PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

GRÁCIA MARIA CATELLI ANACLETO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

GRÁCIA MARIA CATELLI ANACLETO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Professor Doutor Benedito Antonio da Silva**.*

SÃO PAULO
2007

BANCA EXAMINADORA

Dedico este trabalho a Deus, ao meu marido Rui e aos meus queridos filhos Grácia Helena e Douglas, Lúcia Helena e Joel, Ruy Cláudio e Fabiana.

Agradecimentos

Meus especiais agradecimentos,

Ao Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva pelos conselhos, ensinamentos e privilégio de ser sua orientanda.

Às Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori e Dra. Luzia Aparecida Palaro pelas contribuições feitas durante o Exame de Qualificação, fundamentais para o aprimoramento deste trabalho.

Aos alunos, que tão gentilmente participaram da pesquisa, respondendo aos questionários.

Aos Professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e a todos os meus colegas e amigos do curso, pela amizade e companheirismo durante esta caminhada.

A meu esposo e filhos, por compreenderem minha presença-ausência nestes últimos dois anos e meio, conseqüência da necessidade de muita dedicação e esforço para atingir este objetivo.

E a todos os que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho se tornasse realidade.

Á todos o meu carinho e reconhecimento.

A Autora

Resumo

Este estudo teve por objetivo investigar os conhecimentos mobilizados por alunos que já haviam estudado o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) relativamente aos conceitos de derivada e integral e sua interelação. O TFC, segundo Segadas (1998), é um dos tópicos mais importantes em qualquer curso de Cálculo. Pretendemos com o trabalho avaliar se a mobilização desses conceitos se deu de forma adequada na resolução de questões específicas em que a aplicação desses conceitos era necessária. A pesquisa fundamentou-se nos pressupostos teóricos da dialética ferramenta-objeto e jogos de quadros de Douady (1987). Teve como base a pesquisa realizada por Segadas (1998) sobre a compreensão do TFC pelos alunos ao final do curso de Cálculo. Foi aplicado um questionário-piloto a alunos do curso da Ciência da Computação de uma universidade particular da cidade de São Paulo. Percebemos nessa primeira investigação que alunos que participaram do estudo piloto não haviam recebido o conteúdo relativo ao TFC com a profundidade requerida pela nossa pesquisa. Reestruturamos o questionário e reaplicamos a um grupo alunos do curso de Licenciatura em Matemática desta mesma universidade, onde esta disciplina é ministrada com maior carga horária. Verificamos que a maioria dos alunos encontrou dificuldades para solucionar problemas em que a simples visualização de gráficos faria com que não necessitassem desenvolver longos algoritmos. Este resultado demonstra que os obstáculos dos estudantes para compreender o TFC estão relacionados com uma incompleta mobilização das noções de derivada, integral e continuidade, uma vez que utilizaram apenas parcialmente esses conhecimentos para a solução das questões apresentadas. Tal fato está provavelmente associado aos hábitos dos estudantes, que tendem a não focar atenção aos aspectos conceituais do teorema, apenas memorizando o algoritmo dos procedimentos sem refletir sobre a sua aplicabilidade. A fundamentação teórica mostrou-se uma ferramenta eficaz na análise dos protocolos que nos conduziram a essas conclusões.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo (TFC); Ferramenta Objeto; Jogo de Quadros.

Abstract

This study aims to investigate the knowledge mobilized by students who have already studied the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) regarding the concepts of differentiation and integration and its relationship. The FTC is one of the most important topic in any Calculus course according to Segadas (1998). The intention of the study is to evaluate if the mobilization of these concepts occurred in the proper manner for specific questions resolution where necessarily they have to be applied. The research was based on Douady's (1987) theoretical beliefs of the tool-object dialectic and change of frameworks. As support the study was carried through Segadas (1998) research on the understanding of the FTC by students at the end of the course of Calculus. A pilot-questionnaire was applied to students of a Computer Science course in a private University of São Paulo city. In this first inquiry we perceive the participant students had not received the FTC related content in the deep required for our research in this course. Thus we have decide restructure the questionnaire and apply it to a different group of students in the Mathematics Bachelors course where the FTC content was teach deeper due to greater teaching load in the same university. The research found the majority of the students have found difficulties to solve problems where the simple visualization of graphs would solve it without developing extensive algorithms. This findings shows the students' obstacles to understand the FTC are related to an incomplete mobilization of differentiation, integration and continuity concepts since to solve the given questions they have only partially used these knowledge. Such fact is probably associated the students habits who do not tend to focus their attention to the conceptual aspects of the theorem but only memorizing the procedures algorithm without reflecting on its applicability. The theoretical fundamentals used revealed an efficient tool in the analysis of the protocols who led us to these conclusions.

Key-Words: Fundamental Theorem of Calculus (FTC); Tool-Object, Frame Games.

Sumário

Lista de Tabelas e Quadros

Lista de Figuras

Capítulo 1

1 APRESENTAÇÃO

Não há passado, presente e futuro. Só há presente.
O presente do passado chama-se memória.
O presente do presente chama-se visão.
O presente do futuro chama-se espera.
(Santo Agostinho)

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) traduz a idéia central do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), e suas origens remontam aos trabalhos de Newton e Leibinz do final do século XVII. Em muitos manuais encontra-se a afirmação de que o CDI foi inventado por eles, mas esta afirmação pode ser considerada um pouco simplista.

Courant (2000) afirma que:

> "O Cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz, porém ambos desempenharam papel decisivo em sua construção. Havia na Europa do século XVII, em sua maior parte fora das escolas, um grupo de cientistas ativos que se empenhava em dar continuidade aos trabalhos já realizados por Galileu e Kepler. Por meio de correspondências e de viagens, esses homens mantinham entre si estreito contato". (Courant, citado por Hsia, 2006, p. 11).

Segundo o autor, dois problemas chamavam a atenção de Newton e Leibniz: a questão de determinar as retas tangentes a uma curva e o problema da quadratura, a saber, a questão de determinar a área da região delimitada por uma curva.

O grande mérito deles foi o fato de terem identificado a estreita relação entre estes dois problemas. Cada um utilizando métodos próprios conseguiu tratar de maneira unificada essas duas grandes questões, o que resultou no que hoje é conhecido por Teorema Fundamental do Cálculo.

O ensino de CDI tem sido bastante discutido em diversas pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática e uma das principais justificativas para tal discussão são as dificuldades de aprendizado e o elevado percentual de reprovações observado nessa disciplina. Vários trabalhos têm sido feitos procurando caracterizar as concepções que os alunos retêm quando estudam o TFC relativamente a conceitos básicos, tais como: função, continuidade, diferenciação e integração, além da inter-relação entre estes dois últimos conceitos.

Este trabalho tem por objetivo investigar os conhecimentos que são mobilizados pelos alunos, que cursaram anteriormente a disciplina CDI, quanto à inter-relação entre a diferenciação e a integração. E tem sua fundamentação nos pressupostos teóricos contidos na dialética ferramenta-objeto, no jogo de quadros de Douady (1987) e na pesquisa de Segadas (1998).

Ele se insere no contexto de um conjunto de pesquisas que estão sendo realizadas pelo Grupo de Pesquisa G2, intitulado “Matemática do Ensino Superior: Didática do Ensino do Cálculo“ que tem por finalidade; compreender os fenômenos ligados ao ensino/aprendizagem da Matemática, as relações entre os saberes científicos e escolares, e a constituição histórico-cultural da Matemática.

Há nesse Grupo, dois outros colegas que desenvolvem pesquisas referentes ao Teorema Fundamental do Cálculo. Uma aborda as representações de professores sobre o TFC, e a outra o tratamento dado ao TFC em livros didáticos.

O nosso interesse pelo tema do TFC nasceu em sintonia com os trabalhos do Grupo e a direção voltada para a investigação sobre os conhecimentos mobilizados por estudantes seria complementar aos dois outros trabalhos. A escolha do público alvo recaiu nos estudantes que já haviam estudado o Teorema Fundamental do Cálculo, em um curso regular de Cálculo.

O trabalho se constituiu na elaboração, aplicação e análise dos resultados de um questionário, preparado à luz do quadro teórico de Douady, voltado ao aprendizado do TFC. Inicialmente elaboramos um questionário piloto com quatro questões envolvendo cálculo de integral e interpretação do significado geométrico da noção de integral.

Num primeiro momento aplicamos o questionário-piloto a estudantes da disciplina CDI II do curso de Ciência da Computação, ministrado em uma instituição particular na cidade de São Paulo.

Ao aplicamos o questionário piloto, percebemos que os alunos não tinham recebido no referido curso, um conteúdo relativo ao TFC que desejávamos explorar em nossa pesquisa, em razão da menor carga horária prevista para esta disciplina neste curso[1].

Notamos, a partir da análise das resoluções das questões do questionário piloto que os alunos tiveram dificuldades em identificar as funções a partir dos gráficos de funções, e quais eram os papéis das variáveis na definição da função. Por isso decidimos reestruturar o questionário para sua aplicação definitiva, incluindo novas questões a iniciais explorando a relação entre a integral e a área da região plana sob o gráfico da função integranda, na tentativa de explorar tais dificuldades e dar subsídios para a comparação entre os gráficos, e incluir uma questão “aberta” para investigar como os alunos interpretam o enunciado do TFC, na criação de um exemplo de função que satisfaça as condições do Teorema.

O questionário reestruturado, incluindo as novas questões foi aplicado a estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da mesma instituição, que já tinham estudado os conteúdos relativos ao TFC. Nesse curso, o conteúdo da disciplina CDI é ministrado de forma mais aprofundada, em razão da maior carga horária prevista para a disciplina e pela natureza do curso.

O trabalho é apresentado em sete capítulos:

Neste primeiro capítulo estão apresentados o problema, os objetivos, o modo como se realizou a pesquisa.

[1] Ementa do curso no anexo 4

No capítulo dois apresentamos a problemática, relativa às dificuldades observadas no aprendizado do CDI e o elevado índice de repetência nessa disciplina, e o problema da pesquisa.

No capítulo três incluímos comentários sobre os aspectos históricos relativos ao desenvolvimento do TFC e as operações centrais do Teorema Fundamental do Cálculo.

No capítulo quatro fazemos explanações a respeito dos pressupostos teóricos contidos na dialética ferramenta-objeto, bem como no jogo de quadros de Douady.

No capítulo cinco registramos os procedimentos metodológicos, os sujeitos da pesquisa, o ambiente no qual o questionário definitivo foi aplicado, como o questionário-piloto foi elaborado, aplicado, e analisado, bem como os resultados obtidos dele.

No capítulo seis apresentamos o questionário da pesquisa propriamente dito, como foi elaborado e a análise dos resultados obtidos.

No capítulo sete são apresentadas as conclusões da pesquisa.

Capítulo 2

2 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do Cálculo seguiu um longo percurso iniciado cerca de três séculos antes de Cristo com os antigos gregos. O Cálculo atingiu importante estágio de desenvolvimento por volta da segunda metade do século XVII, quando derivada e integral foram relacionadas uma com a outra, associação esta que fica determinada pelo “Teorema Fundamental do Cálculo”.

As raízes do Cálculo vêm dos estudos e trabalhos do grego Eudoxo, apresentados em seu trabalho “Os Rudimentos da Exaustão” e tornaram-se muito mais efetivas com Arquimedes, que pelo "método mecânico" aperfeiçoou o método de exaustão de Eudoxo, na questão de quadratura.

No século XVII, os métodos e modelos utilizados nos trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Leibniz estabeleceram a estrutura unificada e organizada do Cálculo Diferencial e Integral.

Após o século XVII, com a algoritmização dos processos de derivação e integração, os matemáticos conseguiram se libertar do modelo geométrico e passar a usar formas algébricas. "Assim, do século XVII em diante, o modelo geométrico de curvas, tangente e quadratura foi gradualmente substituído pelo modelo analítico de função, derivada e integral" (BARON, 1985, p. 3, unidade 1).

As noções de Derivada e Integral são os conceitos principais contidos no Cálculo. “A Derivada está ligada à interpretação da inclinação de uma reta tangente ao gráfico de função e as taxas de variação” (LEITHOLD, 1994, p. 138) que têm aplicação na Física, por exemplo, a velocidade no movimento retilíneo é definida em termos de uma derivada. A Integral refere-se à soma de infinitésimos, e tem aplicação em estudos de áreas, volumes, comprimentos, cálculo de trabalho, de massa, etc.

Esses problemas, que podem se referir tanto a questões relativas à construção de tangentes a curvas como também a questões de quadraturas, aparecem, por exemplo, na Medicina, que emprega o cálculo infinitesimal para determinar taxa de crescimento de bactérias e avaliar tamanhos de nódulos; na Física, que o usa na solução de problemas relacionados aos fenômenos mensuráveis como os relacionados com calor, luz, som, gravitação, magnetismo, eletricidade etc.; e em outras ciências, como a Geometria, a Biologia, e a Engenharia.

Comentários mais aprofundados sobre os aspectos históricos relativos ao desenvolvimento do TFC e suas operações centrais são apresentados no capítulo 3.

2.1 As dificuldades no aprendizado do Cálculo

Muitas são as pesquisas existentes que tratam das dificuldades observadas na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, disciplina básica e obrigatória em diversos cursos de graduação por tratar de conceitos aplicáveis em muitos campos do saber.

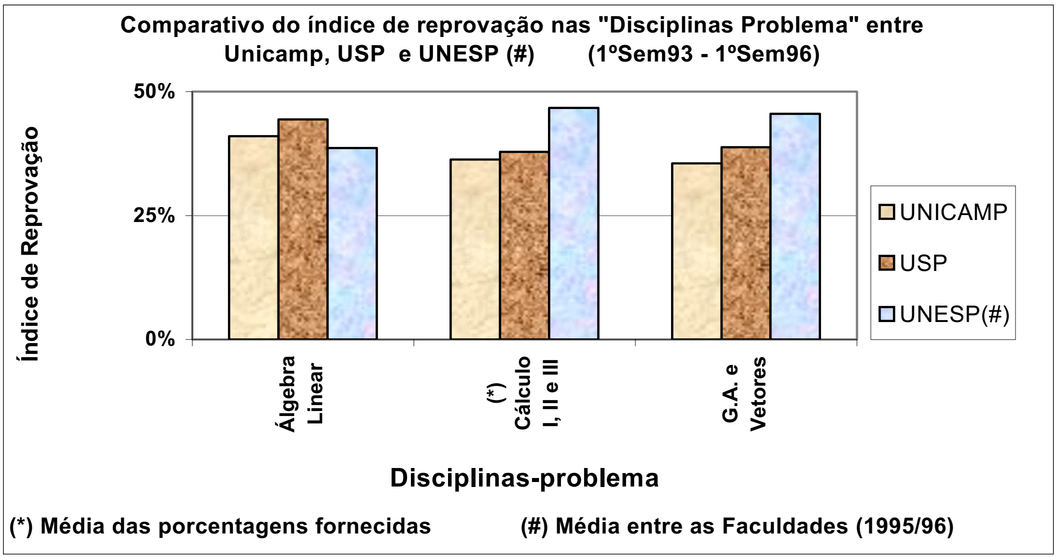
Essas pesquisas abordam o problema sob diversos ângulos, perspectivas e contextos e cada uma delas oferece sempre mais e mais elementos que permitem a ampliação da análise das dificuldades detectadas no aprendizado pelos alunos, as quais incorrem em altos índices de abandonos e repetências.

Celestino (2000, p. 12) relata que uma equipe da Universidade de Campinas (UNICAMP) realizou uma pesquisa com alunos entre o primeiro semestre de 1993 e o primeiro semestre de 1996 para identificar as “disciplinas-problema” e seus índices de reprovação em três universidades públicas (UNICAMP - Universidade de Campinas, USP – Universidade de São Paulo e UNESP – Universidade do Estado de São Paulo). Dentre as 15 “disciplinas-problema” identificadas destacaram-se Cálculo, Álgebra Linear e Geometria Analítica.

As figuras 1 e 2 apresentadas por ele e mostradas a seguir, reproduzem os resultados do desempenho dos alunos nessas disciplinas. O Cálculo aparece como o detentor de um dos maiores índices de reprovação em vários cursos na área de Ciências Exatas.

A Figura 1 retrata o índice médio de reprovação no período citado e é composta por três blocos: um para a disciplina Álgebra Linear, outro para Cálculo I, II e III e o último para Geometria Analítica e Vetores. Cada um desses blocos apresenta três colunas com as porcentagens relativas a cada uma das universidades pesquisadas. No bloco correspondente às disciplinas Cálculo I, II e III, os pesquisadores informam que os dados referem-se à média da porcentagem de reprovação, o que pode não dar uma idéia precisa do índice nos diferentes cursos.

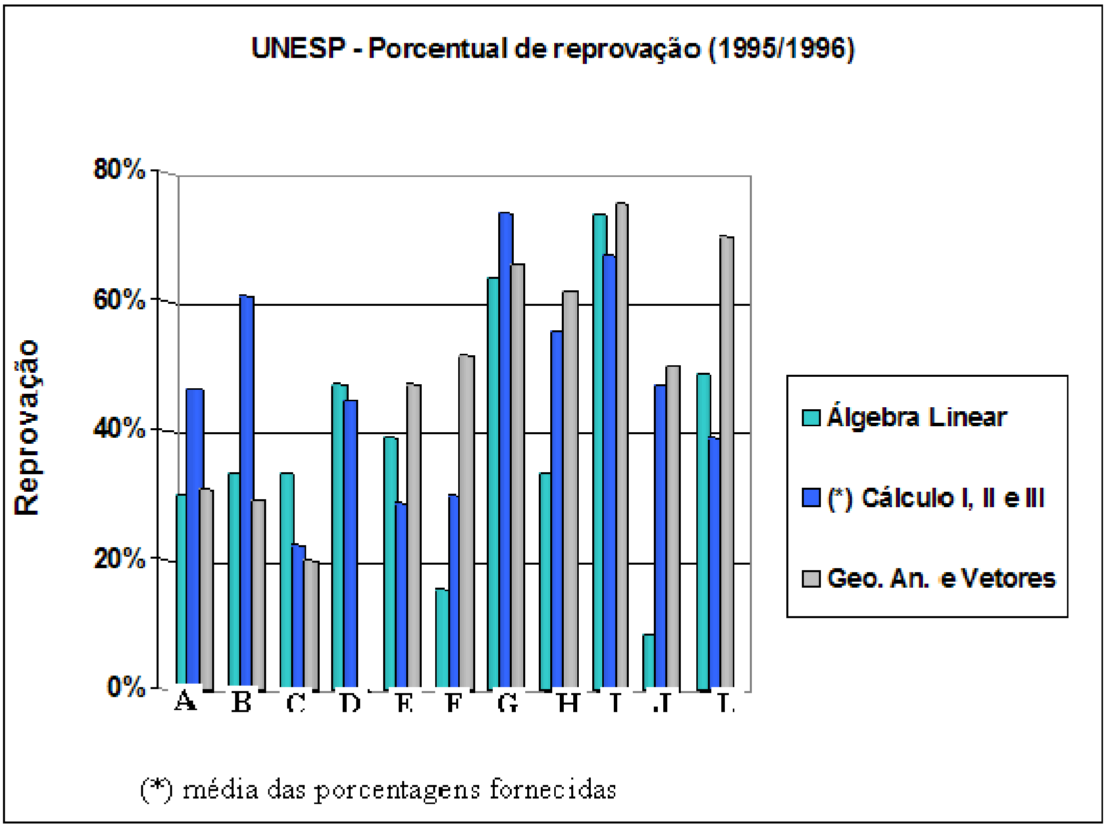
Figura 1 - Índice de reprovação nas “Disciplinas-problema” na UNICAMP, USP e UNESP entre 1993 e 1996.



Fonte: Celestino (2000, p. 12).

A Figura 2 mostra a incidência de reprovações nas três disciplinas entre os anos de 1995 e 1996, em diversos cursos da UNESP. Nela se vê, por exemplo, que o índice de reprovação da disciplina Cálculo, no curso de Estatística, é de aproximadamente 70%, enquanto que no curso de Engenharia Elétrica é de pouco mais de 20%.

Figura 2 - Porcentual de reprovação (1995/1996) – UNESP.



A	Fac.Ciên. / Bacharelado (Ba)	G	Estatística FCT -PP
B	Eng. Civil / FET - Ba	H	Matem. FCT - PP
C	Eng. Elét. / FET - Ba	I	Física IGCE - RC
D	Eng. Mec. / FET - Ba	J	Matem. IGCE - RC
E	Eng. Civil Elét. Mec. / FE - IS	L	Matem. IBILCE - SJRP
F	Eng. Cart. FCT-PP		

Fonte: Celestino (2000, p. 12).

Com essa pesquisa pretende-se alertar que as reprovações nestas disciplinas acabam retendo os alunos, uma, duas, três e até mais vezes, o que é um problema para a Universidade já que tem impacto, por exemplo, na necessidade de se disponibilizar professores para os alunos retidos e geram retardo na formatura das turmas.

Malta (2003), em seu artigo “Linguagem, Leitura e Matemática”, afirma que durante alguns anos os professores acreditaram que o grande número de reprovações na disciplina CDI era causado exclusivamente pela deterioração do ensino pré-universitário, especificamente do ensino médio, e que a solução do problema só poderia advir de uma ação neste segmento de ensino.

Ainda, segundo a autora, este quadro mudou. Hoje prepondera a convicção de que as reprovações não são causadas somente pela ineficiência do ensino fundamental e médio, mas também pelo contexto social, político e cultural, em que a universidade exerce um papel extremamente importante. Avalia que as questões referentes às dificuldades de aprendizado não se encerram apenas no ensino pré-universitário e enfatiza que muito se tem refletido, discutido e pesquisado sobre a questão das dificuldades do aprendizado da Matemática nas disciplinas básicas dos cursos universitários na área de Ciências Exatas.

Barufi (1999) procura investigar as dificuldades encontradas no ensino do Cálculo nos cursos iniciais da universidade a partir dos livros didáticos, por esses constituírem um elemento sempre presente na sala de aula. Sua análise enfocou a negociação de significados, visando esclarecer em que medida a abordagem do CDI nos livros e nas aulas é uma simples revelação ou uma construção significativa de conceitos e idéias. Nesse trabalho, a autora discute ainda o papel fundamental do professor na sala de aula, tendo o computador como aliado potencial e instrumento facilitador, que abre novos horizontes para o ensino ao possibilitar o estabelecimento de múltiplas relações e negociações de significados. A análise dos livros selecionados por ela mostrou que a dificuldade não está na falta de bons livros, apesar de vários deles não partirem de situações problemas (eles demonstram que o Cálculo tem aplicações em diferentes áreas do conhecimento).

Leme (2003), na sua dissertação de mestrado “Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada”, pretendeu buscar as possíveis causas das dificuldades na compreensão conceitual da noção de derivada. Ele utiliza os pressupostos teóricos de Sfard sobre as concepções operacional e estrutural de uma noção matemática. A pesquisa foi feita por meio da análise de alguns livros didáticos a partir de critérios relacionados com a abordagem dessa disciplina nesses livros. Concluiu que a diversidade de causas geradoras de dificuldades para a compreensão da noção de derivada é tão grande que se torna difícil focá-las.

Na disciplina CDI, o Teorema Fundamental do Cálculo apresenta dificuldades inerentes à sua aprendizagem. Procuramos algumas pesquisas para ilustrar este ponto e encontramos quatro estudos que focaram especificamente o aprendizado do TFC.

Tall (1991) discute aspectos formais ligados ao TFC. A importância particular dessa pesquisa são suas idéias sobre o significado da diferenciação e da integração, levantadas com um programa de computação gráfica que ajudará no entendimento do TFC e na compreensão do conceito de continuidade de uma função.

Thompson (1994) trabalhou em uma experiência de ensino com 19 estudantes de Matemática. Ele explorou com esses estudantes situações-problema tais como problemas de comparações entre velocidade e distância e volumes e superfícies. O pesquisador enfatiza que a compreensão destas noções é essencial para que os estudantes compreendam $F'(x)$ como uma taxa de variação. Também atribui algumas dificuldades que os estudantes tiveram com o TFC às noções de: razão de acumulação, taxa de variação e taxa de acumulação, bem como a outros problemas como a imagem de uma função.

Evidências de dificuldades no aprendizado do conceito de função foram encontradas também por Thomas (1995), que acompanhou o progresso de 27 estudantes não graduados em Ciências, Engenharia e Matemática em um curso não tradicional de Cálculo, em que os estudantes, divididos em grupos, usaram computadores. Ele seguiu um dos grupos de perto e ao final entrevistou três estudantes desse grupo e três de outros. A linguagem de computação usada em sua pesquisa foi ISETL (Interative Set Language), e o sistema de computação de álgebra, Maple V.

Seu objetivo era examinar como esses estudantes aprenderam o TFC e como o uso dos computadores afetaria a aprendizagem. Além de citar dificuldades relativas ao conceito de função, a autora também discutiu o que chamou de “uma concepção fundamental equivocada”, que é a dificuldade dos estudantes em usar variáveis no TFC (o papel de cada variável na função). Ela atribuiu isso à maneira como os estudantes construíram o esquema das funções, que não incluiu diferentes tipos como as definidas por integrais.

Segadas (1998), em sua tese de doutorado “Students’ Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: An exploration of definitions, theorems and Visual Imagery”, tem como alvo investigar a compreensão do TFC pelos estudantes. O TFC foi escolhido por ser considerado um dos tópicos mais importantes ensinados no Cálculo, uma vez que estabelece a ligação entre os conceitos de derivação e de integração. Suas investigações são relevantes para tentarmos entender os fenômenos que interferem na aprendizagem da Matemática a fim de que possamos repensar o ensino e compreender as causas das dificuldades dos alunos.

Entre os vários resultados obtidos por ela, foi identificado que o emprego de imagens gráficas não é tão eficiente, pois são utilizados durante o curso para ilustrar conceitos na forma de exemplos de casos em que uma dada definição aplica-se ou não. Pouco uso se faz deles como facilitadores na resolução de alguns problemas e auxiliares efetivos na compreensão de uma definição ou teorema.

Pela aplicação de um teste e de entrevistas, com e sem o uso do computador, a autora verificou que a maioria dos estudantes apresentou dificuldades para solucionar problemas em que a simples visualização de um gráfico evitaria o uso de longos algoritmos. A razão disso foi atribuída às dificuldades na apresentação de gráficos, que sempre aparecem de forma estática e não dinâmica. Algumas sugestões foram apresentadas no sentido de reverter a situação, incluindo atividades com o uso do computador.

2.2 O problema de pesquisa

Escolhemos investigar os conhecimentos que os alunos retêm após o aprendizado do TFC, levando-se em conta sua importância e sua função de relação entre os conceitos de derivação e de integração.

Em nossa atividade como professora de Cálculo, em cursos de graduação da área de Ciências da Computação e Sistemas de Informação, constatamos que os alunos apresentavam dificuldades de aprendizagem, em particular na compreensão do significado do TFC e entendimento dos seus conceitos fundamentais: derivada, integral, continuidade. E nos deparamos com alto índice de reprovação nessa disciplina.

Interessou-nos então investigar os conhecimentos mobilizados pelo aluno que já havia cursado a disciplina CDI, tendo, portanto tido contato anterior com os conteúdos referentes ao TFC, cujo enunciado é:

"Se uma função integrável $f : [a,b] \to \Re$ possui uma primitiva, $F : [a,b] \to \Re$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$".

Nessa perspectiva pretendemos levantar os conhecimentos retidos pelos alunos e verificarmos se eles identificam que:

A derivada da integral é a função integranda;

A integral (indefinida) da derivada de uma função é a própria função;

A integral de uma função resulta do cálculo da diferença entre o valor de uma primitiva dessa função no limite superior e o valor no limite inferior de integração;

A derivação e integração são operações inversas.

Desejamos ainda verificar como os alunos manipulam conceitos relacionados ao TFC, como a continuidade e a integrabilidade.

Para atingir esses objetivos elaboramos e aplicamos um questionário a alunos do Curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade particular de São Paulo. A análise das respostas às questões tem como base as fases da dialética ferramenta-objeto, a interação entre domínios de Douady (1987) e a pesquisa realizada por Segadas (1998) sobre o Teorema Fundamental do Cálculo em sua tese de doutorado.

No capítulo quatro tratamos dos pressupostos teóricos de Douady.

Capítulo 3

3 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Neste capítulo, procuramos apresentar informações sobre o desenvolvimento histórico do Cálculo Integral e Diferencial e, em particular, do TFC.

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da Matemática que estuda movimentos, variações, aproximações e quadraturas, e cuja origem se encontra na busca de solução de dois problemas fundamentais: o cálculo de áreas e volumes e o traçado de tangentes a curvas. Ou seja, ele trata dos processos de integração e derivação.

A conexão existente entre os problemas da integração e da diferenciação é a idéia fundamental de todo o Cálculo Diferencial e Integral.

Dois grandes gênios do século XVII, Newton e Leibniz, impulsionaram o desenvolvimento do Cálculo, fazendo suas descobertas independentemente um do outro. Em 1687, Newton publica o “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”. Paralelamente, Leibniz trabalhava e divulgava seus resultados em seu periódico “Acta Eruditoruim”.

Conquanto Newton, nas suas investigações, possa ter enunciado seus conceitos de forma mais clara, a notação e os métodos de cálculo de Leibniz foram desenvolvidos de modo mais perfeito, constituindo, ainda hoje, elementos indispensáveis na teoria.

3.1 De Arquimedes a Newton e Leibniz

As idéias principais que formam a base do Cálculo foram acontecendo ao longo de vários séculos.

Os gregos antigos deram os primeiros passos e desenvolveram métodos de aproximação para o cálculo de áreas e volumes.

Dos gregos até o século XVII, muito pouco progresso foi feito no que tange à determinação de áreas e volumes. É nessa época que aparecem a necessidade e o uso prático do Cálculo na análise estática, dinâmica e termodinâmica das máquinas industriais, das quais eram solicitadas a cada dia mais e mais potência e velocidade. Desde então, o Cálculo Infinitesimal não parou de se desenvolver e de ter novas aplicações, passando a ser imprescindível a muitos cientistas.

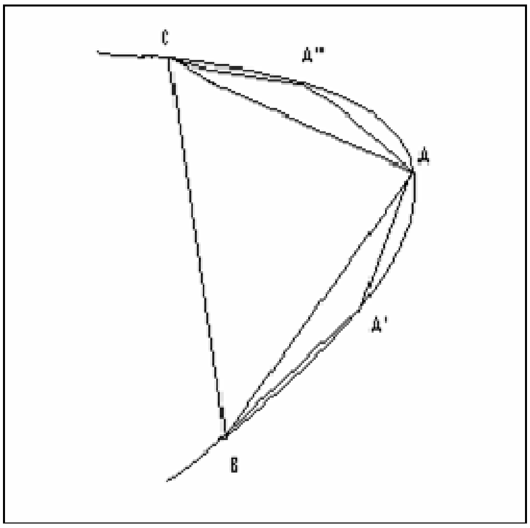
Palaro (2006, p. 83) considera que a fase que antecede a Newton e Leibniz é chamada de período pré-histórico do Cálculo. Foi a época da evolução dos problemas relacionados a questões de quadraturas e de determinação de retas tangentes.

3.1.1 Arquimedes (287-212 a.C.)

Arquimedes entre outras descobertas, estabeleceu a quadratura da parábola, isto é, determinou a área da região compreendida por um arco de parábola e uma reta secante por meio das somas de áreas de infinitos triângulos inscritos na região. Ele obteve o valor da soma infinita ao observar que, conforme n (número de termos) crescia as somas (finitas) dos n primeiro termos aproximavam-se de um valor limite. Utilizou, também, outra demonstração de cunho geométrico, mostrando que a área do segmento de parábola é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo cuja base é a corda que liga os extremos de arco e altura igual à da parábola.

Tratava-se de calcular a área da região entre o arco BA’ AA’’C e a corda BC.

Figura 3 - Região entre Arco e Corda de uma Parábola.



Fonte: Kline (1998, p. 231 apud Vidigal, p. 31).

Para tanto, primeiro construiu o triângulo ABC com ponto A escolhido de forma que a tangente à parábola em A seja paralela à corda BC. A área desse triângulo é a primeira aproximação do segmento em questão. Para obter uma região cuja área estivesse mais próxima ao segmento da parábola, ele adicionou as áreas dos triângulos AA''C e AA'B. Para obter a terceira aproximação, inscreveu triângulos em cada uma das outras quatro regiões ainda não incluídas – a região delimitada pelo arco A'B e a corda A'B é uma delas – e assim a terceira aproximação é a soma dos triângulos ABC, AA'B, AA''C e dos novos quatro triângulos.

Kline (1998, p. 231, apud Vidigal, 2007, p. 32) registra que "observando a tendência dessas aproximações, Arquimedes mostra que a área do segmento parabólico é 4/3 da área do triângulo ABC".

No prefácio do livro "O Método" (Carta a Erastóstenes), Arquimedes explica:

> "Enunciarei o primeiro teorema que descobri por métodos mecânicos, isto é: qualquer segmento de parábola é quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura." (ÁVILA, 1986, p. 32 apud Vidigal, 2007, p. 32).

E, conforme Kline:

> "Outros resultados sobre áreas foram obtidos por Arquimedes. Entretanto, cada um deles tocava no problema de requerer um conjunto de aproximações de figuras especificas. Devemos considerar que o problema maior dos gregos seria o de lhes faltar os nossos processos de álgebra e geometria analítica assim como conceito de limite". (KLINE, 1998, p. 231 apud VIDIGAL, 2007, p. 32)

Um longo período se passou entre as idéias de Arquimedes e as próximas contribuições para o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal, que ocorreram no século XVI e, mais efetivamente no século XVIII.

3.1.2 Torricelli (1608-1647)

Evangelista Torricelli nasceu perto de Faenza e morreu em Florença, em 1647. Dentre suas realizações, apresentou dois métodos de cálculo para a área da região limitada por uma ciclóide. Em um, usou o método dos indivisíveis de Cavalieri[2] (1598-1647); no outro, o método da exaustão de Arquimedes-Eudoxo[3] (séculos III e IV a.C.). Para construir a tangente à ciclóide em um ponto genérico da mesma, empregou o método de composição de movimentos[4] já usado por Galileu (1564-1643) e Descartes (1596-1650), dentre outros. Estes resultados foram apresentados por Torricelli em "De parabole" publicada em 1644 (BOYER, 1974, p. 260).

Ao considerar as investigações medievais e o trabalho de Galileu em que o movimento de um ponto, ao longo de uma reta com velocidade variando, é representado por um gráfico que relaciona velocidade e tempo, e a distância total percorrida pelo ponto é representada pela área sob tal gráfico. A

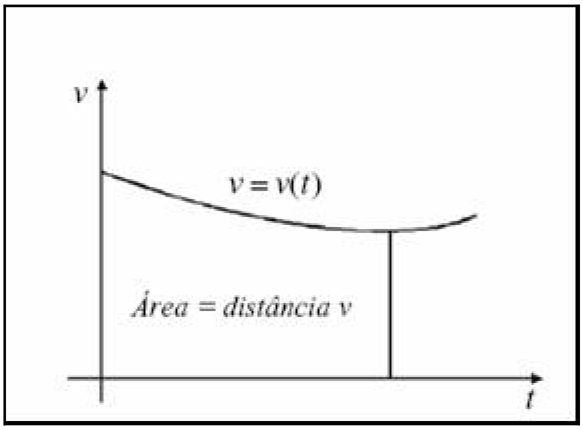
[2] Cavalieri considerava que uma figura geométrica é composta de um número infinitamente grande de indivisíveis. Assim, uma superfície plana é formada de uma infinidade de segmentos de reta paralelos e um sólido formado por uma infinidade de secções planas paralelas. No entanto, não deixou claro se essas unidades indivisíveis tinham ou não espessura. (EDWARDS JR, 1979, p. 104).

[3] O sistema Eudoxiano consiste de um determinado número de esferas de raios iguais em rotação, com eixos passando pelo centro da Terra. "Cada eixo de rotação, por sua vez, também se rotaciona através de pontos fixos em outra esfera em rotação, gerando assim uma composição de movimentos". Disponível: http://www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/history/eudoxo/eudoxo.html. Acesso em: 01 Maio 2006.

[4] Se de uma grandeza qualquer subtraímos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não "menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie." (BOYER, 1974, p. 67)

abordagem de Cavalieri de que uma área da região pode ser pensada como sendo formada por segmentos ou "indivisíveis”, Torricelli acabou relacionando tangentes e quadraturas. Conforme descreve EDWARDS JR (1979, p. 138-139), em linguagem atual, o raciocínio de Torricelli é resumido no gráfico que se segue:

Figura 4 - Curva velocidade-tempo.



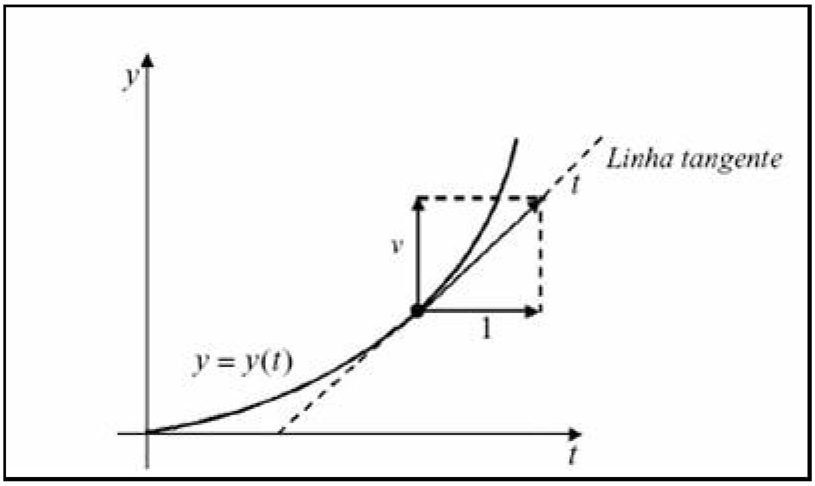
Fonte: Edwards Jr (1979, p. 138).

a) Considerando um ponto em movimento, a distância total percorrida pelo ponto é dada pela área da região sob a curva velocidade-tempo, pois a distância percorrida durante um elemento infinitesimal de tempo é igual ao produto deste elemento tempo pela velocidade instantânea (figura 4). Se, por exemplo, o ponto inicia seu movimento no tempo $t = 0$ e sua velocidade é $v = t^n$ num tempo t, então a distância y percorrida é dada pela área sob a curva $v = t^n$, ou seja,

$$y = \frac{t^{n+1}}{(n+1)}. \qquad (1)$$

b) O mesmo movimento pode ser representado, também, por um gráfico que relaciona espaço percorrido e tempo. Considerando que o ponto movimente-se ao longo de uma curva $y = y(t)$ com duas componentes de velocidade - uma velocidade horizontal 1(um) (considerada uniforme de forma que a distância horizontal possa ser considerada como medida do tempo) e uma velocidade vertical v (do ponto cujo movimento está representado na figura 4) -, o vetor velocidade desse ponto é a resultante de um vetor horizontal de comprimento 1(um) e um vetor vertical de comprimento v (figura 5). Assim, a inclinação da reta tangente à curva $y = y(t)$ em cada ponto é a velocidade v. Considerando, como no exemplo, que a distância percorrida por um ponto no tempo é dada pela equação (1), então a velocidade é dada por $v = t^n$ (2) que é a inclinação da reta tangente à curva $y = \frac{t^{n+1}}{(n+1)}$.

Figura 5 - Gráfico espaço percorrido e tempo.



Fonte: Edwards Jr., (1979, p. 139)

Em resumo:

a) a área da região sob a curva $y = x^n$ de 0 a x é

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

b) a curva $y = \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ tem inclinação

$$x^n.$$

Torricelli percebeu, pelo menos de forma intuitiva, a relação inversa entre as equações (1) e (2). Ou seja, a relação entre os problemas das quadraturas e das tangentes.

A relação inversa percebida em que a inclinação da reta tangente à curva $y = y(t)$ que representa a área (figura 4) é igual à ordenada de um ponto da curva original $v = v(t)$ corresponde a uma primeira formulação do TFC, que diz que a taxa de variação da área sob uma curva é igual à sua ordenada. Esse fato marca o início do desenvolvimento de um cálculo algorítmico (EDWARDS JR, 1979, p. 139).

Na opinião de Boyer (1974, p. 261-262), se Torricelli tivesse vivido mais, é possível que se tornasse o inventor do Cálculo. Segundo Baron (1985, v. 2, p. 42), quando Torricelli morreu, a maior parte de seus trabalhos ainda não havia sido publicada, mas muitas de suas idéias foram transmitidas por seu discípulo Stefano degli Angeli (1623-1697) a Issac Barrow e James Gregori.

3.1.3 Gregory (1638-1675)

James Gregory, matemático escocês foi um dos predecessores de Newton e morreu ainda jovem, com apenas trinta e seis anos de idade. Em 1663, foi para a Itália onde estudou vários anos com Stefano degli Angeli, com quem aprendeu os métodos italianos sobre indivisíveis (BOYER, 1974, p. 282). Ainda na Itália, publicou, nos anos de 1667 e 1668, as obras "Vera circuli et hyperbolae quadratura" e "Geometriae pars universalis" (BARON, 1985, v. 2, p. 42).

Na primeira, apresentou muitos resultados importantes referentes à Análise Infinitesimal e procurou generalizar o algoritmo de Arquimedes "Método da Exaustão", aplicando-o na quadratura de elipses e hipérboles (BOYER, 1974, p. 282).

Na segunda, de caráter essencialmente geométrico com difícil entendimento, apresentou uma primeira exposição sistemática, contendo operações para a determinação de arco, tangente, área e volume, presentes em um trabalho de Cálculo Infinitesimal (BARON, 1985, v. 2, p. 43-44).

Segundo Boyer (1974, p. 282), se Gregory houvesse expressado sua obra analiticamente, poderia ter-se antecipado a Newton na invenção do Cálculo, pois conhecia virtualmente todos os elementos fundamentais.

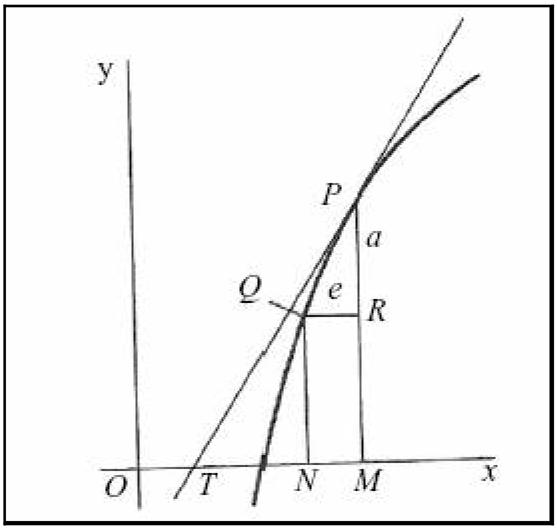
Para Baron, Gregory tinha a clara compreensão da relação inversa entre o problema de quadratura e de tangente, conhecido atualmente como TFC.

3.1.4 Barrow (1630-1677)

Isaac Barrow, contemporâneo de James Gregori, nasceu em Londres em 1630 e morreu em Cambridge em 1677. Era considerado um conservador em Matemática por não gostar do formalismo da Álgebra. Editou obras de Euclides, Apolônio e Arquimedes e também publicou as suas próprias, como "Lectiones opticae" em 1669 e "Lectiones geometriae" em 1670, ambas com a ajuda de seu discípulo Newton (BOYER, 1974, p. 284). Newton, em contrapartida, acabou se beneficiando com a forma usada por Barrow para determinar áreas e tangentes a curvas.

O método de Barrow para a determinação de tangentes à curva, que se baseia no chamado triângulo diferencial ou infinitesimal, foi um avanço significativo no desenvolvimento do Cálculo, e muito se assemelha ao processo moderno de diferenciação.

Figura 6 - O método de Barrow para a determinação de tangentes à curva.



Fonte: Eves (1995, p. 435).

Para construir a tangente à curva (Figura 6) no ponto P, Barrow, conforme descrito por Eves (1995, p. 434-435), considerava T como sendo o ponto de intersecção da tangente com o eixo das abscissas e marcava sobre a curva um ponto Q infinitamente próximo de P.

Considerava, assim, os triângulos PTM e PQR semelhantes, donde: $\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}$ e $TM = MP \cdot \frac{QR}{RP}$.

Fazendo $QR = e$ e $RP = a$, e indicando as coordenadas de P por x e y e as coordenadas de Q por $x - e$ e $y - a$, substituía x e y, na equação da curva por $x - e$ e $y - a$, respectivamente. Desconsiderava todas as potências de a e e de expoentes maiores que um, encontrando a razão $\frac{a}{e}$ para pontos infinitamente próximos, representando a inclinação da curva. Sendo M um ponto conhecido, $OT = OM - TM = OM - MP.\frac{QR}{RP}$, $OT = x - y.\frac{e}{a}$ fornece as coordenadas do ponto T, o que possibilita traçar a tangente à curva, no ponto P.

Conforme Boyer, Barrow gostava de pensar em grandezas geométricas como sendo geradas por um fluxo uniforme de pontos, a maneira de Torricelli.

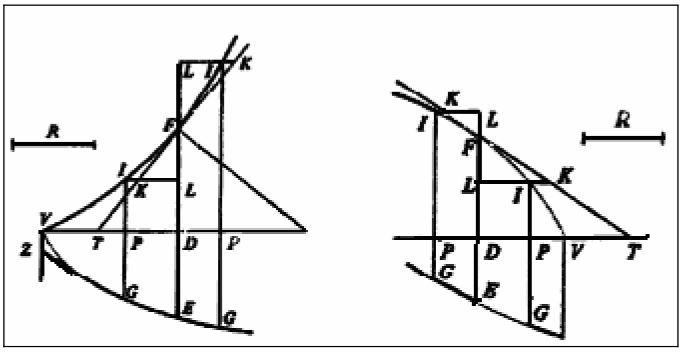
De acordo com Eves:

> Apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral, considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra (EVES, 1995, p. 435).

Na proposição 11, da lição X de sua obra “Lectiones geometriae” publicada em 1670, Barrow faz a seguinte demonstração do que hoje é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo:

> Seja qualquer curva ZGE, com eixo VD; suponhamos primeiro que as ordenadas VZ, PG, DE perpendiculares a VD, cresçam continuamente a partir do primeiro VZ. Seja a curva VIF tal que, traçando-se qualquer reta EDF perpendicular a VD (que corta a curva nos pontos E, F e VD em D), o retângulo sob DF e qualquer reta dada R, pode ser respectivamente igual ao espaço interceptado VDEZ; faça agora DE: DF:: R: DT, e trace a reta TF: esta tocará a curva VIF.

Figura 7 - Representação da demonstração de Barrow I.

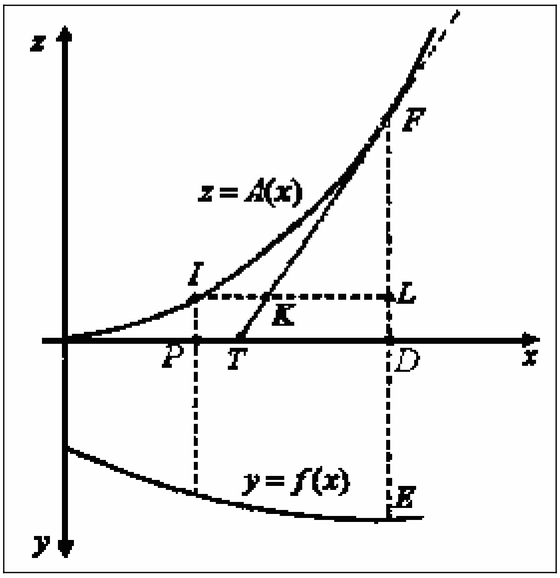


Fonte: Barrow apud Baron (1985, p. 45).

> Tome qualquer ponto I na curva VIF (primeiro acima do ponto F, em direção ao início V) e, através disto, trace as retas IG e KL paralelas a VZ e VD, respectivamente, (cortando a curva como o esquema), então LF: LK:: (DF: DT::) DE: R; então LF. R=LK. DE. Mas (por superposição) LF. R é igual ao espaço PDEG. Portanto LK. DE = PDEG<DP. DE. Daí LK<DP, ou LK<LL".
>
> Novamente tome qualquer ponto I, abaixo do ponto F, e faça o mesmo procedimento anterior. Então, por razões semelhantes, parece que LK. DE = PDEG > DP. DE; portanto LK > DP, ou LI. Donde se conclui que a reta inteira TKFK cai dentro (ou fora) da curva VIFI.
>
> As coisas continuam como antes se as ordenadas VZ, PG, DE continuam a decrescer; a conclusão é que o raciocínio serão os mesmos, com uma única diferença - é que a curva VIF é côncova com relação ao eixo VD. (BARROW apud BARON, 1985, p. 45).
>
> De acordo com Palaro (2006, p. 80-81) "A demonstração apresentada por Barrow é baseada em curvas, tangentes e quadraturas e não em uma notação pautada em coordenadas cartesianas e notação funcional. Afinal, na época, não havia nenhuma convenção para traçar eixos, este é um fato que acaba dificultando a compreensão da demonstração. Uma das características fundamentais inerentes à História da Matemática é a necessidade incessante de adequação de conceitos, métodos e maneiras de pensar e agir referentes ao problema apresentado. Isto justifica o fato de que em busca de facilitar a compreensão da demonstração apresentada por Barrow faz-se necessário traduzir seus resultados e métodos a uma linguagem algébrica e geométrica moderna".

Edwards Jr. (1979, p. 139-140) descreve sucintamente a demonstração de Barrow acima citada.

Figura 8 - Representação da demonstração de Barrow II.



Fonte: Edwards Jr. (1979, p. 140).

Para tanto, conforme ilustrado pela Figura 8, sugere que primeiro sejam considerados por conveniência os eixos y e z com orientações opostas entre si e perpendiculares ao eixo x. Seguindo o procedimento desenvolvido por Barrow, considera dada uma função $y = f(x)$ positiva e crescente. Denota-se, então, pela função $z = A(x)$, a área da região compreendida entre a curva $y = f(x)$ e o segmento $[0, x]$ contido no eixo x. Sendo dado um ponto $D(x_0, 0)$ pertencente ao eixo x, T será um ponto, convenientemente localizado também sobre o eixo x, tal que $DT = \frac{DF}{DE} = \frac{A(x_0)}{f(x_0)}$. Feitas estas considerações, Barrow afirma que a reta TF toca a curva z = A(x) somente no ponto $F(x_0, A(x_0))$. Para provar esta afirmação, considera um ponto $I = (x_1, A(x_1))$ pertencente à curva $z = A(x)$, tal que $x_1 < x_0$ e mostra que, neste caso, o ponto K (intersecção da reta horizontal IL com a reta TF) localiza-se à direita do ponto I. Levando em consideração a obtenção do ponto T, nota que $\frac{LF}{LK} = \frac{DF}{DT} = DE,$ logo $LF = LK \times DE$; observa, também, que $LF = DF - PI = A(x_0) - A(x_1) < DP \times DE$, pois $y = f(x)$ é uma função crescente. Consequentemente, $LK \times DE < DP \times DE$, mostrando que $LK < DP$, ou seja, provando que o ponto K localiza-se à direita de I. Repetindo, então, o processo, mostrando que para $x_1 > x_0$, o ponto K localiza-se à esquerda de I, provando, assim, que TF é tangente à curva $z = A(x)$, no ponto F.

Edwards Jr. (1979, p. 139) chama a atenção para o fato da inclinação da reta TF ser $\frac{DF}{DT} = \frac{A(x_0)}{A(x_0)/f(x_0)}$; observa que Barrow apresentou uma prova de que a reta TF é tangente à curva $z = A(x)$ no sentido apresentado pelos antigos gregos, ou seja, que a reta tangente a uma curva toca a mesma em um único ponto. Conclui que se Barrow tivesse apresentado analiticamente a reta TF, com inclinação $A'(x_0)$ propriamente definida, poderia ter chegado a $A'(x_0) = f(x_0)$, ou seja, poderia ter formulado de modo explícito o Teorema Fundamental do Cálculo.

3.1.5 Newton (1642-1727)

Isaac Newton nasceu na Inglaterra. Estudou Euclides, Schooten, Kepler, Viète e Wallis e conheceu as obras de Galileu, Fermat, Huygens e outros. Sua grande produção aconteceu nos anos 1665 e 1666, quando precisou se recolher em sua aldeia natal, Woolsthorpe, em razão de uma peste.

Em 1669, Newton passou a ocupar a cátedra de seu mestre Issac Barrow como professor em Cambridge. Relutava em divulgar suas descobertas, mas em 1687, por insistência de alguns colegas, publicou seu livro “Philosophiae naturalis principia mathematica”, considerada uma das maiores obras científicas de todos os tempos.

Newton ligou dois problemas, o das séries infinitas e o das taxas de variação, e chamou de “meu método” (“Methodus fluxionum et serieum infinitorum”).

> Suas primeiras descobertas [...] resultaram de saber exprimir funções em termos de séries infinitas – a mesma coisa que Gregory estava fazendo na Itália pela mesma época, embora dificilmente Newton pudesse saber disso (BOYER, 1974, p. 287).

O método de Newton é descrito na resolução do problema de determinação da tangente a uma curva dada por uma equação $f(x, y) = 0$, em que denominava as variáveis x e y respectivamente por **fluentes**, isto é, grandezas que fluem com o passar do tempo; e, por **fluxões**, as taxas de variação.

> "O deslocamento de um ponto P sobre a curva pode ser descrito em termo dos deslocamentos de suas projeções sobre os eixos; e a velocidade de P é a composição das velocidades de x e y, designadas pelos símbolos $\overset{o}{x}$ e $\overset{o}{y}$, chamados de fluxões de x e y, respectivamente. Durante um incremento "infinitamente pequeno" de tempo, designado por "o", os deslocamentos x e y sofrem incrementos "infinitesimais" $\overset{o}{x}o$ e $\overset{o}{y}o$, respectivamente" (ÁVILA, 1993, p. 140).

Hsia (2006, p. 49) considera que neste aspecto o trabalho de Newton tem por finalidade, dada a relação entre fluentes $f(x, y)$, encontrar a relação entre as fluxões que, na linguagem atual, significa determinar o declínio da reta tangente no ponto P. Como exemplo ilustrativo, tomou a curva cúbica $f(x,y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Expandiu $f(x + x_0, y + y_0) = 0$ e desprezou os termos em que "0" aparece com expoente igual ou maior a dois e dividido pelo infinitésimo "0" resulta $\frac{\overset{o}{y}}{\overset{o}{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$, que, atualmente, corresponde à $\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y}$.

Este resultado é o teorema da função implícita quando $f(x,y) = 0$ define implicitamente y como uma função diferencial de x, com $f_x \neq 0$.

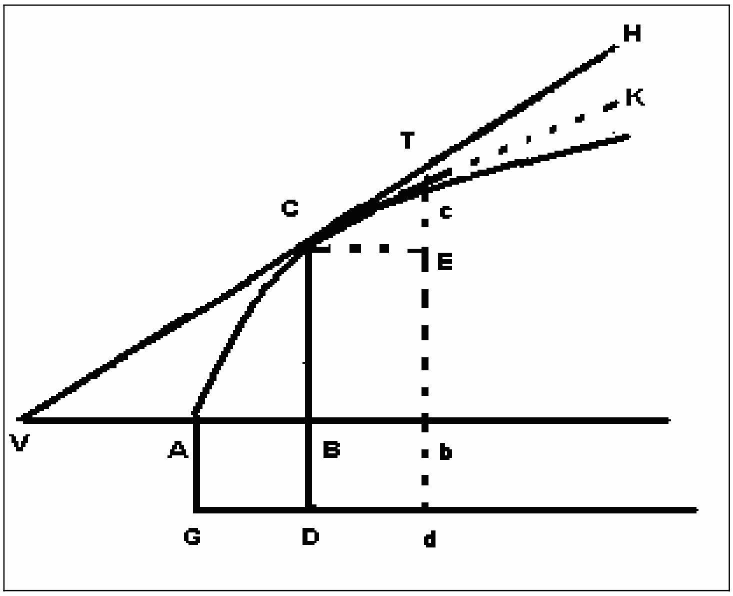
Ao desprezar os termos em que o zero aparece com expoente igual ou maior que dois Newton apresenta noções embrionárias sobre limites, retomando os infinitésimos ("infinitamente pequenos").

Entre as numerosas aplicações do método, encontravam-se a determinação dos máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e concavidade de curvas e a determinação de muitas quadraturas e retificações de curvas.

Segundo Newton,

> "Chamando de fluxões os aumentos das velocidades dos movimentos, e de fluentes às quantidades geradas esclareci aos poucos (nos anos 1665 e 1666) o método das fluxões, que aproveito aqui na Quadratura das curvas".
>
> As fluxões são semelhantes aos aumentos dos fluentes, os quais são gerados em intervalos de tempos iguais, mas são infinitamente pequenos; e para ser mais exato diria que estão na primeira razão dos aumentos nascentes, mas podem ser representados por quaisquer linhas proporcionais a elas. Se as áreas ABC, ABDG forem descritas pelas ordenadas BC e BD, que se movem uniformemente ao longo da base AB, então as fluxões dessas áreas estarão entre si como as ordenadas BC e BD que as descrevem e poderão ser representadas por aquelas ordenadas; isto é, tais ordenadas estão na mesma proporção que os aumentos nascentes das áreas".
>
> (Newton, citado por PALARO, 2006, p. 94).

Figura 9 - Representação do método proposto por Newton.



Fonte: Baron (1985, v. 3, p. 31)

Desse modo, Newton enunciou os problemas fundamentais do Cálculo: a relação das quantidades fluentes é inversa à relação de suas fluxões. Esse fato se traduz hoje pelo conhecido Teorema Fundamental do Cálculo que, em termos da geometria, significa resolver o problema do cálculo da área sob uma curva com o traçado de tangentes à curva.

Newton enuncia claramente os problemas fundamentais do Cálculo: "Sendo dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões e inversamente”. Com isso, cita que, ao considerar um ponto em movimento, este é descrito dando a posição e a velocidade do ponto em relação ao tempo. Chama a relação posição-tempo de fluente e a relação velocidade-tempo de fluxão; qualquer uma das relações dada, a outra poderá ser determinada. Além de descobrir o Teorema Fundamental do Cálculo, usa-o para resolver problemas de cálculo de área (KATZ, 1998, p. 514).

Segundo Boyer (1974), os estudos de Newton não passaram diretamente da forma do triângulo de Pascal ao teorema binomial, mas indiretamente, partindo de um problema de quadratura para o teorema binomial, percurso que lhe foi benéfico e permitiu verificar:

> [...] que a análise por séries infinitas tinha a mesma consistência interior, e estava sujeita às mesmas leis gerais, que a álgebra de quantidades finitas [...], que as séries infinitas eram outras formas das funções que representavam e não deviam ser apenas consideradas como instrumento de aproximação (BOYER,1974, p. 289).

Em sua publicação de 1711, “De analysi per aequationes numero terminorum infinitas”, composta em 1669, baseada nas idéias obtidas em seu glorioso período entre 1665 e 1666, Newton prova que a área sob a curva

$y = ax^{\frac{m}{n}}$ é dada por

$$\frac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}.$$

Pela primeira vez uma área foi determinada pelo inverso do que chamamos de diferenciação. Possivelmente, esse processo já fosse conhecido por Barrow, Gregory e, talvez, Torricelli e Fermat.

Boyer (1974, p. 291) expressa que “Newton tornou-se o efetivo inventor do Cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita”.

Assim, a partir desse momento, outros estudiosos não precisavam mais evitar processos infinitos como faziam com freqüência os gregos, “pois esses eram agora considerados como matemática legítima” (BOYER, 1974, p. 290).

Newton apresentou os fundamentos de seu Cálculo, em três momentos diferentes, de forma tal que evidenciou sua constante busca de uma fundamentação cada vez mais sólida e aprimorada que justificassem seus métodos analíticos. Ele conseguiu mostrar que esses métodos eram aplicáveis a um grande número de problemas com curvas algébricas simples, expressões algébricas que envolvem raiz, seções cônicas e outras mais.

Newton formulou regras e procedimentos sistemáticos para cobrir as soluções gerais da maioria dos problemas relacionados ao cálculo infinitesimal que eram conhecidos no seu tempo.

Embora muitas dessas regras tivessem sido estabelecidas ou introduzidas de uma ou de outra maneira pelos seus predecessores, ele estabeleceu uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual todos os problemas podiam ser formulados.

Apesar de toda sua dedicação, as bases lógicas sobre as quais seu cálculo estava calcado não foram convincentes e ainda causaram preocupação e controvérsia que perduraram por mais de um século após sua morte.

Com Newton, a idéia de que a diferenciação e a integração eram operações inversas foi firmemente estabelecida. Desde Arquimedes e durante todo o século XVII, os procedimentos de integração eram baseados em somas de um grande número de pequenas áreas.

Em seguida descrevemos uma pequena cronologia[5] de alguns estudos e trabalhos de Isaac Newton, como também algumas de suas obras:

1663: Newton inicia seus estudos.

1664 (Final de): Estuda integral por indivisíveis (integral de Wallis).

[5] O leitor encontrará um quadro cronológico mais completo em BARON, *Newton e Leibniz,* unidade 3, p. 11, 1985.

1664-1665: Trabalha na série Binomial. Encontra o método de séries infinitas. Estuda o procedimento de retificação de arcos de Heuraet (determinar o comprimento de arcos e curvas).

1665: Após estudo de retificação, Newton reconhece a natureza inversa entre diferenciação e integração. Trabalha nas séries de expansão da integral. Faz uma tabulação sistemática de derivadas e integrais em colunas paralelas. Estuda um ensaio para resolver teoricamente equações fluxionais simples.

1666: Elabora uma conjunção dessas idéias no primeiro tratado sobre fluxões, chamado por ele de "método de fluxões". Nesse quadro aparecem as noções de movimento, proveniente do estudo com Barrow, e as séries infinitas, que eram as ferramentas dos métodos sistemáticos de integração.

1671: Publica o Tratado de Fluxões 'Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum' (O método de fluxões e séries infinitas), cuja divulgação aconteceria somente após sua morte (entre 1736 e 1737).

1687: Embora relutante em divulgar suas descobertas, publica seu livro 'Philosophiae Naturalis Principia Mathematica' (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural), uma das maiores obras cientificas de todos os tempos.

1704 (Após): É publicado o tratado sobre quadraturas de curvas, "Tractatus de quadratura curvarum" que foi escrito em 1693.

1711: É publicada a obra intitulada "De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" elaborada em 1669.

3.1.6 Leibniz (1646-1716)

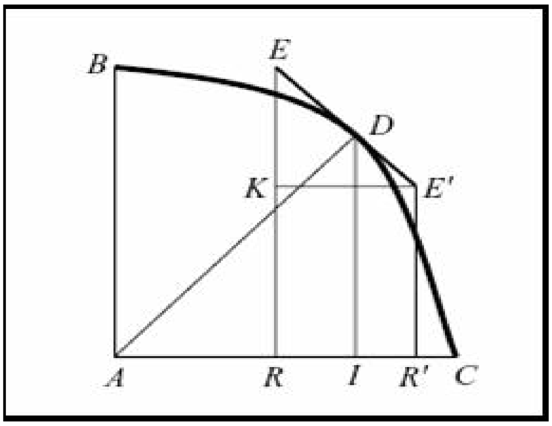
Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig em 1646 e desde cedo manifestou grande interesse pelo estudo. Ávila (1993) relata que no período de 1672-1676, Leibniz, que desejava ser matemático, entrou em contato com Christian Huygens (1629-1695) quando cumpria uma missão diplomática em

Paris, que o aconselhou a ler uma publicação de Blaise Pascal (1623-1662) a respeito de certos problemas geométricos.

Segundo Palaro (2006), o que chamou atenção de Leibniz ao ler a obra "Traité des sinus du quart de cercle", de Pascal, foi o seguinte fato:

> [...] considerando o quadrante ABC de um círculo de unitário e sendo D um ponto para o qual seno é *DI*, Pascal traçou uma pequena tangente *EDE'* à curva ABC em D e os segmentos ER e *E'R'* perpendiculares ao raio AC (figura 11). Notando que os triângulos *EKE'* e *DIA* são semelhantes, encontrou que $\frac{DI}{DA} = \frac{E'K}{EE'} = \frac{RR'}{EE'}$ e, portanto, $DI \cdot EE' = DA \cdot RR'$.
>
> Considerando que, para um intervalo *RR'* infinitamente pequeno, o segmento *EE'* é considerado igual ao arco de círculo, Pascal afirma que o retângulo formado pelo seno *DI* e o arco infinitesimal (ou a tangente EDE'), representado por EE" é igual ao retângulo formado pelo raio DA e a parte do eixo entre as extremidades do arco dada RR'. Ou seja, Pascal mostrou que a soma dos senos ou quadratura de qualquer arco de um quadrante de um círculo é igual à porção da base entre os senos extremos multiplicada pelo raio do círculo. (KATZ apud PALARO, 2006, p. 103).

Figura 10 - Representação da demonstração de Pascal.

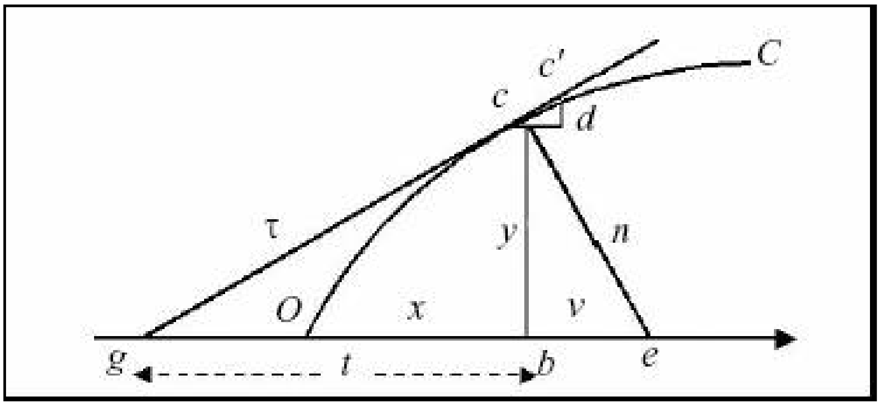


Fonte: Katz apud Palaro (2006, p.103).

De acordo com a autora, a leitura dessa publicação inspirou Leibniz a ter uma de suas idéias fundamentais na criação do Cálculo ("triângulo característico"), pois percebeu que o "triângulo infinitesimal" inscrito em círculos por Pascal poderia ser generalizado e aplicado a curvas arbitrárias. Considerando a Figura 11, a exemplificação desta idéia dada por Baron é descrita por Palaro (2006, p. 104) da seguinte forma:

[...] OcC é uma curva arbitrária; $\tau = cg$ é uma tangente á curva em c; $n = ce$ é a normal à curva, também, em c; e $y = cb$ é obtido pela projeção ortogonal do ponto c sobre o eixo horizontal. Tomando um ponto c' pertencente à tangente, mas tão próximo de c que cc' é confundido com a própria curva, Leibniz obtém o triângulo característico cdc' em c, que é semelhante aos triângulos cbe e gbc, chegando às relações $cd : dc' : cc' = y : v : n = t : y : \tau$ (em notação atual, $\frac{cd}{y} = \frac{dc'}{v} = \frac{cc'}{n}$ e $\frac{cd}{t} = \frac{dc'}{y} = \frac{cc'}{\tau}$), úteis em transformações de quadraturas.

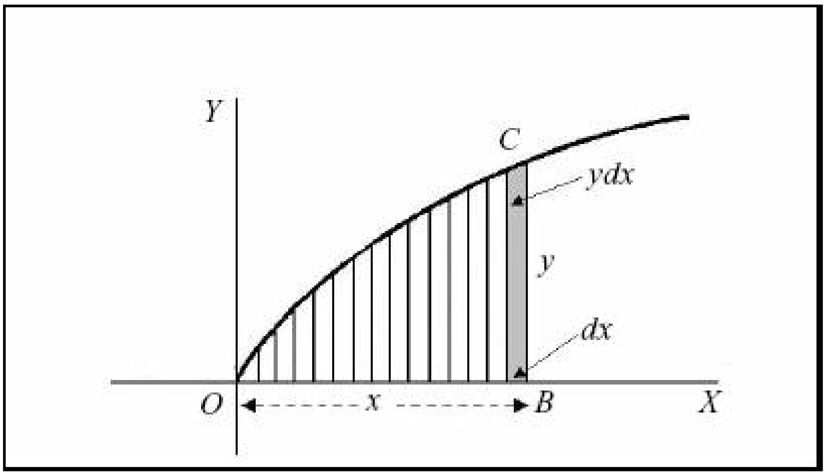
Figura 11 - Representação exemplificada da idéia de Leibniz para a criação do Cálculo ("triângulo característico").



Fonte: Baron (1985, v.3, p. 47)

Em 1686, Leibniz publicou um artigo em que apresenta o seu cálculo integral e enfatiza a relação inversa entre diferenciação e integração (BOYER, 1974, p. 296).

Figura 12 - Representação da idéia apresentada por Leibniz para o Cálculo Integral.



Fonte: Baron (1985, v. 3, p. 60)

Leibniz considera a integral como sendo a área sob uma curva. Assim, conforme esboçado na Figura 12, ele pensa na área como sendo composta por muitas faixas retangulares verticais infinitamente finas ydx e indica a soma das áreas de todas essas faixas por $\int ydx$, que é a área sob a curva $y = f(x)$ e compreendida entre as retas $y = 0$ e $y = x$; considerando que a diferencial da área de OCB é a área do retângulo ydx à direita, ou seja, $d\int ydx = ydx$, (mostra a relação inversa entre d e $\int$ e, reciprocamente, $\int dy = y$ (BARON, 1985, v. 3, p. 60).

Segundo Katz (1998, p. 524), a importância dos resultados de Leibniz repousa na possibilidade de somas de diferentes seqüências, reveladas quando se transfere esta idéia à geometria:

> "Ele considerou uma curva definida num intervalo dividido em subintervalos e construiu as ordenadas y_i na curva, relativas a cada ponto x_i da divisão. Se a seqüência (∂y_i) é a das diferenças dessas ordenadas, a sua soma $\sum_i \partial y_i$ é igual a diferença $y_n - y_0$ das ordenadas finais e iniciais. Similarmente, se a seqüência $(\sum y_i)$, onde $\sum y_i = y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_i$, a seqüência $(\partial \sum y_i)$ é igual à seqüência das ordenadas iniciais. Leibniz explorou essas duas regras para manejar a situação quando havia infinitas ordenadas. Ele considerou a curva como um polígono com uma infinidade de lados no qual cada em ponto de intersecção a ordenada y é projetada num eixo. Se diferença infinitesimal das ordenadas for designada por *dy*, e se a soma das infinitésimas ordenadas for designada por $\int y$, a primeira regra será traduzida por $\int y = dx$ enquanto a segunda dá $d\int y = y$. Geometricamente, a primeira significa simplesmente que a soma de diferenças (diferenças infinitesimais) de um segmento é igual ao segmento. (Aqui Leibniz assumiu que ordenadas iniciais são iguais a zero). A segunda regra não tem uma representação geométrica óbvia, porque a soma termos infinitésimos talvez seja infinita. Então Leibniz trocou ordenadas finitas *y* por áreas infinitesimais *ydx*, onde *dx* era uma parte infinitesimal do eixo x determinada pelos pontos de intersecção dos lados do polígono de infinitos lados. Então $\int ydx$ pode ser interpretado como a área sob a curva e a regra $d\int ydx = ydx$ simplesmente significava que a diferença entre os termos de seqüências de áreas $\int ydx$ são os termos *ydx*".

O elemento central de sistematização e unificação dos métodos infinitesimais constitui o que, atualmente, é conhecido por Teorema

Fundamental do Cálculo, identificado tanto por Newton como por Leibniz que podem ser considerados os fundadores do Cálculo infinitesimal.

Embora seus métodos também sejam aplicáveis às equações algébricas e transcendentes, tanto o Cálculo de Newton como o Cálculo de Leibniz apresentam incoerências, pois não definem o que vem a ser "quantidades infinitamente pequenas", nem tampouco dão prova da validade de se desprezar tais quantidades no decorrer do desenvolvimento de cálculos (BOYER, 1992, p. 22).

Embora Newton tenha sido o pioneiro na criação de uma teoria de cálculo bem desenvolvida, foi Leibniz quem primeiro tornou seus resultados amplamente conhecidos no mundo científico, uma vez que foi apenas em 1704 que o “Tractatus de quadratura curvarum” escrito por Newton em 1676 foi finalmente publicado e, ainda assim, como um apêndice de um livro sobre óptica. É possível perceber que os trabalhos de Newton antecederam aos de Leibniz, mas as divulgações não, pois as de Leibniz ocorreram em 1684 e 1686, no periódico “Acta Eruditorium”, e as de Newton somente em 1687.

Em sua primeira publicação a respeito do cálculo de fluxiões; Newton apontou a razão pela qual, finalmente, quebrava o longo silêncio:

> “Em uma carta escrita para o Sr. Leibniz no ano de 1676, e publicada pelo Dr. Wallis, mencionei um método pelo qual encontrei alguns teoremas gerais sobre figuras curvilíneas, e há alguns anos emprestei um manuscrito contendo tais teoremas; e tendo desde então encontrado algumas coisas copiadas dele, nesta ocasião, tornei-o público”. (PARSHALL e RICE, 2002, p. 121).

Leibniz nunca negou que o cálculo de Newton era anterior ao seu; mas desejava uma absolvição da acusação de plágio e o reconhecimento de que seu trabalho havia sido desenvolvido independente. Em meados do século XIX, quando os manuscritos originais de Leibniz foram encontrados e publicados, foi que sua reputação restaurou-se plenamente.

> “Hoje, depois de muito estudo meticuloso e imparcial, o consenso é que Newton e Leibniz desenvolveram o Teorema Fundamental do Cálculo independentemente e que, portanto, deveriam dividir igualmente a glória da criação do cálculo”. (THOMAS, 2002).

Conforme Saraiva:

> O interesse de Leibniz pelo simbolismo e pela notação, vinculado à sua idéia de uma linguagem simbólica geral difere de Newton, que tinha uma linguagem para cada problema. O reconhecimento de que somar seqüências e tomar as suas diferenças são operações inversas e que, semelhantemente, a determinação de áreas e a tangentes, são, operações inversas. O triângulo característico e o seu uso para deduzir transformações gerais de áreas (por exemplo: a transmutação). (2000, p. 36)
>
> O cálculo de Newton e Leibniz utilizava variáveis, as quantidades ligadas à curvas, tais como as ordenadas, as abcissas, subtangentes e áreas. O cálculo moderno utiliza funções, aplicações de um conjunto (de números reais) em outro. As primeiras definições de função surgiram somente no século XVIII.
>
> No cálculo moderno a operação de diferenciação associa uma função a sua derivada. Para Leibniz, a diferenciação associava uma diferencial infinitamente pequena a uma variável. Para Newton, tomar fluxões significava associar uma velocidade finita a uma variável. Portanto, a concepção de operação fundamental nos cálculos de Newton e de Leibniz era diferente da diferenciação que está em uso no cálculo moderno.
>
> Tanto no cálculo de Newton quanto no cálculo de Leibniz existiam problemas sobre a consistência lógica dos conceitos fundamentais - a fluxão (definidas por razões últimas) e a diferencial (como diferença infinitamente pequena). No cálculo moderno essas dificuldades quanto aos fundamentos são esclarecidos pelo uso de um conceito bem definido de limite. Por isso não encontramos quantidades infinitamente pequenas.
>
> Leibniz parece ter sido o primeiro a mencionar o termo função inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. (2000, p. 37)

3.2 Operações Centrais do Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo é a base das duas operações centrais do Cálculo, diferenciação e integração inversas uma da outra. Isto significa que se uma função contínua é primeiramente integrada e depois diferenciada, volta-se à função original. A conexão existente entre os problemas de integração e diferenciação é a pedra angular do Cálculo Diferencial e Integral.

Este teorema é de importância central no Cálculo, tanto que recebe o nome de Teorema Fundamental. A seguir, tal relação será o objeto das considerações que estão baseadas na obra: Cálculo Diferencial e Integral v. 1, de autoria de Courant, publicada em 1951.

3.2.1 A integral como função do limite superior de integração

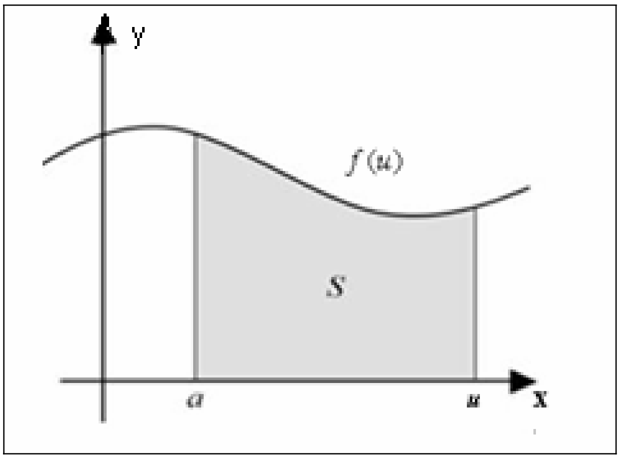
Para Courant (1951), o valor da integral definida da função f depende da escolha dos limites *a* e *b* de integração, tanto na função do limite inferior *a* como do superior *b*. A fim de estudar esta dependência de modo mais conciso, imaginemos o limite inferior *a* como um número fixo; designemos a variável de integração por *u*; e indiquemos o limite superior por *x* em vez de *b*, pesquisando o valor da integral, como função desse limite.

Assim, escreveremos:

$$\boxed{\int_a^x f(u)\,du = \Phi(x)}$$

Chamaremos a função Φ de uma integral indefinida da função f. Quando nos referimos a uma e não à integral indefinida, desejamos frisar que poderíamos ter escolhido qualquer outro limite inferior em vez de *a*, o que ordinariamente dá uma função diferente à integral.

Figura 13 - A integral como função do limite superior de integração.



Fonte: Courant (1951)

Geometricamente, a integral indefinida para cada valor de x é dada pela área sob a curva $y = f(u)$ e limitada pelas retas $u = a$ e $u = x$ e $x = 0$.

Se escolhermos α para limite inferior em vez de *a*, teremos a integral indefinida $\Psi(x) = \int_{\alpha}^{x} f(u)du$.

A diferença $\Psi(x) - \Phi(x)$ será dada por $\int_{\alpha}^{a} f(u)du$, que é constante, visto a e α terem sido ambos considerados números fixos.

Portanto, $\Psi(x) = \Phi(x) + const.$ As integrais indefinidas da mesma função diferem unicamente por uma constante aditiva.

Podemos, da mesma forma, considerar a integral como função do limite inferior e introduzir a função $\Phi(x) = \int_{x}^{b} f(u)du$, na qual *b* é uma quantidade fixa. Novamente, teremos duas integrais com limites superiores diferentes, *b* e β, divergindo somente por uma constante aditiva $\int_{b}^{\beta} f(u)du$.

3.2.2 Derivadas das Integrais indefinidas

A derivação da integral indefinida Φ em relação à variável x nos conduz ao seguinte teorema:

A integral indefinida $\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(u)du$ de uma função contínua f, possui sempre derivada $\Phi'(x) = f(x)$; isto é, derivação da integral indefinida de uma função contínua dá-nos, novamente, a mesma função.

Segundo Courant, **esta é a idéia Fundamental de todo o Cálculo Diferencial e Integral**. Ele define integral indefinida retomando o resultado demonstrado anteriormente: dada uma função f, determinar outra F de modo que $F' = f$ e afirma que:

> Este problema requer a inversão do processo de derivação. É um exemplo típico de solução inversa, tal como ocorre em muitas partes da matemática, e que já verificamos ser um método matemático muito eficiente para a geração de novas funções. (...) Uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, é

> denominada função primitiva de $f(x)$ ou, simplesmente, primitiva de $f(x)$. Esta designação sugere que a função $f(x)$ origina-se de $F(x)$ por derivação (COURANT, 1951, p. 111).

O autor alerta que o problema da determinação da função primitiva ou da inversão da derivação pode ter um caráter diferente da integração. Mas lembra que: "Toda integral indefinida $\Phi(x)$ da função $f(x)$ é função primitiva de $f(x)$" (COURANT, 1951, p. 113).

Ele ressalta que esse resultado não resolve a questão da determinação de todas as primitivas de uma função, sendo a questão definitivamente resolvida pelo teorema que o autor diz que, muitas vezes, é mencionado como Teorema Fundamental do Cálculo: "a diferença entre duas primitivas $F1$ e $F2$ da mesma função f é uma constante, isto é, $F1 - F2 = C$".

Desse modo, conhecida uma primitiva F, pode-se obter todas as outras mediante escolha conveniente da constante C, obtendo-se $F + C$. Inversamente, a expressão $F1 = F + C$ representa uma função primitiva de f, para cada valor constante C.

A seguir, Courant enuncia que:

> "Qualquer função primitiva $F(x)$ de uma função dada $f(x)$ pode ser representada por $F(x) = c + \Phi(x) = c + \int_a^x f(u)du$ onde c e a são constantes, e, reciprocamente, para quaisquer valores constantes de a e de c, escolhidas arbitrariamente, tal expressão sempre representará a função primitiva".

O autor explicita que a constante C pode ser omitida, uma vez que mudando o limite inferior obtemos uma função primitiva que define a anterior por uma constante.

Na seqüência, o autor estabelece que qualquer expressão da forma $c + \Phi(x) = c + \int_a^x f(u)du$ seja chamada como integral indefinida de f.

E acrescenta que:

> “Não faremos distinção entre função primitiva e integral indefinida. Não obstante, para que o leitor tenha uma concepção clara sobre as relações existentes entre esses conceitos é absolutamente necessário, que, antes de tudo, bem no espírito, que integração e inversão de derivação são duas coisas completamente diferentes, e que só o conhecimento do parentesco entre as mesmas nos autoriza a aplicar o termo "integral indefinida” também à função primitiva”. (COURANT, 1951, p. 116).

Em seguida, apresenta a notação da integral indefinida que considera um “pouco obscuro”: $F(x) = c + \int_a^x f(u)du = \int f(x)dx$. Entretanto, expressa que:

> Seria melhor, na realidade, evitar esta última troca, para evitar possíveis confusões com o limite superior x que é a variável independente $F(x)$. Usando a notação $\int f(x)dx$, não devemos perder de vista a indeterminação contida na mesma, isto é, este símbolo representa sempre, somente uma integral indefinida (p. 109).

O próximo item que o autor apresenta é denominado de “Emprego das funções primitivas na avaliação das integrais definidas”.

Inicialmente, cita a questão de encontrar o valor da integral definida $\int_a^x f(u)du$, uma vez conhecida uma primitiva qualquer $F(x) = \int f(x)dx$ da função $f(x)$.

Para tanto parte do fato de $\Phi(x) = c + \int_a^x (u)du$ ser uma primitiva de f e que, portanto outra primitiva qualquer F da função f difere de $\Phi(x)$ por uma constante. Isto é, $\Phi(x) = F(x) + c$. A seguir, calculando $\Phi(a) = 0 = F(a) + C$, obtém $C = -F(a)$, donde $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Fazendo $x = b$, obtém-se $\int_a^x f(u)du = F(b) - F(a)$ o que fornece a seguinte regra: “Se $F(x)$ for uma função primitiva qualquer de $f(x)$, a integral definida de $f(x)$ entre os limites a e b é igual a diferença $F(b) - F(a)$”.

Lima, em seu livro Curso de Análise (1976), inicia o estudo do Teorema considerando uma função $f : [a,b] \to R$ Riemann-integrável e, a partir dela, definindo a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad x \in]a,b]$ e demonstrando que F é contínua (mesmo que f não o seja).

Em seguida apresenta o Teorema:

“Seja $f : [a,b] \to R$ integrável. Se f for contínua no ponto $c \in]a,b[$, então, a função $F : [a,b] \to R$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é derivável no ponto c e se tem $F'(c) = f(c)$”.

Após a demonstração desse Teorema o autor enuncia o corolário:

“Dada $f : [a,b] \to R$ contínua, existe $F : [a.b] \to R$ derivável em $]a,b[$, tal que $F' = f$, afirmando que basta tomar $F(x) = \int_a^x f(t)dt$”.

Finalmente, apresenta, com a nomenclatura de Teorema Fundamental do Cálculo, o seguinte:

“Se uma função $f : [a,b] \to R$ Riemann-integrável possui uma primitiva $F : [a,b] \to R$, então $\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$”.

Após esses pressupostos, entraremos no cerne de nosso trabalho, expondo os procedimentos de elaboração do instrumento da investigação, bem como sua aplicação e a análise dos dados obtidos nos próximos capítulos.

Capítulo 4

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 A dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros

A análise didática das relações entre ensino e aprendizagem beneficia-se dos trabalhos de Régine Douady (1987) que se dedica aos processos pelos quais os alunos podem adquirir um saber matemático, em situação escolar.

Os componentes teóricos de Douady, nomeadamente a dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros, são instrumentos poderosos, pois oferecem uma leitura da evolução das noções matemáticas, bem como permitem a análise da aprendizagem matemática. Para essa autora, os conhecimentos matemáticos podem ser efetivamente construídos fazendo-se jogar a dialética ferramenta-objeto por meio de jogos de quadros apropriados, ou seja, a aplicação de problemas que respondam a determinadas condições.

Na aplicação da proposição teórica de Douady, as noções matemáticas são organizadas segundo um encadeamento de problemas que são resolvidos por responsabilidade partilhada entre o professor e os alunos. A resolução, graças a esta organização, deve proporcionar aos alunos controlar o significado destas noções, dispondo-as do mesmo modo ou adaptando-as a novas situações.

4.2 Conhecimentos matemáticos

Douady entende que um aluno detém conhecimentos matemáticos quando é capaz de utilizá-los como ferramenta explícita nos problemas que tem que resolver, devendo ser igualmente competente para adaptá-la quando as situações habituais de emprego não são exatamente satisfeitas, ao interpretar problemas ou formular questões.

Para que os alunos adquiram conhecimentos matemáticos, de acordo com a hipótese de Douady o ensino, ao ser organizado, deve conter momentos em que a classe simula uma sociedade de investigadores em atividade.

Muitos obstáculos opõem-se a tal simulação quando:

- O ensino utiliza o método "aprendo, aplico";
- Pouca responsabilidade é dada aos alunos na sua aprendizagem;
- Os problemas explorados em classe raramente permitem aos alunos a apreensão dos significados essenciais dos conceitos;

Os conceitos são apresentados num quadro e as aplicações em outro quadro.

A organização do ensino sugerida pela autora é fundamentada na dialética ferramenta-objeto e nos jogos de quadros, os quais se engrenam a partir de problemas que respondem a determinadas condições.

Qualquer problema numa situação escolar de aprendizagem deve preencher quatro condições:

a) O enunciado, com texto e questões, deve fazer sentido para os estudantes;

b) Os alunos podem engajar-se num procedimento de resolução levando em conta seus conhecimentos, mas não têm meios para resolver completamente o problema;

c) Os conhecimentos visados pelo aprendizado (conteúdo ou método) são ferramentas que devem estar adaptadas ao problema;

d) O problema deve ser formulado em, pelo menos, dois quadros diferentes.

4.3 Ferramenta, Prática e Objeto.

Um conceito pode ter o estatuto de ferramenta ou de objeto. É ferramenta quando se focaliza o interesse no uso que se faz dele para resolver um problema. Uma mesma ferramenta é passível de adaptação a vários problemas, e várias ferramentas podem ser adaptadas a um mesmo problema.

Em uma atividade matemática, um aluno pode recorrer a uma ferramenta de maneira implícita ou explícita. Ele o faz implicitamente, quando o conceito em uso ainda não está completo. As concepções do aluno lhe permitem engajar-se em um procedimento cuja justificativa faz referência a noções que ele não sabe formular ou que exprime unicamente em termos de ações em um contexto particular. Por seu turno, ferramentas explícitas são noções que o aluno pode formular e aplicar e cujo emprego pode justificar.

Douady denomina *prática* todo emprego adaptado que um aluno faz das ferramentas expressas explicitamente ou por meio de ações, reconhecidas pelo menos dentro da classe. Por *objeto* entende o objeto cultural, fazendo parte de um edifício maior que é o saber sábio reconhecido socialmente em um dado momento. A dialética ferramenta-objeto é um processo cíclico, regulador dos papéis respectivos dos alunos, e do ensino, ao longo do qual, os conceitos matemáticos desempenham, alternativamente, o papel de ferramenta para resolver um problema e de objeto, participando na edificação de um saber organizado.

Trata-se de um processo de várias fases pelo qual o aluno deve passar para resolver um determinado problema, e adquirir um conhecimento. Tais fases, que desempenham diferentes funções, encontram-se sintetizadas na tabela a seguir.

Fase a - “Antigo - ferramentas explícitas”
Fase b - “Pesquisa - novo implícito”
Fase c - “Explicitação e institucionalização locais”
Fase d - “Institucionalização - estatuto de objeto”
Fase e - “Familiarização - re-investimento”
Fase f – “Tornando a tarefa complexa ou novo problema”

Tabela 1 - As seis fases da dialética ferramenta-objeto

Fase a - "Antigo - ferramentas explícitas".	Os conhecimentos matemáticos são aplicados como ferramentas explícitas para resolver, pelo menos, parcialmente o problema.
Fase b - "Pesquisa, novo implícito".	Os alunos encontram dificuldade para resolver completamente o problema. Isto acontece se a estratégia primitiva torna-se muito dispendiosa (em quantidade de operações e, a como conseqüência também em tempo, com risco de erros e incerteza sobre o resultado). A estratégia não funciona mais e novas questões emergem. Estas novas questões compelem os alunos a procurar meios novos adaptados. Progressos eficazes não raramente provêm de uma troca de quadros, o que, de fato, possibilita aplicar implicitamente ferramentas que são novas, seja pela extensão do campo de intervenção, seja por sua própria natureza. As trocas de ponto de vista e os jogos de quadros são meios à disposição do professor para fazer avançar de modo fecundo a pesquisa. Mas a pesquisa também pode avançar sob a responsabilidade única dos alunos.
Fase c - "Explicitação e institucionalização locais"	Elementos da fase precedente são apropriados pelos alunos. Eles são formulados seja em termos de objeto, seja em termos de prática com suas condições de emprego no momento. Pode-se tratar também de convicções antes objeto de debate, dando lugar à formulação argumentada. Os trabalhos e propósitos dos alunos e sua validade são discutidos coletivamente.
Fase d - "Institucionalização - estatuto de objeto"	Mesmo se a coletividade "classe" resolveu o problema, nem todos reagem individualmente da mesma maneira em face das ferramentas mobilizadas. Nas situações de comunicação, o saber difunde-se diferentemente entre os alunos. Assim, é condição para a homogeneização e para a constituição de um saber da classe, e para cada estudante, uma maneira de reforçar seu próprio saber e assim assegurar a progressão, oficializar conhecimentos que, até então, atuaram somente como ferramentas, conferindo-lhes status de objeto matemático. Por conseguinte, cabe ao professor a tarefa de dar status de objeto aos conhecimentos utilizados em seu aspecto ferramenta.
Fase e - "Familiarização, re-investimento".	Para que haja efetivamente saber matemático, a estruturação pessoal é de primordial importância. O aluno tem a necessidade de colocar à prova, sozinho, os conhecimentos que acredita ter adquirido, fazendo assim um balanço daquilo que sabe. Para tanto, o professor pede aos alunos que resolvam exercícios variados, os quais requerem noções recentemente institucionalizadas. Neste ínterim, os alunos desenvolvem hábitos e habilidades, integram o saber social confrontando-o com seu saber particular. Tais exercícios empregam apenas o conhecido, porém os alunos abordam-nos com concepções que evoluíram e que lhes possibilitem fazer frente a um campo maior de problemas.
Fase f – "Tornando a tarefa complexa ou novo problema"	Nesta fase, colocam-se à prova situações mais complexas, nas quais os alunos poderão testar e até mesmo desenvolver seu domínio sobre as novas aquisições. O professor propõe, então, a resolução de um problema mais complexo. A dificuldade é formular questões pertinentes mais precisas em relação ao problema. Os alunos já encontraram problemas similares, com outros valores numéricos, mas agora devem voltar-se ao objeto de estudo no caso geral. Cumprida esta etapa, o objeto estudado é suscetível de tomar lugar, como "antigo" para um novo ciclo da dialética ferramenta-objeto.

Fonte: extraída de Douady (1985)[6].

[6] Tradução nossa.

Na primeira fase, os alunos mobilizam conhecimentos antigos, objetos matemáticos, que funcionam como ferramenta na busca de novos conhecimentos matemáticos, por meio de problemas adequados que precisam envolver, pelo menos, dois quadros (domínios), para que um forneça referências ao outro e possibilitem meios de validação.

Na segunda fase, os alunos precisam lançar mão de novos conhecimentos, quando sentem dificuldade para resolver o problema proposto completamente. Nesta fase, os alunos encontram dificuldade de resolver completamente o problema e são conduzidos a colocarem em jogo novos conhecimentos que são implícitos.

Na terceira fase, o professor realiza um debate sobre os conhecimentos antigos utilizados e os novos que foram criados, apoiado na formulação das idéias explicitadas pelos alunos que são validadas ou refutadas.

Nas três últimas fases, os alunos formulam propriedades, procedimentos e até conceitos do novo conhecimento matemático.

Douady observa que algumas vezes é preciso mais de um ciclo (a, b, c, d) antes do desenrolar de um ciclo completo da aplicação da dialética ferramenta-objeto.

4.4 Os quadros e suas trocas

Na concepção de Régine Douady um quadro é constituído pelos objetos de um ramo da matemática, as relações existentes entre eles, por suas eventualmente diversas formulações, e pelas imagens mentais que se associam a tais objetos e relações. O termo “quadro” é tomado em sua conotação usual referindo-se a: quadro algébrico, quadro aritmético, quadro geométrico, por exemplo. Dois quadros podem comportar os mesmos objetos e divergir pelas imagens mentais e pela problemática envolvida.

A autora concebe a noção de quadro como uma noção dinâmica. A troca de quadros mostra-se uma via de obtenção de formulações diferentes para um mesmo problema, sem que sejam necessariamente totalmente equivalentes, e permite um novo acesso às dificuldades encontradas e à aplicação de ferramentas e técnicas que não se impunham na formulação original. A mudança de quadros revela-se uma maneira de modificar as ferramentas em uso no problema apresentado, mostrando novas relações entre objetos que estão sendo utilizados na resolução; e mesmo que não traduza totalmente o problema, traz formulações diferentes e envolve novos conhecimentos.

Traduções de um quadro para outro podem alcançar resultados não-conhecidos, técnicas novas, e criação de objetos matemáticos novos; em resumo, favorecem o enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares de trabalho.

O jogo de quadros são as mudanças de domínio provocadas por iniciativa do professor quando da resolução de problemas convenientemente selecionados, com o objetivo de fazer avançar as fases da pesquisa e evoluir as concepções dos alunos.

As correspondências entre os quadros são, contudo, imperfeitas, seja por razões matemáticas, seja devido aos conhecimentos insuficientes dos alunos. Desse modo, a situação é fonte de desequilíbrio entre as convicções dos alunos e aquilo que eles sabem fazer. A rigor, os estudantes manipulam implicitamente funções que seus conhecimentos matemáticos não lhes permitem controlar. Num processo de melhoria das correspondências, a comunicação entre quadros, e especialmente a comunicação com um quadro auxiliar de representação, é um fator de re-equilíbrio. Apesar disso as interações entre quadros permitem fazer progredir o conhecimento em cada um deles. O que Douady chamou de jogo de quadros, no início de sua teorização é uma das operações matemáticas muito utilizadas pelos especialistas em Matemática para resolver problemas, e tal recurso poderá auxiliar o aluno na solução de um problema.

O jogo de quadro é um meio de se obter diferentes formulações para um mesmo problema, de forma a permitir uma nova visão das dificuldades encontradas e assim disponibilizar ferramentas e técnicas para resolver a primeira formulação.

Em nosso trabalho, o questionário aplicado aos estudantes tenta seguir as primeiras etapas da dialética ferramenta-objeto, criando situações em que os conhecimentos antigos não são suficientes para solucionar o problema proposto e apresentando uma mudança do quadro algébrico para geométrico, dando uma nova visão da situação em estudo.

Capítulo 5

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

5.1 Introdução

Os procedimentos e os delineamentos da metodologia aplicada em nosso estudo se caracterizam por uma abordagem qualitativa, cujos pressupostos básicos são o aprofundamento intensivo e a compreensão do fenômeno.

A pesquisa qualitativa objetiva obter dados descritivos conseguidos por meio de uma participação ativa entre o investigador e os sujeitos. Enfatiza muito mais o processo que o produto, ocupando-se dos fenômenos cujos significados procuram-se captar e compreender. O contato direto do pesquisador com a situação estudada busca retratar a perspectivas dos participantes.

Segundo Ludke e André (1986) uma pesquisa qualitativa apresenta várias características que são apontadas por estas autoras:

> - O material obtido nessas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos; inclui transcrições de entrevistas e de depoimentos, fotografias, desenhos e extratos de vários tipos de documentos. Todos os dados da realidade são considerados importantes.
>
> O pesquisador deve atentar para o maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para melhor compreensão do problema que está sendo estudado.
>
> - Nesses estudos, há sempre uma tentativa de capturar a "perspectiva dos participantes" isto é, a maneira como o informante encara as questões que estão sendo focalizadas. Ao considerar os diferentes pontos de vista dos participantes os estudos qualitativos permitem iluminar o dinamismo interno das situações geralmente inacessível ao observador externo.

> - O pesquisador precisa ter cuidado ao revelar os pontos de vista dos participantes deve encontrar meios para checá-las discutindo-as abertamente com os participantes para que elas possam ser ou não confirmadas. (1986, p. 12).

Garnica (2004) reforça o aspecto de que a pesquisa qualitativa não deve estabelecer hipótese “a priori”, pois este tipo de investigação pode ser definido tendo como base na:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa se já comprovar ou refutar: (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue desvencilhar; (d) a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas. [...]. (GARNICA, 2004, p. 86).

A partir destes pontos, que não devem ser tomados como regra, segundo o próprio autor, observa-se que a pesquisa qualitativa é composta de um método de análise que tende a seguir um processo indutivo, onde: "[...] Os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos” (LUDKE & ANDRÉ, 1986, p. 13).

A pesquisa qualitativa pode ser organizada apoiando-se em dados descritivos abordados interpretativamente e coletados sob a forma de palavras, argumentos, ações e produções textuais. Esses dados são registrados na forma escrita pelos pesquisadores, observadores e até mesmo sujeitos da pesquisa, ou gravados em áudio, ou vídeos com intuito de traduzir tanto quanto possível como as coisas aconteceram.

Comparando com o método convencional do papel e lápis, entrevistas baseadas em tarefas tornam possível centrar a atenção da pesquisa mais diretamente sobre os processos de solução das tarefas de matemática do sujeito do que somente sobre os padrões de respostas “certo ou errado” nos resultados produzidos.

Outro aspecto importante de nosso trabalho está relacionado com a forma como foram coletados e analisados os dados descritivos de nossa pesquisa, obtido na produção escrita dos alunos.

Para atingirmos nosso objetivo, elaboramos, aplicamos e analisamos um questionário de atividades, com o aporte da fundamentação teórica. O objetivo era investigar se os estudantes eram capazes de identificar que:

- A derivada da integral é a função integranda;
- A integral (indefinida) da derivada de uma função é a própria função;
- A integral de uma função resulta do cálculo da diferença entre o valor de uma primitiva dessa função no limite superior e no limite inferior de integração;
- A derivação e integração são operações inversas, e ainda;

Visávamos também verificar de que maneira os alunos manipulam conceitos relacionados ao TFC, tais como: continuidade, derivabilidade, integrabilidade, etc.

Para elaboração desse instrumento, desenvolvemos previamente um questionário-piloto com questões que requeriam os conhecimentos relativos à: integral definida e imprópria, derivada de uma função, função contínua, função primitiva e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Percebemos que os estudantes que participaram desta primeira investigação não haviam recebido na disciplina Cálculo o conteúdo relativo ao TFC com a profundidade requerida pela nossa pesquisa, em razão da menor carga horária prevista, para a disciplina Calculo nesse curso. A partir dos resultados desse piloto e das conclusões de Segadas, reestruturamos o questionário. Incluímos novas questões relacionadas com a aplicação de integral definida, cálculo de áreas e sua interpretação geométrica e o cálculo de integrais no domínio algébrico de uma função descontínua, que deveriam ser resolvidas através da aplicação das propriedades do TFC.

5.2 Os sujeitos

Aplicamos o questionário piloto a três duplas de alunos do curso de Ciências da Computação de uma Universidade particular da cidade de São Paulo que se apresentaram espontaneamente para participar da primeira investigação. Como esse curso é semestral, os alunos que cursavam Cálculo II estavam, portanto, no segundo semestre e já deveria ter sido estudado o conteúdo relativo ao TFC, conforme ementa do curso (anexo 4).

O questionário foi aplicado em um único encontro pelo período de 50 minutos, sem intervalo. Não haviamos antes sido professora da classe, portanto não se tratavam de alunos nossos conhecidos. Contamos com a presença do professor, sem participação direta.

Para aplicação do questionário definitivo escolhemos uma turma de Licenciatura em Matemática, da mesma Universidade particular de São Paulo, que cursavam CDI III, ou seja alunos que cursavam o terceiro semestre, e o conteúdo desta disciplina já havia sido ministrado, conforme ementa (anexo 4), no nível de profundidade adequada às necessidades de nossa pesquisa, diferentemente do curso escolhido para a aplicação do questionário piloto.

O questionário definitivo foi aplicado a 13 duplas de alunos, no horário normal de aulas, em dois períodos de 45 minutos, com um intervalo de aproximadamente 10 minutos.

Contamos com a presença do professor da turma em um papel colaborativo, ajudando a distribuir o questionário e com a observação de uma outra colega que anotou perguntas e ações dos estudantes, além dos fatos relevantes que viessem ocorrer durante a aplicação do questionário. Os períodos de resolução do questionário decorreram em perfeita harmonia e obtivemos uma boa contribuição dos alunos.

5.3 O Questionário piloto

O questionário piloto foi composto por quatro questões, entre as quais constavam técnicas de integração, cálculo da integral definida, gráficos da integral, derivadas e aplicação do TFC. Com o piloto, pretendíamos verificar como deveríamos montar o questionário final, isto é, quais questões iriam necessitar formulação a fim de alcançar os objetivos desta pesquisa.

As quatro questões que compõem o questionário–piloto foram inspiradas nos questionários trabalhados por Segadas (1998).

Questão 1:

Calcular as integrais

a) $\int_0^3 (2x^2 - 4x - 1)dx$

b) $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx$

Com a Questão 1, pretendíamos verificar a aplicação do TFC para obter a integral. Com o item a) pretendíamos investigar os conhecimentos mobilizados por alunos em relação à resolução de integrais definidas, bem como também aqueles relacionados com as técnicas para sua resolução, isto é, se os estudantes mobilizariam:

$$\int_a^b x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = F(a) - F(b)$$

Com o item b) desejávamos verificar como o aluno reage frente a uma integral cuja função integrada não está definida em um ponto do intervalo de integração. Investigaríamos se o estudante percebe que a função não está definida em $x = 0$. No caso dele perceber desejamos observar se calcula diretamente a integral e constata que ela não existe, ou se percebe que ela deve expressar-se, como soma de duas integrais impróprias

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{t \to 0^+} \int_{t}^{3} \frac{1}{x^2} dx$$

e, finalmente, estudar a convergência de cada uma das parcelas.

Com essa questão, desejávamos verificar se os alunos mobilizam conhecimentos antigos que funcionam como ferramentas para resolver a questão.

Resumidamente, a questão 1 nos possibilitava verificar:

Se os estudantes determinam a primitiva de uma função polinomial.

Uma vez calculada a primitiva investigar se o aluno calcula a integral proposta.

Se os alunos ao resolver a questão lançam mão da propriedade aditiva da integral.

Se o estudante percebe que a função integranda não está definida em $x = 0$.

Caso perceba esse fato, queremos observar, também, se conclui diretamente que essa integral não existe ou que ela deve expressar-se como soma de duas integrais impróprias.

Se os alunos estudaram a convergência de cada uma das parcelas.

Se o aluno determina uma primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Questão 2:

Se $g(x) = \int_3^x 2tdt$ determine:

a) g(3) =

b) g'(x) =

c) g'(3) =

Com a Questão 2 pretendíamos verificar se o aluno aplicaria o TFC diretamente, mesmo em situações em que pudessem facilmente encontrar a primitiva, calculando:

$$g(x) = \int_3^x 2tdt = \left.\frac{2t^2}{2}\right|_3^x = \frac{2x^2}{2} - \frac{2.3^2}{2} = \frac{2x^2}{2} - \frac{18}{2} = x^2 - 9$$

e, a partir daí, obter os resultados nos três itens, ou se utilizariam a definição da função g para calcular diretamente, por exemplo, $g(3)=\int_3^3 2tdt=\left.\frac{2t^2}{2}\right|_3^3=0$.

Desejávamos, também, verificar se os estudantes compreenderam o papel das variáveis x e t, bem como das funções g e g', isto é, a natureza das operações integração e diferenciação, como sendo uma a inversa da outra, obtendo:

$$g'(x)=\int_3^x 2tdt=2x$$

Com essa questão, também almejávamos verificar quais conhecimentos antigos os estudantes mobilizaram para resolvê-la.

Resumidamente, pretendemos verificar com a questão 2:

Se o aluno calcula antes $g(x)=\int_3^x 2tdt=\left.t^2\right|_3^x=x^2-3^2=x^2-9$ e, em seguida, $g(3)=3^2-9$ ou se calcula diretamente $g(3)=\int_3^x 2tdt=\int_3^3 2tdt=0$.

Se o aluno calcula $g(x)$, e deriva o resultado obtendo $g'(x)=2x$ ou se demonstram conhecer o papel das funções g e g', explicitando diretamente que nesse caso a derivada da integral de uma função é a própria função ao escrever que $g'(x)=2x$. Também queríamos verificar se o papel das variáveis t e x são compreendidos. (itens a e b).

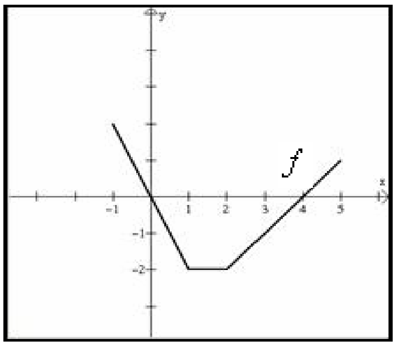
Se uma vez obtido g calcula diretamente esta função no ponto 3.

Se os estudantes mobilizariam conhecimentos antigos para resolver a questão. (item c)

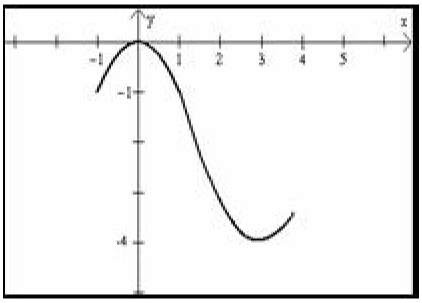
Questão 3:

Dado o gráfico da função *f* definida no intervalo [*-1,5*].

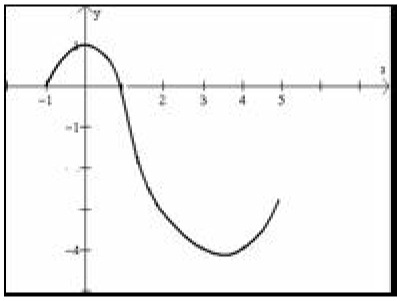
Considere os gráficos a); b); c); d); e) abaixo.



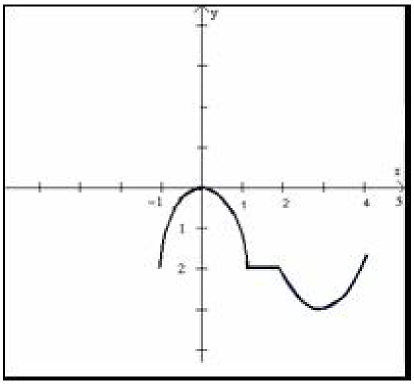
a)



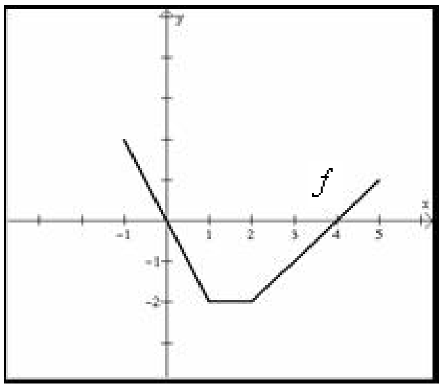
b)



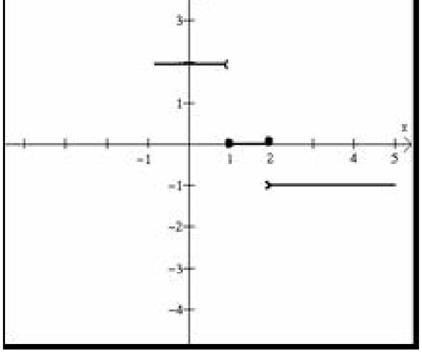
c)



d)



e)



Quais dos gráficos a); b); c); d); e) poderiam ser o gráfico da função $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$?

Circule a letra correspondente à resposta certa. Justifique sua escolha.

a b c d e

Considerando a função F do item anterior quais dos gráficos a); b); c); d); e) representam a função F' definida no intervalo $[-1, x]$? Circule a letra correspondente à resposta certa. Justifique sua escolha.

a b c d e

Com a Questão 3, pretendíamos verificar se os alunos identificam geometricamente e relacionam as funções f, F e F'. Desejamos observar se os estudantes lançam mão de diferentes domínios que são citados por Douady, neste caso, os domínios geométrico e algébrico. Segundo ela é necessário que a formulação de problemas envolva, pelo menos, dois domínios de forma que possibilite meios de validação pelo próprio aluno.

Questão 4:

As afirmações abaixo são verdadeiras. Como você justificaria cada um dos resultados, partindo do se, chegando ao então:

a) se $f(x)=\int_{0}^{x} 2tdt$, então, $f'(x)=2x$;

b) se $h(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} sentdt$, então, $h'(x)=senx$;

c) se $m(y)=\int_{-1}^{y} 3dt$, então, $m'(y)=3$.

Sendo $g(x)=\int_{o}^{x} f(t)dt$ e considerando os dados acima, o que você pode dizer sobre $g'(x)$?

Com a Questão 4 queríamos verificar se o aluno é capaz de concluir ser possível afirmar que para toda função contínua f tem-se que:

Se $g(x)=\int_{o}^{x} f(t)dt.$ Então $g'(x)=f(x)$.

A pergunta: considerando a função F definida no item anterior, quais os gráficos que representam a função F' da questão 3, foi colocada, como representação geométrica e aqui ela se apresenta no domínio algébrico.

Com esta questão, pretendíamos investigar, também, o saber de cada estudante (o saber coletivo torna-se o saber de cada indivíduo que compõe o grupo) para que pudéssemos propor problemas.

Apresentadas as questões com seus objetivos, agora faremos uma análise dos resultados do questionário–piloto, questão a questão.

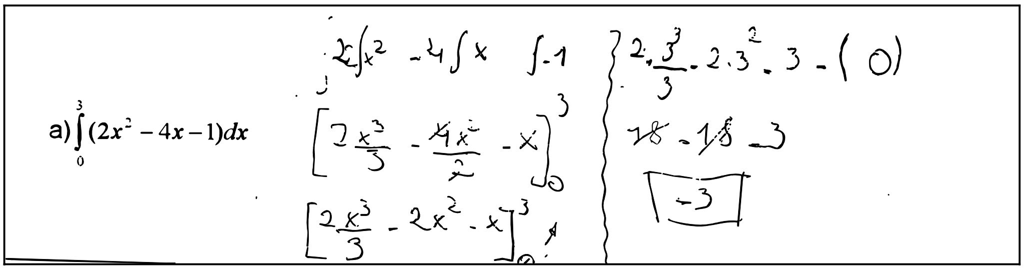
5.4 Os resultados da aplicação do questionário piloto

Inicialmente, foi explicado aos seis alunos, do curso escolhido, que se apresentaram espontaneamente para participar da primeira investigação, o motivo do questionário. Foi solicitado a eles que se organizassem em duplas e que deixassem por escrito comentários sobre a resolução de cada questão.

Apresentamos a seguir o desempenho dos estudantes relativos ao primeiro item da questão 1, referente ao cálculo de duas integrais. Nenhuma das três duplas registrou comentários.

A dupla A determinou a primitiva da função aplicou a propriedade aditiva da integral deixou de colocar o símbolo dx.

Figura 14 - Estudo piloto - Questão 1a - Produção da dupla de alunos A



A dupla B determinou a primitiva da função sem aplicar a propriedade aditiva da integral e deixou de colocar o sinal negativo no resultado final.

Figura 15 - Estudo piloto - Questão 1a - Produção da dupla de alunos B

a) $\int_0^3 (2x^2 - 4x - 1)dx \simeq \frac{2x^3}{3} - \frac{\overset{2}{4}x^2}{\cancel{2}} - x \Big]_0^3 = \frac{2\cdot 3^3}{3} - 2\cdot 3^2 - 3$

$= \frac{2\cdot \overset{9}{\cancel{27}}}{\cancel{3}} - 2\cdot 9 - 3 = \cancel{18} - \cancel{18} - 3 = (3)$

Os estudantes da dupla C determinaram a primitiva da função, calcularam a integral proposta, lançando mão da propriedade aditiva da integração.

A Questão 1 item b) foi incluída porque a grade curricular do curso contém o item referente ao estudo de integrais impróprias. Embora esse seja um assunto que muitas vezes não seja tratado no curso de Computação, quisemos constatar se os estudantes mobilizavam o conceito de integral imprópria.

Segue a descrição dos resultados obtidos.

A dupla A explicitou que a função não está definida em $x = 0$, dizendo que ela é descontínua nesse ponto, concluindo que essa integral não existe. Não demonstrou conhecer que a integral poderia ser expressa como soma de duas integrais impróprias. A afirmação que a função é descontínua pode significar, para esses alunos que a função não está definida no ponto.

Abaixo reproduzimos o protocolo dessa dupla

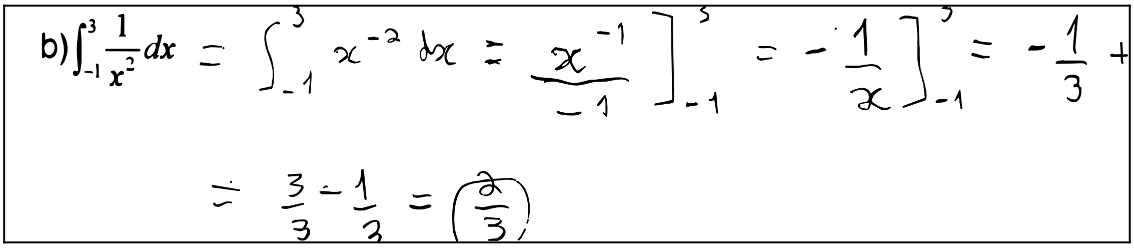
Figura 16 - Estudo piloto - Questão 1b - Produção da dupla de alunos A

b) $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}dx$ Não existe pois quando x assume o valor 0 a função é descontínua, e conhecido que a integral de uma função descontínua é uma função descontínua, a integral no intervalo dado não existe.

O aluno afirma que: “A integral de uma função descontínua é uma função descontínua”. Esta afirmação não é correta, uma vez que a integral de uma função descontínua é contínua.

A dupla B aplicou as técnicas de integração sem indicar a percepção de que a função não está definida em $x = 0$.

Figura 17 - Estudo piloto - Questão 1b - Produção da dupla de alunos B



Para essa dupla não parece estar evidente que condições devem estar satisfeitas pela função integranda para se poder aplicar diretamente o TFC.

A dupla C também mostrou desconhecer que a função não está definida em $x = 0$, como também expressou erroneamente a primitiva da função integranda, expressando:

$$b)\ \int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\ln\ x^2\right] = \left[\ln\ 9 - \ln\ 1\right]$$

Neste caso parece que o aluno fez uma generalização abusiva da regra da integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ cuja primitiva é $g(x) = \ln|x| + C$.

Observamos que só uma dupla mostrou perceber que a função integranda não está definida em um ponto do intervalo de integração. As duplas A e B mobilizaram conhecimentos antigos que funcionaram como ferramentas para resolver, ao menos em parte, a questão.

Questão 2:

Se $g(x) = \int_{3}^{x} 2t\,dt$ determine:

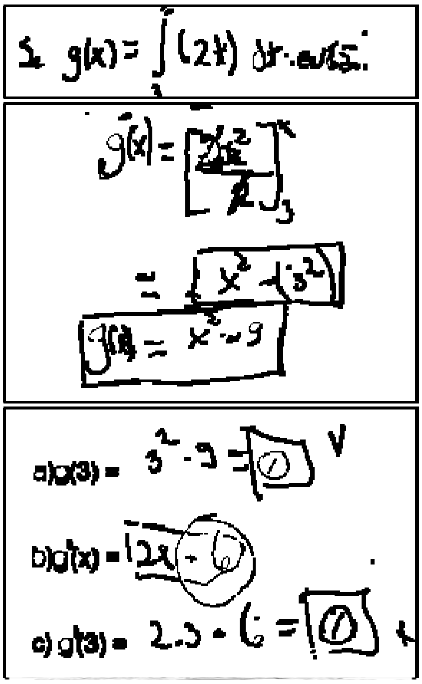
a) $g(3) =$; b) $g'(x) =$; c) $g'(3) =$

Nenhuma das três duplas registrou comentários.

Calcularam o $g(x)$ e em seguida $g'(3)$.

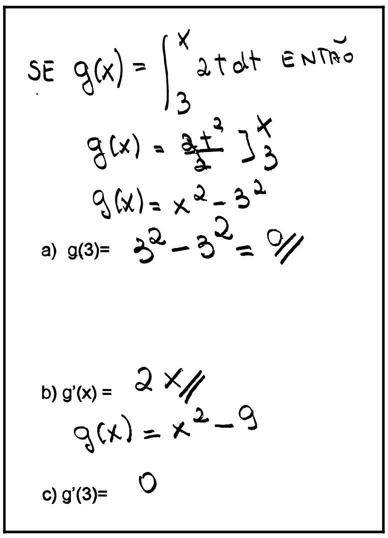
Os estudantes da dupla A, provavelmente derivaram $g(x) = x^2 - 3^2$ e com isso calcularam o $g'(3)$ incorretamente. A dupla B derivou o resultado da integral $g(x)$ obtendo o $g'(x)$ calculando diretamente esta função no ponto 3.

Figura 18 – Estudo piloto - Questão 2c - Produção de dupla de alunos A



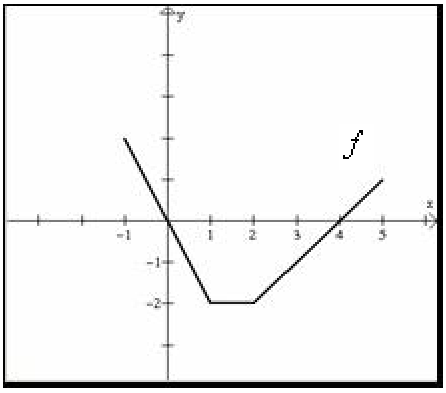
Os estudantes da dupla C derivaram o resultado $g(x)$ obtendo o $g'(x)$, provavelmente ao calcular $g'(3)$ substituíram o valor de x em $g(x)$, comprometendo o resultado.

Figura 19 - Estudo piloto - Questão 2c - Produção da dupla de alunos C



Questão 3:

Queríamos investigar se a partir do gráfico da função f definida no intervalo [-1,5] se os alunos sabiam identificar o gráfico da função F como sendo o da integral da função f no intervalo definido e se conseguiriam justificar sua escolha.



Pudemos observar que os alunos das duplas A e C não souberam identificar definitivamente o gráfico de F. No entanto a dupla A deu indícios de que tentou relacionar o gráfico de F com o de f, ao explicitar:

"Suponha que esse intervalo é definido por três funções lineares, contínuas f. Suas integrais serão três equações de segundo grau contínuas, dentro do intervalo definido; e que $f(x) = F'(x)dx.$ O que nos permite indicar duas letras a e b, como possíveis integrais de $f(x)$".

Percebe-se pela descrição desses alunos, que eles interpretaram uma função descrita por três sentenças como sendo três funções e, além disso, classificam como sendo linear qualquer função cujo gráfico é uma reta. Também tomam a palavra função como sinônima de equação que é uma confusão que observamos, ocorre com freqüência em nossa prática como professora em sala de aula.

Apesar de não terem identificado um dos gráficos como sendo a resposta definitiva, indicaram corretamente a possibilidade de a resposta ser a) ou b). Provavelmente se esses alunos fizessem um jogo de quadros gráfico e algébrico, observando que a integral de uma função positiva é positiva, teriam optado pelo gráfico b.

Figura 20 - Estudo piloto - Questão 3 - Produção da dupla A

a) Quais dos gráficos a); b); c); d) ; e), f) poderia ser o gráfico da

$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$?

b) Circule a letra correspondente a resposta certa. Justifique sua escolha.

a b c d e f

c) Considerando a função F definida no item acima, quais os gráficos a); b); c); d) ; e), f) poderia ser o gráfico F' ? Circule a letra correspondente a resposta certa. Justifique sua escolha.

a b c d e f

b. justificativa na folha da frente.

c. supondo que $f(x) = F'(X)$, então $F'(x)$ é a função já dada, igual ao gráfico d.

Justificativa:

Figura 21 - Estudo piloto - Questão 3 - Produção da dupla A

Suponha que esse intervalo é definido por três funções lineares, com duplas f. Suas integrais serão 3 equações de segundo grau contínuas, dentro do intervalo definido, e que $\int f(x) = F(x)\, dx$.

O que nos permite indicar a letra a e b, como possíveis integrais de $f(x)$

Os alunos da dupla B relacionaram o gráfico de F com o de f corretamente.

A dupla C não resolveu a questão.

Pelos resultados da questão 3 verificamos que foi difícil para os estudantes aplicar o TFC em um contexto gráfico, essa dificuldade ficou mais presente na dupla C.

Todavia precisamos considerar que esta questão não é simples, ou trivial. Contudo a mantivemos no questionário definitivo, pois o objetivo era avaliar os conhecimentos mobilizados pelos alunos sobre o TFC.

Questão 4:

Com a Questão 4, pretendíamos verificar se o aluno pode afirmar a condição: se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, então, $g'(x) = f(x)$.

As duplas B e C verificaram cada uma das afirmações dada na questão, calculando a integral e em seguida derivando o resultado obtido.

Esse procedimento pode indicar que talvez não tenha sido dada uma atenção efetiva a primeira parte do enunciado sobre serem verdadeiras as afirmações.

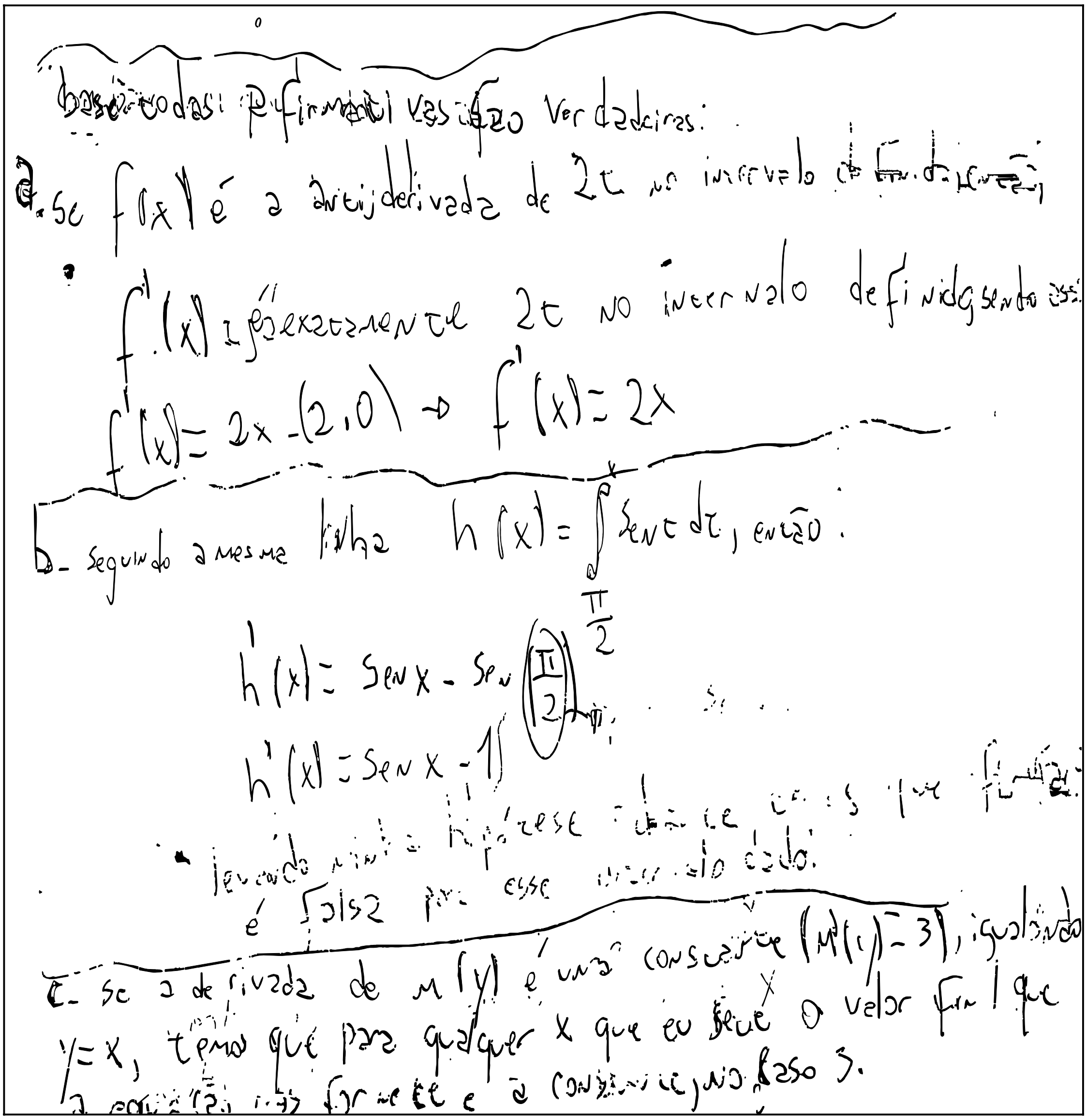
Os estudantes da dupla A ao verificarem a afirmação da questão deixaram de encontrar uma primitiva da função integranda aplicando TFC e com isso obtendo um resultado que não condizia com a afirmação inicial. Concluindo por exemplo que a afirmação é falsa, expressando:

Se $h(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} sentdt$, então

$$h'(x) = senx - sen\frac{\pi}{2}$$

$$h'(x) = senx - 1$$

Figura 22 - Estudo piloto - Questão 4 - Produção da dupla de alunos A


Todas as afirmativas são verdadeiras:

a. Se $f(x)$ é a antiderivada de $2t$ no intervalo [illegible]

$f'(x)$ é exatamente $2t$ no intervalo definido sendo assim

$f'(x) = 2x \cdot (2,0) \to f'(x) = 2x$

b. Seguindo a mesma linha $h(x) = \int_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \, dt$, então:

$h'(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$h'(x) = \operatorname{sen} x - 1$

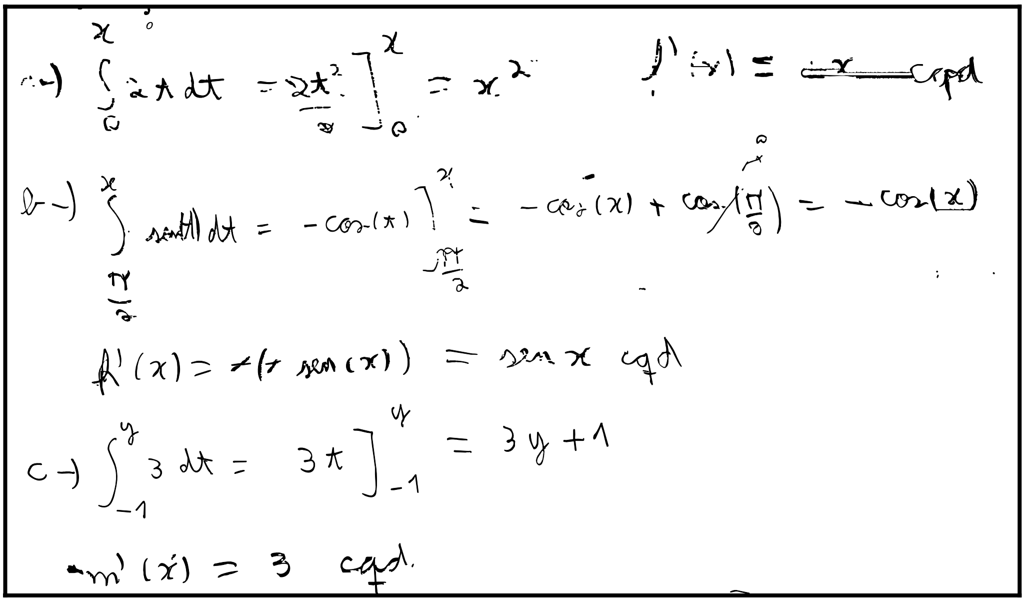
[illegible] hipótese [illegible] é falsa para esse intervalo dado.

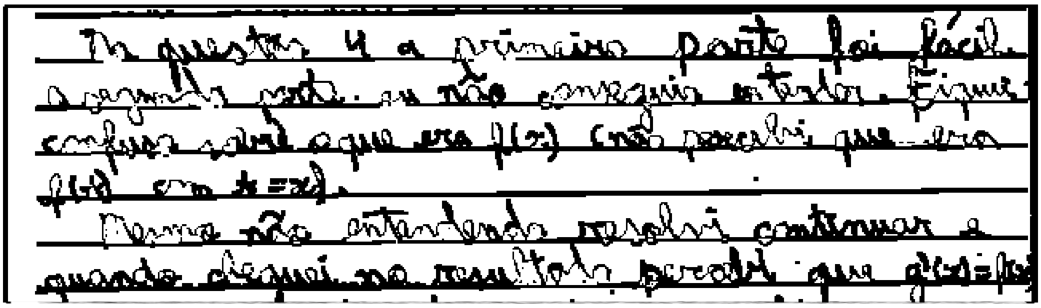
c. Se a derivada de $m(y)$ é uma constante $(m'(y) = 3)$, igualando $y = x$, temos que para qualquer x que eu fizer o valor final que [illegible] caso 3.

Apresentamos a seguir a produção da dupla B.

Os alunos apresentaram também um comentário discursivo (escrito na primeira pessoa do singular).

Figura 23 - Estudo piloto - Questão 4 - Produção da dupla de alunos B





O comentário feito explicita que não são claros os papeis desempenhados pelas variáveis x e t na função $g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$. O que nos deu indicação que o questionário definitivo deve tratar dessa questão.

Os protocolos dos alunos permitem levantar as primeiras conclusões que se seguem:

- Os alunos conseguem determinar a primitiva da função;
- Aplicar a propriedade aditiva da função com alguns equívocos algébricos.

O cálculo de integral imprópria foi incluído porque a grade curricular do curso contém o estudo de integral imprópria

Decidimos incluir no questionário definitivo uma função definida em todo intervalo, porém descontínua em um ponto.

Verificamos que foi difícil para os estudantes aplicar o TFC em um contexto gráfico.

Todavia precisamos considerar que esta questão não é simples, ou trivial. Contudo a mantivemos no questionário definitivo, pois o objetivo era avaliar os conhecimentos mobilizados pelos alunos sobre o TFC.

Os papeis desempenhados pelas variáveis x e t na função $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, nos dá indicação que o questionário definitivo deve tratar dessa questão.

Pelas análises dos protocolos do estudo piloto nós resolvemos aplicar o questionário definitivo a um curso de Licenciatura em Matemática, cuja carga horária é maior e que possivelmente o conteúdo previsto possa ser ministrado com mais ênfase.

Capítulo 6

6 O QUESTIONÁRIO

Segadas, referência para nosso estudo, realizou sua pesquisa com alunos de Cálculo I de cursos de Matemática, Engenharia e Informática de uma Universidade Pública do Rio de Janeiro. Seu trabalho resultou na sua tese de doutorado, defendida no Instituto de Educação da Universidade de Londres, sob a orientação da professora Célia Hoyles.

No seu estudo, a pesquisadora se propôs a identificar qual a compreensão que os alunos, ao final do curso de Cálculo I, detinham quanto ao Teorema Fundamental do Cálculo e os conhecimentos envolvidos nesse teorema.

As informações da pesquisa de Segadas, e os resultados do nosso questionário-piloto forneceram os subsídios para a elaboração do questionário definitivo de nossa pesquisa, que resultou composto de oito questões.

Um dos resultados do questionário-piloto mostrou que os alunos tiveram dificuldades em identificar o gráfico da função $F:[a,b]\to\Re$ dada por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, a partir do gráfico de f. Dessa forma decidimos incluir duas questões iniciais explorando a relação entre a integral e a área da região plana sob o gráfio da função integranda.

Identificamos também que outro complicador para os estudantes eram os papéis das variáveis x e t que apareceu na definição da função *F*. Assim foram propostas três questões, na tentativa de explorar tais dificuldades e dar subsídios para a comparação entre os gráficos de F e de f.

Decidimos também incluir uma questão “aberta” (questão 8), para investigar como os alunos interpretam o enunciado do TFC, na criação de um exemplo de função que satisfaça as condições do Teorema.

Escolhemos em uma turma de Licenciatura em Matemática em uma Universidade particular de São Paulo que cursavam CDI para aplicar o questionário.

Esses alunos cursavam o terceiro semestre e haviam estudado o TFC no semestre anterior no nível de profundidade adequado às necessidades de nossa pesquisa, diferentemente do curso escolhido quando da aplicação do questionário piloto.

O questionário definitivo foi aplicado em dois períodos de 45 minutos, com um intervalo de aproximadamente 10 minutos. Participaram dos trabalhos 13 duplas de alunos, no horário normal de aulas. Não havíamos antes sido professora desta classe, portanto não se tratavam de alunos nossos conhecidos.

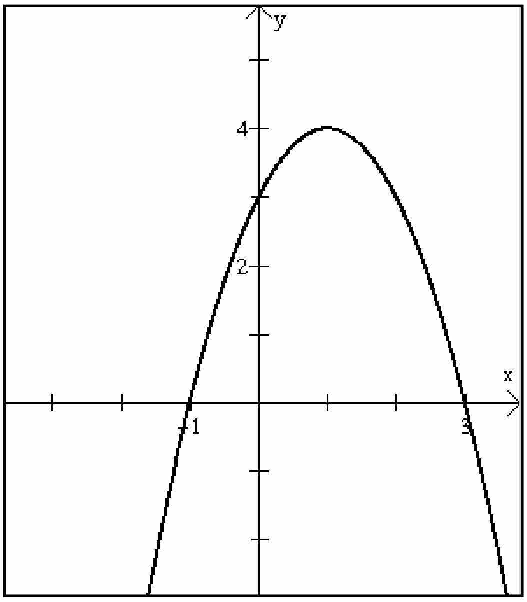
Contamos com a presença do professor da turma, que desempenhou papel colaborativo, ajudando a distribuir o questionário e com a observação de uma outra colega, que anotou perguntas e ações dos estudantes, além dos fatos que ocorreram durante a aplicação do questionário. Os períodos de resolução do questionário decorreram em perfeita harmonia e obtivemos uma boa contribuição dos alunos.

6.1 As questões

A seguir descrevemos as 8 questões que compõem o instrumento da pesquisa e os seus objetivos.

Questão 1:

O gráfico da função dada por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ está representada abaixo:



a) Calcule: $\int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)dx$

b) Qual é o significado geométrico do resultado obtido no item a)?

c) No gráfico, indique esse resultado.

Com a Questão 1, item a), pretendíamos verificar:

- Se os estudantes determinam a primitiva de uma função polinomial.

- Se os alunos calculam a integral proposta, uma vez calculada a primitiva.

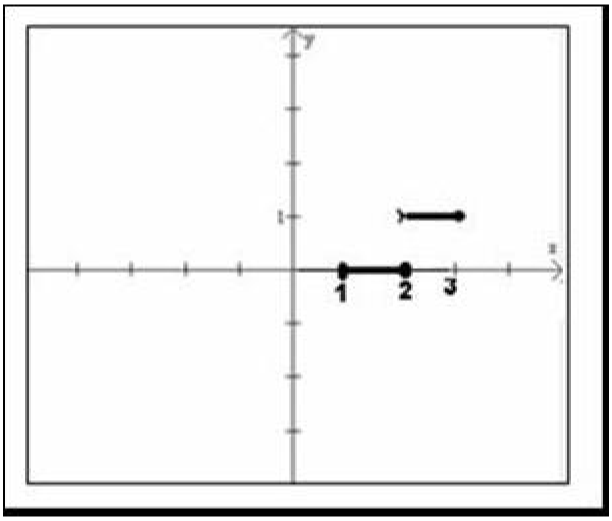
- Se os alunos, ao resolverem a questão, lançam mão da propriedade aditiva.

Com os itens b) e c) almejávamos verificar se os alunos relacionam a integral com a área de região plana, bem como se identificam tal região e, assim, verificar se lançam mão de um conhecimento que Douady chama de “Antigo”, levando-se em conta que para resolver um problema, o estudante mobiliza conhecimentos adquiridos. Esses conhecimentos funcionam como ferramenta.

Questão 2:

Como no questionário piloto, alguns alunos afirmaram que a função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ é descontínua em zero, quando na verdade, trata-se de uma função contínua mas não definida num ponto interior do intervalo de integração, decidimos apresentar agora uma função definida em todo o intervalo, porém descontínua em um ponto.

Considere a função f definida em $[1,3]$, cujo gráfico é representado abaixo:



a) Observando o gráfico indique o valor da integral de f no intervalo $[1,3]$.

b) A expressão algébrica da função acima representada é:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & se\ \ 1 \le x \le 2 \\ 1, & se\ \ 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Como você calcula algebricamente a integral dessa função no intervalo $[1,3]$?

c) A função f é contínua?

Com o primeiro ítem almejávamos verificar se, sendo dado o gráfico o aluno conseguia indicar o valor da integral de f , no intervalo [1,3].

Com o item b) desejávamos verificar como o aluno calcula a integral de uma função descontínua dada no domínio algébrico e se ele confronta o resultado com aquele obtido graficamente.

Com o item c) pretendíamos verificar quais são as concepções dos alunos sobre função contínua.

O objetivo da Questão 2 é verificar como os alunos reagem frente a possibilidade de calcular a integral de uma função descontínua num ponto. É fato que uma função pode ser integrável sem ser contínua, enquanto que para aplicar o TFC, é preciso encontrar uma primitiva da função integranda, e se esta for contínua, tal primitiva existe.

Explicitando:

A função F definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, com f uma função contínua é derivável e, além disso, $F'(x)=f(x)$; isto é, a derivada da integral de uma função contínua nós dá, essa mesma função, o que constitui a idéia fundamental de todo o Cálculo Diferencial e Integral.

Para Douady, a formulação de um problema deve envolver pelo menos dois domínios. Cada um deles serve de referência para o outro e sua interação possibilita dar significado aos conceitos que estão em jogo. Nessa questão a interação diz respeito às trocas entre os domínios algébricos e gráficos.

As questões 3 e 4 foram elaboradas com vistas a questão 5, também para retomar o significado geométrico da integral.

Questão 3:

Dada a função $f(t)=0$, para $1 \le t \le 2$ considere agora a função F dada por $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ e determine:

a) $F(1)$

b) $F(2)$

c) $F(x)$, para $1 \le x \le 2$

Questão 4:

Dada a função $f(t)=1$, para $2 \le t \le 3$, considere agora a função F dada por $F(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt$ e determine:

a) $F(2)$

b) $F\left(\frac{5}{2}\right)$

c) $F(x)$ para $2 \le x \le 3$

d) Qual é o significado geométrico de cada um dos resultados?

Questão 5:

Considerando a função $f(t)=\begin{cases} 0, se\, 1 \le t \le 2 \\ 1, se\, 2 < t \le 3 \end{cases}$, observe que a função $F(x)=\int_{1}^{x} f(t)dt$, pelos resultados anteriores (questões 2, 3 e 4), expressa-se por

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ se } 1 \le x \le 2 \\ x-2, \text{ se } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico da função F.

b) Observando os gráficos de f e F, responda se cada uma dessas funções é ou não contínua.

c) Ainda observando o gráfico da função F, você sabe afirmar se a função é derivável?

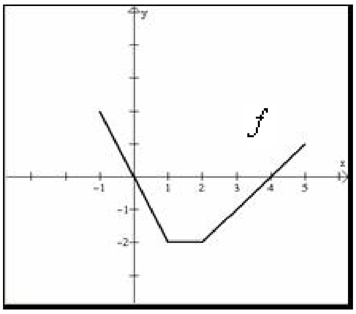
A Questão 5 tem como objetivo verificar: a concepção dos estudantes sobre continuidade das funções envolvidas e a relação entre os gráficos F e f.

Com as três questões pretendíamos verificar o conhecimento do aluno em relação do significado da função $F(x)=\int_{1}^{x} f(t)dt$, bem como familiarizá-lo com os papéis das variáveis x e t que nela figuram.

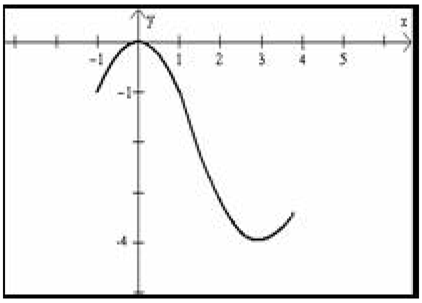
Para Douady, quando um aluno resolve parcialmente uma questão, é possível para o professor identificar conhecimentos requeridos nos domínios em jogo avivá-los, para que o estudante chegue a uma solução completa.

Questão 6:

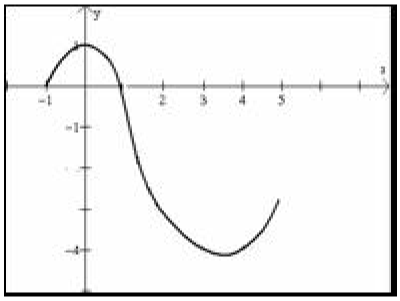
Dado o gráfico da função *f* definida no intervalo [-1,5] e mais os gráficos a); b); c); d); e) a seguir:



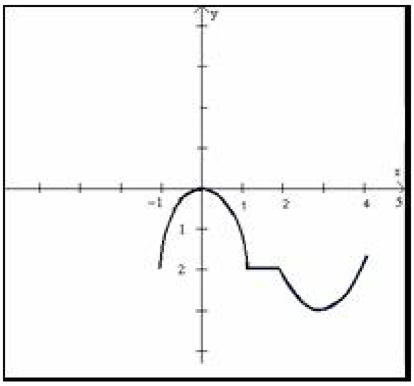
a)



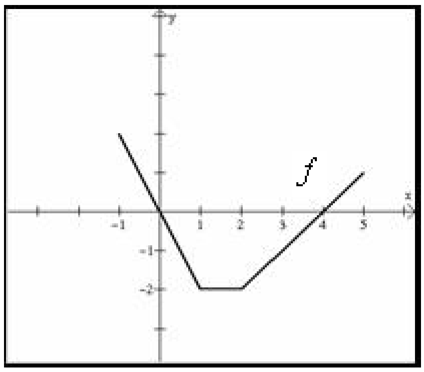
b)



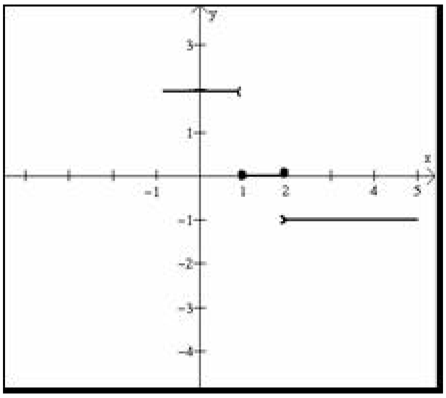
c)



d)



e)



Pergunta-se:

Qual dos gráficos a); b); c); d); e); você acha que representa a função dada por: $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$. Justifique sua escolha.

Considerando a função F definida no item anterior, qual dos gráficos representa função F' ? Justifique sua escolha.

A questão 6 é a mesma questão 3 do questionário piloto. Com ela desejávamos verificar, agora em um Curso onde a disciplina Cálculo é dada em maior profundidade, se os alunos:

Sabiam identificar o gráfico da função F como sendo o da integral da função f no intervalo definido.

Conseguiam justificar sua escolha.

Compreendiam a relação dos gráficos das funções F e f .

Explicitando: A função $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$ está no domínio algébrico, pretendíamos verificar se os alunos, frente ao domínio geométrico, visualizavam o seu significado.

Por exemplo:

Dado o gráfico da função f (domínio geométrico).

Em $[-1,0]$, gráfico de f : acima do eixo dos x. Isto significa que f é ai positiva, logo o número $\int_{-1}^{0} f(t)dt$ é positivo (domínio algébrico) e portanto a função F é positiva. Daí decorre que o gráfico de F está acima do eixo x (domínio geométrico) nesse intervalo. Observamos com esta análise que ficam descartados os gráficos a) e c).

Em $[0,1] \Rightarrow$ gráfico de f : abaixo do eixo x $\Rightarrow f$ é negativa $\Rightarrow \int_{0}^{1} f(t)dt$ é negativo e pela simetra do gráfico de f no intervalo $[-1,1]$, igual, em valor absoluto a $\int_{1}^{0} f(t)dt.$ $F(x) = \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0 \Rightarrow F(1) = 0$ $\Rightarrow$ gráfico de F corta o eixo x em $x = 1$.

Em $[1,2] \Rightarrow$ gráfico de , : abaixo do eixo x $\Rightarrow f$ é negativa $\Rightarrow \int_{1}^{2} f(t)dt$ é negativo $\Rightarrow$ gráfico F está abaixo do eixo x.

Em $[2,4] \Rightarrow$ gráfico de f : abaixo do eixo –x $\Rightarrow f$ é negativa $\Rightarrow \int_{2}^{4} f(t)dt$ é negativo $\Rightarrow$ gráfico F está abaixo do eixo x. Pela natureza cumulativa da integal, em $[1,4]$, F é decrescente.

Em $[4,5] \Rightarrow$ gráfico de f : acima do eixo x $\Rightarrow f$ é positiva $\Rightarrow \int_{4}^{5} f(t)dt$ é positiva. Porém, como $\int_{1}^{4} f(t)df$ é, em valor absoluto, significativamente maior que $\int_{4}^{5} f(t)dt$, o gráfico de *F*, no intevalo $[4,5]$ situa-se abixo do eixo x, interrompendo o decrescimento anterior de *F*, sem que se anule.

Questão 7:

As afirmações abaixo são verdadeiras. Como você justificaria cada um dos resultados, partindo do “*se”* e chegando ao “*então”.*

a) se $f(x) = \int_0^x 2tdt$, então, $f'(x) = 2x$;

b) se $h(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x sentdt$, então, $h'(x) = senx$;

c) se $m(y) = \int_{-1}^y 3dt$, então, $m'(y) = 3$.

Sendo $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ e considerando os dados acima, o que você pode dizer sobre $g'(x)$?

Com a Questão 7, esperávamos verificar se o aluno pode afirmar que: se $g(x) = \int_0^x f(t)dt,$ então, $g'(x) = f(x).$

O fato de os alunos terem explicitado, no questionário-piloto, que não são claros os papéis desempenhados pelas variáveis x e t na função $F(x) = \int_0^x ftdt$, levou-nos a trazer essa questão para o questionário definitivo, uma vez que foram incluídas outras que procuram explorar tais papéis.

Questão 8:

LIMA (1976, p. 256) apresenta o Teorema: “Dada $f : [a,b] \to R$ contínua, existe $F : [a,b] \to R$ derivável, tal que $F' = f$”. Em seguida denomina de Teorema Fundamental do Cálculo o seguinte: “Se uma função integrável $f : [a,b] \to R$ possui uma primitiva $F : [a,b] \to R$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$”.

a) Em sua opinião, porque esse teorema chama-se Teorema Fundamental do Cálculo?

b) Você pode dar um exemplo de uma função definida em um intervalo [*a, b*] que não satisfaça o teorema?

O objetivo da Questão 8 foi verificar quais condições devem satisfazer a função f para que se possa aplicar o TFC. Desejamos investigar se os estudantes identificavam corretamente, as condições contidas no enunciado do teorema .

6.2 Análise dos dados coletados

Para fazer análise dos dados obtidos com a aplicação do questionário, optamos pela formatação de quadros. Para cada questão, elaboramos um quadro em cuja parte superior figuram as perguntas e na inferior as respostas. A primeira coluna exibe os códigos que designam as duplas (A1 até A13), as três colunas seguintes referem-se às respostas dadas pelos estudantes.

Na análise da Questão 1, adotamos a seguinte legenda:

S: para indicar as duplas que determinaram a primitiva da função, calcularam a integral proposta uma vez calculada a primitiva e chegaram à resposta correta,

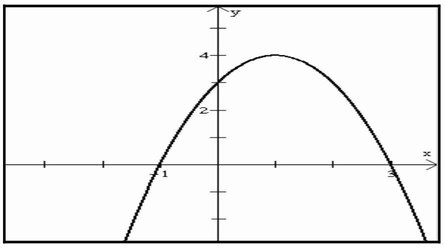
B: (item a) para indicar as duplas que iniciaram corretamente o cálculo da primitiva, porém cometeram erros durante o processo, não chegando ao resultado correto.

S* (item c) para indicar que o aluno explicitou dúvidas ao concluir a questão.

Quadro 1 – Tabulação dos resultados da Questão 1

Questão 1

O gráfico da função dada por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ está representada abaixo:



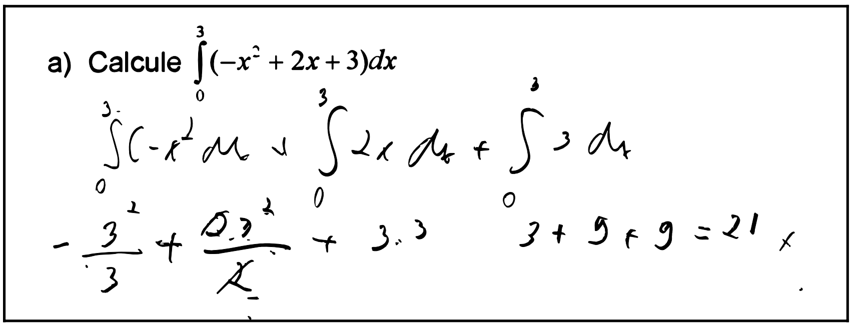
	Item a	Item b	Item c
Duplas de alunos	Calcule $\int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)dx$	Qual o significado geométrico obtido no item a?	Indique no gráfico esse resultado.
A1	S	S O resultado geométrico obtido é a área	S * Produção do aluno figura 29
A2	S	S O valor obtido representa a área sobre o gráfico.	S
A3	S	S Que a área do ponto (0,0) ao (0,3) é igual a 9 u.a.	S
A4	S	S Área	S
A5	S	S Área do gráfico no intervalo de 0 a 3	S
A6	S	S Área do gráfico no intervalo de 0 a 3	S
A7	B $\int_0^3 -x^2 dx + \int_0^3 2xdx + \int_0^3 3dx$ $-\frac{3^2}{3} + \frac{2.3^2}{2} + 3.3 = 21$	S Área do gráfico no intervalo de 0 a 3	S
A8	S	S Área	S
A9	S	S Área	S
A10	B $-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x \Big\vert_0^3 + C$ $= 27 + 9 + 9 = 45\ u.a$	S Área	S

A11	B $\int^{3} (-3)^{2} + 2.3 + 3 - \int_{0} (+3)$ $= 9 + 6 = 15\ u.a$	S Área no intervalo de 0 a 3	S* “Porque não pinta para baixo.”
A12	B $-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\Big\|_0^3$ $= -\frac{3^3}{3} + 3^2 = \frac{27}{3} + 9 = 18$	S Área entre 0 a 3	S
A13	B $\left[_0^3 \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) + C\right.$ $= -9 + 9 + 3 + C = 3 + C$	S Cálculo da área no intervalo de 0 e 3	S

Apresentamos a seguir a avaliação do desempenho dos estudantes relativo ao item a):

Analisando a produção da dupla A7, pudemos observar que foi aplicada a propriedade aditiva, porém, ao determinar a primitiva da função $g(x) = -x^2$ a dupla deixou de somar uma unidade no expoente, determinando, o resultado da integral incorreto.

Figura 24 – Questão 1 a - Produção da dupla de alunos A7.


a) Calcule $\int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)dx$

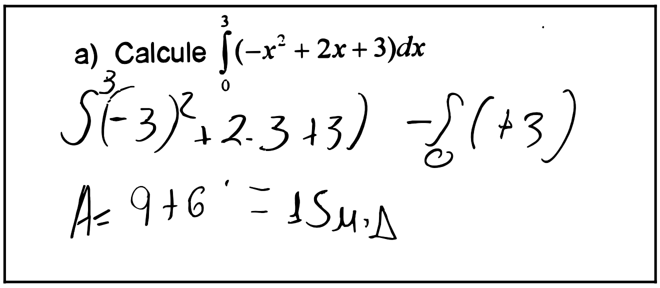
$\int_0^3 (-x^2) dx + \int_0^3 2x\, dx + \int_0^3 3\, dx$

$-\frac{3^2}{3} + \frac{2.3^2}{2} + 3.3 \quad 3 + 9 + 9 = 21$ x

Apesar de não terem chegado ao resultado correto verificamos que esses estudantes sabem determinar a primitiva da função como também calcular a integral; possivelmente houve uma distração ao determinar a primitiva da função $g(x) = -x^2$.

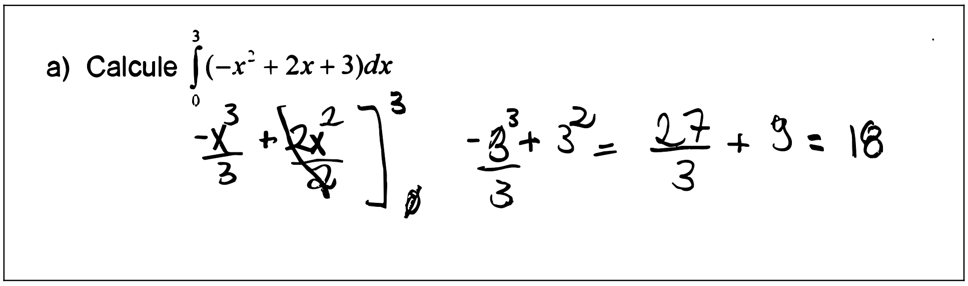
A dupla A11 não lançou mão da propriedade aditiva da integral, também não determinou a primitiva da função. Analisando o protocolo dos estudantes, observamos que eles substituíram os limites de integração na função dada sem determinar a sua primitiva, grafando um só limite em cada parcela da função polinomial. A substituição da variável pelos limites de integração foi um fator complicador, a ponto de eles não buscarem uma primitiva.

Figura 25 – Questão 1 a - Produção da dupla de alunos A11



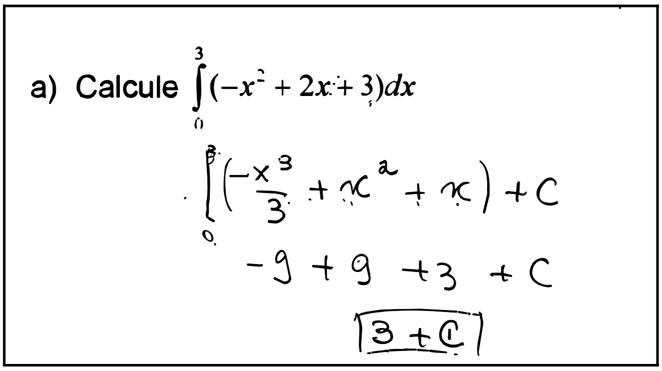
A dupla de estudantes A12 não apresentou o resultado correto, porém verificamos pelos seus protocolos que ao calcular a primitiva da constante cometeram um engano grafando zero, o que pode indicar equívoco com a derivada de uma constante.

Figura 26 – Questão 1 a - Produção da dupla de alunos A12



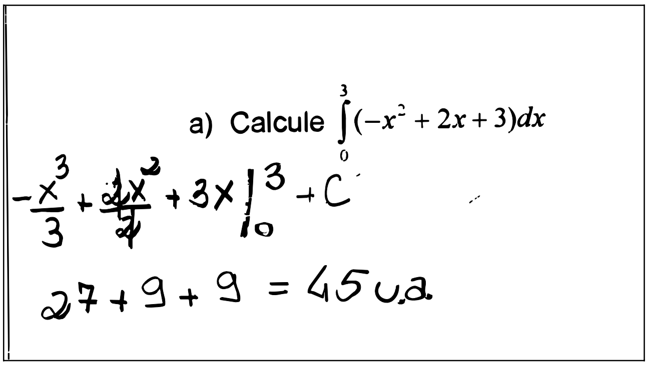
A dupla de alunos A13 determinou a primitiva da função. Eles explicitaram a utilização da propriedade aditiva da integral, e expressaram x em vez de 3x, como sendo a primitiva da constante $g(x) = 3$. Verificamos que foi apresentada a constante arbitrária em sua resposta. É possível que os estudantes saibam determinar a primitiva de uma função como também calcular a integral, e que não tivessem atentado para a constante 3.

Figura 27 – Questão 1 a - Produção da dupla de alunos A13.



O protocolo da dupla de estudantes A10 indica que os alunos determinaram a primitiva, não fazendo explicitamente uso da propriedade aditiva e não observaram o sinal negativo do numerador da primeira parcela desconsideraram o denominador, ao calcularem $g(x) = \frac{-x^3}{3}$ no ponto 3.

Figura 28 – Questão 1 a - Produção da dupla de alunos A10



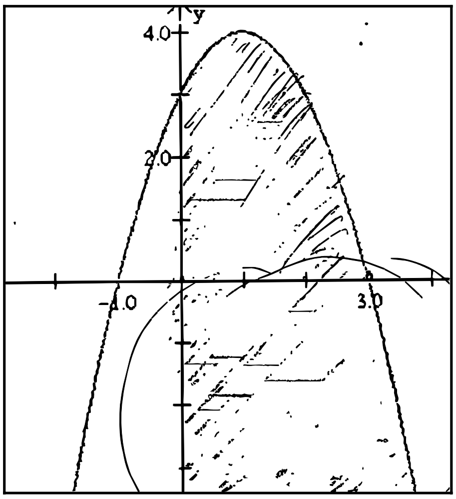
De acordo com a fundamentação teórica, consideramos que esta questão não envolvia qualquer conhecimento novo para o aluno. Entretanto as duplas de estudantes A7, A10, A12, A13 ao determinarem a primitiva de uma função cometeram alguns enganos prejudicando o resultado final. A dupla de alunos A11 mostrou desconhecimento em relação à determinação da primitiva.

Tomando no Quadro 1 o relato dos estudantes relativos ao item b) da Questão 1 verificamos que para eles o cálculo de área de figuras planas pode ser feito por integração.

As duplas de estudantes A1 e A11 relacionaram a integral com a área de região plana, porém ao identificar tal região mostraram desconhecimento de que a região plana em questão estava limitada pelo gráfico de f, pelas retas

$x = 0$, $x = 3$ e o eixo dos *x*. Relatamos no Quadro 1 a observação deixada pelos estudantes. Na figura 29, a indicação incorreta da região, apresentada pela dupla A1.

Figura 29 – Questão 1 c - Produção da dupla de alunos A1



De acordo com a fundamentação teórica a resolução desta questão envolve conhecimentos matemáticos (determinação da primitiva, cálculo da integral, propriedade aditiva, simplificação de fração) que são aplicados como ferramentas explícitas.

No Quadro 2, referente à Questão 2 a primeira coluna exibe os códigos das duplas de alunos e as três colunas seguintes referem-se as suas respostas.

Adotamos a seguinte legenda:

S: para indicar que o aluno expressou o valor da integral de f (item a); que calculou a integral, no domínio algébrico, de uma função descontínua e confrontou o resultado com aquele obtido graficamente (item b); que as respostas dos alunos sobre a continuidade da função estão corretas (item c).

B: para indicar que os estudantes iniciaram o cálculo da integral de f, porém cometeram erros durante o processo não chegando ao resultado correto.

B* (item a) para indicar que o aluno explicitou que o valor da integral é Ø (vazio).

B** (item c) para indicar que a resposta da dupla, sobre continuidade, não está correta ou respondeu que a função não é contínua, sem justificar, ou que não se lembrava.

B*** (item b) para indicar que calcularam algebricamente a integral interpretando a função no intervalo $[1,2]$ de x e a função no intervalo $[2,3]$ $f(x)=x+1$.

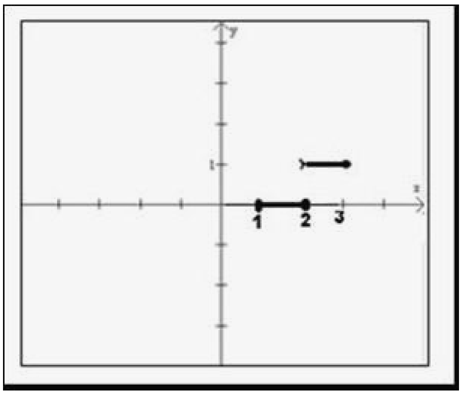
B**** (item b) para indicar que calcularam o valor da integral geometricamente.

N: para indicar que as duplas não resolveram a questão.

E: para indicar que o aluno exibiu processos equivocados.

Quadro 2 – Tabulação dos resultados da Questão 2

Questão 2
Considere a função f cujo gráfico é representado abaixo:



	Item a	Item b	Item c
Duplas de alunos	Observando o gráfico indique o valor da integral de f no intervalo $[1,3]$.	A expressão algébrica da função acima representada é: $f(x)=\begin{cases}0, & se \quad 1 \le x \le 2 \\ 1, & se \quad 2 < x \le 3\end{cases}$ Como você calcula algebricamente a integral dessa função?	A função f é contínua?
A1	B* O valor é Ø porque o segundo o gráfico, a função não tem área	B*** $\int_1^2 x + \int_2^3 x+1 = \frac{x^2}{2}\Big\|_1^2 + \frac{x^2}{2}+x\Big\|_2^3 = \frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$	B** Não é contínua como mostra o gráfico
A2	S	S	S Não, há uma descontinuidade no ponto $x=2$.

A3	S	S	B** Não, pois há intervalos entre uma e outra
A4	S	B**** $A = b.h = 1u.a$	B** Não
A5	E $\int_2^3 x.dx = \frac{x^2}{2} + C\Big\|_2^3 = \left\|\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right\| = \frac{5}{2}$	B**** $A = 1.1 = 1m^2$	B** Sim
A6	S	N	B** Não
A7	S	S	S
A8	S	B**** $A = l^2 = 1$.	B** Sim
A9	S	S	B** Não
A10	S	B**** $1m^2$	B** Não
A11	N Indicou $\int_2^1 (x)dx$, não efetuou cálculos.	S	B** Não lembro
A12	S	B**** A = b.h =1.	B** Não
A13	B* O valor é Ø, pois de acordo com o gráfico a função não tem área.	B*** $\int_1^2 x + \int_2^3 x + 1 = \frac{x^2}{2}\Big\|_1^2 + \frac{x^2}{2}\Big\|_2^3 + x\Big\|_2^3 = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) + 1 = 5$	B** Não, pois é delimitado entre 1 e 3

A análise da Questão 2 foi realizada observando primeiramente as produções dos alunos referentes aos itens a e b e em seguida ao item c.

As duplas de alunos A1 e A13 explicitaram que o valor da integral de f é vazio porque segundo o gráfico, a “função não tem área”. Nos seus protocolos, (item b), verificamos que calcularam algebricamente a integral chamando de $f(t) = x$ se $1 \le t \le 2$ e $f(t) = x + 1$ se $2 < t \le 3$. Talvez tenha interpretado que em [*1, 2*], pelo gráfico coincidir com o eixo *x*, a função é $y = x$ e em [*2, 3*] pelo gráfico ser paralelo ao eixo *x* e estar uma unidade acima, a função é $y = x + 1$.

Figura 30 – Questão 2 - Produção da dupla de alunos A1.

a) Observando o gráfico indique o valor da integral de f.

- O VALOR É Ø PORQUE SEGUNDO O GRAFICO, A FUNÇÃO NÃO TEM ÁREA.

As duplas A1 e A13, no item b), ao aplicarem a propriedade aditiva da integral deixaram de colocar a diferencial *dx*.

Figura 31 – Questão 2 – item b) Produção da dupla de alunos A1

Como você calcula algebricamente a integral dessa função?

$$\int_1^2 x + \int_2^3 x+1 = \left.\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left.\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} + \left(\frac{3^2}{2}+3\right) - \left(\frac{2^2}{2}+2\right) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{9}{2}+3\right) - \left(\frac{4}{2}+2\right) = \frac{3}{2} + \left(\frac{15}{2} - \frac{8}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$$

A dupla de alunos A5 ao calcular o valor da integral provavelmente não observou o gráfico da função no intervalo de $[1,2]$ partiu para o intervalo $]2,3]$ denotando a função de *x*, mostrando desconhecimento para identificar a lei da função a partir do gráfico.

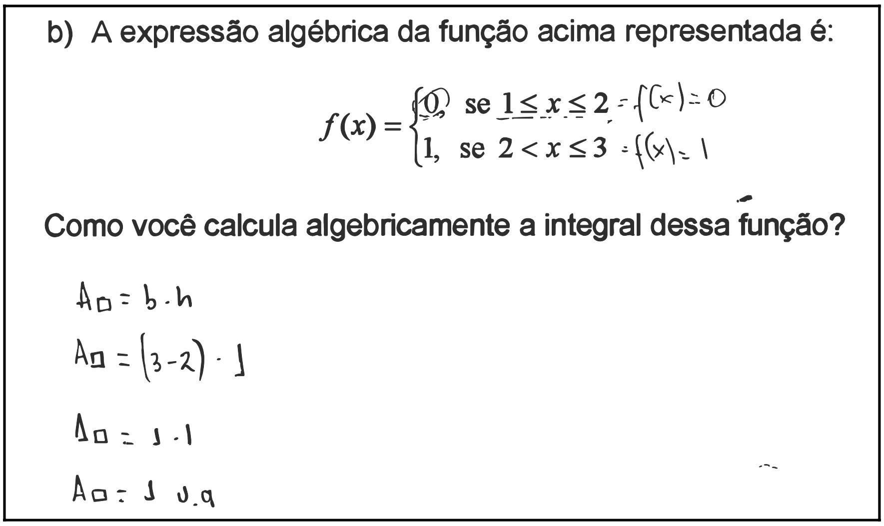
Esses estudantes aplicaram a técnica de integração corretamente acrescentando a constante C, mas talvez não tenham percebido que ao efetuar o cálculo da integral definida não é necessário colocar a constante. Fizeram a substituições dos extremos superior e inferior corretamente, porém não chegaram ao resultado correto.

A dupla de alunos A11 apenas indicou a integral de f e ao colocar os extremos de integração inverteu as posições expressando $\int_2^1 x\,dx$. Além disso, denotaram a função integranda por $f(x) = x$, expressando desconhecimento para identificar a função sendo dado o seu gráfico.

Em relação ao item b as duplas A4, A5, A8, A10 e A12 calcularam o valor da integral geometricamente e não algebricamente conforme pedia o enunciado, isto é calcularam a área do retângulo.

O protocolo da dupla A4 dado a seguir, ilustra tal fato.

Figura 32 - Questão 2 - Produção da dupla de alunos A4


b) A expressão algébrica da função acima representada é:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{se } 1\le x\le 2 \quad = f(x)=0\\ 1, & \text{se } 2<x\le 3 \quad = f(x)=1\end{cases}$$

Como você calcula algebricamente a integral dessa função?

A□ = b·h

A□ = (3-2)·1

A□ = 1·1

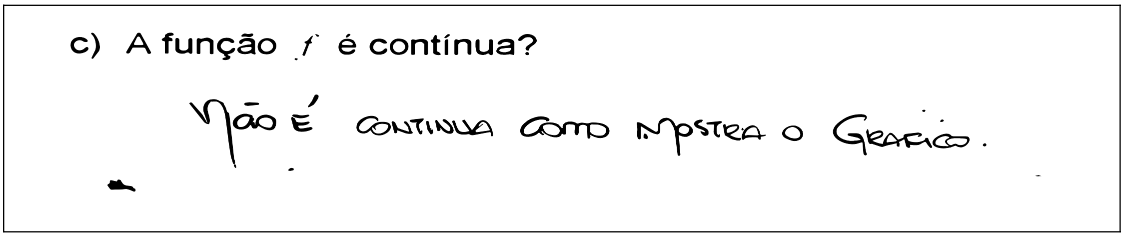
A□ = 1 u.a

De acordo com a fundamentação teórica, esses alunos lançaram mão de conhecimentos antigos resolvendo a questão no domínio geométrico.

Quanto ao item c o Quadro 2 mostra que somente a dupla de estudantes A2 deixou registrado que no ponto $x = 2$ a função f é descontínua, indicando que suas concepções sobre continuidade não estão claras.

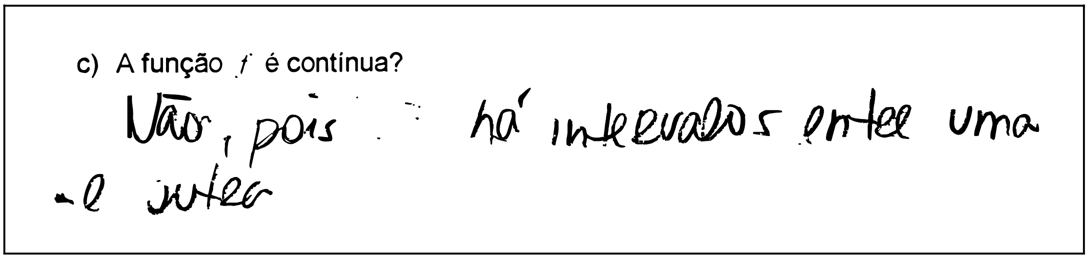
As duplas de alunos A1, A3, A4, A6, A10, A11, A12, A13 expressaram as suas respostas sem o rigor necessário ou por desconhecer sobre as concepções de função contínua, conforme os protocolos a seguir.

Figura 33 – Questão 2 - Produção da dupla de alunos A1


c) A função f é contínua?

NÃO É CONTINUA COMO MOSTRA O GRAFICO.

Figura 34 – Questão 2 - Produção da dupla de alunos A3


c) A função f é contínua?

Não, pois há intervalos entre uma e outra

As produções dos estudantes indicam que os conhecimentos anteriores utilizados como ferramenta, tais como o cálculo de área de uma região de integral definida foi utilizado, porém ficou constatado que em muitas situações tais ferramentas não foram empregadas corretamente.

No Quadro 3, referente à Questão 3 a primeira coluna exibe os códigos que designam as duplas de alunos e as três colunas seguintes referem-se às respostas dadas pelos estudantes.

Adotamos a seguinte legenda:

S: para indicar que o aluno conseguiu determinar: a) $F(1)$ b) $F(2)$ c) $F(x)$, $1 \le t \le 2$

B: para indicar que os estudantes iniciaram o cálculo da integral $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, porém cometeram erro durante o processo não chegando ao resultado correto ou iniciaram a resolução, mas não concluíram.

B* para indicar que os alunos colocaram somente o resultado sem explicitar qualquer procedimento.

N: para indicar que as duplas não resolveram a questão.

E: para indicar que a dupla exibiu processos equivocados.

Convém enfatizar que as questões 3 e 4 visam subdisiar a compreensão do significado da função F, principalmente no caso de ser ela definida por mais de uma sentença, fornecendo assim ferramentas para a resolução da questão 5.

Quadro 3 – Tabulação dos resultados da Questão 3.

Questão 3 Dada a função $f(t)=0$, para $1 \le t \le 2$, considere agora a função F dada por $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ e determine:			
	Item a	Item b	Item c
Duplas de alunos	$F(1)$	$F(2)$	$F(x)$, $1 \le t \le 2$
A1	N	N	N
A2	S	s	S
A3	S	S	S
A4	S	S	S
A5	S	S	S
A6	S	S	B $F(x)=\int_1^2 f(t)dt=\int_1^2 f(x)dx$
A7	E $F(1)=\int_1^1 tdt=\int 1dt=t$	E $F(2)=\int_1^2 f(t).dt$	E $F(x)=t+\int_1^2 f(t)dt$
A8	B* $F(1)=0$	B* $F(2)=0$	B* $F(x)=0$
A9	S	S	S
A10	S	S	S
A11	B* $F(1)=\int_1^1 f(t)dt=\int_1^1 0dt=0x+C$	B* $F(2)=\int_1^2 f(t)dt$	N
A12	B* $F(1)=0$	B* $F(2)=0$	B* $F(x)=0$
A13	S	S	S

A dupla A6 resolveu corretamente os itens a) e b) e no item c) colocou 2 e não x como limite superior da integral. Substituiu a variável t por x, mas deixou de empregar $f(t)=0$ para obter $F(x)=0$.

A dupla A7 cometeu equívocos na resolução da questão. Tal fato pode revelar uma dificuldade dos alunos em calcular a integral da função $f(t)=0$, para $1 \le t \le 2$. No entanto, eles perceberam o significado de $F(x)$, ao colocar no limite superior da integral os números 1 e 2 respectivamente quando se pediu para calcular o valor de $F(1)$ e $F(2)$, porém ao integrar a função no intervalo $[1,1]$, substituíram a função $f(t)$ por t, eliminando os limites de integração, e no lugar da função t foi colocado 1. Provavelmente derivaram

$f(t)=t$ e em seguida integraram, pois o resultado final foi t. Indicaram $F(2)=\int_1^2 f(t)dt$ e ao calcular o valor de $F(x)$ somaram os resultados obtidos nos itens a) e b).

As duplas de estudantes A8 e A12 não explicitaram qualquer cálculo, mas expressaram corretamente o resultado dos três itens.

A produção exibida pela dupla A11 apresenta desenvolvimento correto ao calcular o valor $F(1)$, porém não finalizou o procedimento acrescentando a constante C. Quanto ao item b esses estudantes indicaram o cálculo de $F(2)$, mas não o concluíram e não resolveram o item c.

As produções indicam que os estudantes buscaram os conhecimentos anteriores para utilizar como ferramenta, tais como o cálculo de primitivas e conceito de integral definida, porém ficou constatado que em muitas situações tais ferramentas não foram empregadas corretamente, principalmente no que se refere à integral da função nula.

No Quadro 4, referente à Questão 4 adotamos a seguinte legenda:

S: para indicar que os alunos determinaram: a) $F(2)$; b) $F\left(\frac{5}{2}\right)$ e c) $F(x)$ dada, a função $f(t)=1$, para $2 \leq t \leq 3$, deram significado geométrico a cada um dos resultados.

B: para indicar que os estudantes iniciaram o cálculo da integral de $F(x)=\int_2^x f(t)dt$, porém cometeram erro durante o processo não chegando ao resultado correto ou iniciaram a resolução, mas não concluíram.

B* para indicar que os estudantes colocaram somente o resultado sem efetuar qualquer procedimento.

N: para indicar que: as duplas não resolveram a questão.

E: para indicar que os alunos exibiram processos equivocados.

Quadro 4 – Tabulação dos resultados da Questão 4.

Questão 4 Dada a função $f(t)=1$, para $2 \le t \le 3$, considere agora a função F dada por $F(x)=\int_2^x f(t)dt$ e determine:				
	Item a	Item b	Item c	Item d
Duplas de alunos	$F(2)$	$F\left(\frac{5}{2}\right)$	$F(x),\ 2 \le t \le 3$	Qual é o significado geométrico de cada um dos resultados
A1	N	N	N	N
A2	S	S	S	N
A3	S	S	S	S Os resultados representam área
A4	S	S	S	S Área
A5	S	S	S	S Significado geométrico é sua correspondência com a área do gráfico montado para as integrais.
A6	N	N	N	N
A7	N	N	N	N
A8	S	S	S	S A área
A9	S	S	S	S Área
A10	S	S	S	N
A11	S	S	S	S Área
A12	B $F(2)=\int_2^2 2dt = 2t$	B $F\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}t$	N	N
A13	S	S	S	S Todos determinam área

Considerando as produções da dupla de alunos A1 notamos que não resolveram a questão 4, assim como também não resolveram a questão 3, indicando dificuldade em interpretar o significado da função F ou não disposição para realizar a tarefa. Já os estudantes da dupla A6, que haviam resolvido satisfatoriamente a questão 3, não resolveram esta questão 4.

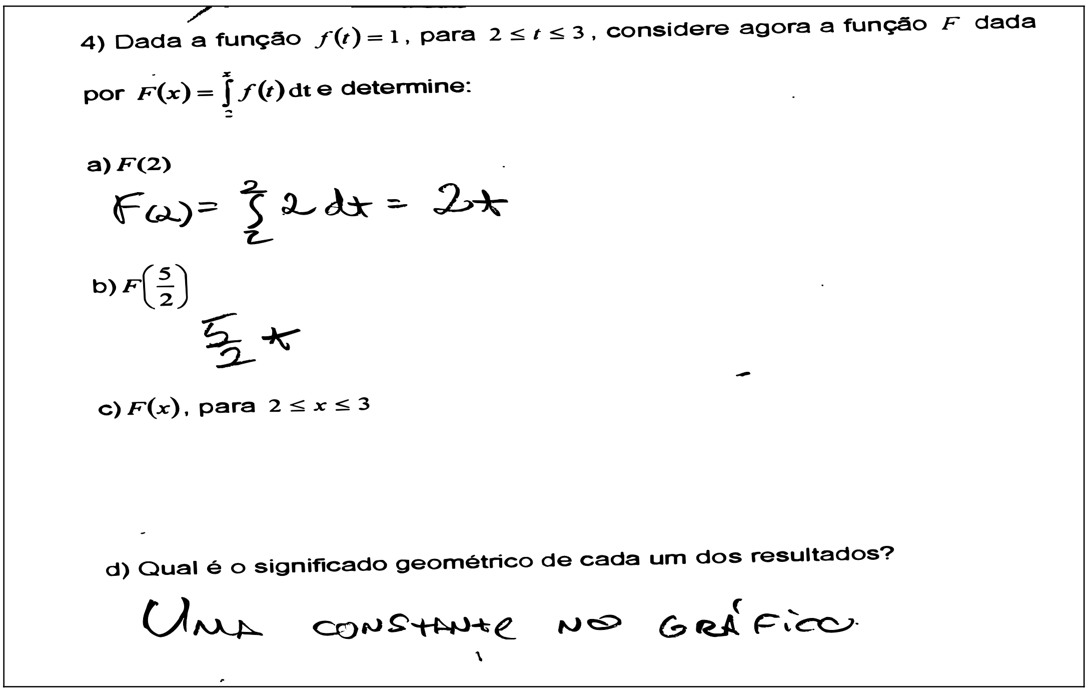
Os estudantes das duplas A2 e A10, de acordo com os seus protocolos, resolveram as questões 3 e 4, porém não responderam qual o significado geométrico dos resultados obtidos, indicando que possivelmente não relacionaram a integral com o cálculo de área de uma região plana.

A dupla de alunos A12, no item a, apresentou o cálculo da integral substituindo o limite superior por 2 quando se pedia para calcular o valor de $F(2)$, porém substituiu a função $f(t)$ por 2, concluindo que $F(2) = 2t$. Com este resultado "generalizou" que $F\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}t$ e não resolveu os demais itens.

Comparando a resolução das questões 3 e 4 feitas por esta dupla percebemos que não realizaram cálculos na questão 3, tendo colocado apenas o resultado.

Na questão 4 as produções indicam que os estudantes buscaram conhecimentos anteriores para utilizar como ferramentas, porém estas não foram empregadas corretamente. Sobre o significado geométrico de $F(x)$, esses alunos explicitaram algo que dificulta nossa conclusão a respeito de eles terem ou não a compreensão do significado da integral. Das treze duplas de estudantes que resolveram o item d), sete duplas produziram respostas corretas.

Figura 35 – Questão 4 - Produção da dupla de alunos A12.



4) Dada a função $f(t) = 1$, para $2 \leq t \leq 3$, considere agora a função F dada por $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ e determine:

a) $F(2)$

$F(2) = \int_2^2 2\,dt = 2t$

b) $F\left(\frac{5}{2}\right)$

$\frac{5}{2}t$

c) $F(x)$, para $2 \leq x \leq 3$

d) Qual é o significado geométrico de cada um dos resultados?

UMA CONSTANTE NO GRÁFICO.

No Quadro 5, referente à Questão 5 adotamos a seguinte legenda:

S: para indicar que os estudantes:

Esboçaram o gráfico da função F.

A partir dos gráficos de f e F, responderam se cada uma dessas funções é ou não contínua.

Sabem afirmar se a função F é derivável.

B (item a) para indicar que os alunos esboçaram o gráfico da função F, porém não fizeram corretamente.

C (item a) para indicar que os alunos efetuaram cálculo de integração em relação a função f e não esboçaram o gráfico da função F.

B* (item b) para indicar que a concepção da dupla sobre continuidade não é compatível com a definição matemática ou que ela respondeu que a função não é contínua sem justificar ou explicitou “não lembro”.

B** (item c) para indicar que a concepção da dupla sobre função derivável não é compatível com a definição matemática.

N: para indicar que as duplas não resolveram a questão.

E: para indicar que os alunos exibiram processos equivocados.

Quadro 5 – Tabulação dos resultados da Questão 5.

Questão 5

Considerando a função $f(t)=\begin{cases}0, se\ 1 \le t \le 2\\ 1, se\ 2 < t \le 3\end{cases}$, observe que a função $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, pelos resultados anteriores, expressa–se por:

$$F(x)=\begin{cases}0, se\ 1 \le x \le 2\\ x-2, se\ 2 \le x \le 3\end{cases}$$

	Item a	Item b	Item c
Duplas de alunos	Esboce o gráfico da função F	Observando os gráficos de f e F, responda se cada uma dessas funções é ou não contínua?	Ainda observando o gráfico da função *F*, você sabe afirmar se a função é derivável.
A1	N	N	N

A2	S	B* F é contínua, f é descontínua no ponto $x = 2$.	S Não, em $x = 2$
A3	S	B* F é contínua	B** Sim, é derivável, pois é contínua.
A4	S	B* F não é contínua f é contínua	N Não fez a questão
A5	S	B* f não é contínua, pois não há uma "ligação" entre elas. F é contínua, pois há uma "ligação das funções".	N Não lembramos
A6	C $\int_1^2 f(t).dt = 0$ $\int_2^3 f(t)dt = 1$ $\int_1^1 f(t)dt =$	N	N
A7	S	B* F é contínua f não é contínua	B** Sim
A8	S	B* Ambas são contínuas	B** Ambas são deriváveis
A9	N	N	N
A10	N	N	N
A11	S	B* Não é contínua	B* A função é derivável
A12	B (protocolo do aluno figura 36)	B* Não são contínuas	B* Não é derivável
A13	S	B* Nenhuma das duas funções é contínua no ponto $x = 2$.	S Não é derivável no ponto $x = 2$.

O Quadro 5 mostra que as duplas A1, A9 e A10 não realizaram quaisquer dos itens desta questão.

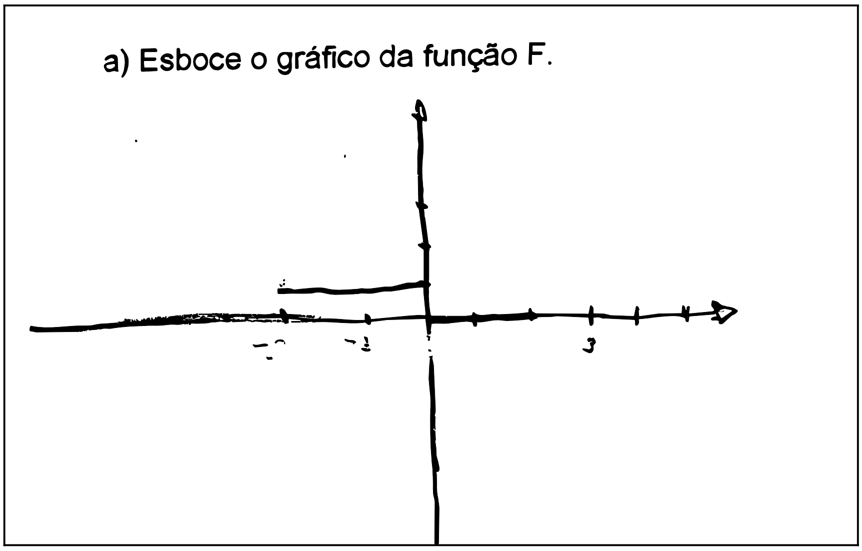
Comparando os protocolos destes alunos referente às questões 3 e 4 com a questão 5, notamos que a dupla A1 também não resolveu nenhuma dessas questões, mostrando desconhecimento sobre o significado da função

$F(x)$ como também, concepções sobre função contínua e derivável inadequadas. Lembramos que as questões 3 e 4 visam subdisiar a compreensão do significado da função F, principalmente no caso de ser ela descrita por mais de uma sentença, fornecendo assim ferramentas para a resolução da questão 5. Ainda assim, para os estudantes das duplas A9 e A10, provavelmente, as ferramentas utilizadas naquelas questões como: cálculo da integral, significado da função $F(x)$, não os ajudou, pois não foram utilizadas na resolução da questão.

A dupla A6 não esboçou o gráfico de F, mas esboçou dois cálculos de integração, um dos quais, errado. Esses cálculos são supérfluos, uma vez que a expressão algébrica de F é dada no enunciado da questão. Pelo protocolo dessa dupla referente à Questão 3, parecia indicar que esses estudantes haviam entendido o significado $F(x)$, porém, não fizeram as Questões 4 e 5. Tal situação nos leva a questionar a nossa interpretação em relação aos seus conhecimentos e sobre o entendimento das ferramentas por eles utilizadas.

A produção da dupla A12 indica que, esses alunos ao esboçar o gráfico da função F, cometeram equívocos. Estando a função F representada no domínio algébrico, a passagem para o domínio geométrico acarretou dificuldade.

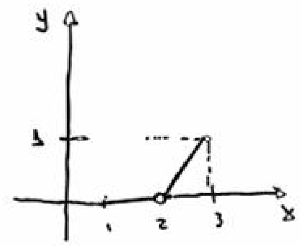
Figura 36 – Questão 5 - Produção da dupla de alunos A12



Os protocolos apresentado pelas duplas de estudantes A1, A3 até A13 indicam que a noção sobre continuidade não é clara. Possivelmente, para essas duplas de alunos o conceito de continuidade em um ponto não está institucionalizado. Com o propósito de ilustrar esta afirmação, reproduzimos a resposta da dupla de estudantes A5: f não é contínua, pois não há uma "ligação" entre elas. F é contínua, pois há uma "ligação das funções".

Somente uma dupla de alunos a A2 demonstrou conhecimento sobre continuidade, reproduzimos sua resposta: "F é contínua, f é descontínua no ponto $x = 2$". Isto talvez se deva à sua boa leitura dos gráficos das funções.

Figura 37 – Questão 5 - Produção da dupla de alunos A2



5)Considerando a função $f(t)=\begin{cases}0, se\ 1 \le t \le 2\\1, se\ 2 < t \le 3\end{cases}$, observe que a função $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, pelos resultados anteriores, expressa - se por $F(x)=\begin{cases}0, se\ 1 \le x \le 2\\x-2, se\ 2 \le x \le 3\end{cases}$.

a) Esboce o gráfico da função F.

c) Observando os gráficos de f e F, responda se cada uma dessas funções é ou não contínua.

F é contínua

f não é contínua no ponto x = 2

c) Ainda observando o gráfico da função F, você sabe-afirmar se a função é derivável?

não em x = 2

No Quadro 6, referente à Questão 6 foi adotada a seguinte legenda:

S: para indicar que o aluno identificou o gráfico que representa a função dada por $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$, assim como, qual representa a função F' justificando sua escolha.

B: para indicar que a dupla de estudantes fez sua escolha, mas não a justificou.

B*: para indicar que a dupla de estudantes fez sua escolha justificando.

C*: para indicar que a dupla de estudantes analisou o comportamento da função f nos intervalos [*-1,1*], [*1,2*] e [*2,5*], mas não fez sua escolha.

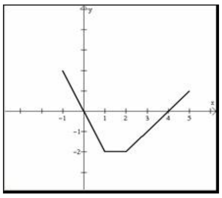
C**: para indicar que a dupla de estudantes analisou a função f nos intervalos [*-1,1*], [*1,2*] e [*2,5*], fizeram a escolha e justificaram.

N: para indicar que as duplas não resolveram a questão.

E: para indicar que o aluno exibiu processos equivocados.

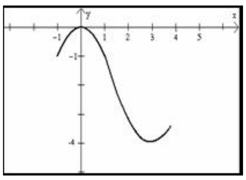
Quadro 6 – Tabulação dos resultados da Questão 6.

Questão 6
Dado o gráfico da função f definida no intervalo [*-1,5*]

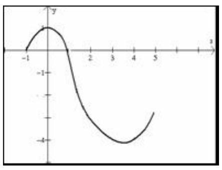


e mais os gráficos

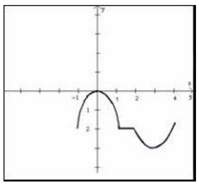
a);



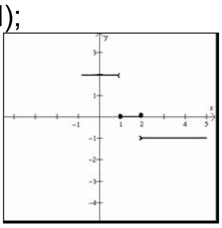
b);



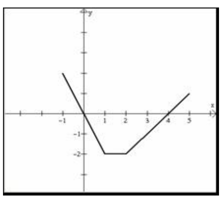
c);



d);

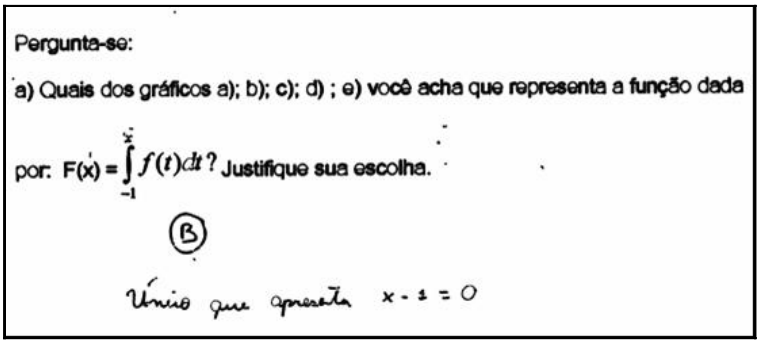


e) ,



pergunta-se:		
	Item a	Item b
Duplas de alunos	Quais dos gráficos a); b); c); d); e) você acha que representa a função dada por: $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$? Justifique sua escolha	Considerando a função F definida no item anterior. Quais dos gráficos a); b); c); d); e) representam a função F'? Justifique sua escolha.
A1	N	N
A2	C** Nenhum, calculando o valor de $f(x)$ no intervalo dado não há gráfico que represente os valores obtidos.	S
A3	N	N
A4	S Escolheu o gráfico b)	S Escolheu o gráfico d) Pois a função F é a integral de f, quando deriva F ela fica igual a função f.
A5	S Escolheu o gráfico b) Único que apresenta $x-1=0$ (Protocolo do aluno figura 38)	N
A6	B Escolheu o gráfico a)	S e B Escolheu o gráfico d)
A7	N	N
A8	S Escolheu o gráfico b) Pois, quando $y=0$, $x=1$	B Escolheu o gráfico c)
A9	N	N
A10	N	N
A11	N	N (Não Lembro)
A12	B Escolheu o gráfico a)	B Escolheu o gráfico b)
A13	B Escolheu o gráfico c)	B Escolheu o gráfico c)

Figura 38 - Questão 6- Produção da dupla de alunos A5


Pergunta-se:

a) Quais dos gráficos a); b); c); d) ; e) você acha que representa a função dada por: $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$? Justifique sua escolha.

B

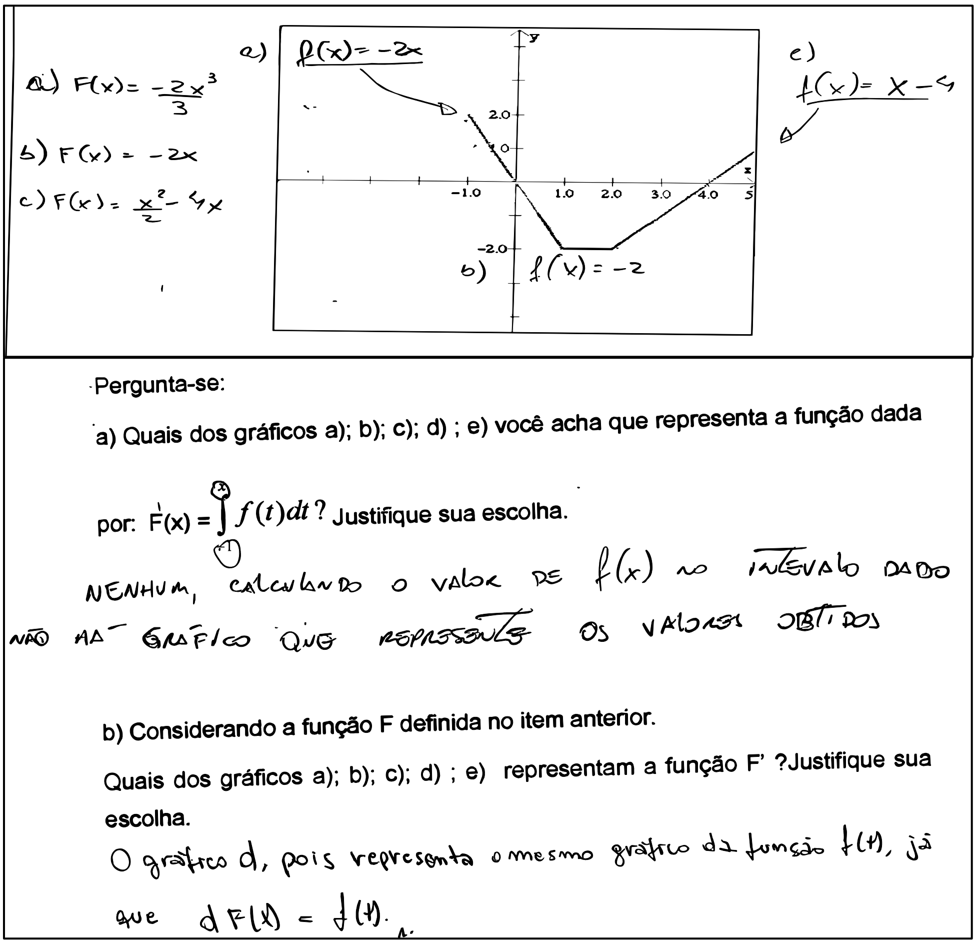
Único que apresenta $x-1=0$

Os alunos da dupla A2 não souberam identificar o gráfico de F. No entanto essa dupla deu indícios de que tentaram relacionar o gráfico de F com o de f, conforme exibido no protocolo.

Eles interpretaram a função f descrita por três sentenças como sendo três funções: $f(x) = -2x, f(x) = -2, f(x) = x - 4$.

A dupla A2 calculou a integral de cada função, cometendo um equívoco ao integrar $f(x) = -2x$, como mostra sua produção. Possivelmente se essa dupla realizasse o jogo de quadros entre o gráfico e algébrico, observando que a integral de uma função positiva é positiva, teria optado pelo gráfico b.

Figura 39 –Questão 6 - Produção da dupla de alunos A2



Observamos que os alunos da dupla A2 ao fazerem o estudo da função f, possivelmente perceberam que no intervalo $[-1,1]$ trata-se de uma função decrescente, que integrada, resultava numa função do segundo grau cujo gráfico seria uma parábola com concavidade para baixo. Provavelmente, usaram esse raciocínio nos intervalos $[1,2]$ e $[2,4]$, mostrando que compreendiam a relação dos gráficos das funções F e f.

Os estudantes da dupla A2 e A4 ao nomearem quais dos gráficos representam a função F' optaram pelo gráfico d, indicando que para essas duplas é claro que a integração e a derivação são operações inversas. Os alunos da dupla A2 aplicaram corretamente o TFC em um contexto gráfico.

Os estudantes da dupla A4 fizeram uma análise do gráfico da função f nos intervalos $[-1,1]$, $[1,2]$, $[2,4]$ provavelmente interpretando como sendo uma função descrita por três sentenças apesar de não terem explicitado isto.

Os estudantes da dupla A4 realizaram jogo dos quadros gráfico e algébrico e optaram pelo gráfico b).

Figura 40 – Questão 6 - Produção da dupla de alunos A4

Pergunta-se:

a) Quais dos gráficos a); b); c); d) ; e) você acha que representa a função dada por: F(x) = $\int_{-1}^{x} f(t)dt$? **Justifique sua escolha.**

B- no intervalo (-1,1) vai dar uma parabola de concavidade para baixo
no intervalo (1,2) vai dar uma reta decrescente
no intervalo (2,4) vai dar uma parábola de concavidade para cima

b) Considerando a função F definida no item anterior.

Quais dos gráficos a); b); c); d) ; e) representam a função F',?Justifique sua escolha.

D. Pois a função F é a integral de f, quando deriva F ela fica igual a função f.

Relativamente ao item a os alunos da dupla A5 e A8 optaram corretamente pelo gráfico b), explicitaram: “Pois, quando $y = 0$, $x = 1$”.

A dupla A5 não resolveu o item b) e a dupla A8 escolheu o gráfico c) sem justificativa, possivelmente por dificuldades para interpretar o significado das funções F e f.

As duplas de estudantes A12 e A13 deram indícios de que fizeram uma escolha aleatória, sem justifica, indicando desconhecimento da relação entre integração e derivação.

Com a Questão 6, que envolve concepções de integração e derivação e a relação entre elas, as produções dos alunos indicaram, que as ferramentas não foram bem utilizadas, todavia, como já mencionamos, devemos considerar que a questão não é simples nem trivial.

Por isso foi reconfortante observar que uma quantidade razoável de alunos apresentou discussões corretas sobre a interelação entre derivação e integração explorando o quadro gráfico.

No Quadro 7 referente à Questão 7 é adotada a seguinte legenda:

S: para indicar que o aluno concluiu os resultados corretamente e completou o item b satisfatoriamente.

B: para indicar que a dupla de estudantes verificou cada uma das afirmações dos itens da questão, concluindo e completando corretamente.

B*: para indicar que a dupla de estudantes verificou cada uma das afirmações dos itens da questão, não concluíram ou não completaram corretamente.

N: para indicar que as duplas não resolveram a questão.

E: para indicar que os alunos exibiram processos equivocados.

Quadro 7 – Tabulação dos resultados da Questão 7.

<table>
<tr><td colspan="3">Questão 7
As afirmações abaixo são verdadeiras.
Como você justificaria cada um dos resultados, partindo do se e chegando no então:
I) se $f(x)=\int_0^x 2tdt$, então, $f'(x)=2x$;
II) se $h(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x sen\,tdt$, então, $h'(x)=sen\,x$;
III) se $m(y)=\int_{-1}^y 3dt$, então, $m'(y)=3$.
O que você conclui destes resultados</td></tr>
<tr><td></td><td>Item a</td><td>Item b</td></tr>
<tr><td>Duplas de alunos</td><td>O que você conclui destes resultados</td><td>Complete: $g(x)=\int_0^x f(t)dt,$, então,
$g'(x)=$______.</td></tr>
<tr><td>A1</td><td>N</td><td>N</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>B
Que derivando uma Integral, obtém a função primitiva.</td><td>B
$g'(x)=f(x)$</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>N</td><td>N</td></tr>
<tr><td>A4</td><td>B*</td><td>B
$g'(x)=f(x)$</td></tr>
<tr><td>A5</td><td>B
Derivada da Integral é sua primitiva</td><td>B
$g'(x)=f(x)$</td></tr>
<tr><td>A6</td><td>B*</td><td>B
$g'(x)=f(x)$</td></tr>
<tr><td>A7</td><td>N</td><td>N</td></tr>
<tr><td>A8</td><td>N</td><td>N</td></tr>
<tr><td>A9</td><td>B</td><td>B
$g'(x)=f(x)$</td></tr>
<tr><td>A10</td><td>N</td><td>N</td></tr>
<tr><td>A11</td><td>N</td><td>N</td></tr>
<tr><td>A12</td><td>S
Diferenciais e Integrais são funções inversas</td><td>S
$g'(x)=f(x)$</td></tr>
<tr><td>A13</td><td>S
Quando integro e derivo volto na primitiva</td><td>S
$g'(x)=f(x)$</td></tr>
</table>

Os resultados chamam a atenção para o fato de 6 duplas não terem respondido a esta questão. No entanto isto não deve causar surpresas se analisarmos a natureza abstrata das questões, como também o modo que se apresenta o enunciado. Este requer certo grau de abstração e o item b uma enorme “generalização”, a partir de três exemplos tínhamos consciência disso, mas mesmo assim resolvemos manter esta questão do piloto, na expectativa do que seria respondido.

As duplas de alunos A2, A5, A9, verificaram cada uma das afirmações feitas na questão, calculando a integral e em seguida derivando o resultado obtido. Observamos que esse procedimento também ocorreu com as duplas A e B do questionário piloto, podendo indicar que talvez não tenha sido dada a devida atenção à primeira parte do enunciado, em que se afirma que são verdadeiras as afirmações e também porque esse tipo de procedimento é muito mais visual do que está sendo proposto.

A dupla A2, ao ler o enunciado da questão, fez uma retificação no enunciado expressando a sua dúvida.

Figura 41 – Questão 7 - Produção da dupla de alunos A2.

7) As afirmações abaixo são verdadeiras? Como você justificaria cada um dos resultados, partindo do se... e chegando no então...

I) se $f(x)=\int_{0}^{x} 2t\,dt$, então, $f'(x)=2x$; V

II) se $h(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} sent\,dt$, então, $h'(x)=senx$; V

III) se $m(y)=\int_{-1}^{y} 3\,dt$, então, $m'(y)=3$. V

a) O que você conclui destes resultados?

Que se derivando uma Integral, obtêm-se a funsão primitiva

b) Complete: $g(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$, então, $g'(x)=$ f(x).

As duplas A4 e A6 também verificaram cada uma das afirmações feitas, calculando a integral e em seguida derivando o resultado obtido. Esse fato aconteceu também com outras duplas, o que reforça nossa observação anterior sobre o enunciado.

Os estudantes A4 e A6 no item b) ao completar que "Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, então, $g'(x) = f(x)$", indicaram compreender que a derivação e a integração são funções inversas.

Figura 42 – Questão 7 - Produção da dupla de alunos A4.

7) As afirmações abaixo são verdadeiras. Como você justificaria cada um dos resultados, partindo do se... e chegando no então...

I) se $f(x) = \int_0^x 2t dt$, então, $f'(x) = 2x$; $\quad f(x) = \frac{2t^2}{2}\Big]_0^x \Rightarrow x^2 = 2x$

II) se $h(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x sent dt$, então, $h'(x) = senx$; $\quad f(x) = -\cos t\Big]_{\pi/2}^x \Rightarrow -\cos x + \cos \pi/2 : \underline{-\cos x}$

$h'(x) = senx$

III) se $m(y) = \int_{-1}^{y} 3dt$, então, $m'(y) = 3$. $\quad f(x) = 3x\Big]_{-1}^y \Rightarrow 3y + 3 \Rightarrow m'(y) = 3$

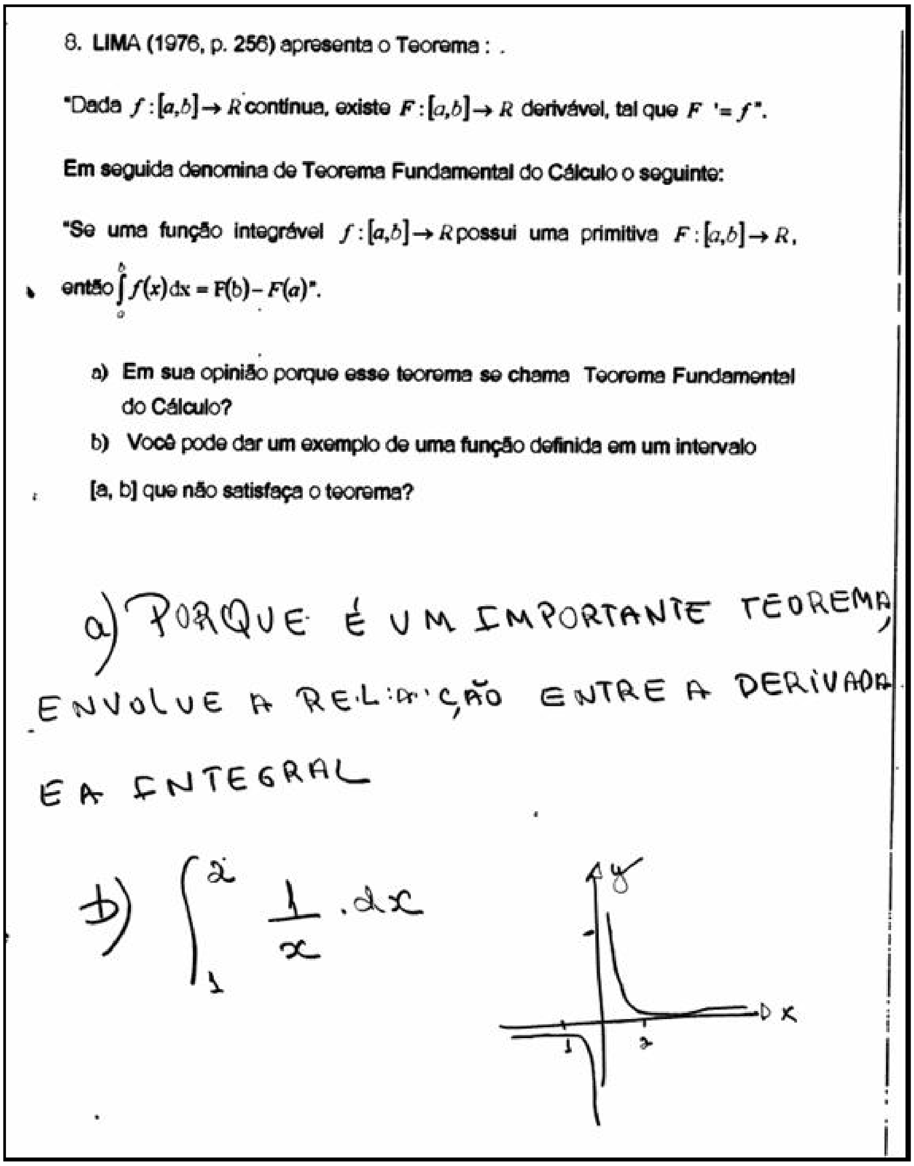
a) O que você conclui destes resultados?

b) Complete: $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, então, $g'(x) = \underline{f(x)}$.

Com a questão 8, desejávamos oferecer um espaço para que os alunos, se quisessem, pudessem opinar sobre a "fundamental" relação entre a derivada e a integral. Além disso, desejávamos verificar se os alunos percebiam as condições que uma função f deve satisfazer para que o TFC seja válido.

Os protocolos das duplas A2, A5, A12, A13 indicam que os estudantes têm a concepção de que a relação entre Integral e derivada é a pedra angular do Cálculo Diferencial e Integral. As demais duplas de alunos não resolveram a questão. Quanto ao item b) somente a dupla A13 explicitou um exemplo de uma função definida em um intervalo [*a, b*] que não satisfazia o teorema.

Figura 43 - Questão 8 - Produção da dupla de alunos A13



8. **LIMA (1976, p. 256) apresenta o Teorema :** .

"Dada $f:[a,b]\to R$ contínua, existe $F:[a,b]\to R$ derivável, tal que $F' = f$".

Em seguida denomina de Teorema Fundamental do Cálculo o seguinte:

"Se uma função integrável $f:[a,b]\to R$ possui uma primitiva $F:[a,b]\to R$, então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$".

a) Em sua opinião porque esse teorema se chama Teorema Fundamental do Cálculo?

b) Você pode dar um exemplo de uma função definida em um intervalo [a, b] que não satisfaça o teorema?

a) PORQUE É UM IMPORTANTE TEOREMA, ENVOLVE A RELAÇÃO ENTRE A DERIVADA E A INTEGRAL

b) $\int_1^2 \frac{1}{x}.dx$

Entendemos que esses alunos mobilizaram conhecimentos antigos que funcionaram como ferramentas para responder a pergunta.

Somente quatro duplas das treze que participaram da nossa pesquisa, ao ler a definição do TFC, explicitaram conhecimento sobre a relação entre a integral e a derivada, fazendo uso dessa ferramenta.

Os dados coletados nesta investigação demonstram que os obstáculos dos estudantes para compreender o TFC estão relacionados com uma incompleta mobilização das noções de derivada, integral e continuidade, uma vez que utilizaram apenas parcialmente estes conhecimentos para a solução das questões apresentadas.

7 CONCLUSÕES

Esta pesquisa teve como finalidade fazer uma investigação sobre os conhecimentos mobilizados por alunos que estudaram o Teorema Fundamental do Cálculo. O TFC foi escolhido porque é um dos tópicos mais importantes ensinados no Cálculo, estabelecendo a ligação entre os conceitos de diferenciação e de integração.

O estudo das dissertações, teses e outras pesquisas em Educação Matemática que abordam as dificuldades existentes na disciplina de Cálculo nos nortearam nas escolhas que fizemos durante o desenvolvimento e construção do trabalho. Entre essas pesquisas ressaltamos a de Segadas (1998) intitulada “Students’ Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: An exploration of definitions, theorems and Visual Imagery”.

Escolhemos investigar questões relacionadas a esse tema, motivada pelos trabalhos desenvolvidos no nosso grupo de pesquisa o G2, intitulado “Matemática do Ensino Superior: Didática do Ensino do Cálculo“, que, como o próprio nome indica, desenvolve investigações a respeito do ensino de Cálculo e, em particular, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. Por ocasião do desenvolvimento de nosso trabalho, duas outras pesquisas estavam em andamento sobre esse assunto: um deles dedicava-se sobre a investigação sobre as representações de professores a respeito do Teorema Fundamental do Cálculo, a outra refere-se a uma investigação sobre as representações do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos.

Nossa pesquisa fundamentou-se nos pressupostos teóricos contidos na dialética ferramenta-objeto e nos jogo de quadros de Douady (1987). De acordo com Douady, manipular objetos matemáticos em vários contextos ou quadros pode favorecer o processo de construção do conhecimento desses objetos. Segundo ela, um quadro constitui-se de objetos de um ramo da Matemática, de relações entre eles, de suas formulações e de imagens mentais que o indivíduo associa aos objetos. O jogo de quadros são mudanças que o docente faz e que visam fazer o aluno avançar nas etapas do estudo e, em conseqüência, evoluir suas concepções. A dialética ferramenta-objeto é um processo de várias fases, pelas quais o aluno precisa passar, para resolver um determinado problema e adquirir um conhecimento.

No instrumento proposto aos alunos, fizemos uso dos quadros geométrico e algébrico e também das ferramentas explícitas e do novo explícito.

Para atingir nossos alvos utilizamos um questionário como instrumento de pesquisa.

Trabalhamos com dois grupos de alunos. Fizemos previamente um questionário piloto que foi aplicado a 3 duplas de alunos que já haviam estudado o Teorema Fundamental do Cálculo e faziam o curso de Ciência de Computação.

O questionário definitivo foi aplicado a um segundo grupo, formado por 13 duplas de estudantes que também haviam estudado o TFC e faziam o curso de Licenciatura em Matemática.

Realizamos uma análise qualitativa dos dados coletados. Com relação aos objetivos que buscávamos investigar, que eram respectivamente:

a) Se os estudantes identificam que a derivada da integral é a função integranda:

Os protocolos permitiram concluir que os alunos conseguem determinar a primitiva da função e aplicar a propriedade aditiva da integral apresentando algumas vezes alguns equívocos algébricos. Permitem também, concluir que sabem como derivar a integral e verificar que derivada da integral é a função integranda. No entanto essa relação fica evidente no domínio algébrico, mas quando mudamos para o domínio geométrico, muitos estudantes não utilizam os conhecimentos contidos nas representações para a solução das questões apresentadas, o que pode significar que eles dominam apenas parcialmente estes conceitos.

b) Se os estudantes identificam que a integral (indefinida) da derivada de uma função é a própria função:

Os registros dos estudantes mostram que, para maioria, o entendimento, da idéia fundamental do Cálculo Diferencial e Integral, ou seja da relação entre integral e derivada (a derivação da integral indefinida de uma função contínua resulta na mesma função) é parcial quando mudamos do domínio algébrico para o geométrico.

c) Se os estudantes identificam que a integral de uma função resulta do cálculo da diferença entre o valor de uma primitiva dessa função no limite superior e no limite inferior de integração:

A maioria dos estudantes buscou conhecimentos anteriores como ferramenta, em cálculo de primitivas e conceito de integral definida, porém constatamos que em muitas situações tais ferramentas não foram empregadas corretamente, o que confirmam as conclusões anteriores que o conceito de derivação, integração e continuidade não estavam totalmente construídos.

d) Se os estudantes identificam que a derivação e integração são operações inversas:

Foi possível verificar que para maioria dos alunos a derivação e a integração são operações inversas, porém foram identificadas dificuldades na visualização e interpretação geométrica, confirmando as conclusões anteriores.

e) Verificar de que maneira os alunos manipulam os conceitos relacionados ao TFC, tais como: a continuidade e a diferenciação, etc.:

As análises mostraram que alguns dos obstáculos dos estudantes para compreender o TFC estão relacionados com os conceitos de continuidade, derivada, integral, pois mobilizaram apenas parcialmente os conhecimentos. Podemos concluir que, para alguns estudantes, o cálculo da primitiva de uma função polinomial não traz dificuldades, mas percebemos variados erros nos procedimentos de cálculo.

No questionário piloto havia uma questão sobre o cálculo de uma integral imprópria, que foi incluída porque essa noção estava prevista na grade curricular do curso. Só uma dupla de alunos mostrou perceber que a função integranda não está definida em um ponto do intervalo de integração. As duplas de estudantes não demonstraram conhecer que a integral poderia ser expressa como soma de duas integrais impróprias. Alguns expressaram tratar-se de uma função descontínua. Tal afirmação pode significar, para esses alunos que a função não está definida no ponto. Tratava-se de uma função contínua não definida num ponto interior do intervalo de integração; decidimos incluir no questionário definitivo uma função definida em todo o intervalo, porém descontínua em um ponto, para verificar a mobilização do conceito de continuidade e pudemos inferir a partir das concepções dos alunos que esse conceito merece atenção no ensino.

As produções indicam também que, embora os conhecimentos anteriores tenham sido utilizados como ferramenta, tais como o cálculo de área de uma função e o cálculo de integral definida, em muitas situações tais ferramentas não foram empregadas corretamente.

De uma forma geral, pudemos verificar que a maioria dos alunos apresentou dificuldade para solucionar questões em que a simples visualização de um gráfico faria com que não necessitassem desenvolver longos algoritmos.

Ao lerem a definição do TFC somente quatro duplas das treze envolvidas nesta pesquisa demonstraram conhecimento sobre a relação entre a integral e a derivada fazendo uso dessa ferramenta.

Os resultados encontrados podem também estar associados a hábitos dos estudantes, que tendem a não focar a atenção aos aspectos conceituais do teorema, apenas memorizando o algoritmo dos procedimentos sem, todavia refletir sobre a sua aplicabilidade.

A dialética ferramenta-objeto bem como o jogo de quadros de Douady mostrou-se um poderoso e eficiente instrumento para nossas análises.

A pesquisa aponta para algumas questões que merecem estudos mais aprofundados, como por exemplo:

Quais são os obstáculos na aprendizagem de um conceito matemático quando se estuda o Teorema Fundamental do Cálculo?

Ao desenvolvermos nossa pesquisa pretendíamos também motivar a reflexão de pesquisadores e educadores, e assim estimular a busca da compreensão dos fenômenos que interferem na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Referências Bibliográficas

ÁVILA, G. Arquimedes, o Rigor e o Método in Matemática Universitan. Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo, 1986, v. 4.

________. Introdução à Análise Matemática. Editora Edgard Biücher Ltda, São Paulo, 1993.

BARON, M. Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. 5v.

BARUFI, M. C. B., "A construção/negociação de significados do curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral". Tese de Doutorado. USP, 1999.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

__________. Cálculo. São Paulo: Atual, 1992.

CELESTINO, M. R. Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: As pesquisas brasileiras da década de 90. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) São Paulo - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

COURANT, R. Cálculo Diferencial e Integral. São Paulo: Globo, 1951.

DAHAN-DALMEDICO, A, PEIFFER, Jeanne. Une histoire des mathématique. Paris, 1986

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des mathématiques, 7(2), 5-32, 1987.

EDWARDS JR, C. H. The historical development of the calculus, New York, Springer-Verlag, 1979

EVES, H. (1953). Introdução a História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 1995.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação matemática. BORBA, M. C.; ARAÚJO, J0. L. (Org) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, p. 77-98. 2004.

HSIA, W. Y. A Utilização do livro didático pelo aluno ao estudar integral. São Paulo Dissertação (mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

KATZ, V. J. A History of Mathematics an introduction. University of the District of Columbia. Addison-Wesley, 1998.

LEITHOLD. O Cálculo com Geometria Analítica, (3th ed.), Habra, São Paulo, 1994.

LEME, J. C. M. Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada São Paulo. Dissertação (mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

LIMA, E. L. Curso de Análise (1976, Vol.1, p. 254 -257).

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MALTA, I., “Linguagem, Leitura e Matemática”. Mat, 08/2003. Pontifícia Universidade Católica – PUC – Rio. Rio de Janeiro, 2003, p. 11. Nacional.

PALARO, L. A. A concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue. São Paulo. Tese (doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

PARSHALL, K. H., RICE, A. (eds.). Mathematics unbound: The evolution of an international mathematical research community, 1800-1945. History of Math, vol. 23, American Mathematical Society / London Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

PONTE, J. P. Estudo de caso na investigação em Educação Matemática. In: BOLEMA, ano 19, n. 25, p. 105-132, 2006.

SARAIVA, P. S. Novas Tecnologias no Ensino do Conceito de Limite de Função. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

SEGADAS, V. C. Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an Exploration of Definitions and Visual Imagery. Tese de doutorado, Institute of Education, University of London, 1998.

TALL, D. “Visialising Differentials in Integration to Picture The Fundamental Theorem of Calculus”, Mathematicas Teaching 137, 29-32, 1991b.

THOMPSON, P. Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. Educational Studies Mathematics 26.229-274, 1994.

THOMAS, K. The Fundamental Theorem of Calculus: an Investigation into Students' Constructions. Phd. Thesis. Purdue University Graduate School, 1995.

THOMAS, G. Guia para História do Cálculo. http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/thomas_br/chapter1/medialib/custom3/deluxe-content.html acesso em 08/11/05. (Documento eletrônico complementar à publicação THOMAS, G. Cálculo. 10a. ed. Pearson / Prentice Hall, 2002.)

VIDIGAL, L. F. Conhecimentos Mobilizados por Alunos sobre a Noção Integral no Contexto das Concepções Operacionais e Estruturais. Dissertação (mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

Anexos

Anexo 1 - Questionário – Piloto

As quatro questões que compõem o questionário foram inspiradas nos questionários trabalhados por Segadas (1998).

Questão 1: Calcular as integrais

a) $\int_0^3 (2x^2 - 4x - 1)dx$

b) $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}dx$

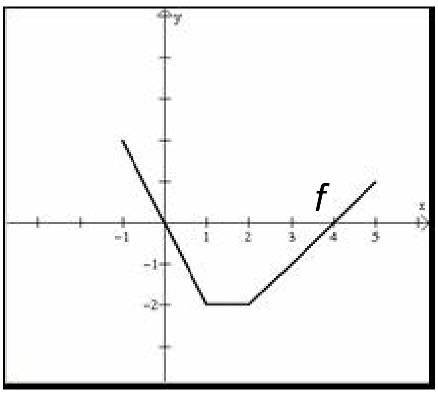
Questão 2: Se $g(x) = \int_3^x 2tdt$ determine:

a) $g(3) =$

b) $g'(x) =$

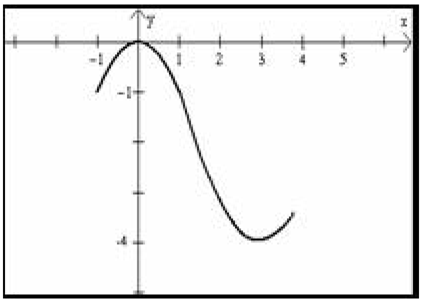
c) $g'(3) =$

Questão 3: Dado o gráfico da função f definida no intervalo [-1, 5]

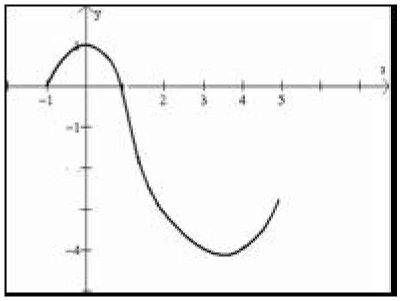


Considere os gráficos a); b); c); d); e) abaixo.

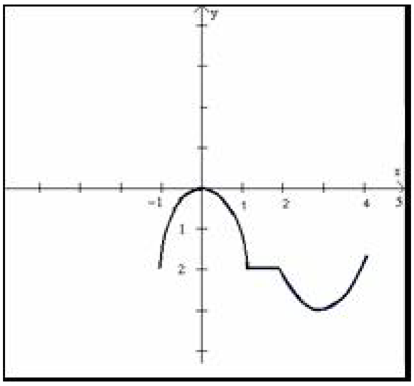
a)



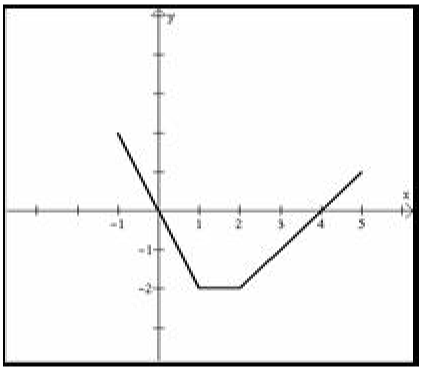
b)



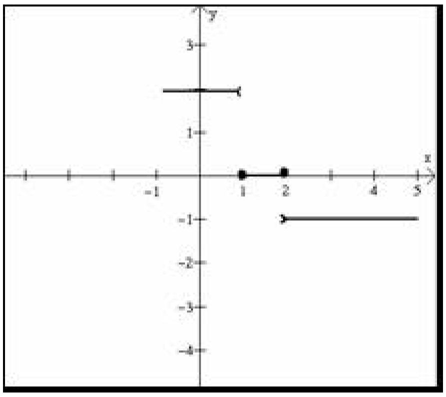
c)



d)



e)



Qual dos gráficos a); b); c); d); e) poderia ser o gráfico da $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$?

Circule a letra correspondente à resposta certa. Justifique sua escolha.

a b c d e

Considerando a função F definida no item anterior quais dos gráficos a); b); c); d); e) que representa a função F'? Circule a letra correspondente à resposta certa. Justifique sua escolha.

a b c d e

Questão 4: as afirmações abaixo são verdadeiras, como você justificaria cada um dos resultados, partindo do se... e chegando no então...

a) se $f(x) = \int_0^x 2t dt$, então, $f'(x) = 2x$;

b) se $h(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x sent dt$, então, $h'(x) = senx$;

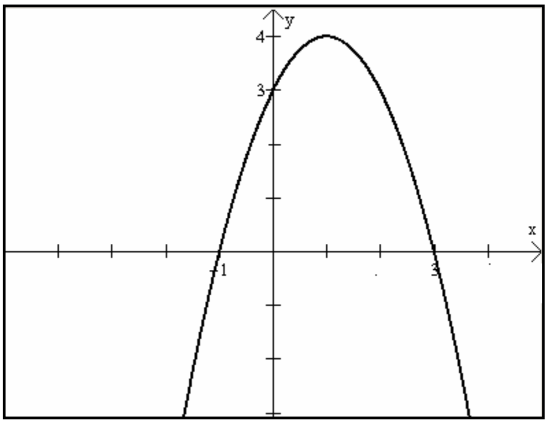
c) se $m(y) = \int_{-1}^y 3dt$, então, $m'(y) = 3$.

Sendo $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ e considerando os dados acima, o que você pode dizer sobre $g'(x)$?

Anexo 2 - O Questionário

Curso:_______________Semestre:_______Data___/___/___

1. O gráfico da função dada por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ está representada abaixo:

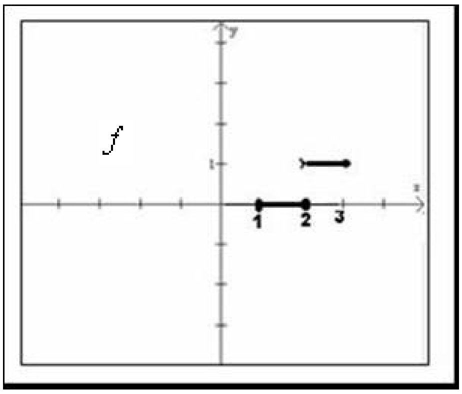


a) Calcule $\int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)dx$.

b) Qual é o significado geométrico do resultado obtido no item a)?

c) No gráfico, indique esse resultado.

2. Considere a função f cujo gráfico é representado abaixo:



a) Observando o gráfico indique o valor da integral de f.

b) A expressão algébrica da função acima representada é:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & se\ 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Como você calcula algebricamente a integral dessa função?

c) A função f é contínua?

3. Dada a função $f(t) = 0$ para $1 \le t \le 2$, considere agora a função F dada por $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ e determine:

a) $F(1)$

b) $F(2)$

c) $F(x)$, para $1 \le x \le 2$

4. Dada a função $f(t) = 1$, para $2 \le t \le 3$, considere agora a função F dada por

$F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ e determine:

a) $F(2)$

b) $F\left(\frac{5}{2}\right)$

c) $F(x)$, para $2 \le x \le 3$

d) Qual é o significado geométrico de cada um dos resultados?

5. Considerando a função $f(t) = \begin{cases} 0, se\, 1 \le t \le 2 \\ 1, se\; 2 < t \le 3 \end{cases}$, observe que a função $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$,

pelos resultados anteriores (questões 2, 3, 4), expressa - se por

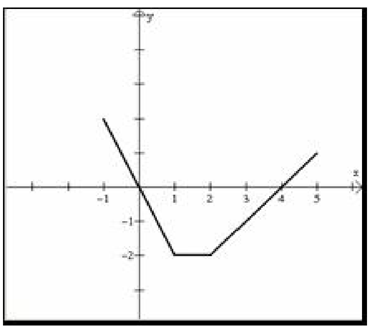
$$F(x) = \begin{cases} 0, \; se \;\; 1 \le x \le 2 \\ x - 2, se \;\; 2 \le x \le 3 \end{cases}.$$

a) Esboce o gráfico da função F.

b) Observando os gráficos de f e F, responda se cada uma dessas funções é ou não contínua.

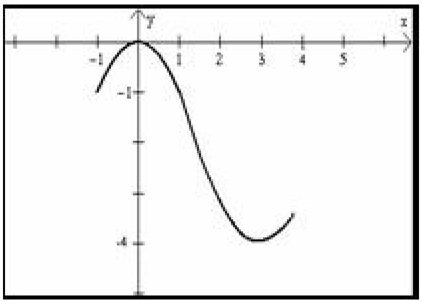
c) Ainda observando o gráfico da função F, você sabe afirmar se a função é derivável?

6. Dado o gráfico da função f definida no intervalo [-1,5] e mais os gráficos a); b); c); d); e) a seguir:

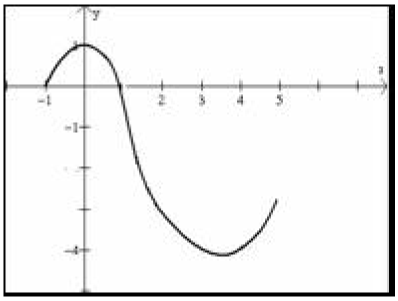


Considere os gráficos a); b); c); d); e) abaixo.

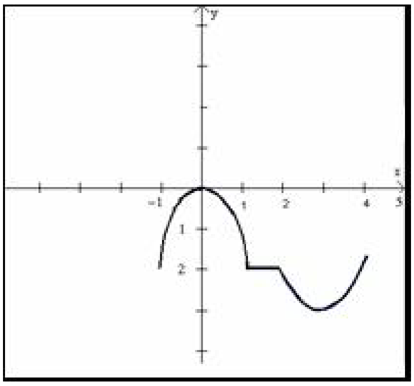
a)



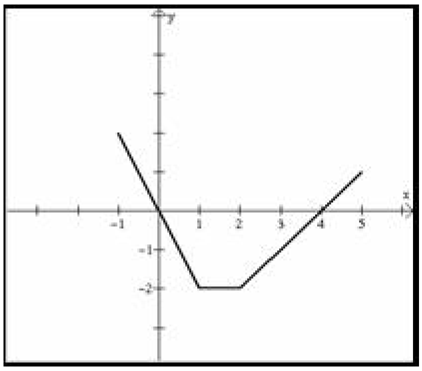
b)



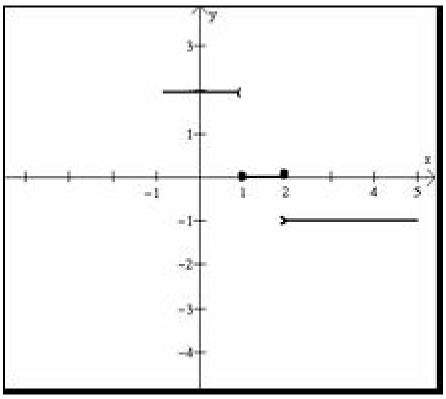
c)



d)



e)



Pergunta-se:

a) Qual dos gráficos a); b); c); d); e) você acha que representa a função dada por: $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$? Justifique sua escolha.

b) Considerando a função F definida no item anterior.

c) Qual dos gráficos a); b); c); d); e) representa função F'? Justifique sua escolha.

7. As afirmações abaixo são verdadeiras. Como você justificaria cada um dos resultados, partindo do se... e chegando no então...

I) se $f(x) = \int_0^x 2t\,dt$, então, $f'(x) = 2x;$

II) se $h(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x sent\,dt$, então, $h'(x) = senx$;

III) se $m(y) = \int_{-1}^y 3\,dt$, então, $m'(y) = 3$.

a) O que você conclui destes resultados?

b) Complete: $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, então, $g'(x) =$ ___________________.

8. LIMA (1976, p. 256) apresenta o Teorema:

"Dada $f : [a,b] \to R$ contínua, existe $F : [a,b] \to R$ derivável, tal que $F' = f$".

Em seguida denomina de Teorema Fundamental do Cálculo o seguinte:

"Se uma função integrável $f : [a,b] \to R$ possui uma primitiva $F : [a,b] \to R$, então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$".

a) Em sua opinião, porque esse teorema chama-se Teorema Fundamental do Cálculo?

b) Você pode dar um exemplo de uma função definida em um intervalo [a, b] que não satisfaça o Teorema?

Anexo 3 – Termo de Compromisso

Campus Marquês de Paranaguá -PUC -SP
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Mestrado Acadêmico

TERMO DE COMPROMISSO

Este termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente no que tange a utilização dos dados nela coletados.

O material coletado, as atividades realizadas, as transcrições e os registros escritos, servirão de base para pesquisas. Os nomes dos sujeitos citados nas transcrições, assim como nos registros escritos, serão trocados por pseudônimos, preservando suas identidades em sigilo. As demais, as pesquisas que utilizarem o material coletado não serão feitas menção à Instituição onde o sujeito leciona ou estuda.

As informações provenientes da análise desse material poderão, ainda, ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e eventos científicos.

São Paulo, de 2006.

____

Prof. Grácia Maria Catelli Anacleto

Anexo 4 – Ementa disciplinas de Cálculo II do Curso de Licenciatura de Matemática e Ciências da Computação

Ementa das disciplinas de Cálculo II do Curso de Licenciatura de Matemática e Ciências da Computação, fornecida pela universidade em que a pesquisa foi realizada.

Plano de Ensino
Atualizado em: 15 de setembro de 2006.

Semestre:	**1° Semestre/ 2007**
Disciplina:	**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II**
Código:	100.1289.3
Curso:	Matemática
Carga Horária:	04 aulas
Teoria:	04 aulas
Prática:	
Etapa:	2ª
Professor:	
Objetivo:	GERAIS: Proporcionar aos alunos condições para compreender conceitos fundamentais de Cálculo assim como desenvolver a competência técnica para discutir e descobrir diferentes maneiras de solução de problemas. ESPECÍFICOS: Estudar conceitos de integral indefinida e integral definida, as técnicas de integração e as aplicações geométricas e físicas.
Ementa:	Primitivação - Integral indefinida. Integral definida. Aplicações. Técnicas de integração. Cálculo de áreas, volumes e comprimento de arcos. Coordenadas polares.
Metodologia:	Aulas teóricas expositivas e aulas com listas de exercícios.
Critério de Avaliação:	No decorrer do semestre serão realizadas 4 provas (P_1 ,P_2 , P_3 e P_4) , e no final, a prova de avaliação final (PAF). A média final será: $MF = 0,3\ (P_1 + P_2) + 0,3\ (P_2 + P_4) + 0,4$ PAF. O critério de aprovação será de acordo com o Ato 6/2001 da Reitoria.

Conteúdo Programático:	• Primitivação. Conceito de integral indefinida. Aplicação à cinemática. • Conceito de integral definida como limite de Somas de Riemann. Interpretação geométrica. Propriedades. • Teorema Fundamental do Cálculo e aplicações. Áreas e volumes. • Técnicas de integração: integração por substituição, integração por partes, integrais trigonométricas, integração por substituição trigonométrica, integração por decomposição em frações parciais. • Aplicações das integrais definidas ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. • Coordenadas polares: Cálculo de áreas em coordenadas polares. Cálculo de comprimentos de arcos em coordenadas polares.
Bibliografia:	**Básica:** STEWART, J., **Cálculo**. 5.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006, v.1. STEWART, J., **Cálculo**. 5.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005, v.2. **Complementar:** GUIDORIZZI, H. L., **Um curso de cálculo**. 5.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2004. LEITHOLD, L., **O cálculo com geometria analítica**. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994. SIMMONS, G. F., **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Pearson Education, 1988. SWOKOWSKI, E. W., **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Books, 2000, v.1. SWOKOWSKI, E. W., **Cálculo com geometria analítica**. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994, v.2.

PLANO DE ENSINO DO CURSO DA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral II **Etapa: 2**

Créditos: 3 **Carga Horária: 3** **Teoria: 3** **Prática: 0**

Objetivo

Estudo do conceito de integral de funções de uma variável real, técnicas de integração e aplicações a problemas geométricos envolvendo curvas parametrizadas mergulhadas nos espaços R^2 e R^3.

Ementa

Integral indefinida. Técnicas de integração. Integral definida. Curvas parametrizadas. Aplicações de integração a Curvas.

Metodologia

Aulas teórias e de exercícios.

Conteúdo Programático

1. **Integral indefinida**
   - 1.1. Definição de integral via limites
   - 1.2. Teorema fundamental do cálculo

2. **Técnicas de integração**
   - 2.1. Integração direta
   - 2.2. Integração por substituição de variáveis(inclusive trigonométrica)
   - 2.3. Integração por partes
   - 2.4. Integração de funções racionais via frações parciais
   - 2.5. Integrais impróprias

3. **Integral Definida**
   - 3.1. Integral definida de Riemman
   - 3.2. Interpetação geométrica de integração

4. **Curvas parametrizadas**
   - 4.1. Curvas paramétricas em R^2 e R^3
   - 4.2. Parametrização por comprimento de arco
   - 4.3. Curvas em coordenadas polares

5. **Aplicações de Integração a Curvas**
   - 5.1. Áreas entre curvas
   - 5.2. Comprimento de arco de curvas
   - 5.3. Área e volumes definidos por revolução de curvas