4, porque vai ser semestral. Mas, o resultado era drástico. Que a gente percebia que não havia entendimento. Eles liam e não entendiam. Já na computação agora, quando eu peço para eles definirem alguma coisa, eles: , né!: “ah, primeiro tem que situar, não é professora?” Eles já sabem que primeiro tem que dizer do que que eles vão falar, né! ”... então seja V um espaço vetorial...”; eles já sabem que tem que situar. Isso eu deixei bem marcado para eles. Eu vejo alguns resultados, coisa que na licenciatura... coisa é só para licenciatura? É isso?

E: Não, não. É álgebra linear para todos os cursos.
Duarte: Ah, tá bom. Que na licenciatura eu não conseguia isso. E eu tinha mais tempo, podia tentar mais vezes...

E: É no 2° ano?
Duarte: É no 2° e no 3°. 2° e 3°, veja... e na álgebra linear, na computação, é no primeiro ano. Começa inclusive um pouquinho com matriz, por que eles não viram, nada disso, né! E normalmente quem chega na faculdade não fez colegial nenhum, ou se fez, não sei o que fez, porque não sabem nada. É complicado, então começava um pouquinho com matrizes, antes de entrar em espaço vetorial. Dava tempo do professor de geometria analítica falar de vetores, né! Porque aí, depois, eu associava todas aquelas características dos vetores, para poder definir como um conjunto que tem outros conjuntos com as mesmas características, que são os chamados espaços vetoriais. Mas... mas é no primeiro ano, eles estão...

E: Então eles têm em paralelo a geometria analítica?
Duarte: Tem em paralelo. Então eu dou um bimestre de matrizes, sistemas lineares, ...Com isso o professor de geometria analítica já entrou na teoria dos vetores e tudo, para eu poder depois falar e eles já tendo uma idéia, né!...Funciona melhor. Na licenciatura eles têm geometria analítica no primeiro ano e depois a álgebra linear é no segundo. Quer dizer, eles já têm aquele fundamento de vetores.

E: E, quais são os tópicos que você acha, assim, que são prioritários para um primeiro curso de álgebra linear?
Duarte: Os tópicos prioritários?!

E: Por exemplo, você está com 2 aulas por semana, né. Tinha quatro...Teve que selecionar...O que você acha assim, mais prioritário que seja dado?
Duarte: Eu pego espaços, sub-espaços, depois eu pego...base e dimensão... pego transformação linear, puxo um pouquinho para transformações lineares, hã...na parte da definição mesmo, hã...saberem qual transformação é linear ou não; na transformação, núcleo e imagem...eu chego? Na licenciatura, que são 2 e depois mais 2, eu chego até a dar um pouquinho de ...espaço com produto interno...não dá para avançar mais nisso daí. Agora, na computação... eu vou mais rapidinho, porque são só duas aulas, mas eu quero dar para eles noção de transformação, tudo mais...Então chego a entrar nisso.

E: E a relação da álgebra linear com outras matérias do curso?
Duarte: Olha, tem teoria dos grafos na computação, hã... que poderia né, poderia ser dada, buscando soluções na álgebra linear. Só que, pelo que eles aprendem na álgebra linear, que é muito pouco, hã...o professor... primeiro que já, ele nem saberia como, mas a gente poderia até orientar. Mas, aí ele busca as soluções da teoria dos grafos em outras disciplinas. Ele pega a probabilidade, estatística, montagem, não sei o quê, para solucionar alguns problemas que poderiam ser solucionados pela álgebra linear. Mas é que precisaria saber muita álgebra linear, assim, para poder associar. Então ele trabalha em outro esquema. Poderia, mas não trabalha. Acho que a álgebra linear, assim...

E: Dentro do curso...?
Duarte: É ...associando a outras disciplinas... quer dizer, associada à geometria analítica, claro, né...é tudo um pouco no outro...mas...

E: Na licenciatura...você...?
Duarte: É...na licenciatura...eles...eles acham algumas semelhanças quando eles começam a trabalhar com...análise, por exemplo, ou com... álgebra moderna...que eles chegam a associar algumas coisas, mas eles, o conhecimento deles...eu estou

decepcionada com a licenciatura. Tanto é, que esse ano, eu peguei cálculo numérico para dar para eles ...na licenciatura...uma coisa bem bitolada.

E: E a necessidade de pré-requisitos para acompanhar um primeiro curso...?
Duarte: Ah...eu acho que precisa, bastante. Primeiro: precisa de matriz; eles precisam de...aliás, eu sempre coloco antes, no meu planejamento, em cima coloco: pré-requisitos. Aliás, em todas as disciplinas, porque não adianta nada você falar alguma coisa e eles não têm o pré-requisito né, para aquilo. Então, eu acho importante. Então, eu começo com matrizes, eu acho que eles depois precisam trabalhar com matrizes e eles acham que sabem né, quando eu falo, eles: "...ah, matriz é uma coisa gostosa que a gente via lá no colegial..."mas, aí quando você começa operar com as matrizes, e tudo, aí eles já ficam... primeiro que eles não sabem nem o que é matriz...tem que ir contando tudo isso para eles...acham que é um quadradinho cheio de números lá...acabou. Então você vai contando tudo isso...eles descobrem uma série de coisas... aí tem que operar com elas...aí começa a ficar complicado, mas trabalho, acho que precisa. Precisa de noções de vetores, claro né, e...por isso eu dou este tempo...para o Lara começar a falar de vetores, tudo o mais, antes de eu entrar nos espaços vetoriais. O que mais que eles precisam muito...? Eu acho que de pré-requisitos, é isso daí mesmo: um pouco da geometria e um pouco da parte de matrizes. E o resto é novidade para eles. Eles... só sabem trabalhar no concretinho, mesmo né. Você percebe que a medida que eles estão trabalhando com a, b, c, x_1, x_2, x_3, de repente eles não sabem, eles esquecem, embora a gente tivesse dito, mas eles esquecem que aquilo lá é um número,entende? Para eles, é muito complicado isso. Eu já não sinto essa dificuldade no pessoal da computação.

E: É mais na licenciatura?
Duarte: É mais na licenciatura.

E: E como é que é a taxa de aprovação em álgebra linear?
Duarte: É...na licenciatura é...eles até são meio aprovadinhos...por uma série de outros fatores, né. Mas, na licenciatura tem bastante reprovados. Porque aquele que não enxergou...por exemplo, tem duas...eu tenho quatro turmas na computação, duas na quarta-feira e duas no sábado. As duas do sábado eram prejudicadas, primeiro porque é sábado, né...

E: Aquele terror!
Duarte: Aquele terror. E... então, assim, quem não vai à aula, não tem como, entende? Eles pegam um livro, aí eles não entendem nada daquilo que está escrito. Então, as turmas de quarta-feira que eram mais presentes e tudo, tinham resultado bom. Agora o pessoalzinho do sábado, ficou todo mundo.

E: Isso da computação?
Duarte: Da computação. Da licenciatura, também ficaram alguns, mas na licenciatura, eles são um pessoal assim, inclusive muito carentes, em termos financeiros, aí eles pedem por favor, vão falar com o diretor, pedem outra chance, outra chance, outra chance...

E: Pedem outras provas...
Duarte: Pedem outras provas , muitas coisas... Então vão indo, mas...pelo certo ficaria na mesma faixa, eu acredito...uns 40%...que é o que fica na computação.

E: E as turmas são grandes?
Duarte: 90, 95...Difícil né, trabalhar assim.

E: 90, 95, é muito. Terminam os 90, 95?
Duarte: Em cada turma, isso. Em cada turma!
E: Eu sei, em cada turma.
Duarte: Em cada turma. Assim, depois da primeira prova, alguns abandonam. Isso é no primeiro ano de álgebra linear. Depois no segundo, a gente não tem mais essa expectativa. Depois da primeira prova, eles começam a correr atrás para ver se melhoram na segunda, que desistir no segundo ano é mais difícil... porque no primeiro tem desistência. Tem bastante, uns 20%.Depois da primeira prova, já fica meio assim... e aí já leva meio...no segundo bimestre meio de qualquer jeito e aí desiste, certo.

E: Tem aqui a frase de um matemático conhecido, Plancherel, francês. Ele fala assim: " De todos os cursos que havia dado, o de Álgebra Linear era de longe aquele que parecia mais difícil aos estudantes" Que é que você acha dessa frase?
Duarte: Como é que é?

E: "De todos os cursos..." (mostrei a frase ao prof.1 para que ele lesse).
Duarte: De todas os cursos...".

E: Você dá outras disciplinas, também. O que você acha dessa afirmação dele?
Duarte: Esse era de longe, ele queria dizer o quê?

E: É problema de tradução... De longe, era de certeza...
Duarte: De certeza aquele que parecia o mais difícil...o mais difícil...Não concordo.

E: Não? O que você acha que seria mais difícil para eles, então?
Duarte: Eu acho, que para a turma da licenciatura...análise, é mais difícil para eles. Álgebra Moderna, é mais difícil para eles...

E: E o pessoal da computação?
Duarte: O pessoal da computação?...bom, não sei as disciplinas teóricas. Eles tem muita dificuldade em cálculo I.

E: Cálculo I?
Duarte: Porque eu dou Cálculo II, mas a maioria deles... estão reprovados no Cálculo I, certo. Tem aluno se formando e fazendo cálculo I. Ele tem muita dificuldade no cálculo I que requer muita coisa do passado...

E: Do colegial?
Duarte: Do colegial, do ensino fundamental. Você vai trabalhar com limite, precisa de toda aquela parte...como é que chama?

E: ...das funções.
Duarte: Função então, nossa, eles não fazem a mínima idéia....

E: Fatoração.
Duarte: Fatoração, exatamente...tudo coisa que é pré-requisito e que na realidade ele não tem. Tem aluno formando e ta lá...

E: Bom, então, vamos falar agora um pouquinho da noção de base de um espaço vetorial? Como é que você costuma, tanto na licenciatura como na computação, como é que você costuma abordar a noção de base?
Duarte: Bom, eu começo falando dos conjuntos de geradores, né. Então, a hora que eles conseguem pegar um elemento genérico de um certo conjunto; de esse elemento genérico partir para um conjunto de geradores, fazendo uma combinação linear, com as

letras, com as quais eles formaram o conjunto genérico, eles partem para o conjunto de geradores. Depois...eu só falo em conjunto de geradores. Depois, eu explico para eles que alguns conjuntos são linearmente dependentes, outros independentes, porque ele já tem noção, pela geometria analítica. Só que eles não podem, para todos os casos da álgebra linear usar o determinante, por exemplo, para definir se é LI ou LD. Então, aí eu dou a definição, eles aprendem a definir se é LI ou LD. Daí vem à definição de base, onde eu coloco que a base é um conjunto de geradores obrigatoriamente linearmente independente. Então, a definição sai de dois conceitos anteriores né, que eles tiveram. Então... e aí para eles fica, acho que fica uma fala boa.

E: E que tipo de atividades você dá para eles? O que você propõe antes, depois?
Duarte: Para fazer a respeito de base? Bom...por exemplo, eu posso dar um conjunto, um subconjunto de um espaço e perguntar se aquele é uma base. Eu posso dar um sub-espaço né, e pedir uma base daquele sub-espaço. O que mais?...Eles gostam mais de achar a base certa**.** É difícil para eles entenderem que tem várias bases né, eu tenho que ás vezes mostrar meio concretamente como é que funciona, para eles colocarem ... porque um acha uma base, outro acha outra. Eles acham aquilo meio estranho. Então quando a gente trabalha com escalonamento né, aí eu coloco para eles que esses daqui são equivalentes a esses daqui, você está só mudando a forma...Então se isso aqui é uma base, você chega lá no final dizendo que esse aqui é uma base, todos aqueles que eram equivalentes também seriam uma base. Aí eles começam a entender um pouco melhor que tem mais do que uma base. Mas, odeiam escalonar, mas depois que aprendem acham uma maravilha. Aí não querem mais achar se é linearmente independente por nenhum outro modo, só querem por escalonamento.

E: E...quando você introduz base...você faz alguma analogia? Trabalha com alguma coisa para que eles possam compreender melhor? Como é que é...?
Duarte: Eu me reporto à parte dos vetores da geometria analítica. Eu pego aquela base, hã... ortogonal, que eles já conheceram, já trabalharam né, e começo daí a explicar que existe sempre uma base e que não é só aquela, que existem outras, não só para o IR^3, mas para os outros sub-espaços também. Eu faço um paralelo assim com a geometria analítica.

E: E você trabalha mais com as bases canônicas, ou...?
Duarte: Não, trabalho com outras bases também. Falo das canônicas...é que a base canônica, vai dizer, na hora do exercício ela é...agiliza né, porque, fica mais fácil de trabalhar em termos de conta e tudo. Então, eu até trabalho também, mas não obrigatoriamente, normalmente até pego outras bases que não a canônica.

E: Então, os exemplos que você mais utiliza, seriam em termos das canônicas, dos exemplos mas com o IR^3, o IR^2, com o quê que você ...?
Duarte: É, eu trabalho com o IR^2, com o IR^3, trabalho também com o conjunto de matrizes, certo?. Não costumo pegar a parte de polinômios, porque aí é o tempo...você teria que dar toda a teoria dos polinômios...Trabalho com o IR^n, digamos, né. Então, quando você quer dar um pouquinho mais de trabalho... para eles, você pega o IR^4, o IR^3, qualquer coisa assim. Ou então o conjunto de matrizes também, eu uso. Não pego polinômios, não trabalhamos com complexos, não daria também.

E: E aplicação? Você dá alguma aplicação de base...? Alguma coisa específica...? não sei se para o curso deles...
Duarte: Não. Eu faço, às vezes, é a mudança da base né, quando você muda a base que está estudando...uma certa base...uma certa situação, e você mudam de base, o que significa essa mudança de base. Mas não assim de... para eles trabalharem assim é mais complicado. A gente não tem esse tempo, né.

E: Duas aulas por semana...
Duarte: ...de deixá-los...batalhar, pesquisar, para chegar numa conclusão. É muito complicado, não teria esse tempo todo, né.

E: E os exercícios, como é que você trabalha com eles? Você estava falando um pouquinho do MATLAB, também...
Duarte: Isso. O MATLAB nem é comigo. Agora comigo, eu dou listas de exercícios onde eu, eu procuro pedir assim...em termos de base, estamos falando de base...dou um conjunto e pergunto se é base, dou um sub-espaço e peço base daquele sub-espaço, dou um conjunto de geradores e peço uma base...peço base... para completar uma base com alguns vetores que eu dou, né. Tenho esses vetores , eu quero que você complete uma base do IR^5, por exemplo, que contenha esses vetores. Em termos de exercícios...? Eu, eu...estudei no Callioli, certo. O Vincenzo que deu Álgebra Linear para mim, no Callioli. Quando ele pediu para eu tomar o lugar dele lá de manhã, ele falou para mim o que ele estava fazendo, mas me indicou para continuar no Callioli. Hã... eu acho assim que ele tem uma seqüência que...que dá para eu organizar dentro do tempo que eu tenho. Embora existam outros livros, eu procuro... eu... procuro mesmo, seguir o Callioli e pego exercícios do Calliol, certo. Invento um pouco de exercícios, porque se você pega esse livro, esse e aquele, tem tudo mais ou menos a mesma coisa., né. Então, às vezes você quer...eles querem mais exercícios, mais exercícios...para eles se sentirem firmes naquilo que estão fazendo. Então, às vezes crio alguns exercícios também, mas é nesse sentido, mas baseado no Callioli.

E: Eu ia te perguntar se você utiliza, se você indica para eles vários livros...?
Duarte: Indico. Dou uma bibliografia no início do ano, né... aqueles que eu tenho à disposição lá na biblioteca da instituição. Comento com eles que procuro seguir o Callioli, quer dizer...mas, só que eles não compram esse tipo de livro.

E: Não.
Duarte: Não.

E: Você faz alguma pesquisa com livros, com alguma coisa com eles? Eles... ou não dá tempo?
Duarte: Não.

E: E, assim, você acha que eles têm muita dificuldade com a noção de base? Ou eles não têm dificuldade nenhuma?
Duarte: Eles têm dificuldades, eles têm. Isso não é uma coisa fácil, aliás, toda a álgebra linear. É a primeira vez que eles entram em contacto, que antigamente, a gente no colegial, a gente tinha teoremas né, que a gente estudava, tinha que desenvolver, tinha que...hoje, eles não têm nada disso. Então, quando você joga uma coisa, que não é assim...hã...tem uma fórmula, né, e você aprende a usar aquela fórmula dentro daquilo, para eles, aquilo é muito aéreo, eles não conseguem...para eles é uma dificuldade, eu acho. Mas, quando...quando eles enxergam alguma coisa, eu acho até que eles levam numa boa.

E: Você acha que a noção de base, principalmente, você colocaria ela como a que dá mais trabalho, como a que tem mais dificuldade de compreensão...?
Duarte: Não. Eu acho que a dificuldade maior está no início.

E: No início. Parte de definição?
Duarte: Parte de definição de espaço vetorial, ele saber o que é um espaço, saber...hã... abstrair daquela..daquela coisa, que ele só sabe no concreto. Você fala em número, para ele número... são só aqueles que ele conheceu. Você fala em par ordenado, ele já

começa a complicar, porque ele já não sabe muito bem o que é. Desde de par ordenado, certo, você vai trabalhar com o conjunto IR^2, mas ele tem muita dificuldade lá no par ordenado. Aí, voce fala em terna...que aí o Lara já normalmente, já tenha falado, né. Mas, eu acho que lá no começo, quando ele tem que esquecer aquelas coisas que ele aprendeu assim...hã...de pegar a coisa pronta, que ele vai ter que analisar, que ele vai ter que olhar, pensar, interpretar o que aquilo está dizendo, acho que aí é que é a maior dificuldade. Acho que é logo no começo.

E: Conforme, você vai depois trabalhando...
Duarte: Trabalhando, eu acho que...não digo que seja tranqüilo, mas que eles tem assim...já, uma facilidade maior para adquirir esses conhecimentos, eu acho.

E: E quando chega em transformação linear, você acha...você utiliza lá, não?... Você acha que eles retomam fácil a definição...?
Duarte: Sim...Retomam fácil. Sim, porque se aí você pede a base do núcleo, da imagem...você volta na base de tudo aquilo**.** E... a base, eles entendem como um conjunto gerador, mesmo. Um conjunto gerador que tem uma característica: tem um número mínimo de elementos capaz de gerar o tal espaço. Eu acho que o conceito de base eles pegam bem.

E: Então, a dificuldade seria mesmo o trabalho com os elementos?
Duarte: É, eu acho. Eu acho que é o mais difícil, porque depois que eles entrosam...

Transcrição: professor Freire.

Iniciei a entrevista explicando novamente os objetivos da mesma e garantindo o anonimato do professor e das instituições.
Chamarei de Instituição 1 (universidade: curso básico); Instituição 2 (universidade: curso de licenciatura em matemática); Instituição 3 (faculdade de tecnologia) e instituição 4 (a atual: curso de ciências da computação e de licenciatura em matemática).
Duração da entrevista: 51 minutos.
Entrevistador (E); entrevistado (Freire)

E: A primeira fase aqui da entrevista seria a caracterização do professor e suas atividades acadêmicas. Queria saber assim a sua formação acadêmica. Uma parte eu já sei, mas que você falasse um pouquinho sobre a sua formação acadêmica.
Freire: Sou mestre em matemática, 1979, pela PUC de são Paulo. Minha tese foi em Álgebra, foi "Epimorfismos de Anéis não comutativos"... Trabalhei em duas universidades privadas da cidade de São Paulo, em uma faculdade de Tecnologia de São Paulo e atualmente trabalho em uma universidade privada de Santos.

E: Esse período que você trabalhou, você trabalhou com álgebra linear?
Freire: Eu trabalhei cinco anos, desde ...logo após a minha formatura, trabalhei cinco anos consecutivos com a Renata Watanabe e Roberto Costa em álgebra linear, exatamente, lá na Instituição 1. Também álgebra linear na instituição 2, devo ter dado alguns cursos, uns dois ou três anos, mas cinco anos corridos foi na instituição 1. Uns três, quatro anos lá na instituição 2.

E: E você realizou algum tipo de pesquisa, alguma coisa...?
Freire: Na área, não. Só... pesquisa, pesquisa só....sempre sob o ponto de vista didático. Minhas aulas sempre foram de forma um pouco diversa do próprio livro que a gente usava. O livro clássico naquela época era o Lipschutz, depois, professor ....hã...Callioli, professor Roberto, professor...hã...

E: Hygino..
Freire: ...fizeram um livro de álgebra linear. Aí nós adotamos esse livro também lá na instituição 2. Mas, paralelamente eu sempre usei outros tipos de coisas, principalmente, porque sempre fui apaixonado pela parte de matemática aplicada, então sempre eu queria ligações com aplicativos, dentro de álgebra linear. Ainda hoje, a gente trabalha com aplicativos de álgebra linear...a própria computação gráfica é todinha álgebra linear, praticamente só trabalha com álgebra linear.

E: Atualmente, você está dando aula...?
Freire: Ah...não sei do que não estou dando aula, agora. Mais na área de computação. Estou na computação.Mas é,...por exemplo, computação gráfica é toda álgebra linear, mais matemática, álgebra linear aplicada, álgebra linear aplicada. Mas, agora, temos a parte de álgebra muito pesada também na parte de ciências da computação, na área de autômatos.Temos matemática lá na área de tratamento de sinais, na engenharia, né...mas é, é... então a álgebra linear é um instrumento agora para mim, como se fosse o cálculo, como se fosse o cálculo, entendeu, a mesma coisa. Então, transformações lineares, bases, dimensões, o espaço, espaços gerados, essas coisas, são coisas corriqueiras, coisas comuns, sem os quais eu não faria nada mesmo, nada, nada, nada.

E: E esse período que você deu aula de álgebra linear, é... foi para a licenciatura, para...?
Freire: Foi...aqueles cinco anos, era o curso básico da instituição 1. E, nos quatro anos que trabalhei lá na instituição 2, com a turma da matemática, né.

E: Licenciatura.
Freire: Licenciatura mesmo.

E: E, assim, o que você poderia falar sobre a importância da álgebra linear para a formação do aluno?
Freire: Bom, vai depender exatamente de que tipo de aluno que nós vamos pegar na mão. Se a gente pega, por exemplo, hã... o aluno de matemática, por exemplo, ele é ávido por aplicações, mas ao mesmo tempo, a gente não pode dar aplicações, porque também ele não tem formação, não tem preparo para entender o que vem em seguida, o que...para, para uma massa de informações que fosse sólida em seguida. Como é que a gente vai falar em aplicação da...em aplicação de álgebra linear na computação gráfica, se a gente não avançar na computação gráfica. Então, a gente acaba perdendo... acaba...quem dá aula de álgebra linear, acaba perdendo o escopo da álgebra linear, porque tem que dar um curso de álgebra linear, não pode dar um curso de computação gráfica. Então, hã... na hora que dá esse curso, por exemplo, pr'a...p'ra... básico, é de prometer apenas que tem aplicação, não tem alternativa, você pegar exemplos, é... extremamente simplórios, não pode pegar exemplos sofisticados, porque senão vai ter uma dispersão, vai ter uma dispersão e acaba não dando certo, né.

E: Desses exemplos assim que você está falando, simplórios, você teria algum assim que você lembre, que você trabalhava?
Freire: Simplório aí, é só no coloquial, na forma coloquial, não pode ser na forma formal, tem que ser na forma coloquial, forma coloquial. Fala por exemplo em base, o quê que é base, qual é o propósito da base, fala que a base tem o propósito de sintetizar o espaço, que é deles que sai tudo né, parte de cada vetor da base, né. Uma combinação linear desses vetores dá um ponto genérico do espaço. Espaço aqui no sentido mais genérico possível, espaço de palavras, espaço de, hã...espaço de objetos. As coisas mais esquisitas do mundo. Pode ser também, espaço de posição propriamente dita, que eu uso também na...na mecânica, por exemplo, um objeto...um observador está vendo o objeto nas posições 1, 2 e 3; outro observador, o mesmo objeto, está vendo em outra posição, 4, 7, 8. O referencial de cada um deles, é um diferente do outro, né. Certo. Na hora de transmitir essas mensagens desses dois observadores há a necessidade de um instrumento que modifique essas coordenadas, um p'ro outro né, não pode passar...eu emito 1, 2, 3, o outro tem que receber 3, 4, 5. E reciprocamente, um fala 3, 4, 5 , o outro tem que receber 1, 2, 3. Então, essas mudanças de base são quotidianas, toda hora, toda hora. Na computação gráfica, particularmente, na hora em que a gente projeta, projeta na tela um determinado objeto, vai depender do observador, né. Quem que vira, quando o objeto vira, quem que está virando, né. Quem que está virando, é a tela que está virando, ou e o ponto de vista que está virando. Então, são as coordenadas que acabam mudando completamente, essa mudança de coordenadas dá a sensação de movimento, dá a sensação de que o observador está se mexendo, né, ou que a peça está rodando, coisa desse tipo assim, que é a mudança de base. Então, o movimento é mudança de base. É mudança de base, o movimento, né.

E: Quais os tópicos assim, que você considera prioritários num primeiro curso de álgebra linear?
Freire: Dimensão, base, espaço gerado, hã...sub-espaço...até a parte de ...autovetor, autovalores. Essa parte é fundamental.

E: Fundamental para o curso?
Freire: Fundamental. Porque autovetor e autovalores...esse autovetor e autovalor a gente precisa muito na engenharia para ver a estabilidade da ...estrutura. Área da matemática depois a gente vê nos problemas de resoluções de equações diferenciais, etc, etc.né. É coisa mais complicada, né. Mas, o curso básico tem que ir até autovetor e autovalores, né. É preciso, né.

E: E..., você até já falou, mas, se pudesse falar mais um pouquinho sobre a relação da álgebra linear com outras matérias do curso. Você, praticamente até já falou, mas talvez até ligando, não sei se...se você deu aula...
Freire: No curso de que...de matemática propriamente dito, né...

E: Então...por exemplo...
Freire: De matemática...

E: A parte de matemática...
Freire: A parte de matemática tem de levar em consideração a parte de geometria analítica, é ligado à geometria analítica, a parte de equações diferenciais, curso de equação, né. De matemática, né, claro, no curso de matemática, né. Agora, na engenharia é sensacional, a partir do segundo ano...terceiro ano, a gente tem álgebra linear aí...até o quarto ano, até o quinto ano de engenharia tem álgebra linear, todinha. Não sou eu, é pré-requisito, né. Sem álgebra linear não vale nada.

E: Você trabalhou com a engenharia, também?
Freire: Sim, com a engenharia..

E: Quantos anos você trabalhou com a engenharia?
Freire: Ah... Desde de 70, né...71, né.

E: E, além da engenharia...?
Freire: Engenharia e Instituição 2, né. A instituição 2, é Filosofia. Na Instituição 3, é engenharia. Agora... aqui na ...Instituição 4, particularmente, estou vendo o ramo da engenharia, que nunca tinha entrado antes; porque eu trabalhava mais com a engenharia civil e engenharia mecânica, né, na parte de matemática, nessas direções. E, aqui na Instituição 4, outro ramo, que entrei numa outra área, que é a área de telecomunicações, hã... área de tratamento de imagens, área de computação propriamente dita, que é lindo p'ra chuchu e é outro tipo de matemática. Muita álgebra, muita álgebra, muita álgebra.

E: Você está dando na engenharia da computação, também, ou só na computação?
Freire: Não só na computação, não.

E: Na engenharia também.
Freire: Sim.

E: Bom, também você já falou um pouquinho, mas eu vou cobrar, para frisar, a necessidade de pré-requisitos para acompanhar um primeiro curso de álgebra linear. Você acha que tem necessidade de pré-requisitos?
Freire: Eu acho que não.

E: Não?
Freire: Acho que não.

E: Acha que em nenhum dos cursos que você deu... você não precisa ficar preso viu, à licenciatura, porque, é em geral.
Freire: Não, não, não precisa não. Naturalmente, o cara tem que ter feito vestibular, tem que ter uma certa vocação para ciências exatas. Não vamos pegar uma pessoa que ... inábil em fazer certas operações matemáticas elementares de aritmética, né.

E: E você acha que, por exemplo. tem faculdades que é no primeiro ano a álgebra linear, né, atualmente. E tem faculdades que...você acha que mesmo sendo no primeiro ano...?
Freire: Eu acho que álgebra linear é mais assimilada pelo aluno do que o próprio cálculo, porque o cálculo tem o pré-requisito, acho, mais forte do que álgebra linear. Porque o cálculo tem umas continhas... se o cara se atrapalha em frações e companhia bela, acaba destruindo tudo aquilo que está construindo, né. Existe um método de demonstração do cálculo, se a gente for usar análise dentro desse cálculo, existe um comportamento formal um pouco mais rígido, né. Apesar que a álgebra linear se for conduzida direitinho tem um comportamento formal mais rígido que o cálculo. É álgebra mesmo e...e pode chocar no começo, num primeiro contacto do aluno. Sempre vai depender exatamente de como entra o aluno. Eu vou fazer uma comparação, quer ver: comparação entre engenharia da computação e ciências da computação. Na engenharia da computação, o aluno quando entra, ele já está sabendo que ele tem que ter uma tendência matemática e ciências da computação ele já está pensando o seguinte, de que ele vai ser, digamos assim, um cara que vai bolar páginas de Internet, que vai ser um hacker, sem saber realmente, claro, de que precisa ser um grande matemático...Sem saber que precisa ser um grande matemático, mas ele imagina todas aquelas coisas, parafernálias que ele vê na televisão, faz uma imagem mística da ciências da computação. Como engenheiro da computação, não, ele já está sabendo, você é engenheiro, então tem...então não é tão chocante assim um curso de cálculo, nem um curso de álgebra linear, quando entra no primeiro ano. Agora, se entra, por exemplo, álgebra linear, no primeiro ano p'rá ciências da computação, é um choque violentíssimo, eles não acreditam, não é possível, que nas ciências da computação tenha que ter essa álgebra linear, compreendeu?. É um choque violento, assim como o cálculo também, eles acham que não precisam de cálculo, nem precisam de álgebra linear...é um grande engano aí, é uma fantasia. Eles entram dentro das ciências da computação, imaginando coisas que...pensam que eles podem pular um montão de etapas e que nós somos esclerosados, e que estamos perdendo tempo com certas coisas...é uma disputa para chegar lá...

E: É verdade...Eles pensam que... eles entram lá para ficar apertando botãozinhos...
Freire: Exatamente. E eles são realmente muito hábeis nisso aí, né. Meus alunos me ajudam muita coisa...

E: A mim também...Me ajudam muito...
Freire: Me ajudam bastante. Tem certas coisas que eles são muito mais hábeis do que a gente, sem a menor dúvida, né. Quando é hora de me ajudar, agora tem coisas que...n ao tem condições.

E: E assim...no período que você deu aula de álgebra linear, a taxa de aprovação em álgebra linear, como é que...?
Freire: Foi de setenta, de setenta e um a setenta e ...até oitenta, digamos assim. Nessa época aqui que eu dei formalmente essas aulas, né. E na Instituição 1, eu fazia parte de uma equipe, né. E não sei se você se lembra, lá na instituição 2, nós também tínhamos equipes, trabalhamos em equipes. Na instituição 2, por exemplo, um determinado professor tinha que se dividir em análise e cálculo, então os exercícios eram sempre marcados, todo mundo fazia os mesmos exercícios, né. Aquilo não era tão rígido assim na instituição 1, com a Renata Watanabe, com... com o Roberto Costa, não era tão rígido

assim. Mas, enfim eu marcava alguns exercícios né, então fazia...era o Lipschutz que a gente usava né, marcava e fazia. Então o rendimento naquela época lá era...era bom, era muito bom. Mas, tinha demonstrações, normalmente, não tinha só, exercícios, tinha demonstrações. Seguia o esquema do Lipschutz. A mesma coisa, acho que na instituição 2, na instituição 2 acho que tive um bom resultado. Apesar que, de vez em quando eu faço uma limpeza nos meus apontamentos, e vejo algumas provas que eu dei naquela época, acho que...eu não faria hoje, de jeito nenhum. Não faria, não. Não faria, não.

E: É agora é outra época, também na minha época...mas, então você acha que o índice ...vamos dizer..
Freire: Naquele, naquela época...eu sou dos anos setenta, setenta-oitenta. Então p'rá aquela época lá, não tinha problema, não. Os problemas maiores lá não eram álgebra linear, não. O problema maior, mais chocante para eles era cálculo, era análise.

E: E assim...nesses anos que você trabalhou depois, mas não trabalhou com álgebra linear, assim de comentários de colegas, essas coisas...você acha que o índice também, pensando assim, comparando, não era um índice muito grande, ou era?
Freire: Eu acho que o curso corre, normalmente. Álgebra linear não é tão chocante. Álgebra linear, geometria analítica não é tão chocante para os alunos. O choque maior, acho que é, realmente cálculo. Mas, eles resistem um pouco, eles fazem um pouco de força, um pouco mais, mas acho que ainda passam um pouco mais depressa em álgebra linear do que...junto com a geometria analítica, sempre deve fazer.

E: Após a geometria ou em paralelo?
Freire: Acho que em paralelo mesmo, Não tem problema.

E: Em paralelo.
Freire: Em paralelo.

E: Então, por exemplo, você tem idéia que álgebra linear pudesse ficar talvez no primeiro ano?
Freire: Acho que deve ficar no primeiro ano. Tem que decidir desde já...eu sei que é chocante, mas é...e´...tanto faz, tanto na engenharia quanto na matemática, tem que entrar no primeiro ano, tem que saber que tem que ter um comportamento formal. Nada melhor do que esse ponto aqui, porque quando chega, por exemplo, em álgebra mesmo, ou chega em topologia, não sei se tem topologia, acho que não tem topologia, mas chega em topologia, por exemplo, aí complica tudo. Não faz nada, não faz nada.

E: E esse esquema aqui, que tem várias faculdades que durante anos conservaram geometria no primeiro e álgebra linear no segundo. Então você acha que é desnecessário?
Freire: É uma boa. Essa decisão, se fosse, por exemplo, não pode colocar, tem carga horária muito grande no primeiro ano, tem que tirar uma das duas e botar no segundo, tem que ser álgebra linear, né.

E: Tem que ser álgebra linear?
Freire: Tem que ser álgebra linear. Se estamos nesse esquema, tem que jogar álgebra linear p'ro segundo. Mas se puder, puder fazer junto. seria o ideal.
E: Então, olha, tem uma frase do Plancherel que fala assim: "De todos os cursos que havia dado o de álgebra linear era de longe aquele que parecia mais difícil aos estudantes." Então, pelo que você falou, concorda...?
Freire: Não concordo.

E: Não concorda, né. Tá bom, então. Bom, a parte, assim, principal da minha dissertação é justamente sobre a noção de base. E mas, eu não disse no começo, mas eu vou frisar agora, quer dizer, o que eu estou procurando são recursos para o ensino aprendizagem de álgebra linear. Quer dizer, a minha entrevista com os professores, não é para verificar competência, não tem haver com isso com o professor, tem a ver se eu consigo levantar recursos. Porque, o professor coma experiência, com o estudo. Você também que agora está trabalhando com aplicações, pode trazer...que eu possa deixar na minha dissertação. A idéia é essa. Por isso o porque da entrevista, e principalmente com o desenvolvimento da noção de base. Aí que está o meu ponto chave em termos da álgebra linear. Então, eu queria perguntar para você: nesse período que você trabalhou com álgebra linear, e depois você pode, isso é independente, porque você continua trabalhando com ela de uma forma indireta, não é?
Freire: Isso.

E: De uma forma agora com aplicações, quer dizer, aí você fica totalmente livre para falar o que você quiser, tá. É...sobre, justamente, a noção de base, como é que você abordava a noção de base...como é que você acha que deve ser abordada a noção de base? As atividades, os exercícios, os exemplos que você segundo você acha que deve utilizar mais, se não deve utilizar, como é que deve ser feito? Gostaria de deixar você bem livre para falar do antes, do agora, o que você sente agora, talvez, tendo que aplicar? Se essa parte da noção de base deveria ser reforçada alguma coisa...? Te deixo totalmente livre para falar...
Freire: Bom. O que eu poderia dizer da base.

E: Se você quiser começar como você abordava?
Freire: Não me lembro mais, já faz tantos anos. Mas, como eu trato isso hoje, porque eu preciso, trabalho com base, né. E a minha base, não é necessariamente aqueles vetorzinhos, i,j e k. então, pode ser uma base, é uma base de funções. Por exemplo, quando a gente trabalha com...hã...com aproximações de curvas em computação gráfica, a gente trabalha com algumas cúbicas básicas, então essas são base, é uma base, são três curvas, duas curvas que funcionam como base. Então, a gente pega um pedaço de uma, um pedaço da outra, faz uma combinação linear das duas, certo, e acaba provocando uma outra curva. Então, essas curvas são combinações lineares. Todas as curvas...naturalmente num espaço especial, não é, não num espaço pontual como a gente está pensando, num espaço de curvas, que são geradas por curvas básicas do terceiro grau, certo. São as chamadas curvas do terceiro grau. Tem um montão, são os chamados <u>spliners</u>, os spliners, as hermetianas, tudo a parte de curvas que são desenhadas através da base. Quer dizer, isso já sai fora completamente do esteriótipo que a gente tem, que a gente costuma dar em álgebra linear. Porque em álgebra linear, o esteriótipo, o modelo é IR^n. Esse que é o fundamental, o IR^n, né. Desviando um pouco, a gente vai para o espaço da matrizes, que é o IR^n, também...mas, extrapolando um pouco vai para dimensões finitas, vai pegar aquele espaço das funções contínuas, de bases... assim por diante, né. Para poder usar depois para...soluções de equações diferenciais, né. Mas, enfim, eu acho que a idéia fundamental da base, no fundo, no fundo, eu vejo que existe uma grande analogia com a parte de recursividade também. Porque na recursividade, é geração, geração. A recursividade, o que faz, ela bate com objetos básicos...esses são...esses são...essa é uma árvore, essa aqui é uma árvore, certo. Por definição, essa é uma árvore, essa aqui é uma árvore, por definição, certo...ãh...se essa é uma árvore, essa aqui é uma árvore, então essa daqui também é uma árvore, né. Então, a base funciona parecida com isso daqui, aqui você tem os elementos básicos da base e a partir deles você gera um conceito, né. É um conceito que gera, um espaço, está gerando um espaço, né. Então, são elementos fundamentais, geradores notadamente do conceito, né. A base, a base, a base...no sentido até etimológico de base. O que é base, é o início, né, é o ponto de partida...

E: E quando você conversava com os alunos, para introduzir, para começar a definição, em que ponto você acha que você começava a definição? Em que ponto da álgebra linear?
Freire: Eu começava realmente com a posição, começava com a geometria.

E: Com geometria?
Freire: Geometria. Começava na reta, pegava uma unidade...como você localiza um objeto na reta, certo? Como você localiza um objeto no espaço, né? Aí eu pegava as duas retas, mexia um pouquinho uma das duas retas e ao invés de colocar na ortogonal,diria ...mudando um pouquinho aqui o ângulo, não é a mesma coisa, né. Colocava um mapa cartográfico, coisa desse tipo, um ponto na esfera, aqueles mapas de cartografia, que ..., aqueles mapas esquisitos, esferas terrestres, geodésicas, coordenadas, por exemplo, latitude tal, longitude tal, percebendo realmente que precisava de dois números para posicionar, coisas assim. São os elementos fundamentais de localização, né.

E: E você, hã...por exemplo, quando você ia tratar da definição formal mesmo, né...?
Freire: De base?

E: De base. Você conversava com eles...?
Freire: O problema da independência linear? Ah, sem dúvida. Tinha que ser feito isso de uma maneira...primeiro, maneira intuitiva...você não pode falar p'rá ele assim...não adianta você pegar um vetor que um é múltiplo do outro, não um múltiplo do outro, por exemplo, no caso da reta, você pega, ao invés de um metro , pega dois metros, qual é a diferença entre um e o outro? Você não está saindo do espaço, você fica no espaço do mesmo jeito, estático. Um desse mais um desse, continua naquele segmento lá, você não sai fora. Se você quiser sair fora, vai ter que sair fora desse número, vai ter que sair fora, não pode ser mais um número múltiplo do outro, vai ter que sair fora. Isso você faz p'rá dois, depois você pula p'rá três, aí você pula p'ra n, né. É a mesma coisa, essa dependência linear quando você faz o núcleo implica, implica um número diferente de zero...isso, isso é um pouco abstrato p'rá eles. Mostra que isso daqui é uma base, mostra que é linearmente independente. Eles ainda...naquela parte inicial, tanto no primeiro ano, como no segundo ano, esse negócio de provar que tem um elemento diferente de zero, todos são zero, não é palpável p'rá eles. Não é verdade?

E: Também acho.
Freire: Não é palpável, não é palpável.

E: A definição de independência linear realmente...e você, trabalhava com... você falou, né...principalmente IR^n, tem que trabalhar num primeiro curso, um pouquinho das funções contínuas, né...?
Freire: As matrizes...

E: Matrizes. Polinômios, também, não?
Freire: Polinômios, polinômios sim. Este, por exemplo, espaço de curvas que estou fazendo é com polinômios.

E: Mas, na época você ...?
Freire: Mexia, mexia com polinômios, lá no Lipschutz...Tem bastante coisa lá. Lipschutz e no livro do Higyno, no Caliolli.Acho que o livro de Callioli e de Higyno com o Lipschutz, tem muita semelhança, pode observar, até o estilo de alguns resolvidos, outros p'rá resolver, né. Mesmo estilo da Coleção Schaw, né.

E: E assim...
Freire: Este livro está sendo usado ainda hoje?

E: Bastante. Bastante, porque a...
Freire: Fico contente.

E: A...Do Roberto Costa, né?
Freire: Isso.

E: Porque , a Claudinha fez uma dissertação e analisou livros didáticos...
Freire: Quem é Claudinha?

E: É lá da Puc também. E os mais utilizados são os do Roberto Costa, ainda do Hoffmann Kunze, ainda usam. E o Boldrini. São os três mais usados.
Freire: Boldrini, não gosto muito. Este é mais ou menos o mesmo estilo, o do Boldrini, mas não gosto do Boldrini. Isso na área de álgebra linear, né?

E: É. Área de álgebra linear. E...
Freire: Existem alguns livros que eu considero bacanas na área de álgebra linear...minha biblioteca está toda uma bagunça. Não sei nem se vou conseguir montar...Clássicos...Stoll...Ouviu falar do Stoll? Não se usa mais livro americano, em inglês na graduação. Não se usa mais, não se usa mais. Então não precisa fazer nem menção. Mas ainda tem edições novas do Hoffmann Dunze?

E: Não sei te dizer qual é a edição.
Freire: Eu tenho a edição antiga...

E: A minha é antiga. A minha do Roberto Costa é velhíssima. Bom, você já falou um pouco dos exemplos, assim, mas exemplos que você trabalhava...você tinha assim, exemplos que você trabalhava antes da definição ou depois da definição, além desses aí que você lembra?
Freire: Isso eu acho fundamental, sabe. Eu só acho triste, porque dentro da matemática me encaixo dentro da álgebra. Essa é a minha paixão, né. E...eu tenho como baba o Hygino, o Hygino foi meu mestre. Então, em princípio eu devia ter uma cultura de Hygino, mas como todo bom filhote, é um rebelde, sabe. Como bom filhote...eu adoro o Hygino, ta certo, mas eu acho que tem um grande pecado, o comportamento do Hygino, que vem novamente...O Hygino, tem a origem no Jacy Monteiro e o Jacy Monteiro tem a origem nos Bourbakis, certo. Então, eu tive um curso Bourbakiano...como estudante eu tive um curso Bourbakiano, se você pega o livro do Bourbaki, eu tive o livro do Bourbaki, então eu dei aquilo lá, normalmente, não me acanho, nem nada, fico à vontade, né. Mas, o problema é que nós temos outra geração na nossa mão. Eu acho que o Bourbaki peca extamente pela... superioridade da escrita. O cara que está escrevendo é superior, é um extraterrestre que veio aqui do céu, do céu veio p'rá cá, dizer como as coisas formam, como as coisas devem ser, como as coisas devem ser, e não como as coisas foram pensadas para ser, sabe. Então, o Bourbaki, o Hygino é assim: definição, exemplos e teoremas. Esse é o esquema a seguir: definição, exemplos e teoremas. Quem sugeriu essa definição, ninguém entende...parece que alguém nasceu, alguém...o Espírito Santo...define...sabe-se que tem que definir, tá bom, sabe-se definir, mas como define? Toda essa luta, toda essa colocação, então a molecada logo de início ficam loucos da vida. Eu, por exemplo, eu como matemático, se eu quero escrever para uma revista, ou se eu quero escrever um artigo ou, para matemáticos, eu faço assim também. Escrevo tranqüilo, porque é muito mais sereno, muito mais...mais seguro você ter esse comportamento. Imagina, muito mais seguro. Agora, você ter um comportamento coloquial, precisa muita bagagem, desculpe da expressão. É muito mais difícil, escrever

na forma coloquial do que você escrever na forma formal. É muito fácil escrever na forma formal, mas na forma coloquial, você amarrar as coisas, a forma histórica, de necessidade do ser humano a respeito...as provocações internas, os pensamentos até você chegar naquela definição, naquele teorema. O teorema tem que vir de umas perguntas, não pode surgir assim de uma...tem que vir de umas perguntas, teorema, de uma provocação, não pode surgir, pronto, teorema ou propriedade, que coisa propriedade, porque que isso aqui é uma propriedade, que interesse tem essa propriedade, porque que...não é? Compreende o que eu quero dizer?

E: Compreendi. E já que você falou em provocação. Então, vamos dizer assim, eu sei que faz tempo, mas você lembra do tipo de provocação que você fazia p'ra chegar na definição de base, nessas propriedades...?
Freire: Ah, sim. Eu aplicava mesmo aquele negócio de satélite, de comunicações entre...de naves espaciais, brincava com essas coisas. Muito lindo isso daí...muito lindo.

E: Pode falar um pouco mais?
Freire: Eu me lembro muito bem...eu me lembro muito bem desse negócio aí, eu falava que um sujeito estava num satélite, o sujeito estava lá em cima, estava vendo um objeto na posição 1, 2 e 3, sabe. Eu falava, 1, 2 e 3, lá embaixo eu olhava 1, 2 ,3, não tinha nada. Todo mundo falava, tá na cara, porque você está olhando do outro lado, do outro lado...Tá olhando do outro lado, eles percebem que 1,2,3 no céu é diferente de 1,2,3 na Terra, né. Tem que ter um referencial, então essa era uma brincadeira que eu fazia, né. Esse é um dos exemplos... esse do espaço, da base e do espaço, é típica. Agora, nós temos o problema de, normalmente, de...Quer ver uma outra coisa interessante de mudança de base? Suponhamos que você tenha aqui o desenvolvimento da série de Taylor, de uma função, ta certo. Na hora que você faz isso daqui vai depender do ponto onde você desenvolve a função, você vai ter, vai ter bases diferentes porque é $(x – a)^n$, né. Não é isso. É f'(a)...f'(a) $(x – a)^n$, ta certo. Agora, dependendo do ponto que você escolhe para fazer a expansão da função, você tem uma expansão diferente e, a expansão quem é, quem é a base? É $(x – a)^n$, essa que é a base, compreendeu? Então, a mesma função expandida de uma maneira diferente, dependendo do local onde você está pegando, é a mesma função que você tinha, né. E existem um montão de outras coisas mais, né. Por exemplo, essa das funções, dos gráficos que você faz, né. Essa já é um pouco mais complicada, né. É um pouco mais complicada porque...é possível que na hora que você muda as funções de base, você muda também o espaço, sabe, que é traiçoeiro. É uma curva...você quer fazer...um S, ta certo. Faz um S aqui, um S é uma típica do terceiro grau, né. Não, quarto grau...um S, então...Bom, enfim, dependendo da curva do terceiro grau que você pega é capaz de você não gerar exatamente essa curva. Então, já é complicado, né. Já é complicado...É um espaço diferente, mas ...é a de Taylor, a série de Taylor é tipica, a função... conforme o ponto que você escolhe, você tem uma base diferente de expansão.

E: Você acha que...
Freire: Mas aí eles deveriam ter chegado já na... chegaram lá; e aí estar no segundo ano, certo?

E: Eu ia perguntar isso.
Freire: Para dar aqueles exemplos de funções contínuas, espaço de funções, tem que estar no segundo ano, não pode estar no primeiro, para chegar nesse ponto. Mas podia dar espaço de polinômios. Eu acho que aí caberia, mas ninguém bota isso no primeiro ano, espaço, por exemplo, espaço de curvas, poderia colocar. Espaço de curvas dá p'rá fazer...não dá não.

E: Primeiro ano?
Freire: Não dá não. Não dá....precisa de derivada...

E: Tem que fazer no segundo, né?
Freire: Tem que ser no segundo ano. Bom, para esse exemplo tem que estar no segundo ano. Tem que saber derivar.

E: E assim, bom, você já me falou...
Freire: É, espaço de funções tem que estar no segundo ano, não pode estar no primeiro...

E: No primeiro, estão muito crus... **(Houve uma pausa)**

E: Retomando agora. Você estava falando dos exemplos mais utilizados que seriam melhores para trabalhar no segundo ano, né? Agora, eu queria perguntar para você assim: você também já falou algumas analogias, alguma coisa que você fazia...é...p'rá introduzir a definição de base; tinha alguma outra analogia que você utilizava, outra coisa que não tem a ver diretamente com... a matemática...? Eu me lembro que uma vez na faculdade, você me falou a história de um prédio...que você...quando você falava em base...
Freire: Não me lembro mais...não me lembro mesmo...

E: Alguma coisa que você me falou...tinha alguma coisa, não tinha?
Freire: Desse negócio do prédio? Não me lembro, viu. Eu não sei. Vai depender daquele estalo inicial, às vezes, o próprio aluno dá aquele estalo, a gente associa as coisas, né?

E: E caminha, né?
Freire: E caminha...Mas, realmente...eu não me lembro muito bem dessas motivações iniciais , né. Não me recordo muito bem. Mas, é...eu acho que a parte fundamental, nesse negócio todo da base mesmo, é incutir neles os elementos primitivos, a partir dos quais nós construímos o conceito, o espaço, né. Isso que é fundamental, né. E como que constrói as nossas coisas? A partir de moléculas? De átomos? É A partir desses elementos que aí sim, são os nossos tijolinhos, que a partir dos quais nós construímos todo o resto, né. Agora, sobre a independência linear, é outra conversa. Tem que conduzir a conversa num outro espírito, não pode pegar tijolos todos do mesmo tamanho, que senão você não sai dessa dimensão, né. Não pode colocar tijolos sempre na mesma direção. Se você coloca tijolos na mesma...você só faz uma reta. Se você quiser, quiser uma parede, vai ter que colocar um em cima do outro. Então, além de você fazer um ao lado do outro, você tem que colocar também um em cima do outro, senão você não vai fazer uma parede, você vai fazer apenas uma linha, né, uma fileira de tijolinhos. Se você quiser fazer uma parede, você vai ter que colocar um em cima do outro, porque senão não faz. Aí na hora que você faz um em cima do outro, você faz uma dimensão diferente daquela que você tinha, que não dá p'rá ser produzida, por mais que você faça o que você está fazendo, você jamais vai conseguir produzir essa outra dimensão. Não é verdade? Não, não quero convencer você...è claro que eu estou querendo convencer...eu estou querendo falar com o aluno...pensando no que o aluno...

E:Imagina...Mais alguma coisa que você lembre?
Freire: Não, não lembro direito, não. Será que é isso daí, do edifício que você está falando?

E: Não lembro...foi uma vez que conversamos na sala dos professores, você estava falando...agora, não lembro direito...você estava contando e era sobre base. Era sobre base, agora, também, não lembro direito.

Freire: se for o caso, você me deixa seu e-mail e se eu lembrar eu passo um e-mail para você de alguns exemplos.

E: Ah, ta. Inclusive se você tiver algum material, alguma coisa assim daquela época, que você lembre...porque, inclusive, esqueci de falar isso, pode ser que eu precise conversar com você de novo.
Freire: Ah, tudo bem.

E: Porque, dependendo do que eu for analisar na hora que eu ouvir, você viu...pode ser que eu perca alguma coisa...por e-mail...
Freire: Tá, não tem problema não.

E: Bom, aplicações, você também já falou um pouco, né. Gostaria de falar mais um pouquinho...?
Freire: Eu acho que na parte de engenharia, sem álgebra linear não se faz nada e sem base, né? É base, mesmo, que é a história toda, né?

E: Você acha que dá para conversar com os alunos quando a gente dá um primeiro curso, sobre futuras aplicações? Como é, você costumava conversar?
Freire: Não, não. Aí é que está o problema. Quer dizer com que os alunos estamos trabalhando? Se, estamos trabalhando com alunos da engenharia, pode falar que eles acreditam, põem fé em você. Se você trabalhar com a turma da matemática, por exemplo, que cuja vocação, por exemplo é, vocação ...pessoal dá aula para o primeiro grau e segundo grau, eles já partem do pressuposto que aquela disciplina que você está dando não tem nada com eles, porque a aula que eles vão dar é diferente daquilo que eles estão vendo na sala de aula, como aluno. Encontra uma certa resistência, são raras as ocasiões que você encontra uma pessoa que mistura a camisa e está gostando da matemática. Essa última turma que nós pegamos achei que era desse tipo...gostei demais deles...

E: É, Xavier e ...
Freire: Aquela equipe lá foi sensacional, gostei. De todos eles, gostei. Agora é raro você encontrar uma turma, num primeiro ano, particularmente que tem os mais diversos acidentes, lá dentro, né...são acidentes. Eles estão lá porque não conseguiram lugares em outros lugares e...não sei. Lamentavelmente, é isso que está acontecendo. Mas enfim, se você não pegar...é aquela história que eu fiz aquela comparação de ciências da computação e engenharia da computação, né. Então, se você vai pegar aluno da engenharia, pode falar à vontade, que eles agüentam o baque, agüentam o baque mesmo. E, se não agüentar, porque aos poucos ele vai perceber...ele vai mal, não só em álgebra linear, mas vai mal em cálculo também, provavelmente. Outras matérias ele está indo mal, eu acho. Agora, matemática, não. Na matemática, tem que ir leve, mesmo. Tem que ir leve, porque são mais fraquinhos, mesmo, no comecinho, não? Eu acho, são mais fraquinhos. São mais fraquinhos e são mais preconceituosos, né. Eu estou falando no curso inicial, que nem aconteceu nas ciências da computação. Eles são mais fraquinhos e mais preconceituosos. Preconceituoso, não no sentido maldoso, né, ta certo. É que eles fazem uma pré-imagem do que eles querem. Não, no sentido mal, não tem nada a ver. Eu estou falando que eles já tem um conceito do que deveria ser o curso deles. Eles levam um choque quando...tanto o aluno da matemática, como o das ciências da computação.

E: Aproveitando que você está trabalhando agora com as aplicações mesmo, com a álgebra linear de uma outra maneira, se você fosse dar um curso, agora, de álgebra linear, você pode pensar na engenharia, ou onde você achar melhor, na engenharia da computação, ou nas ciências da computação, ou até na própria matemática. Como é que

você...agora a gente tem o computador, uma série de coisas...como é que você pensaria em abordar a definição de base, ou até as aplicações que você está falando, se fosse no caso da engenharia? Você faria antes, depois, como é que você pensaria...?
Freire: Eu acho o seguinte...vamos voltar outra vez entre os dois alunos que temos à frente. Se nós temos o aluno da engenharia na frente, quer dizer, o sujeito que já está pré-disposto a ouvir, não é hostil, não é hostil. Não vamos dizer que é excelente aluno, pelo menos ele não é hostil e ele está pré-disposto a ouvir. Então, eu não me empenharia muito, não teria muita preocupação nesse negócio de base, não daria tanto atenção, porque a medida que a coisa ia se desenvolvendo, essa base tem que ser inerente, assim como a gente não pode agigantar molécula, quando a gente fala que o corpo é formado de moléculas. A gente não pode ficar só na molécula, tem que falar no corpo, né. A molécula é a molécula, e a molécula é um componente do corpo. É a mesma coisa no espaço. A gente não pode ficar só na base, ta certo. Então, é o objetivo fundamental, claro que é o objeto fundamental, mas existem coisas as quais a gente constrói à partir da base. Então, a parede p'rá mim é mais importante do que a base. Então, eu olho na parede...o meu propósito de olhar para construir a parede, né. Eu sei que tenho que fazer com as duas dimensões para construir a parede. Isso é importante de saber, mas não é ...não é agigantar. Tem que colocar na condição correta dela. A base é base para gerar o espaço, agora o espaço...é do nosso interesse de descobrir todas as propriedades de espaço, o máximo possível, todas as características do espaço o qual nós construímos, né. Certo?

E: E da época que você trabalhava, também, você utilizava livro didático? como você utilizava livro didático? Dava como referência...?
Freire: Bom, tinha dois livros que eu usava. Um era o Lipschutz e o outro era do hygino, Caliolli, Alésio e Roberto. Eram quatro ao todo, não?

E: Alésio, não.
Freire: O Alésio, também.

E: Não. Só se tivesse alguma edição...
Freire: O Alésio não está aí não?

E: Não. Era o Hygino...
Freire: Caliolli e o Roberto Costa. Hum... Usava esses dois livros, então. Vamos lá ver. Se nós temos o aluno da engenharia na frente, quer dizer, o sujeito que já está pré-disposto a ouvir, não é hostil, não é hostil. Não vamos dizer que é excelente aluno, pelo menos ele não é hostil e ele está pré-disposto a ouvir. Então, eu não me empenharia muito, não teria muita preocupação nesse negócio de base, não daria tanto atenção, porque a medida que a coisa ia se desenvolvendo, essa base tem que ser inerente, assim como a gente não pode agigantar molécula, quando a gente fala que o corpo é formado de moléculas. A gente não pode ficar só na molécula, tem que falar no corpo, né. A molécula é a molécula, e a molécula é um componente do corpo. É a mesma coisa no espaço. A gente não pode ficar só na base, ta certo. Então, é o objetivo fundamental, claro que é o objeto fundamental, mas existem coisas as quais a gente constrói à partir da base. Então, a parede p'rá mim é mais importante do que a base. Então, eu olho na parede...o meu propósito de olhar para construir a parede, né. Eu sei que tenho que fazer com as duas dimensões para construir a parede. Isso é importante de saber, mas não é ...não é agigantar. Tem que colocar na condição correta dela. A base é base para gerar o espaço, agora o espaço...é do nosso interesse de descobrir todas as propriedades de espaço, o máximo possível, todas as características do espaço o qual nós construímos, né. Certo?

E: Então, na instituição 1 era indicado, todo mundo tinha que ter? Na instituição 2?
Freire: Na instituição 2, também tinha. Todo o mundo carregava o livro sim, mas tinha mais liberdade.

E: Bom, acho que p'rá finalizar, a existência de dificuldades dos alunos com a noção de base? Você acha que...?
Freire: Eu acho que não é tanto a base, essa dificuldade, não. Eu acho mais é a noção de independência linear. Eu acho que é essa a parte mais complicada, porque, lamentavelmente, aquela condição de base, implica zero, implica diferente de zero, ela é..ela não é intuitiva, não...combinação linear, né. Aprender independência com aquela combinação linear. P'rá nós é fácil, é uma coisa evidente, não tenho dúvida alguma, não. Nada, nada, nada, Não tenho nenhuma dúvida, mas para eles não, é complicado esse pedaço da dependência linear.

E: Então, você acha que pega mais na parte de dependência linear...?
Freire: Da dependência linear, porque na dependência linear...porque quando a gente faz sub-espaço gerado, normalmente tem o problema da base. eles não entendem o que é sub-espaço gerado enquanto eles não tiverem a noção de base correta, né. Porque...como é que é sub-espaço de dimensão 2, se está em IR^3? Como é que é dimensão 2, se está dentro do IR^3? É problemático, né?

E: Você vê assim, conforme você vai caminhando nas noções posteriores, você é obrigado a retomar base...?
Freire: Não, não, não, nunca tive.

E: A dificuldade...
Freire: Nunca tive... na computação gráfica, esse negócio de funções básicas lá... ih, eles aceitaram com serenidade. Não tem problema nenhum. Aceitaram com serenidade. Porque o problema nosso era fazer as curvas, né. As curvas, nosso problema. Fazíamos até p'rá dentro do Excel...

E: Mas dentro do próprio curso de álgebra linear, no primeiro curso, quando você depois trabalha com transformações, que você volta a utilizar, você acha que é tranqüilo para eles a utilização da base?
Freire: Não, não é tranqüilo. Não, é que nessa parte de sub-espaço gerado, dimensão do espaço gerado...aquela fórmula, por exemplo, a dimensão da imagem...aquelas coisas são complicadas, principalmente, quando você tira a dimensão da intersecção...meu Deus do céu, aquilo lá p'rá eles é...é do núcleo, né? Ah...

E: Mas você acha que tem a ver mais com a base, com a definição de base que não ficou, ou na independência...?
Freire: É a noção da independência linear...Tem a ver com a independência linear...é com a independência linear...a dificuldade está na independência linear.

E: E, você fazia alguma coisa, ou caminhava com eles...?
Freire: Não, não. Ia para a frente...Mas foi bom chamar a atenção nesse parte. A parte fundamental é independência linear. A base é independência...Quando se trabalha com transformações, para saber as dimensões...aí percebe-se, claramente, né, o choque que vai dar p'rá eles.

E: Acaba pegando lá na frente, né?
Freire: É.

E: Tá bom, professor. Eu acho assim, estou super satisfeita e eu espero que o gravador tenha cooperado bastante e mais uma vez, obrigado.

Transcrição: professor Gonçalves.

Iniciei a entrevista explicando os objetivos da mesma e garantindo o anonimato do professor e da Instituição.
Entrevistador (E); entrevistado (Gonçalves).
Duração da entrevista: 50 minutos.
Instituição: pública (atualmente) Trabalhou em outras duas privadas.

E: Primeira coisa: você poderia falar rapidamente sobre a sua formação acadêmica?
Gonçalves: Eu fiz a graduação lá no Oswaldo Cruz, em Matemática; depois fiz mestrado, doutorado e a livre docência na USP; fora isso fiz pós-doutorado na Espanha. Já fui para a Espanha três vezes. No total, dá mais de dois anos e meio, na Espanha. Tudo na área de álgebra.

E: Tudo na área de álgebra...Então o tipo de pesquisa que você fez foi sempre em álgebra?
Gonçalves: Em álgebra. Sempre na área de álgebra. Tive vários trabalhos publicados em revistas internacionais.

E: E o tempo de docência?
Gonçalves: Foi em 77...77 até hoje dá...?

E: 3...23... dá 26 anos.
Gonçalves: É... 26 anos. Faz tempo, né?

E: E assim, você é capaz de lembrar o tempo que você trabalhou especificamente com álgebra linear, não?
Gonçalves: Sempre estou trabalhando com álgebra linear, sempre. Só que aqui, na instituição 1, a álgebra linear que eu dou é mais para o curso de engenharia, é mais direcionado aos alunos da engenharia.

E: Licenciatura, você deu também, né?
Gonçalves: Já dei também.

E: Você trabalha mais com futuros engenheiros?
Gonçalves: Com futuros engenheiros. É uma coisa mais aplicada, né. Eles tem a teoria, mas não cobra tanto assim a teoria. Agora, na licenciatura aqui já a gente cobra um pouco mais a teoria. O bacharelado, mais ainda.

E: Aqui você trabalha com o bacharelado também?
Gonçalves: Também.

E: Licenciatura, bacharelado e a engenharia?
Gonçalves: ...e a engenharia, mais.

E: A minha dissertação, ela trata da noção de base de um espaço vetorial. Então, eu queria assim, que você falasse um pouquinho como você, nesses anos, você... fez a abordagem da noção de base. Quer dizer, como se fosse uma aula. Como você costuma abordar a noção de base?
Gonçalves: É...a noção de base, eu coloco para os alunos, exatamente o fato que muitas noções que eu expressaria com o vetor genérico seriam retratados...então, fica

mais fácil, principalmente quando se trabalha com espaços vetoriais de dimensão finita. Então, por exemplo, eu tenho uma transformação linear, um exemplo, se você quiser determinar qual transformação linear e não soubesse a transformação...agora, se você pega uma base, você tem todas as informações que você quer em função da base. No caso da dimensão finita então, fica muito mais fácil p'rá você determinar propriedades dessa transformação linear...informações essas em cima de uma base.

E: Você informa isso para os alunos antes de dar a definição de base?
Gonçalves: Antes de dar a definição de base. É importante, porque você está trabalhando com espaços vetoriais de dimensão finita, você está trabalhando com um número finito de vetores e... a parte de base também é importante, como eu falo para os alunos: quando você trabalha com espaços vetoriais sobre os reais, né...então, a maioria dos resultados são isomorfos ao IR^n, todos, né, de dimensão n sobre os reais são isomorfos ao IR^n. Então fica mais fácil você trabalhar com espaços...exatamente sabendo a condição da dimensão. Eu dou um enfoque p'rá eles justamente sobre isso. E aquela história de que todo vetor é combinação linear de uma base...o vetor genérico, se você souber o comportamento dele numa base, fica muito mais fácil para você estudar. Exatamente, por causa disso, você tem as relações de espaço de dimensão finIta, quando você fala de dimensão, então na realidade você trabalha com coordenadas, você trabalha com coordenadas. Exatamente por causa... que você tem uma base. Isso pode simplificar bastante.

E: E...quais as atividades que você propõe, exercícios, quer dizer...?
Gonçalves: O que a gente tem feito aqui com os alunos, principalmente na licenciatura. Na engenharia, não dá para fazer isso, atualmente, porque na engenharia os alunos entram hoje no primeiro ano para...sem a carreira definida. Eles entram para fazer engenharia. Depois, no final do ano que eles vão ver que a profissão que eles fizeram no vestibular no início do ano tem a ver com a carreira que eles querem. Então, é um curso corrido, muito uniforme. Tem muitas turmas, então se tem que dar um curso bastante uniforme. Então, existe um sistema de avaliação, mais ou menos padrão, em que você tenta avaliar o mais imparcial possível. No caso dos alunos da engenharia. Então você não tem muita autonomia, né. No caso da licenciatura, eu pensei, além de dar exercícios para os alunos fazer um TG, trabalho em grupo desenvolvido na sala de aula. Reunidos em grupos, no máximo de 5 alunos, propor um trabalho, baseado em alguma... é desenvolvimento teórico e eles fazem entre si... tem que discutir entre eles esse desenvolvimento, com consulta também a livros, ao professor. Depois eu corrijo e devolvo para eles esse trabalho. Esses trabalhos em grupo têm sortido bons efeitos.

E: E p'rá parte de base você trabalha assim também, aqui na licenciatura?Quer dizer, você trabalha em grupo? Você entra com esse tipo de trabalho, antes ou depois da definição de base?
Gonçalves: É, entra antes e entra depois também. Só que a parte de base tem uma questão que é complicada para eles entenderem, aquela história de linearmente independente e linearmente dependente. Isso daí, não sei porque, todos os anos os alunos têm dificuldades de entender isso daí. Então a gente trabalha com ...com uma aula normal, tentando explicar para os alunos. Depois que entra com o trabalho em grupo para eles discutirem eventualmente algumas questões, né.

E: Então você faz um trabalho em grupo, vamos ver se eu entendi. Você faz um trabalho em grupo...depois que você fala em li e ld, você faz um trabalho em grupo?
Gonçalves: Exatamente. Também a gente faz...tem a questão das soluções de sistemas lineares, homogêneos, não homogêneos, que também trabalha com isso. Por que a parte de base de um espaço vetorial de dimensão finita, ou li ou ld, está vinculado a isso, à

resolução de sistemas. Tem uma única solução, tem mais do que uma solução, sistemas homogêneos, lineares homogêneos...E depois trabalhar com eles com isso daí.

E: E depois que você faz esses trabalhos, vamos dizer...vamos tentar reconstruir um pouquinho: você trabalha com li ou ld, faz um trabalho em grupo, seria mais ou menos isso?
Gonçalves: Isso.

E: Aí, em cima de sistemas...?
Gonçalves: Não, não. O trabalho, não. Aí, não.

E: Seria...? Dá para você falar mais um pouquinho como seriam esses trabalhos que você faz?
Gonçalves: A gente propõe algumas questões, ou mesmo práticas, para eles verificarem se é li ou ld e depois faz umas questões teóricas para eles desenvolverem, mesmo depois as que não tenham sido dadas em sala de aula, para que desenvolvam completamente no trabalho em grupo.

E: Depois é que você faz, vamos dizer assim, mais p'rá frente que você faz a abordagem de base?
Gonçalves: Isso, exatamente. Depois faço a abordagem de base num desenvolvimento normal. Naquelas mais ... complicadas recai exatamente a questão do li ou ld. Então vão ter mais dificuldade de fixar esse conceito.

E: Vamos falar assim, quando você entra com a base, com a definição de base, você já tem resolvido a dificuldade de li ou ld, então?
Gonçalves: Sim.

E: Você faz alguma coisa, ou um outro trabalho que...exercício... como é que você...?
Gonçalves: Depois, sim, depois a gente continua...depois que tem a base, continua. Verificar o que acontece com determinado conjunto, se é li ou ld, a partir do momento que você tem uma base. Aquela história do escalonamento, acaba voltando para isso. Escalonamento, determinante, isso também, mas você já precisa de coordenadas...

E: E como é que você dá a definição de base, como é que você costuma dar? Quer dizer, tem várias maneiras de você introduzir...como é que você introduz? Porque você falou antes em li, ld, espaço gerado também...?Como é que você...vamos dizer, se a sua aula sobre base fosse hoje, como é que você daria essa definição?
Gonçalves: É a definição clássica de base, que é um conjunto li e que gera o espaço. Isso que é uma base de um espaço. Quer dizer, inicialmente tem aquela história de que a base, na realidade, é o menor conjunto, menor entre aspas né, que gera o espaço vetorial. O menor conjunto que gera o espaço vetorial.

E: E assim, quando você dá a definição de base, ou até, vamos colocar antes, é lógico, a definição de base, como você falou, ela não começa quando vai falar de base, você deixou bem claro isso**.** Você faz alguma analogia com alguma coisa que facilite o entendimento da definição, ou você trabalha direto mesmo com a parte formal? Uma analogia com alguma coisa que você faça para ...?
Gonçalves: Talvez com o R^n, né. O R^2, o R^3, tentando mostrar que...ou então pegando a base canônica, né.

E: Eles têm G.A. antes?
Gonçalves: Têm. O curso é Vetores e Geometria. Neste curso a gente já diz que os espaços vetoriais, a álgebra linear é uma generalização exatamente do curso que eles

tiveram de vetores, né. Vetores, exatamente eles trabalham no R^3, eles falam no V^3, então a gente faz uma generalização exatamente dessas idéias dos vetores. E nos vetores, a gente fala de base, veja bem, eles já viram tudo isso daí.

E: Você retoma? Você faz a ligação?
Gonçalves: Então, a gente faz a ligação com o V^3. Como a gente faz: dá exemplos e a gente diz que aquilo que eles viram passam a ser um exemplo agora do que nós estamos fazendo aqui, os espaços vetoriais. Passamos um semestre inteiro falando sobre vetores e geometria.

E: E depois que tem álgebra linear?
Gonçalves: Depois que tem álgebra linear, no segundo semestre. Agora, na engenharia...depende do curso. No curso de licenciatura, eles têm um semestre só. No curso de bacharelado, não. Agora, na engenharia, o que acontece? Chama álgebra linear para a engenharia, tem muito...primeiro semestre e segundo semestre. Então, o que acontece? Eles mudaram, a engenharia mudou esse ano. Antes era Vetores e geometria e álgebra linear. Mas era...ver uma parte da álgebra linear em Vetores e geometria...eles mudaram, fizeram álgebra linear. Aí você começa com espaços vetoriais, define espaços vetoriais, fala no V^3, os vetores que você chama de V^3, aí faz a construção do V^3; aí trabalha com eles uma parte de geometria analítica, mesmo, né, com enfoque vetorial e depois que volta para a álgebra linear, mesmo.

E: Aí generaliza mais?
Gonçalves: Aí generaliza mais, mas o que a engenharia quis, ela quis ganhar tempo, no sentido de você falar base, dimensão. Então você fala tudo isso, sem falar nos vetores e depois você estende...Aí, faz o primeiro semestre todo trabalhando com os vetores. Aí, você não retoma, falando assim, no segundo semestre, aí é a álgebra linear mesmo. Mas todos esses conceitos de base e tudo, já foram visto, né, antes de falar na parte de geometria analítica. É geometria analítica.

E: E os exemplos que você mais trabalha, que você...?
Gonçalves: Os exemplos que a gente mais trabalha, é exatamente no enfoque, no ensino dos vetores, seriam os próprios vetores. Depois trabalha com IR^n, de um modo geral, IR^2, IR^3, IR^4; depois com as matrizes, também com o espaço de funções e espaço de polinômios. Esses são os exemplos que eu mais trabalho nos cursos.

E: Em termos de base você trabalha mais com a canônica ou...?
Gonçalves: Não, não. No caso do IR^n... é claro que uma base canônica facilita muito as contas, né. Mas a gente não trabalha mais só com as bases canônicas porque senão isso pode dar a entender que todas as bases tem um comportamento como a base canônica. Então, trabalhar com bases de um modo geral. Bases é...com poucas bases que não são as canônicas. Por exemplo, quando você pega uma matriz de uma transformação linear, então você pega, por exemplo, no IR^n, quando você pega a base canônica e aí você vai colocar uma certa aplicação, só base canônica, no espaço de partida e no espaço de chegada, duas bases canônica. Então, o que acontece: quando você monta a matriz, é só pegar os coeficientes e colocar em coluna e fazer a multiplicação. Quando é a base canônica não é assim que funciona, quando não é a base canônica, né. Então, é bom eles saberem que a coisa fica mais complicada quando você não está utilizando a base canônica. Senão eles vão pensar que sempre a regra é essa: Você pega uma base, escreve como combinação, quer dizer, uma base não, você pega um vetor, escreve como combinação linear da base dada, né, e pega os coeficientes e coloca em forma de coluna para fazer a multiplicação. Quando, quando, não é a base canônica não tem que fazer esse procedimento. É claro, o que os alunos fazem confusão é o seguinte: pegar o vetor, pega as coordenadas, quando não é base canônica e escreve em forma de coluna e faz

a multiplicação. Então é bom frisar isso daí, né, e mesmo assim os alunos acabam fazendo muita confusão. Eles pensam que a regra se aplica sempre: pega o vetor, pega as coordenadas, põe em forma de colunas e faz a multiplicação. Mas não é assim, quando não é a base canônica.

E: Então, daí você dá exercícios diversos para...?
Gonçalves: Isso, exatamente.

E: E em termos de aplicação...?
Gonçalves: Então, uma das aplicações que eu faço com eles, mas não é...mas eu não avanço muito, né. Mas é só uma motivação, seria a base de teoria dos códigos com detecção de erros. Mas, acho importante isso daí porque tem grandes aplicações de transmissão de dados por satélites...transmissão de informações via computador, transmissão de e-mails...Então é uma aplicação que eu dou, mas eu não estendo muito porque é um curso todo, né.

E: E você dá tanto para a licenciatura como para...?
Gonçalves: Isso. Na licenciatura é mais a título de informação, mas eu não dou com vários detalhes.

E: Isso você faz depois que você dá base, ou você...?
Gonçalves: Eu costumo falar depois que eu dou base. E... Só que aí no caso, por exemplo, nessa parte trabalha com Z_2, né, que é o corpo...a gente trabalha com os espaços vetoriais sobre um corpo com dois elementos, que é o binário, 0 e 1. Então eu tenho que dar uma introdução do que que é um corpo para eles entenderem. Nos cursos, na verdade, eu dou a definição, o resultado especificamente, eu dou a definição de espaços vetoriais sobre um corpo genérico. Apesar que, na maioria do curso eu trabalho sobre os reais. Então eles já estão informados sobre o que que é um corpo, né. E o Z_2, eles sabem o que que é o Z_2, porque eles fazem álgebra I. Então, álgebra I, quer dizer exatamente teoria dos números. Daí eu falo p'rá eles sobre esse tipo de aplicação. Mas, assim mais como...que é uma aplicação que está sendo usada hoje. É de computadores, contacto via satélites, transmissão de e-mails.

E: Como é que fica... porque eu não conheço, né... como é que fica a ligação com base? Dá para você explicar?
Gonçalves: Então, porque na verdade a base está vinculada assim: então você pega o espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo qualquer isomorfo, isso é importante, ao K^n. Ele está vinculado à base, aí exatamente à dimensão. Aí o que que é feito? Quando você pega um...um, no caso de...vai servir de informação, quando você precisa passar por satélites...vai passar, por exemplo, um e-mail, as coisas são codificadas de diversas maneiras. Então você codifica isso no C elevado a n, né. Quer dizer, você já sabe que a dimensão é n. Então você trabalha com coordenadas, com coordenadas, exatamente o que que é, são os coeficientes de quando você pega o vetor, né, em função da base. E aí o que você faz? Você pega esses dados, transmite, ... via uma transformação linear de vetores. Só que aí você agrega a essa transformação uma...por exemplo, você está em Z_m, você vai para Z_{m+n} e você faz uma operação com as n primeiras componentes. Isso tem um nome, agora, não me lembro qual é o nome desse, desse que você agrega. Exatamente para poder tentar determinar se houve erro na transmissão ou não. Isso tudo eu não falo, quer dizer, eu falo, mas eu não faço nada sobre isso, né. Existe um estudo que...você pode determinar erros, dependendo da quantidade de erros que você tem na transmissão. Isso é mais a título de ilustração, né.

E: É isso que você faz depois que você fala em base e antes de falar em transformação?
Gonçalves: Antes de falar em transformação. Antes de falar em transformação. Aqui eu já falo, já dou uma idéia do que é...tem uma transformação envolvida aí. Mas, isso a título só de ilustração para os alunos. Que tem um aplicação importante aí...que é determinar a teoria dos códigos. Eu acho que deveria ser dado até um curso sobre isso. Porque teoria dos códigos, além de ter uma aplicação grande, é um curso de matemática. Deveria ser feito isso daí, dado um curso...

E: Você acha que dentro do curso de matemática?
Gonçalves: Dentro do curso de matemática. Eu acho que poderia ser dado um curso, exatamente: teoria dos códigos com detecção de erros. Eu acho que poderia ser dado.

E: E livro didático...você indica algum ou você indica vários? Como é que você trabalha?
Gonçalves: Não, eu indico vários livros, mas eu acho importante para os alunos, principalmente da licenciatura terem um roteiro, né. Da última vez...porque fica mais fácil para eles, para eles estudarem, porque eles podem seguir um roteiro, né, do livro. E, da última vez que eu dei o curso eu usei aquele do Caliolli, Roberto Costa, no caso da licenciatura. No bacharelado a gente introduz mais,...um pouco mais fortes, né. Tem um livro do Flávio, também. Tem o livro do Lang...tem o livro do Baroninho também.

E: E quando você trabalha em grupo, eles pesquisam em livros ou só num livro...?
Gonçalves: Não, não. Podem trazer os livros que eles quiserem. Inclusive, eu estou seguindo o livro como um roteiro, às vezes, até fujo um pouco do livro, é mais para eles terem um roteiro do curso. Então eles sabem exatamente o que vai cair, o que não vai cair. Acho que é importante isso.

E: Quando eles estão trabalhando em grupo, como é que você...participa dos grupos...como é que você procura...porque assim, eu acho que está difícil atualmente conseguir fazer com que o aluno ande sozinho, né?
Gonçalves: Está bem difícil. Normalmente, nesses trabalhos em grupo que eu dou tem questões específicas né, mas tem questões, às vezes, de matérias que não foram dadas e a gente quer que eles desenvolvam essas matérias. Então a gente dá um roteiro para eles fazerem isso. E aí eles perguntam...então eu vou atendendo, grupo por grupo. Mas, acho que tem funcionado bem esses trabalhos em grupo.

E: Você acha que eles dão uma arrancada?
Gonçalves: Dão uma arrancada, exatamente. Acho que tem funcionado bem.

E: E assim, você já falou que acha que os alunos têm dificuldades mesmo com a noção de li...?
Gonçalves: Sim. Pressuposto, a parte que eles tem mais dificuldade é essa parte do li e ld. Não sei porque que...

E: De uma maneira geral desse todo, você acha que li e ld...Então você acha que a noção de base fica comprometida por causa dessa dificuldade?
Gonçalves: Não tem dúvida. Não tem dúvida.

E: E...como é que você vê a importância da álgebra linear para a formação de cada...no caso da engenharia, na licenciatura, no bacharelado, qual é a importância que você acha que tem a álgebra linear para a formação desses alunos?
Gonçalves: Dentro do curso ela tem uma importância grande porque ela é uma ferramenta que vai ser utilizada em várias...durante o curso todo. Mas...tem um aplicação que eu esqueci de falar que é a parte de equações diferenciais.

E: Você chega a fazer na licenciatura?
Gonçalves: Na licenciatura, só... um comecinho, não muito. Mas, na engenharia, por exemplo dei, quer dizer, faz parte do curso de álgebra linear uma introdução às equações diferenciais lineares, né.

E: Isso em que época?
Gonçalves: Não, você faz mais para o final do curso. Mas tem essa aplicação. Então, a gente mostra que a álgebra linear é uma ferramenta. Dentro do curso é uma ferramenta importante, eles vão ver isso daí durante o curso todo. Então, a gente dá esse... toque, da importância que a álgebra linear tem no curso, principalmente como ferramenta, né, para as outras disciplinas.

E: Então, você acha, voltando à minha pergunta da importância, você acha que ela é importante nesse sentido, como ferramenta?
Gonçalves: Isso. Nesse sentido como ferramenta, ela é importante.Não se tem dúvida.

E: E na engenharia, também?
Gonçalves: Na engenharia, também. Não se tem dúvida.

E: Eu sei que você já falou um pouco, mas assim, se você fosse destacar quais são os tópicos prioritários de álgebra linear, quais que você colocaria como...?
Gonçalves: Tem-se que falar em base e dimensão, espaços vetoriais, claro, a definição, sub-espaços vetoriais, é importante, a definição; transformações lineares e transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita, aí temos alguns resultados importantes, né, principalmente quando você tem espaços vetoriais de mesma dimensão, sobre um mesmo corpo eles são isomorfos. Tem muitos resultados, principalmente no caso de dimensões finitas que são importantes. Depois, transformações lineares sobre esses espaços e matriz de uma transformação linear. Esses são os tópicos que tem que ser feitos dentro da álgebra linear.

E: E na engenharia também?
Gonçalves: Na engenharia também. Todos esses tópicos são abordados dentro do curso todo. Só que esse curso é durante um ano, só que inclue depois geometria analítica, geometria analítica com enfoque vetorial. Geometria com enfoque vetorial.

E: Você também já falou um pouquinho, mas eu vou perguntar de novo, a relação da álgebra linear com outras disciplinas do curso, tanto lá na engenharia, como na licenciatura? Você falou em equações diferenciais... que mais dentro do curso que você acha que a álgebra linear se relaciona mais diretamente?
Gonçalves: Tem nessa parte de equações diferenciais...deixa eu pensar...o que que tem mais? Agora eu não lembro...

E: Bom...não tem tanta importância...
Gonçalves: Tem dentro da própria álgebra, né. Isso sem dúvida. Dentro de outros cursos de álgebra eles vão ver algumas definições que envolvem espaços vetoriais.

E: E... a necessidade de pré-requisitos para álgebra linear? Você acha que precisa de pré-requisitos?
Gonçalves: Eu acho que precisa. Pelo menos essa parte de vetores, né e geometria analítica, acho que... porque exatamente uma aplicação principal da álgebra linear é a parte de vetores ou então, teria que ser dada no próprio curso, ou alguma coisa por aí. Porque, por exemplo, nos cursos aqui, principalmente da licenciatura ou bacharelado, um pré-requisito é vetores e geometria, ou seja, geometria com enfoque vetorial. Então, esse é um pré-requisito que é exigido. Na engenharia não é exigido, porque o que acontece:

você faz isso no curso, no próprio curso.Então acho que é importante isso daí, principalmente como motivação p'rá álgebra linear, uma generalização exatamente disso daí. Acho que é importante isso daí. Ou, então se dar o curso, mas tem que se falar nisso daí.

E: E a taxa de aprovação de aprovação de álgebra linear, você acha que...de uma maneira geral, você...?
Gonçalves: De um modo geral, até que tem sido boa a aprovação. Álgebra linear em si, passando a questão da linguagem, que é uma linguagem nova que os alunos vão passar a aprender... então de início, no curso, tem-se um pouco de dificuldade para se tratar nessa linguagem, mas o curso de um modo geral não é um curso difícil. Então, eles tem...normalmente o índice de aprovação tem sido razoável. Não tem sido assim...assim...desesperador, um índice de reprovação muito alto. Não tem acontecido isso. Eles vão mal no início do curso, mas depois que eles se adaptam à linguagem, aí eles...eles caminham.

E: E, então, eu vou pedir para você fazer um comentário sobre essa frase do Plancherel que, uns anos atrás, ele colocou isso: "De todos os cursos que havia dado, que álgebra linear era a pior ... aquele que parecia mais difícil de se dar." Você concorda com essa frase dele?
Gonçalves: Não, não. Mas depende do curso que a pessoa está fazendo. Não concordo. Por exemplo, num curso de álgebra...mesmo num curso de licenciatura em matemática, de bacharelado, ele tem cursos muito mais difícieis do que álgebra linear. O problema maior, talvez que os alunos têm em álgebra linear é a questão da linguagem, porque eles não...como o curso é dado mais ou menos no início, que eles estão entrando, por exemplo, no 2° semestre, algo assim. Então, como a engenharia, por exemplo, que eles já entram no primeiro ano, que já começam com essa linguagem. Nunca viram nada parecido. De fato, eles têm dificuldades, uma dificuldade muito grande para absorver essa linguagem. Mas, depois que eles absorvem, aí a coisa vai ficar mais...caminha. Tem cursos muito mais difíceis. Tem cursos de álgebra...é claro que eles já têm uma linguagem, já sabem mais ou menos a linguagem, então eles não têm o impacto de início muito grande. Mas, um curso de álgebra, por exemplo, álgebra II, no curso de licenciatura, mesmo de bacharelado, é muito mais difícil do que o curso de álgebra linear.

E: Que ano que é dado álgebra II?
Gonçalves: Álgebra II é dado no segundo ano.

E: Então eles já fizeram...?
Gonçalves: Eles já fizeram álgebra linear. Então você introduz...começa com anéis, grupos, ideais, né. Anéis de polinômios. Então...teoria de Galois é muito mais difícil. Você vê em álgebra III, no curso de bacharelado. Na licenciatura não é dado. É um curso muito mais difícil. Agora, não tem a questão do impacto da linguagem, porque você já passou quando vai fazer esse curso...O curso em si é difícil, mas você não tem o impacto da linguagem que você tem na álgebra linear. A álgebra linear, como é uma coisa totalmente abstrata, assim e que você nunca viu algo parecido. Então tem esse impacto da linguagem.

E: E esse impacto da linguagem que você está falando que eu também concordo com você, quando você está chegando em li, ld, em base, você acha que eles ainda têm algum resquício, ou já venceram isso?
Gonçalves: Eu acho que ainda não venceram, porque, mais ou menos, está no começo do curso. Tem que falar de sub-espaço, espaço vetorial gerado. Mas, eles ainda têm dificuldades. Talvez, seja esse o problema da questão do li do ld, que eles se enrolam um pouco.

E: Você faz alguma coisa para tentar melhorar um pouco isso para eles, essa compreensão? Eles vão vendo definições novas e as dificuldades...?
Gonçalves: Talvez o fato de que você está fazendo bastantes exercícios, né, que envolvem essas...exercícios mais abstratos. Só fazer bastante para eles se habituarem mais a essa linguagem.