

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**NELSON DIAS LEME**

**O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA  
FINANCEIRA UTILIZANDO FERRAMENTAS  
COMPUTACIONAIS: UMA ABORDAGEM  
CONSTRUCIONISTA**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**São Paulo  
2007**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**NELSON DIAS LEME**

**O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA  
FINANCEIRA UTILIZANDO FERRAMENTAS  
COMPUTACIONAIS: UMA ABORDAGEM  
CONSTRUCIONISTA**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora  
da Pontifícia Universidade Católica de São  
Paulo, como exigência parcial para obtenção do  
título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA**, sob a orientação do(a) **Prof(a).  
Dr(a). Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)***

**São Paulo  
2007**

**Banca Examinadora**

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

**DEDICATÓRIA**

*À minha esposa, Márcia*

*Aos meus filhos, Tiago e Thaís*

*Aos meus pais, José Batista (em memória) e Lazara*

*Aos meus irmãos, José Roberto (em memória) e Maria Eunice*

## AGRADECIMENTO

*À minha orientadora, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Siobhan Victória Healy (Lulu Healy) pela confiança em mim depositada, pelo apoio e incentivo nos meus momentos de insegurança, por sua orientação competente sem os quais este trabalho não seria possível.*

*À Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sônia Pita Coelho pelo apoio e sugestões dadas na elaboração das Atividades deste trabalho e na Qualificação.*

*Ao Prof. Dr. Luis Gonzaga Xavier de Barros, pelas sugestões dadas na Qualificação.*

*Aos Professores do programa, Dr<sup>a</sup>. Anna Franchi, Dr<sup>a</sup>. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Dr<sup>a</sup>. Maria Célia Leme da Silva, Dr. Saddo Ag Almouloud, Dr<sup>a</sup>. Silvia Dias Alcântara Machado, Dr<sup>a</sup>. Sônia Barbosa Camargo Iglioni e Dr. Wagner Rodrigues Valente.*

*À Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e a todos meus ex-professores pelo que representaram e representam em minha vida.*

*Aos colegas de turma e do Grupo de Pesquisa TECMEM, pelo apoio e pelas valiosas sugestões.*

*À CAPES e à comissão de bolsas por sua concessão.*

*À Faculdade de Administração São Paulo – FAPI pela cessão do Laboratório de Informática que permitiu a realização dessa Pesquisa.*

*Aos meus pais pelos exemplos e valores de vida recebidos.*

*Ao meu sogro Nestor e à minha sogra Niva pelo carinho e apoio recebidos.*

*Aos meus cunhados e cunhadas pela amizade e companheirismo.*

*Aos meus filhos, Tiago e Thaís. Que este trabalho possa servir de estímulo em busca de novos horizontes na formação de cada um de vocês.*

## RESUMO

---

O objetivo deste trabalho é colaborar na investigação do impacto da abordagem construcionista e das potencialidades das planilhas eletrônicas no ensino-aprendizagem de conteúdos da Matemática Financeira.

Para alcançar o objetivo proposto, foi elaborado um experimento de ensino envolvendo alunos na construção de suas próprias fórmulas, usando planilhas eletrônicas, para o cálculo dos juros e do montante, nos regimes dos juros simples e compostos. Para o desenvolvimento das atividades buscamos referência na concepção construcionista de Seymour Papert (1994).

A metodologia empregada neste trabalho está baseada no “*design-based research methodologies*”. – Metodologia de Pesquisa Baseada em Design. Foram desenvolvidas duas fases de experimentação. A primeira fase envolveu um grupo de alunos iniciantes seus em estudos de Matemática Financeira, em um conjunto de atividades com planilhas eletrônicas e, em uma série de tarefas em papel e lápis. Na segunda fase para comparar com o desempenho do primeiro grupo, foram aplicadas as atividades com papel e lápis a um grupo de alunos que já concluiu seus estudos de Matemática Financeira e que vivenciou uma abordagem de ensino onde as fórmulas não foram construídas.

A análise empregou o ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição de Valente (2002). Segundo nossas análises, as fórmulas deduzidas e implementadas no computador são modelos computacionais que possibilitam o *feedback* e a simulação, favorecendo o envolvimento dos aprendizes no ciclo básico de expressão, avaliação e reflexão sobre o domínio considerado.

**Palavras-chaves:** Matemática Financeira; Planilhas Eletrônicas; Construcionismo; Modelos Computacionais; Simulação.

# ABSTRACT

---

This work aims to contribute to the investigation of the impact of a constructionist approach to the use of electronic spreadsheets on the teaching and learning of topics related to Financial Mathematics.

To this end, a teaching experiment was designed which involved students in the construction of their own formulas, using spreadsheets, for calculating interests and future values of investments, under regimes of both simple and compound rates. The constructionist conceptions of Papert provided a theoretical base for the development of the activities.

The methodology adopted for the study was modelled according to the design-based research methodologies. Two phases of experimentation were elaborated. The first phase involves students initiating their studies in Financial Mathematics in working on a set of activities with spreadsheets, and then completing a series of paper and pencil tasks. In the second phase, to provide a basis for comparing the approach adopted with the more usual practice of giving students previously defined formulae for calculating interest, the paper and pencil task were also administered to a group of students who has previously studied Financial Mathematics.

The analysis of data followed the cycle of description-execution-reflection-debugging-description described by Valente. According to these analyses, the formulae constructed by the students and implemented on the computer served as computational models providing feedback and enabling simulations of various possible situations. This in turn allowed students to engage in a cycle of expression, evaluation and reflection of the mathematical domain in question.

**Keywords:** Financial Mathematics; Spreadsheets; Constructionism; Computational Models; Simulation.

# SUMÁRIO

---

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>APRESENTAÇÃO .....</b>                                                 | <b>14</b> |
| <b>CAPÍTULO 1. A MATEMÁTICA FINANCEIRA E SEU ENSINO .....</b>             | <b>17</b> |
| 1.1 História e desenvolvimento da matemática financeira .....             | 17        |
| 1.2 As primeiras aritméticas.....                                         | 18        |
| 1.3 Os fundamentos da matemática financeira.....                          | 19        |
| 1.4 Os regimes de capitalização de juros .....                            | 21        |
| 1.5 O regime de capitalização dos juros simples.....                      | 22        |
| 1.5.1 Fórmula do montante nos juros simples.....                          | 23        |
| 1.6 O regime de capitalização dos juros compostos.....                    | 24        |
| 1.6.1 Fórmula do montante nos juros compostos .....                       | 25        |
| 1.7 História do ensino da Matemática Financeira no Brasil .....           | 26        |
| 1.8 O ensino da matemática financeira e as novas tecnologias .....        | 27        |
| 1.9 O ensino nos livros didáticos .....                                   | 32        |
| <b>CAPÍTULO 2. OS SISTEMAS COMPUTACIONAIS COM FINS EDUCACIONAIS .....</b> | <b>36</b> |
| 2.1 Introdução.....                                                       | 36        |
| 2.2 O paradigma instrucionista .....                                      | 37        |
| 2.3 O paradigma construcionista .....                                     | 39        |
| 2.4 Ambientes interativos de aprendizagem .....                           | 40        |
| 2.5 Modelos computacionais .....                                          | 42        |
| 2.6 História das planilhas – um breve relato .....                        | 44        |
| 2.7 As planilhas eletrônicas como ambiente de aprendizagem .....          | 45        |
| <b>CAPÍTULO 3. A PROBLEMÁTICA E A METODOLOGIA.....</b>                    | <b>49</b> |
| 3.1 Introdução.....                                                       | 49        |
| 3.2 O problema de pesquisa .....                                          | 49        |
| 3.3 Experimento de ensino .....                                           | 51        |
| 3.4 Descrição-execução-reflexão-depuração-descrição .....                 | 53        |
| 3.5 Elaboração das atividades.....                                        | 58        |
| 3.6 Caracterização dos sujeitos da pesquisa.....                          | 60        |
| 3.7 A formação das duplas .....                                           | 61        |
| 3.8 Intervenções de ensino.....                                           | 62        |
| 3.9 Atividades com planilhas eletrônicas .....                            | 62        |
| 3.9.1 Atividade 1 – operações aritméticas.....                            | 64        |
| 3.9.2 Atividade 2 – regime de capitalização dos juros simples .....       | 66        |
| 3.9.3 Atividade 3 – progressão aritmética .....                           | 68        |
| 3.9.4 Atividade 4 – progressão geométrica .....                           | 69        |
| 3.9.5 Atividade 5 – cálculo do montante para um único período.....        | 70        |
| 3.9.6 Atividade 6 – cálculo do montante para vários períodos .....        | 71        |
| 3.9.7 Atividade 7 – problema com juros simples .....                      | 72        |
| 3.9.8 Atividade 8 – problema com juros simples .....                      | 74        |
| 3.9.9 Atividade 9 – juros compostos com taxas variáveis .....             | 75        |
| 3.9.10 Atividade 10 – juros compostos com taxas variáveis .....           | 77        |
| 3.9.11 Atividade 11 – juros compostos com taxas constantes .....          | 78        |
| 3.9.12 Atividade 12 – juros compostos – cálculo mês a mês .....           | 79        |
| 3.9.13 Atividade 13 – problema com juros compostos.....                   | 80        |

|                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.10 Aplicação das atividades com papel e lápis.....                       | 82         |
| 3.11 Atividades com papel e lápis – possíveis resoluções .....             | 83         |
| 3.11.1 Questão 1.....                                                      | 84         |
| 3.11.2 Questão 2.....                                                      | 85         |
| 3.11.3 Questão 3.....                                                      | 87         |
| 3.11.4 Questão 4.....                                                      | 88         |
| 3.11.5 Questão 5.....                                                      | 91         |
| 3.11.6 Questão 6.....                                                      | 92         |
| <b>CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DA EXPERIMENTAÇÃO .....</b>                        | <b>94</b>  |
| 4.1 Apresentação.....                                                      | 94         |
| 4.2 Análise das atividades com planilhas eletrônicas .....                 | 94         |
| 4.3 Análise das atividades das duplas.....                                 | 95         |
| 4.3.1 Análise da Atividade 1.....                                          | 96         |
| 4.3.2 Análise da Atividade 2.....                                          | 101        |
| 4.3.3 Análise da Atividade 3.....                                          | 107        |
| 4.3.4 Análise da Atividade 4.....                                          | 111        |
| 4.3.5 Análise da Atividade 5.....                                          | 114        |
| 4.3.6 Análise da Atividade 6.....                                          | 116        |
| 4.3.7 Análise da Atividade 7.....                                          | 120        |
| 4.3.8 Análise da Atividade 8.....                                          | 124        |
| 4.3.9 Análise da Atividade 9.....                                          | 127        |
| 4.3.10 Análise da Atividade 10.....                                        | 133        |
| 4.3.11 Análise das Atividades 11 e 12 .....                                | 134        |
| 4.3.12 Análise da Atividade 13.....                                        | 139        |
| 4.4 Síntese da análise – atividades com planilhas eletrônicas .....        | 143        |
| 4.5 Análise das Atividades com papel e lápis.....                          | 145        |
| 4.5.1 Análise da questão 1.....                                            | 146        |
| 4.5.2 Análise da questão 2.....                                            | 146        |
| 4.5.4 Análise da questão 4.....                                            | 149        |
| 4.5.5 Análise da Questão 5.....                                            | 150        |
| 4.5.6 Análise da Questão 6.....                                            | 151        |
| 4.6 Análise comparativa dos grupos instrucionistas e construcionistas..... | 153        |
| <b>CAPÍTULO 5. CONCLUSÃO .....</b>                                         | <b>156</b> |
| 5.1 Apresentação da pesquisa .....                                         | 156        |
| 5.2 Metodologia .....                                                      | 158        |
| 5.3 Principais resultados.....                                             | 159        |
| 5.4 Questões de pesquisa .....                                             | 163        |
| 5.5 Implicações e futuras pesquisas.....                                   | 166        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>                                     | <b>167</b> |
| <b>ANEXOS DAS RESOLUÇÕES EM PAPEL E LÁPIS .....</b>                        | <b>172</b> |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Quadro 1.1. Regime de capitalização dos juros simples .....            | 22  |
| Quadro 1.2. Fórmula do montante dos juros simples .....                | 24  |
| Quadro 1.3. Regime de capitalização dos juros compostos .....          | 25  |
| Quadro 1.4. Fórmula do montante dos juros compostos .....              | 26  |
| Quadro 3.1. Resumo da aplicação das atividades .....                   | 60  |
| Quadro 3.2. Formação das duplas .....                                  | 61  |
| Quadro 3.3. Conteúdo das atividades com planilhas eletrônicas .....    | 63  |
| Quadro 3.4. Questão 2 – Resolução por regra de três .....              | 87  |
| Quadro 3.5. Montante em juros compostos – cálculo mês a mês .....      | 90  |
| Quadro 4.1. Fórmula do montante para um número qualquer de meses ..... | 138 |
| Quadro 4.2. Resultados do grupo instrucionista .....                   | 153 |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 3.1. Ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição .....           | 57  |
| Figura 3.2. Cálculo aritmético – enunciado – Atividade 1 .....                    | 65  |
| Figura 3.3. Cálculo aritmético – questões – Atividade 2 .....                     | 66  |
| Figura 3.4. Atividade 2 – Juros Simples .....                                     | 67  |
| Figura 3.5. Atividade 3 – Progressões aritméticas .....                           | 69  |
| Figura 3.6. Atividade 4 – Progressões geométricas .....                           | 70  |
| Figura 3.7. Atividade 5 – Juros Simples – cálculo dos juros e do montante .....   | 71  |
| Figura 3.8. Atividade 6 – Juros Simples – cálculo mês a mês .....                 | 72  |
| Figura 3.9. Atividade 7 – Problema com juros simples .....                        | 72  |
| Figura 3.10. Atividade 8 – Problema com juros simples .....                       | 74  |
| Figura 3.11. Atividade 9 – Juros compostos com taxas variáveis .....              | 75  |
| Figura 3.12. Atividade 10 – Juros compostos com taxas variáveis .....             | 77  |
| Figura 3.13. Atividade 11 – Juros Compostos com taxas constantes .....            | 78  |
| Figura 3.14. Atividade 12 – Juros compostos – Cálculo mês a mês .....             | 79  |
| Figura 3.15. Atividade 13 – Problema com juros compostos .....                    | 80  |
| Figura 4.1. Cálculo de uma expressão numérica .....                               | 96  |
| Figura 4.2. Fórmula construída por Gisele/Natália – Atividade 1a .....            | 97  |
| Figura 4.3. Resultados dos cálculos na planilha de Gisele/Natália .....           | 98  |
| Figura 4.4. Tentativa de resolução da Atividade 1. item (c) – Gisele/Natália .... | 99  |
| Figura 4.5. Acertando os parênteses – Resolução Gisele/ Natália .....             | 100 |
| Figura 4.6. Cálculo dos juros – Resolução Gisele/Natália .....                    | 103 |
| Figura 4.7. Cálculo do montante – Resolução Gisele/Natália .....                  | 103 |
| Figura 4.8. Fórmula da dupla Patrícia/Fábio para o cálculo dos juros .....        | 104 |
| Figura 4.9. Fórmula da dupla Gisele/ Natália para o cálculo dos juros .....       | 105 |
| Figura 4.10. Construção da seqüência e estratégias da dupla Gisele/Natália ..     | 108 |
| Figura 4.11. Tentativas de construção de fórmula da dupla Gisele/Natália ....     | 109 |
| Figura 4.12. Fórmula da dupla Gisele/Natália da progressão aritmética ....        | 111 |
| Figura 4.13. Fórmula da dupla Gisele/Natália do termo geral da PG .....           | 112 |
| Figura 4.14. Fórmula da dupla Gisele/Natália para o cálculo dos juros .....       | 115 |
| Figura 4.15. Fórmula da dupla Gisele/Natália para o cálculo do montante ....      | 115 |
| Figura 4.16. Fórmula da dupla Gisele/Natália – cálculo do montante .....          | 116 |
| Figura 4.17. Fórmula da dupla Patrícia/Fábio – cálculo do montante .....          | 120 |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 4.18. Fórmula do montante – simulações da dupla Patrícia/Fábio .....      | 120 |
| Figura 4.19. Registro dos dados – Gisele/Natália .....                           | 121 |
| Figura 4.20. Fórmula da relação entre capitais – Gisele/Natália .....            | 123 |
| Figura 4.21. Fórmula da divisão do capital – Gisele/Natália .....                | 124 |
| Figura 4.22. Fórmula dos juros do Capital A – dupla Gisele/Natália .....         | 125 |
| Figura 4.23. Fórmula dos juros do Capital B – dupla Gisele/Natália .....         | 126 |
| Figura 4.24. Fórmula do total dos juros – Gisele/Natália .....                   | 126 |
| Figura 4.25. Fórmula do valor do resgate – Gisele/Natália .....                  | 128 |
| Figura 4.26. Fórmula do juro – dupla Gisele/Natália .....                        | 129 |
| Figura 4.27. Fórmula do montante do primeiro mês – dupla Gisele/Natália .....    | 129 |
| Figura 4.28. Tentativa de cálculo do valor de resgate- Gisele/Natália .....      | 131 |
| Figura 4.29. Fórmula do valor do resgate – Gisele/Natália .....                  | 132 |
| Figura 4.30. Tentativa de fórmula do valor do resgate – Gisele/Natália .....     | 133 |
| Figura 4.31. Fórmula dos juros – Gisele/Natália .....                            | 135 |
| Figura 4.32. Fórmula do montante – dupla Gisele/Natália .....                    | 137 |
| Figura 4.33. Fórmula da relação entre os empréstimos - da dupla Gisele/Natália . | 139 |
| Figura 4.34. Fórmula dos juros – dupla Gisele/Natália .....                      | 141 |
| Figura 4.35. Fórmula do montante – da dupla Patrícia/Fábio .....                 | 142 |
| Figura 4.36. Atividade 13 – Resolução Patrícia/Fábio .....                       | 143 |
| Figura 4.37. Resolução do aluno João – Questão 2 .....                           | 148 |

## APRESENTAÇÃO

---

Neste trabalho, apresenta-se um experimento de ensino-aprendizagem de Matemática Financeira, que utiliza ferramentas computacionais, segundo uma abordagem construcionista. A pesquisa envolveu ambiente de planilhas eletrônicas, aprendizes na construção de suas próprias fórmulas para os cálculos dos juros e do montante em operações financeiras de empréstimos e aplicações.

As idéias construcionistas de Papert (1986) e o ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-execução de Valente (2002), foram empregados na elaboração de atividades de ensino com planilhas eletrônicas e papel e lápis. A Metodologia utilizada foi o Experimento de Ensino (*Design Experiments*). Nosso papel de professor pesquisador pretendeu investigar o raciocínio matemático dos alunos em experimentações que podem influenciar, tanto no significado dado ao conhecimento como em sua construção (STEFFE & THOMPSON, 2000).

A presença de novas tecnologias como ferramentas de ensino é uma decorrência natural do desenvolvimento das práticas educacionais. No caso, particular, do ensino de Matemática Financeira, os cálculos exponenciais do regime de juros compostos, que eram realizados com o auxílio das tábuas de logaritmos ou tabelas financeiras com os valores do fator  $(1 + i)^n$ , chamado fator de capitalização<sup>1</sup>, passaram a ser feitos, a partir do início da década de 1970, com as calculadoras eletrônicas portáteis.

Posteriormente, esses cálculos exponenciais puderam, também, ser dispensados com o advento das calculadoras financeiras e o uso das teclas “n”, “i”. “PV” e “FV” e com a entrada de três quaisquer dessas variáveis conhecidas, era possível encontrar o valor da quarta variável.

---

<sup>1</sup> Fator de capitalização, onde “i” é a taxa de juros ao período e “n” é o prazo ou número de períodos do empréstimo ou aplicação.

A partir de 1980, com a fabricação dos computadores pessoais e a invenção das planilhas eletrônicas consolidou-se a utilização dos computadores nas tarefas de cálculos simultâneos e repetitivos.

O emprego dessas tecnologias é praticamente imediato nos meios de produção e serviços, já sua integração aos sistemas educacionais acontece, porém, de forma mais lenta.

Os usuários da tecnologia em ambientes de trabalho, muitas vezes, apenas, apertam ou digitam dados de entrada em um computador e que, por meio de um software, fornece dados de saída, assim, eles têm à sua frente, em geral, uma “caixa preta”. Nos ambientes de ensino, uma das tarefas é desvendar, ou seja, “desconstruir” e reconstruir essa “caixa preta”.

Este estudo utilizou o ambiente de planilhas eletrônicas, procurando formar conceitos de Matemática Financeira com atividades, nos quais os aprendizes foram envolvidos no desafio da dedução de suas próprias fórmulas e na construção implementação de seus modelos, utilizando os recursos das planilhas eletrônicas.

A motivação deste trabalho, também, passa pela nossa experiência, como professor e a consciência da insuficiência de nossas abordagens praticadas. Daí, nosso desejo de contribuir nesta discussão com esse experimento de ensino.

No Capítulo 1 – A Matemática Financeira e seu ensino – é apresentado um pouco da história dos juros nas antigas civilizações, sua prática e as primeiras aritméticas. São discutidos os fundamentos do estudo da Matemática Financeira, os regimes de capitalização simples e compostos e a dedução das fórmulas dos juros e montante nos dois regimes de capitalização. Em seguida, é feito um breve histórico do ensino da disciplina de Matemática Financeira no Brasil. Finalmente, o uso das novas tecnologias no ensino e a Matemática Financeira nos livros didáticos são analisados.

No Capítulo 2 – Os sistemas computacionais com fins educacionais – inicia-se com a discussão do uso do computador na educação, segundo os paradigmas instrucionistas e construcionistas. Na busca da caracterização do

ambiente de ensino-aprendizagem, são apresentados os ambientes interativos de aprendizagem e os modelos computacionais. O capítulo é encerrado com a breve história das planilhas eletrônicas e as possibilidades e potencialidades de seu uso, como ambiente de ensino-aprendizagem.

No Capítulo 3 – A problemática e a metodologia – são apresentadas as nossas questões de pesquisa, a metodologia Experimento de Ensino (*Design Experiments*) empregadas nesta pesquisa, o ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição que inspirou a elaboração das atividades e as análises. Os sujeitos da pesquisa, a formação das duplas são descritos, além de se explicar uma das características deste trabalho, o procedimento das intervenções de ensino. Ao final, as Atividades com planilhas eletrônicas, as Questões com papel e lápis são apresentadas com nossas intenções em relação a elas e algumas possíveis resoluções.

No Capítulo 4 – Análise da experimentação – trata-se da análise das atividades em planilhas eletrônicas realizadas pelo grupo construcionista e a análise das atividades com papel e lápis realizadas pelos dois grupos construcionistas e instrucionistas. No final, é apresentado o comparativo desses resultados.

No Capítulo 5 – Conclusão – são feitas as considerações finais deste estudo, bem como são sugeridas novas investigações a respeito do tema.

## CAPÍTULO 1. A MATEMÁTICA FINANCEIRA E SEU ENSINO

---

### 1.1 História e desenvolvimento da matemática financeira

Os juros estão presentes nas atividades comerciais dos homens e das entidades, tem-se como exemplo quando um cidadão financia a compra de um bem a prazo ou uma empresa financia máquinas industriais para expansão de sua produção. Desse modo, o juro é o aluguel cobrado pelo uso do dinheiro nessas operações comerciais.

O conceito de juro é bastante antigo, foi divulgado e utilizado ao longo da História e surgiu, naturalmente, quando o Homem percebeu existir uma estreita relação entre dinheiro e tempo. Os processos de acumulação de capital e desvalorização, normalmente, levariam à idéia de juros, pois se realizam em razão do valor do dinheiro no tempo.

Desde a época dos primeiros registros de civilizações existentes na Terra, os juros e os impostos surgem. Um dos primeiros indícios apareceu já na Babilônia no ano de 2000 a.C. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas.

De acordo com Eves (2004):

Como em todas as práticas que têm existido por milhares de ano, algumas delas relativas a juros têm sido modificadas para satisfazerem às exigências atuais. Entretanto, as antigas práticas que ainda persistem, foram inteiramente lógicas no tempo de sua origem. Por exemplo, quando as sementes eram emprestadas para a semeadura de uma, certa área, era lógico esperar o pagamento na próxima colheita no prazo de um ano. Desta forma, o cálculo de juros numa base anual era mais razoável; tão quanto o estabelecimento de juros compostos para o financiamento das antigas viagens comerciais, que não poderiam ser concluídas em um ano. Com o desenvolvimento das atividades das cidades e do comércio e de acordo com a necessidade de cada época, criaram-se novas formas de trabalho com a relação tempo-juro e, assim, nasceram os juros semestrais, bimestrais, mensais, diários, etc. (EVES, 2004, p.299).

Ainda, segundo Eves (2004):

A prática dos juros, também, está documentada nas tábulas das coleções de Berlim, Yale e do Louvre que contêm problemas sobre juros compostos. Em uma tábula do Louvre, de cerca de 1700 a.C, há o seguinte problema: por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20%, para que ela dobre? (EVES, 2004, p.77)

Em razão das práticas dos juros, desenvolveram-se técnicas operatórias de cálculo e as bases para o nascimento das aritméticas e da Matemática Financeira.

## **1.2 As primeiras aritméticas**

Com o desenvolvimento das atividades comerciais e a necessidade de contar abstratamente e agrupar todas as espécies de elementos, seguindo o princípio da base, o homem aprendeu a estimar, avaliar e medir diversas grandezas, como peso, comprimento, áreas, volumes, etc. Pôde elaborar, também, técnicas operatórias (mentais, concretas e, mais tarde, escritas) e erguer os primeiros rudimentos de uma aritmética, inicialmente, prática, antes de tornar-se abstrata e conduzir a álgebra e chegar aos fundamentos de uma aritmética comercial.

Como consequência do interesse pela educação e do crescimento enorme da atividade comercial no Renascimento, começaram a aparecer muitos textos populares de Aritmética. Três centenas desses livros foram impressos na Europa antes do século XVII.

Gonçalves (2007) relata que:

A mais antiga Aritmética impressa e anônima e hoje extremamente rara é a Aritmética de Treviso, publicada em 1478 na cidade de Treviso. Trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém

aplicações, envolvendo sociedades e escambo. Em 1484, foi publicada na cidade de Veneza, a Aritmética Comercial escrita por Piero Borghi, que exerceu grande influência na Itália e alcançou, pelo menos, 17 edições, a última, em 1557 (EVES apud GONÇALVES, p.1-3).

Na sociedade atual, observa-se nas atividades diárias do cidadão em sua economia domiciliar, nas operações financeiras do comércio, bancos e das empresas uma prática semelhante há de 4.000 anos, ou seja, a cobrança de juros pelo uso do dinheiro. Portanto, o domínio das técnicas de cálculo dos juros e a capacidade de análise da melhor alternativa em uma decisão de investimento ou financiamento nas compras a prazo são instrumentos básicos de sobrevivência das empresas e de exercício da cidadania às pessoas.

### **1.3 Os fundamentos da matemática financeira**

A Matemática Financeira pode ser conceituada como o ramo da Matemática que tem como objeto de estudo o “valor do dinheiro no tempo”. Os conceitos básicos para sua aprendizagem estão os envolvidos, por exemplo, em uma operação de empréstimo por um único período, que é uma “operação financeira básica”. Conforme será apresentada a seguir:

Ao se supor um cidadão que contrate um empréstimo bancário de R\$ 2.000,00 por um período de um mês e que, no vencimento, para sua liquidação, tenha feito um pagamento de R\$ 2.090,00. Nesta operação financeira, tem-se:

- O valor do empréstimo contratado e recebido pelo cidadão (R\$ 2.000,00), pode ser chamado de Principal, Capital ou Valor Presente da operação financeira.
- O valor do pagamento ou liquidação do empréstimo (R\$ 2.090,00, pode ser denominado de Montante, resgate do empréstimo ou Valor Futuro da operação financeira. Neste valor futuro, estão incluídos, o capital

empréstado (R\$ 2.000,00) e o custo do empréstimo (R\$ 90,00), chamado juros do empréstimo.

- O valor da soma do capital com os juros do empréstimo é o chamado montante do empréstimo (R\$ 2.090,00).
- O período ou prazo do empréstimo, ou ainda, em quanto tempo o empréstimo deverá ser liquidado; este período deverá ser expresso em unidades de tempo, ou seja: dias, meses, anos, etc. (em nosso exemplo, um mês).
- A razão entre valor dos juros pagos (R\$ 90,00) e o capital (R\$ 2.000,00), no período (um mês), chama-se Taxa de juros por período.

Em nosso exemplo, temos:  $\frac{90}{2000} = 0,045$  ao mês, ou ainda, na forma percentual, 4,5% ao mês.

Esta taxa de juros é o fator de multiplicação que permite calcular o custo ou juros do empréstimo no período.

Ao se considerar agora outro exemplo, em vez de solicitação de um empréstimo, um cidadão faz uma aplicação financeira de R\$ 2.000,00 pelo prazo de um mês em um fundo de investimentos, que rende juros de 4,5% ao mês. Quais as mudanças na nomenclatura das variáveis envolvidas? Nesta operação financeira, tem-se:

- O valor aplicado e desembolsado pelo cidadão (R\$ 2.000,00), pode ser chamado, também, de Principal, Capital ou Valor Presente da operação financeira.
- A taxa de juros de 4,5% ao mês é o fator de multiplicação para obtenção dos juros ou do rendimento da aplicação. Nesse caso, temos: 4,5% de R\$ 2.000,00, ou seja,  $0,045 \times 2.000 = 90$ . Portanto, R\$ 90,00 é o valor dos juros (rendimentos) desta aplicação.

- O valor recebido ao final de um mês da aplicação (R\$ 2.090,00). Pode ser chamado, também, de Montante, resgate ou Valor Futuro da operação financeira. Neste Valor Futuro, está o valor do Capital aplicado (R\$ 2.000,00), somado aos juros ou rendimentos da aplicação (R\$ 90,00).

O procedimento de adicionar o valor do juro do período (R\$90,00) ao Capital (R\$ 2.000,00) é chamado de Capitalização. No presente exemplo, tem-se uma única capitalização, pois o empréstimo é contratado a uma taxa mensal e por um período de um mês, operação que se denomina, neste trabalho, de operação financeira básica.

A seguir, as operações de empréstimos ou aplicações financeiras por vários períodos, são apresentadas, nas quais há necessidade de várias capitalizações.

#### **1.4 Os regimes de capitalização de juros**

Quando um capital é aplicado (ou um empréstimo é contratado), por vários períodos, a uma certa taxa de juros por período, o montante poderá crescer, de acordo com duas convenções chamadas de regimes de capitalização. Assim, existem os regimes de capitalização simples (juros simples) e de capitalização composta (juro sobre juro ou juros compostos).

A seguir, é apresentada a conceituação desses dois regimes de capitalização usados nas operações financeiras, segundo Hazzan & Pompeo (2000, p.4-5).

## 1.5 O regime de capitalização dos juros simples

Neste regime, o juro gerado em cada período é constante e igual ao produto do capital pela taxa. Além disso, os juros são pagos só no final da operação.

**Exemplo 1.** Um capital de R\$ 1.000,00 foi aplicado durante três anos à taxa de 10% ao ano, em regime de juros simples. Qual o valor do montante?

### Resolução:

Ao se calcular os juros em regime de juros simples e adicioná-los ao final de cada ano ao montante anterior, o montante a ser obtido no final dos três anos será:

Durante o primeiro ano, o juro gerado foi de  $1.000 \times (0,10) = 100$

Durante o segundo ano, o juro gerado foi de  $1.000 \times (0,10) = 100$

Durante o terceiro ano, o juro gerado foi de  $1.000 \times (0,10) = 100$

Empregando como ferramenta de resolução, uma planilha não eletrônica, utilizada durante muitos anos para o registro e controle financeiro dos Bancos e das Empresas, tem-se:

| ANO | Saldo Anterior | Cálculo dos Juros           | Saldo Atualizado (Montante) |
|-----|----------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 0   |                |                             | R\$ 1.000,00                |
| 1   | R\$ 1.000,00   | $1.000 \times (0,10) = 100$ | R\$ 1.100,00                |
| 2   | R\$ 1.100,00   | $1.000 \times (0,10) = 100$ | R\$ 1.200,00                |
| 3   | R\$ 1.200,00   | $1.000 \times (0,10) = 100$ | R\$ 1.300,00                |

**Quadro 1.1. Regime de capitalização dos juros simples**

Portanto, somente o capital aplicado rende juros, e o montante após três anos será de R\$ 1.300,00.

Os procedimentos aritméticos acima são válidos para quaisquer valores dados, e podem ser generalizados, obtendo uma fórmula matemática ou, como também, é denominada neste trabalho de modelo matemático.

### 1.5.1 Fórmula do montante nos juros simples

Ao se nomear o valor dos juros por ( $J$ ); do capital por ( $C$ ) e da taxa de juros por unidade de tempo por ( $i$ ), o valor dos juros gerados em cada período será igual ao produto entre capital e taxa de juros,

$$J = C \times i \quad \text{(Fórmula dos juros para um período)}$$

Considerando o regime de capitalização dos juros simples, o valor total dos juros gerados será proporcional ao número de períodos ( $n$ ) de aplicação do capital, portanto, obtém-se:

$$J_n = C \times i + C \times i + C \times i + \dots + C \times i \text{ ou}$$

$$J = C \times i \times n \quad \text{(Fórmula dos juros para “n” períodos)}$$

Ao se considerar o conceito de Montante como a soma do capital aplicado, mais o valor dos juros gerados, o valor de resgate da aplicação ou Montante indicado por ( $M$ ), poderá ser escrito como a soma do capital ( $C$ ) com o valor dos juros gerados,  $J = C \times i \times n$ , assim:

$M = C + J$  , substituindo o valor correspondente dos juros,

$$M = C + C \times i \times n$$

Ou, ainda, colocando o capital ( $C$ ) em evidência, obtém-se:

$$M = C \times (1 + i \times n)$$

**Fórmula do Montante no regime de capitalização dos juros simples.**

### Quadro 1.2. Fórmula do montante dos juros simples

## 1.6 O regime de capitalização dos juros compostos

Neste caso, o juro do primeiro período (capital vezes a taxa) agrega-se ao capital, dando o montante  $M_1$  (montante ao final do primeiro período).

O juro do segundo período, que é igual ao produto de  $M_1$  pela taxa, agrega-se à  $M_1$ , dando um montante  $M_2$  (montante ao final do segundo período).

O juro do terceiro período, que é igual ao produto de  $M_2$  pela taxa, agrega-se à  $M_2$ , dando um montante  $M_3$  e assim por diante.

Portanto, o juro gerado em cada período (montante do início do período vezes a taxa) agrega-se ao montante do início do período e esta soma passa a render juro no período seguinte.

**Exemplo 2.** Um capital de R\$ 1.000,00 foi aplicado durante três anos à taxa de 10% ao ano, em regime de juros compostos. Qual o valor do montante?

**Resolução:** Durante o primeiro ano, o juro gerado foi de  $1.000 \times (0,10) = 100$ , e o montante, após um ano foi de R\$ 1.100,00.

Durante o segundo ano, o juro gerado foi de  $1.100 \times (0,10) = 110$ . e o montante, após dois anos foi de R\$ 1.210,00.

Durante o terceiro ano, o juro gerado foi de  $1.210 \times (0,10) = 121$ , e o montante, após três anos foi de R\$ 1.331,00. Usando como ferramenta de resolução, uma planilha não eletrônica, temos:

| ANO | Saldo Anterior | Cálculo dos Juros           | Saldo Atualizado (Montante) |
|-----|----------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 0   |                |                             | R\$ 1.000,00                |
| 1   | R\$ 1.000,00   | $1.000 \times (0,10) = 100$ | R\$ 1.100,00                |
| 2   | R\$ 1.100,00   | $1.100 \times (0,10) = 110$ | R\$ 1.210,00                |
| 3   | R\$ 1.210,00   | $1.210 \times (0,10) = 121$ | R\$ 1.331,00                |

**Quadro 1.3. Regime de capitalização dos juros compostos**

Este procedimento, mês a mês, para o cálculo do montante, evidentemente não é viável para um capital aplicado durante um número grande de meses (exemplo: 24 ou 48 meses), pelo menos, quando se trabalha sem o recurso das planilhas eletrônicas. Logo é preciso construir um modelo matemático ou de maneira mais familiar deduzir uma fórmula matemática, que permita o cálculo do montante para um número de meses “n” qualquer.

### 1.6.1 Fórmula do montante nos juros compostos

Denomina-se o montante da aplicação por ( $M$ ); o valor do capital aplicado por ( $C$ ); a taxa de juros por unidade de tempo por ( $i$ ) e o número de períodos de

aplicação por  $(n)$ , e ao se empregar o conceito de capitalização, mês a mês, no regime dos juros compostos, tem-se:

Assim, o montante após um período será dado por:

$$M_1 = C + C.i = C.(1 + i)$$

Montante após dois períodos:

$$M_2 = M_1 + M_1.i = M_1(1 + i) = C.(1 + i).(1 + i) = C.(1 + i)^2$$

Montante após três períodos:

$$M_3 = M_2 + M_2.i = M_2.(1 + i) = C.(1 + i)^2.(1 + i) = C.(1 + i)^3$$

Por generalização, após “ $n$ ” períodos, o montante será dado por:

$$M_n = C.(1 + i)^n$$

**Fórmula do Montante no regime de capitalização dos juros compostos**

#### **Quadro 1.4. Fórmula do montante dos juros compostos**

### **1.7 História do ensino da Matemática Financeira no Brasil**

No Brasil, o ensino de Matemática Financeira tem sua história ligada à fundação das escolas de Comércio e das Faculdades de Ciências Econômicas, Ciências Contábeis e Administração. No final do século XIX, São Paulo passava por um processo de expansão industrial com a multiplicação de casas bancárias e comerciais. Para formar profissionais, e atender à economia, passaram a ser criadas escolas de comércio, entre elas, a Escola de Comércio Álvares Penteado,

fundada em 1902. Em 1931, foi fundada a Faculdade de Ciências Econômicas Álvares Penteado e, em janeiro de 1946, foi fundada a Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo (FECAP, 2007.p.1).

Nas décadas de 1950 e 1960, o sistema educacional brasileiro começou a dar mais ênfase às matérias exigidas pelo novo estágio da economia, entre elas, matemática, administração financeira, contabilidade de custos e métodos quantitativos. O ensino da Matemática Financeira ou da Matemática Comercial teve sua trajetória ligada a essas instituições, e os cálculos financeiros acompanharam as tecnologias disponíveis na época.

Nas décadas anteriores a 1970, os cálculos financeiros do regime de capitalização dos juros compostos eram feitos com o auxílio de tabelas financeiras ou da tabela de logaritmos. A partir dos anos 1970, esses cálculos começaram a ser feitos com as réguas de cálculo e calculadoras eletrônicas. A seguir, será descrito um pouco do processo de integração das tecnologias ao ensino da Matemática Financeira.

### **1.8 O ensino da matemática financeira e as novas tecnologias**

Nas últimas décadas, a disciplina de Matemática Financeira tem procurado incorporar as novas tecnologias às suas práticas de ensino, tecnologias que já estão presentes nos meios de produção e de serviços da economia mundial. No entanto, parece que os sistemas educacionais não incorporam as tecnologias na mesma velocidade. Esta situação, dentro de alguns limites, é entendida como normal. As tecnologias, como ferramentas de ensino-aprendizagem, demandam algum tempo para implantação e implementação, pois necessitam de projetos das instituições, da capacitação de professores e familiarização com as interfaces dessas tecnologias.

Assim, os cálculos exponenciais dos regimes de capitalização dos juros compostos que eram feitos com o auxílio de tábuas ou tabelas de capitalização<sup>2</sup>, ou ainda, com logaritmos, passaram a ser dispensados com o aparecimento dos computadores e, particularmente, das calculadoras científicas, que disponibilizam as informações com a rapidez exigida na administração financeira das empresas e bancos.

No final da década de 1970, as calculadoras financeiras tornaram, ainda mais rápidos esses cálculos e, posteriormente, as planilhas eletrônicas vieram auxiliar o uso dos computadores pessoais, como ferramenta de cálculo financeiro, com a vantagem de combinar textos e cálculos.

No Brasil, essas tecnologias, também, estão sendo incorporadas como ferramenta auxiliar no ensino da Matemática Financeira: as calculadoras científicas e financeiras, praticamente, substituíram as antigas tabelas financeiras e de forma mais lenta as planilhas eletrônicas, também, estão sendo integradas ao ensino.

As tecnologias, também, têm sido motivo de atenção das novas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) para o ensino da Matemática Financeira no curso de Administração. Estas novas diretrizes para os cursos de Administração instituídas pelo Ministério da Educação, Resolução número 1 de 2 de fevereiro de 2004, não citam mais as disciplinas, como ocorria anteriormente nos currículos mínimos. As DCNs falam em campos de formação e a Matemática Financeira está inserida no campo de formação de “Estudos Quantitativos e suas Tecnologias”. Esta mudança deu maior autonomia às Instituições de Ensino (IES), na sua organização curricular dos cursos de Administração<sup>3</sup>

Considerando-se a velocidade das inovações tecnológicas das últimas décadas, o campo de formação “Estudos Quantitativos e suas Tecnologias” parece não ser apenas uma mudança de nomenclatura, mas uma efetiva

---

<sup>2</sup> Tabelas contendo os valores do fator  $(1+i)^n$ , onde  $i$  é a taxa de juros por períodos e  $n$  é o número de períodos.

<sup>3</sup> <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES0776.pdf>

preocupação com a necessidade de uma constante atualização e integração dos sistemas de ensino às novas tecnologias.

Algumas tecnologias causaram grande impacto na história da humanidade, um exemplo é a invenção da imprensa, no século XV, por Johan Gutemberg na Alemanha. Com essa tecnologia, os conhecimentos que eram em grande parte, comunicados de forma oral por raros manuscritos, passaram a contar com os livros para sua difusão. Estes puderam difundir os conteúdos, muitas vezes, restritos aos monges e professores das universidades européias. O desenvolvimento científico que se seguiu com o Renascimento utilizou esta “nova tecnologia”, que barateou o livro, tornando a cultura acessível a um número maior de pessoas.

Na metade do século XX, outra invenção, os computadores iniciaram uma revolução de impacto, ainda sentida e não inteiramente medida, pois seus efeitos afetam nossas relações diárias, sejam comerciais, profissionais e sociais.

Não é nossa intenção fazer apologia do emprego das novas tecnologias, mesmo porque se entende que seu uso inadequado não trará benefícios ao sistema de ensino. Por outro lado, a mídia computador não substituirá a mídia papel e lápis, mas, certamente, conviverá com ela. Nesse sentido, BORBA refere que:

... tanto a análise da história das mídias feita por Levy (1993) quanto em pesquisas recentes, fica evidente que uma mídia não extermina a outra. De uma maneira geral, o cinema não acabou com o teatro, o vídeo não eliminou o cinema; da mesma forma, a oralidade não foi suprimida pela escrita: pelo contrário, foi criada uma nova manifestação de oralidade a partir da leitura da escrita. Não acreditamos que a informática irá terminar com a escrita ou com a oralidade, nem mesmo a simulação acabará com a demonstração em matemática... (BORBA, 2001, p.47).

Os sistemas computacionais e seus aplicativos, as calculadoras gráficas, científicas e financeiras e a integração dessas tecnologias, como ferramentas de ensino têm sido objeto de investigação de muitos pesquisadores no Brasil e em países, como Inglaterra, França, Estados Unidos da América, entre outros.

A integração das novas tecnologias aos sistemas de ensino merece uma ampla discussão dos benefícios e limitações que esses recursos podem oferecer e das condições necessárias à sua implementação.

O uso das tecnologias demanda um tempo para o domínio de sua interface, parece existir uma resistência ou dificuldade inicial por parte dos usuários. Em geral, esta barreira é superada pelo tempo e pelo próprio desenvolvimento da tecnologia que aperfeiçoa a interface.

Nesse sentido, pode-se fazer uma analogia do computador com o advento do automóvel, Ford projetou o primeiro automóvel que só poderia ser conduzido por um especialista, pois os comandos e controles exigiam habilidades e conhecimentos do condutor que um leigo não poderia oferecer e as ruas não eram adequadas para circulação desse tipo de veículo. No entanto, com o avanço e o desenvolvimento tecnológico, o modo de conduzir esses carros foi aperfeiçoado com comandos que facilitaram a utilização por usuários não especialistas. As ruas foram adaptadas, os mecanismos de funcionamento padronizados e otimizados e as regras de condução foram instituídas. Os cursos para se dirigir veículos motorizados foram criados, sinalizações foram mundialmente adotadas e diversos modelos desenvolvidos para variados fins (KAPUT apud MENGAI, 2005, p.1).

Enfim, se os veículos atuais – carros, ônibus, caminhões, etc., forem comparados com o primeiro modelo projetado, a forma e o contexto como, atualmente, esses recursos são utilizados, com seu emprego no passado, facilmente, as transformações e as adaptações que se fizeram necessárias serão percebidas, tanto nos aspectos tecnológicos, como também nos políticos, físicos e sociais, para que melhor os benefícios que um veículo possa proporcionar, sejam usufruídos.

Os computadores apresentam um desenvolvimento semelhante. No início, eram operados somente por especialistas, em tarefas bastante específicas por meio de interfaces pouco amigáveis e, também, exigiam um conhecimento que um leigo não podia oferecer.

À medida que, os equipamentos foram evoluindo com as linguagens de programação e aplicativos, os computadores passaram a exigir menos conhecimentos específicos e as interfaces tornaram-se cada vez mais amigáveis aos seus usuários.

Desta forma, as novas tecnologias podem servir como auxiliares no processo ensino-aprendizagem, assim como o papel e lápis, os livros e as calculadoras.

Considera-se importante destacar que o emprego das tecnologias no ambiente de trabalho dos setores produtivos e de serviços apresenta objetivos diferentes do uso nos ambientes de aprendizagem dos sistemas de ensino. Enquanto no ambiente de trabalho, os objetivos do uso das tecnologias são proporcionar, produtividade, agilidade e resultados no curto prazo; no ambiente de aprendizagem, a tecnologia é usada como uma ferramenta de ensino que auxilia o aluno em cada etapa da construção de seu conhecimento e, portanto, nesse processo, o fator tempo não é o mais importante e, sim, a aprendizagem.

Por outro lado, uma empresa que precisa de um complexo cálculo financeiro para prestar uma informação a um cliente, usa a tecnologia dos computadores já dispondo de modelos matemáticos previamente construídos e instalados nos aplicativos. Assim, em uma caixa preta, o usuário digita dados de entrada e, em segundos, obtém os dados de saída ou resultado.

No ambiente de aprendizagem, a construção dos modelos matemáticos ou fórmulas matemáticas poderá ser realizada pelos alunos. Desta forma, o uso da tecnologia é de natureza diferente. Ou seja, no ambiente educacional, a participação na construção de modelos matemáticos em diferentes softwares pode ajudar o aprendiz a abrir as caixas pretas e refletir sobre seu funcionamento.

## 1.9 O ensino nos livros didáticos

O ensino de Matemática Financeira nos cursos de graduação, em particular, nos cursos de Administração, tem sua prática fortemente ligada aos livros didáticos de Matemática Financeira.

Em geral, as ementas e conteúdos programáticos da disciplina de Matemática Financeira são elaborados com base em uma bibliografia, escolhida pelos professores da instituição e colocada à disposição dos alunos para estudo e consulta. Parece que a prática e a abordagem de ensino adotadas em sala de aula pelos professores são bastante influenciadas pela forma de apresentação desses conteúdos nos livros.

Em razão, do grande número de alunos matriculados nos cursos de Administração no Brasil, as publicações de livros didáticos de Matemática Financeira vêm aumentando de forma significativa.

A seguir, considerações sobre alguns livros, quanto à forma de apresentação de determinados conceitos e dedução das fórmulas de cálculo dos juros simples compostos e a utilização de ferramentas computacionais. Estes livros estão nas bibliografias da disciplina de Matemática Financeira dos cursos de Administração das duas Faculdades, onde ministro aulas e são utilizados por outros professores dessas instituições. Estes livros foram escolhidos por fazerem parte de nossa experiência em sala de aula.

No livro “MATEMÁTICA FINANCEIRA USANDO EXCEL – Como Medir Criação de Valor”, (LAPPONI, 2002), o autor define “Operação Financeira Elementar”, como uma operação financeira de dois capitais, prazo coincidente com o período da taxa de juro e uma única capitalização. Ao usar, o que são nomeados no livro de “Modelos” (descrito como tentativas de representar a realidade), desenvolve conceitos dos regimes de juros simples e compostos, registrando as fórmulas na Barra de Fórmulas do Excel. Introduz, também, o Simulador 12C em Excel, uma ferramenta do software Excel que simula a calculadora HP 12C.

Nos regimes de juros simples e compostos, as fórmulas do montante são, passo a passo, demonstradas com passagens algébricas. Já, a dedução das fórmulas derivadas: do cálculo do capital, dos juros e da taxa de juros, talvez por serem deduções algébricas elementares e fugirem do foco principal do livro, não é feita.

O livro “MODELAGEM FINANCEIRA com EXCEL”, (LAPPONI, 2003), apresenta, também, a modelagem de operações financeiras com os recursos da planilha eletrônica do Excel. Combina temas financeiros e o Excel dentro de uma metodologia de desenvolvimento e construção de projetos. Introduz recursos das Macros em VBA (*Visual Basic Application*). Não utiliza a calculadora HP 12C. Em particular, as fórmulas dos juros simples ou compostos são apresentadas e não deduzidas. Mas dentro da proposta do livro de modelagem financeira com Excel, cada tema inicia-se com a definição da operação a ser modelada e o objetivo é a construção de fórmulas matemáticas.

O livro “MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA”, (CRESPO, 2000) apresenta a dedução algébrica da fórmula do montante nos regimes dos juros simples e compostos. Deduz com passagens algébricas as fórmulas derivadas do montante. Não incorpora o uso de recursos de planilha eletrônica, faz uso da Tábua ou Tabela Financeira e, também, das calculadoras científicas.

O livro “MATEMÁTICA FINANCEIRA E APLICAÇÕES À ANÁLISE DE INVESTIMENTOS” (SAMANEZ, 2006), apresenta o cálculo dos juros simples como uma operação aritmética de multiplicação, deduz a fórmula do montante. Compara os regimes de juros simples e compostos, usando uma planilha não eletrônica e conclui deduzindo a fórmula do Montante em juros compostos. Introduz a calculadora HP12C e a planilha eletrônica Microsoft Excel na resolução dos exercícios propostos.

O livro “MATEMÁTICA FINANCEIRA”, (TEIXEIRA & NETTO, 1998) apresenta o conceito de montante em juros simples e compostos, empregando o recurso de planilhas não eletrônicas, calculando mês a mês os juros e incorporando-os ao montante anterior. Deduza, também, algebricamente as fórmulas do montante nos dois regimes de capitalização. Utiliza as Tabelas

Financeiras para os cálculos exponenciais. Não inclui atividades explicitamente elaboradas para serem resolvidas com calculadoras ou planilhas eletrônicas.

O livro “MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA USUÁRIOS DO EXCEL”, (SHINODA, 1998) apresenta modelos associados aos conceitos de Matemática Financeira, com o uso da álgebra ou das fórmulas prontas disponíveis no aplicativo. Explora a simulação de situações, envolvendo múltiplas variáveis. Utiliza, também, a calculadora HP12C nas resoluções dos exercícios propostos.

O livro “MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA” (FARIA, 2000), apresenta a dedução algébrica da fórmula do montante em juros simples e compostos. Utiliza as Tabelas Financeiras para os cálculos exponenciais, não emprega, calculadoras nem planilhas eletrônicas.

O livro “MATEMÁTICA FINANCEIRA” (HAZZAN & POMPEO, 2001), deduz algebricamente as fórmulas do montante nos dois regimes de capitalização. Emprega as tradicionais tábuas ou tabelas financeiras, mas dá ênfase ao uso das calculadoras, em particular, das funções financeiras da calculadora HP 12C. Apresenta, também, um apêndice sobre o uso da planilha eletrônica Microsoft Excel. Os autores destacam, que este assunto foi colocado em apêndice, pois, julgam que, em primeiro lugar, o aluno deverá adquirir um domínio sobre os conceitos da Matemática Financeira.

Aparentemente, estes livros apresentam as fórmulas das operações financeiras “prontas” e destinam pouco tempo aos exercícios ou atividades para construção de fórmulas, em particular, ao desafio da dedução da fórmula do montante no regime dos juros compostos, como atividade. Embora alguns façam a dedução algébrica das fórmulas, destinam, também, pouco tempo às deduções algébricas das fórmulas derivadas.

Assim, este estudo foi motivado pelo desejo de explorar, a dedução de fórmulas ou construção de modelos matemáticos, como um desafio que, embora não seja comum nas Atividades ou Exercícios dos livros didáticos de Matemática Financeira, poderá contribuir para a apropriação de conceitos básicos como: Capital, Juros e Montante. Julga-se que mesmo que os aprendizes não tenham

êxito total na construção de seus próprios modelos, talvez, suas estratégias na tentativa de resolução possam facilitar outras etapas da aprendizagem.

Neste sentido, para propiciar este desafio aos aprendizes, este trabalho define como operação financeira básica, um empréstimo (ou aplicação) por um único período e propõe com base nisso a construção da fórmula ou modelo do cálculo dos juros em um período, que é uma operação aritmética de multiplicação (capital vezes taxa). Em seguida, também, propõe o desafio da construção da fórmula (modelo) do cálculo do montante em um período (capital mais juros).

Desta forma, paralelamente ao uso de ferramentas computacionais, procura-se dar ênfase a utilização dos conhecimentos de aritmética e das estruturas algébricas.

## **CAPÍTULO 2. OS SISTEMAS COMPUTACIONAIS COM FINS EDUCACIONAIS**

---

### **2.1 Introdução**

Como foi mencionado no Capítulo 1, nas últimas décadas, a tecnologia tem mudado a prática de muitas das atividades humanas. Embora, em ritmo mais devagar, as práticas educacionais, também, seguem essa tendência. Os sistemas computacionais com fins educacionais acompanham a história e a evolução dos computadores. Os primeiros usos do computador em Educação surgiram ainda no final da década de 1950 e representavam as possibilidades tecnológicas da época (VALENTE, 2002, p.49).

É possível identificar dois paradigmas distintos do uso do computador na educação. O computador pode ser empregado na educação, como máquina de ensinar ou como máquina a ser ensinada. Assim, como máquina de ensinar consiste na informatização dos métodos de ensino tradicionais. Do ponto de vista pedagógico, este é o paradigma instrucionista (VALENTE, 1993).

Enquanto o paradigma instrucionista enfatiza o software e o hardware (a máquina), com vistas a ensinar o aluno e não provocar conflitos cognitivos; no paradigma construcionista, o software ou a aplicação são construídos pelo aluno individual ou cooperativamente e centra-se no pensamento e na criação, no desafio e na descoberta. As práticas pedagógicas de utilização de computadores realizam-se sob abordagens que se situam entre – instrucionistas e construcionistas (VALENTE, 1993).

Ainda sobre as abordagens de ensino, na maioria das vezes, as teorias matemáticas são apresentadas, como algo acabado e completo e acabam conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada da realidade, e mesmo do processo histórico da construção da Matemática.

Assim, Rodney cita que:

...um teorema é ensinado, seguindo o seguinte esquema: 'enunciado → demonstração → aplicação', quando de fato o que poderia ser feito é a sua construção na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema), isto é, sua motivação (externa ou não à matemática), a formulação de hipóteses, a validação das hipóteses e novos questionamentos, e finalmente seu enunciado. Estaríamos assim reinventando o resultado juntamente com os alunos, seguindo o processo de modelagem e conjugando verdadeiramente o binômio ensino-aprendizagem (RODNEY, 2002, p.36).

## 2.2 O paradigma instrucionista

O ensino assistido por computador é uma classe de sistemas que exemplifica o paradigma instrucionista de aprendizagem, sistema que detém o controle da interação aprendiz-sistema e baseado originalmente na abordagem da instrução programada.

Segundo Valente:

A chamada "instrução programada" foi a base para os primeiros sistemas e representava uma automatização do processo de ensino/aprendizado consistente com as possibilidades tecnológicas da época. Essa classe de sistemas continuou a evoluir, incorporando avanços tecnológicos, principalmente na área de Inteligência Artificial (IA), que possibilitaram uma sofisticação grande nos sistemas computacionais derivados, atualmente chamados, Tutores Inteligentes (TI). Dos primeiros sistemas, entendidos como máquinas de ensinar, os atuais "imitam" a ação de um tutor, gerando problemas de acordo com o nível entendido do estudante em particular, comparando as respostas dos estudantes com as de especialistas no domínio, diagnosticando fraquezas, associando explicações específicas para certos tipos de erros, decidindo quando e como intervir. Essa classe de sistemas é chamada de Ensino Assistido por Computador (VALENTE, 2002, p.49).

O ensino assistido ou auxiliado por computador parte do pressuposto de que a informação é a unidade fundamental no ensino e, portanto, preocupa-se com os processos de como adquirir, armazenar, representar e, sobretudo, transformar informação. Nesse sentido, o computador é visto como uma

ferramenta poderosa de armazenamento, representação e transmissão de informação (VALENTE, 2002).

Nessa categoria de sistema computacional, estão os sistemas CAI (*Computer Assisted Instruction* – ou Instrução Auxiliada pelo Computador), que surgiram na década de 1960 e seguiam a metodologia da instrução programada da década de 1950. O método da instrução programada consiste na organização do conteúdo a ser ensinado em módulos que são apresentados ao aprendiz de forma gradual e contínua. Nesse sistema, o conteúdo ou o material instrucional a ser transmitido era apresentado ao aprendiz de forma rígida. Ao final de cada módulo, o estudante era submetido a uma prova ou teste que, em caso de reprovação, impossibilitava-o de continuar. Para ter acesso aos módulos seguintes, o estudante, então, deveria repetir o módulo anterior até, que suas respostas fossem corretas.

Conforme o autor, embora, a tecnologia do computador à época fosse bastante promissora, no sentido de automatizar o método da instrução programada, tais sistemas não alcançaram o sucesso prometido. Os sistemas CAI representavam, apenas, a passagem dos conteúdos a serem transmitidos da forma impressa nos livros para a tela do computador. A interação estudante-sistema era controlada pelo sistema.

Do ponto de vista tecnológico, os sistemas CAI evoluíram para os sistemas ICAI (*Intelligent Computer Assisted Learning*), na década de 1970, em resposta às limitações dos anteriores. Estes sistemas propunham-se a auxiliar o processo de ensino-aprendizagem, utilizando técnicas e métodos de Inteligência Artificial (IA) para representar o conhecimento e conduzir a interação com o estudante (SANTOS, 1997). Os sistemas ICAI resultaram em um maior controle por parte do sistema computacional em relação ao acompanhamento de como acontece o aprendizado durante a interação estudante-sistema.

Os sistemas ICAI evoluíram acompanhando as novas tecnologias e novas técnicas de Inteligência Artificial. Esta classe de sistemas continua sendo objeto de muita pesquisa acadêmica.

## 2.3 O paradigma construcionista

Em contraste aos sistemas baseados no paradigma instrucionista, em que pouca ou nenhuma iniciativa e controles são reservados ao estudante, nos anos de 1970, um novo paradigma educacional começou a nortear o desenvolvimento dos sistemas computacionais para uso em Educação, fundamentado nas idéias “construcionistas” de Papert (1986). A “liberdade” de iniciativa, o controle do estudante no ambiente computacional e o aprendizado entendido, como construção pessoal do conhecimento proposto por Papert e exemplificado pelo ambiente de programação Logo, inicialmente, foram contrapostos às noções diretivas de currículo e ensino.

A introdução das idéias construcionistas na educação aconteceu com Seymour Papert, que estudou durante os anos de 1960, em Genebra, no Centro de Epistemologia Genética com Jean Piaget. Papert incorporou muito das idéias de Piaget, suas pesquisas sempre tiveram como foco o estudo dos processos de aprendizagem e definiu o construcionismo, como sua reconstrução pessoal do construtivismo (PAPERT, 1994).

Segundo Papert:

As metáforas de transmitir e construir são temas difundidos de um movimento educacional, maior e muito mais variado, dentro do qual situo o construcionismo e ressalto isso pelo jogo de palavra em seu nome. Para muitos educadores e para todos os psicólogos cognitivos, minha palavra evocará o termo construtivismo, cujo uso educacional contemporâneo, em geral, remete à doutrina de Piaget de que o conhecimento simplesmente não pode ser “transmitido” ou “transferido pronto” para uma outra pessoa. Mesmo quando você parece estar transmitindo com sucesso informações, contando-as, se você pudesse ver os processos cerebrais em funcionamento, observaria que seu interlocutor está ‘reconstruindo’ uma versão pessoal das informações que você pensa estar “transferindo” (PAPERT apud DRISOSTES, 2005, p.15).

Na abordagem construcionista, o computador não é detentor do conhecimento, mas uma ferramenta tutorada pelo aprendiz que lhe permite, por exemplo, buscar informações em redes de comunicação, tanto presencial como a

distância, navegar entre nós e ligações, de forma não-linear, seguindo seu estilo cognitivo e seu interesse momentâneo.

Atualmente, uma classe de sistemas computacionais, baseada na idéia de ferramentas, para uma rica interação em ambientes interessantes, é proposta para promover o aprendizado “construcionista”. O objetivo é encorajar o estudante a tomar a iniciativa e o aprendizado entendido, não como mera aquisição de conhecimento, mas, como: uma evolução em direção à *expertise* (CUMMING & SELF, 1990), nos quais componentes, como, planejamento, descrição, execução e reflexão são partes do ciclo interativo do aprender (VALENTE, 1993). O “aprender fazendo e refletindo” em ambientes de modelagem e simulação, os micromundos, os ambientes de programação são exemplos de “Ambientes Interativos de Aprendizagem”.

## **2.4 Ambientes interativos de aprendizagem**

Denomina-se “Ambientes Interativos de Aprendizagem” (AIA), à classe de sistemas computacionais que exemplificam o paradigma construcionista e cujo controle da interação está totalmente nas mãos do aprendiz ou é compartilhado entre aprendiz e sistema.

Diferente dos sistemas CAI e TIs, nos Ambientes Interativos de Aprendizagem, o aprendizado é entendido, como construção individual do conhecimento com base nas atividades de exploração, investigação e descoberta. Nessa classe, sistemas são um análogo dos sistemas físicos estudados por cientistas: não ensinam nem instruem, apenas têm um determinado comportamento. É o aprendiz como cientista que aprende os princípios, analisando o comportamento do sistema em experimentação (THOMPSON, 1987).

Desse modo, destacam-se os princípios gerais que fundamentam os Ambientes Interativos de Aprendizagem (AIA), segundo (VALENTE, 2002).

- Construção e não instrução: estudantes aprendem mais efetivamente construindo seu próprio conhecimento, não sendo ensinados por meio de leitura, nem por uma sequência organizada de exercício-e-prática;
- Controle do estudante e não controle do sistema: o estudante tem um controle não exclusivo, mas sim significativo da interação na aprendizagem.
- Individualização é determinada pelo estudante e não pelo sistema: os AIAs concordam com os TIs no sentido de que *feedback* e informação individualizada são chaves na aprendizagem. Entretanto, diferem no ponto onde a informação individualizada é originada. Ao passo que o tutor é responsável por moldar o *feedback* dentro de um TI, nos AIAs os estudantes, geralmente, recebem o mesmo *feedback* e informação, como função de sua interação com o sistema, esta, sim, individualizada.
- *Feedback* rico, gerado com base na interação do estudante com o ambiente de aprendizagem e não pelo sistema: o *feedback* é gerado, como função das escolhas e ações do estudante dentro do ambiente de aprendizagem, em vez de um discurso gerado pelo sistema tutor.

Na classe dos Ambientes Interativos de Aprendizagem, estão os sistemas de Modelagem e Simulação, Micromundos, o uso de linguagens de programação e os sistemas de autoria.

Com o desenvolvimento dos sistemas computacionais e dos aplicativos como processadores de texto e planilhas eletrônicas, e o acesso à rede mundial de computadores, ocorrido nos últimos 15 anos, o computador transformou-se em uma poderosa ferramenta de comunicação, consolidando seu uso como ferramenta de ensino-aprendizagem.

Neste sentido, pode-se citar Valente:

(...) embora os usos iniciais do computador na Educação enfatizassem o uso da tecnologia como uma alternativa para a prática de transferir

informação ao aluno (instrucionismo), as aplicações mais recentes têm enfatizado o uso do computador como uma ferramenta educacional que requer dos estudantes muito mais envolvimento (é o caso de simulação, modelagem, programação). Novas tecnologias têm sido “acopladas” ao computador propriamente dito amplificando seu poder de constituir ambientes de aprendizado (VALENTE, 2002, p.84).

O computador pode ser um importante recurso para promover a passagem da informação ao usuário ou facilitar o processo de construção do conhecimento. No entanto, o processo não deve estar restrito ao software, mas à interação do aluno-software. Conforme foi mostrado por Piaget, o nível de compreensão está relacionado com o nível de interação que o aprendiz tem com o objeto e não com o objeto em si.

Alguns softwares apresentam características que favorecem a compreensão, como no caso da programação; e outros, nos quais certas características não estão presentes, requerem maior envolvimento do professor, criando situações complementares ao software, de modo a favorecer a compreensão, como no caso do tutorial (VALENTE, 2002).

O processo de construção do conhecimento, também, pode acontecer quando o aprendiz utiliza o software como o processador de textos ou sistemas de autoria. A diferença da programação para esses outros usos é quanto estes softwares oferecem em termos de facilidade para realização do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição.

## **2.5 Modelos computacionais**

A tentativa de representar uma determinada realidade por meio de equações matemáticas, premissas, regras e restrições impostas pelas condições da realidade que se tenta reproduzir, é chamada modelo matemático. Além de fenômeno do mundo real, também, é possível investigar atividade matemática por meio de fórmulas, representando modelos matemáticos, como por exemplo, a

fórmula dos juros compostos utilizada para calcular o valor futuro de uma operação financeira sob o regime de juros compostos (LAPPONI, 2003, p. 15).

Conforme acentua Valente:

Chamamos modelagem computacional a atividade de usar o computador para expressar o modelo de um fenômeno/processo, com o objetivo subsequente de explorar possíveis conseqüências do modelo e reavaliar, a partir do *feedback* da simulação, não apenas o modelo construído, mas o próprio conhecimento sobre o fenômeno/processo alvo (VALENTE, 2002, p.60).

Assim, sistemas computacionais do tipo AIA (Ambientes Interativos de Aprendizagem) podem constituir ambientes de aprendizado poderosos por envolver o aprendiz no ciclo básico da expressão, avaliação e reflexão sobre o domínio considerado. A exigência do computador para a expressão formal de um modelo (fórmula) leva o aprendiz a definir mais precisamente seu conhecimento sobre o assunto.

Além disso, a execução do modelo na máquina possibilita uma avaliação que pode levar o aprendiz a questionar o modelo, reavaliar seu conhecimento e expressá-lo novamente, continuando o ciclo de ações ao estilo construcionista de aprendizagem (PAPERT, 1986; VALENTE, 1993).

No ambiente escolhido para a presente pesquisa, o usuário-aprendiz utiliza o software Microsoft-Excel para construir seu próprio modelo (ou fórmula na planilha eletrônica) do fenômeno/objeto sob estudo, empregando primitivas específicas para representação do modelo, fornecidas pelas instruções presentes nas atividades propostas. Construído o modelo, o sistema executa (simula) e apresenta resultados da simulação. Nesse cenário de simulação usando a ferramenta computacional, o usuário testa suas hipóteses e pode, então, analisar os resultados obtidos e recomeçar o ciclo de descrição-execução-reflexão-depuração-descrição.

## 2.6 História das planilhas – um breve relato

Ao longo dos séculos, as planilhas têm sua História ligada ao acompanhamento de registros e ferramentas de contabilidade. As planilhas não eletrônicas, impressos formados, também, por linhas e colunas, foram muito utilizadas até meados da década de 1980, quando então surgiram as planilhas eletrônicas.

As planilhas apresentam um *layout* favorável para acomodar os textos dos registros financeiros e os valores numéricos correspondentes em uma combinação de linhas e colunas que ainda permitem cálculos aritméticos. Parece que tudo isso fez delas uma ferramenta importante para os registros administrativos e contábeis, pois elas alavancaram o uso dos computadores.

Nesse sentido, Houghton diz:

A invenção das planilhas criadas para computadores pessoais tem valor real no mercado e legitimou a indústria do computador pessoal. Sem a invenção dessa categoria de software, planilhas, o impacto do computador pessoal poderia ter demorado anos (HOUGHTON apud BAKER, 2003, p.18).

No ano de 1979, a primeira planilha eletrônica (*electronic spreadsheets*), Visicalc foi criada por Dan Bricklin (concepção) e Bob Frankston (programação) para a plataforma Apple II. O Visicalc foi concebido e desenvolvido como uma ferramenta para fazer os cálculos repetitivos dos estudos de Bricklin em Harvard Business School. Bricklin e Frankston venderam seus direitos do Visicalck à Lotus Development Corporation que desenvolveu, em 1982, o Lótus 1-2-3 um enorme aplicativo para o então novo IBM PC. Este produto dominou o mercado na maior parte dos anos de 1980. Chegou, então, o Microsoft Excel que primeiro foi desenvolvido para o Apple Macintosh, mas, também foi o primeiro real aplicativo Microsoft Windows (BAKER & SUDGEN, 2003).

Desde o início dos anos de 1990, a Microsoft tem mantido o domínio de parte do mercado e, atualmente, comanda um mercado de planilhas superior a 90%.

## **2.7 As planilhas eletrônicas como ambiente de aprendizagem**

Embora, criadas para fins comerciais, a utilização das planilhas eletrônicas no ensino tem aumentado muito e também, as pesquisas de suas potencialidades como ferramenta de ensino.

Como exemplo, pode-se citar o trabalho da pesquisadora Marian Haspekian (2005), que considerou o papel das planilhas eletrônicas no ensino de conceitos algébricos em sua pesquisa focada na integração desta ferramenta.

No ambiente de papel e lápis, diversos pesquisadores já investigaram essas dificuldades de aprendizagem algébrica e, freqüentemente, elas têm sido relatadas em diferentes análises: procedimental (SFARD, 1991); dificuldades semânticas (DROUHARD, 1992); relacionamento algébrico (VERGNAUD et al., 1998; VERGNAUD, 1989; 1990). Assim, a posição da álgebra com respeito à aritmética tem sido vista em termos de uma ruptura: descontinuidade/falsa continuidade (BEDNARZ & JANVIER, 2001)

O uso de planilhas no ensino de matemática tem sido investigado por vários autores, por exemplo: (AINLEY, 1999); (AINLEY e al. 1999; 2003); (ARZARELLO et al., 1994; 2001); (CAPONI, 1999; 2000); (DETTORI et al., 1995); (ROJANO & SUTHERLAND, 1997) e (ROJANO, 1996; 2001). Todos estes estudos relatam a aprendizagem nos estágios elementares e, geralmente, dão às planilhas um papel positivo nesta aprendizagem; enfatizam a condição ambígua ou híbrida (aritmético-algébrica) das planilhas (HASPEKIAN, 2005).

Nessa passagem da aritmética para a álgebra, parece residir uma parte das dificuldades da aprendizagem e, também, um campo de pesquisa importante das potencialidades de ensino-aprendizagem das planilhas eletrônicas.

As planilhas eletrônicas parecem como uma boa ferramenta para a mediação semiótica ou como ferramenta híbrida viva na transição mundial entre a aritmética e a álgebra. A questão didática é que esta posição parece 'ideal' (sob certas condições) para auxiliar a transmissão da aritmética para a álgebra (ROJANO & SUTHERLAND, 1997) ou para produzir ambigüidades interessantes para a aprendizagem e uso de idéias algébricas (AINLEY, 1999).

Nas últimas décadas, o uso das planilhas eletrônicas como ambiente de ensino-aprendizagem da Matemática, parece ter se consolidado e as potencialidades reconhecidas por muitos pesquisadores, entre eles, são citados:

D'Souza e Wood investigaram o benefício das planilhas em um ambiente de aprendizagem colaborativa no nível da escola secundária, com aplicativos da Matemática Financeira Elementar. Os autores argumentam que as planilhas têm potencial enorme para auxílio na aprendizagem de conceitos algébricos. Podem ser de grande benefício em todos os níveis. As planilhas permitem aos estudantes concentrar seu raciocínio sobre o sujeito matemático à mão ao invés do software (WOOD & D'SOUZA apud BAKER, 2003, p.21).

Beare (1993) destaca nas planilhas eletrônicas o valor da repetição:

Planilhas ... têm um número muito significativo de benefícios, muitos dos quais agora são evidentes. Primeiramente eles facilitam uma variedade de estilos de aprendizagem os quais podem ser caracterizados pelos termos: open-ended (aberto) problema orientado, construtivista, investigativo, descoberta orientada, ativo e centrado no estudante. Além disso, elas oferecem os seguintes benefícios adicionais: elas são interativas; elas dão imediato *feedback* para a troca de dados ou fórmulas; elas permitem dados, a produção de fórmulas e gráficos para serem disponibilizados ao mesmo tempo na tela; elas dão ao estudante uma grande medida de controle e propriedade sobre o ensino; e as planilhas podem resolver problemas complexos e suportar uma grande quantia de dados sem a necessidade de programação (BEARE apud BAKER, 2003, p.21).

O uso da planilha Excel para a construção da fórmula matemática dos juros e do montante é uma das possibilidades de exploração das planilhas como ambiente de aprendizagem. Nesta pesquisa, é utilizada a expressão modelo matemático como sinônimo de fórmula na planilha eletrônica.

Conforme acentua Lapponi (2003) os modelos matemáticos empregados como ferramenta de ensino são formados de três partes:

- As entradas, os dados disponíveis ou as variáveis independentes.
- As respostas, os resultados desejados ou variáveis dependentes.
- O desenvolvimento de uma ou mais fórmulas matemáticas que atendam às regras, relações e restrições, a que os dados e os resultados devem obedecer.

Os modelos ganham vida quando são implementados em um microcomputador, a construção de um modelo em uma planilha eletrônica tem, também, três partes:

- A definição das células ou procedimentos para entrada de dados.
- A captura dos dados e o desenvolvimento dos procedimentos de cálculo para obter os resultados desejados, utilizando os recursos da planilha.
- A definição das células ou dispositivos para apresentar os resultados.

Apesar das três partes necessárias, a construção de um modelo poderá ter seu desenvolvimento não-linear. Em uma situação geral, é possível que faltem ou sobrem dados. Depois de construído, o modelo matemático deverá ser validado. Verificar se os resultados obtidos são coerentes com as regras e relações definidas pela realidade ou enunciado de uma situação-problema.

Uma consequência importante do uso do modelo será seu *feedback*, o aprendizado da realidade que o modelo tenta representar. A experiência mostra que em muitos casos, o modelo é maior que a compreensão que o projetista ou usuário tem da realidade. Deve-se ser receptivo para aprender com o modelo situações da realidade que eram desconhecidas (LAPPONI, 2003).

## **CAPÍTULO 3. A PROBLEMÁTICA E A METODOLOGIA**

---

### **3.1 Introdução**

Neste capítulo serão apresentados: o problema a ser estudado, a metodologia para aplicação e a análise das atividades da pesquisa e será discutido o processo de elaboração das atividades nos ambientes de papel e lápis e de planilha eletrônica.

### **3.2 O problema de pesquisa**

A vivência como cidadão e professor de Matemática levaram-me à convicção de que a Matemática Financeira é um instrumento importante para o exercício da Cidadania, presente em toda a atividade humana relacionada ao trabalho, consumo e finanças. Esta vivência, além das considerações apresentadas nos capítulos anteriores, também, deu-me a percepção da insuficiência das abordagens limitadas à seqüência tradicional do tipo: definição, fórmulas, propriedades, exemplos de aplicação e exercícios de avaliação. Assim, este trabalho foi desenvolvido sobre a pesquisa de ensino-aprendizagem da Matemática Financeira, conduzindo aprendizes na construção de seus próprios modelos (fórmulas) para o cálculo dos juros e montante utilizando ferramentas computacionais. O objetivo foi explorar as possibilidades dessa abordagem, inspirada no paradigma construcionista, para a aprendizagem de conceitos básicos associados à Matemática Financeira.

Os sujeitos da pesquisa foram alunos dos cursos noturnos de Administração de duas instituições particulares de ensino superior, localizadas na zona sul e centro da cidade de São Paulo. Esses alunos, em geral, trabalham

durante o dia, exercendo funções administrativas em empresas públicas e privadas.

O trabalho de pesquisa foi desenvolvido com a aplicação de atividades para o cálculo dos juros e do montante nos regimes de capitalização dos juros simples e juros compostos. Os alunos foram conduzidos durante a aplicação das atividades ao desafio de apresentar a uma generalização das operações aritméticas realizadas para esses cálculos. Processo que se denomina de construção de um modelo matemático ou, simplesmente, dedução de uma fórmula matemática.

Para orientar o trabalho, as seguintes questões de pesquisa de Educação Matemática de ensino-aprendizagem de Matemática Financeira utilizando ferramentas computacionais foram consideradas.

O presente trabalho está inserido em uma problemática ampla, que busca responder às seguintes questões:

1. Qual o impacto da abordagem construcionista de ensino na concepção dos aprendizes em relação aos conceitos da Matemática Financeira?
2. Em que medida a utilização de planilhas eletrônicas, como ferramenta de ensino dos conteúdos da Matemática Financeira contribui para a aprendizagem do aluno?

Mais especificamente, o objetivo é colaborar no entendimento e elucidação dessas questões, criando e analisando uma seqüência de Atividades de Matemática Financeira que utiliza planilhas eletrônicas, envolve aprendizes na construção (dedução) de modelos (fórmulas) para o cálculo dos juros e montante, nos regimes de capitalização, dos juros simples e juros compostos.

Durante as atividades propostas, são investigados os significados e as produções dos aprendizes, em ambiente de papel e lápis e no ambiente computacional com planilhas eletrônicas.

### 3.3 Experimento de ensino

Para responder às questões levantadas na presente pesquisa foi utilizada a Metodologia Experimento de Ensino (*Design Experiments*).

Segundo Kelly & Lesh (2000), uma das características que distingue esta metodologia das demais, é a insolubilidade entre os papéis de pesquisador e professor, pois, muitas vezes, os papéis são redistribuídos de forma a atribuir ao pesquisador o papel de professor ou de co-aprendiz. Nesta metodologia, o pesquisador tem a oportunidade de investigar o raciocínio matemático dos alunos em experimentações que podem influenciar, tanto no significado dado ao conhecimento matemático como em sua construção (Steffe & Thompson apud Accioli, 2005).

Conforme Cobb:

Prototicamente, o Experimento de Ensino desenha uma ‘engenharia’ de formas particulares de aprendizagem e sistematicamente estuda aquelas formas de aprendizagem dentro de um contexto definido pelos significados que lhes dão sustentação. Este Experimento de Ensino e contexto está sujeito a teste e revisão, e a sucessivas iterações que resultam um modelo semelhante de variações sistemáticas no experimento (COBB et al. 2003, p.9).

O Experimento de Ensino é uma metodologia que resulta idealmente em uma maior compreensão de uma Ecologia de Aprendizagem (*learning ecology*) – um complexo sistema interativo, envolvendo múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis – pelo desenho dos elementos e pela expectativa, como esses elementos funcionam juntos para sustentar a aprendizagem. O Experimento de Ensino, portanto, constitui um significado de uma complexidade de discursos que, é uma marca característica do cenário educacional. Os elementos de uma Ecologia de Aprendizagem tipicamente incluem as tarefas ou os problemas que os estudantes são desafiados a resolver, os tipos de discursos que são estimulados, as normas de participação que são estabelecidas, as ferramentas e materiais a serem fornecidos e meios práticos por meio dos quais os professores

podem estabelecer relações com o conjunto desses elementos (COBB et. Al. 2003, p.9).

Segundo o DBRC (2003a) (Design-Based Research Collective):

O cenário da pesquisa em educação tem historicamente caminhado por dois amplos objetivos: entender como as pessoas aprendem, particularmente no cenário escolar, e o design de caminhos para assegurar que a aprendizagem irá acontecer nesse cenário.

O termo design envolve atividades como planejar, delinear, desenhar, esboçar, projetar, esquematizar, criar, inventar. A atividade design envolve a construção de artefatos ou objetos, que podem ser concretos ou abstratos: uma escultura, uma tese, um programa de computador ou uma atividade educacional.

Cobb et al. (2003, p.9-10) identificaram cinco características transversais que caracterizavam a metodologia Experimento de Ensino (*Design Experiments*):

- Primeiramente, a finalidade de um experimento de Ensino é desenvolver uma classe de teorias a respeito, tanto do processo de aprendizagem como dos significados que são desenhados para dar suporte à aprendizagem, e “estes últimos vinculados aos artefatos materiais, às práticas de ensino e de aprendizagem, à negociação de normas e outras formas de mediação” (KARRER, 2006).
- Em segundo lugar, é uma metodologia altamente intervencionista, procurando sempre a inovação. Experimento de Ensino tem como meta representar bases iniciais para futuras inovações e isto significa que a intenção desse tipo de metodologia é inquirir sobre as possibilidades de novas formas de aprendizagem, visando a mudanças educacionais.
- A terceira característica envolve seus aspectos prospectivos e reflexivos. No primeiro deles, o design é implementado como um processo de aprendizagem baseado por hipóteses. Já no segundo aspecto, conjecturas são realizadas com vários níveis de análise. O design ou projeto inicial é uma conjectura sobre os significados que darão suporte a uma forma particular de aprendizagem que por sua vez

será testada. Na condução do experimento, são realizadas e testadas conjecturas mais especializadas e se uma conjectura inicial é refutada, podem ser geradas e testadas novas conjecturas alternativas.

- Juntos, os aspectos prospectivo e reflexivo resultam em uma quarta característica, o design iterativo. Como conjecturas, são geradas e talvez refutadas, novas conjecturas são desenvolvidas e sujeitas a teste. Esta característica foca-se nos ciclos de intervenção e revisão necessários para o desenvolvimento da pesquisa.
- A quinta e última característica está relacionada com suas raízes pragmáticas, reivindicando que a teoria usada deve fazer “trabalho real”. As teorias desenvolvidas durante o processo de experimentação são humildes, modestas, não apenas no sentido de que estão relacionadas a um domínio específico do processo de aprendizagem, mas também porque são responsáveis pela atividade de design (pelo fato de desempenharem um trabalho real).

### **3.4 Descrição-execução-reflexão-depuração-descrição**

Na análise das atividades utiliza-se também, o ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição. Quando o aprendiz programa o computador, este pode ser visto como uma ferramenta para resolver problemas. O programa produzido utiliza conceitos, estratégias e um estilo de resolução de problemas. Nesse sentido, a realização de um programa exige que o aprendiz processe a informação, transforme-a em conhecimento que, de certa maneira, é explicitado no programa. A análise da atividade de programar o computador, usando uma linguagem de programação, permite identificar diversas ações que acontecem em termos do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição que o aluno realiza e que são de extrema importância na aquisição de novos conhecimentos, como são apresentadas a seguir (VALENTE, 2002):

- **Descrição da resolução do problema em termos de linguagem de programação.** Isso significa utilizar toda a estrutura de conhecimento (conceitos envolvidos no problema, estratégias de aplicação dos conceitos, conceitos sobre o computador, sobre linguagem, etc.) para representar e explicitar os passos da resolução do problema em termos de linguagem de programação.
- **Execução dessa descrição pelo computador.** A descrição de como o problema é resolvido em termos de uma linguagem de programação que pode ser executada pelo computador. Esta execução fornece um “*feedback*” fiel e imediato, desprovido de qualquer animosidade ou afetividade que possa haver entre aluno e computador. O resultado obtido é fruto somente do que foi solicitado à máquina.
- **Reflexão sobre o que foi produzido pelo computador.** A reflexão pode produzir diversos níveis de abstração, os quais, de acordo com Piaget (Piaget, 1977; Mantoan, 1994) provocarão alterações na estrutura mental do aluno. A abstração mais simples é a empírica, que permite ao aprendiz extrair informações do objeto ou das ações sobre o objeto. A abstração pseudo-empírica permite ao aprendiz deduzir algum conhecimento de sua ação ou do objeto. A abstração reflexionante possibilita a projeção daquilo que é extraído de um nível mais baixo para um nível cognitivo mais elevado ou a reorganização desse conhecimento em termos de conhecimento prévio. No caso da abstração reflexionante, o aprendiz está pensando em suas próprias idéias. O processo de refletir sobre o resultado do programa pode acarretar uma das seguintes ações alternativas: ou o aprendiz não modifica seu procedimento, porque suas idéias iniciais sobre a resolução daquele problema correspondem aos resultados apresentados pelo computador e, então, o problema está resolvido; ou depura o procedimento, quando o resultado é diferente de sua intenção original.
- **Depuração dos conhecimentos por intermédio da busca de novas informações ou do pensar.** O aprendiz pode buscar informação sobre: conceitos de uma determinada área, exemplo: o aprendiz não

sabe os conceitos e diferenças dos regimes de capitalização dos juros simples e dos compostos); alguma convenção da linguagem de programação, computação ou estratégias (ele não sabe usar técnicas de resolução de problemas ou aplicar conceitos adquiridos). Esta informação é assimilada pela estrutura mental (passa a ser conhecimento) e utilizada no programa para modificar a descrição anteriormente definida. Nesse momento, repete-se o ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição.

Sob a ótica do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição, o programa do aprendiz pode ser visto como uma explicitação de seu raciocínio, em termos de uma linguagem precisa e formal. A execução desse programa pode ser interpretada como a execução de raciocínio do aprendiz, que fornece dois ingredientes importantes para o processo de construção do conhecimento. Primeiro, a resposta fornecida pelo computador é fiel. Considerando que o computador não adiciona qualquer informação nova ao programa do aprendiz, se houver qualquer engano no resultado do funcionamento do mesmo, só poderá ser produto do próprio pensamento do aprendiz. Esta resposta fiel é extremamente importante, para que ele possa se dar conta do que sabe e do tipo de informação que necessita conseguir para depurar suas idéias. Segundo, a resposta fornecida pelo computador é imediata. Depois de apertar a tecla ENTER, o aprendiz recebe os resultados, que são construídos passo a passo pelo computador, podendo confrontar suas idéias originais com os resultados na tela. Esta comparação constitui o primeiro passo no processo reflexivo e na tomada de consciência sobre o que deve ser depurado.

A atividade de depuração é facilitada pela existência do programa do computador. O programa representa a idéia do aprendiz e existe uma correspondência direta entre cada comando e o comportamento da máquina. Estas características disponíveis no processo de programação facilitam a análise do programa, de modo que o aprendiz ache seus erros (*bugs*) e o professor entenda o que ele está fazendo e pensando. Portanto, o processo de achar e corrigir o erro constitui uma oportunidade para o aprendiz aprender sobre um

determinado conceito envolvido na solução do problema ou sobre estratégias de resolução de problemas.

Entretanto, o ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição não acontece simplesmente, colocando o aprendiz diante do computador. A interação aluno-computador precisa ser mediada por um profissional – agente de aprendizagem – que tenha conhecimento do significado do processo de aprender por intermédio da construção de conhecimento. Este profissional, que pode ser o professor, deve entender as idéias do aprendiz e sobre como atuar no processo de construção do conhecimento para intervir apropriadamente na situação, de modo a auxiliá-lo nesse processo. Entretanto, o nível de envolvimento e atuação do professor é facilitado, pelo fato de o programa ser a descrição do raciocínio do aprendiz e explicitar o conhecimento que ele tem sobre o problema que está sendo resolvido.

Além disso, o aprendiz, como ser social está inserido em ambiente social e cultural constituído, mais localmente, por colegas e mais globalmente por pais, amigos ou pela comunidade onde vive. Ele pode usar todos os elementos sociais e culturais como fontes de idéias e de informação ou onde buscar problemas para serem resolvidos por intermédio do computador. A interação do aprendiz com o computador e os diversos elementos que estão presentes na atividade de programação são mostrados no esquema abaixo (Figura 3.1):



**Figura 3.1. Ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição**

**Fonte: Valente (2002, p.94-95)**

Embora seja fácil entender como se dá o processo de construção do conhecimento no caso da programação, esse processo pode acontecer também quando o aprendiz utiliza outros softwares, como processador de texto ou sistemas de autoria. A diferença da programação para esses outros usos é o quanto esses outros softwares oferecem em termos de facilidade para a realização do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição (VALENTE, 2002).

No caso dos aplicativos, como os processadores de texto e, em particular, a planilha eletrônica Microsoft Excel, as ações do aprendiz, também, podem ser analisadas em termos do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição.

Nesse sentido, as atividades com planilhas eletrônicas deste trabalho foram elaboradas com situações-problema e planejadas em *layouts* amigáveis, com a intenção de permitir a concentração do aprendiz no objeto matemático.

Assim, na leitura e identificação dos dados para inserção nas células adequadas, tem-se uma interação com o computador que é mediada pelo idioma

natural e pelos comandos e recursos da planilha (inserir e formatar números). Esta fase inicial é a “descrição” do problema.

O cálculo dos juros exige uma operação aritmética, que pode ser executada em uma célula do Excel (usada como simples calculadora) ou criando um modelo matemático utilizando a Barra de Fórmulas. Pode-se identificar esta fase, como a “execução” do problema.

Considerando que a planilha eletrônica fornece imediatamente um resultado, ele pode ser comparado com outros resultados efetuados em ambiente de papel e lápis, calculadoras, ou ainda, com o resultado obtido por meio das “fórmulas prontas” da “Biblioteca do Excel”<sup>4</sup>. Temos, então, a fase da “reflexão” e “depuração”. O aprendiz compara seus resultados, reformula suas estratégias e pode efetuar novas operações aritméticas com a rapidez e comodidade das planilhas, e recomeça o ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição.

### 3.5 Elaboração das atividades

As possíveis respostas de nossas questões de pesquisa serão buscadas nas atividades realizadas pelos aprendizes nos ambientes de papel e lápis e computacional. Diante disso, foram elaborados dois conjuntos de Atividades, denominados:

- **ATIVIDADES COM PLANILHAS** – ambiente de planilha eletrônica;
- **ATIVIDADES COM PAPEL E LÁPIS** – ambiente de papel e lápis.

---

<sup>4</sup> A planilha eletrônica Microsoft Excel dispõe de uma Biblioteca de fórmulas prontas com instruções da sua sintaxe para utilização do usuário.

O processo de elaboração destas atividades foi realizado com a colaboração dos membros e colegas Grupo de Pesquisa – Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMem) da PUC-SP.

As contribuições do Grupo TecMen permitiram a delimitação do conteúdo do objeto matemático, a melhoria da sintaxe de apresentação das questões e a sintaxe das perguntas, de tal modo que essas questões ficassem próximas de uma abordagem de ensino desejada pela presente pesquisa.

Estas sugestões contribuíram, também, para aperfeiçoamento dessas atividades. Assim, mediante um processo denominado iteração e design ou design iterativo, as atividades eram criadas e aplicadas aos grupos de alunos, os resultados avaliados, discutidos e as atividades aperfeiçoadas.

Nestas atividades de Matemática Financeira, os aprendizes foram orientados e esclarecidos que nas resoluções poderiam contar com o auxílio das calculadoras científicas ou financeiras.

O uso das calculadoras científicas ou financeiras para agilizar os cálculos é uma das vantagens das tecnologias. Entretanto, os aprendizes foram orientados sobre a importância das resoluções pelo modo algébrico para o cálculo das porcentagens de juros e o cálculo do montante para vários períodos. Entende-se que o domínio das resoluções pelo modo algébrico pode favorecer a construção de novos conceitos e de outras aplicações da Matemática Financeira.

As Atividades com planilhas eletrônicas e Atividades com papel e lápis, têm a intenção de avaliar as estratégias e identificar as dificuldades dos aprendizes em suas tentativas de resolução e avaliar os conhecimentos básicos de Matemática Financeira.

### 3.6 Caracterização dos sujeitos da pesquisa

Neste trabalho de pesquisa contou-se com dois grupos de aprendizes que foram identificados, como: Grupo Construcionista e Grupo Instrucionista, assim definidos:

**Grupo Construcionista:** alunos do 1º ano de Administração de Empresas de uma Faculdade da zona sul da cidade e que não cursaram a disciplina de Matemática Financeira, pois, nesta instituição com regime anual, a disciplina de Matemática Financeira é ministrada no 3º ano. Neste grupo, serão aplicadas inicialmente as sessões no ambiente de planilhas eletrônicas que serão chamadas **ATIVIDADES COM PLANILHAS**. Em seguida, também, serão aplicadas a esse grupo as **ATIVIDADES COM PAPEL E LÁPIS**.

**Grupo Instrucionista:** alunos que já concluíram a disciplina de Matemática Financeira em seus respectivos cursos e que, de forma geral, tiveram uma abordagem instrucionista, ou seja, sem ênfase da construção pelos próprios alunos de modelos ou fórmulas, utilizando o Microsoft Excel. Neste grupo, estão alunos do 4º ano de Administração de uma Faculdade da zona sul da cidade de São Paulo e alunos do 3ª semestre de um curso de Tecnologia em Gestão Financeira de um Centro Universitário da zona central da cidade de São Paulo. Neste grupo, serão aplicadas, apenas, as **ATIVIDADES COM PAPEL E LÁPIS**. A seguir, no Quadro 3.1 um resumo da aplicação das atividades a esses grupos.

| Grupo           | Curso/ ano/ Instituição                                                                             | Atividades                        |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Construcionista | 1º ano de Administração/zona Sul – SP                                                               | COM PLANILHAS E COM PAPEL E LÁPIS |
| Instrucionista  | 4º ano de Administração/zona Sul – SP e 3º semestre de Tecnologia em Gestão Financeira/ Centro – SP | COM PAPEL E LÁPIS                 |

**Quadro 3.1. Resumo da aplicação das atividades**

### 3.7 A formação das duplas

Para a aplicação das atividades usando planilhas eletrônicas, foram convidados todos os 34 alunos do 1º ano de um curso noturno de Administração de uma Instituição particular de Ensino Superior da zona Sul da Cidade de São Paulo.

As fases da pesquisa e intenção de envolvê-los na construção de expressões, modelos ou fórmulas para o cálculo de juros e montante, utilizando o Microsoft Excel foram explicados aos alunos do estudo. Inicialmente, dezoito alunos manifestaram interesse, inscreveram-se dez, mas apenas quatro alunos concluíram todas as três sessões da pesquisa. As duplas foram formadas e denominadas, conforme o quadro abaixo:

| Duplas  | COMPONENTES      | PARTICIPAÇÃO            |
|---------|------------------|-------------------------|
| Dupla 1 | Gisele e Natália | Concluíram as 3 sessões |
| Dupla 2 | Patrícia e Fábio | Concluíram as 3 sessões |

**Quadro 3.2. Formação das duplas**

Para observação e análise das manifestações orais dos aprendizes das duplas, foi realizada a gravação de voz. Para a análise das estratégias e da seqüência dos procedimentos de resolução com a ferramenta computacional Microsoft Excel foi realizada a gravação das telas, utilizando o software *Media Encoder 9 series* da Microsoft.

### 3.8 Intervenções de ensino

Além das interações dos aprendizes com as planilhas eletrônicas, estão previstas nas aplicações das Atividades as chamadas Intervenções ensino, momentos nos quais, o professor-pesquisador<sup>5</sup> exerce o papel de professor. O objetivo é fornecer instruções e informações que contribuam para que os aprendizes façam suas próprias conjecturas. Estas intervenções serão, muitas vezes, na forma de uma pergunta dirigida aos aprendizes, ou seja tentando de se aproximar de abordagens construcionistas.

- As intervenções de ensino são conduzidas sempre que possível com base nos significados e discursos produzidos pelos aprendizes, incentivando-os a testar suas conjecturas, utilizando os artefatos disponíveis.
- As intervenções de ensino podem utilizar o ambiente de papel e lápis ou lousa e giz. Têm como objetivos familiarizar os aprendizes com a terminologia das operações financeiras e, também, suprir possíveis dificuldades como aritmética e álgebra, necessárias à construção de modelos e fórmulas da Matemática Financeira.

### 3.9 Atividades com planilhas eletrônicas

As atividades com planilhas eletrônicas foram aplicadas nos dias 4, 5, 11, 12 e 13 de dezembro de 2006, ao Grupo Construcionista, no Laboratório de Informática de Instituição de Ensino Superior localizada na zona sul, com a utilização do software Microsoft Excel e com orientação aos alunos para, utilizarem o ambiente de papel e lápis.

---

<sup>5</sup> Neste Trabalho usou-se o termo “Professor”, como sinônimo de Professor-Pesquisador.

Desse modo, treze atividades para aplicação em três sessões de 2 horas diárias, cada uma, foram planejadas.

No Quadro 3.3 é apresentado um resumo das três sessões planejadas, com o número de atividades para cada sessão e o conteúdo matemático de cada uma delas.

| SESSÕES  | ATIVIDADES | CONTEÚDO                                                                                                                                                                                         |
|----------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| PRIMEIRA | 1 a 2      | As operações aritméticas básicas e o cálculo de juros e montante para um único período                                                                                                           |
| SEGUNDA  | 3 a 8      | As progressões aritméticas e geométricas, cálculo de Juros simples e Montante para vários períodos. Problemas de Juros simples envolvendo sistemas de equações do 1º grau.                       |
| TERCEIRA | 9 a 13     | Cálculo dos Juros e Montante no regime de capitalização de juros compostos, com taxas variáveis e com taxas constantes. Problemas de juros compostos envolvendo sistemas de equações do 1º grau. |

**Quadro 3.3. Conteúdo das atividades com planilhas eletrônicas**

Uma parte das atividades da primeira sessão foi destinada à familiarização dos alunos com a interface das planilhas e ao modo como o Excel efetua as operações básicas da aritmética, ou seja, a adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. Ainda, na primeira sessão, estiveram presentes as atividades do cálculo de juros e montante para um período.

Nas atividades da segunda-sessão, solicitou-se ao aluno o cálculo do Montante no regime de juros simples para vários períodos. As seqüências de Montantes dos vários períodos, em juros simples e compostos, foram exploradas em analogia, respectivamente, com as Progressões Aritméticas e Geométricas.

A terceira sessão iniciou-se com atividades para o cálculo do montante para taxa de juros variáveis por período. Em seguida, apareceram as atividades para o cálculo montante com taxas de juros constante. Esperava-se que o aluno construísse os seus modelos (fórmulas) de resolução e, assim, pudesse construir o seu conhecimento.

Na aplicação dessas atividades com planilhas eletrônicas, considera-se o perfil dos alunos de um 1º ano de um curso de Administração noturno de uma instituição particular da zona sul da cidade de São Paulo. Em geral, apresentam falhas em sua formação do Ensino Fundamental e Médio, tanto nos conteúdos de Matemática Básica (aritmética e álgebra) como de linguagem e, particularmente, na interpretação de textos.

Para otimizar o tempo de aplicação destas atividades, o *layout* das planilhas foi previamente preparado para facilitar a tarefa de familiarização com a Interface do Excel. Assim, os aprendizes já tinham indicação das células onde deveriam inserir dados e, também, das células onde deveriam registrar as relações entre esses dados. Desta forma, pretendeu-se permitir aos aprendizes uma concentração na interpretação e sintaxe das atividades.

A seguir, são apresentadas as atividades com planilhas, as intenções do professor-pesquisador, comentários e algumas possíveis resoluções.

### **3.9.1 Atividade 1 – operações aritméticas**

Nesta Atividade 1 (Figura 3.2 e Figura 3.3), foi planejada uma familiarização com a interface do Microsoft Excel, usando a Barra de fórmulas para efetuar operações aritméticas. As operações de adição, subtração, multiplicação e subtração e suas propriedades estruturais são o fundamento para o estudo de qualquer área das ciências e, por consequência, da Matemática Financeira. Assim, o domínio das técnicas de cálculo e de suas propriedades pode permitir aos aprendizes uma concentração maior nos conceitos específicos da Matemática Financeira.

Pretendeu-se com a seqüência das operações desta atividade, de alguma forma, facilitar o reconhecimento, por parte dos aprendizes, de algumas propriedades. Embora, a intenção fosse facilitar, esperava-se que esse reconhecimento viesse por meio das observações dos resultados das operações

propostas. Assim, dentro da abordagem desejada por este trabalho, busca-se significado nas manifestações dos aprendizes, nas suas observações e conjecturas em relação aos resultados obtidos.

Entre as propriedades do cálculo presentes nas operações básicas da aritmética, foca-se na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

Assim, foram referidas, as seguintes situações algébricas exploradas na Atividade 1:

d)  $15 \times 3 + 15 \times 4 = ?$  e)  $15 \times (3 + 4) = ?$  ou i)  $2.000 \times 1 + 2.000 \times 0,03 = ?$

j)  $2.000 \times (1 + 0,03) = ?$

O reconhecimento e o uso desta propriedade foram considerados como fundamentais, para que os aprendizes construam seus primeiros modelos matemáticos no regime de juros simples.

|   | A  | B                                                                                                                      | C | D       | E | F | G | H |
|---|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------|---|---|---|---|
| 1 |    | <b>ATIVIDADE 1</b><br><b>OPERAÇÕES ARITMETICAS USANDO O EXCEL</b>                                                      |   |         |   |   |   |   |
| 2 |    |                                                                                                                        |   |         |   |   |   |   |
| 3 |    |                                                                                                                        |   |         |   |   |   |   |
| 4 |    | Resolva as expressões abaixo, compare os resultados com as expressões propostas.<br>Faça conjecturas, tire conclusões. |   |         |   |   |   |   |
| 5 |    |                                                                                                                        |   |         |   |   |   |   |
| 6 |    |                                                                                                                        |   |         |   |   |   |   |
| 7 | 1. | RESOLVA                                                                                                                |   | SOLUÇÃO |   |   |   |   |
| 8 |    |                                                                                                                        |   |         |   |   |   |   |
| 9 | a) | $75 - 33 + 42 - 10 + 33 = ?$                                                                                           |   |         |   |   |   |   |

**Figura 3.2. Cálculo aritmético – enunciado**

|    | A  | B                                                              | C | D       | E | F |
|----|----|----------------------------------------------------------------|---|---------|---|---|
| 6  |    |                                                                |   |         |   |   |
| 7  | 1. | RESOLVA                                                        |   | SOLUÇÃO |   |   |
| 8  |    |                                                                |   |         |   |   |
| 9  | a) | $75 - 33 + 42 - 10 + 33 = ?$                                   |   |         |   |   |
| 10 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 11 | b) | $75 + 42 - 10 = ?$                                             |   |         |   |   |
| 12 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 13 | c) | $\frac{(18 \times 4) + (51 + 17)}{(5 + 8 - 3) \times 2} = ?$   |   |         |   |   |
| 14 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 15 | d) | $15 \times 3 + 15 \times 4 = ?$                                |   |         |   |   |
| 16 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 17 | e) | $15 \times (3 + 4) = ?$                                        |   |         |   |   |
| 18 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 19 | f) | $2.000 \times \left(\frac{3}{100}\right) = ?$                  |   |         |   |   |
| 20 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 21 | g) | $2.000 \times 0,03 = ?$                                        |   |         |   |   |
| 22 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 23 | h) | $2.000 \times 1 = ?$                                           |   |         |   |   |
| 24 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 25 | i) | $2.000 \times 1 + 2.000 \times 0,03 = ?$                       |   |         |   |   |
| 26 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 27 | j) | $2.000 \times (1 + 0,03) = ?$                                  |   |         |   |   |
| 28 |    |                                                                |   |         |   |   |
| 29 | k) | Quais das expressões acima são equivalentes? Explique por quê? |   |         |   |   |
| 30 |    |                                                                |   |         |   |   |

**Figura 3.3. Cálculo aritmético – questões**

### 3.9.2 Atividade 2 – regime de capitalização dos juros simples

Nesta Atividade 2 (Figura 3.4), os conceitos de juros e montante são explorados por um empréstimo, uma operação financeira familiar das atividades diárias do cidadão. Estão presentes alguns modelos matemáticos básicos das atividades financeiras, cálculo de juros e do Montante (MONTANTE = CAPITAL + JUROS).

|    | A | B                                                                                                                                                                                                                    | C                    | D            | E               | F | G |
|----|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------|-----------------|---|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 2</b>                                                                                                                                                                                                   |                      |              |                 |   |   |
| 2  |   |                                                                                                                                                                                                                      |                      |              |                 |   |   |
| 3  |   | <b>MATEMÁTICA FINANCEIRA - JUROS SIMPLES</b>                                                                                                                                                                         |                      |              |                 |   |   |
| 4  |   |                                                                                                                                                                                                                      |                      |              |                 |   |   |
| 5  |   | <b>Exercício 1.</b> Um empréstimo de R\$ 2.000,00 foi contratado a juros simples e a uma taxa de juros de 3% no período.                                                                                             |                      |              |                 |   |   |
| 6  |   | Qual o valor dos juros no período? Insira esta operação na célula <b>C11</b> .                                                                                                                                       |                      |              |                 |   |   |
| 7  |   | Qual o valor do montante a ser desembolsado ao final do período? Insira esta operação na célula <b>C12</b> .                                                                                                         |                      |              |                 |   |   |
| 8  |   |                                                                                                                                                                                                                      |                      |              |                 |   |   |
| 9  |   | <b>Valor do empréstimo ou capital emprestado</b>                                                                                                                                                                     | R\$ 2.000,00         |              |                 |   |   |
| 10 |   | <b>Taxa de juros(% no período)</b>                                                                                                                                                                                   | 3,00%                |              |                 |   |   |
| 11 |   | <b>Valor dos juros (despesa) no período</b>                                                                                                                                                                          |                      |              |                 |   |   |
| 12 |   | <b>Montante</b>                                                                                                                                                                                                      |                      |              |                 |   |   |
| 13 |   |                                                                                                                                                                                                                      |                      |              |                 |   |   |
| 14 |   | <b>Exercício 2.</b> Insira nas colunas D e E, as operações aritméticas (fórmulas, modelos) para o cálculo dos juros e do montante. Resolva também no ambiente de papel-lápis e calculadora. Compare seus resultados. |                      |              |                 |   |   |
| 15 |   |                                                                                                                                                                                                                      |                      |              |                 |   |   |
| 16 |   | <b>Capital aplicado</b>                                                                                                                                                                                              | <b>Taxa de juros</b> | <b>Juros</b> | <b>Montante</b> |   |   |
| 17 |   | R\$ 50.000,00                                                                                                                                                                                                        | 3,00%                |              |                 |   |   |
| 18 |   | R\$ 240.000,00                                                                                                                                                                                                       | 2,85%                |              |                 |   |   |
| 19 |   | R\$ 1.000,00                                                                                                                                                                                                         | 1,25%                |              |                 |   |   |
| 20 |   | R\$ 1.000.000,00                                                                                                                                                                                                     | 0,85%                |              |                 |   |   |
| 21 |   |                                                                                                                                                                                                                      |                      |              |                 |   |   |
| 22 |   | <b>Exercício 3.</b> Escreva no ambiente de papel e lápis dois modelos (fórmulas) equivalentes para o cálculo do montante.                                                                                            |                      |              |                 |   |   |
| 23 |   |                                                                                                                                                                                                                      |                      |              |                 |   |   |

**Figura 3.4. Atividade 2**

Esta atividade foi, também, uma primeira tentativa de levar o aluno-aprendiz a utilizar as operações básicas da aritmética exploradas na Atividade 1 e de suas propriedades estruturais. Teve-se como meta facilitar o uso dos dados na planilha, assim no Exercício 1, da Atividade 2, o *layout* da planilha foi bastante amigável, indicando as células onde os cálculos dos juros e montante deveriam ser efetuados. Ficou para o aluno a tarefa de usar a Barra de fórmulas e efetuar os cálculos nas células correspondentes. No Exercício 2 desta atividade, embora com um *layout* diferente, a tarefa do aprendiz foi a mesma do Exercício 1.

No Exercício 3, “Escreva no ambiente de papel e lápis dois modelos (fórmulas) equivalentes para o cálculo do montante”. Aqui se concentra a nossa expectativa das produções dos aprendizes. Neste momento prevê-se uma das intervenções de ensino ou episódios de ensino. Este pode ser um momento singular para uma das etapas de aprendizagem, a passagem de situações

particulares de cálculo do Montante para tentativa de uma generalização. É uma primeira tentativa na construção de modelos.

Solicitou-se aos aprendizes descrever os procedimentos para os cálculos dos juros e do montante. Quais endereços de células foram utilizados? Que operações aritméticas foram efetuadas?

### **3.9.3 Atividade 3 – progressão aritmética**

A Atividade 3 (Figura 3.5) inicia a segunda sessão, é formada por questões envolvendo a construção de seqüências numéricas: progressões aritméticas e geométricas e o cálculo de juros e montante no regime dos juros simples.

Nas Atividades 3 e 4 desta sessão, os aprendizes têm o desafio da construção, generalização e formalização das seqüências. Estão previstas aqui várias intervenções de ensino ou, também, pode-se chamar de episódios de ensino.

Entre os objetivos desta atividade, além da construção de seqüências utilizando o poder de visualização da planilha eletrônica, estão, também, por exemplo, a possibilidade de exploração do endereço das células como modo de generalizar a “ordem do termo” e “valor do termo” na seqüência.

|    | A | B                                                                                                                                                               | C              | D | E | F                  | G | H | I | J |
|----|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---|---|--------------------|---|---|---|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 3</b>                                                                                                                                              |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 2  |   | <b>Progressões</b>                                                                                                                                              |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 3  |   | <b>a)</b> Construa, na planilha eletrônica, uma sequência de 20 números, tais que: com exceção do primeiro, cada termo seja a soma do anterior com o número 30. |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 4  |   | <b>b)</b> Qual foi sua estratégia de resolução? Descreva-a passo a passo.                                                                                       |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 5  |   | <b>c)</b> Na célula <b>F11</b> , construa uma expressão que calcule qualquer termo da sequência (ordem do termo está em <b>F10</b> ).                           |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 6  |   | Testar sua fórmula, mudando o valor da ordem do termo em <b>F10</b> .                                                                                           |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 7  |   |                                                                                                                                                                 |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 8  |   |                                                                                                                                                                 |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 9  |   |                                                                                                                                                                 |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 10 |   | <b>c)</b>                                                                                                                                                       |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 11 |   | <b>a)</b>                                                                                                                                                       |                |   |   | ordem do termo "n" | 6 |   |   |   |
| 12 |   | ordem do termo                                                                                                                                                  | valor do termo |   |   | valor do termo     |   |   |   |   |
| 13 |   | 1                                                                                                                                                               | 2              |   |   |                    |   |   |   |   |
| 14 |   | 2                                                                                                                                                               |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 15 |   | 3                                                                                                                                                               |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 16 |   | 4                                                                                                                                                               |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 17 |   | 5                                                                                                                                                               |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 18 |   | 6                                                                                                                                                               |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 19 |   | 7                                                                                                                                                               |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 20 |   | 8                                                                                                                                                               |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 21 |   | 9                                                                                                                                                               |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 22 |   | 10                                                                                                                                                              |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 23 |   | 11                                                                                                                                                              |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 24 |   | 12                                                                                                                                                              |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 25 |   | 13                                                                                                                                                              |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 26 |   | 14                                                                                                                                                              |                |   |   |                    |   |   |   |   |
| 27 |   |                                                                                                                                                                 |                |   |   |                    |   |   |   |   |

**Figura 3.5. Atividade 3 – Progressões aritméticas**

### 3.9.4 Atividade 4 – progressão geométrica

Na atividade anterior (Figura 3.5) e na Atividade 4 (Figura 3.6) espera-se que a construção de seqüências numéricas usando planilhas eletrônicas, ajude os aprendizes na noção de generalização e lei de formação. Além disso, o seguinte desejo está presente: a possibilidade dos aprendizes identificarem nas atividades posteriores, a seqüência dos montantes no regime de juros simples, como uma Progressão Aritmética e a seqüência dos montantes no regime de juros compostos, como uma Progressão Geométrica.

|    | A | B                                                                                                                             | C              | D | E                  | F | G | H | I | J |
|----|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---|--------------------|---|---|---|---|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 4</b>                                                                                                            |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 2  |   | <b>Progressões</b>                                                                                                            |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 3  |   | <b>a)</b> Construa, na planilha eletrônica, uma sequência de 10 números, tais que: com exceção do primeiro, cada termo seja o |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 4  |   | produto do anterior pelo número 3.                                                                                            |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 5  |   | <b>b)</b> Qual foi sua estratégia de resolução? Descreva-a passo a passo.                                                     |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 6  |   | <b>c)</b> Existe uma expressão que pode calcular qualquer termo desta sequência? Construa esta expressão na célula <b>F11</b> |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 7  |   | (utilize a ordem do termo que está em <b>F10</b> ). Testar sua fórmula, mudando a ordem do termo em <b>F10</b> .              |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 8  |   |                                                                                                                               |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 9  |   |                                                                                                                               |                |   | <b>c)</b>          |   |   |   |   |   |
| 10 |   | <b>a)</b>                                                                                                                     |                |   | ordem do termo "n" | 8 |   |   |   |   |
| 11 |   | ordem do termo                                                                                                                | valor do termo |   | valor do termo     |   |   |   |   |   |
| 12 |   | 1                                                                                                                             | 2              |   |                    |   |   |   |   |   |
| 13 |   | 2                                                                                                                             |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 14 |   | 3                                                                                                                             |                |   | <b>b)</b>          |   |   |   |   |   |
| 15 |   | 4                                                                                                                             |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 16 |   | 5                                                                                                                             |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 17 |   | 6                                                                                                                             |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 18 |   | 7                                                                                                                             |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 19 |   | 8                                                                                                                             |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 20 |   | 9                                                                                                                             |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 21 |   | 10                                                                                                                            |                |   |                    |   |   |   |   |   |
| 22 |   |                                                                                                                               |                |   |                    |   |   |   |   |   |

**Figura 3.6. Atividade 4 – Progressões geométricas**

### 3.9.5 Atividade 5 – cálculo do montante para um único período

Nesta Atividade 5 (Figura 3.7), tem-se a aplicação em uma instituição financeira de um Capital de R\$ 5.000,00, no regime de juros simples. Trata-se de uma aplicação por cinco meses, a uma taxa de juros de 2% ao mês, embora nesta atividade solicitasse, apenas, o cálculo dos juros e do montante ao final do primeiro mês (1º período).

A intenção, mais uma vez, é levar o aprendiz a construir noções, formar conceitos próprios, calculando o juro mês a mês. Nessa atividade, foi feita uma “intervenção” bem explícita, lembrando o conceito de capitalização no regime de juros simples destacada em um quadro ao final da planilha.

|    | A | B                                                                                                                                    | C            | D | E | F | G |
|----|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|---|---|---|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 5</b>                                                                                                                   |              |   |   |   |   |
| 2  |   | <b>MATEMÁTICA FINANCEIRA - Juros Simples</b>                                                                                         |              |   |   |   |   |
| 3  |   |                                                                                                                                      |              |   |   |   |   |
| 4  |   | Um capital de R\$ 5.000,00 foi aplicado em uma instituição financeira por 5 meses, a juros simples e à                               |              |   |   |   |   |
| 5  |   | taxa de 2% ao mês. Pede-se:                                                                                                          |              |   |   |   |   |
| 6  |   |                                                                                                                                      |              |   |   |   |   |
| 7  |   | <b>a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?</b>                                                                        |              |   |   |   |   |
| 8  |   | CAPITAL                                                                                                                              | R\$ 5.000,00 |   |   |   |   |
| 9  |   | TAXA DE JUROS (mensal)                                                                                                               | 2%           |   |   |   |   |
| 10 |   | PRAZO (meses)                                                                                                                        | 1            |   |   |   |   |
| 11 |   | JUROS                                                                                                                                |              |   |   |   |   |
| 12 |   |                                                                                                                                      |              |   |   |   |   |
| 13 |   | <b>b) Qual o montante (capital + juros) ao final do primeiro mês?</b>                                                                |              |   |   |   |   |
| 14 |   | CAPITAL                                                                                                                              | R\$ 5.000,00 |   |   |   |   |
| 15 |   | JUROS                                                                                                                                |              |   |   |   |   |
| 16 |   | MONTANTE                                                                                                                             |              |   |   |   |   |
| 17 |   |                                                                                                                                      |              |   |   |   |   |
| 18 |   | <b>REGIME DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS SIMPLES:</b> Neste regime, o juro em todos os meses é calculado sobre o capital inicial aplicado, |              |   |   |   |   |
| 19 |   | assim, o juro é constante. Em outras palavras, a taxa de juros incide sempre sobre o o mesmo valor aplicado.                         |              |   |   |   |   |
| 20 |   |                                                                                                                                      |              |   |   |   |   |

**Figura 3.7. Atividade 5**

### 3.9.6 Atividade 6 – cálculo do montante para vários períodos

Na Atividade 6 (Figura 3.8), tem-se uma complementação da Atividade 5, pede-se aos aprendizes os cálculos, mês a mês, dos juros e do montante (saldo atualizado) da aplicação. A seguir, são feitas perguntas na tentativa de encaminhar o aprendiz para a construção do modelo matemático (fórmula) do montante no regime de juros simples. Sugere-se, também, a experimentação do modelo construído, mudando o valor do “número de meses” de aplicação.

Aqui, o objetivo é verificar se o conceito de juros simples é assimilado e o procedimento, mês a mês, é uma estratégia que poderá ajudar o aprendiz a formar seus conceitos e permitir a diferenciação e comparação com o regime dos juros compostos.

|    | A | B                                                                                                                                    | C                  | D                      | E | F                     | G            | H |
|----|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|------------------------|---|-----------------------|--------------|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 6</b>                                                                                                                   |                    |                        |   |                       |              |   |
| 2  |   | Com os dados da <b>Atividade 5</b> , a) preencha a planilha abaixo, indicando mês a mês, o rendimento (juros)                        |                    |                        |   |                       |              |   |
| 3  |   | e o saldo (montante) atualizado a cada mês. Qual o valor do resgate (montante) ao final do 5º mês?                                   |                    |                        |   |                       |              |   |
| 4  |   | b) Por qual valor temos que multiplicar o capital de R\$ 5.000,00 para obtermos o montante ao final do 5º mês?                       |                    |                        |   |                       |              |   |
| 5  |   | c) Na célula <b>G13</b> , construa uma expressão (fórmula) que calcule o Montante para qualquer número de meses de aplicação.        |                    |                        |   |                       |              |   |
| 6  |   | d) Teste sua fórmula, mudando os valores "número de meses" na célula <b>G12</b> .                                                    |                    |                        |   |                       |              |   |
| 7  |   | Taxa de juros ao mês                                                                                                                 | 2%                 |                        |   | b)                    |              |   |
| 8  |   | a)                                                                                                                                   |                    |                        |   |                       |              |   |
| 9  |   | MÊS                                                                                                                                  | RENDIMENTO (JUROS) | SALDO ATUAL (MONTANTE) |   | c)                    |              |   |
| 10 |   | 0                                                                                                                                    |                    | R\$ 5.000,00           |   | Capital - "C"         | R\$ 5.000,00 |   |
| 11 |   | 1                                                                                                                                    |                    |                        |   | Taxa de juros - "i"   | 2%           |   |
| 12 |   | 2                                                                                                                                    |                    |                        |   | Número de meses - "n" | 5            |   |
| 13 |   | 3                                                                                                                                    |                    |                        |   | Montante - "M"        |              |   |
| 14 |   | 4                                                                                                                                    |                    |                        |   |                       |              |   |
| 15 |   | 5                                                                                                                                    |                    |                        |   |                       |              |   |
| 16 |   |                                                                                                                                      |                    |                        |   |                       |              |   |
| 17 |   | <b>REGIME DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS SIMPLES:</b> Neste regime, o juro em todos os meses é calculado sobre o capital inicial aplicado, |                    |                        |   |                       |              |   |
| 18 |   | assim, o juro é constante. Em outras palavras, a taxa de juros incide sempre sobre o mesmo valor aplicado.                           |                    |                        |   |                       |              |   |
| 19 |   |                                                                                                                                      |                    |                        |   |                       |              |   |

Figura 3.8. Atividade 6

## 3.9.7 Atividade 7 – problema com juros simples

|    | A | B                                                                                                                       | C | D | E                             | F | G |
|----|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|-------------------------------|---|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 7</b>                                                                                                      |   |   |                               |   |   |
| 2  |   | <b>MATEMÁTICA FINANCEIRA - Juros Simples</b>                                                                            |   |   |                               |   |   |
| 3  |   |                                                                                                                         |   |   |                               |   |   |
| 4  |   | Dividir R\$ 1.200,00 em duas partes, de forma que a primeira, aplicada a juros simples à taxa de 8% ao mês              |   |   |                               |   |   |
| 5  |   | durante 2 meses, renda o mesmo juro que a segunda, aplicada a 10% ao mês durante 3 meses.                               |   |   |                               |   |   |
| 6  |   | Sugestões: a) Registre os dados conhecidos nas células correspondentes. b) Nas células C12, F12, C15 e F15,             |   |   |                               |   |   |
| 7  |   | construa relações com os dados conhecidos ou não. c) Faça simulações na célula C12, alterando o valor da primeira parte |   |   |                               |   |   |
| 8  |   | (CAPITAL A) e tente chegar a resposta. d) Tente, também, resolver este problema no ambiente de papel e lápis.           |   |   |                               |   |   |
| 9  |   |                                                                                                                         |   |   |                               |   |   |
| 10 |   |                                                                                                                         |   |   |                               |   |   |
| 11 |   | <b>APLICAÇÃO DO CAPITAL A</b>                                                                                           |   |   | <b>APLICAÇÃO DO CAPITAL B</b> |   |   |
| 12 |   | CAPITAL A                                                                                                               |   |   | CAPITAL B                     |   |   |
| 13 |   | TAXA DE JUROS (mensal)                                                                                                  |   |   | TAXA DE JUROS (mensal)        |   |   |
| 14 |   | PRAZO (meses)                                                                                                           |   |   | PRAZO (meses)                 |   |   |
| 15 |   | JUROS                                                                                                                   |   |   | JUROS                         |   |   |
| 16 |   |                                                                                                                         |   |   |                               |   |   |

Figura 3.9. Atividade 7 – Problema com juros simples

Na Atividade 7 (Figura 3.9), considerando as intervenções de ensino previstas do professor espera-se que o aluno-aprendiz já tenha pelo, menos, atingido um estágio inicial de aprendizagem do processo de construção do modelo de cálculo do juro e do montante em juros simples. Considera-se como estágio inicial as conjecturas sobre os significados que darão sustentação a formas particulares de aprendizagem.

Considerando as condições acima, o aprendiz é desafiado a resolver uma questão que envolve a montagem de um sistema de equações, ele deve nomear as incógnitas que nas planilhas eletrônicas podem ser o endereço das células já indicadas pela Atividade e, assim, estabelecer relações entre células. Está, então, presente o desafio de montar equações e, nesta atividade, em particular, no ambiente de planilhas eletrônicas, impor resultados iguais às fórmulas por meio da simulação.

Assim, em uma possível resolução o aprendiz, poderia montar as seguintes equações, inserindo os seguintes modelos, usando os endereços das células indicadas na planilha:

I) juros gerados pelo capital A, inseridos na célula **C15**, **=C12\*C13\*C14**

II) juros gerados pelo capital B, inseridos na célula **F15**, **=F12\*F13\*F14**

Os dois capitais A e B têm soma igual a R\$ 1.200,00 e, assim, a equação no ambiente de papel e lápis pode ser escrita **C12 + F12 = 1.200**, que implica **F12 = 1200 – C12**. Considerando que os juros gerados são iguais, ou seja, **C15 = F15**, pode-se escrever, ainda em papel e lápis, mas, usando a nomenclatura dos endereços das células do Excel: **C12\*C13\*C14 = (1200-C12)\*F13\*F14**. Pode-se observar desses endereços a única célula cujo valor não é conhecido é da célula **C12**, desta forma resta o desafio de isolar a “célula incógnita” e inserir a expressão correspondente na Barra de fórmulas do Excel, construindo a fórmula ou modelo para o cálculo do Capital A, agora no ambiente de planilhas eletrônicas:

$$C12 = 1200 * F13 * F14 / (C13 * C14 + F13 * F14)$$

Esta possível resolução pode caracterizar a condição ambígua ou híbrida (aritmético-algébrica) das planilhas (HASPEKIAN, 2005, p.111).

A questão, também, sugere a resolução no ambiente de papel e lápis e nas intervenções do professor-pesquisador foi incentivada a noção de sistemas de simulação.

### 3.9.8 Atividade 8 – problema com juros simples

Na Atividade 8 (Figura 3.10), também, estão presentes os mesmos desafios da Atividade 7. Nas intervenções do professor, foram incentivadas a formação de conjecturas dos significados e a tentativa da construção de modelos (equações).

|    | A | B                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | C | D | E                                  | F |
|----|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|------------------------------------|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 8</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |   |   |                                    |   |
| 2  |   | <b>MATEMÁTICA FINANCEIRA - Juros Simples</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |   |   |                                    |   |
| 3  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 4  |   | Bruno, dispondo de R\$ 3.000,00, resolveu aplicá-los em dois bancos. No primeiro, aplicou uma parte a juros simples à taxa de 8% ao mês por 6 meses e, no segundo aplicou o restante também a juros simples por 8 meses à taxa de 10% ao mês. Determine o quanto foi aplicado em cada banco sabendo-se que o total de juros auferidos foi de R\$ 1.824,00. |   |   |                                    |   |
| 5  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 6  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 7  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 8  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 9  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 10 |   | <b>CAPITAL APLICADO NO BANCO A</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |   |   | <b>CAPITAL APLICADO NO BANCO B</b> |   |
| 11 |   | CAPITAL A                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |   |   | CAPITAL B                          |   |
| 12 |   | TAXA DE JUROS (MENSAL)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |   |   | TAXA DE JUROS (MENSAL)             |   |
| 13 |   | PRAZO (mensal)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   | PRAZO (mensal)                     |   |
| 14 |   | JUROS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |   | JUROS                              |   |
| 15 |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 16 |   | CAPITAL TOTAL (A+B)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |   |                                    |   |
| 17 |   | TOTAL DOS JUROS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 18 |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 19 |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |
| 20 |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |   |                                    |   |

**Figura 3.10. Atividade 8 – Problema com juros simples**

### 3.9.9 Atividade 9 – juros compostos com taxas variáveis

Esta Atividade 9 (Figura 3.11) inicia a terceira sessão, formada por cinco atividades de Matemática Financeira explorando o Regime de capitalização de juros compostos.

|    | A                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | B     | C          | D                | E | F | G | H                | I | J |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------|------------------|---|---|---|------------------|---|---|
| 1  | <b>ATIVIDADE 9 - Juros Compostos -Taxas Variáveis</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 2  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 3  | Estela investiu R\$ 10.000,00 num fundo de investimento. Exatamente quatro meses depois resgatou R\$ 10.877,34.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 4  | O gerente do fundo informou que as taxas de rentabilidade mensais do fundo durante o prazo do investimento de Estela foram 1,8%, 2%, 2,2% e 2,5% ao mês. Estela gostaria de verificar se o resgate recebido corresponde realmente às taxas mensais de juro informadas. <b>a)</b> Verifique passo a passo, calculando mês a mês, o rendimento mensal e o saldo atualizado (capital + juros) no regime de juros compostos. <b>b)</b> Existe uma expressão que permite calcular o resgate ao final dos quatro meses? <b>c)</b> Construa esta expressão na célula H12. Teste sua fórmula. |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 5  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 6  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 7  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 8  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 9  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 10 | <b>a)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |       |            |                  |   |   |   | <b>b)</b>        |   |   |
| 11 | Mês                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Taxa  | Rendimento | Saldo Atualizado |   |   |   | c)               |   |   |
| 12 | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |            | R\$ 10.000,00    |   |   |   | Valor do Resgate |   |   |
| 13 | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1,80% |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 14 | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2%    |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 15 | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2,20% |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 16 | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2,50% |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 17 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 18 | <b>REGIME DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS COMPOSTOS:</b> Neste regime os juros são incorporados ao montante do período anterior,                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 19 | que servem de base para o cálculo dos juros do período seguinte.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 20 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |
| 21 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       |            |                  |   |   |   |                  |   |   |

**Figura 3.11. Atividade 9 – Juros compostos com taxas variáveis**

Nesta primeira atividade da terceira sessão (Figura 3.11), há a aplicação de um capital de R\$ 10.000,00 em um fundo de investimento por quatro meses com taxas de rentabilidade variáveis. Esta situação obriga o aprendiz, necessariamente, a calcular o juro mês a mês e depois somar o juro (rendimento) obtido ao saldo anterior. O propósito do pesquisador ao utilizar taxas de juros variáveis é, também, mostrar que mais uma vez ao final de cada mês está presente a chamada operação financeira básica ou fundamental (cálculo dos juros sobre um valor aplicado). Espera-se que o aprendiz supere esta etapa de cálculo mês a mês. A expectativa está nas tentativas dos aprendizes em generalizar

esses cálculos. Como o aprendiz construirá uma expressão ou fórmula que calcule o valor do resgate final?

Na Atividade 9, está presente uma “intervenção instrucionista” expressa na planilha para conceituação do regime de capitalização a juros compostos.

A seguir é apresentada uma possível resolução no ambiente de papel e lápis se acredita seja importante para inserção de fórmulas nas células do Excel.

O saldo atualizado ou montante ao final do primeiro mês,

$$M_1 = 10.000 + 10.000 \times 0,018, \text{ ou } M_1 = 10.000 \times (1 + 0,018) \text{ (I)}$$

O saldo atualizado ao final do segundo mês,

$$M_2 = M_1 + M_1 \times 0,02, \text{ ou } M_2 = M_1 \times (1 + 0,02) \text{ (II)}$$

O saldo atualizado ao final do terceiro mês,

$$M_3 = M_2 + M_2 \times 0,022, \text{ ou } M_3 = M_2 \times (1 + 0,022) \text{ (III)}$$

E finalmente, o saldo atualizado ao final do quarto mês será:

$$M_4 = M_3 + M_3 \times 0,025, \text{ ou } M_4 = M_3 \times (1 + 0,025) \text{ (IV)}$$

Substituindo, sucessivamente, as relações e, nesta ordem, (III), (II) e (I) na relação (IV), têm-se:

$$M_4 = M_2 \times (1 + 0,022) \times (1 + 0,025),$$

$$M_4 = M_1 \times (1 + 0,02) \times (1 + 0,022) \times (1 + 0,025),$$

$$M_4 = 10.000 \times (1 + 0,018) \times (1 + 0,02) \times (1 + 0,022) \times (1 + 0,025),$$

$$M_4 = 10.000 \times (1,018) \times (1,02) \times (1,022) \times (1,025),$$

que é a expressão que permite obter o valor do resgate final do quarto mês, ou seja, R\$ 10.877,34.

### 3.9.10 Atividade 10 – juros compostos com taxas variáveis

Na Atividade 10 (Figura 3.12), planeja-se impor aos aprendizes os mesmos desafios da Atividade 9. Embora, o enunciado tenha uma linguagem diferente da Atividade 9, tem-se a mesma situação de uma aplicação com taxas de rentabilidade variáveis.

Propositalmente, planejou-se nas Atividades 9 e 10, *layouts* diferentes. Enquanto na Atividade 9, é mais “amigável”, podendo o cálculo ser feito passo a passo (ou mês a mês); na Atividade 10, isso não ocorre e caberá ao aluno a escolha da melhor forma de resolução.

|    | A | B                                                                                                                   | C             | D | E | F | G | H |
|----|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---|---|---|---|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADES 10 - Juros Compostos - Taxas Variáveis</b>                                                            |               |   |   |   |   |   |
| 2  |   |                                                                                                                     |               |   |   |   |   |   |
| 3  |   | O excesso de caixa da empresa \$ 18.000,00 foi aplicado em um fundo durante um mês com a taxa de juro               |               |   |   |   |   |   |
| 4  |   | de 1,2% ao mês. A seguir, o valor resgatado foi aplicado em renda fixa por mais um mês, com a taxa de juro de       |               |   |   |   |   |   |
| 5  |   | 2,2% ao mês. Finalmente, o valor resgatado da aplicação em renda fixa foi aplicado durante mais um mês, com taxa de |               |   |   |   |   |   |
| 6  |   | juro de 0,75% ao mês. Qual o valor final do resgate dessa operação?                                                 |               |   |   |   |   |   |
| 7  |   |                                                                                                                     |               |   |   |   |   |   |
| 8  |   | Valor inicial aplicado                                                                                              | R\$ 18.000,00 |   |   |   |   |   |
| 9  |   | Taxa 1. fundo (um mês)                                                                                              | 1,20%         |   |   |   |   |   |
| 10 |   | Taxa 2. renda fixa (um mês)                                                                                         | 2,20%         |   |   |   |   |   |
| 11 |   | Taxa 3. (um mês)                                                                                                    | 0,75%         |   |   |   |   |   |
| 12 |   | Valor do resgate final da operação                                                                                  |               |   |   |   |   |   |
| 13 |   |                                                                                                                     |               |   |   |   |   |   |

**Figura 3.12. Atividade 10 – Juros compostos com taxas variáveis**

### 3.9.11 Atividade 11 – juros compostos com taxas constantes

Na Atividade 11 (Figura 3.13), está presente uma aplicação no regime de juros compostos e agora com taxas de rentabilidade constantes. Nos itens (a) e (b) desta Atividade 11, pede-se o cálculo do juro e do montante para o primeiro mês. Desta forma, os procedimentos de cálculos para um único mês são iguais aos dos juros simples, era essa nossa intenção nesta atividade. Em relação ao regime dos juros simples, a diferença no cálculo dos juros no regime dos juros compostos configura-se a partir do segundo mês, quando os juros do mês são incorporados ao montante anterior que servem de base ao cálculo dos juros do segundo mês.

|    | A | B                                                                                                                         | C | D | E | F |
|----|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 11 - Juros Compostos - Taxas Constantes</b>                                                                  |   |   |   |   |
| 2  |   | Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a                                |   |   |   |   |
| 3  |   | juros compostos e a uma taxa de 4% ao mês, com capitalização mensal. Pede-se:                                             |   |   |   |   |
| 4  |   |                                                                                                                           |   |   |   |   |
| 5  |   | a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?                                                                    |   |   |   |   |
| 6  |   | CAPITAL                                                                                                                   |   |   |   |   |
| 7  |   | TAXA DE JUROS (mensal)                                                                                                    |   |   |   |   |
| 8  |   | PRAZO (meses)                                                                                                             |   |   |   |   |
| 9  |   | JUROS                                                                                                                     |   |   |   |   |
| 10 |   |                                                                                                                           |   |   |   |   |
| 11 |   | b) Qual o montante (capital + juros) ao final do primeiro mês?                                                            |   |   |   |   |
| 12 |   | CAPITAL                                                                                                                   |   |   |   |   |
| 13 |   | JUROS                                                                                                                     |   |   |   |   |
| 14 |   | MONTANTE                                                                                                                  |   |   |   |   |
| 15 |   |                                                                                                                           |   |   |   |   |
| 16 |   |                                                                                                                           |   |   |   |   |
| 17 |   | <b>REGIME DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS COMPOSTOS:</b> Neste regime os juros são incorporados ao montante do período anterior, |   |   |   |   |
| 18 |   | que servem de base para o cálculo dos juros do período seguinte.                                                          |   |   |   |   |
| 19 |   |                                                                                                                           |   |   |   |   |

**Figura 3.13. Atividade 11**

### 3.9.12 Atividade 12 – juros compostos – cálculo mês a mês

Na Atividade 12 (Figura 3.14), é solicitado o cálculo dos juros, mês a mês, isto é, o aprendiz deverá fazer as capitalizações (cálculos dos juros e adicionar ao saldo anterior) e, assim, obter o saldo atual (montante).

O *layout* da planilha deverá facilitar essa tarefa, que a nosso ver é a essência do conceito do regime de juros compostos. Mas, esse procedimento de cálculo (mês a mês), evidentemente não é viável para um número grande de meses.

Assim, espera-se despertar no aprendiz a necessidade e o interesse de buscar outra forma de cálculo dos juros e do montante. Tentativas de dedução de fórmulas (modelos matemáticos), que são a formalização e a generalização dos procedimentos de cálculo mês a mês.

|    | A                                                                                                                                    | B                                            | C                            | D                                | E | F | G                     | H            | I |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------|----------------------------------|---|---|-----------------------|--------------|---|
| 1  | <b>ATIVIDADE 12 - Juros Compostos - Taxas Constantes</b>                                                                             |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 2  | Com os dados da <b>Atividade 11 a)</b> preencha a planilha abaixo, indicando mês a mês, o rendimento (juros) e o                     |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 3  | saldo (montante) atualizado a cada mês. Qual o valor do resgate (montante) ao final do 5º mês?                                       |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 4  | <b>b)</b> Por que valor temos que multiplicar o capital de R\$ 1.000,00 para obtermos o montante ao final do 5º mês?                 |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 5  | <b>c)</b> Na célula <b>H14</b> , construa uma expressão (fórmula) que calcule o Montante para qualquer número de meses de aplicação. |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 6  | <b>d)</b> Teste sua fórmula, mudando os valores "número de meses" na célula <b>H13</b> .                                             |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 7  |                                                                                                                                      |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 8  |                                                                                                                                      |                                              | Taxa de juros (mensal)       | 4%                               |   |   | <b>b)</b>             |              |   |
| 9  |                                                                                                                                      |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 10 | <b>a)</b>                                                                                                                            |                                              |                              |                                  |   |   | <b>c)</b>             |              |   |
| 11 | <b>MÊS</b>                                                                                                                           | <b>SALDO ANTERIOR</b><br>(montante anterior) | <b>RENDIMENTO</b><br>(JUROS) | <b>SALDO ATUAL</b><br>(MONTANTE) |   |   | Capital - "C"         | R\$ 1.000,00 |   |
| 12 | 0                                                                                                                                    |                                              |                              | R\$ 1.000,00                     |   |   | Taxa de juros - "i"   | 0,04         |   |
| 13 | 1                                                                                                                                    | R\$ 1.000,00                                 |                              |                                  |   |   | Número de meses - "n" | 6            |   |
| 14 | 2                                                                                                                                    |                                              |                              |                                  |   |   | <b>Montante - "M"</b> |              |   |
| 15 | 3                                                                                                                                    |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 16 | 4                                                                                                                                    |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 17 | 5                                                                                                                                    |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |
| 18 |                                                                                                                                      |                                              |                              |                                  |   |   |                       |              |   |

**Figura 3.14. Atividade 12 – Juros compostos – Cálculo mês a mês**

### 3.9.13 Atividade 13 – problema com juros compostos

Na Atividade 13 (Figura 3.15), está presente o desafio da aplicação dos modelos construídos nas planilhas anteriores. E, também, a exigência da interpretação da sintaxe do enunciado, na transformação da linguagem natural para uma linguagem matemática, isto é, da montagem de equações e, finalmente, da resolução do sistema de equações.

|    | A                                                                                                                   | B                         | C | D | E                         | F | G | H |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|---|---|---------------------------|---|---|---|
| 1  | <b>ATIVIDADES 13 - Juros Compostos</b>                                                                              |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 2  |                                                                                                                     |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 3  | Uma pessoa tomou dois empréstimos. O primeiro por 3 meses a juros compostos e a taxa de 5% ao mês;                  |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 4  | e o segundo por 10 meses, também, a juros compostos de 4% ao mês. Sabendo-se que pagou ao todo R\$ 11.181,14 de     |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 5  | juros e que o primeiro empréstimo é igual à metade do segundo. Pede-se: a) Registre os dados conhecidos nas células |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 6  | correspondentes. b) Na célula C12, atribua um valor qualquer ao o primeiro empréstimo.                              |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 7  | c) Nas células F12, C15, C16, F15, F16 e C18, construa expressões e relações com os dados conhecidos ou não.        |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 8  | d) Faça simulações na célula C12, alterando o valor do primeiro empréstimo e tente chegar à resposta.               |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 9  | e) Tente, também, resolver este problema no ambiente de papel e lápis.                                              |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 10 | f) Qual o valor de cada empréstimo?                                                                                 |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 11 |                                                                                                                     |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 12 |                                                                                                                     | 1º Empréstimo (capital A) |   |   | 2º Empréstimo (capital B) |   |   |   |
| 13 |                                                                                                                     | Prazo (meses)             |   |   | Prazo (meses)             |   |   |   |
| 14 |                                                                                                                     | Taxa mensal               |   |   | Taxa mensal               |   |   |   |
| 15 |                                                                                                                     | Montante                  |   |   | Montante                  |   |   |   |
| 16 |                                                                                                                     | Juros                     |   |   | Juros                     |   |   |   |
| 17 |                                                                                                                     |                           |   |   |                           |   |   |   |
| 18 |                                                                                                                     | Juros totais pagos        |   |   |                           |   |   |   |
| 19 |                                                                                                                     |                           |   |   |                           |   |   |   |

**Figura 3.15. Atividade 13 – Problema com juros compostos**

Nesta atividade, o item (e) “Tente, também resolver este problema no ambiente de papel e lápis”, está a aposta de que as tentativas em papel e lápis serão úteis aos aprendizes na formação de conceitos e estratégias para implementação de fórmulas nas células das planilhas eletrônicas. A seguir, uma possível resolução no ambiente de papel e lápis.

**Resolução:** Sejam  $C_A$ , o valor do primeiro empréstimo e  $C_B$  o valor do segundo empréstimo. Como o primeiro empréstimo é a metade do segundo,

implica-se que:  $C_A = \frac{C_B}{2}$  ou  $C_B = 2.C_A$ . Aplicando a fórmula do montante aos dois empréstimos tem-se:

$$\text{Montante do primeiro empréstimo, } M_A = C_A \cdot (1 + 0,05)^3$$

$$\text{Montante do segundo empréstimo, } M_B = C_B \cdot (1 + 0,04)^{10}$$

O valor dos juros pagos em cada empréstimo é a diferença entre os valores do montante e o capital emprestado, assim:

$$\text{Juros do primeiro empréstimo, } J_A = C_A \cdot (1 + 0,05)^3 - C_A \text{ (equação I)}$$

$$\text{Juros do segundo empréstimo, } J_B = C_B \cdot (1 + 0,04)^{10} - C_B \text{ (equação II)}$$

O sistema acima tem duas equações e quatro incógnitas, mas sabendo que  $C_B = 2.C_A$  e que o total de juros pagos é R\$ 11.181,14 ou seja,  $J_A + J_B = 11.181,14$ . Pode-se, então, substituir  $C_B$  por,  $2.C_A$  e somar as equações (I) e (II),

$$J_A = C_A \cdot (1 + 0,05)^3 - C_A \text{ (equação I)}$$

$$J_B = 2.C_A \cdot (1 + 0,04)^{10} - 2.C_A \text{ (equação II)}$$

Somando as equações, reduz-se a uma equação com uma única incógnita  $C_A$

$$C_A \cdot (1 + 0,05)^3 - C_A + [2.C_A \cdot (1 + 0,04)^{10} - 2.C_A] = J_A + J_B, \text{ ou seja,}$$

$$C_A \cdot (1 + 0,05)^3 - C_A + 2.C_A \cdot (1 + 0,04)^{10} - 2.C_A = 11.181,14$$

$$C_A \cdot 1,157625 + 2.C_A \cdot 1,480244 - 3.C_A = 11.181,14$$

$$C_A \cdot 1,118113 = 11.181,14$$

$$C_A = \frac{11.181,14}{1,118113}, \text{ e, assim, } C_A = 10.000,00 \text{ é o valor do primeiro empréstimo}$$

e, portanto,  $C_B = 20.000,00$ , é o valor do segundo empréstimo.

### 3.10 Aplicação das atividades com papel e lápis

Estas atividades são constituídas de seis questões abertas, foram elaboradas, desenvolvidas e aperfeiçoadas em reuniões com a orientadora da pesquisa, levando em conta a vivência em sala de aula do pesquisador e as considerações dos capítulos anteriores. A resolução dessas questões poderia contar com o auxílio de calculadoras.

Estas atividades constituíam-se de questões consideradas fáceis, com o objetivo de avaliar a habilidade elementar no cálculo das porcentagens, dos juros e do montante no regime de capitalização dos juros compostos e questões mais complexas que envolviam a montagem de sistemas de equações.

No dia 24 de agosto de 2006, quinta-feira, as atividades foram aplicadas para um grupo de 18 alunos de uma turma do terceiro semestre de Tecnologia Gestão em Financeira de uma Instituição de Ensino Particular da zona central de São Paulo e que já concluíram a disciplina de Matemática Financeira, cursada durante o segundo semestre do curso.

No dia 13 de novembro de 2006, segunda-feira, foram aplicadas para um grupo de 7 alunos de uma turma do quarto ano de Administração de uma Instituição da zona sul e que, também, já haviam concluído a disciplina de Matemática Financeira

Classificamos estes grupos de alunos, para efeito de pesquisa em nosso trabalho, no denominado grupo instrucionista, pois, o ensino parece seguir a tradicional seqüência da apresentação de conteúdos da Matemática Financeira, memorização e aplicação de fórmulas e pouco ou nenhum desafio à

demonstração algébrica dessas fórmulas ou construção de modelos, baseados em experiências diárias do cidadão com operações financeiras.

A observação feita acima está baseada, também, na nossa experiência como professor dessas turmas, muitas vezes, seguiu-se a abordagem, que parece estar “consagrada” da instrução para a resolução dos exercícios.

Entende-se que a abordagem instrucionista tem seu papel natural no ensino e pode conviver com abordagens construcionistas, e esta harmonia entre os dois paradigmas deve ser mediada pelo professor.

No dia 12 de dezembro de 2006, essas atividades com papel e lápis foram aplicadas, também, aos alunos do grupo denominado construcionista, alunos que, ainda, não cursaram a disciplina de Matemática Financeira. Os integrantes desse grupo caracterizam-se pela participação nas três sessões de Atividades com planilhas eletrônicas.

As atividades foram aplicadas aos dois grupos, instrucionista e construcionista, com o intuito de comparar os resultados associados com a participação em duas abordagens diferentes: com ênfase na construção de fórmulas dos juros simples e juros compostos e uma abordagem, nas quais estas fórmulas foram dadas. A idéia é investigar quais tipos de questão são acessíveis aos alunos de cada grupo.

### **3.11 Atividades com papel e lápis – possíveis resoluções**

A seguir, são apresentadas algumas possíveis resoluções das questões de Matemática Financeira no ambiente de papel e lápis, conforme orientação dada aos alunos, com o auxílio de qualquer calculadora científica ou financeira.

### 3.11.1 Questão 1

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

Esta questão, aparentemente simples, envolve uma das operações financeiras elementares da Matemática Financeira. Esperava-se dos alunos alguns modos ou procedimentos diferentes de resolução, que indicassem suas práticas e possíveis conhecimentos. Assim, além do uso tradicional da tecla de porcentagem [%] das calculadoras, também, o modo algébrico,  $0,30 \times 70,00$  para o cálculo de 30% de R\$ 70,00 era esperado.

O cálculo dos juros, como porcentagem de um valor emprestado, ou o cálculo do rendimento como porcentagem de um valor aplicado em uma instituição financeira, ou ainda, o cálculo do lucro com porcentagem do preço de custo de uma mercadoria. Em todos estes casos tem-se uma operação financeira básica das atividades comerciais e da Matemática Financeira.

Desse modo, foram exploradas de início atividades que pudessem utilizar esse cálculo elementar, mas, que é o fundamento da Matemática Financeira Básica e também, da Matemática Financeira Avançada.

A seguir, é apresentado um modo de resolução:

Considerando a sintaxe da questão, pode-se interpretar como um lucro de 30% sobre o valor ou preço de custo, e isto, implica:

Lucro = 30% de 70,00, assim, tem-se: lucro =  $0,30 \times 70,00$  e portanto, lucro = 21,00.

O preço de venda é igual ao preço custo (R\$ 70,00) mais o lucro (R\$ 21,00), que é um primeiro “modelo ou fórmula elementar das atividades comerciais”, ou seja, **preço de venda = preço de custo + lucro**: para facilitar o

uso dessa equação, pode-se abreviar a escrita e chamar: preço de venda = **PV**, preço de custo = **PC** e lucro = **L** e, assim, escrever:

$$\mathbf{PV = PC + L}$$

Portanto, preço de venda = 70,00 + 21,00 = 91,00, ou **PV** = R\$ 91,00, que é o resultado final esperado.

Procurou-se investigar o modo como os alunos expressam a taxa porcentual para obter o lucro de R\$ 21,00, nesse exercício em particular, esperava-se encontrar uma das formas,  $30\% = \frac{30}{100}$  ou  $30\% = 0,30$ , ou nenhuma delas, já que, além do ambiente de papel e lápis, eles poderiam usar, calculadoras científicas e financeiras.

Ainda, nesta questão pode-se discutir a sintaxe da pergunta e, também, considerar o lucro em relação ao preço de venda e apresentar como resposta dois resultados possíveis.

### 3.11.2 Questão 2

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

Para esta questão, já esperava da parte dos alunos-aprendizes um grau maior de dificuldade em sua resolução e um dos objetivos era avaliar, também, conhecimentos algébricos básicos, como o uso de sistemas de equações de 1º grau, propriedade das proporções e regra de três.

A intenção, também, era avaliar nesta questão o uso de modelos matemáticos ou fórmulas básicas das atividades comerciais, em particular:

**preço de venda = preço de custo + lucro**, porém, embora a pergunta seja a mesma da **Questão 1**, (Qual deve ser o preço de venda?), nesta questão, deseja-se ganhar 25% sobre o preço de venda e isso se traduz em dizer que o lucro deve ser igual a 25% do preço de venda.

**1ª Resolução** – Usando o modelo ou fórmula do preço de venda que aqui será chamada de equação (I); o preço de custo da mercadoria que é igual a R\$ 60,00 e que será chamada de equação (II) e o lucro que deverá ser igual a 25% do preço de venda de equação, chamada de equação (III), assim, o sistema de equações poderá ser escrito:

$$PV = PC + L \quad (I)$$

$$PC = 60,00 \quad (II)$$

$$L = 0,25 \times PV \quad (III)$$

Substituindo, as equações (II) e (III), na equação (I), tem-se:

$$PV = 60,00 + 0,25 \times PV$$

Portanto,  $PV = 80,00$

**2ª Resolução** – Usando proporções, regra de três e a correspondência com a Taxa Porcentual. Pode-se considerar o preço de venda (PV), como correspondente a 100%. Assim, como se sabe que o preço de venda (PV) é igual à soma do preço de custo (PC) com o lucro (L) e, portanto, a soma das respectivas Taxas Porcentuais, de (PC) e (L), será igual a 100%. Sabendo, ainda que a Taxa porcentual do lucro é de 25% sobre o preço de venda, resta para o preço de custo a Taxa de 75%, como mostra a correspondência no quadro abaixo:

|                       | Valor em (R\$) | Taxa Percentual (%) |
|-----------------------|----------------|---------------------|
| <b>Preço de venda</b> | PV             | 100%                |
| <b>Preço de custo</b> | 60,00          | 75%                 |
| <b>Lucro</b>          | L              | 25%                 |

**Quadro 3.4. Questão 2 – Resolução por regra de três**

Assim, para responder à pergunta: “Qual deve ser o preço de venda (PV)?” será considerada a proporção (regra de três):  $\frac{PV}{100\%} = \frac{60,00}{75\%}$ , e portanto,  $PV = 80,00$ .

### 3.11.3 Questão 3

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante, obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

Esta questão permite uma discussão em relação às respostas que podem ser dadas, pois, considerando a pergunta “Qual foi o segundo desconto?”, pode-se aceitar dos alunos-aprendizes como corretas, as seguintes possibilidades de respostas:

1ª) Uma Taxa Porcentual em relação à conta reduzida de 10%.

2ª) Uma Taxa Porcentual em relação à conta total de R\$ 40,00.

3ª) Um valor em reais em relação à conta reduzida de 10%.

Acredita-se que a resposta mais provável, seja a primeira, mas, também, devem ser aceitas como corretas, as segunda e terceira respostas, desde que elas venham expressas com os referenciais.

Resolução:

$$1^{\circ} \text{ desconto: } 10\% \text{ sobre R\$ } 40,00 = 0,1 \cdot 40,00 = 4,00$$

$$\text{Valor da conta reduzida com } 10\% = 40,00 - 4,00 = 36,00$$

$$2^{\circ} \text{ desconto: } x \text{ sobre R\$ } 36,00 = x \cdot 36$$

O valor da conta reduzida com o segundo desconto é igual a R\$ 28,80, assim, poderá ser escrito:  $36 - x \cdot 36 = 28,80$ , portanto  $x = 0,2$  ou  $x = 20\%$ , que é a resposta na forma de Taxa Porcentual e que representa o segundo desconto de 20% sobre R\$ 36,00.

#### 3.11.4 Questão 4

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?
- b) Qual o montante ao final do primeiro mês?
- c) Qual o montante ao final do quinto mês?

A Questão 4 é clássica do cálculo do montante no regime de juros compostos, lembrando que este trabalho investiga, apenas, alguns tópicos da Matemática Financeira, particularmente, o cálculo dos juros e montante nos regimes de capitalização dos juros simples e compostos.

Esta questão, no regime de capitalização de juros compostos, com três perguntas, contém os fundamentos da Matemática Financeira, sem um grau de dificuldade maior. Procurou-se explorar os conceitos de Capital, Juros, Taxa de Juros, Montante e nessa resolução foram apresentadas as diferentes terminologias para esses conceitos e, também, a terminologia do Microsoft Excel e calculadora Financeira HP-12C:

**1º) Capital inicial** ou, também, chamado de Principal, ou como é tratado pelo Microsoft Excel, **Valor Presente (VP)**, ou ainda, a terminologia em inglês, usada nas principais calculadoras financeiras e, particularmente na HP-12C, **(PV)**, *Present Value*, representado nesta questão pelo valor de R\$ 1.000,00.

**2º) O prazo de aplicação** ou número de períodos da aplicação, o Microsoft Excel usa em suas fórmulas prontas, **nper**, e a calculadora HP-12C, usa **(n)**, do inglês, *number of periods.*, representado nesta questão por 5 meses.

**3º) A Taxa de juros da aplicação**, utilizada para a remuneração do capital ou para capitalização<sup>6</sup> do período. Nesta questão a capitalização é mensal, ou seja, coincidente com o período da Taxa de juros de 2% ao mês. A HP-12C usa a terminologia **(i)**, do inglês, *interest rate*.

**4º) O Montante** ao final de cada período e Montante ao final da aplicação, como resultado da soma do Montante do período anterior com os juros do período. Este Montante é o **Valor Futuro** do Microsoft Excel e o **(FV)** do inglês **Future Value** na HP-12C.

**Resolução 1** – Para a resolução da pergunta, **a)** Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês ? Pode-se expressar a Taxa de 2% em sua forma unitária ou decimal.

$$\text{Juros} = \text{Capital} \times \text{Taxa}$$

$$\text{Juros} = 1000 \times 0,02 = 20$$

---

<sup>6</sup> Capitalização é o procedimento de adicionar o juro do período ao capital, ou principal, do início do mesmo período.

A pergunta, **b)** “Qual o montante ao final do primeiro mês?”, é o resultado do capital somado aos juros do primeiro período, obtendo o Montante de R\$ 1.020,00.

A pergunta, **c)** “Qual o montante ao final do quinto mês?”, poderia ser resolvida pela aplicação da taxa de juros de 2% ao mês, sobre o montante de R\$ 1.020,00 do primeiro mês, obtendo juros de R\$ 20,40 que são incorporados ao montante anterior de R\$ 1.020,00 e resultando, assim, o montante do segundo mês de R\$ 1.040,40. Este processo de capitalização mensal, no regime de juros compostos, pode ser estendido para o quinto mês, chegando à resposta, Valor do montante ao final do quinto mês igual à R\$ 1.104,08. O processo de capitalização mensal no regime de juros compostos pode ser construído em um planilha como mostra o Quadro 3.5.

| <b>Mês</b> | <b>Montante anterior</b> | <b>Cálculo dos juros</b>       | <b>Montante atual</b> |
|------------|--------------------------|--------------------------------|-----------------------|
| 0          | 0                        |                                | 1.000,00              |
| 1          | 1.000,00                 | $1.000,00 \times 0,02 = 20,00$ | 1.020,00              |
| 2          | 1.020,00                 | $1.020,00 \times 0,02 = 20,40$ | 1.040,40              |
| 3          | 1.040,40                 | $1.040,40 \times 0,02 = 20,81$ | 1.061,21              |
| 4          | 1.061,21                 | $1.061,21 \times 0,02 = 21,22$ | 1.082,43              |
| 5          | 1.082,43                 | $1.082,43 \times 0,02 = 21,65$ | 1.104,08              |

**Quadro 3.5. Montante em juros compostos – cálculo mês a mês**

Este procedimento, embora, atualmente não seja comum nas resoluções apresentadas pelos alunos, pode-se dizer que era adotado nas décadas anteriores a 1970, quando não se tinha, ainda, à mão as calculadoras eletrônicas e os recursos de um computador. Os bancos e as empresas recorriam as estas “Planilhas não Eletrônicas” calculando, às vezes, mês a mês, o montante (saldo

atualizado da conta corrente) para informar a seus clientes e à própria Gestão Administrativa do Banco.

**Resolução 2** – A solução mais rápida e, atualmente usada pelos alunos é, sem dúvida, a aplicação da fórmula (modelo) do Montante no regime de juros compostos. Esta fórmula pode ser construída (demonstrada algebricamente) pela generalização do **Montante (M)**, resultante da aplicação de um **Capital (C)**, durante **um número de períodos (n)** e a uma **Taxa de Juros (i)**, expressa na mesma unidade de período do prazo de aplicação (n).

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

**Fórmula do Montante no regime de juros compostos**

Considerando o capital  $C = 1000$ , a Taxa de Juros  $i = 2\%$  ao mês e o prazo de aplicação de  $n = 5$  meses, e substituindo na fórmula, temo-se:

$$M = 1000 \cdot (1 + 0,02)^5, \text{ que resulta no Montante de R\$ 1.104,08.}$$

### 3.11.5 Questão 5

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos).

A questão, também permite uma exploração da construção do Montante, mês a mês (usando uma planilha não eletrônica), já que o prazo do empréstimo é de 90 dias, ou seja, três meses. Assim, mesmo um aluno que, eventualmente, não conheça a fórmula do Montante, mas tenha entendido as noções do regime de capitalização em juros compostos, poderia calcular o Montante final, efetuando três capitalizações e incorporando o juro obtido ao montante anterior.

Nesta questão, procura-se explorar a necessidade da compatibilidade dos dados da taxa de juros e do prazo do empréstimo, para o cálculo do montante. Se a taxa for 5,65% ao mês, o prazo do empréstimo de 90 dias deverá ser convertido à mesma unidade de tempo da taxa, resultando em um prazo de três meses.

### 3.11.6 Questão 6

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00, a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

Esta questão, também, é resolvida pela aplicação da fórmula do Montante em juros compostos, porém envolve outras habilidades, como a montagem de uma equação e um sistema de equações. Envolve a habilidade de interpretação da passagem da linguagem natural, da semântica do enunciado para a linguagem Matemática. Explora, também, propriedades da aritmética e da álgebra e suas estruturas. A seguir, é apresentada uma possível resolução:

#### Resolução

Após uma leitura e re-leitura do texto, como convém, para se passar da linguagem natural, para uma linguagem algébrica; pode-se chamar:

Capital aplicado no banco A de  $C_A$ ;

Montante resultante do banco A de  $M_A$ ;

Capital aplicado no banco B de  $C_B$ ;

e Montante resultante do banco B de  $M_B$ .

Os dois Capitais aplicados somam R\$ 6,000,00, assim, tem-se a primeira equação:  $C_A + C_B = 6000$  **(equação I)**.

Aplicando a fórmula do Montante para os dois capitais,  $C_A$  e  $C_B$ ,

$M_A = C_A \cdot (1 + i_A)^n$  e  $M_B = C_B \cdot (1 + i_B)^n$ , e ainda, sabendo que os montantes resultantes são iguais, ou seja,  $M_A = M_B$ , tem-se a seguinte equação:  $C_A \cdot (1 + i_A)^n = C_B \cdot (1 + i_B)^n$ , substituindo os dados,  $i_A = 2\%$  ao mês e  $i_B = 1,5\%$  ao mês e o prazo de aplicação,  $n = 6$  meses que é o mesmo para as duas aplicações, obtém-se a equação:

$C_A \cdot (1 + 0,02)^6 = C_B \cdot (1 + 0,015)^6$  **(equação II)**. As equações I e II constituem um sistema de duas equações com duas incógnitas, representadas pelos capitais,  $C_A$  e  $C_B$ , cuja resolução é  $C_A = \text{R\$ } 2.955,78$  e  $C_B = \text{R\$ } 3.044,22$ .

Nesta questão, interessa investigar, em particular, os modos de resolução em ambiente de papel e lápis, com o auxílio de calculadoras e, posteriormente, comparar com a resolução em ambiente das planilhas eletrônicas.

## **CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DA EXPERIMENTAÇÃO**

---

### **4.1 Apresentação**

Neste capítulo, serão descritas as análises das atividades dos dois grupos que participaram do presente estudo. O capítulo inicia-se com a descrição e análise das atividades com planilhas eletrônicas das duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio que constituíram o grupo construcionista. Em seguida, são analisadas as atividades com papel e lápis aplicadas aos dois grupos (construcionista e instrucionista) e o capítulo encerra com um estudo comparativo dos resultados das análises desses dois grupos.

### **4.2 Análise das atividades com planilhas eletrônicas**

Para realização deste experimento de ensino, as atividades foram planejadas para aplicação em três sessões, programadas em três datas diferentes, com duração de 2 horas cada, tempo suficiente em algumas sessões, insuficiente em outras e que teve seu tempo estendido, em razão disso.

Conforme foi explicado no Capítulo 3, estas sessões foram aplicadas ao grupo de alunos que, no curso superior de graduação em Administração, ainda, não havia cursado a disciplina de Matemática Financeira, denominado de Grupo Construcionista.

Na primeira sessão, antes de iniciar a primeira atividade, foram explicados aos aprendizes os objetivos do trabalho de pesquisa e os procedimentos para aplicação dessas atividades. A partir da segunda sessão, somente quatro alunos

compareceram e constituíram, assim, as duplas analisadas nesse experimento, formadas, conforme Quadro 4.2.

Durante as sessões, foram realizadas gravações de voz das duplas e do professor. Para possibilitar a observação e favorecer a análise, as telas das planilhas eletrônicas foram gravadas com a utilização do software *Media Encoder 9 series* da Microsoft. Isto permitiu o registro, passo a passo das produções e estratégias de resolução dos aprendizes.

### **4.3 Análise das atividades das duplas**

Ao ressaltar que esta pesquisa tem como um de seus objetivos principais o envolvimento dos aprendizes na construção de seus próprios modelos matemáticos, assim, acompanhou-se e orientou-se, segundo a metodologia adotada, o desenvolvimento dos aprendizes para analisar as produções das duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio, procurando entender os significados que podem dar suporte à aprendizagem e respostas às questões de pesquisa.

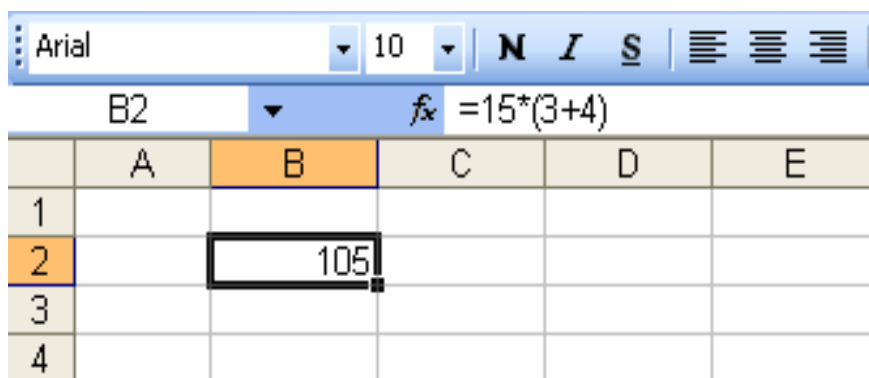
As duplas demonstraram alguma familiaridade com a interface do aplicativo Microsoft Excel e não tiveram, em geral, dificuldades com os comandos básicos para efetuar operações aritméticas. Todos os aprendizes já utilizavam no ambiente de trabalho a Barra de Fórmulas, como simples calculadora, ou mesmo, para registro de fórmulas matemáticas básicas.

Considerando que as duplas tiveram desempenhos semelhantes, esta análise será focada na dupla Gisele/Natália, apresentando as eventuais diferenças de procedimentos e estratégias da dupla Patrícia/Fábio.

### 4.3.1 Análise da Atividade 1

Na Atividade 1, as “expressões equivalentes”, foram entendidas como expressões numéricas que têm o mesmo valor. Seu objetivo principal foi permitir aos aprendizes a identificação de que existem expressões numéricas com representações diferentes, mas, com o mesmo valor numérico. Além disso, pretendeu-se criar condições para a apropriação de algumas propriedades operatórias, em especial, da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração.

No decorrer da aplicação desta atividade, aconteceram intervenções de ensino para favorecer a familiarização das duplas com a Interface do Excel, em particular, para utilização da Barra de Fórmulas do Excel. Entre estas intervenções, são citadas as instruções para emprego da Barra de Fórmulas, como simples calculadora ou como registro de um modelo matemático, para calcular o valor de uma expressão numérica, como mostra a Figura 4.1.



**Figura 4.1. Cálculo de uma expressão numérica**

Diante da pergunta: “Quais expressões acima são equivalentes?” Explique por quê?, as aprendizes expressaram suas observações por uma linguagem natural, às vezes, não muito clara, mas, evidenciando a percepção que, embora as expressões tenham representações diferentes, elas apresentam o mesmo

resultado na planilha. Por exemplo, isso aconteceu no caso dos itens (a) e (b); (d) e (e); (f) e (g); (i) e (j).

O desempenho das duas duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio foi semelhante. Após a familiarização com a Barra de Fórmulas, demonstraram facilidade nos cálculos mais simples, como nos itens (a) e (b) e dificuldades algébricas, como por exemplo, no cálculo do item (c), em particular, na colocação dos parênteses. Outra dificuldade das duplas foi reconhecer as diversas representações de um número, por exemplo, nos itens (f) e (g). Em razão disso, as intervenções de ensino dirigidas às duplas foram, também, semelhantes.

Para explicar este desempenho é apresentado com mais detalhes o processo de resolução da dupla Gisele/Natália (Figura 4.2 e Figura 4.3)

|    |                                                                                  |                            |   |         |   |   |   |   |
|----|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|---|---------|---|---|---|---|
| D9 |                                                                                  | =SOMA(75-33+42-10+33)      |   |         |   |   |   |   |
|    | A                                                                                | B                          | C | D       | E | F | G | H |
| 1  | ATIVIDADE 1                                                                      |                            |   |         |   |   |   |   |
| 2  | OPERAÇÕES ARITMÉTICAS USANDO O EXCEL                                             |                            |   |         |   |   |   |   |
| 3  |                                                                                  |                            |   |         |   |   |   |   |
| 4  | Resolva as expressões abaixo, compare os resultados com as expressões propostas. |                            |   |         |   |   |   |   |
| 5  | Faça conjecturas tire conclusões.                                                |                            |   |         |   |   |   |   |
| 6  |                                                                                  |                            |   |         |   |   |   |   |
| 7  | 1.                                                                               | RESOLVA                    |   | SOLUÇÃO |   |   |   |   |
| 8  |                                                                                  |                            |   |         |   |   |   |   |
| 9  | a)                                                                               | 75 - 33 + 42 - 10 + 33 = ? |   | 107     |   |   |   |   |

**Figura 4.2. Fórmula construída por Gisele/Natália – Atividade 1a**

|    | A  | B                                                               | C | D    | E | F | G |
|----|----|-----------------------------------------------------------------|---|------|---|---|---|
| 10 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 11 | b) | $75 + 42 - 10 = ?$                                              |   | 107  |   |   |   |
| 12 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 13 | c) | $\frac{(18 \times 4) + (51 \div 17)}{(5 + 8 - 3) \times 2} = ?$ |   | 3,75 |   |   |   |
| 14 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 15 | d) | $15 \times 3 + 15 \times 4 = ?$                                 |   | 105  |   |   |   |
| 16 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 17 | e) | $15 \times (3 + 4) = ?$                                         |   | 105  |   |   |   |
| 18 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 19 | f) | $2.000 \times \left(\frac{3}{100}\right) = ?$                   |   | 60   |   |   |   |
| 20 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 21 | g) | $2.000 \times 0,03 = ?$                                         |   | 60   |   |   |   |
| 22 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 23 | h) | $2.000 \times 1 = ?$                                            |   | 2000 |   |   |   |
| 24 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 25 | i) | $2.000 \times 1 + 2.000 \times 0,03 = ?$                        |   | 2060 |   |   |   |
| 26 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 27 | j) | $2.000 \times (1 + 0,03) = ?$                                   |   | 2060 |   |   |   |
| 28 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |
| 29 | k) | Quais das expressões acima são equivalentes? Explique por quê?  |   |      |   |   |   |
| 30 |    |                                                                 |   |      |   |   |   |

**Figura 4.3. Resultados dos cálculos na planilha de Gisele/Natália.**

Nesta atividade, são observadas algumas dificuldades aritméticas e algébricas apresentadas por ambas as duplas e recorreu-se às primeiras intervenções de ensino para possibilitar o desenvolvimento dessas atividades. Em ambiente de papel e lápis, exercitou-se com as duplas, as operações aritméticas e suas propriedades e as diversas representações de um número, focando em exemplos numéricos das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Uma vez que as dificuldades enfrentadas pelas duas duplas foram semelhantes, a seguir, são apresentadas as intervenções e alguns diálogos dos momentos de interação da dupla Gisele/Natália.

Nos itens **(a)**  $75 - 33 + 42 - 10 + 33 = ?$  e **(b)**  $75 + 42 - 10 = ?$  a dupla apresentou o resultado correto e rápido igual a 107, para o valor das expressões. Então, solicitou-se que a dupla observasse as expressões e concluísse (conforme solicitação da Atividade):

**Professor** – As duas expressões têm representações diferentes, mas os resultados são iguais. Por quê?

**Gisele** – São iguais, pois a única coisa que as difere é o número 33, que em um momento é somado e no outro é subtraído, ficando 0.

No item (c)  $\frac{(18 \times 4) + (51 \div 17)}{(5 + 8 - 3) \times 2} = ?$  a dupla inseriu esta expressão na célula

**D13** e utilizou a Barra de Fórmulas do Excel, como registro de fórmula (Figura 4.4).

|     |    |                                                                 |   |      |   |
|-----|----|-----------------------------------------------------------------|---|------|---|
| D13 |    | fx =(18*4)+(51/17)/(5+8-3)*2                                    |   |      |   |
|     | A  | B                                                               | C | D    | E |
| 13  | c) | $\frac{(18 \times 4) + (51 \div 17)}{(5 + 8 - 3) \times 2} = ?$ |   | 72,6 |   |
| 14  |    |                                                                 |   |      |   |

**Figura 4.4. Tentativa de resolução da Atividade 1. item (c) – Gisele/Natália**

**Gisele** – O resultado é 72,6.

Foi solicitado que calculassem o valor dessa expressão, também, no ambiente de papel e lápis, observassem que as operações indicadas dentro dos parênteses têm prioridade. Após alguns minutos, a aluna respondeu:

**Gisele** – O resultado é 75 sobre 20.

Nesse momento, além das intervenções de natureza aritmética e algébrica, foi falado um pouco da familiarização com a Interface das operações aritméticas

com o Excel, em especial, da importância da comparação com o ambiente de papel e lápis.

Assim, a dupla realizou diversas tentativas de colocação de parênteses, em um “**processo de simulação**”, comparando com os resultados de papel e lápis e, enfim, apresentou o resultado correto, inserindo na célula **D13** (Figura 4.5), o cálculo correto.

|     |    |                                                                 |   |      |   |
|-----|----|-----------------------------------------------------------------|---|------|---|
| D13 |    | fx = ((18*4)+(51/17))/((5+8-3)*2)                               |   |      |   |
|     | A  | B                                                               | C | D    | E |
| 13  | c) | $\frac{(18 \times 4) + (51 \div 17)}{(5 + 8 - 3) \times 2} = ?$ |   | 3,75 |   |
| 14  |    |                                                                 |   |      |   |

**Figura 4.5. Acertando os parênteses – Resolução Gisele/ Natália**

Nos itens **(d)**  $15 \times 3 + 15 \times 4 = ?$  e **(e)**  $15 \times (3 + 4) = ?$ , os resultados iguais foram obtidos com facilidade, então, solicitou-se para que fizessem conjecturas, sobre o por quê desses resultados iguais.

**Natália** – São iguais, mas estão diferentes, pois, no segundo caso, a soma entra em evidência.

Nos itens **(f)**  $2.000 \times \left(\frac{3}{100}\right) = ?$  e **(g)**  $2.000 \times 0,03 = ?$ , também, com facilidade a dupla efetuou os cálculos e, assim explicou os resultados iguais:

**Gisele** – São iguais, ...3 sobre 100 é igual a três centésimos, multiplicado por 2000 dá o mesmo resultado.

Nesse momento, reforçou-se a questão das diversas representações de um número, com uma nova intervenção de ensino. O conceito da taxa de juros e suas diversas representações foram apresentados como fundamental para os

objetivos deste trabalho. Assim, três por cento podem ser representados da seguinte maneira  $3\% = \frac{3}{100} = 0,03$ .

No item **(h)**  $2.000 \times 1 = ?$ , o resultado  $2.000 \times 1 = 2.000$ , teve o objetivo evidente de colaborar nos cálculos das expressões **(i)** e **(j)** e, isso, aparentemente, aconteceu. As alunas realizam os cálculos corretamente e justificaram:

**Gisele** – é igual a **(d)** e **(e)**... a soma entra em evidência.

No procedimento das duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio, observou-se uma tendência em considerar a atividade como encerrada, assim que o resultado da operação tivesse sido alcançado. Efetuavam as operações e, após encontrarem o resultado, não atentavam para as diferentes formas de representação das expressões, para delas tirar conclusões. Em razão dessa tendência, nosso papel foi sobretudo de orientação aos aprendizes e recomendação para observar as expressões, compará-las e delas fazer conjecturas. Após nossos pedidos, a dupla apresentou as seguintes conjecturas.

Não se pôde, ainda, avaliar se houve apropriação das propriedades operatórias da aritmética, pelo menos, alguma percepção delas. Para melhor avaliação dessas conjecturas, se elas podem contribuir para dar suporte à aprendizagem e para construção dos modelos matemáticos, talvez as próximas atividades possam nos ajudar na análise.

#### 4.3.2 Análise da Atividade 2

A Atividade 2 é formada por três exercícios de juros simples, no Exercício 1 era pedido o cálculo dos juros e do montante a ser pago por um empréstimo de R\$ 2.000,00, contratado por um período e a uma taxa de 3% ao período. Na

intervenção de ensino dirigida às duplas, foi explicado que o período de empréstimo aqui era genérico, poderia ser um mês, um ano ou um período de 157 dias e, assim, a taxa de juros contratada poderia ser, respectivamente de 3% ao mês, 3% ao ano ou 3% no período de 157 dias. A intenção era auxiliar as duplas na compreensão das sintaxes dos enunciados das atividades econômicas e da Matemática Financeira nem sempre familiar.

No Exercício 2, desta Atividade 2, as perguntas foram as mesmas do Exercício 1, apenas o *layout* da planilha para efetuar operações aritméticas pôde ser considerado diferente. Pedia-se, inserir nas células, as operações aritméticas, modelos (fórmulas). Pretendia-se observar as potencialidades do Microsoft Excel na passagem da aritmética para a álgebra. Sugeriu-se, também, o uso de papel, lápis e calculadoras. No Exercício 3, o último da Atividade 2, solicitou-se que a dupla expressasse no ambiente de papel e lápis os modelos para o cálculo montante.

A seguir apresentamos as resoluções da dupla Gisele e Natália e as suas interações com o professor.

No Exercício 1, a dupla efetuou com certa facilidade as operações aritméticas para o cálculo dos juros e do montante. Na Figura 4.6 pode-se verificar a célula **C11** selecionada e nela inserida a operação  $=2000*C10$ , que aparece na Barra de fórmulas. Desta forma, obteve o cálculo dos juros do período, representado por uma operação de multiplicação.

| C11 |   | =2000*C10                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |              |   |   |   |   |
|-----|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|---|---|---|---|
|     | A | B                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | C            | D | E | F | G |
| 1   |   | ATIVIDADE 2                                                                                                                                                                                                                                                                                               |              |   |   |   |   |
| 2   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 3   |   | MATEMÁTICA FINANCEIRA - JUROS SIMPLES                                                                                                                                                                                                                                                                     |              |   |   |   |   |
| 4   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 5   |   | <b>Exercício 1.</b> Um empréstimo de R\$ 2.000,0 foi contratado a juros simples e a uma taxa de juros de 3% no período.<br>Qual o valor dos juros no período? Insira esta operação na célula C11.<br>Qual o valor do montante a ser desembolsado ao final do período? Insira esta operação na célula C12. |              |   |   |   |   |
| 6   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 7   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 8   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 9   |   | Valor do empréstimo ou capital emprestado                                                                                                                                                                                                                                                                 | R\$ 2.000,00 |   |   |   |   |
| 10  |   | Taxa de juros(% no período)                                                                                                                                                                                                                                                                               | 3,00%        |   |   |   |   |
| 11  |   | Valor dos juros (despesa) no período                                                                                                                                                                                                                                                                      | R\$ 60,00    |   |   |   |   |
| 12  |   | Montante                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2.060,00     |   |   |   |   |
| 13  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |

Figura 4.6. Cálculo dos juros – Resolução Gisele/Natália

Ainda, no Exercício 1 (Figura 4.7), pode-se ver a célula C12, selecionada e o cálculo do montante nela inserida e indicado na Barra de fórmulas pela operação de adição,  $=C9+C11$ .

| C12 |   | =C9+C11                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |              |   |   |   |   |
|-----|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|---|---|---|---|
|     | A | B                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | C            | D | E | F | G |
| 1   |   | ATIVIDADE 2                                                                                                                                                                                                                                                                                               |              |   |   |   |   |
| 2   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 3   |   | MATEMÁTICA FINANCEIRA - JUROS SIMPLES                                                                                                                                                                                                                                                                     |              |   |   |   |   |
| 4   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 5   |   | <b>Exercício 1.</b> Um empréstimo de R\$ 2.000,0 foi contratado a juros simples e a uma taxa de juros de 3% no período.<br>Qual o valor dos juros no período? Insira esta operação na célula C11.<br>Qual o valor do montante a ser desembolsado ao final do período? Insira esta operação na célula C12. |              |   |   |   |   |
| 6   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 7   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 8   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |
| 9   |   | Valor do empréstimo ou capital emprestado                                                                                                                                                                                                                                                                 | R\$ 2.000,00 |   |   |   |   |
| 10  |   | Taxa de juros(% no período)                                                                                                                                                                                                                                                                               | 3,00%        |   |   |   |   |
| 11  |   | Valor dos juros (despesa) no período                                                                                                                                                                                                                                                                      | R\$ 60,00    |   |   |   |   |
| 12  |   | Montante                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2.060,00     |   |   |   |   |
| 13  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |   |   |   |   |

Figura 4.7. Cálculo do montante – Resolução Gisele/Natália.

Nesta seqüência de atividades da primeira sessão, a dupla Gisele/Natália não teve dificuldade com a Interface da Planilha Excel e calculou os juros e o Montante do empréstimo, como é descrito abaixo.

Os dois resultados (cálculo dos juros e montante) foram obtidos pela dupla Gisele/Natália efetuando, inicialmente, uma operação de multiplicação (cálculo dos juros) e, em seguida, uma operação de adição (cálculo do montante).

A dupla Patrícia/Fábio usou as mesmas estratégias de resolução para o cálculo dos juros e montante, entretanto no cálculo dos juros da célula C11 utilizou o endereço de célula C9 para o valor do capital emprestado (a dupla Gisele/Natália não usou o endereço da célula para o cálculo dos juros e digitou 2.000) e, assim, registrou na célula C11,  $=C9*C10$  (Figura 4.8).

A diferença entre esses dois procedimentos foi que a estratégia usada pela dupla Patrícia/Fábio permite a simulação valor do capital emprestado na célula C9, o valor da taxa de juros na célula C10 e, assim, o cálculo do juro e do montante é efetuado sobre os valores da simulação, constituindo um modelo matemático implementado no Excel.

|     |   |                                                                                                                   |              |   |   |   |   |
|-----|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|---|---|---|---|
| C11 |   | fx =C9*C10                                                                                                        |              |   |   |   |   |
|     | A | B                                                                                                                 | C            | D | E | F | G |
| 1   |   | ATIVIDADE 2                                                                                                       |              |   |   |   |   |
| 2   |   |                                                                                                                   |              |   |   |   |   |
| 3   |   | MATEMÁTICA FINANCEIRA - JUROS SIMPLES                                                                             |              |   |   |   |   |
| 4   |   |                                                                                                                   |              |   |   |   |   |
| 5   |   | Exercício 1. Um empréstimo de R\$ 2.000,00 foi contratado a juros simples e a uma taxa de juros de 3% no período. |              |   |   |   |   |
| 6   |   | Qual o valor dos juros no período? Insira esta operação na célula C11.                                            |              |   |   |   |   |
| 7   |   | Qual o valor do montante a ser desembolsado ao final do período? Insira esta operação na célula C12.              |              |   |   |   |   |
| 8   |   |                                                                                                                   |              |   |   |   |   |
| 9   |   | Valor do empréstimo ou capital emprestado                                                                         | R\$ 2.000,00 |   |   |   |   |
| 10  |   | Taxa de juros(% no período)                                                                                       | 3,00%        |   |   |   |   |
| 11  |   | Valor dos juros (despesa) no período                                                                              | 60,00        |   |   |   |   |
| 12  |   | Montante                                                                                                          | R\$ 2.060,00 |   |   |   |   |

**Figura 4.8. Fórmula da dupla Patrícia/Fábio para o cálculo dos juros.**

A seguir são apresentados os Exercícios 2 e 3 – da Atividade 2 (Figura 4.9), e as produções das duplas.

O Exercício 2, também, solicitava às duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio o cálculo dos juros e do montante (com outro *layout*), pelo registro de fórmulas, dos juros na coluna D e do montante na coluna E. Com a familiarização do exercício anterior, as duplas cumpriram esta tarefa com desenvoltura.

D17    fx    =B17\*C17

|    | A | B                                                                                                                         | C                    | D            | E               | F | G |
|----|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------|-----------------|---|---|
| 13 |   | <b>ATIVIDADE 2</b>                                                                                                        |                      |              |                 |   |   |
| 14 |   | <b>Exercício 2.</b> Insira nas colunas D e E, as operações aritméticas (fórmulas, modelos) para o cálculo dos juros e     |                      |              |                 |   |   |
| 15 |   | do montante. Resolva, também, no ambiente de papel-lápis e calculadora. Compare seus resultados.                          |                      |              |                 |   |   |
| 16 |   | <b>Capital aplicado</b>                                                                                                   | <b>Taxa de juros</b> | <b>Juros</b> | <b>Montante</b> |   |   |
| 17 |   | R\$ 50.000,00                                                                                                             | 3,00%                | 1.500,00     | 51.500,00       |   |   |
| 18 |   | R\$ 240.000,00                                                                                                            | 2,85%                | 6.840,00     | 246.840,00      |   |   |
| 19 |   | R\$ 1.000,00                                                                                                              | 1,25%                | 12,50        | 1.012,50        |   |   |
| 20 |   | R\$ 1.000.000,00                                                                                                          | 0,85%                | 8.500,00     | 1.008.500,00    |   |   |
| 21 |   |                                                                                                                           |                      |              |                 |   |   |
| 22 |   | <b>Exercício 3.</b> Escreva no ambiente de papel e lápis dois modelos (fórmulas) equivalentes para o cálculo do montante. |                      |              |                 |   |   |
| 23 |   |                                                                                                                           |                      |              |                 |   |   |

**Figura 4.9. Fórmula da dupla Gisele/Natália para o cálculo dos juros.**

Durante a realização do Exercício 2, foi explicado às duplas que o valor do Capital aplicado multiplicado pela Taxa de juros, na fórmula inserida por elas na célula D17, expressada e registrada na Barra de fórmulas por =B17\*C17 (Figura 4.9), representava um dos modelos matemáticos mais simples e importantes da Matemática Financeira, o cálculo dos juros. Neste exercício, era o rendimento do capital aplicado.

Assim, as duplas registraram as fórmulas nas colunas D e E, utilizando a Barra de Fórmulas do Microsoft Excel. Desta forma, após alguns momentos para leitura do enunciado para assimilação e familiarização com o *layout* da planilha, a

dupla Gisele/Natália, parecia ainda, surpresa quanto às suas produções e observou-se o seguinte diálogo entre elas:

**Gisele** – Para obter a fórmula ou modelo dos juros, basta multiplicar o valor da célula **B17** pelo valor da célula **C17**?

**Natália** – É só isso?

O modelo do cálculo do Montante da aplicação, a ser inserido na coluna E, também, foi efetuado com certa facilidade pelas aprendizes, seus diálogos mostram o início da apropriação da terminologia de Matemática Financeira.

**Gisele** – clicando dentro da célula E17, digita igual, juros da célula D17, mais capital da célula B17, Enter.

**Natália** – o resultado 51.500,00 é o montante?

Nota-se certo grau de satisfação das duplas ao efetuar as operações com a Barra de Fórmulas, que, também, utilizaram seus conhecimentos com a interface do Excel e o recurso de cópia de fórmula inserida célula, mas na passagem do modelo para o ambiente de papel e lápis, as duplas não tiveram êxito. Não souberam representar nem com símbolos ou com linguagem natural.

Assim, parece que as planilhas eletrônicas exerceram sobre as duplas um papel facilitador na construção e execução de fórmulas. Estas características colocam em evidência a natureza híbrida das planilhas eletrônicas e o uso delas permitiu às duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio construir uma expressão, simultaneamente, entre aritmética e álgebra, ou seja, o uso de células envolveu as duplas em construções, nas quais elas não conseguiram no ambiente de papel e lápis (HASPEKIAN, 2005).

### 4.3.3 Análise da Atividade 3

As duas primeiras atividades, desta segunda sessão, iniciaram-se com intervenções de ensino. Procuro-se relembrar, ou mesmo, apresentar (as duplas lembravam vagamente desses conteúdos) as noções de seqüência em Matemática e, em particular, as Progressões Aritméticas e Geométricas.

Nesta intervenção de ensino, utilizou-se lousa e giz para uma aula expositiva, apresentando as noções de seqüência numérica, valor do termo e ordem do termo e com exemplos, procurou-se induzir as noções de lei de formação de seqüências. A utilização, também, do ambiente de papel e lápis para uma tentativa de expressar a lei de formação de uma seqüência foi recomendada aos alunos. Em seguida, interagiu-se com as duplas para maior familiarização com a Interface do Excel, usando os recursos de inserção e cópia de fórmulas. Nas resoluções das duplas, notou-se no caso específico de seqüências numéricas, muitas vezes, uma preferência para operar no ambiente Excel e dificuldades para operar no ambiente de papel e lápis.

Na Atividade 3 (Figura 4.10), não houve dificuldade das duplas na resolução do item (a), *a construção da seqüência dos 20 números* e no item (b) *as descrições das estratégias de construção*, foram feitas de maneira amplamente satisfatória, revelando um certo grau de compreensão das duplas da lei de formação da seqüência, porém sem conseguir expressar essa compreensão nem em papel e lápis, nem em planilhas eletrônicas. Desta forma, no item (c), as duplas tiveram grandes dificuldades, e a resolução desse item só foi conseguida com ativa participação do professor, após várias tentativas das duplas. A seguir, as produções da dupla Gisele/Natália.

No item (a) (Figura 4.10) a dupla Gisele/Natália inseriu na célula C13 a fórmula  $=30+C12$ , que resultou no valor do termo igual a 32, correspondente ao termo de ordem 2. Conforme mostra a célula que está ativada C13, exibe o valor do termo 32, enquanto a barra de fórmula, a fórmula inserida.

Em seguida, a dupla usou o recurso de cópia de fórmula, obtendo os outros valores da seqüência. A argumentação da dupla indicada no item (b) (Figura 4.10) revela a estratégia empregada na construção e a compreensão desta seqüência.

|     |                                                                                                                                                        |                |                    |   |     |   |       |    |   |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|--------------------|---|-----|---|-------|----|---|
| C13 |                                                                                                                                                        | =30+C12        |                    |   |     |   |       |    |   |
| A   | B                                                                                                                                                      | C              | D                  | E | F   | G | H     | I  | J |
| 1   | ATIVIDADE 3                                                                                                                                            |                |                    |   |     |   |       |    |   |
| 2   | Progressões                                                                                                                                            |                |                    |   |     |   |       |    |   |
| 3   | a) Construa na planilha eletrônica uma sequência de 20 números, tais que: com exceção do primeiro, cada termo seja a soma do anterior com o número 30. |                |                    |   |     |   |       |    |   |
| 4   |                                                                                                                                                        |                |                    |   |     |   |       |    |   |
| 5   | b) Qual foi sua estratégia de resolução? Descreva-a passo a passo.                                                                                     |                |                    |   |     |   |       |    |   |
| 6   | c) Na célula F11, construa uma expressão que calcule qualquer termo da sequência (ordem do termo está em F10).                                         |                |                    |   |     |   |       |    |   |
| 7   | Teste sua fórmula, mudando o valor da ordem do termo em F10.                                                                                           |                |                    |   |     |   |       |    |   |
| 8   |                                                                                                                                                        |                |                    |   |     |   |       |    |   |
| 9   |                                                                                                                                                        |                |                    |   |     |   |       |    |   |
| 10  | a)                                                                                                                                                     |                | c)                 |   |     |   | Razão | 30 |   |
|     | ordem do termo                                                                                                                                         | valor do termo | ordem do termo "n" |   | 13  |   |       |    |   |
|     |                                                                                                                                                        |                | valor do termo     |   | 362 |   |       |    |   |
| 11  | 1                                                                                                                                                      | 2              |                    |   |     |   |       |    |   |
| 12  | 2                                                                                                                                                      | 32             |                    |   |     |   |       |    |   |
| 13  | 3                                                                                                                                                      | 62             |                    |   |     |   |       |    |   |
| 14  | 4                                                                                                                                                      | 92             |                    |   |     |   |       |    |   |
| 15  | 5                                                                                                                                                      | 122            |                    |   |     |   |       |    |   |
| 16  | 6                                                                                                                                                      | 152            |                    |   |     |   |       |    |   |
| 17  | 7                                                                                                                                                      | 182            |                    |   |     |   |       |    |   |
| 18  | 8                                                                                                                                                      | 212            |                    |   |     |   |       |    |   |
| 19  | 9                                                                                                                                                      | 242            |                    |   |     |   |       |    |   |
| 20  | 10                                                                                                                                                     | 272            |                    |   |     |   |       |    |   |
| 21  | b) Nossa estratégia foi iniciar com o numero "2" somado com o 30, e seu resultado (32) somado novamente com 30, e assim sucessivamente..               |                |                    |   |     |   |       |    |   |

**Figura 4.10. Construção da seqüência e estratégias da dupla Gisele/Natália**

No item (c), embora não tenham conseguido chegar sozinhas à expressão desejada, deve-se ressaltar o engajamento das duplas nas tentativas de construção.

A seguir, trechos dos diálogos entre a dupla Gisele/Natália e o professor:

As aprendizes usaram a estratégia apresentada por elas no item (b), para iniciar a construção da fórmula:

**Gisele** – clica dentro da célula **F11**, digita igual, digita **2** somado com o 30,....

**Professor** – para a construção de uma fórmula ou modelo, não é melhor utilizar o endereço das células? (o valor da razão digitado na célula **I9**)

**Gisele** – Sim, é melhor. Digita, então, **C12** e soma com **I9** e agora..., não sei mais.

Nesse momento usa-se a intervenção de ensino, na qual foi explicada a formação de uma Progressão Aritmética.

**Professor** – Gisele e Natália, observem como a seqüência é formada na tabela do item **(a)**; cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com 30, que é o valor da razão da Progressão Aritmética. Ou, também, pode-se dizer assim: cada termo da Progressão Aritmética é igual ao valor do primeiro termo 2, somado com um múltiplo de 30.

**Gisele e Natália** – Sim, agora lembramos.

**Gisele** – Mas, não sei por qual número multiplicar a razão da célula I9.

**Professor** – Use o endereço da célula da *ordem do termo*, sugerida pela Atividade, célula **F10**.

|     |                                                                                                                                                        |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|---|---|-------|----|---|--|
| F11 |                                                                                                                                                        | fx             |                                                                                                                                          | =C12+I9*F10 |   |   |       |    |   |  |
| A   | B                                                                                                                                                      | C              | D                                                                                                                                        | E           | F | G | H     | I  | J |  |
| 1   | ATIVIDADE 3                                                                                                                                            |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 2   | Progressões                                                                                                                                            |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 3   | a) Construa na planilha eletrônica uma seqüência de 20 números, tais que: com exceção do primeiro, cada termo seja a soma do anterior com o número 30. |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 4   |                                                                                                                                                        |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 5   | b) Qual foi sua estratégia de resolução? Descreva-a passo a passo.                                                                                     |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 6   | c) Na célula F11, construa uma expressão que calcule qualquer termo da seqüência (ordem do termo está em F10).                                         |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 7   | Teste sua fórmula, mudando o valor da ordem do termo em F10.                                                                                           |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 8   |                                                                                                                                                        |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 9   |                                                                                                                                                        |                |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 10  | a)                                                                                                                                                     |                | c)                                                                                                                                       |             |   |   | Razão | 30 |   |  |
|     | ordem do termo                                                                                                                                         | valor do termo | ordem do termo "n"                                                                                                                       | 7           |   |   |       |    |   |  |
| 11  | ordem do termo                                                                                                                                         | valor do termo | valor do termo                                                                                                                           | 212         |   |   |       |    |   |  |
| 12  | 1                                                                                                                                                      | 2              |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 13  | 2                                                                                                                                                      | 32             |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 14  | 3                                                                                                                                                      | 62             | b) Nossa estratégia foi iniciar com o numero "2" somado com o 30, e seu resultado (32) somado novamente com 30, e assim sucessivamente.. |             |   |   |       |    |   |  |
| 15  | 4                                                                                                                                                      | 92             |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 16  | 5                                                                                                                                                      | 122            |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 17  | 6                                                                                                                                                      | 152            |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 18  | 7                                                                                                                                                      | 182            |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 19  | 8                                                                                                                                                      | 212            |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 20  | 9                                                                                                                                                      | 242            |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |
| 21  | 10                                                                                                                                                     | 272            |                                                                                                                                          |             |   |   |       |    |   |  |

**Figura 4.11. Tentativas de construção de fórmula da dupla Gisele/Natália.**

Então, a dupla inseriu na célula F11, a seguinte fórmula,  $=C12+I9*F10$ . Em seguida, solicitei que testasse sua fórmula, inserindo valores diferentes para a ordem do termo em F10, e verificasse se os resultados eram compatíveis com a tabela do item (a) (Figura 4.11). Assim, a dupla concluiu que a fórmula não estava correta, alguma coisa deveria ser corrigida. Orientei a dupla para novamente observar quanto ao número de razões que deveria ser somado ao valor inicial e como expressar isso na fórmula. Enfim, pela interação da dupla com o professor-pesquisador foi concluído que deveria subtrair 1, da ordem do termo inserida em **F10**.

**Gisele** – agora, está fácil, então, basta subtrair o número 1, no final da fórmula.

A dupla apresentou a fórmula,  $=C12+I9*F10-1$ . Novamente solicitei para que testasse a fórmula e comparasse com a tabela do item (a), concluiu que alguma coisa ainda estava errada com o modelo (fórmula) criado por elas. Sugeri, finalmente, que examinasse a ordem em que as operações deveriam ser efetuadas e que os parênteses, tanto na álgebra de papel e lápis como no ambiente Excel exercem esta função.

Finalmente, após várias tentativas e simulações, usando as vantagens do Excel que parecem favorecer a passagem entre a aritmética e a álgebra, as aprendizes chegaram à fórmula  $=C12+I9*(F10-1)$ , que dá o valor do termo da Progressão Aritmética de ordem expressa na célula (Figura 4.12), também, chamado de “Termo geral da progressão aritmética”.

Em nossas interações com os aprendizes e na análise dos áudios e telas de produções da dupla, ficou evidenciada a dificuldade da passagem das operações aritméticas para uma formalização ou para representação algébrica.

|     |    |                |                |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
|-----|----|----------------|----------------|---|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------|----|---|
| F11 |    |                |                |   |                    | $=C12+H9*(F10-1)$                                                                                                                                      |   |       |    |   |
|     | A  | B              | C              | D | E                  | F                                                                                                                                                      | G | H     | I  | J |
| 1   |    |                |                |   |                    | <b>ATIVIDADE 3</b>                                                                                                                                     |   |       |    |   |
| 2   |    |                |                |   |                    | <b>Progressões</b>                                                                                                                                     |   |       |    |   |
| 3   |    |                |                |   |                    | a) Construa na planilha eletrônica uma seqüência de 20 números, tais que: com exceção do primeiro, cada termo seja a soma do anterior com o número 30. |   |       |    |   |
| 4   |    |                |                |   |                    | b) Qual foi sua estratégia de resolução? Descreva-a passo a passo.                                                                                     |   |       |    |   |
| 5   |    |                |                |   |                    | c) Na célula F11, construa uma expressão que calcule qualquer termo da seqüência (ordem do termo está em F10).                                         |   |       |    |   |
| 6   |    |                |                |   |                    | Teste sua fórmula, mudando o valor da ordem do termo em F10.                                                                                           |   |       |    |   |
| 7   |    |                |                |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 8   |    |                |                |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 9   |    |                |                |   | c)                 |                                                                                                                                                        |   | Razão | 30 |   |
| 10  | a) |                |                |   | ordem do termo "n" | 7                                                                                                                                                      |   |       |    |   |
| 11  |    | ordem do termo | valor do termo |   | valor do termo     | 182                                                                                                                                                    |   |       |    |   |
| 12  |    | 1              | 2              |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 13  |    | 2              | 32             |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 14  |    | 3              | 62             |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 15  |    | 4              | 92             |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 16  |    | 5              | 122            |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 17  |    | 6              | 152            |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 18  |    | 7              | 182            |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 19  |    | 8              | 212            |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 20  |    | 9              | 242            |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |
| 21  |    | 10             | 272            |   |                    |                                                                                                                                                        |   |       |    |   |

**Figura 4.12. Fórmula da dupla Gisele/Natália da progressão aritmética.**

A dupla Patrícia/Fábio apresentou o mesmo comportamento em relação à preferência pelo uso das planilhas eletrônicas e as mesmas dificuldades para utilizar o ambiente de papel e lápis. Nesta atividade, verificou-se um potencial das planilhas eletrônicas com sua capacidade de visualização e cálculos repetitivos para aprendizagem de seqüências numéricas. Estas características podem explicar as preferências dos aprendizes.

#### 4.3.4 Análise da Atividade 4

Em geral, a análise feita para a Atividade 3 de Progressão Aritmética estende-se, também, para a Atividade 4 de Progressão Geométrica (Figura 4.13).

|     |                                                                                                                                                         |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---|---|-----------------------------------------------------------------------|-----|---|---|---|---|
| F11 | =C11*3^(F10-1)                                                                                                                                          |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
|     | A                                                                                                                                                       | B              | C | D | E                                                                     | F   | G | H | I | J |
| 1   | <b>ATIVIDADE 4</b>                                                                                                                                      |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 2   | <b>Progressões</b>                                                                                                                                      |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 3   | a) Construa na planilha eletrônica uma seqüência de 10 números, tais que: com exceção do primeiro, cada termo seja o produto do anterior pelo número 3. |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 4   |                                                                                                                                                         |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 5   | b) Qual foi sua estratégia de resolução? Descreva-a passo a passo.                                                                                      |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 6   | c) Existe uma expressão que pode calcular qualquer termo desta seqüência? Construa esta expressão na célula F11                                         |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 7   | (utilize a ordem o termo que está em F10). Testar sua fórmula, mudando o valor em F10.                                                                  |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 8   |                                                                                                                                                         |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 9   | a)                                                                                                                                                      |                |   |   | c)                                                                    |     |   |   |   |   |
| 10  | ordem do termo                                                                                                                                          | valor do termo |   |   | ordem do termo "n"                                                    | 5   |   |   |   |   |
| 11  | 1                                                                                                                                                       | 2              |   |   | valor do termo                                                        | 162 |   |   |   |   |
| 12  | 2                                                                                                                                                       | 6              |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 13  | 3                                                                                                                                                       | 18             |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 14  | 4                                                                                                                                                       | 54             |   |   | b) Iniciando pelo primeiro numero ( 2 ) multiplicamos pelo numero "3" |     |   |   |   |   |
| 15  | 5                                                                                                                                                       | 162            |   |   | e copiamos a fórmula para os demais números                           |     |   |   |   |   |
| 16  | 6                                                                                                                                                       | 486            |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 17  | 7                                                                                                                                                       | 1458           |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 18  | 8                                                                                                                                                       | 4374           |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 19  | 9                                                                                                                                                       | 13122          |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 20  | 10                                                                                                                                                      | 39366          |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |
| 21  |                                                                                                                                                         |                |   |   |                                                                       |     |   |   |   |   |

**Figura 4.13. Fórmula da dupla Gisele/Natália do termo geral da PG.**

As duplas foram acompanhadas passo a passo e suas tentativas foram incentivadas. Na Atividade 4, notou-se certa familiarização com a noção de construção de modelo matemático (fórmula), particularmente, com o procedimento das tentativas de construção, pois, conforme os objetivos desta pesquisa, envolver os aprendizes no processo de construção é o mais importante.

No item (c) mais uma vez, residiu a dificuldade das duplas em expressar a lei de formação da seqüência. O item pedia para construir a fórmula do termo geral da seqüência, inserir na célula F11 e testar o modelo, mudando o valor da ordem do termo em F10 (Figura 4.13).

Pela experiência da Atividade 3, as duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio não tiveram dificuldade na construção da seqüência. Assim, a intervenção de ensino concentrou-se na tarefa de acompanhar e intermediar com instruções que pudessem estimular os aprendizes em suas tentativas de construção.

A seguir, alguns momentos dessas tentativas da dupla Gisele/Natália:

**Gisele** – clica em F11 e digitamos, =C11\*3, Enter.

**Natália** – dá o resultado do segundo termo e daí.

**Gisele** – para obter o terceiro termo, basta multiplicar o resultado anterior por 3, e..., isto é,  $=C11*3*3$ .

A dificuldade persistiu. Como expressar o modelo? Mas, a forma anterior de escrever o segundo termo pode ser considerada uma etapa na percepção para a construção de modelos.

Enfim, a dupla concluiu, também, que o termo de ordem 3 poderia ser expresso por  $=C11*3^2$ ; o quarto ou termo de ordem 4 por,  $=C11*3^3$ ; o quinto ou termo de ordem 5, por  $=C11*3^4$  e, assim por diante. Usando o endereço da célula que contém a ordem do termo F10, a dupla chegou ao modelo desejado, testado e concluído como correto,  $=C11*3^{(F10-1)}$  (Figura 4.13), mas ainda contou com o auxílio do professor no momento de formalizar a ordem dos cálculos desta fórmula.

Nesse ponto desta análise, é preciso considerar que nossa proposta inicial de envolver os alunos na construção de modelos, segundo uma abordagem construcionista está contando com o forte auxílio da parte do professor em razão das intervenções de ensino. Até certo ponto, considera-se essa convivência entre os paradigmas construcionistas e instrucionistas, como esperados e uma reflexão sobre vários fatores:

- A novidade da abordagem construcionista aos alunos;
- A experiência limitada com o *software*;
- A insegurança com o conteúdo matemático.

Vale a pena destacar, que, apesar desses momentos aparentemente instrucionistas, intuito foi sempre interferir de tal maneira que a responsabilidade pela estratégia de resolução permanecesse com os alunos.

#### 4.3.5 Análise da Atividade 5

Esta Atividade 5 inicia com o cálculo dos juros simples para o primeiro mês de uma aplicação e, também, do montante dessa aplicação para o primeiro mês. Nesta planilha, está uma informação importante do conceito do regime de capitalização dos juros simples, *“o juro em todos os meses é calculado sobre o capital inicial aplicado, assim, o juro é constante”*. Nossa intenção era preparar as duplas para a Atividade 6, em que se pede cálculo do juro mês a mês. E, também, para estabelecer a distinção com o regime de capitalização dos juros compostos.

Na Atividade 5 (Figura 4.14), as duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio após algum tempo para leitura e entendimento do que era pedido nos itens (a) e (b), calcularam os juros simples de um período (um mês) e o Montante ao final do primeiro mês. Os dois itens (a) e (b) da Atividade 5 são o que se chama de **operação financeira básica** (Capítulo 1, p.4), pois executam o fundamento da atividade financeira, o cálculo do juro e a agregação desse juro ao capital inicial aplicado, resultando no Montante. Este procedimento, também, chamado de capitalização, tem papel de destaque neste trabalho e é enfatizado pelas solicitações de cálculo, mês a mês, nas atividades. Os desenvolvimentos das duplas foram semelhantes e, a seguir, será relatada a resolução da dupla Gisele/Natália.

O item (a) pedia o cálculo dos juros ao final do primeiro mês. Inicialmente, a dupla inseriu na célula C11, a fórmula  $=C8*C9*5$ , evidenciando alguma dificuldade inicial de sintaxe, pois o enunciado fala em uma aplicação de R\$ 5.000,00 por um período de cinco meses. Após solicitação de atenção com o enunciado e com a pergunta do item (a), o prazo foi corrigido pelas aprendizes. A dupla Gisele/Natália inseriu, então, corretamente na célula C11 a fórmula do cálculo dos juros para um mês, expresso na Barra de fórmulas  $=C8*C9$  (Figura 4.14). Observa-se que a dupla não utilizou a célula C10 em seu modelo, já que esta tem valor igual a um mês. Este fato, provavelmente, surgiu de nossas intervenções anteriores, em que se ressaltou que, para o cálculo do juro de um único mês, bastava multiplicar o capital pela taxa de juros.

| C11 |   | fx =C8*C9                                                                                                                     |              |   |   |   |   |
|-----|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|---|---|---|---|
|     | A | B                                                                                                                             | C            | D | E | F | G |
| 1   |   | ATIVIDADE 5                                                                                                                   |              |   |   |   |   |
| 2   |   | MATEMÁTICA FINANCEIRA - Juros Simples                                                                                         |              |   |   |   |   |
| 3   |   |                                                                                                                               |              |   |   |   |   |
| 4   |   | Um capital de R\$ 5.000,00 foi aplicado em uma instituição financeira por 5 meses, a juros simples e à                        |              |   |   |   |   |
| 5   |   | taxa de 2% ao mês. Pede-se:                                                                                                   |              |   |   |   |   |
| 6   |   |                                                                                                                               |              |   |   |   |   |
| 7   |   | a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?                                                                        |              |   |   |   |   |
| 8   |   | CAPITAL                                                                                                                       | R\$ 5.000,00 |   |   |   |   |
| 9   |   | TAXA DE JUROS (mensal)                                                                                                        | 2%           |   |   |   |   |
| 10  |   | PRAZO (meses)                                                                                                                 | 1            |   |   |   |   |
| 11  |   | JUROS                                                                                                                         | R\$ 100,00   |   |   |   |   |
| 12  |   |                                                                                                                               |              |   |   |   |   |
| 13  |   | b) Qual o montante (capital + juros) ao final do primeiro mês?                                                                |              |   |   |   |   |
| 14  |   | CAPITAL                                                                                                                       | R\$ 5.000,00 |   |   |   |   |
| 15  |   | JUROS                                                                                                                         | R\$ 100,00   |   |   |   |   |
| 16  |   | MONTANTE                                                                                                                      | R\$ 5.100,00 |   |   |   |   |
| 17  |   |                                                                                                                               |              |   |   |   |   |
| 18  |   | REGIME DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS SIMPLES: Neste regime, o juro em todos os meses é calculado sobre o capital inicial aplicado, |              |   |   |   |   |
| 19  |   | assim, o juro é constante. Em outras palavras, a taxa de juros incide sempre sobre o o mesmo valor aplicado.                  |              |   |   |   |   |
| 20  |   |                                                                                                                               |              |   |   |   |   |

**Figura 4.14. Fórmula da dupla Gisele/Natália para o cálculo dos juros**

Na célula C16, a dupla inseriu, corretamente, o item (b) que pedia o cálculo do montante para o primeiro mês =C4+C15 (Figura 4.15).

Mais uma vez observou-se que, embora a dupla apresentasse falta de conhecimento inicial com alguns termos e expressões das finanças, como capital aplicado, montante da aplicação ou resgate da aplicação (termo usado, muitas vezes, pelo professor), a partir desse momento a dupla pareceu estar utilizando essa nomenclatura com certa familiaridade.

| C16 |   | fx =C14+C15 |   |   |   |   |   |
|-----|---|-------------|---|---|---|---|---|
|     | A | B           | C | D | E | F | G |
| 1   |   | ATIVIDADE 5 |   |   |   |   |   |

**Figura 4.15. Fórmula da dupla Gisele/Natália para o cálculo do montante**

### 4.3.6 Análise da Atividade 6

Na Atividade 6 (Figura 4.16), que é uma continuação da Atividade 5, o Item (a) pedia o preenchimento da planilha com o cálculo do valor dos juros e do montante, mês a mês e o valor do resgate da aplicação (montante ao final do 5º mês). Nesta atividade aposta-se na estratégia da construção, passo a passo, ou mais especificamente, do cálculo do juro, mês a mês, e a soma desse juro ao capital aplicado, para obter o valor do resgate. As duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio seguiram esta estratégia, que possibilita a formação do conceito de capitalização e que foi objeto de discussão entre professor e as duplas nos momentos de intervenção de ensino.

|     |                                                                                                                               |                    |                        |                       |   |              |   |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|------------------------|-----------------------|---|--------------|---|
| G13 |                                                                                                                               | =(G10*G11)*G12+G10 |                        |                       |   |              |   |
| A   | B                                                                                                                             | C                  | D                      | E                     | F | G            | H |
| 1   | ATIVIDADE 6                                                                                                                   |                    |                        |                       |   |              |   |
| 2   | Com os dados da <b>Atividade 5</b> , a) preencha a planilha abaixo, indicando mês a mês, o rendimento (juros)                 |                    |                        |                       |   |              |   |
| 3   | e o saldo (montante) atualizado a cada mês. Qual o valor do resgate (montante) ao final do 5º mês?                            |                    |                        |                       |   |              |   |
| 4   | b) Por qual valor temos de multiplicar o capital de R\$ 5.000,00 para obtermos o montante ao final do 5º mês?                 |                    |                        |                       |   |              |   |
| 5   | c) Na célula G13, construa uma expressão (fórmula) que calcule o Montante para qualquer número de meses de aplicação          |                    |                        |                       |   |              |   |
| 6   | d) Teste sua fórmula, mudando os valores "número de meses" na célula G12.                                                     |                    |                        |                       |   |              |   |
| 7   | Taxa de juros ao mês                                                                                                          |                    | 2%                     | b)                    |   |              |   |
| 8   | a)                                                                                                                            |                    |                        |                       |   |              |   |
| 9   | MÊS                                                                                                                           | RENDIMENTO (JUROS) | SALDO ATUAL (MONTANTE) | c)                    |   |              |   |
| 10  | 0                                                                                                                             | R\$ -              | R\$ 5.000,00           | Capital - "C"         |   | R\$ 5.000,00 |   |
| 11  | 1                                                                                                                             | R\$ 100,00         | R\$ 5.100,00           | Taxa de juros - "i"   |   | 2%           |   |
| 12  | 2                                                                                                                             | R\$ 100,00         | R\$ 5.200,00           | Número de meses - "n" |   | 5            |   |
| 13  | 3                                                                                                                             | R\$ 100,00         | R\$ 5.300,00           | Montante - "M"        |   | 5.500,00     |   |
| 14  | 4                                                                                                                             | R\$ 100,00         | R\$ 5.400,00           |                       |   |              |   |
| 15  | 5                                                                                                                             | R\$ 100,00         | R\$ 5.500,00           |                       |   |              |   |
| 16  |                                                                                                                               |                    |                        |                       |   |              |   |
| 17  | REGIME DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS SIMPLES: Neste regime, o juro em todos os meses é calculado sobre o capital inicial aplicado, |                    |                        |                       |   |              |   |
| 18  | assim, o juro é constante. Em outras palavras, a taxa de juros incide sempre sobre o mesmo valor aplicado.                    |                    |                        |                       |   |              |   |
| 19  |                                                                                                                               |                    |                        |                       |   |              |   |

**Figura 4.16. Fórmula da dupla Gisele/Natália – cálculo do montante.**

Nesta atividade, o preenchimento da planilha mês a mês é uma “Descrição” da resolução do problema e pode ajudar o entendimento do conceito de capitalização mensal no regime dos juros simples. Ao inserir fórmulas nas células para o cálculo do juro mensal e para o cálculo do montante ao final de cada mês,

o aprendiz está na fase da “Execução” e tem resultado imediato (*feedback*) no aplicativo Microsoft Excel, que pode possibilitar a “Reflexão” sobre o que foi produzido pelo computador.

Diante do resultado fornecido pelo aplicativo Excel, o aprendiz poderá refletir e, modificar ou não seus procedimentos, de acordo com suas intenções originais. Poderá iniciar o processo de “Depuração” na busca de conhecimentos por intermédio de novas informações ou do pensar.

No item (a) as duplas preencheram com desenvoltura a planilha, utilizaram os recursos do Excel de cópia para os preenchimentos da coluna C da fórmula dos juros e preenchimento da coluna D da fórmula do montante e manifestaram satisfação com o próprio desempenho.

No item (b), onde a pergunta foi *“Por qual valor temos que multiplicar o capital de R\$ 5.000,00, para obtermos o montante ao final do 5º mês?”* As duplas não conseguiram apresentar uma resposta.

Nesse item (b), deve-se ressaltar que não houve, inicialmente, por parte do professor nenhuma intervenção de ajuda explícita aos aprendizes; nossa postura foi de incentivo no sentido de que fizessem tentativas. Destaca-se um momento de interação entre a dupla Gisele/Natália:

**Gisele** – montante é capital mais os juros,... por qual valor tenho de multiplicar?

**Natália** – é para multiplicar pelo capital ou somar? Não entendi.

São observadas dificuldades na interpretação da sintaxe da Questão e falta de domínio dos conhecimentos básicos de aritmética e de suas propriedades operatórias. Isso se traduziu na dificuldade da passagem da linguagem natural para uma linguagem matemática. Uma interpretação dessa Questão poderia ser: “O capital de 5.000 multiplicado por um número “ $x$ ” é igual ao Montante de 5.500”, que pode ser formulada, assim,  $5000 \cdot x = 5500$ , onde  $x$  é o valor procurado.

No item (c) da Atividade 6, as duplas foram solicitadas para o seguinte desafio: *“Na célula G13, construa uma expressão (fórmula) que calcule o*

*Montante para qualquer número de meses de aplicação*”. A dupla Gisele/Natália apresentou a construção da fórmula, obedecendo ao modelo usado e, também, enfatizado nas atividades anteriores, ou seja,  $\text{MONTANTE} = \text{CAPITAL} + \text{JUROS}$ . Desta forma, inseriram corretamente na célula G13 (Figura 4.16) a fórmula ou o modelo do montante,  $=(G10*G11)*G12+G10$ .

Nesse item, considerou-se que, embora, as duplas tenham construído corretamente a fórmula do Montante na célula G13, isso poderia não significar, necessariamente uma apropriação das propriedades operatórias e que seriam úteis para o desenvolvimento das demais atividades. Então, decidiu-se por uma intervenção de ensino em que se discutiu com as duplas outras maneiras de apresentar o modelo do cálculo do montante.

Na fórmula expressa na célula G13, usando a fatoração e transformando a soma em produto, o fator comum valor do capital inserido na célula G10 pode ser colocado em “evidência”. Este procedimento foi, também, discutido no ambiente de papel e lápis, como aparece a seguir:

Empregando, apenas, os modelos do regime de juros simples para o cálculo dos juros e do montante, as seguintes relações entre as variáveis: MONTANTE (M); CAPITAL (C); JUROS (J); TAXA DE JUROS (i) e PRAZO (n), utilizando o ambiente de papel e lápis foram discutidas, procurando resumir e reconstruir alguns modelos já usados e construindo novos modelos:

$$\text{I)} \quad J = C.i.n$$

$$\text{II)} \quad M = C + J$$

$$\text{III)} \quad M = C + C.i.n$$

$$\text{IV)} \quad M = C.(1 + i.n)$$

O conhecimento algébrico é fundamental para a construção de outros modelos usados na Matemática Financeira. Esta possibilidade de usar as propriedades operatórias, colocando em evidência o valor do capital inserido na

célula G10 e expressar o modelo do montante na forma,  $= G10*(1+G11*G12)$ , não foi utilizada por nenhuma dupla.

A seguir, são relatadas as manifestações de uma das duplas ocorridas no momento da inserção dessa fórmula na célula G13. O diálogo pareceu indicar uma preferência (ou única maneira conhecida) para expressar o montante (montante na forma de soma = capital+ juros), modelo explorado de maneira recorrente nas atividades anteriores.

**Gisele** – Montante é igual a capital mais juros, o juro é 5.000, vezes 2% e vezes 5, mais o capital aplicado 5.000.

**Natália** – É só!

Diante da aparente surpresa, explicou-se que a expressão inserida célula G13, é uma fórmula ou modelo matemático para o cálculo do montante, que pode ser testado, e o ambiente Excel permite simulações, mudando nos endereços das células os valores do capital: Taxa de juros e número de meses.

Destacamos que nesta atividade, explicamos e reforçamos a idéia de construção de fórmulas ou modelos matemáticos e que usaríamos essas linguagens como sinônimas e também pedimos para as duplas exercitarem na planilha as potencialidades do Excel de simulação, alterando nas respectivas células os valores do capital, taxa de juros e número de meses.

A possibilidade de combinar texto, dados numéricos da atividade e os cálculos solicitados, registrando tudo em células da planilha, com um visual prático e confortável (Figura 4.17), também, facilitou o desempenho da dupla Patrícia/Fábio. E, aparentemente, deu segurança e satisfação na execução dos itens solicitados, em especial, o item (d) da simulação.

|                       |              |
|-----------------------|--------------|
| Capital - "C"         | R\$ 5.000,00 |
| Taxa de juros - "i"   | 2%           |
| Número de meses - "n" | 5            |
| Montante - "M"        | 5.500,00     |

**Figura 4.17. Fórmula da dupla Patrícia/Fábio – cálculo do montante**

A dupla Patrícia e Fábio teve desempenho semelhante ao da dupla Gisele/Natália, acompanhou atentamente a intervenção de ensino e, após a construção da fórmula do montante na célula G13, deu especial atenção ao item (d) e fizeram simulações na célula G12, alterando o número de meses de aplicação, por exemplo, para 24 meses que daria ao final deste período um resgate de R\$ 7.400,00 como mostra a Figura 4.18.

|     |             |    |   |                    |   |   |   |
|-----|-------------|----|---|--------------------|---|---|---|
| G13 |             | fx |   | =(G10*G11)*G12+G10 |   |   |   |
| A   | B           | C  | D | E                  | F | G | H |
| 1   | ATIVIDADE 6 |    |   |                    |   |   |   |

**Figura 4.18. Fórmula do montante – simulações da dupla Patrícia/Fábio**

#### 4.3.7 Análise da Atividade 7

Na Atividade 7 (Figura 4.19) e na Atividade 8 (Figura 4.21), as duas últimas atividades desta segunda sessão, as duplas já apresentavam alguma familiaridade, mesmo que num estágio inicial, com a noção de construção de fórmulas ou “modelos matemáticos” e ainda com as operações aritméticas envolvidas no cálculo dos juros e do montante.

|    | A | B                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | C          | D | E                             | F          | G |
|----|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---|-------------------------------|------------|---|
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 7</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |            |   |                               |            |   |
| 2  |   | <b>MATEMÁTICA FINANCEIRA - Juros Simples</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |            |   |                               |            |   |
| 3  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |   |                               |            |   |
| 4  |   | Dividir R\$ 1.200,00 em duas partes, de forma que a primeira, aplicada a juros simples à taxa de 8% ao mês durante 2 meses, renda o mesmo juro que a segunda, aplicada a 10% ao mês durante 3 meses. Pede-se: <b>a)</b> Registre os dados conhecidos nas células correspondentes. <b>b)</b> Nas células C12, F12, C15 e F15, construa relações com os dados conhecidos ou não. <b>c)</b> Faça simulações na célula C12, alterando o valor da primeira parte (CAPITAL A) e tente chegar à resposta. <b>d)</b> Tente, também, resolver este problema no ambiente de papel e lápis. |            |   |                               |            |   |
| 5  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |   |                               |            |   |
| 6  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |   |                               |            |   |
| 7  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |   |                               |            |   |
| 8  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |   |                               |            |   |
| 9  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |   |                               |            |   |
| 10 |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |   |                               |            |   |
| 11 |   | <b>APLICAÇÃO DO CAPITAL A</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |            |   | <b>APLICAÇÃO DO CAPITAL B</b> |            |   |
| 12 |   | CAPITAL A                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | R\$ 600,00 |   | CAPITAL B                     | R\$ 600,00 |   |
| 13 |   | TAXA DE JUROS (mensal)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 8%         |   | TAXA DE JUROS (mensal)        | 10,00%     |   |
| 14 |   | PRAZO (meses)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2          |   | PRAZO (meses)                 | 3          |   |
| 15 |   | JUROS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | R\$ 96,00  |   | JUROS                         | R\$ 180,00 |   |
| 16 |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |   |                               |            |   |

**Figura 4.19. Registro dos dados – Gisele/Natália**

Esta atividade com grau maior de complexidade, a sua resolução não se faz com a aplicação, apenas, de uma fórmula ou modelo. Exige a construção de relações com os dados conhecidos e com as fórmulas dos juros e do montante. Por esta razão, sugerimos, também, a resolução no ambiente de papel e lápis. Acreditamos que as tentativas de escrever modelos, inicialmente em papel e lápis, podem favorecer a interpretação do problema e a conseqüente inserção de dados na planilha Excel. No ambiente de planilhas, a sua resolução pode ser feita, também, por simulação.

No item (a), “*Registre os dados conhecidos nas células correspondentes*”, as duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio registraram os dados conforme Figura 4.19, acima. O *layout* da planilha pode ter favorecido a inserção correta dos dados conhecidos (TAXA DE JUROS E PRAZO) nas células, C13, F13, C14 e F14.

No item (b), “*Construa relações com os dados conhecidos ou não*”, nas células C12 e F12, as duas duplas inseriram o valor R\$ 600,00 nas duas células revelando, talvez, uma interpretação errada da sintaxe do enunciado da atividade. A seguir, em razão das semelhanças de resultados, vamos apresentar a análise da dupla Gisele/Natália.

No registro nas células C15 e F15 a dupla Gisele/ Natália, já demonstrou alguma facilidade com o modelo do cálculo de juros simples, bastante explorado nas atividades anteriores e ainda, facilitado pelo ambiente de planilhas eletrônicas. Pois, embora as células C12 e F12, representassem valores não conhecidos (incógnitas), a dupla inseriu na célula C15, o modelo (fórmula)  $=C12*C13*C14$ , e na célula F15, o modelo (fórmula)  $=F12*F13*F14$ .

Diante do valor dos juros gerados (rendidos) pelo Capital A, mostrado na célula C15 = 96,00 e dos juros gerados pelo Capital B, mostrado na célula, F15 =180,00, pedimos para que a dupla observasse as condições do enunciado para o valor desses juros. E decorridos, alguns instantes:

**Gisele** – Eles devem ser iguais.

**Professor** – Como pode ser dividido o valor de R\$ 1200,00 em duas partes?

**Gisele** – R\$ 600,00 e mais R\$ 600,00

**Professor** – Dividir em duas partes é dividir por dois?

O silêncio da dupla mostrou talvez, que inicialmente para elas “*Dividir R\$ 1200,00 em duas partes*”, significava dividir por dois, entretanto, após novas conjecturas da dupla, elas concluíram que poderia ser quaisquer valores, cuja soma fosse R\$ 1200,00. Surgiu, então, a questão: “Como representar nas células da planilha, dois valores quaisquer cuja soma é R\$ 1.200,00”. Com as interações do professor, lembrando o modo como se representa genericamente no papel e lápis o problema: “*Dividir R\$ 1.200,00 em duas partes*”. Parece que, alguma noção emergiu e assim, escreveram:  $C_A + C_B = 1200$  e concluíram também que,  $C_B = 1200 - C_A$ .

A dupla enfim, usando o Excel inseriu corretamente na célula F12 o modo de expressar o Capital B em função do Capital A (Figura 4.20).

Desse modo, seguindo as instruções do item (c) por simulação, alterando os valores das células C12 e F12, a dupla chegou ao resultado correto.

|     |             |           |   |   |   |   |
|-----|-------------|-----------|---|---|---|---|
| F12 |             | =1200-C12 |   |   |   |   |
|     | A           | B         | C | D | E | F |
| 1   | ATIVIDADE 7 |           |   |   |   |   |

**Figura 4.20. Fórmula da relação entre capitais – Gisele/Natália.**

No item (c), “Faça simulações na célula C12 alterando o valor da primeira parte (CAPITAL A) e tente chegar a resposta”. Observamos momentos de identificação das alunas com a capacidade dos recursos de vários cálculos simultâneos das planilhas eletrônicas e a possibilidade de testar suas conjecturas e validá-las ou não.

A dupla, embora, estimulada, com forte intervenção de ensino não conseguiu a resolução em papel e lápis. Quando alguma conjectura era feita, houve a preferência pelo ambiente das planilhas eletrônicas para sua validação. Assim, a resolução por simulação prevaleceu e desta forma, conseguiram as respostas corretas da atividade.

A dupla Patrícia/Fábio registrou todos os dados conhecidos na planilha e inicialmente, também, dividiu o capital de R\$ 1.200,00 em duas partes iguais de R\$ 600,00. Com as nossas solicitações de observação e atenção ao enunciado, a dupla passou a fazer simulações, alterando os valores do Capital A e Capital B, por exemplo, para R\$ 800,00 e R\$ 400,00. Nesse processo de tentativas a dupla permaneceu, até a nossa intervenção, as mesmas intervenções feitas para a dupla Gisele/Natália.

Desta forma, a dupla registrou na célula F12 a relação entre os capitais, expressa por:  $C_B = 1200 - C_A$  e assim, também, passou a desfrutar do conforto dos cálculos simultâneos das planilhas eletrônicas.



As células C11 do capital A e F11 do capital B foram relacionadas corretamente como mostra a Figura 4.21. A célula F11 ativada mostra na Barra de fórmulas a relação,  $= 3.000 - C11$ . Esta vez, mesmo sem utilizar o ambiente de papel e lápis, a dupla parece ter concluído que:  $C11 + F11 = 3.000$  e, portanto,  $F11 = 3.000 - C11$ .

|     |                                                                                                                    |                   |                             |              |   |  |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------|--------------|---|--|
| C14 |                                                                                                                    | fx =(C11*C12)*C13 |                             |              |   |  |
| A   | B                                                                                                                  | C                 | D                           | E            | F |  |
| 1   | ATIVIDADE 8                                                                                                        |                   |                             |              |   |  |
| 2   | MATEMÁTICA FINANCEIRA - Juros Simples                                                                              |                   |                             |              |   |  |
| 3   |                                                                                                                    |                   |                             |              |   |  |
| 4   | Bruno, dispondo de R\$ 3.000,00, resolveu aplicá-los em dois bancos. No primeiro, aplicou uma parte a juros        |                   |                             |              |   |  |
| 5   | simples à taxa de 8% ao mês por 6 meses e, no segundo aplicou o restante também a juros simples por 8 meses à      |                   |                             |              |   |  |
| 6   | taxa de 10% ao mês. Determine o quanto foi aplicado em cada banco sabendo-se que o total de juros auferidos foi de |                   |                             |              |   |  |
| 7   | R\$ 1.824,00.                                                                                                      |                   |                             |              |   |  |
| 8   |                                                                                                                    |                   |                             |              |   |  |
| 9   |                                                                                                                    |                   |                             |              |   |  |
| 10  | CAPITAL APLICADO NO BANCO A                                                                                        |                   | CAPITAL APLICADO NO BANCO B |              |   |  |
| 11  | CAPITAL A                                                                                                          | R\$ 1.800,00      | CAPITAL B                   | R\$ 1.200,00 |   |  |
| 12  | TAXA DE JUROS (MENSAL)                                                                                             | 8%                | TAXA DE JUROS (MENSAL)      | 0,10         |   |  |
| 13  | PRAZO (mensal)                                                                                                     | 6                 | PRAZO (mensal)              | 8            |   |  |
| 14  | JUROS                                                                                                              | R\$ 864,00        | JUROS                       | R\$ 960,00   |   |  |
| 15  |                                                                                                                    |                   |                             |              |   |  |
| 16  | CAPITAL TOTAL (A+B)                                                                                                | R\$ 3.000,00      |                             |              |   |  |
| 17  | TOTAL DOS JUROS                                                                                                    | R\$ 1.824,00      |                             |              |   |  |
| 18  |                                                                                                                    |                   |                             |              |   |  |

**Figura 4.22. Fórmula dos juros do Capital A – dupla Gisele/Natália**

As células C14 e F14, também, foram preenchidas corretamente com o cálculo dos juros. Como mostram as células: C14 ativada na Figura 4.22, que exibe na Barra de Fórmulas a inserção do modelo do cálculo dos juros (rendimento do capital A),  $=(C11*C12)*C13$ ; e F14 ativada na Figura 4.23, que mostra o cálculo dos juros do capital B,  $=(F11*F12)*F13$ .

Em nossa observação, nas células C14 e F14 as duplas usando a planilha eletrônica expressaram com relativa facilidade o modelo do cálculo dos juros que, em ambiente de papel e lápis, poderia ser expresso por  $J = C.i.n$ , onde: ( $J$ ) é o valor dos juros; ( $C$ ) é o valor do capital; ( $i$ ) é a taxa de juros por período e ( $n$ ) é o número de períodos. Apesar disso, as duplas não tiveram a desenvoltura para

expressar em ambiente de papel e lápis a montagem de equações, preferindo usar as células da planilha eletrônica.

|     |             |                   |   |   |   |  |
|-----|-------------|-------------------|---|---|---|--|
| F14 |             | fx =(F11*F12)*F13 |   |   |   |  |
| A   | B           | C                 | D | E | F |  |
| 1   | ATIVIDADE 8 |                   |   |   |   |  |

**Figura 4.23. Fórmula dos juros do Capital B – dupla Gisele/Natália**

O preenchimento da célula C17, que registra o total de juros auferidos pelos capitais A e B, é fundamental para a resolução. As duplas, também, inseriram corretamente a fórmula, =C14+F14, como mostra a Figura 4.24, que relaciona o endereço das células corretamente à soma dos juros dos capitais A e B.

|     |             |             |   |   |   |  |
|-----|-------------|-------------|---|---|---|--|
| C17 |             | fx =C14+F14 |   |   |   |  |
| A   | B           | C           | D | E | F |  |
| 1   | ATIVIDADE 8 |             |   |   |   |  |

**Figura 4.24. Fórmula do total dos juros – Gisele/Natália**

As produções das duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio foram semelhantes e pareceu sofrer em parte os impactos das intervenções de ensino anteriores em relação à construção de algumas fórmulas; na fórmula do total de juros que se expressa pela soma dos endereços de duas células, as alunas não tiveram nenhuma dificuldade. Outro fato observado e que se confirma, é a identificação das duplas com o processo de simulação, também, exercido nesta atividade.

Assim, as duplas inseriram na célula C17, a fórmula do valor total dos juros expresso pela soma dos juros do capital A ( $J_A$ ) inserido na célula C14 e os juros do capital B ( $J_B$ ) inserido na célula F14. No ambiente de papel e lápis, elas poderiam indicar,  $J_A + J_B = 1.824$  e utilizar as outras relações (fórmulas) para resolução no ambiente de papel e lápis. No entanto, as duplas utilizaram o potencial de cálculo das planilhas eletrônicas, mudando os valores do capital aplicado no Banco A para chegar à soma dos juros desejada. Dessa forma, usando o sistema de simulação atingiram à resposta.

#### 4.3.9 Análise da Atividade 9

A Atividade 9 (Figura 4.25), que inicia a terceira e última sessão do presente experimento de ensino, foi planejada com atividades de cálculo dos juros e montante no regime de capitalização de juros compostos.

Esta atividade apresenta uma aplicação de R\$ 10.000,00 em um fundo de investimentos, com taxas de rentabilidade variáveis, no regime de juros compostos. Pede-se para verificar se o valor resgatado de R\$ 10.877,34 corresponde realmente às taxas mensais de juros informadas. Como as taxas de juros são variáveis, o único procedimento possível é a verificação, mês a mês, calculando o rendimento do mês e agregando este rendimento ao saldo do mês anterior.

|    | A                                                                                                                          | B     | C          | D                | E | F | G                | H            | I | J |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------|------------------|---|---|------------------|--------------|---|---|
| 1  | <b>ATIVIDADE 9 - Juros Compostos - Taxas Variáveis</b>                                                                     |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 2  |                                                                                                                            |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 3  | Estela investiu R\$ 10.000,00 num fundo de investimento. Exatamente quatro meses depois resgatou R\$ 10.877,34.            |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 4  | O gerente do fundo informou que as taxas de rentabilidade mensais do fundo durante o prazo do investimento de Estela       |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 5  | foram 1,8%, 2%, 2,2% e 2,5% ao mês. Estela gostaria de verificar se o resgate recebido corresponde realmente às taxas      |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 6  | mensais de juro informadas. a) Verifique passo a passo, calculando mês a mês, o rendimento mensal e o saldo atualizado     |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 7  | (capital + juros) no regime de juros compostos. b) Existe uma expressão que permite calcular o resgate ao final dos        |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 8  | quatro meses? c) Construa esta expressão na célula H12. Teste sua fórmula.                                                 |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 9  |                                                                                                                            |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 10 | a)                                                                                                                         |       |            |                  |   |   | b)               | Sim, Existe. |   |   |
| 11 | Mês                                                                                                                        | Taxa  | Rendimento | Saldo Atualizado |   |   | c)               |              |   |   |
| 12 | 0                                                                                                                          |       |            | R\$ 10.000,00    |   |   | Valor do Resgate | 10612,03921  |   |   |
| 13 | 1                                                                                                                          | 1,80% | R\$ 180,00 | R\$ 10.180,00    |   |   |                  |              |   |   |
| 14 | 2                                                                                                                          | 2%    | R\$ 203,60 | R\$ 10.383,60    |   |   |                  |              |   |   |
| 15 | 3                                                                                                                          | 2,20% | R\$ 228,44 | R\$ 10.612,04    |   |   |                  |              |   |   |
| 16 | 4                                                                                                                          | 2,50% | R\$ 265,30 | R\$ 10.877,34    |   |   |                  |              |   |   |
| 17 |                                                                                                                            |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 18 | <b>REGIME DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS COMPOSTOS:</b> Neste regime, os juros são incorporados ao montante do período anterior, |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |
| 19 | que servem de base para o cálculo dos juros do período seguinte.                                                           |       |            |                  |   |   |                  |              |   |   |

**Figura 4.25. Fórmula do valor do resgate – Gisele/Natália**

O item (a) teve como objetivo a introdução ao regime de capitalização dos juros compostos. Foram previstas as seguintes estratégias para facilitar a formação desse conceito:

- O *layout* amigável da planilha;
- O procedimento de cálculo feito a cada período (passo a passo); e
- As intervenções de ensino do professor.

A seguir, são apresentadas as partes da resolução da dupla Gisele/Natália e a análise feita, também, para a dupla Patrícia/Fábio, pois, talvez, em razão de nossas fortes intervenções de ensino, as diferenças nas produções das duplas diminuíssem e as semelhanças aumentaram.

Assim, a dupla Gisele/Natália utilizou os recursos da Barra de Fórmulas para os cálculos do valor dos juros mês a mês, confirmou a familiaridade com a

interface do Excel e algum entendimento das relações entre células. Na célula D13, inseriu o cálculo do juro (rendimento) do primeiro mês, expresso por  $=E12 \cdot C13$  (Figura 4.26).

|     |                                                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|-------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D13 |                                                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|     | A                                               | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
| 1   | ATIVIDADE 9 - Juros Compostos - Taxas Variáveis |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

**Figura 4.26. Fórmula do juro – dupla Gisele/Natália**

Na célula E13, a dupla aplicou o conceito de montante e registrou a fórmula  $=E12+D13$  (Figura 4.27), que representa o saldo anterior da célula E12 somado ao juro do primeiro mês, calculado e registrado, anteriormente, na célula D13.

Assim, num processo de repetição, mês a mês, a dupla encontrou o valor do resgate de R\$ 10.877,34 e confirmou que este valor corresponde às taxas mensais de juros informadas.

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------|------------------|---|------------------|---|--------------|---|---|
| E13 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
|     | A                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | B     | C          | D                | E | F                | G | H            | I | J |
| 1   | ATIVIDADE 9 - Juros Compostos - Taxas Variáveis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
| 2   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
| 3   | Estela investiu R\$ 10.000,00 num fundo de investimento. Exatamente quatro meses depois resgatou R\$ 10.877,34. O gerente do fundo informou que as taxas de rentabilidade mensais do fundo durante o prazo do investimento de Estela foram 1,8%, 2%, 2,2% e 2,5% ao mês. Estela gostaria de verificar se o resgate recebido corresponde realmente às taxas mensais de juro informadas. a) Verifique passo a passo, calculando mês a mês, o rendimento mensal e o saldo atualizado (capital + juros) no regime de juros compostos. b) Existe uma expressão que permite calcular o resgate ao final dos quatro meses? c) Construa esta expressão na célula H12. Teste sua fórmula. |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
| 4   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
| 5   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
| 6   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
| 7   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
| 8   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
| 9   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |   |                  |   |              |   |   |
| 10  | a)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |       |            |                  |   | b)               |   | Sim, Existe. |   |   |
| 11  | Mês                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Taxa  | Rendimento | Saldo Atualizado |   | c)               |   |              |   |   |
| 12  | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |       |            | R\$ 10.000,00    |   | Valor do Resgate |   | 10612,0392   |   |   |
| 13  | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1,80% | R\$ 180,00 | R\$ 10.180,00    |   |                  |   |              |   |   |

**Figura 4.27. Fórmula do montante do primeiro mês – dupla Gisele/Natália**

Os itens (b) e (c) da Atividade 9 só foram resolvidos com a interação do professor, em mais um momento de intervenção de ensino. No item (b), a pergunta era: “Existe uma expressão que permite calcular o resgate ao final dos quatro meses?” Aqui, estava presente nossa intenção de levar o aluno a uma busca da formalização e generalização, isto é, a construção de modelos.

Observa-se que, entre alguns obstáculos encontrados pelas duplas para a construção do modelo, estavam as estruturas algébricas, particularmente, no uso da fatoração e das propriedades operatórias da adição e multiplicação.

Assim, nesta intervenção de ensino, procurou-se destacar as relações I, II, III e IV entre as variáveis: MONTANTE (M); CAPITAL (C); JUROS (J); TAXA DE JUROS (i) e PRAZO (n), utilizando o ambiente de papel e lápis. Recorda-se que os modelos já construídos nas atividades anteriores de juros simples e sua aplicação na Atividade 9, com o propósito de tornar estas fórmulas, são mais familiares às duplas:

$$V) \quad J = C.i.n$$

$$II) \quad M = C + J$$

$$III) \quad M = C + C.i.n$$

$$IV) \quad M = C.(1+i.n)$$

Estas relações são os modelos para os cálculos no regime de juros simples, também, são os fundamentos para o procedimento de cálculo dos juros compostos, mês a mês, (neste caso usa-se o prazo n igual a 1), onde o fator  $(1+i)$  é o de capitalização mensal. Desta forma, nossa interação com as duplas ficou concentrada no uso dessas propriedades operatórias, em particular, na fatoração de uma soma em produto, colocando em evidência o fator comum.

A seguir, algumas manifestações da dupla Gisele/Natália, após, esta forte intervenção de ensino e, também, suas dúvidas durante as tentativas de resolução e construção de modelos.

**Gisele** – Então, para calcular o saldo atualizado, pegamos o saldo anterior e multiplicamos por 1 mais a taxa de juros. Agora, fica fácil.

**Natália** – É mais fácil calcular os juros separados e depois somar ao saldo anterior.

**Gisele** – Clica na célula H12, digita igual, 10.000 vezes, abre parênteses; 1 mais 1,8%, fecha parênteses; vezes abre parênteses; 1 mais 2%, fecha parênteses; vezes abre parênteses; 1 mais 2,2%, fecha parênteses, Enter.

A aprendiz Gisele utilizou os endereços das células da planilha onde estão registrados os valores do capital aplicado e das taxas de juros. Pois, ao dizer, 10.000, a aprendiz clicou dentro da célula E12, também, ao dizer 1,8%, clicou dentro da célula C13. Assim, utilizando esse recurso implementou na planilha eletrônica um modelo ou fórmula. Desta maneira, ao digitar Enter, a aprendiz registrou a fórmula,  $=E12*(1+C13)*(1+C14)*(1+C15)$  (Figura 4.28), mostrada na Barra de Fórmulas e a célula H12 exibiu o seguinte resultado: 10.612,04.

|     |                                                 |                              |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|-----|-------------------------------------------------|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| H12 |                                                 | =E12*(1+C13)*(1+C14)*(1+C15) |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|     | A                                               | B                            | C | D | E | F | G | H | I | J |  |
| 1   | ATIVIDADE 9 - Juros Compostos - Taxas Variáveis |                              |   |   |   |   |   |   |   |   |  |

**Figura 4.28.** Tentativa de cálculo do valor de resgate- Gisele/Natália.

E elas concluíram:

**Natália** – A fórmula está errada, pois o resultado deveria ser 10.877,34.

Após, momentos de conferência dos dados obtidos no item (a), a dupla observou que o resultado exibido na célula H12 (Figura 4.29) era o mesmo saldo atualizado do terceiro mês, exibido na célula E15, e concluiu:

**Gisele** – Faltou multiplicar por 1 mais 2,5%.

Na Atividade 9, as alunas Gisele e Natália evidenciaram uma apropriação dos conceitos de juros e montante. Notadamente no item (a), quando fizeram uma descrição do problema, calculando mês a mês, os juros da aplicação por meio das primitivas e os comandos do Excel. No registro da fórmula do montante na célula E13 (Figura 4,25), após teclar Enter, as aprendizes tiveram o resultado

exibido na célula e puderam fazer suas conjecturas. A execução dessa descrição pelo computador forneceu um retorno fiel e imediato (*feedback*).

No item (c), na célula H12 (Figura 4.29), embora, com muitas dificuldades algébricas e após as intervenções de ensino, e contando com o acompanhamento do professor, elas utilizaram várias estratégias de resolução e tentativas, aplicaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, compararam os resultados da célula H12, com os resultados das células E13, E14, E14, E15 e E16 do item (a). Assim, seguindo um processo de reflexão e depuração, elas se aproximaram do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição.

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------|------------------|-----------------------------|----|--------------|---|---|--|
| H12 | =E12*(1+C13)*(1+C14)*(1+C15)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| A   | B                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | C     | D          | E                | F                           | G  | H            | I | J |  |
| 1   | ATIVIDADE 9 - Juros Compostos - Taxas Variáveis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 2   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 3   | Estela investiu R\$ 10.000,00 num fundo de investimento. Exatamente quatro meses depois resgatou R\$ 10.877,34.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 4   | O gerente do fundo informou que as taxas de rentabilidade mensais do fundo durante o prazo do investimento de Estela foram 1,8%, 2%, 2,2% e 2,5% ao mês. Estela gostaria de verificar se o resgate recebido corresponde realmente às taxas mensais de juro informadas. a) Verifique passo a passo, calculando mês a mês, o rendimento mensal e o saldo atualizado (capital + juros) no regime de juros compostos. b) Existe uma expressão que permite calcular o resgate ao final dos quatro meses? c) Construa esta expressão na célula H12. Teste sua fórmula. |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 5   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 6   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 7   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 8   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 9   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 10  | a)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |       |            |                  |                             | b) | Sim, Existe. |   |   |  |
| 11  | Mês                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Taxa  | Rendimento | Saldo Atualizado | c)                          |    |              |   |   |  |
| 12  | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |       |            | R\$ 10.000,00    | Valor do Resgate 10612,0392 |    |              |   |   |  |
| 13  | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1,80% | R\$ 180,00 | R\$ 10.180,00    |                             |    |              |   |   |  |
| 14  | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2%    | R\$ 203,60 | R\$ 10.383,60    |                             |    |              |   |   |  |
| 15  | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2,20% | R\$ 228,44 | R\$ 10.612,04    |                             |    |              |   |   |  |
| 16  | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2,50% | R\$ 265,30 | R\$ 10.877,34    |                             |    |              |   |   |  |
| 17  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 18  | REGIME DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS COMPOSTOS: Neste regime, os juros são incorporados ao montante do período anterior,                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 19  | que servem de base para o cálculo dos juros do período seguinte.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |
| 20  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |       |            |                  |                             |    |              |   |   |  |

**Figura 4.29. Fórmula do valor do resgate – Gisele/Natália.**

Enfim, a fórmula inserida corretamente pela dupla Gisele/Natália na célula H12 foi conseguida com o auxílio do professor. Nossa intenção era realizar uma abordagem construcionista, muitas vezes, percebia-se que as dificuldades das duplas estavam em conteúdos e técnicas algébricas não apreendidas por elas. Assim, os momentos de intervenção de ensino tornaram-se necessários e, talvez, oportunos.

Nesta atividade, em particular, a fórmula final do valor do resgate partiu das informações destacadas nesta intervenção, aproximando-se bastante da abordagem instrucionista. Nas falas de Natália, “é mais fácil calcular todos os juros e depois somar com o saldo anterior”, é evidente que sua própria formulação da solução continua forte, levantando a questão da compreensão da intervenção de ensino e a preferência por seu próprio modelo.

A dupla Patrícia/Fábio, também, realizou os cálculos mês a mês, dos juros e do saldo atualizado e só teve dificuldade, também, com a fórmula do valor do resgate.

#### 4.3.10 Análise da Atividade 10

A Atividade 10 (Figura 4.30) apresentou como na Atividade 9, a aplicação de um capital com taxas de juros de rentabilidade variáveis.

|     |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |               |   |   |   |   |   |
|-----|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---|---|---|---|---|
| C12 |   | fx=(C8*C9)+(C8*C10)+(C8*C11)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |               |   |   |   |   |   |
|     | A | B                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | C             | D | E | F | G | H |
| 1   |   | ATIVIDADE 10 - Juros Compostos - Taxas Variáveis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |               |   |   |   |   |   |
| 2   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |               |   |   |   |   |   |
| 3   |   | O excesso de caixa da empresa \$ 18.000,00 foi aplicado em um fundo durante um mês com a taxa de juro de 1,2% ao mês. A seguir, o valor resgatado foi aplicado em renda fixa por mais um mês, com a taxa de juro de 2,2% ao mês. Finalmente, o valor resgatado da aplicação em renda fixa foi aplicado durante mais um mês, com taxa de juro de 0,75% ao mês. Qual o valor final do resgate dessa operação? |               |   |   |   |   |   |
| 4   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |               |   |   |   |   |   |
| 5   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |               |   |   |   |   |   |
| 6   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |               |   |   |   |   |   |
| 7   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |               |   |   |   |   |   |
| 8   |   | Valor inicial aplicado                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | R\$ 18.000,00 |   |   |   |   |   |
| 9   |   | Taxa 1. fundo (um mês)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1,20%         |   |   |   |   |   |
| 10  |   | Taxa 2. renda fixa (um mês)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2,20%         |   |   |   |   |   |
| 11  |   | Taxa 3. (um mês)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,75%         |   |   |   |   |   |
| 12  |   | Valor do resgate final da operação                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 747,00        |   |   |   |   |   |
| 13  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |               |   |   |   |   |   |

**Figura 4.30. Tentativa de fórmula do valor do resgate – Gisele/Natália**

Embora as duplas nas Atividades 9 e 10, talvez, pudessem aparentemente ser diferentes; na verdade apenas o *layout* da planilha para a resolução é distinto.

Na Atividade 10, ressalta-se que não foi feita nenhuma intervenção de ensino durante as tentativas de resolução. Nossa intenção foi observar o comportamento das duplas com o novo *layout* da planilha. Enfim, além do *layout* aparentar um problema diferente do anterior, também, o contexto do enunciado contribuiu para aparentá-lo diferente. Nota-se que as dificuldades enfrentadas pelas duplas passam, também, pela sintaxe dos enunciados, pois a linguagem das operações financeiras nem sempre é familiar.

A única pergunta da atividade: *“Qual o valor final do resgate dessa operação?”* Não foi respondida pela dupla Gisele/Natália nem pela dupla Patrícia/Fábio.

A resolução apresentada pela dupla Gisele/Natália e registrada na célula C12 (Figura 4.30) mostra uma confusão e falta de domínio dos conceitos de juros e montante, aqui representado pela expressão “valor final do resgate”

Na célula C12, a dupla registrou a fórmula  $= (C8 * C9) + (C8 * C10) + (C8 * C11)$ . Esta resolução incorreta poderia ser a resposta da seguinte pergunta: *“Qual o valor dos juros auferidos ao final da aplicação, no regime dos juros simples?”* Portanto, houve uma confusão entre os conceitos de juros e montante e, também, dos regimes de capitalização. A dupla Gisele/Natália, apenas, calculou os juros, não usou a estratégia de fatorização. Assim, voltou à estratégia do cálculo dos juros simples e esqueceu de somar juro ao saldo anterior.

#### 4.3.11 Análise das Atividades 11 e 12

Na Atividade 11 (Figura 4.31) e na Atividade 12 (Figura 4.32), existem atividades no regime de juros compostos e, agora, com taxas de juros constantes, com o objetivo de construir a fórmula do montante para o regime dos juros compostos.

Na Atividade 11, o enunciado que, também, serviu de base para a resolução dos itens da Atividade 12 diz: “Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por cinco meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos e a uma taxa de 4% ao mês, com capitalização mensal.”

As duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio responderam com facilidade o item (a), “Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?” E o item (b), “Qual o montante (capital + juros) ao final do primeiro Mês?” Os dois itens referiam-se ao primeiro período (primeiro mês) e foram corretamente interpretados e os modelos registrados nas células C9 e C14, conforme (Figura 4.31).

| C9 |   |                                                                                                                           | $\text{fx} = \text{C6} * \text{C7}$ |   |   |   |
|----|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|---|---|---|
|    | A | B                                                                                                                         | C                                   | D | E | F |
| 1  |   | <b>ATIVIDADE 11 - Juros Compostos - Taxas Constantes</b>                                                                  |                                     |   |   |   |
| 2  |   | Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a                                |                                     |   |   |   |
| 3  |   | juros compostos e a uma taxa de 4% ao mês, com capitalização mensal. Pede-se:                                             |                                     |   |   |   |
| 4  |   |                                                                                                                           |                                     |   |   |   |
| 5  |   | a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?                                                                    |                                     |   |   |   |
| 6  |   | CAPITAL                                                                                                                   | R\$ 1.000,00                        |   |   |   |
| 7  |   | TAXA DE JUROS (mensal)                                                                                                    | 4%                                  |   |   |   |
| 8  |   | PRAZO (meses)                                                                                                             | 1                                   |   |   |   |
| 9  |   | JUROS                                                                                                                     | R\$ 40,00                           |   |   |   |
| 10 |   |                                                                                                                           |                                     |   |   |   |
| 11 |   | b) Qual o montante (capital + juros) ao final do primeiro mês?                                                            |                                     |   |   |   |
| 12 |   | CAPITAL                                                                                                                   | R\$ 1.000,00                        |   |   |   |
| 13 |   | JUROS                                                                                                                     | R\$ 40,00                           |   |   |   |
| 14 |   | MONTANTE                                                                                                                  | R\$ 1.040,00                        |   |   |   |
| 15 |   |                                                                                                                           |                                     |   |   |   |
| 16 |   |                                                                                                                           |                                     |   |   |   |
| 17 |   | <b>REGIME DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS COMPOSTOS:</b> Neste regime os juros são incorporados ao montante do período anterior, |                                     |   |   |   |
| 18 |   | que servem de base para o cálculo dos juros do período seguinte.                                                          |                                     |   |   |   |
| 19 |   |                                                                                                                           |                                     |   |   |   |

**Figura 4.31. Fórmula dos juros – Gisele/Natália**

A Atividade 12 (Figura 4.32) foi planejada como uma continuação da Atividade 11 e pedia no item (a): “Preencha a planilha abaixo, indicando mês a mês, o rendimento (juros) e o saldo (montante) atualizado a cada mês. Qual o valor do resgate (montante) ao final do 5º mês?”. As duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio não tiveram dificuldades no preenchimento desta planilha. Na forma (layout da planilha) proposta, as duplas efetuaram, mês a mês, os cálculos dos juros (coluna D) e os cálculos do montante (coluna E), durante os cinco meses da aplicação, chegando ao valor do resgate (montante) final de R\$

1.216,65, demonstrando uma assimilação desta estratégia de cálculo, passo a passo, reforçada em nossas intervenções de ensino, como importantes para a apropriação dos conceitos da Matemática Financeira.

Apesar da aparente facilidade demonstrada pelas duplas, no cálculo mês a mês, isso não significou compreensão de propriedades operatórias da aritmética, visto que o item **(b)**: *“por qual valor temos que multiplicar o capital de R\$ 1.000,00 para obtermos o montante ao final do 5º mês?”* Só foi realizado com a interação professor com as duplas.

Durante nossa interação com as duplas, perguntamos: *Qual seria o procedimento de cálculo, se a aplicação fosse por 36, 48 ou 120 meses?* As duplas entenderam que o procedimento mês a mês não seria viável no ambiente de papel e lápis e no ambiente de planilhas eletrônicas, ainda que usando o recurso de cópia de fórmula, ter-se-ia de dispor de 120 linhas para uma aplicação por 120 meses.

O item (c) desta Atividade (Figura 4.32) propõe este desafio: (c) *“Na célula H14, construa uma expressão (fórmula) que calcule o Montante para qualquer número de meses de aplicação”*.

|     |                                                                                                                                                                                                                   |                                       |                       |                           |   |                       |     |             |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------|---------------------------|---|-----------------------|-----|-------------|
| H14 | =E12*(1+D8)^H13                                                                                                                                                                                                   |                                       |                       |                           |   |                       |     |             |
| 1   | A                                                                                                                                                                                                                 | B                                     | C                     | D                         | E | F                     | G   | H           |
| 2   | <b>ATIVIDADE 12 - Juros Compostos - Taxas Constantes</b>                                                                                                                                                          |                                       |                       |                           |   |                       |     |             |
| 3   | Com os dados da <b>Atividade 11</b> . a) preencha a planilha abaixo, indicando mês a mês, o rendimento (juros) e o saldo (montante) atualizado a cada mês. Qual o valor do resgate (montante) ao final do 5º mês? |                                       |                       |                           |   |                       |     |             |
| 4   | b) Por que valor temos de multiplicar o capital de R\$ 1.000,00 para obtermos o montante ao final do 5º mês?                                                                                                      |                                       |                       |                           |   |                       |     |             |
| 5   | c) Na célula <b>H14</b> , construa uma expressão (fórmula) que calcule o Montante para qualquer número de meses de aplicação.                                                                                     |                                       |                       |                           |   |                       |     |             |
| 6   | d) Teste sua fórmula, mudando os valores "número de meses" na célula <b>H13</b> .                                                                                                                                 |                                       |                       |                           |   |                       |     |             |
| 7   |                                                                                                                                                                                                                   |                                       |                       |                           |   |                       |     |             |
| 8   |                                                                                                                                                                                                                   | Taxa de juros (mensal)                | 4%                    |                           |   | b)                    |     | 1,216652902 |
| 9   |                                                                                                                                                                                                                   |                                       |                       |                           |   |                       |     | 1.216,65    |
| 10  | a)                                                                                                                                                                                                                |                                       |                       |                           |   | c)                    |     |             |
| 11  | MÊS                                                                                                                                                                                                               | SALDO ANTERIOR<br>(montante anterior) | RENDIMENTO<br>(JUROS) | SALDO ATUAL<br>(MONTANTE) |   | Capital - "C"         | R\$ | 1.000,00    |
| 12  | 0                                                                                                                                                                                                                 |                                       |                       | R\$ 1.000,00              |   | Taxa de juros - "i"   |     | 0,04        |
| 13  | 1                                                                                                                                                                                                                 | R\$ 1.000,00                          | R\$ 40,00             | R\$ 1.040,00              |   | Número de meses - "n" |     | 5           |
| 14  | 2                                                                                                                                                                                                                 | R\$ 1.040,00                          | R\$ 41,60             | R\$ 1.081,60              |   | Montante - "M"        |     | 1216,652902 |
| 15  | 3                                                                                                                                                                                                                 | R\$ 1.081,60                          | R\$ 43,26             | R\$ 1.124,86              |   |                       |     |             |
| 16  | 4                                                                                                                                                                                                                 | R\$ 1.124,86                          | R\$ 44,99             | R\$ 1.169,86              |   |                       |     |             |
| 17  | 5                                                                                                                                                                                                                 | R\$ 1.169,86                          | R\$ 46,79             | R\$ 1.216,65              |   |                       |     |             |
| 18  |                                                                                                                                                                                                                   |                                       |                       |                           |   |                       |     |             |

**Figura 4.32. Fórmula do montante – dupla Gisele/Natália**

Durante as tentativas de construção do modelo, observa-se mais uma vez uma grande dificuldade de conhecimentos aritméticos e algébricos básicos. A estratégia de criar um modelo, inicialmente, no ambiente de papel e lápis para depois implementar no ambiente de planilhas eletrônicas foi sugerida. Não houve evolução nas tentativas, as duplas não conseguiram formular nenhuma estratégia de resolução, então, os momentos de instrução tornaram-se necessários.

Dessa maneira, foi construída a fórmula passo a passo com as duplas, utilizando os dados da Atividade 12, constituindo-se em mais uma intervenção de ensino (Quadro 4.1).

**Montante ao final do primeiro mês ( $M_1$ )**

$$M_1 = 1000 + 1000 \times 0,04$$

$$M_1 = 1000 \times (1 + 0,04)$$

**Montante ao final do segundo mês ( $M_2$ )**

$$M_2 = M_1 + M_1 \times 0,04$$

$$M_2 = M_1 \times (1 + 0,04)$$

**Montante ao final do terceiro mês ( $M_3$ )**

$$M_3 = M_2 + M_2 \times 0,04$$

$$M_3 = M_2 \times (1 + 0,04)$$

$$M_3 = M_1 \times (1 + 0,04) \times (1 + 0,04)$$

$$M_3 = M_1 \times (1 + 0,04)^2$$

**Montante ao final do quarto mês ( $M_4$ )**

$$M_4 = M_3 + M_3 \times 0,04$$

$$M_4 = M_3 \times (1 + 0,04)$$

$$M_4 = M_1 \times (1 + 0,04)^2 \times (1 + 0,04)$$

$$M_4 = M_1 \times (1 + 0,04)^3$$

Substituindo  $M_1$  e generalizando o **Montante** para um número qualquer de meses “n” ( $M_n$ ), temos:

$$M_4 = 1000 \times (1 + 0,04) \times (1 + 0,04)$$

$$M_4 = 1000 \times (1 + 0,04)^4$$

|                                  |
|----------------------------------|
| $M_n = 1000 \times (1 + 0,04)^n$ |
|----------------------------------|

**Quadro 4.1. Fórmula do montante para um número qualquer de meses.**

No processo de dedução de fórmulas ou construção de modelos estão presentes os principais objetivos desta pesquisa. Por esta razão, não houve preocupação com o tempo, e foram intensificadas observações e intervenções que pudessem colaborar no processo de apreensão e formação de conceitos da Matemática Financeira.

Deste modo, a construção do modelo foi muito lenta e ainda não foi possível avaliar se contribuiu para a aprendizagem e se significados matemáticos emergiram desse experimento de ensino.

No item (d): “*Teste sua fórmula, mudando os valores (número de meses), na célula H13.*”, com o modelo construído e implementado na Barra de Fórmulas do Excel, as duplas experimentaram com satisfação as potencialidades das planilhas eletrônicas e puderam fazer as simulações e testar suas fórmulas.

#### 4.3.12 Análise da Atividade 13

A Atividade 13 (Figura 4.33) planejada com seis itens exigiu, além da utilização dos modelos construídos, também, o estabelecimento de relações entre esses modelos. Em outras palavras, a atividade proposta exigiu das duplas conhecimentos de montagem de equações e resolução de sistema de equações.

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|----------|---------------------------|-----|-----------|---|---|
| F12 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | =2*C12 |          |                           |     |           |   |   |
|     | A                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | B      | C        | D                         | E   | F         | G | H |
| 1   | ATIVIDADE 13 - Juros Compostos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |        |          |                           |     |           |   |   |
| 2   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 3   | <p>Uma pessoa tomou dois empréstimos. O primeiro por 3 meses a juros compostos e a taxa de 5% ao mês; e o segundo por 10 meses, também, a juros compostos de 4% ao mês. Sabendo-se que pagou ao todo R\$ 11.181,14 de juros e que o primeiro empréstimo é igual à metade do segundo. Pede-se: a) Registre os dados conhecidos nas células correspondentes. b) Na célula C12, atribua um valor qualquer para o primeiro empréstimo. c) Nas células F12, C15, C16, F15, F16 e C18, construa expressões e relações com os dados conhecidos ou não. d) Faça simulações na célula C12, alterando o valor do primeiro empréstimo e tente chegar à resposta. e) Tente, também, resolver este problema no ambiente de papel e lápis. f) Qual o valor de cada empréstimo?</p> |        |          |                           |     |           |   |   |
| 4   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 5   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 6   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 7   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 8   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 9   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 10  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 11  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 12  | 1º Empréstimo (capital A)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | R\$    | 5.000,00 | 2º Empréstimo (capital B) | R\$ | 10.000,00 |   |   |
| 13  | Prazo (meses)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |        | 3        | Prazo (meses)             |     | 10        |   |   |
| 14  | Taxa mensal                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |        | 5%       | Taxa mensal               |     | 4,0%      |   |   |
| 15  | Montante                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | R\$    | 5.788,13 | Montante                  | R\$ | 14.802,44 |   |   |
| 16  | Juros                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | R\$    | 788,13   | Juros                     | R\$ | 4.802,44  |   |   |
| 17  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |
| 18  | Juros totais pagos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | R\$    | 5.590,57 |                           |     |           |   |   |
| 19  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |          |                           |     |           |   |   |

**Figura 4.33. Fórmula da relação entre os empréstimos – da dupla Gisele/Natália.**

Seguindo os itens desta atividade, as duplas registraram com facilidade os dados, prazo e taxa mensal nas células indicadas da planilha eletrônica. Atribuíram ao valor do primeiro empréstimo, um valor qualquer, como solicitava o item (b) e registraram este valor na célula C12. As dificuldades ficaram em relacionar as outras células e as fórmulas nelas registradas.

Inicialmente, a dupla Gisele/Natália atribuiu R\$ 5.000,00 ao valor do primeiro empréstimo e R\$ 10.000,00 ao valor do segundo empréstimo (Figura 4.33). A fórmula do montante para os juros compostos, nas células C15 e F15 e a fórmula dos juros, nas células C16 e F16 foram construídas pela dupla com pequena intervenção do professor, já que estes dois cálculos (juro e montante), tenham sido recorrentes neste experimento de ensino. No entanto, outras dificuldades apareceram para elas. Uma delas pareceu residir na interpretação da sintaxe do seguinte trecho do enunciado: *“Sabendo que pagou ao todo R\$ 11.181,14 de juros e que o primeiro empréstimo é igual à metade do segundo.”*

Ainda, assim, após algumas conjecturas a dupla inseriu corretamente na célula F12 a fórmula,  $=2*C12$ .

**Gisele** – se o primeiro empréstimo é igual à metade do segundo, então...

**Natália** – o segundo empréstimo é o dobro...

**Gisele** – podemos digitar na célula C12, igual F12 dividido por 2 ou digitar na célula F12, igual duas vezes C12.

Auxiliadas pelas resoluções anteriores das Atividades 11 e 12 que o professor sugeriu à dupla para consulta, as aprendizes registraram corretamente as fórmulas de montante. Para a fórmula dos juros das células C16 e F16, inicialmente, as aprendizes aplicaram o modelo  $J = C.i.n$  e inseriram na célula C16,  $=C12*C14*C13$ , fórmula dos juros no regime de juros simples. Após, nova intervenção para lembrarem que independente do regime de juros simples ou compostos, as operações de empréstimos respeitam o modelo Montante = Capital + Juros, as aprendizes deduziram que, Juros = Montante - Capital (Figura 4.34).

|     |                                |          |   |   |   |   |   |
|-----|--------------------------------|----------|---|---|---|---|---|
| C16 |                                | =C15-C12 |   |   |   |   |   |
| A   | B                              | C        | D | E | F | G | H |
| 1   | ATIVIDADE 13 - Juros Compostos |          |   |   |   |   |   |

**Figura 4.34. Fórmula dos juros – dupla Gisele/Natália.**

Para o cálculo dos juros totais pagos, as alunas inseriram corretamente na célula C18 a fórmula, =C16+F16. Seguindo a orientação do item (b), inseriram para o primeiro empréstimo o valor de R\$ 5.000,00 e, assim, por simulação como pedia o item (d), chegaram aos valores de cada empréstimo.

Mais uma vez, notou-se a preferência e, talvez, uma facilidade no uso do ambiente de planilhas eletrônicas. As dificuldades algébricas persistiram, mas ainda, assim, em razão das preferências pelo ambiente das planilhas, houve um engajamento da dupla Gisele/Natália, em particular, pelo sistema de simulação.

A dupla Patrícia /Fábio seguiu caminho semelhante, registrou R\$ 1.500,00 para o valor do primeiro empréstimo e R\$ 3.000,00 para o valor do segundo empréstimo (Figura 4.35). Esta dupla não teve dificuldades nos registros dos dados conhecidos nem da fórmula do montante dos juros compostos, registradas nas células C15 e F15. Desta forma, a dupla confirmou nossa expectativa de que esta fórmula, em particular, foi bastante trabalhada nas atividades anteriores e permitiu aos alunos, pelo menos, uma memorização. Entretanto, isso não significou apropriação do conceito de montante, pois a dupla teve ainda dificuldade na interpretação da fórmula dos juros das células C16 e F16, que se obtém pela diferença entre o valor montante e o capital emprestado. As dificuldades foram enfrentadas com a interação do professor e a dupla.

|     |                                                                                                                     |     |          |                           |     |          |   |   |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|----------|---------------------------|-----|----------|---|---|
| C15 | =C12*(1+C14)^C13                                                                                                    |     |          |                           |     |          |   |   |
|     | A                                                                                                                   | B   | C        | D                         | E   | F        | G | H |
| 1   | ATIVIDADE 13 - Juros Compostos                                                                                      |     |          |                           |     |          |   |   |
| 2   |                                                                                                                     |     |          |                           |     |          |   |   |
| 3   | Uma pessoa tomou dois empréstimos. O primeiro por 3 meses a juros compostos e a taxa de 5% ao mês;                  |     |          |                           |     |          |   |   |
| 4   | e o segundo por 10 meses, também, a juros compostos de 4% ao mês. Sabendo-se que pagou ao todo R\$ 11.181,14 de     |     |          |                           |     |          |   |   |
| 5   | juros e que o primeiro empréstimo é igual à metade do segundo. Pede-se: a) Registre os dados conhecidos nas células |     |          |                           |     |          |   |   |
| 6   | correspondentes. b) Na célula C12, atribua um valor qualquer para o primeiro empréstimo.                            |     |          |                           |     |          |   |   |
| 7   | c) Nas células F12, C15, C16, F15, F16 e C18, construa expressões e relações com os dados conhecidos ou não.        |     |          |                           |     |          |   |   |
| 8   | d) Faça simulações na célula C12, alterando o valor do primeiro empréstimo e tente chegar à resposta.               |     |          |                           |     |          |   |   |
| 9   | e) Tente, também, resolver este problema no ambiente de papel e lápis.                                              |     |          |                           |     |          |   |   |
| 10  | f) Qual o valor de cada empréstimo?                                                                                 |     |          |                           |     |          |   |   |
| 11  |                                                                                                                     |     |          |                           |     |          |   |   |
| 12  | 1º Empréstimo (capital A)                                                                                           | R\$ | 1.500,00 | 2º Empréstimo (capital B) | R\$ | 3.000,00 |   |   |
| 13  | Prazo (meses)                                                                                                       |     | 3        | Prazo (meses)             |     | 10       |   |   |
| 14  | Taxa mensal                                                                                                         |     | 5%       | Taxa mensal               |     | 4,0%     |   |   |
| 15  | Montante                                                                                                            | R\$ | 1.736,44 | Montante                  | R\$ | 4.440,73 |   |   |
| 16  | Juros                                                                                                               | R\$ | 236,44   | Juros                     | R\$ | 1.440,73 |   |   |
| 17  |                                                                                                                     |     |          |                           |     |          |   |   |
| 18  | Juros totais pagos                                                                                                  | R\$ | 1.677,17 |                           |     |          |   |   |
| 19  |                                                                                                                     |     |          |                           |     |          |   |   |

**Figura 4.35. Fórmula do montante – da dupla Patrícia/Fábio.**

Superadas as etapas de descrição com a interpretação da sintaxe do problema e a da execução com o registro das fórmulas, a dupla concentrou-se na verificação dos resultados e concluiu que os juros totais pagos de R\$ 1.677,17 registrados na célula C18, não eram os R\$ 11.181,14 das condições do enunciado. Assim, seguindo o item (d): “Faça simulações na célula C12, alterando o valor do primeiro empréstimo e tente chegar à resposta”, a dupla Patrícia /Fábio experimentou a simulação e chegou ao valor do primeiro empréstimo R\$ 10.000,00 e do segundo R\$ 10.000,00 (Figura 4.36).

|     |                                                                                                                     |          |           |                           |     |           |   |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|---------------------------|-----|-----------|---|
| C18 |                                                                                                                     | =C16+F16 |           |                           |     |           |   |
| A   | B                                                                                                                   | C        | D         | E                         | F   | G         | H |
| 1   | ATIVIDADE 13 - Juros Compostos                                                                                      |          |           |                           |     |           |   |
| 2   |                                                                                                                     |          |           |                           |     |           |   |
| 3   | Uma pessoa tomou dois empréstimos. O primeiro por 3 meses a juros compostos e a taxa de 5% ao mês;                  |          |           |                           |     |           |   |
| 4   | e o segundo por 10 meses, também, a juros compostos de 4% ao mês. Sabendo-se que pagou ao todo R\$ 11.181,14 de     |          |           |                           |     |           |   |
| 5   | juros e que o primeiro empréstimo é igual à metade do segundo. Pede-se: a) Registre os dados conhecidos nas células |          |           |                           |     |           |   |
| 6   | correspondentes. b) Na célula C12, atribua um valor qualquer para o primeiro empréstimo.                            |          |           |                           |     |           |   |
| 7   | c) Nas células F12, C15, C16, F15, F16 e C18, construa expressões e relações com os dados conhecidos ou não.        |          |           |                           |     |           |   |
| 8   | d) Faça simulações na célula C12, alterando o valor do primeiro empréstimo e tente chegar à resposta.               |          |           |                           |     |           |   |
| 9   | e) Tente, também, resolver este problema no ambiente de papel e lápis.                                              |          |           |                           |     |           |   |
| 10  | f) Qual o valor de cada empréstimo?                                                                                 |          |           |                           |     |           |   |
| 11  |                                                                                                                     |          |           |                           |     |           |   |
| 12  | 1º Empréstimo (capital A)                                                                                           | R\$      | 10.000,00 | 2º Empréstimo (capital B) | R\$ | 20.000,00 |   |
| 13  | Prazo (meses)                                                                                                       |          | 3         | Prazo (meses)             |     | 10        |   |
| 14  | Taxa mensal                                                                                                         |          | 5%        | Taxa mensal               |     | 4,0%      |   |
| 15  | Montante                                                                                                            | R\$      | 11.576,25 | Montante                  | R\$ | 29.604,89 |   |
| 16  | Juros                                                                                                               | R\$      | 1.576,25  | Juros                     | R\$ | 9.604,89  |   |
| 17  |                                                                                                                     |          |           |                           |     |           |   |
| 18  | Juros totais pagos                                                                                                  | R\$      | 11.181,14 |                           |     |           |   |
| 19  |                                                                                                                     |          |           |                           |     |           |   |

**Figura 4.36. Atividade 13 – Resolução Patrícia/Fábio.**

#### 4.4 Síntese da análise – atividades com planilhas eletrônicas

Nas Atividades 1 e 2, as duplas analisadas Natália/Gisele e Patrícia/Fábio, embora utilizassem a planilha eletrônica no ambiente de trabalho, tiveram dificuldades no uso da Barra de Fórmulas e no procedimento de uso das células que podem ser usadas, como simples calculadora ou como registro de fórmulas. Desta forma, as duas atividades serviram de familiarização com as chamadas primitivas e comandos da interface do Excel, além de introduzir os conceitos de capital, taxa de juros, juros e montante.

Após, a superação dessas dificuldades iniciais de interface, os aprendizes concentraram-se no cálculo numérico das operações aritméticas e aí, também, demonstraram dificuldade para trabalhar com números não inteiros e suas representações. Nas atividades e nas intervenções de ensino, por exemplo, foi utilizada a razão  $\frac{3}{100}$  e exploradas suas diversas representações.

Aparentemente, essas dificuldades de representação, também, foram superadas.

Na fase seguinte, o desafio das atividades foi permitir aos aprendizes a apropriação dos conceitos de Capital, Taxa de Juros, Juros e Montante. Nota-se um avanço sensível na execução isolada das operações aritméticas nas planilhas eletrônicas, a multiplicação, para o cálculo dos juros, e a adição, para o cálculo do montante. Ou seja, os aprendizes usaram a estratégia de calcular, inicialmente, o juro do período e, em seguida, adicionar esse juro ao capital para obter o montante. Entretanto, as dificuldades de sintaxe dos enunciados e das estruturas algébricas permaneceram nas atividades que exigiam uma generalização e formalização dos procedimentos de cálculo.

Após diversas intervenções de ensino e acompanhamento das atividades, os aprendizes conseguiram construir fórmulas na planilha, com o auxílio do professor e, ainda, num estágio inicial evidenciaram a apropriação dos conceitos básicos da Matemática Financeira de juros, taxa de juros, capital e montante.

Desta maneira, com fortes intervenções de ensino, com objetivo de ajudar na apropriação dos fundamentos básicos da aritmética e álgebra que faltavam a nossos aprendizes, deixou-se o foco para a construção de fórmulas que permitissem a simulação dos resultados e isso de fato aconteceu. Pois, os aprendizes experimentaram as potencialidades de cálculo do Excel e sentiram-se seguros em suas tarefas.

Nas Atividades 7, 8 e 13, além da construção de fórmulas nas células, estas atividades exigiam o relacionamento entre as fórmulas registradas nas células. Os aprendizes voltaram a ter dificuldades, só superadas por novas intervenções de ensino. Estas atividades poderiam, também, ser resolvidas no ambiente de papel e lápis, como solicitado na atividade. Entretanto, nenhum dos aprendizes da presente pesquisa conseguiu, apesar de tentativas e do tempo que foi reservado para esse desafio. Assim, as duplas conseguiram com auxílio do professor e, por meio da simulação, substituindo valores nas células e chegar ao resultado.

Dentro dos objetivos desta seqüência de Atividades com planilhas eletrônicas de Matemática Financeira, observa-se que as principais dificuldades estiveram nas estruturas algébricas e suas propriedades e, também, nas

interpretações das sintaxes dos enunciados. Parece que essas dificuldades vieram do ambiente de papel e lápis e transferiram-se aos ambientes com ferramentas computacionais. Apesar disso, pôde-se, também, observar no desenvolvimento das atividades engajamento e envolvimento dos aprendizes que se traduziu no empenho de resolução por tentativas e simulação. Os recursos das planilhas eletrônicas combinando a disponibilidade de textos e cálculos, aparentemente, ajudaram no envolvimento dos aprendizes.

A seguir serão apresentadas as análises das atividades com papel e lápis dos grupos construcionistas e instrucionistas.

#### **4.5 Análise das Atividades com papel e lápis**

As Atividades com papel e lápis, constituíram-se de seis questões de Matemática Financeira e foram aplicadas aos dois grupos de alunos deste trabalho.

A seguir, serão analisadas as Atividades dos 4 alunos do grupo construcionista, formado pelas duplas Gisele/ Natália e Patrícia/Fábio e, também, dos 25 alunos do grupo instrucionista. O objetivo desta análise é permitir uma possível comparação entre esses resultados para contribuir na compreensão de nossas Questões de Pesquisa.

Nestas atividades com papel e lápis, os alunos poderiam usar calculadoras científicas ou financeiras nas resoluções e, em nenhum momento, houve intervenções de ensino do professor.

#### 4.5.1 Análise da questão 1

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

Na Questão 1, a dupla Gisele/Natália apresentou uma resolução correta e entendeu o lucro como de 30% sobre o valor de custo de R\$ 70,00. Assim, a resposta dada foi R\$ 91,00. Não representou nenhuma dificuldade às aprendizes. A dupla Patrícia/Fábio, também, resolveu corretamente e de forma semelhante.

Nesta Questão, o desempenho do grupo instrucionista foi de 92% de acerto, com apenas dois alunos não conseguindo resolver corretamente. Estes resultados confirmam a questão, talvez, como um cálculo elementar de porcentagem e que os dois grupos construcionistas e instrucionistas encontraram facilidade na resolução.

#### 4.5.2 Análise da questão 2

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

Nesta Questão, as duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio cometeram o mesmo erro que pareceu comum em sua resolução. As duplas não observaram o enunciado, quando diz que o comerciante deseja ganhar 25% sobre o preço de venda. O preço de venda, embora, não seja conhecido; no entanto, o lucro de 25% deve ser calculado sobre ele. A resposta errada apresentada pela dupla de R\$ 75,00, refere-se a um lucro de 25%, calculado sobre R\$ 60,00, que é o preço de custo da mercadoria.

Do grupo instrucionista, apenas, dois alunos responderam corretamente à questão (**R\$ 80,00**), 22 alunos apresentaram resposta errada (**R\$ 75,00**) e um aluno deixou a questão em branco. Para a análise desta questão, é significativo observar que todos os alunos que erraram (88%), cometeram o mesmo engano, calculando 25% de R\$ 60,00, que é o preço de custo da mercadoria para o comerciante. Assim, todos apresentaram o mesmo resultado errado R\$ 75,00.

O pequeno índice de acerto da questão parece evidenciar uma grande dificuldade dos alunos dos dois grupos, no domínio das seguintes ferramentas matemáticas:

- de valores não conhecidos – incógnitas e montagem de equações e resolução de sistema de equações do 1º grau;
- razões, proporções, taxa porcentual e regra de três.

A dificuldade de interpretação da sintaxe em questões abertas é outro fator que pode ter colaborado para o alto índice de erros. Nesta pesquisa, não foi possível avaliar com exatidão essa dificuldade. Mas, é significativo observar que, no Grupo Instrucionista, cerca de 12 são alunos de um Curso de Tecnologia em Finanças e trabalham com atividades financeiras em seu dia-a-dia. Entretanto, não mostraram familiaridade com questões dessa natureza.

A seguir, é apresentada a resolução de um dos alunos que resolveu corretamente a questão, (Figura 4.37) e usou como ferramenta o conceito de proporção – regra de três.

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

R\$ 60,00 — 75%  
 X — 100%

$75 \cdot X = 60 \cdot 100$   
 $X = \frac{6000}{75}$   
 $X = 80,00$

R: O preço de venda deve ser R\$ 80,00.

Figura 4.37. Resolução do aluno João – Questão 2 em papel e lápis

#### 4.5.3 Análise da questão 3

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

Nesta questão, em razão da pergunta: “Qual foi o segundo desconto?” ser uma pergunta aberta, permitiu várias respostas. A resposta dada pela dupla Gisele/Natália de R\$ 11,20, pode estar considerando, como segundo desconto, um valor em reais sobre a conta de R\$ 40,00 e que substitua o primeiro de 10%. Assim, a resposta apresentada por elas, pode ser considerada como correta. Em nossa interpretação pessoal, a sintaxe desta questão aberta permite esta discussão.

A dupla Patrícia/Fábio apresentou a resposta de 20% e na resolução mostrou a sequência do primeiro de 10% e segundo desconto de 20%, que é uma resposta correta e, talvez, a mais usual.

Do grupo instrucionista, 14 alunos (56%) apresentaram resposta que pode ser considerada como correta, já que a resposta para esta questão pode ser discutida. A discussão a que nos referimos é quanto à forma de dar a resposta. A

maioria dos alunos apresentou a resposta na forma de porcentual (20%), embora cinco alunos tenham dado em reais (R\$ 7,20).

O índice de acerto pareceu indicar que essa questão, a exemplo da Questão 1, pode ser considerada fácil, embora 44% (11 alunos) não tenham conseguido uma resposta correta.

#### 4.5.4 Análise da questão 4

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por cinco meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?
- b) Qual o montante ao final do primeiro mês?
- c) Qual o montante ao final do quinto mês?

Esta questão solicitava o cálculo dos juros ao final do primeiro mês, montante ao final do primeiro mês e o montante ao final do quinto mês. Os cálculos básicos da Matemática Financeira foram objetos de estudo na construção de modelos matemáticos ou fórmulas, durante as n atividades com planilhas eletrônicas. As duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio que participaram de todas as sessões, não tiveram dificuldade na resolução em ambiente de papel e lápis. Assim, pareceu não haver surpresas, os aprendizes memorizaram com facilidade esse modelo e com o auxílio da calculadora chegaram às respostas corretas, a) R\$ 20,00 b) R\$ 1.020,00 e c) R\$ 1.104,08.

No grupo instrucionista, o índice de acerto desta questão também foi considerado alto, e quase todos os alunos aplicaram a fórmula do Montante no regime de capitalização de juros compostos.

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

Embora o grande índice de acertos evidencie o conhecimento da fórmula, nota-se uma incongruência nos índices; já que o item (c) “*Qual o montante ao final do quinto mês?*”, teve quase 88% de acertos. O item (b), também, teve 80% e o item (a) teve um índice menor de acerto, 80%. Fato que parece demonstrar a falta de domínio dos conceitos básicos da Matemática Financeira, apesar de conhecer a fórmula.

Para esta questão, os resultados parecem demonstrar que os dois grupos, construcionista e instrucionista, aplicam com alguma facilidade a fórmula do montante em problemas, em que se tem basicamente, como tarefa a substituição dos dados em uma fórmula.

#### 4.5.5 Análise da Questão 5

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos).

A questão pedia o montante de uma operação de empréstimo ao final de noventa dias. Como a taxa de juros da operação de 5,65% é mensal, as duplas corretamente converteram o período de empréstimo para três meses. Assim, a resposta R\$ 94.340,57 está correta.

Outra vez, a fácil resolução das duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio pode evidenciar a familiaridade com o modelo e, também, uma evolução na formação de conceitos, pois, interpretaram corretamente e fizeram a conversão dos 90 dias do prazo de empréstimo para três meses.

No grupo instrucionista, o índice de acertos foi de 84%, considerado alto, porém, menor que o índice de acertos da Questão 4. Na conversão, o período de empréstimo de 90 dias para 3 meses pode ter causado essa baixa.

Aparentemente, os resultados confirmam a avaliação de que esta é uma questão considerada fácil, pois bastava identificar no enunciado da questão os valores do capital, da taxa de juros e o tempo de aplicação. Substituindo esses valores na fórmula abaixo, chega-se ao valor do Montante.

$$\boxed{M=C \cdot (1+i)^n} \text{ (fórmula do Montante no regime de juros compostos)}$$

Nesta questão, a Taxa de juros é mensal e o prazo está expresso em dias, parece que isso não representou dificuldade a esses alunos. Praticamente, todos fizeram a conversão do prazo para três meses.

#### 4.5.6 Análise da Questão 6

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00, a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de seis meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

Esta última questão está na categoria das questões consideradas como difícil, pois envolve algumas interpretações, porque sai do simples padrão de substituir dados em uma fórmula “conhecida” e efetuar algumas operações aritméticas elementares.

No Capítulo 3, é apresentada uma possível resolução pelo modo algébrico. Esta requer do aluno uma interpretação da sintaxe do enunciado e capacidade em transformar a linguagem natural em linguagem algébrica que resulta em um sistema de equações.

Na resolução da Questão 6, embora a resposta final da dupla Gisele/Natália não esteja correta, foram identificados alguns avanços nas

representações algébricas da dupla. Assim, as aprendizes representaram dois capitais que somam R\$ 6.000,00 por  $C_A + C_B = 6000$  e, em seguida concluíram que  $C_B = 6000 - C_A$ . Representaram, também, a igualdade entre os montantes resultantes na forma,  $C_A \cdot (1 + 0,02)^6 = 6000 - C_A \cdot (1 + 0,015)^6$ , cometeram o erro de não colocar entre parênteses o valor do capital B  $C_B = 6000 - C_A$ , e, assim, o resultado em papel e lápis ficou comprometido.

Ao final da questão, solicitou-se às aprendizes que verificassem e comprovassem os resultados desta questão no ambiente de planilhas eletrônicas. Desta forma, chegaram ao resultado correto, usando o sistema de simulação.

A dupla Patrícia/Fábio teve mais dificuldades e não conseguiu evoluir na resolução, apesar das tentativas.

Preliminarmente, foram avaliados alguns avanços nos estágios de aprendizagem das noções e conceitos da Matemática Financeira, entretanto as dificuldades da sintaxe, da interpretação do texto e, em especial, das estruturas algébricas merecem discussão para uma análise mais consistente.

Finalmente em nossa visão pessoal, e na nossa experiência profissional, as atividades com planilhas eletrônicas trazem benefícios e envolvem os aprendizes. Os ambientes de papel-lápis e de planilhas eletrônicas são complementares e sua convivência contribui no processo ensino-aprendizagem.

Entre os alunos do grupo instrucionista, também, verificou-se, em geral, uma grande dificuldade e isto se manifestou em um índice baixo de 24% acertos, mas, ainda assim um índice maior do que o da Questão 2 (8%). Apenas seis alunos acertaram a questão e alguns apresentaram resolução pelo sistema de simulação com o auxílio da calculadora financeira HP-12C. A seguir, são apresentadas algumas resoluções dos alunos.

Apenas a resolução do aluno João Paulo do grupo instrucionista, realizada pelo modo algébrico evidencia um domínio de conceitos algébricos e de

montagem de equações ou como se pode, também, chamar modelos matemáticos da Matemática Financeira (Anexo 5).

#### 4.6 Análise comparativa dos grupos instrucionistas e construcionistas

Inicialmente, são apresentados os resultados das resoluções efetuadas pelos 25 alunos do grupo instrucionista. Na tabela abaixo, constam o número de alunos e o percentual das questões: certas, erradas e em branco.

| QUESTÃO   | CERTA        |            | ERRADA       |            | BRANCO       |            |
|-----------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|
|           | Nº de alunos | percentual | Nº de alunos | percentual | Nº de alunos | percentual |
| <b>1</b>  | 23           | 92%        | 2            | 8%         | 0            | 0%         |
| <b>2</b>  | 2            | 8%         | 22           | 88%        | 1            | 4%         |
| <b>3</b>  | 14           | 56%        | 10           | 40%        | 1            | 4%         |
| <b>4a</b> | 20           | 80%        | 4            | 16%        | 1            | 4%         |
| <b>4b</b> | 22           | 88%        | 2            | 8%         | 1            | 4%         |
| <b>4c</b> | 22           | 88%        | 2            | 8%         | 1            | 4%         |
| <b>5</b>  | 21           | 84%        | 3            | 12%        | 1            | 4%         |
| <b>6</b>  | 6            | 24%        | 16           | 64%        | 3            | 12%        |

**Quadro 4.2. Resultados do grupo instrucionista**

Pelos dados do Quadro 4.2, do grupo instrucionista, observa-se que os resultados mostram altos de índices de acertos nas Questões: 1, 4a, 4b, 4c e 5, e, baixos índices de acertos nas Questões 2 e 6; particularmente, na Questão 2 o

mais baixo. Apenas dois alunos conseguiram uma resolução correta desta questão, representando um índice de 8% de 25 alunos.

As questões com alto índice de acerto, por exemplo, a 1, exigiu o cálculo de uma porcentagem e, em seguida, uma adição dessa porcentagem (R\$ 21,00) ao valor de custo do objeto (R\$ 70,00). Esta, talvez, seja uma prática bastante habitual desse grupo no ambiente de trabalho que teve apenas dois alunos, que não conseguiram acerto.

As duas duplas do grupo construcionista Gisele/Natália e Patrícia/Fábio, também, resolveram corretamente a Questão 1, evidenciando, aparentemente, que esta questão pode ser considerada fácil.

Nas Questões: 4a, 4b, 4c e 5, envolvendo juros compostos, ocorreu comportamento semelhante ao anterior para os dois grupos. O grupo instrucionista, teve altos índices de acertos. Estas questões envolviam basicamente aplicação da fórmula do montante e como esses alunos já tinham cursado a disciplina de Matemática Financeira, provavelmente, esse fato tenha auxiliado. O grupo construcionista resolveu com facilidade todas estas questões, com índice de 100%, e aí, certamente, o fato de terem se submetido às Atividades com planilhas eletrônicas e as muitas intervenções de ensino ocorridas na construção de fórmulas favoreceram o grupo.

Entretanto, nas Questões 2 e 6, houve baixos índices de acertos. Na Questão 2 apenas dois alunos do grupo instrucionista acertaram e do grupo construcionista nenhuma dupla acertou. Como se percebe a Questão 2 envolve uma dificuldade “tradicional” de interpretação da sintaxe do problema conforme nossa experiência como professor, esta tem sido uma questão considerada difícil aos alunos.

A Questão 6 de juros compostos exigiu a montagem de equações, a simples aplicação de fórmulas do montante das Questões 4 e 5 não era suficiente para a resolução. Isso mais uma vez refletiu no baixo índice de acerto do grupo instrucionista (24%) e as duplas do grupo construcionista não acertaram essa questão, embora a dupla Gisele/Natália tenha se aproximado e montado

equações corretas, cometendo erros no desenvolvimento e resolução do sistema. Na Questão 6, foi sugerido à dupla para tentar em seguida a resolução no ambiente de planilhas eletrônicas e partir das produções da dupla em papel e lápis, com intervenção do professor, a dupla chegou ao resultado correto por meio da simulação.

## CAPÍTULO 5. CONCLUSÃO

---

### 5.1 Apresentação da pesquisa

O objetivo inicial deste trabalho foi envolver aprendizes na construção de seus próprios modelos matemáticos para o cálculo dos juros e do montante, usando ferramentas computacionais. Entre estas ferramentas computacionais, pesquisou-se, em particular, o emprego das planilhas eletrônicas, como ferramenta auxiliar do ensino-aprendizagem da Matemática Financeira.

Para que o objetivo deste estudo fosse definido, passou-se por várias etapas, tais como: a escolha do software, a definição dos tópicos da Matemática Financeira e os conceitos matemáticos que são considerados fundamentais para exploração e desenvolvimento deste trabalho. Nesse sentido, optou-se por restringir o conteúdo de Matemática Financeira ao cálculo do juro e do montante no regime de juros simples e compostos.

O projeto foi iniciado com as idéias construcionistas de Papert (1980) e a análise dos ambientes de aprendizado baseados no computador, segundo Valente (2002). Paralelamente, foram procurados trabalhos de pesquisa anteriores do ensino-aprendizagem da Matemática Financeira.

Pesquisou-se, também, o emprego das diversas tecnologias, como ferramentas auxiliares de ensino, o uso das calculadoras científicas e financeiras e, em particular, das planilhas eletrônicas. Para a realização do presente trabalho, escolheu-se a planilha eletrônica Microsoft Excel, por ser entre outras razões a de maior disponibilidade no mercado.

Decidiu, também, desenvolver um ambiente de ensino-aprendizagem com a utilização desse software. Assim, o pesquisador envolveu-se na tarefa de elaboração das atividades de Matemática Financeira para resolução, em princípio, exclusivamente com auxílio da planilha eletrônica, denominada atividade com

planilhas eletrônicas. Com o desenvolvimento das fases de elaboração destas atividades com planilhas, por meio do processo de design iterativo, estas atividades foram aperfeiçoadas e a proposta final estabeleceu que nas resoluções os aprendizes, também, poderiam utilizar o ambiente de papel e lápis e, inclusive, com o auxílio das calculadoras.

Além, das atividades com planilhas eletrônicas foram, também, elaboradas atividades constituídas de seis questões de Matemática Financeira para resolução sem o auxílio das planilhas eletrônicas, denominadas atividades com papel e lápis.

Nesta pesquisa, dois grupos de alunos foram considerados:

- grupo construcionista, que participou do experimento de ensino constituído de três sessões de ensino-aprendizagem com a aplicação de atividades com planilhas eletrônicas, caracterizado por alunos que não cursaram a disciplina de Matemática Financeira;
- grupo instrucionista, que se submeteu, apenas, à aplicação das atividades com papel e lápis, caracterizado por alunos que já cursaram a disciplina de Matemática Financeira.

Após, as sessões de ensino com planilhas eletrônicas, o grupo construcionista, também, submeteu-se à aplicação das atividades com papel e lápis. Os objetivos foram comparar as contribuições das planilhas eletrônicas, no ensino-aprendizagem do cálculo do juro e do montante na Matemática Financeira, por meio da comparação dos resultados, em particular, das estratégias de resolução das atividades com papel e lápis, aplicadas aos dois grupos.

Para sustentar estas intenções, considerou-se os trabalhos de Haspekian (2005) que destacam o papel das planilhas eletrônicas no ensino, em particular, a natureza “híbrida” de fórmulas das planilhas, simultaneamente, aritmético-algébrico.

## 5.2 Metodologia

Para este trabalho, a metodologia baseou-se nos procedimentos sobre experimentos de ensino, explicitados por Kelly & Lesh (2000), que têm por objetivo a criação de uma versão, em escala reduzida, de uma ecologia de aprendizagem, de forma que a mesma possa ser estudada em profundidade e detalhe. Esta metodologia pode ser considerada como um tipo mais singular baseada em design (*design experiments*) que, por sua vez, constitui um paradigma mais abrangente, notadamente, em cenários educacionais.

A escolha por esta metodologia está associada ao fato de tentar explicar como os alunos aprofundam seus entendimentos de uma idéia matemática particular, considerando-se os meios, tarefas e as ações do professor-pesquisador (COBB et al., 2003).

Esta metodologia pode ser dividida em duas fases relacionadas ao desenvolvimento e experimentação. Na primeira fase de desenvolvimento, foram caracterizados os sujeitos da pesquisa e elaboradas as atividades, que foram de dois tipos: atividades com planilhas eletrônicas e atividades com papel e lápis.

Na criação do ambiente de aprendizagem, foram estudados os sistemas computacionais com fins educacionais, segundo dois paradigmas:

- o instrucionista, cujo ensino é assistido ou auxiliado pelo computador que parte do pressuposto de que a informação é a unidade fundamental no ensino e, portanto preocupa-se com os processos de adquirir, armazenar, representar e, sobretudo, transformar a informação;
- o construcionismo, fundamentado nas idéias de Papert (1986), cuja liberdade de iniciativa e o controle do estudante no ambiente computacional e o aprendizado são entendidos como construção pessoal do conhecimento.

Este trabalho foi inspirado pela abordagem construcionista, mas também contou com momentos de instrução, chamados de intervenções de ensino.

Nesse sentido, o objetivo foi encorajar aprendizes a tomar a iniciativa e o aprendizado entendido, não como mera aquisição de conhecimento, mas como uma evolução à *expertise*, nos quais componentes, como: planejamento, descrição, execução e reflexão são partes do ciclo interativo do aprender (VALENTE, 1993).

Assim, na aplicação das atividades com planilhas eletrônicas ao grupo construcionista foram destinadas atividades para familiarização com o software e momentos de instrução para auxiliar os alunos na apropriação de ferramentas básicas das propriedades operatórias e, assim, permitir o desenvolvimento das atividades. Na presente pesquisa, esses momentos de instrução foram considerados como importantes ao desenvolvimento do aluno e uma atitude necessária do professor para dar confiança a esse aluno.

### **5.3 Principais resultados**

Inicialmente, os resultados relevantes das atividades com planilhas eletrônicas, aplicadas ao grupo construcionista são apresentados.

Na primeira sessão, constituída por duas atividades, a primeira atividade destinou-se à familiarização dos aprendizes com a Interface do Excel e, também, com as operações aritméticas por meio de intervenções de ensino do professor-pesquisador. Na atividade 1, já foi possível detectar uma grande dificuldade dos aprendizes com as operações aritméticas e suas propriedades.

A Atividade 2 solicitava dos aprendizes, o cálculo do juro e do montante de um empréstimo em um único período. O conjunto desses dois cálculos denominou-se, nesta pesquisa de “operação financeira básica”. A expectativa era que, se os aprendizes se apropriassem dos conceitos de juro e montante e das

fórmulas matemáticas desses cálculos, eles pudessem ter um ganho em sua aprendizagem. Assim, o grupo construcionista, caracterizado por alunos que não cursaram a disciplina de Matemática Financeira, com poucas instruções do professor conseguiu inserir nas células das planilhas, as operações aritméticas dos cálculos do juro e do montante. Entretanto, os aprendizes não conseguiram se expressar, quando solicitados a escrever em ambiente de papel e lápis, fórmulas para esses cálculos.

Na segunda sessão, nas Atividades 3 e 4, explorou-se com os aprendizes as noções de seqüências numéricas, em particular, a Progressão Aritmética e a Progressão Geométrica. Com o objetivo de aproveitar os poderosos recursos de visualização das planilhas na construção das seqüências e a possibilidade de formalização e generalização usando o recurso do endereço das células. Acredita-se que foi muito importante aos alunos esta fase introdutória de seqüências, que vieram acompanhadas de intervenções de ensino, pois, muitos desses alunos não haviam estudado tais conteúdos no ensino médio. Estas intervenções, também, propiciaram uma familiarização com recursos de cálculo do Excel, assim, eles não demonstraram receio no uso do computador e puderam concentrar-se no conceito matemático. Nas duas atividades de Progressões, a construção das seqüências, usando as células da planilha foi executada com facilidade e, eventualmente, com pequena intervenção do professor, as dificuldades residiram na formalização, na obtenção da lei de formação. Com nosso acompanhamento e aproveitando o *layout* previamente preparado da atividade, os aprendizes experimentaram os recursos de simulação e, por tentativas, construíram fórmulas que podiam ser testadas para a ordem de determinado termo e, assim, conferir seu valor na seqüência anteriormente construída por eles. Enfim, nenhuma das duplas conseguiu chegar sozinha à fórmula correta; no entanto, julga-se, como mais importante para o processo de apropriação de conceitos, o envolvimento e engajamento dos aprendizes. Estes ganhos poderão beneficiar a construção de novos conhecimentos.

Ainda na segunda sessão, as Atividades 5, 6 solicitavam o cálculo dos juros e montante, estes cálculos, em geral, não representou dificuldade aos aprendizes. As dificuldades ficaram, mais uma vez, na construção da fórmula.

Como foi relatado nesta análise, os aprendizes chegaram à construção das fórmulas com os momentos de instrução do professor nas chamadas intervenções de ensino.

Desta forma, foi possível observar as dificuldades com as propriedades aritméticas, em especial, da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à sua aplicação na transformação da soma em produto.

Assim, nossos aprendizes apresentavam suas fórmulas de montante na forma de soma e esta forma era a única conhecida por eles, inclusive, por ser este o procedimento usado nas planilhas das atividades anteriores.

As duas últimas atividades desta sessão, 7 e 8, além dos cálculos dos juros e montante em juros simples exigiam a montagem de equações e a resolução do sistema de equações. A atividade, também, solicitava a tentativa de resolução em papel e lápis. As duplas demonstravam certa familiaridade ao registrar nas células da planilha os cálculos do juro e montante. No ambiente de papel e lápis, não conseguiram montar as equações e, assim, preferiram as planilhas e o recurso da simulação.

A terceira e última sessão, envolvendo atividades com juros compostos, iniciou com a Atividade 9 de cálculo do montante, com taxas de juros variáveis. Com taxas variáveis, os aprendizes tiveram de fazer os cálculos mês a mês e com relativa facilidade, depois das instruções do professor para a apropriação do conceito de juros compostos, chegaram ao resultado. Na Atividade 10, também, com taxas variáveis, tiveram dificuldades com o *layout* da planilha, embora as atividades solicitassem exatamente os mesmos cálculos. Assim, tivemos de refletir sobre as dificuldades dos aprendizes de interpretação e descrição do texto e a execução na planilha.

As Atividades 11 e 12 envolveram os aprendizes na construção da fórmula do montante dos juros compostos, com taxas de juros constantes. Nos cálculos dos juros, mês a mês e atualização do saldo mês a mês, os aprendizes confirmaram nossas expectativas e executaram com facilidade. Entretanto, para a construção da fórmula montante, enfrentaram grandes dificuldades nas estruturas

algébricas e não conseguiram expressar nenhuma estratégia de resolução, daí, então, a resolução só foi conseguida com uma nova intervenção de ensino. A dificuldade das duas duplas com as estruturas algébricas ficou bem evidenciada na Atividade 12.

A Atividade 13, última atividade com planilhas tinha o desafio, também, da montagem de equações com o cálculo dos juros e montante em juros compostos e a resolução de sistemas. As duplas preferiram, mais uma vez, a resolução por simulação e tiveram dificuldades algébricas na montagem das equações no ambiente de papel e lápis.

Em geral, as atividades envolvendo a montagem de equações ou relações matemáticas ofereceram grandes dificuldades aos aprendizes, revelando a falta do domínio algébrico e, muitas vezes, dificuldade com a sintaxe do enunciado.

Mais uma vez, deve-se destacar que as duplas Gisele/Natália e Patrícia/Fábio não tiveram o conteúdo de Matemática Financeira durante o ensino médio nem no curso superior. Assim, o primeiro contato com a disciplina foi durante, as atividades com planilhas eletrônicas.

Desta forma, dentro da nossa proposta de ensino-aprendizagem construcionista, usando ferramentas computacionais, entendeu-se que a análise dos resultados não pode ser feita, exclusivamente pelas respostas objetivas ou resultados numéricos das atividades. Acredita-se que os ganhos de aprendizagem com os processos de tentativas e simulação que podem ser incentivados e mediados pelo professor nem sempre são mensuráveis a curto prazo.

Nas atividades de papel e lápis formadas por seis questões de Matemática Financeira, os desempenhos foram semelhantes, os dois grupos, construcionistas e instrucionistas, tiveram facilidade na resolução das questões de simples aplicação de fórmula e dificuldades nas questões que envolviam a montagem de um sistema de equações.

Em linhas gerais, considera-se fundamental para aprendizes a oportunidade da experiência do ensino de Matemática Financeira com

ferramentas computacionais, em particular, com planilhas eletrônicas e, também, a convivência simultânea com o ambiente de papel e lápis.

#### 5.4 Questões de pesquisa

Considerando que este trabalho está inserido em uma problemática ampla da Educação Matemática. Nosso objetivo foi colaborar no entendimento e elucidação dessas questões:

1. Qual o impacto da abordagem construcionista de ensino na concepção dos aprendizes em relação aos conceitos da Matemática Financeira?

Com o propósito de colaborar para algumas possíveis respostas às questões de pesquisa, restringiu-se o conteúdo de Matemática Financeira das atividades. Assim, procurou-se explorar, preferencialmente, as operações de multiplicação e adição, envolvidas nas fórmulas dos juros e do montante. Esta decisão foi, também, em razão de tempo disponível para o experimento e do perfil dos sujeitos desta pesquisa.

Na elaboração das atividades em planilhas eletrônicas, nossa intenção foi permitir aos aprendizes a passagem por etapas, em um processo de construção passo a passo, do conceito de capitalização da Matemática Financeira. O conceito de capitalização, que é o cálculo do juro gerado por um capital somado a esse capital, é a essência do cálculo financeiro. Assim, procurou-se explorar nas atividades, procedimentos que pudessem permitir aos aprendizes a apropriação desse conceito dentro de uma abordagem que se aproximasse do construcionismo.

Entretanto, na aplicação das atividades e após as nossas intervenções de ensino previstas neste experimento, em geral, os aprendizes efetuavam os cálculos na planilha, mas nem sempre o conceito era compreendido.

Procurou-se, então, buscar respostas para essas dificuldades e, também, às questões de pesquisa.

Na elaboração das atividades, foram utilizados contextos do cotidiano, como empréstimos e aplicações financeiras (considerou-se que os aprendizes são alunos de cursos de Administração) e, em algumas atividades iniciais, os *layouts* das planilhas auxiliavam os cálculos dos juros e montante. Em outras atividades, como, por exemplo, nas Atividades 9 e 10 os *layouts* das planilhas eram diferentes e isso, em geral, confundiu os aprendizes.

Como nosso experimento de ensino envolveu, apenas, duas duplas e três sessões de ensino, não foi possível obter respostas absolutas para as questões de pesquisa. No entanto, o impacto da abordagem construcionista de ensino na concepção dos aprendizes em relação aos conceitos de Matemática Financeira, parece que, foi sentido e vivido na aplicação das atividades com planilhas. A presença desse impacto, talvez, esteja na participação e envolvimento dos aprendizes nas tarefas de leitura das atividades (descrição), na implementação de fórmulas (execução), na conferência e comparação dos resultados (depuração).

Em que medida este impacto acontece, embora não seja possível responder, pudemos perceber os seus efeitos em manifestações de satisfação e sensação de liberdade e satisfação, especialmente, quando experimentaram as situações de simulação dentro do ambiente de planilhas.

Concluimos que este experimento de ensino-aprendizagem de um conteúdo de Matemática Financeira usando planilhas eletrônicas com a mediação do professor em intervenções, procurando dar a liberdade para realizarem suas descobertas e aprofundarem seus conhecimentos, muito contribuiu para que os alunos se sentissem donos do que estavam construindo.

|                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. Em que medida a utilização de planilhas eletrônicas como ferramenta ensino de conteúdos da Matemática Financeira contribui para a aprendizagem do aluno? |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Em relação à questão 2, conforme relatado no Capítulo 2, o uso de planilhas tem sido investigado por vários autores que em seus estudos relatam a aprendizagem nos estágios elementares e geralmente, dão às planilhas um papel positivo nesta aprendizagem, enfatizam a condição ambígua ou híbrida (aritmético-algébrica) das planilhas (HASPEKIAN, 2005).

Segundo Wood & D'Souza (2001) as planilhas eletrônicas têm potencial enorme para auxílio na aprendizagem de conceitos algébricos. Elas podem ser de grande benefício em todos os níveis. As planilhas permitem aos estudantes concentrar seu raciocínio, sobre o sujeito matemático a mão ao invés do software.

Em nosso experimento de ensino com as planilhas eletrônicas, a nossa análise concentrou-se, não só nos resultados objetivos das atividades realizadas pelos aprendizes, mas, também, nos diálogos acompanhados e audiogravados por nós. Assim, as sensações de domínio e comando do software demonstradas por eles, quando da construção da fórmula, possibilitou a estratégia de resolução por tentativas e o envolvimento dos aprendizes pareceu indicar algumas apropriações dos conceitos de Matemática Financeira.

Ao que tudo indica, os resultados confirmam a condição ambígua ou híbrida (aritmético-algébrica) das planilhas enfatizadas por vários autores.

Desta forma, acreditamos que a utilização das planilhas eletrônicas pode contribuir para a aprendizagem e favorece a formação de conceitos de Matemática Financeira.

## 5.5 Implicações e futuras pesquisas

Experimentos de ensino de ensino-aprendizagem com novas tecnologias e em particular, com ferramentas computacionais são atualmente objetos de pesquisa em muitos países, e certamente serão nas próximas décadas. Acreditamos que entre as razões para essas pesquisas estão a integração natural das tecnologias aos ambientes de ensino e a necessidade do conhecimento da melhor estratégia de uso em cada etapa da vida escolar. Acreditamos que esses estudos e pesquisas poderão ajudar entidades educacionais, professores no planejamento de atividades educacionais para alunos que estão sofrendo os impactos e fascínio por novas tecnologias.

O nosso trabalho não se encerra aqui, pretendemos continuar nosso trabalho de campo ministrando aulas de Matemática Financeira nos cursos superiores e aplicando em nossas aulas atividades sob a ótica construcionista com o uso de planilhas eletrônicas.

Sugerimos que experimentos de ensino aprendizagem de Matemática Financeira utilizando planilhas eletrônicas poderiam ser realizadas com às séries finais do ensino fundamental e ao ensino médio seguindo a abordagem construcionista.

Sugerimos, também, experimentos de ensino com duração maior que o nosso trabalho e com abrangência de maior conteúdo, pois, em experimentos de curta duração, nem sempre é possível colher dos aprendizes resultados que dependem de algum processo de aprendizagem com demanda de tempo maior.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

AINLEY, J. **Doing Algebra-Type Stuff**: Emergent algebra in the primary school. Proceedings of the 23<sup>rd</sup> Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol 2, p. 9-16, Haifa: Israel Institute of Technology. 1999.

ACCIOLI, Rosangela Mengai. **Robótica e as transformações geométricas**: um estudo com alunos do ensino fundamental. São Paulo: PUC-SP, 2005.

ARZARELLO, F., BAZZINI, L. & CHIAPPINI, G. **The process of naming in algebraic thinking**. Proceedings of 18<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol.2 p. 40-4, Lisbon: University of Lisbon, 1994

BAKER, J.E. & SUDGEN, S.J. **Spreadsheets in Education – The First 25 Years**. July 24, 2003, Bond University, 2003.

BARANAUSKAS, M.C.C. & OLIVEIRA, O. L. Domain-oriented modelling: a balance between simulation and programming. In J.D. Tinsley and T.J. Van Weert (eds) **World Conference on Computers in Education**. Chapman & Hall, 1995, p. 119-126.

BEARE, R. **How spreadsheets can aid a variety of mathematical learning activities from primary to tertiary level**. Technology in Mathematics Teaching: A Bridge Between Teaching and Learning. B. Jaworski. Birmingham, U.K.: p.117-124, 1993.

BELLO, V.R. **Possibilidades de construção do conhecimento em um ambiente telemático**: análise de uma experiência de matemática em E A D. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC-SP, 2004.

BORBA, MARCELO DE CARVALHO & PENTEADO, MIRIAM GODOY. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

CAPPONI, B. **Le Tableur pour le collage, un outil pour l'enseignement des mathématiques**. Petit x 52, p.5-42, 1999.

\_\_\_\_\_. **Tableur, arithmétique et algèbre**. L'algèbre au lycée et au collage, Actes des journées de formation de formateurs, p. 58-66, Boisseron: IREM de Montpellier, 2000.

COBB, P; CONFREY, J; DISESSA, A; LEHRER, R. & SCHAUBLE, L. **Design Experiments in Educational Research** . V. 32, 2003.

CUMMING, G. & SELF, J. **Intelligent educational systems**: identifying and decoupling the conversational levels. Instructional Science 19: 1990, p.11-27.

DESIGN BASED RESEARCH COLLECTIVE. **Design-Based Research: An Emergent Paradigm for Educational Inquiry**. V. 32, 2003.

DETTORI, G., GARUTI, R., LEMUT, E. & NETCHITAILOVA, I. An Analysis of the relationship between spreadsheet and algebra. In L. Burton and B. Jaworski (Eds). **Technology in Mathematics Teaching – a Bridge Between Teaching and Learning**, p. 261-274, Bromley: Chartwell-Bratt, 1995.

DRISOSTES, C.A.T. **“Design iterativo de um micromundo com professores de matemática do Ensino Fundamental”** Dissertação de Mestrado. São Paulo. PUC-SP (2005).

DRUCKER, P.F. **Post-Capitalism Society**. New York: Harper Collin. 1993. Traduzido para o Português como Sociedade Pós-Capitalista. São Paulo: Pioneira.

EVES, Howard. **Uma Introdução à Historia da Matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004. 844p.

FECAP/Portal Novo (2007). **Escola de Comércio Álvares Penteado** - [http://www.fecap.br/PortalNovo/interna.asp?Caminho=Fecap\\_Nossa\\_historia&left=sobre](http://www.fecap.br/PortalNovo/interna.asp?Caminho=Fecap_Nossa_historia&left=sobre). Acesso em: 5 jul 2007.

GONÇALVES, Jean Píton. (2007) **A História da Matemática Comercial e Financeira**. <http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php>. Acesso em: 20 mai 2007.

HARGREAVES, A. **Professorado, Cultura y Postmodernidad**. Madrid: Morata. (1995).

HASPEKIAN, Marian. **An “instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets**. International Journal of Computers for Mathematical Learning, Springer 2005.

HAZZAN, Samuel. & POMPEO, José Nicolau. **Matemática Financeira**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

HEALY, L. & SUTHERLAND, R. **The use of spreadsheets within the mathematics classroom**. Institute of Education, University of London, England, vol. 21, nº 6, p. 847-862. 1990.

HEALY, L. (S). **Iterative design and analysis of learning systems for reflection in two dimensions**. Tese de Doutorado: University of London. 2002.

HOYLES, C. Microworlds/Schoolworlds: The Transformation of an Innovation. In: KEITEL, C. & RUTHVEN K. (eds) **Learning from Computers: Mathematics Education and Technology**. NATO ASI, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 121, Springer – Verlag, 1993. p.1-17.

KAPUT, J.J. Technology and Mathematics Education. In: GROWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning** – A Project of the National Council of Teacher of Mathematics. New York: Simon & Schuster Macmilam, 1992, p.515-555.

KARRER, Mônica. **Logaritmos**: Proposta de uma sequência de ensino usando calculadora. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 1999.

KELLY, A.E. & LESH, R.A. **Research Design in Mathematics and Science Education**. London: LEA, 2000, p.192-195.

LAPPONI, Juan Carlos. **Modelagem Financeira com EXCEL**. 4.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2003.

MAZZONE, J.S. O sistema enxuto e a Educação no Brasil. In J. <sup>a</sup> Valente (org.) **Computadores e Conhecimento**: repensando a educação. Campinas: NIED-UNICAMP, 1993, p. 274-312.

\_\_\_\_\_. **2012: Educação na sociedade enxuta**. Campinas: NIED Memo 33, 1995.

MATTOS, ANTONIO CARLOS M. – **O Modelo Matemático dos Juros**. Uma Abordagem Sistêmica. Petrópolis: Ed Vozes.

MEC – **Ministério da Educação e Cultura**, (2006), <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES0776.pdf>. Acesso em: 26 ago 2006.

NAISBITT, J & ABURDENE. P. **Megatrends 2000**. New York: Avon Books, 1990.

NASCIMENTO P.L. **A formação do aluno e a visão do professor do ensino médio em relação à Matemática Financeira**. Dissertação de Mestrado. São Paulo. PUC-SP, 2004.

NOSS, R., HOYLES, C. **Windows on Mathematical Meanings**: Learning Culture and Computers. Dordrecht: Kluwer, 1996.

NOSS, R., HEALY, L. & HOYLES, C. **The Construction of Mathematical Meanings**: Connecting the Visual with Symbolic. Educational Studies in Mathematics. Special Edition, 33,2, 1997.p. 203-233.

PAPERT, S **Mindstorms**: Children, Computers and Powerful Ideas. Basic Books, New York. Trad. como Logo: Computadores e Educação, São Paulo: Editora Brasiliense, 1980

\_\_\_\_\_. **Logo**: computadores e educação. Trad. José Armando Valente, Beatriz Bitelman. Afira v. Ripper, São Paulo: Brasiliense, 1985.

\_\_\_\_\_. **Constructionism**: A new Opportunity for Elementary Science Education. A proposal to the National Science Foundation, Massachusetts Institute of Technology, Media Laboratory, Epistemology and Learning Group, Cambridge, Massachusetts: 1986.

\_\_\_\_\_. **A máquina das crianças**: Repensando a escola na Era da Informática. Trad. Costa, S. Porto Alegre: Artes Gráficas, 1994.

PIAGET, J. **A Tomada de Consciência**. São Paulo: Edições Melhoramentos e Editora da Universidade São Paulo, 1977.

PIMENTA, SELMA G. & ANASTASIOU, LÉA G.C. **Docência no ensino superior**. São Paulo: Cortez Editora, 2002.

ROJANO, T. Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheets environment. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds), **Approaches to Algebra**, p.137-145, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

\_\_\_\_\_. **Algebraic reasoning with spreadsheets. International Seminar on 'Reasoning, explanation and proof in school mathematics and their place in the intended curriculum'**. Cambridge, England: 2001.

ROJANO, T. & SUTHERLAND, R. **Pupils' strategies and the Cartesian method for solving problems: the role of spreadsheets**. Proceedings of the 21<sup>st</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Educational, vol.4, p.72-79, Lathi: University of Helsinki, 1997.

ROBERT, JOZSEF. **A Origem do Dinheiro**, Global Editora – 1982

RODNEY, Carlos Bassanezi. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

SANTOS, G. H. R. **Sistemas Hipermídia para o Ensino**: Estendendo as Facilidades para o Tutor e o Estudante. Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, USP, São Carlos: 1997.

SHINODA, Carlos. **Matemática Financeira para usuários do Excel**. 2.ed. São Paulo: Atlas, 1998.

STEFFE, L.P. & THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: Underlyng principles and essential elements. In R. Lesh & A.E. Kelly (Eds), n R. Lesh & A.E. Kelly (Eds), **Research design in mathematics and science education**, p. 267-307, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000.

TOFFLER, A. **Power Shift**: Knowledge, wealth and violence at the edge of the 21<sup>st</sup> century. (1990). New York: Bantam Books. Traduzido para o Português como Powershift: as mudanças do poder, Editora Record.

VALENTE, J.A. Por quê o computador na Educação?, **In:** VALENTE, J.A. (Org.) **Computadores e Conhecimento:** Repensando a Educação. Campinas: Gráfica da UNICAMP, 1993, p.24-44.

\_\_\_\_\_. **Computadores na Sociedade do Conhecimento.** Campinas: Nied/Unicamp. 1999.

VYGOTSKY, L.S. **A Formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1984.

WEIR, S. **Cultivating Minds:** A Logo Casebook. New York: Harper & Row, 1987.

WOOD, L.N. & D'SOUZA, S.M. **Investigating The Effects of Using Spreadsheets in a Collaborative Learning Environment.** The Sixth Asian Technology Conference in Mathematics and Science, RMIT University, Melbourne, Australia: 2001.

## ANEXOS DAS RESOLUÇÕES EM PAPEL E LÁPIS

## Questões resolvidas pelo aluno João Paulo

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$\begin{array}{rcl} \text{R\$ } 70,00 & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & \begin{array}{c} 70\% \\ 100\% \end{array} \\ X & & \end{array}$$

$$70X = 100,70$$

$$X = \frac{100,70}{70}$$

$$X = 1,43857$$

OU

$$R: \text{R\$ } 100,00$$

OBS: Professor R\$ 100,00 se o parâmetro for o preço de venda. Se o parâmetro for o preço de custo, o que não é usado no mercado, seria 30% de R\$ 70,00, o que daria R\$ 91,00.

$$X = 70 \cdot \frac{30}{100}$$

$$X = 21$$

$$\text{PREÇO} = 70 + 21$$

$$\text{PREÇO} = 91, \rightarrow \text{NÃO USADO NO MERCADO.}$$

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

$$\begin{array}{rcl} \text{R\$ } 60,00 & \text{---} & 75\% \\ X & \text{---} & 100\% \end{array}$$

$$75X = 60 \cdot 100$$

$$X = \frac{6000}{75}$$

$$X = 80,00$$

R: O preço de venda deve ser R\$ 80,00.

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$\text{Primeiro desconto} \left\{ \begin{array}{l} \text{R\$ } 40,00 - (40,00 \times 0,10) = 36,00 \end{array} \right.$$

$$\text{SEGUNDO DESCONTO} \rightarrow \text{O VALOR DO DESCONTO} = 36 - 28,80 = 7,20$$

$$\text{A PORCENTAGEM} \rightarrow \begin{array}{rcl} 36 & \text{---} & 100\% \\ 7,20 & \text{---} & X \end{array}$$

$$36X = 7,20 \cdot 100$$

$$X = \frac{720}{36}$$

$$X = 20\%$$

R: O valor do 2º desconto é 20%.

ALUNO: João Paulo

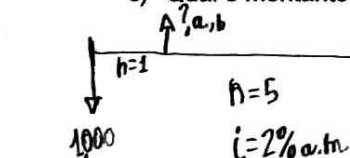
**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês? R\$ 20,00

b) Qual o montante ao final do primeiro mês? R\$ 1.020,00

c) Qual o montante ao final do quinto mês?

R\$ 1.104,08



a)  $M = 1.000 \times (1,02)^1$

$M = 1.020$  (B)

$J = M - C$

$J = 1.020 - 1.000$

$J = 20,00$  (a)

c)  $M = 1.000 \cdot (1,02)^5$

$M = 1.104,08$

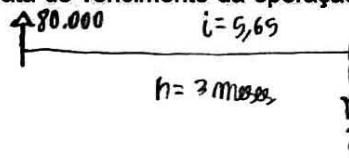
**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)

$C = 80.000$

$i = 5,65\% \text{ a.m.}$

$h = 90 \text{ dias} = 3 \text{ meses}$

$M = ?$



$M = 80.000 \cdot (1,0565)^3$

$M = 94.340,57$

Resposta: O montante a ser desembolsado será R\$ 94.340,57.

ALUNO: João Paulo

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

$M_{\text{total}} = 6.000$   
 $C_A = 6.000 - C_B$   
 $n = 6 \text{ meses}$   
 $i = 2\%$   
 $M_A =$

$M_A = M_B$   
 $1,1262$   
 $12,62\%$   
 $3.267,67$   
 $C_A \cdot 12,62\% = C_B \cdot 9,34\%$

$C_B = 6.000 - C_A$   
 $n = 6 \text{ meses}$   
 $i = 1,5\%$   
 $M_B =$

$M_A = M_B$   
 $1,0934$   
 $9,34\%$

$C_A \cdot 12,62\% = (6.000 - C_A) \cdot 9,34\%$   
 $0,1262 C_A = 560,40 - 0,0934 C_A$   
 $0,2196 C_A = 560,40$   
 $C_A = 2.551,9126$   
 $M = 3.044,2310$

$C_A \cdot (1,02)^6 = C_B \cdot (1,015)^6$   
 $C_A \cdot 1,1262 = 1,0934 \cdot C_B$   
 $C_A \cdot (1,02)^6 = (6.000 - C_A) \cdot (1,015)^6$   
 $1,1262 \cdot C_A + 1,0934 C_A = 6.000$   
 $2,2196 C_A = 6.000$   
 $C_A = 2.703,49$   
 $C_B = 3.044,33$   
 $C_A = 2.955,67$   
 $M = 3.328,57$

### Questões resolvidas pela aluna Claudete

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$\begin{array}{l}
 70 \times \frac{30}{100} \\
 70 \times 0,30 = 21,00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C = 70,00 \\
 L = 30\% \\
 \boxed{J = 21,00}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 M = C + J \\
 M = 70,00 + 21,00 \\
 \boxed{M = 91,00}
 \end{array}$$

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

$$\begin{array}{l}
 C = 60,00 \\
 L = 25,00 \\
 \boxed{V = 85,00}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 60 \times \frac{25}{100} \\
 60 \times 0,25 = 15,00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 M = C + J \\
 M = 60,00 + 15,00 \\
 \boxed{M = 75,00}
 \end{array}$$

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$\begin{array}{l}
 \text{Montante} = 40,00 \\
 \text{Desconto} = 4,00 \\
 \text{Montante} = 36,00 \\
 \text{Desconto} = 7,20 \\
 \text{Total Montante} = 28,80
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{HP12C} \\
 \langle 36 \rangle \langle PV \rangle \\
 \langle 28,80 \rangle \langle CHS \rangle \langle FV \rangle \\
 \langle 1 \rangle \langle n \rangle \\
 \boxed{\langle i \rangle = 20\%}
 \end{array}$$

O segundo desconto foi de 20%.

ALUNA: Claudete

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês? É de R\$ 20,00.  
 b) Qual o montante ao final do primeiro mês? É de R\$ 1020,00.  
 c) Qual o montante ao final do quinto mês? É de R\$ 1.104,08.

$$\begin{aligned} a) \quad JF &= JP \cdot (1+i)^n \\ JF &= 1000 \cdot (1+0,02)^1 \\ JF &= 1000 \cdot 1,02 \\ JF &= 1020,00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad M &= C \cdot (1+i)^n \\ M &= 1000 \cdot (1+0,02)^5 \\ M &= 1000 \cdot 1,10 \\ M &= 1.104,08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &HP12C \\ &\langle 1000 \rangle \langle PV \rangle \\ &\langle 5 \rangle \langle n \rangle \\ &\langle 2 \rangle \langle i \rangle \\ &\langle FV \rangle = 1.104,08 \end{aligned}$$

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)

$$\begin{aligned} M &= 80.000 \cdot (1+i)^n \\ M &= 80.000 \cdot (1+0,0565)^3 \\ M &= 80.000 \cdot 1,1793 \\ M &= 94.340,57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &HP12C \\ &\langle 80000 \rangle \langle PV \rangle \\ &\langle 3 \rangle \langle n \rangle \\ &\langle 5,65 \rangle \langle i \rangle \\ &\langle FV \rangle = 94.340,57 \end{aligned}$$

Aluna: Claudete

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

$$M = 3044,23(1,015)^6$$

$$M = 3044,23 \cdot 1,093$$

$$M = 3322,69$$

$$M = 2955,77(1,02)^6$$

$$M = 2955,77 \cdot 1,126$$

$$M = 3322,62$$

3044,23

2955,77.

## Questões resolvidas pela aluna Patrícia

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$70 \times \frac{30}{100} = 21,00 + 70,00 = \boxed{91,00}$$

ou

$$VF = VP \cdot (1+i)^n$$

$$VF = 70,00 (1+0,30)^1$$

$$VF = 70,00 \times 1,30$$

$$VF = \boxed{91,00}$$

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

$$VF = VP \cdot (1+i)^n$$

$$VF = 60,00 (1+0,25)^1$$

$$VF = 60,00 \times 1,25$$

$$VF = \boxed{75,00}$$

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$1^a) \quad 40,00 \times \frac{10}{100} = 4,00 - 40,00 = 36,00$$

$$2^a) \quad \frac{28,80}{36,00} \times 100 = \boxed{80\% \text{ (2º desconto)}}$$

$$36,00 \times \frac{80}{100} = 28,80$$

ALUNA: Patrícia

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?  
 b) Qual o montante ao final do primeiro mês?  
 c) Qual o montante ao final do quinto mês?

b)

$$m = C \cdot (1+i)^n$$

$$m = 1000,00 \cdot (1+0,02)^1$$

$$m = 1000,00 \times 1,02$$

$$m = 1020,00$$

$$a) J = m - C$$

$$J = 1020,00 - 1000,00$$

$$J = 20,00$$

$$c) m = C \cdot (1+i)^n$$

$$m = 1000,00 \cdot (1+0,02)^5$$

$$m = 1000,00 \times 1,02$$

$$m = 1104,08$$

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)

$$C = 80000,00$$

$$n = 90 \text{ dias} = 3 \text{ meses}$$

$$i = 5,65\% \text{ a.m.} \times 100 = 0,0565$$

$$m = ?$$

$$m = C \cdot (1+i)^n$$

$$m = 80000 (1+0,0565)^3$$

$$m = 80000,00 \times 1,1793$$

$$m = 94340,57$$

ALUNA: Patrícia

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

A)  $C = ?$  $i = 2\% \text{ a.m.}$  $n = 6 \text{ meses}$ 

$$m \cdot (1 + 0,02)^6$$

$$m = 6000 \cdot (1 + 0,02)^6 + (1 + 0,015)^6$$

$$m = 6000 \cdot 1,13 \cdot 1,09$$

$$m = 7388,37 \div 2 = \boxed{3694,18}$$

B)

 $i = 1,5\% \text{ mês}$  $n = 6 \text{ meses}$  $0,015$ 

$$3378,48 - 1,5 = 3694,18$$

$$3280,33 - 2\% = 3694,18$$

$$3269,19$$

$$A) \quad C = \frac{m}{(1+i)^n}$$

$$C = \frac{3694,18}{1,13} = 3269,19$$

$$C = \frac{3694,18}{1,09}$$

### Questões resolvidas pela aluna Danielle

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$70 + \left( 70 \cdot \frac{30}{100} \right) = 70 + 21 = 91$$

R: R\$ 91,00

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

$$60 + \left( 60 \cdot \frac{25}{100} \right) = 60 + 15 = 75$$

R: R\$ 75,00

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$40 - \left( 40 \cdot \frac{10}{100} \right) = 40 - 4 = 36$$

$$36 - \left( 36 \cdot \frac{x}{100} \right) = 28,80$$

$$36 - 0,36x = 28,80$$

$$0,36x = 28,80 - 36$$

$$x = -\frac{7,20}{0,36} = -20\%$$

R: 20%

ALUNA: Danielle

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês? R\$ 20,00  
 b) Qual o montante ao final do primeiro mês? R\$ 1.020,00  
 c) Qual o montante ao final do quinto mês? R\$ 1.104,08

$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 1000(1+0,02)^1$$

$$M = 1000 \cdot 1,02 = 1,020$$

$$M = 1000(1+0,02)^5$$

$$M = 1000 \cdot 1,1040$$

$$M = 1.104,08$$

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)

$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 80.000(1+0,0565)^3$$

$$M = 80.000 \cdot 1,179257$$

$$M = 94.340,57 //$$

R: R\$ 94.340,57

ALUNA: Danielle

Questão 6. Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

$$C(1+0,02)^6 = C(1+0,015)^6$$

$$1,1261 C = 1,0934 C$$

Resposta:

$$\text{Banco A} = 2.955,77$$

$$\text{Banco B} = 3044,23$$

$$M_1 = C(1)$$

$$\frac{6000}{2} (1+0,02)^6 = \frac{x}{x} (1,015)^6 \quad m =$$

$$2620,31$$

$$\frac{6.756,97}{x} =$$

$$6000 - x(1+0,02)^6 = x(1+0,015)^6$$

$$6000 - x(1,1261) = 1,0934x$$

$$6.756,60 - 1,1261x = 1,0934x$$

$$6.756,60 = 1,0934x + 1,1261x$$

$$6.756,60 = 2,8195x$$

$$x = \frac{6.756,60}{2,8195} = 2.396,38 //$$

$$\begin{aligned} x(1+0,02)^6 &= 6000 - x(1+0,015)^6 \\ 1,1261x &= 1,0934(6000 - x) \\ 1,1261x &= 6560,659 - 1,0934x \\ 2,2195x &= 6560,659 \\ x &= 2.955,77 // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= 2.396,38 (1+0,02)^6 \\ M_2 &= 2.698,72 // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= 2.396,38 (1,015)^6 \\ M_2 &= 2.620,31 // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= 3.603,62 (1,015)^6 \\ M_2 &= 3044,23 (1,015)^6 \\ M_2 &= 3.328,69 // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= 31379,69 (1,02)^6 \\ M_2 &= 3.506,07 // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= 2.955,77 (1,02)^6 \\ M_2 &= 3.328,68 // \end{aligned}$$

### Questões resolvidas pelo aluno Paulo de Tarso

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$70 \times 1,30 = R\$ 91,00$$

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$40 \times 0,90 = 36$$

$$\frac{28,80}{36,00} = 0,80$$

$$0,80 - 1 = 0,20 \text{ ou } 20\%$$

ALUNO: Paulo de Tarso

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?  
 b) Qual o montante ao final do primeiro mês?  
 c) Qual o montante ao final do quinto mês?

$$a) M = C \times (1 + i)^n$$

$$M = 1000 \times (1,02)^1$$

$$M = 1020,00$$

$$M = J + C$$

$$1020 = J + 1000$$

$$J = 1020 - 1000$$

$$J = 20,00$$

$$b) M = 1020$$

$$c) M = C (1,02)^5$$

$$M = 1000 \times 1,1041$$

$$M = 1104,10$$

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)

$$M = C \times (1 + i)^n$$

$$M = 80000 \times (1,0565)^3$$

$$M = 80000 \times (1,1793)$$

$$M = 94340,5690$$

ALUNO: Paulo de Tarso

$$-3740,5141$$

$$2 = 57,7429\% = 3428,5740 = 3861,131$$

$$7,5 = 42,2571\% = 2535,4260 =$$

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

$$M = C_1 \cdot (1 + i)^n$$

$$C_1 \cdot (1 + 0,02)^6 = C_2 \cdot (1 + 0,015)^6$$

$$C_1 \cdot 1,1262 = C_2 \cdot 1,0934$$

$$C_1 = \frac{C_2 \cdot 1,0934}{1,1262}$$

$$100 - 12,62 = 87,38$$

$$1262 = C_2 \cdot 9,34$$

$$C_2 = 1351,18$$

$$1352$$

$$\frac{100 - 12,62}{90,66} C_2 = 10,66$$

$$463,82$$

$$12,62$$

$$1351,2949$$

$$1477,43$$

### Questões resolvidas pela aluna Priscila

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$\begin{array}{l} \text{HP12C} \quad 70 \boxed{\text{enter}} \\ \quad \quad 30 \boxed{\%} \boxed{+} \end{array}$$

$$\text{R\$ } 91,00$$

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

$$\begin{array}{l} \text{HP12C} \quad 60 \boxed{\text{enter}} \\ \quad \quad 25 \boxed{\%} \boxed{+} \end{array}$$

$$\text{R\$ } 75,00$$

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$\begin{array}{l} \text{HP12C} \quad 40 \boxed{\text{enter}} \\ \quad \quad 10 \boxed{\%} \boxed{-} \\ \quad \quad 28,80 \boxed{-} \end{array}$$

$$\text{R\$ } 7,20$$

ALUNA: Priscila

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês? 20,00  
 b) Qual o montante ao final do primeiro mês? R\$ 1.020,00  
 c) Qual o montante ao final do quinto mês? R\$ 1.104,08

$$A) J = m - C \quad 1020,00 - 1000,00 = 20,00$$

HP12C b) 1000 [CHS] [PV]  
 1 [n]  
 2 [i]  
 [FV] = 1020,00

HP12C c) 1000 [CHS] [PV]  
 5 [n]  
 2 [i]  
 [FV] = 1.104,08

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)

Período = 90 dias → 3 meses

PV = 80.000,00  
 i = 5,65% A.m

HP12C  
 80.000 [CHS] [PV]  
 3 [n]  
 5,65 [i]

[FV] = 94.340,57

ALUNA: Priscila

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

$$x(1+0,02)^6 = 6000 - x(1,015)^6$$

$$m = C(1+i)^n$$

$$C(1+0,02)^6 = C(1+0,15)^6$$

$$C(1,020000)^6 = C(1,150000)^6$$

$$C = 1,126162 = C 2,313061$$

**Questões resolvidas pela aluna Cristhiane**

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$70,00 + 30\% = \underline{\underline{91,00}}$$

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

$$60,00 + 25\% = \underline{\underline{75,00}}$$

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$40,00 \times 10\% = 4,00 \text{ 1º desconto } \Rightarrow \text{ conta ficou } 36,00$$

$$\text{2º desconto} = 28\%$$

ALUNA: Cristhiane

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?
- Qual o montante ao final do primeiro mês?
- Qual o montante ao final do quinto mês?

$$\begin{aligned}
 C &= 1000,00 \\
 i &= 2\% = \frac{2}{100} \Rightarrow 0,02 \\
 n &= 5 \\
 a) \quad M &= C \cdot (1+i)^n \\
 M &= 1000 \cdot (1+0,02)^1 \\
 M &= 1020,00 \\
 b) \quad M &= C \cdot (1+i)^n \\
 M &= 1000 \cdot (1+0,02)^2 \\
 M &= 1020,00 \\
 c) \quad M &= C \cdot (1+i)^n \\
 M &= 1000 \cdot (1+0,02)^5 \\
 M &= 1.104,81
 \end{aligned}$$

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)

$$\begin{array}{c}
 | \quad | \quad | \\
 1 \quad 2 \quad 3 \text{ meses} \Rightarrow 90 \text{ dias}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 90 \text{ dias} \Rightarrow 3 \text{ meses} \\
 i &= 5,65\% \Rightarrow \frac{5,65}{100} = 0,057 \text{ ao mês}
 \end{aligned}$$

$$C = 80.000$$

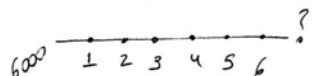
$$\begin{aligned}
 VF &= VP \cdot (1+i)^n \\
 VF &= 80.000 \cdot (1+0,057)^3 \\
 VF &= 94.474,57
 \end{aligned}$$

ALUNA: Cristhiane

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

Bco A

$$i = 2\% \Rightarrow 0,02 \text{ a.m.}$$

$$n = 6$$


Bco B

$$i = 1,5\% \Rightarrow 0,0150 \text{ a.m.}$$

$$n = 6$$

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = C \cdot (1 + 0,0150)^6$$

# Questões resolvidas pela aluna Danielle Maria

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$\begin{array}{r} 70 - 100 \\ x - 30 \end{array}$$

$$70 + 21 = 91$$

$$100x = 2100$$

$$x = 21$$

Devo vender o produto por R\$ 91,00.

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

$$100 - 60$$

$$25 - x$$

$$60 + 15 = 75,00$$

$$100x = 1500$$

$$x = 15$$

O preço de venda deve ser R\$ 75,00

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$40 - 100$$

$$x - 10$$

$$100x = 400$$

$$x = \frac{400}{100}$$

$$x = 4$$

$$40 - 4 = 36$$

$$36 - 100$$

$$28,80 - x$$

$$36x = 2880,00$$

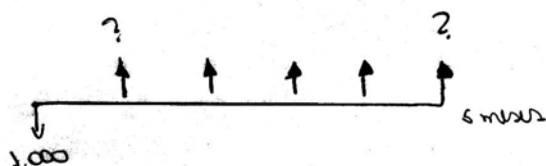
$$x = 80$$

O segundo desconto foi de 20%.

ALUNA: Danielle Maria

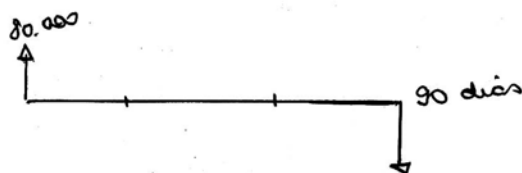
**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês? R\$ 20,00.
- Qual o montante ao final do primeiro mês? R\$ 1.020,00.
- Qual o montante ao final do quinto mês? R\$ 1.104,08.



taxa - 2% ao mês

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)



taxa - 5,65% ao mês

O valor a ser desembolsado é R\$ 94.340,57.

R\$ 94.340,57.

ALUNA: Danielle Maria

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

$$n = 6$$

$$C = ?$$

$$C \cdot (1+0,015)^6 = (6000 - C) \cdot (1+0,02)^6$$

$$C \cdot 1,109 = (6000 - C) \cdot 1,13$$

$$C \cdot 1,109 = 6780 - C \cdot 1,13$$

$$(C \cdot 1,109) + C \cdot 1,13 = 6780$$

$$C(2,22) = 6780$$

$$C = \frac{6780}{2,22}$$

$$C = 3.054,05$$

$$C_2 = 6000 - C$$

$$C_2 = 2945,95 //$$

# QUESTÕES RESOLVIDAS PELOS ALUNOS DO GRUPO CONSTRUCIONISTA

## Questões resolvidas pela dupla Patrícia/Fábio

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$70,00 \cdot 0,30 \rightarrow \$ 21,00$$

$$70,00 + 21,00 \rightarrow \underline{\underline{\$ 91,00}}$$

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

$$60,00 \cdot 0,25 \rightarrow \$ 15,00$$

$$60,00 + 15,00 \rightarrow \underline{\underline{\$ 75,00}}$$

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$40,00 \cdot 10\% \rightarrow \$ 36,00$$

$$36,00 - 20\% \rightarrow \underline{\underline{\$ 28,80}}$$

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?
- Qual o montante ao final do primeiro mês?
- Qual o montante ao final do quinto mês?

$$a) 1.000 \cdot 0,02 \rightarrow \underline{\underline{\$ 20,00}}$$

$$b) 1.000 + 20 \rightarrow \underline{\underline{\$ 1.020,00}}$$

$$c) \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1000 \cdot 0,02 \rightarrow 20,00 \\ 1020 \cdot 0,02 \rightarrow 20,40 \\ 1040,40 \cdot 0,02 \rightarrow 20,80 \\ 1061,20 \cdot 0,02 \rightarrow 21,22 \\ 1082,42 \cdot 0,02 \rightarrow 21,65 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.000 + 20 \rightarrow 1.020,00 \\ 1020 + 20,40 \rightarrow 1040,40 \\ 1040,40 + 20,80 \rightarrow 1061,20 \\ 1061,20 + 21,22 \rightarrow 1082,42 \\ 1082,42 + 21,65 \rightarrow \underline{\underline{\$ 1.104,07}} \end{array}$$

Dupla: Patrícia/Fábio

**QUESTÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA**

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)

$$80.000 \cdot 5,65\% \text{ a.m.} =$$

ou

$$80.000 \cdot (1 + 0,0565) =$$

$$80.000 \cdot 1,0565 =$$

$$94.340,57$$

1)  $4.520 + 80.000 \rightarrow 84.520,00$

2)  $4.775,38 + 84.520 \rightarrow 89.295,38$

3)  $5.045,19 + 89.295,38 \rightarrow 94.340,57$

$$\underline{\$ 94.340,57}$$

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

Banco A: R\$ 2.573,00

Juros A: R\$ 308,76

Banco B: R\$ 3.427,00

Juros B: R\$ 308,76

## Questões resolvidas pela dupla Gisele/Natália

**Questão 1.** Por quanto devo vender um objeto que me custou R\$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

$$70,00 + 30\% \rightarrow 21,00$$

$$70,00 + 21,00 = \underline{\underline{91,00}}$$

**Questão 2.** Um comerciante comprou uma mercadoria por R\$ 60,00. Desejando ganhar 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o preço de venda?

$$60,00 + 25\% = \underline{\underline{75,00}}$$

**Questão 3.** Sobre a conta de R\$ 40,00 de um restaurante obtive um desconto de 10% e, em seguida, outro que reduziu minha conta a um líquido de R\$ 28,80. Qual foi o segundo desconto?

$$40,00 - 10\% = 36,00 \text{ devido de R\$ } \underline{\underline{4,00}}$$

$$40,00 - 28,80 = 11,20 \text{ de desconto } 28\% \text{ de desc.}$$

**Questão 4.** Um investidor aplica R\$ 1.000,00 por 5 meses em um fundo de investimentos, que remunera a juros compostos, e à taxa de 2% ao mês, com capitalização mensal.

- a) Qual o rendimento (juros) ao final do primeiro mês?
- b) Qual o montante ao final do primeiro mês?
- c) Qual o montante ao final do quinto mês?

$$1000 - 5 \text{ meses } j.c. 2\%$$

$$a) 1000 \cdot 0,02 = \underline{\underline{20,00}}$$

$$b) 1000,00 + 20,00 = \underline{\underline{1020,00}}$$

$$c) \underline{\underline{1104,08}}$$

$$m = 1000 \cdot (1 + 0,02)^5$$

$$m = 1000 \cdot 1,10408$$

$$\underline{\underline{m = 1104,08}}$$

## DUPLA: Gisele/Natália

**Questão 5.** Suponhamos que uma empresa contrate um empréstimo de capital de giro no valor de R\$ 80.000,00 por 90 dias, à taxa de 5,65% ao mês. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa, na data de vencimento da operação? (no regime de juros compostos)

$$80.000,00 - \text{valor} \quad 5,65\% \text{ am.}$$

$$80.000 \cdot (1 + 0,0565)^3$$

$$\underline{94.340,57}$$

**Questão 6.** Gisele aplicou R\$ 6.000,00 a juros compostos, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo-se que os montantes resultantes foram iguais.

$$6.000,00 \quad \text{Bco A } 2\% \text{ am.} \quad / \quad \text{Bco B } 1,5\% \text{ a.m.}$$

6 meses       $m_A = m_B$

$$\text{Bco A} = 2.955,78 \quad \text{Bco B} = 3.044,22$$

$$CA + CB = 6000 \quad (CB = 6000 - CA)$$

$$CA \cdot (1 + 0,02)^6 = 6000 - CA \cdot (1 + 0,015)^6$$

$$CA \cdot 1,12616249 = 6000 - CA \cdot 1,093443264$$

$$CA \cdot 1,12616249 + CA \cdot 1,093443264 = 6000$$

$$CA + CA \cdot 1,093443264 = 5327,827938$$

$$2CA = 4.872,523462$$

$$CA = 2436,26$$

$$CB = 6000 - 2436,26$$

$$\underline{CB = 3563,74}$$