PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

MARCÍLIO FARIAS DA SILVA

ARGUMENTAÇÃO E PROVA ENVOLVENDO CONCEITOS DE MÚLTIPLOS E DIVISORES: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

MARCÍLIO FARIAS DA SILVA

ARGUMENTAÇÃO E PROVA ENVOLVENDO CONCEITOS DE MÚLTIPLOS E DIVISORES: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Prof. Dr. Ruy Cesar Pietropaolo.***

São Paulo
2008

Banca Examinadora

____

____

____

À minha esposa Mariangela e ao meu filho Marcílio Filho pela paciência, força e estímulo na conquista desta vitória.
Aos meus pais Milton João (em memória) e Doralice Farias pelos exemplos de luta e paciência.
À minha tia Clélia, aos meus irmãos Mary e ao Milton José, que sempre torceram por mim.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ser fiel e companheiro de cada dígito colocado neste trabalho.

À Nossa Senhora Aparecida, pelos momentos de superação e conforto que me foram proporcionados no decorrer dessa caminhada.

Ao Prof. Dr. Ruy César Pietropaolo, pelo acolhimento atencioso, amizade, sugestões, incentivo e contribuições – fundamentais para a concretização deste trabalho.

À Fatea, ao colégio São Joaquim e à Secretária de Estado da Educação de São Paulo, pelos incentivos e preocupação com a formação de seus professores.

À Profa. Dra. Ana Paula Jahn, minha primeira orientadora, que me auxiliou sobremaneira a conceber e organizar esta dissertação com valiosas sugestões, além do grande incentivo.

À Profa. Dra. Monica Karrer, por todas as suas contribuições que me foram sugeridas na qualificação.

À Profa. Dra. Lulu Healy, pela simpatia, atenção e incentivo durante toda essa caminhada.

À Profª. Olga Corbo, pelo grande auxílio na fase de finalização deste projeto.

A todos meus queridos alunos, que se apresentaram dispostos e atenciosos, para que todo o experimento fosse realizado.

Aos professores doutores Mauro Castilhos, Luiz Carlos de Queiroz, Rosinei Batista Ribeiro, professor mestre Glauco J. R. Azevedo e professor Paulo Rogério da Silva pelo incentivo e apóio e amizade nesta trajetória.

Aos colegas e companheiros de curso: Alexandre Solis, Antonio Carlos, Fabiana, Gerson, Mari e Valdenir, por todos os momentos de aprendizagem e discussões que tivemos oportunidade de compartilhar.

Ao meu amigo Alexandre Solis e a sua mãe Maria, por terem me acolhido em sua casa em todo o período de formação.

À professora Cristiane F. G. S Mota, por me auxiliar no experimento realizado para este trabalho.

A todos meus amigos, que me ajudaram a alcançar este sonho.

O Autor

RESUMO

O propósito desta dissertação é a elaboração e análise de uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem de provas e argumentações, destinada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, utilizando uma ferramenta computacional. Todo o experimento foi desenvolvido no âmbito do Projeto Argumentação e prova na Matemática Escolar (AProvaME), que tem como objetivo construir um mapa sobre as concepções de argumentação e prova de alunos do Estado de São Paulo. A elaboração da seqüência didática foi inspirada no questionário de Álgebra do projeto AProvaME e fundamentada e analisada sob a perspectiva da classificação de provas de Balacheff (1988), das idéias relacionadas aos papéis e funções das provas de De Villiers (2001) e nas sugestões apresentadas nos PCN. Utilizamos como recurso computacional o Excel, que permitiu aos alunos a construção de planilhas eletrônicas ampliando os dados para melhor analisar e elaborar suas conjecturas, argumentos, justificativas e validações. Foram analisados os protocolos de três duplas, com idades de 13 e 14 anos, de uma escola particular da cidade de Lorena-SP, que contribuíram voluntariamente com a experimentação. Analisando os resultados, constatamos que predominaram as formulações de argumentos e conjecturas vinculadas a provas pragmáticas descritas na língua natural, que, em todo o processo, foram justificadas empiricamente. Um fato relevante e determinante no sucesso da pesquisa foi o papel do professor mediador, durante os momentos de intervenções, favorecendo a interação aluno-professor, necessária no desenvolvimento de seqüências didáticas que visam o ensino e aprendizagem de argumentações e provas matemáticas.

Palavras Chaves: Argumentações e provas, Múltiplos e divisores, Ferramenta Computacional.

ABSTRACT

The intention of this dissertation is the elaboration and analysis of a didactic sequence focused to the teaching and learning of examinations for students of the 9th school year in Brazil, using a computer tool. The whole experiment was developed in a Project of Argumentations and test in the Mathematics school (AProvaME), that he/she has as objective to prepare a map on the conceptions of arguments and the students tests in the state of São Paulo in Brazil. The elaboration of the didactic sequence was inspired in the questionaire of Álgebra of the project AProvaME, based and analyzed under the perspective from the levels of Balacheff (1988) classification of experiments and ideas related to the roles and functions of the experiments of Villiers (2001) and in the ideas suggested in PCN. We used as computer resource EXCEL, which allowed to the the students the electronic construction of spreadsheets enlarging the data for better analyze and elaborate their conjectures, arguments, justifications and validations. It was analyzed three protocols of three couples with ages between 13 and 14 years old of a private school in the city of Lorena in São Paulo which contributed voluntarialy with the experimentation. Analysing the results we can establish that predominated the formulations of the arguments and conjectures limked to conceptual pragmatic experiments described in the natural languages that in the whole process were empirically justified. A relevant and decisive fact in the successful research was the role of the mediator teacher during the moments of interventions that it provided the interaction student-teacher, necessary in the development of didactic sequences that aim the teaching and learning of arguments and mathematical experiments.

Keywords: Argumentation and examinations, multiple and division or partition, computer tool.

SUMÁRIO

Índice de Figuras

ÍNDICE DE QUADROS

Índice de Tabelas

INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem por objetivo principal desenvolver, aplicar e avaliar uma seqüência didática para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, focando o ensino-aprendizagem de provas em Matemática e abordando os conceitos de Múltiplos e Divisores, com o auxílio de uma ferramenta computacional.

O experimento desenvolvido neste trabalho foi inspirado e está vinculado aos objetivos do projeto AProvaME (*Argumentação e Prova na Matemática Escolar*), cuja temática central refere-se a questões de ensino e aprendizagem da prova na matemática escolar. Esse projeto está organizado em duas fases, que serão explicitadas mais adiante e nosso estudo refere-se, particularmente, à fase 2, que consiste em desenvolver uma seqüência didática que propicie aos alunos vivenciar diferentes etapas do processo de prova, levando-os à elaboração de suas próprias conjecturas, à verificação da validade destas e à produção de argumentos que justificam ou explicam essa validade (ou não).

Em nosso experimento, empregamos alguns pressupostos ou idéias dos trabalhos de Balacheff (1988) sobre os tipos de prova e também de De Villiers (2001) com relação aos papéis da prova. Buscamos com isso, contribuir para a reflexão a respeito da atividade de provar, na Matemática da sala de aula, destacando o potencial das atividades, a postura dos alunos, o comportamento do professor-pesquisador frente a este tipo de proposta e o papel da ferramenta computacional adotada.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, que passamos a descrever brevemente.

O Capítulo 1 explicita a temática de pesquisa e apresenta o projeto AProvaME, descrevendo a organização e as principais atividades para o desenvolvimento das fases 1 e 2 do referido projeto.

O Capítulo 2 indica e resume as principais referências bibliográficas que subsidiaram este trabalho, fornecendo-nos ferramentas conceituais para a elaboração das atividades da seqüência didática e para a análise das mesmas.

No Capítulo 3 são relatadas as etapas da seqüência didática, com as atividades e alguns elementos de suas respectivas da análise *a priori*.

O Capítulo 4 é dedicado às considerações metodológicas para a aplicação da seqüência de ensino, no qual apresentamos os sujeitos envolvidos e o ambiente em que o experimento foi realizado.

O Capítulo 5 apresenta as principais produções dos alunos, em que embasaremos a análise *a posteriori* das situações experimentadas.

O Capítulo 6 apresenta as considerações finais, descrevendo a conclusão obtida através da experiência de se trabalhar com prova na educação básica e as implicações desta pesquisa em nossa prática docente.

CAPÍTULO 1

O PROJETO APROVAME

1.1 Introdução APovaME

Este capítulo tem o propósito de apresentar o projeto AProvaME – *Argumentação e Prova na Matemática Escolar* – que propiciou o desenvolvimento de meu trabalho final de Mestrado.

Recebi um convite para participar desse projeto, no primeiro semestre de 2005, ano em que ingressei na PUC/SP, no curso "Mestrado Profissional em Educação Matemática". Esse projeto despertou meu interesse, pois desenvolvia pesquisas relacionadas a um tema que muito me incomodava nos últimos anos de minha carreira profissional, qual seja: como trabalhar com provas e demonstrações com os alunos? É possível e necessário abordar esse tema na Educação Básica?

Já lecionei durante 14 anos, dos quais, 11 foram dedicados ao Ensino Fundamental II, especificamente 8º e 9º anos, anteriormente classificados como 7ª e 8ª séries, respectivamente. Nesse período, os materiais didáticos utilizados por mim não sugeriam atividades que desafiassem os alunos a expor seus raciocínios e seus argumentos, ou validar suas respostas. Apresentavam apenas as propriedades, sem demonstração, para serem utilizadas nos exercícios e, em geral, as atividades iniciavam sugerindo: "*faça como o exemplo*".

Além disso, eu sentia falta de trabalhar com recursos tecnológicos e quando utilizava a sala de Informática, não sabia conciliar as atividades com os softwares disponíveis. Sem muito êxito, eu repetia a mesma abordagem da sala de aula, não muito diferente do livro didático, ou seja, apresentando alguns exemplos e solicitando que os alunos resolvessem alguns outros do mesmo tipo, mas nada que representasse um desafio no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Quando foi feito o convite para que eu participasse do projeto, percebi que poderia ter oportunidade de discutir essas questões ou inquietações e, quem sabe, dar um passo para melhorar meu desempenho profissional. Chamou-me a atenção uma das propostas do projeto, que consiste na elaboração de atividades que levem os alunos a provar e argumentar, desenvolvendo conceitos e propriedades matemáticas, em especial, na Álgebra e na Geometria, com o auxílio de recursos tecnológicos. Essa proposta contemplava aspectos ligados aos meus questionamentos em relação ao estudo da prova matemática, em sala de aula. Considerei, então, que nesse projeto, poderia aprofundar e avançar em questões de meu interesse, diretamente relacionadas com minha prática pedagógica.

Para desenvolver o trabalho apresentado nesta dissertação, com meus alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II, foi elaborada uma seqüência didática sobre *Múltiplos e Divisores* de números naturais, integrando uma ferramenta computacional (no caso, a planilha Excel).

1.2 Descrição do projeto

O projeto AProvaMe tem como tema central de pesquisa – conforme seu título indica – os processos de **A**rgumentação e **Prova** na **M**atemática **E**scolar. Ele se propõe a estudar questões referentes ao ensino e aprendizagem da prova em Matemática, tendo como universo de investigação alunos da faixa etária de 14 a 16 anos, que freqüentam o 9º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio, de escolas do Estado de São Paulo. A duração prevista para o desenvolvimento do projeto com um grupo de alunos é de dois anos.

De acordo com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve ser composto de atividades e experimentos que viabilizem aos alunos o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, muitas pesquisas revelam que o raciocínio dos alunos não se apresenta constantemente, conforme as leis da lógica e é influenciado por uma série de fatores, além dessas exigências (cf. Anexo 1). Acreditamos que tal resultado se verifica procede no contexto brasileiro por dois motivos:

O primeiro é que os livros didáticos não apresentam atividades propícias para que os alunos possam desenvolver raciocínios lógicos matemáticos e produzir provas, para além do processo empírico. O segundo é que os professores de Matemática, muitas vezes não estão convencidos de que trabalhar com provas matemáticas, de maneira informal, seja bom e valorizam outros conteúdos. Talvez isso ocorra porque os professores não sabem elaborar tais atividades, visto que no processo de formação acadêmica só vivenciaram o ato de provar, matematicamente, de maneira formal.

Em uma de suas fases, o projeto AProvaMe propõe o trabalho de elaboração de atividades que engajem os alunos em processos de validação de uma proposição, auxiliando no desenvolvimento de habilidades lógico-matemáticas, de forma que eles produzam suas próprias provas, com o auxilio de recursos tecnológicos.

A equipe do projeto AProvaME é composta por um grupo de 27 alunos do curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC/SP), do qual faço parte, e 6 (seis) professores pesquisadores, integrantes do grupo de pesquisa TecMEM (Tecnologia e Meios de Expressão em Matemática) do Programa de Mestrado da PUC/SP.

Em síntese, o projeto AProvaME visa mapear as concepções dos alunos com relação à prova e argumentação em Geometria e Álgebra e, como anteriormente, tem por objetivo o desenvolvimento de atividades com integração de recursos tecnológicos (calculadoras, computadores) para esse tipo de ensino. A idéia é levar os professores a adotarem uma “nova” postura, valorizando esse conteúdo muito importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Os principais objetivos do projeto, extraídos do Anexo 1, que apresenta o Projeto AprovaME são citados a seguir:

- Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova, de alunos adolescentes, em escolas do Estado de São Paulo.
- Formar grupos colaborativos, compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem.
- Criar um espaço virtual de partilha entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
- Avaliar as situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e as funções da prova em Matemática.
- Investigar a implementação dessas atividades por diferentes professores e assim avaliar em que medida sua participação nos grupos colaborativos propicia a apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de provas.

O projeto foi organizado em duas fases, da seguinte forma:

- <u>Fase 1</u>

  Nesta fase foi realizado o levantamento das concepções dos alunos frente à proposta do trabalho com provas e argumentações.

- <u>Fase 2</u>

  Os resultados da Fase 1 subsidiaram as decisões tomadas nesta fase, em relação à elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. O trabalho desenvolvido nesta dissertação está ligado diretamente a esta fase.

Descrevo, a seguir como as atividades do grupo foram organizadas nesses dois momentos do projeto.

1.3 Metodologia e estratégia de ação

1.3.1 Desenvolvimento da Fase 1

Em agosto de 2005, iniciou-se esta fase, na qual os pesquisadores e mestrandos envolvidos no projeto tinham um encontro presencial quinzenal, e mantinham comunicação efetiva para a partilha de idéias, decisões e ações no âmbito do projeto, por meio de um espaço virtual criado na plataforma TelEduc.[1]

Para fazer o levantamento das concepções dos alunos sobre argumentação e prova em Matemática, foi elaborado um questionário, baseado em outro concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Foram realizadas várias discussões para a elaboração desse questionário, que é composto de duas partes, sendo uma com questões de Álgebra e outra com questões de Geometria.

Foi um momento muito rico de troca de experiências entre os participantes do projeto.

Nessa etapa, vários mestrandos também realizaram aplicações-piloto dos questionários, cujos resultados eram analisados pelos grupos, permitindo definir os seguintes tópicos: número de questões em cada caderno, tipo de questões, tempo de duração de aplicação do questionário, entre outros.

1.3.2 Descrição do questionário

Os itens que compõem o questionário visam avaliar em que medida os alunos aceitam evidências empíricas como prova e distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos. Além disso, pretendem analisar se os alunos compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir seus próprios argumentos. Buscam também identificar nas escolhas dos alunos, a influência da abordagem utilizada pelo professor, para o

[1] O **TelEduc** é um ambiente de ensino a distância que possibilita a realização de cursos pela Internet. Está sendo desenvolvido conjuntamente pelo **Núcleo de Informática Aplicada à Educação (Nied)** e pelo **Instituto de Computação (IC)** da **Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)**. Para mais detalhes ver www.nied.unicamp.br.

desenvolvimento de noções realizadas com a argumentação e a prova – língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc. Apresento a seguir, o caderno que contém as questões de Álgebra, dentre as quais, foram selecionadas as questões utilizadas em nosso experimento.

Essas questões estão organizadas em dois blocos:

1. Questões de múltipla escolha
2. Questões abertas, para a construção de provas.

Cada bloco tem características próprias, que serão explicitadas na seqüência:

Avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação (questão A1, conforme Figura 1).

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:
Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4 \quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6 \quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8 \quad 4 + 6 = 10$

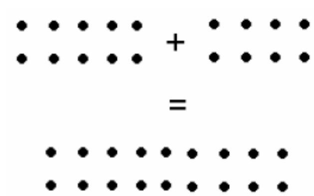
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$
$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$
$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Figura 1: Questão A1 do Questionário sobre prova (1ª parte)

Complementando a questão A 1, foi apresentado um quadro (Figura 2), para que os alunos analisassem a generalidade das respostas ou argumentos dados por Arthur, Beth, Duda, Franklin e Hanna. Com a proposta desta questão, tínhamos o objetivo de avaliar as escolhas dos sujeitos de nossa pesquisa, ao responder a 1ª parte, e em seguida, pretendíamos elaborar conclusões a respeito de suas concepções de prova.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

Figura 2: Questão A1 do Questionário sobre prova (2ª parte)

A questão A2 foi elaborada com o propósito de observar o comportamento dos alunos em relação a uma afirmação já provada, para verificar se conseguiam também perceber a generalidade de uma prova (Figura 3).

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

Figura 3: Questão A2 do Questionário sobre prova

As questões A3, A4 e A5 solicitam aos alunos a construção de provas e argumentos para determinadas afirmações (figuras 4 e 5).

A3. **A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?**

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. **A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?**

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

Figura 4: Questões A3 e A4 do Questionário sobre prova

1.3.3 Comentário sobre a questão A1

A questão A1 tem por finalidade identificar a concepção de prova sujeito de nossa pesquisa e seu grau de generalização. Foi pedido que o sujeito analisasse as respostas apresentadas por Arthur, Beth, Duda, Franklin e Hanna.

Supúnhamos que os sujeitos de nosso estudo identificariam, em uma das respostas, idéias que já haviam construído, anteriormente, sobre prova.

As respostas de Arthur, Beth, Duda, Franklin e Hanna, apresentadas na questão A1 para que os sujeitos analisassem e respondessem, foram fundamentadas nas concepções dos tipos de provas apresentada por Balacheff (1998), que são as seguintes:

1. *Empirismo ingênuo*: esse tipo de prova foi apresentado por Beth. É aplicado a alguns casos particulares e logo se conclui como verdade generalizada.
2. *Experimento crucial*: esse tipo de prova não foi apresentado nas respostas sugeridas nesta parte do questionário, mas será ilustrado no próximo capítulo.
3. *Exemplo genérico*: esse tipo de prova foi usado por Hanna e Franklin – escolheram um exemplo representativo de uma classe, que deixa explícitas as razões da verdade da propriedade aplicada.
4. *Experimento de pensamento:* Esse tipo de prova foi usado por Artur, que buscou argumentos lógicos em seus conhecimentos prévios. Ou seja, partiu de premissas e chegou à conclusão, formalizando uma resposta geral baseada em propriedades. Podemos incluir neste tipo de prova o argumento de Duda, pois teve o mesmo procedimento de Arthur, embora não tenha utilizado a representação simbólico-algébrica.

1.3.4 Comentário sobre as questões A3 e A4

As questões A3 e A4 visam desafiar o aluno à conjectura e à validação por meio de procedimentos algébricos, buscando argumentação para uma generalização dos raciocínios. Esperávamos que os alunos se apropriassem das idéias de provas trabalhadas na questão A1, na qual foram expostos tipos de provas sugeridos por Balacheff (1998).

1.3.5 Comentário da questão A5

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.
Justifique

Figura 5: Questão A5 do questionário sobre prova

A questão A5 apresenta a idéia de fatorial e é composta de cinco itens aos quais o aluno não só deve responder, como apresentar uma justificativa de sua resposta

Quanto ao item (a), espera-se que o aluno analise o desenvolvimento 5!=5x4x3x**2**x1 e, levando em conta a presença do fator 2, responda afirmativamente.

Quanto ao item (b), espera-se que o aluno se apropriasse da caracterização dada e respondesse, sem efetuar cálculos, que 8!=8x7x6x5x4x3x2x1.

No item (c), espera-se que o aluno percebesse que o 3 e 7 são fatores de 8!, logo 8! é divisível por 21 ou ainda 8! é múltiplo de 21.

No item (d), espera-se que o aluno apresente um raciocínio análogo ao anterior, respondendo da mesma maneira.

No item (e) da questão A5, para esta questão, o resultado esperado era que o aluno percebesse que 10 é fator de 23!, e que todos os números naturais multiplicados por 10 terminam em 0.

Depois de aplicado o questionário, os resultados foram analisados, a fim de avaliar a compreensão dos alunos a respeito do ato de provar, identificando assim, pontos que mereceriam maior atenção em nossa seqüência didática.

1.4 Coleta de dados

O projeto conta com uma amostra de 1998 alunos de 31 escolas, distribuídos em 34 turmas de 9º ano do Ensino Fundamental e 47 turmas de 1ª série do Ensino Médio, totalizando 81 turmas.

Para chegarmos a esses números, cada professor mestrando, participante do projeto, comprometeu-se a indicar 5 turmas das séries citadas acima, das escolas em que lecionavam. Dessas turmas indicadas, foram selecionadas aleatoriamente três para responder ao questionário.

O professor aplicador do questionário poderia ser o próprio professor colaborador mestrando participante do projeto ou não, desde que seguisse as normas de aplicação, a saber:

- Tempo de duração de 50 minutos para cada questionário.
- Os questionários poderiam ser aplicados em qualquer ordem (Álgebra-Geometria ou Geometria-Álgebra).
- A aplicação, em duas aulas, poderia ser no mesmo dia (aulas seguidas) ou em dias alternados.
- Os alunos deveriam fazer todas as respostas e anotações na própria folha de atividade, usando caneta.
- Não seria permitido o uso de material para consulta ou calculadora.

Pude contribuir com esta fase do projeto AprovaME, aplicando o questionário em duas classes do 9º ano do Ensino Fundamental e uma classe do 1º ano do Ensino Médio. O questionário foi aplicado por mim, às turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, pois sou professor titular das mesmas. Quanto à turma do 1º ano do Ensino Médio, após as orientações e justificativas necessárias, a aplicação do instrumento foi gerenciada por outro professor, não participante do projeto AprovaME, que atuou apenas nesta etapa.

Para realizar o experimento desenvolvido para esta dissertação contei com a participação de alunos do 9º ano, não participantes dessa coleta inicial de dados. Esses alunos serão caracterizados no capítulo 4.

1.5 Codificação utilizada na prova de Álgebra

Esta fase de codificação foi bastante discutida pelo grupo de pesquisadores, até chegarmos a um padrão final, pois as opiniões eram divergentes entre os participantes do projeto e após várias discussões presenciais e nos vários fóruns no TelEduc, conseguimos chegar a um consenso e elaborar uma codificação para a correção dos questionários que foi lançada em uma planilha do tipo Excel (cf. quadro abaixo).

0:	*Respostas totalmente erradas, respostas que não apresentam justificativas ou exemplos, ou respostas que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um "círculo vicioso".*
1:	*Alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências. Por exemplo, respostas que são completamente empíricas.*
2:	*Alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem, contudo trazer todos os passos necessários para uma prova.*
2a:	*Falta muito para chegar à prova (mais próximo de 1)*
2b:	*Falta pouco para chegar à prova (mais próximo de 3)*
3:	*Respostas corretas, totalmente justificadas.*

Figura 6: Quadro de codificação

Um fato marcante nesta fase foi o crescimento do grupo com relação às análises das respostas apresentadas aos questionários-piloto, confrontando-se com as idéias apresentadas na teoria de Balacheff (1998). Percebemos que os alunos apresentaram como respostas argumentos de caráter pouco formal, do tipo empírico. O quadro de codificação elaborado e aceito por todo o grupo, atenderia a vários tipos de argumentos explicitados como respostas.

Depois de feita a codificação das respostas, pelos mestrandos, todos enviaram os resultados Correio do TelEduc, de forma que a equipe de pesquisadores pudesse organizar e classificar esses dados, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (1998).

1.6 Principais resultados do questionário

Foi proposto, pelos coordenadores do projeto, que alguns professores colaboradores mestrando participante do projeto desenvolvessem suas dissertações, com base na análise das respostas aos questionários aplicados no projeto AProvaME. De acordo com essa orientação, cada mestrando realizou a análise detalhada de uma ou duas questões. Apresentaremos, a seguir, alguns resultados do questionário de Álgebra:

Carvalho (2007) analisou as questões (A1) e (A2) e apresentou os seguintes resultados:

> *Em seguida, foi realizada uma discussão sobre os resultados obtidos por meio das respostas A1 e A2. Os resultados mostram que os alunos são muitos inconsistentes em suas respostas, apresentando um baixo desempenho. A preferência das respostas, na sua maioria, é pelos argumentos empíricos, que correspondem às provas pragmáticas*[2] *segundo Balacheff (1998). Assim como os resultados obtidos na pesquisa de Healy & Hoyles (2000)*[3]*, os alunos preferem os argumentos empíricos, porém consideram que os professores não têm essa mesma preferência e que, conseqüentemente, não atribuiriam melhores notas a esse tipo de argumento. Nossas análises revelam também que, em geral, os alunos não compreendem todo o conteúdo de um argumento e não são capazes de avaliar a generalidade de forma adequada. (Carvalho, 2007, p. 67-68).*

Percebemos que os resultados obtidos por Carvalho (2007), nas questões (A1) e (A2), não diferem dos obtidos por Santos (2007), que analisou as questões (A3) e (A4), relatando em sua conclusão:

---

[2] Esse tipo de prova será explicado no capítulo 2, onde será apresentada a fundamentação teórica.

[3] Healy & Hoyloes (2000) realizaram na Inglaterra pesquisas analisando os tipos e as concepções de provas de alunos entre 14-15 anos.

Fazendo um paralelo entre nosso trabalho e o de Healy e Hoyles (1998), o uso de argumentos empíricos é também o mais comum que apareceu na pesquisa supra mencionada, porém esses sabem que ela tem pouco status entre os professores. Ainda, o uso da língua materna é comum dentro dos argumentos não-empíricos, assim como aconteceu com nosso estudo. (Santos, 2007, p. 121-122)

Segundo Leandro (2006), que analisou a questão sobre fatorial (A5) do questionário de Álgebra, após análise do desempenho dos alunos por série, pode-se concluir que os alunos do 9º ano do EFII[4] apresentaram melhor desempenho que os alunos da 1ª série do EM[5]. O autor declara que esse fato pode ter ocorrido, em virtude de ser o conteúdo divisibilidade trabalhado, exclusivamente, no EFII e considera que esse é um fato preocupante.

Achemos interessante acrescentar o resultado obtido por Doro (2007) que analisou as questões (G1) e (G5) do questionário de Geometria. O autor faz um comentário geral no início de suas conclusões, relatando que 26,3% dos alunos da 1ª série do EM não responderam às questões e nem justificaram nenhuma das afirmações. Além disso, 41,7% apresentaram respostas erradas seguidas de justificativas sem informações pertinentes. Apenas 1,9% dos alunos, do 9º ano do EFII, apresentaram respostas corretas seguidas de justificativas pertinentes. Tendo constatado que o rendimento do 9º ano do Ensino Fundamental é melhor do que o rendimento dos alunos do 1º ano do Ensino Médio, o autor conclui em seu estudo, que o domínio de conhecimento dos sujeitos, para a realização das atividades, assume um caráter temporário e não pleno.

1.7 Desenvolvimento da Fase 2

Esta fase iniciou-se no primeiro semestre de 2006, tendo a aprendizagem e o ensino como dois eixos inter-relacionados que nortearam nossas investigações.

Quanto ao eixo da aprendizagem, o objetivo central é a elaboração e avaliação de situações diretamente ligadas aos campos de dificuldades e

---

[4] E F II – Ensino Fundamental II
[5] EM – Ensino Médio

limitações de compreensão de provas, apontadas no mapeamento elaborado na Fase 1.

Já no segundo eixo, relativo ao ensino, a atenção é voltada para o professor mestrando participante do projeto e para a sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas situações *em ação,* considerando que as situações foram experimentadas pelos professores em suas salas de aula.

Para esse desenvolvimento, todos os participantes do projeto foram divididos em cinco grupos (E1, E2, E3, E4, E5), com dois pesquisadores e cinco ou seis professores, para a elaboração das atividades. Eu participei do grupo E3, que realizava reuniões presenciais, todas as terças-feiras, sendo um período muito importante no desenvolvimento do trabalho, pois realizamos vários testes, fizemos leituras e discutimos muito até chegarmos à elaboração de algumas atividades. Segue abaixo uma tabela que especifica os temas das atividades que foram desenvolvidas por cada equipe:

Equipe	**Álgebra**	***Geometria***
1	Função 1º Grau	Triângulos e Ângulos
2	Progressões Aritmética e Geométrica	Paralelismo e Perpendicularismo no plano
3	Números e Conjuntos Numéricos	Paralelismo e Perpendicularismo no espaço
4	Múltiplos e Divisores	Propriedades de Quadriláteros
5	Teorema Fundamental da Aritmética	Teorema de Pitágoras

Figura 7: Tabela com temas das atividades por equipe

O trabalho que eu desenvolvi nesta dissertação está ligado diretamente aos dois eixos da fase 2, tendo como objetivo a elaboração de atividades e, e no meu caso, e a exploração de problemas relacionados a múltiplos e divisores de números naturais, com a utilização de planilhas eletrônicas do Excel.

Todas as atividades elaboradas visam instigar os alunos a realizar conjecturas, investigações e validações de seus raciocínios, utilizando recursos tecnológicos que ampliarão o campo de testes de hipóteses, levando-os a perceber conceitos e propriedades matemáticas e a expor seus resultados.

Como descrito anteriormente, leciono em turmas de 8º e 9º anos do EFII e, de acordo com minha orientadora, para a seqüência didática desenvolvida nesta dissertação, nos apropriamos das atividades elaboradas pelo grupo E4. São atividades referentes à parte de Álgebra, sobre os conteúdos de Múltiplos e Divisores. Com elas fiz toda a coleta de dados e análises das argumentações e provas dos alunos envolvidos no experimento.

Na segunda etapa da fase 2 foi feita a discussão das atividades elaboradas e todas as equipes disponibilizaram suas atividades no TelEduc, para serem testadas e analisadas por outras equipes. Os pesquisadores indicavam as atividades que deveriam ser analisadas e, em encontros presenciais realizados quinzenalmente ou nos Fóruns de discussão, concluímos esta etapa.

CAPITULO 2

PROVA E ARGUMENTAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo discutir o significado do termo ***prova*** no processo de ensino-aprendizagem da Matemática uma vez que o experimento desenvolvido nesta dissertação refere-se à elaboração e avaliação de situações de ensino, destinadas à abordagem de provas e argumentação, em Matemática, com o auxílio de uma ferramenta computacional (no caso, o Excel).

Durante a Fase 1 do projeto AProvaME, nos apropriamos de várias referências ou textos acadêmicos relacionados a esse tema, ao papel da prova e aos tipos de provas aceitos por pesquisadores em Educação Matemática.

Essas referências indicam que o termo "prova" assume vários significados no contexto da Educação Matemática e, segundo Pietropaolo (2005):

> *Esses pesquisadores constatam. Por exemplo, características dos conceitos de provas em diferentes contextos institucionais como o cotidiano, ciências empíricas, matemática escolar, matemática profissional, lógica e alicerces da matemática. Apesar disso, a maioria desses contextos apresenta situações com algo em comum: a procura pela validação de afirmações por meio de argumentos, ainda que estes possam ser articulados de maneiras distintas e por procedimentos diferentes. (PIETROPAOLO, 2005, p. 48-49)*

Em nosso estudo, o termo “prova” assume o significado de procura pela validação de afirmações, envolvendo argumentação e conjectura, de maneira informal, podendo ser expressa de diferentes formas, inclusive em língua natural.

Para elaborar uma seqüência didática que explore a prova matemática, é fundamental que se dê atenção aos conhecimentos prévios necessários para que as questões atinjam esse objetivo. Temos de propor questões que desafiem os alunos e criem condições para a utilização de seus conhecimentos matemáticos prévios, na tentativa de desenvolver generalizações de propriedades e construir uma prova matemática.

O pesquisador francês Nicolas Balacheff (1988) afirma em sua teoria que, para entendermos a relação entre aluno e processo de validação, devemos considerar que os passos de realização de uma prova seguem caminhos distintos nas ***provas pragmáticas*** e nas ***provas conceituais,*** alicerçados em três pontos que interagem: conhecimento (natureza das concepções); linguagem (formulação); validação (tipo de raciocínio).

Apresentaremos, no próximo item, a classificação dos tipos de provas, elaborada por Balacheff (1988).

2.2 Tipos de provas

Na elaboração de uma prova, o aluno busca em sua vivência matemática, recursos para validar, explicar e generalizar seus resultados. Para analisarmos os procedimentos dos alunos neste trabalho, utilizamos à classificação dos tipos de provas apresentada por Balacheff (1988): provas ***pragmáticas*** e provas ***conceituais.***

As ***provas pragmáticas*** são aquelas que o aluno constrói, recorrendo aos seus conhecimentos práticos, e desenvolvendo procedimentos de ação, como exemplos e desenhos. Para o desenvolvimento dessas provas, o aluno considera alguns poucos casos e tenta mostrar que, uma afirmação é verdadeira, sem a preocupação de explicitar as propriedades do conhecimento que está em jogo ou suas relações.

As ***provas conceituais*** são aquelas que o aluno constrói explicitando formulações de propriedades do conhecimento em jogo e suas relações, fugindo de ações (mostrações) e buscando a generalização por meio de uma linguagem dedutiva e lógica.

O tipo de prova concebido pelos alunos sofre transições de caráter evolutivo, da pragmática para a conceitual, revelando saltos qualitativos nos esquemas apresentados por eles. Essa evolução está ligada diretamente ao aprimoramento da ação, da formulação e da validação de suas conjecturas. Segundo Balacheff (1988), a prova tem características hierárquicas, dependendo da qualidade da generalização do conhecimento envolvido. Apresentamos, a seguir, os tipos de provas identificados por esse autor, em relação ao processo evolutivo dos alunos, nos diferentes níveis de validação:

Provas Pragmáticas

- ***Empirismo ingênuo:*** é uma primeira tentativa de generalização do aluno, que admite a validação de uma propriedade após verificação de alguns poucos casos, não levando em conta a particularidade.
- ***Experimento crucial:*** O aluno inicia o processo de validação a partir de exemplos que contêm a característica do problema da generalização, e conclui tomando um caso particular possível.
- ***Exemplo genérico:*** O processo de validação do aluno se dá a partir de um exemplo que possui as propriedades representativas de sua classe, generalizando assim, a validade de uma proposição.

Provas Conceituais

- ***Experiência mental:*** Neste caso, o aluno não se apropria de casos particulares, mas sim de deduções lógicas baseadas em propriedades.

Como vimos Balacheff (1988) trabalha a idéia de classificação das provas matemáticas por níveis.

No próximo item, apresentaremos Michael de Villiers (2001) que propõe outros aspectos no estudo de provas em Matemática, complementando as idéias de Balacheff.

2.3 Papel ou função da prova

De Villiers (2001), um dos teóricos que estudamos, propõe uma visão importante em relação ao papel e função da prova no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Ele sugere que devemos levar o estudante ao entendimento do ato de provar, tornando-o mais significativo para o aluno.

Destaca também que o papel da prova vem sendo trabalhado no ensino, exclusivamente, como verificação e justificação. Embora considere importantes esses aspectos, esse autor apresenta em seus estudos um modelo com outras funções para as provas matemáticas. São seis diferentes funções da prova, conforme descrição a seguir, cuja ordem não indica uma classificação segundo a importância de cada item:

- **Prova com a função de verificação:** quando temos a convicção de que um teorema é verdadeiro, logo adquirimos confiança e motivação para tentar prová-lo, ***verificando,*** de maneira quase empírica, a validade de nossas conjecturas.
- **Prova com a função de explicação:** ainda que, tendo certeza da validade de uma conjectura, após testá-la com exemplos, substituições numéricas e medições precisas por meio de verificações com um alto grau de confiança, tais procedimentos muitas vezes não têm a função somente de verificação, mas sim de ***explicação*** da razão da validade do fato.
- **Prova com a função de descoberta:** a prova não fica restrita somente à verificação de um resultado já conhecido, mas também nos leva a novos conhecimentos e a novas descobertas, quando tentamos demonstrar ou explicar a veracidade de uma conjectura.

- **<u>Prova com a função de comunicação:</u>** o ato de se pronunciar o raciocínio desenvolvido no processo de elaboração da prova gera uma discussão verbal e uma troca de informações. Com isso, se desenvolve a comunicação em torno do resultado obtido, propiciando assim, uma interação social, vinculada ao conhecimento matemático em jogo, considerando os argumentos apresentados como válidos ou não.

- **<u>Prova com a função de desafio intelectual:</u>** provar, matematicamente, muitas vezes requer tentativas, esforços mentais que passam a ser um desafio atrativo para o aluno, até alcançar a elaboração correta de uma prova. Quando isso acontece, a satisfação pessoal é inevitável e desperta o interesse por um novo desafio.

- **<u>Prova com a função de sistematização:</u>** quando estamos desenvolvendo uma prova matemática, num processo de verificação, buscamos organizar, avaliar as consistências e as inconsistências dos argumentos pré-estabelecidos e sua aplicabilidade. Com esses procedimentos, sistematizamos o melhor método para a realização da prova.

Analisando as idéias de De Villiers (2001), e as de Balacheff (1988) não notamos divergências significativas em relação à função da prova em Educação Matemática. E essas idéias serviram de base para nortear o experimento realizado neste estudo.

O estudo dessas teorias proporcionou um ganho de conhecimento significativo para o desenvolvimento da seqüência didática, levando-nos a refletir e perceber o grau de importância de trabalhar no nosso dia-dia, em sala de aula, questões matemáticas que requeiram do aluno, esses raciocínios.

Segundo alguns pesquisadores, o trabalho com prova no ensino da Matemática deve ser cultivado desde as séries iniciais, buscando quebrar o tecnicismo, as listas repetitivas e atividades que exijam resultados mínimos, e exigindo do aluno que exponha seus conhecimentos, pensamentos e idéias, como é proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN 1998) que discutiremos no próximo item.

2.4 Provas Matemáticas e os PCN

Em 1998, foram publicados, no Brasil, pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), os **P**arâmetros **C**urriculares **N**acionais, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental II, com o objetivo de contribuir com um conjunto de conhecimentos (específico, cidadania, social e cultural) e nortear o desenvolvimento de todas as áreas de conhecimento deste país.

Os PCN de Matemática apresentam uma linha histórica de reorientação curricular do ensino da Matemática no Brasil, que começa na reforma dos anos 20, passando pelo Movimento da Matemática Moderna nas décadas de 60/70 e terminando com as propostas sugeridas nos anos 80/90. Após estudarmos essa linha histórica, percebemos que a causa de encontrarmos dificuldades para quebrar nossas concepções pedagógicas, está no fato de terem sido alicerçadas num ensino que não privilegiava o pensamento e o raciocínio, citação abaixo:

> *Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão. (PCN, 1998, p. 99).*

No meu entender, os PCN (1998) vêm auxiliar os professores, na tentativa de mudança da concepção pedagógica para favorecer a construção de conhecimentos matemáticos pelos alunos. De acordo com seus autores, é necessário ensinar Matemática, de maneira que o aluno desenvolva competências ligadas às habilidades de formular, comunicar, expressar, conjecturar, validar e generalizar seus pensamentos na resolução de problemas. (PCN, 1998, p. 42) Deseja-se, portanto que os alunos sejam capazes de:

- Elaborar um ou vários procedimentos de resolução (realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses).
- Comparar seus resultados com os de outros alunos.
- Validar seus procedimentos.

O desafio do experimento elaborado e aplicado, que gerou os dados para esta dissertação, foi seguir o perfil proposto por Balacheff, De Villiers e PCN, buscando desenvolver uma nova visão nos alunos, de uma Matemática motivadora, que utiliza os recursos tecnológicos, objetivando o enriquecimento de seus conhecimentos, dando-lhes condições para resolver problemas e para interagir com a comunidade.

Encerro este capítulo, destacando duas frases dos PCN (1998), que me motivaram a desenvolver a seqüência didática. A primeira valoriza o trabalho de prova no ensino da Matemática:

> *Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar à importância do processo de resolução. (PCN, 1998, p. 42).*

A segunda frase refere-se ao papel do professor frente ao ensino de Matemática, comprometendo-se com uma nova concepção pedagógica, que estimule os alunos, rompendo com os antigos paradigmas do ensino da Matemática de robotização, e levando o aluno a desenvolver seus conhecimentos:

> *O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos - que admitem diferentes respostas em função de certas condições, - evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos. (PCN, 1998, p. 42).*

A partir da leitura das idéias teóricas mencionadas neste capítulo, escolhemos algumas ferramentas que nortearam a elaboração e análise das atividades da seqüência didática, que apresentaremos no capítulo seguinte, quais sejam:

- Considerar o processo de prova mais amplo, envolvendo as fases de experimentação, verificação para a produção de conjecturas pelos alunos.
- Os papéis da prova de De Villiers (2001), com ênfase para a prova que visa à explicação, acreditando que a necessidade da prova faça mais

- Buscar analisar o comportamento e o desempenho dos alunos nessas situações, que provavelmente não lhes são muito familiares: como responderam, como fizeram, que nível de prova atingem e se apresentam indícios da passagem de argumentos empíricos para os conceituais.

Em termos gerais, a proposta da seqüência didática contempla algumas sugestões dos PCN (1998), buscando viabilizar o uso de novas tecnologias, trabalhar atividades desafiadoras, nas quais o aluno deve ter uma participação ativa e que talvez no dia-dia, não façam parte de nossa prática.

Buscamos também analisar o papel do professor frente à proposta, examinando como foi o seu comportamento, como atuou (ou como “deve” atuar) durante o desenvolvimento desse tipo de atividade.

CAPÍTULO 3

UM PANORAMA DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

3.1 Introdução

A seqüência didática proposta nesta fase foi elaborada com o objetivo de levar o aluno a vivenciar um processo de prova que inclui atividades de generalização, fases de formulação de hipóteses ou conjecturas e produção de argumentos, visando testar ou validar essas conjecturas. Pretendíamos, assim, dar condições para os alunos engajarem-se nesse tipo de atividade. Na proposta da seqüência didática, utilizamos o software Excel, como ferramenta auxiliar na geração de um campo de dados observáveis, possibilitando que os alunos testassem inúmeros casos para decidir sobre a validade de suas conjecturas.

Todas as atividades foram realizadas em duplas. Desta maneira, nossa intenção era proporcionar aos alunos momentos de interação social, comunicação e discussão para o entendimento das atividades e a elaboração de suas conjecturas e argumentos. Nesse sentido a prova adquire o papel de comunicação proposto por De Villiers (2001):

> *De modo semelhante, Davis (1976) também enunciou que um dos valores concretos da demonstração é a criação de um fórum para debate crítico. De acordo com este ponto de vista, a demonstração é um modo único de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, entre os próprios estudantes. (De Villiers, 2001, p. 35)*

A seqüência de atividades está dividida em três fases compostas de um caderno de atividades e de planilhas a serem elaboradas com o auxílio do software Excel. Para a aplicação das atividades, foram previstos 04 encontros de aproximadamente 1h 30 min de duração cada, fora do horário escolar (atividade extracurricular). Todos os encontros foram realizados no laboratório de Informática da escola.

3.2 Descrição das atividades e elementos de análise *a priori*

Apresentaremos a análise da seqüência, organizada conforme o quadro abaixo.

Fase 0	Atividades: 1, 2, 3, 4 e 5
Fase 1	Atividades: 1, 2
Fase 2	Atividades: 1, 2

Tabela 01: Atividades aplicadas em cada fase.

3.3 Fase 0

As atividades propostas nesta fase visavam familiarizar os alunos participantes do projeto com os recursos básicos do software Excel, de forma a criar condições para a realização das atividades das fases seguintes (1 e 2).

Todas as atividades foram propostas a partir de um roteiro de instruções que conduzem à construção de fórmulas no Excel (com o sinal =), utilizando operações matemáticas básicas. Assim, as primeiras atividades são detalhadas, indicando os comandos ou funções do Excel a serem utilizados.

A seguir, apresentamos os enunciados das atividades desta fase acompanhados da análise *a priori*.

3.3.1 Atividade 1

Sendo $a \in Z$ e $b \in Z$, determine $a+b \in Z$ em uma planilha do Excel.

1º) Abra uma planilha no Excel. Na célula A1, digite a; na célula B1, digite b; na célula C1, digite $a+b$ (conforme exemplo abaixo).

2º) Para criar nossa primeira fórmula, existem dois caminhos:

- Na célula C2, digite =A2+B2, finalizando clicando fora da célula C2.
- Digite = em C2, e em seguida clique em A2 digite +, clique em B2 e finalizar digitando Enter.

3º) <u>Testando a fórmula</u>. Na célula A2, digite 2; na célula B2, digite 4; selecione a célula C3 e verifique o resultado.

4º) Agora, crie uma tabela contendo pelo menos 20 somas.

Para isso:

a) Selecione a célula C2 clicando o mouse com o botão direito e selecionando o comando copiar.

b) Selecione as células pertencentes, a coluna $a+b$ de C3 a C11, clicando o botão direito do mouse selecione colar.

5º) Teste atribuindo valores para a e b, e verifique se a soma está correta.

	A	B	C
1	a	b	a+b
2	2	4	6
3	3	5	8
4	-10	15	5
5	-17	500	483
6	1024	-3254	-2230
7	15	-2457	-2442
8	10	44	54
9	-53	98	45
10	90	-100	-10
11	12	1	13

Comente esta atividade: ____.

Figura 8: Enunciado da Atividade1 – Fase 0

Nesta atividade, o aluno deveria seguir as instruções da ficha, passo a passo, e executar todos os comandos sugeridos pela atividade, pois o objetivo era levá-lo, num primeiro contato com o Excel, a se familiarizar com os comandos deste software e, mais especificamente:

1º) Entender como funciona a planilha, saber localizar uma célula, digitar algo em uma célula e centralizar uma digitação.

2º) Elaborar uma fórmula no Excel, com a utilização da tecla =.

3º) Verificar e testar as fórmulas editadas.

4º) Utilizar os comandos "copiar" e "colar" com as fórmulas, possibilitando a criação de tabelas com várias linhas e colunas.

Ao término desta atividade, esperávamos que os alunos tivessem segurança e conhecimentos mínimos para executar as tarefas seguintes, com o auxílio desse software. Acreditávamos que as atividades seriam realizadas sem grandes dificuldades. O professor aplicador acompanharia as atividades dos alunos e forneceria todas as informações que se fizessem necessárias ou fossem solicitadas pelos alunos, a respeito do aplicativo.

3.3.2 Atividades 2 e 3

Sendo *n* um número natural, então o número consecutivo de *n* é ________.

Crie uma tabela utilizando o Excel, tendo uma coluna de números naturais e outra coluna com seus respectivos consecutivos.

1º) Vamos atribuir títulos às colunas A e B, digitando *n* em A1 e seu consecutivo em B1.:

	A	B
1	n	
2		
3		
4		
5		

Consecutivo de n.

Figura 9: Enunciado da Atividade 2 – Fase 0

Utilizando a tabelas de números consecutivos que você criou na atividade 2, crie uma coluna com o produto desses números.

	A	B	C
1	n		
2	1	2	
3	2	3	
4	3	4	
5	4	5	
6	5	6	
7	6	7	
8	7	8	
9	8	9	
10	9	10	
11	10	11	
12	11	12	
13	12	13	
14	13	14	
15	14	15	
16	15	16	
17	16	17	
18	17	18	
19	18	19	
20	19	20	

Produto dos números consecutivos.

Consecutivo de n.

Comente esta atividade: ______________________________

Figura 10: Enunciado da Atividade 3 – Fase 0

Tínhamos como objetivo para as Atividades 2 e 3, a retomada da representação algébrica de números consecutivos e operações entre eles para a realização de verificações dessa representação, pelo uso de uma fórmula na planilha Excel.

O primeiro questionamento da Atividade 2 visa verificar se o aluno domina a representação algébrica de números consecutivos, buscando revisar o significado dado à expressão $n+1$. Considerando que os sujeitos de nosso experimento eram alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e que haviam tido contato com essa expressão, anteriormente, esperávamos que respondessem sem dificuldades. Tendo em vista a familiarização do aluno com o software, na Atividade 1, é solicitado que o aluno elabore uma tabela com duas colunas de números e seus consecutivos. Isso envolve à atribuição de títulos em cada coluna, à introdução de valores e definição da fórmula (n+1) a partir do número inicial.

Na Atividade 3, complementando a tabela iniciada anteriormente, solicita-se que seja representado o produto de dois números consecutivos. Esperávamos que os alunos realizassem esse item sem dificuldades, reconhecendo o produto $n(n+1)$. Após a elaboração dessa fórmula é pedido que o aluno teste a validade dos comandos inseridos por ele na planilha. Ao final, os alunos devem ter produzido uma planilha com 3 colunas representando: um número, seu consecutivo e o produto entre deles, ou seja, $n*(n+1)$.

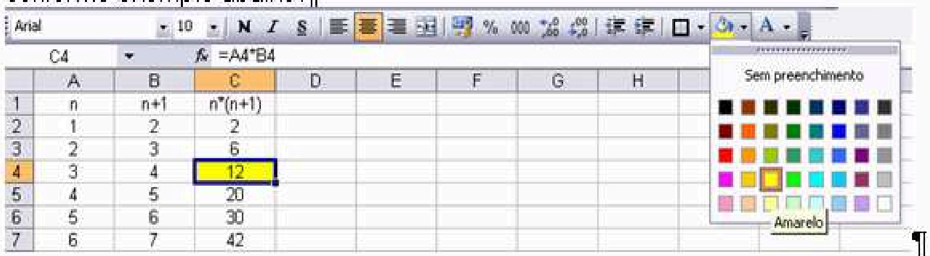
Por resgatar noções já vistas em anos anteriores e tendo realizado a Atividade 1, acreditávamos que os alunos não iriam apresentar dificuldades para a realização da referida planilha. Nossa intenção era que o professor responsável pela aplicação da seqüência propiciasse um trabalho autônomo por parte das duplas, fazendo as intervenções que julgasse necessária, sempre no sentido de questionar e motivar os alunos a expressarem suas idéias matemáticas e fornecendo algumas informações sobre o ambiente computacional, caso os alunos solicitassem.

3.3.3 Atividade 4

- Quando um número é múltiplo de outro? Explique e dê exemplos.

Usando a tabela da atividade anterior pinte, na coluna C, os números que você considera múltiplos de 4.

1º) Para pintar uma célula, basta selecioná-la e, em seguida, utilizar a ferramenta preencher conforme exemplo abaixo.



- Quando um número é divisível por outro? Explique e dê exemplos.
- Quando um número (diferente de zero) é múltiplo de outro, podemos também dizer que ele é divisível? Por quê?

2º) Crie na célula D1, uma fórmula utilizando a divisão para verificar se os preenchimentos das células que você considerou múltiplos de 4 estão corretos.

3º) Agora observe os números destacados e verifique os produtos que os originaram. O que podemos observar?

Comente esta atividade: ____

Figura 11: Enunciado da Atividade 4 – Fase 0

A Atividade 4 visa o resgate das noções de múltiplos e divisores de números naturais e a relação entre essas duas propriedades numéricas, por meio de verificações e testes em uma planilha elaborada no Excel. Nesta seqüência didática, esta é a primeira tentativa de levar o aluno a dar seus primeiros passos para a formulação de conjecturas, por verificações empíricas, considerada por nós como uma primeira fase no processo de construção de provas matemáticas.

Esperávamos que o aluno respondesse em linguagem natural, que um número a é múltiplo de um número b quando a é resultado da multiplicação de b por um número (no caso, consideramos o conjunto dos números naturais). Em seguida, tínhamos a expectativa de que ele relacionasse a expressão "ser divisível por" com uma divisão exata. Ao final, nossa intenção era verificar se os alunos relacionariam corretamente as noções de múltiplos e divisores, demonstrando compreensão de que se a é um número múltiplo de b então esse número a é divisível pelo número b. Acreditávamos que não haveria dificuldade por parte dos alunos, pois, em geral, no 7º ano esse conteúdo é explorado com bastante ênfase.

Para desenvolver esta atividade, o aluno deveria elaborar uma planilha, atribuindo títulos às colunas e elaborando as seguintes fórmulas: n, $n+1$, $n*(n+1)$ e $n*(n+1)/4$. Deveria também manipular a ferramenta “preencher” para pintar as células que contivessem as respostas corretas. Além disso, nossa expectativa era de que os alunos observassem regularidades entre pares de números naturais consecutivos cujos produtos são números divisíveis por 4.

Finalmente, tendo já manipulado o Excel nas atividades anteriores, esperávamos que o aluno não apresentasse dificuldades para a realização desta atividade.

3.3.4 Atividade 5

> Nessa atividade você ira elaborar uma fórmula matemática ***secreta***, e outras duplas tentarão descobrir. A sua ***fórmula secreta*** só poderá conter as 04 operações (+, -, *,/) e potência (^), e deverá apresentar uma resposta na coluna B quando digitar qualquer número natural na coluna A.
>
> No final, anote a fórmula secreta inventada pela dupla.
>
> Dupla ________
>
> Fórmula: ___________________________
>
> Comente esta atividade: ____

Figura 12: Enunciado da Atividade 5 – Fase 0

Esta pode ser considerada uma atividade própria do recurso computacional, uma vez que sua proposta e realização têm sentido apenas nesse tipo de ambiente. Seu objetivo é verificar, de maneira lúdica, o domínio que os alunos possuem ao manipular o software Excel.

Para a realização desta atividade, foi pedido que cada dupla elaborasse uma fórmula secreta envolvendo as 4 operações (+, -, * e /) e potência, verificando o funcionamento da fórmula. Em seguida, os participantes deveriam trocar suas fórmulas secretas, que seriam submetidas a análises e testes pelos colegas, até que cada dupla pudesse descobrir a fórmula criada pela outra dupla.

Era esperado, com esta atividade, que o aluno elaborasse as fórmulas, utilizando corretamente as propriedades das operações que desejava efetuar, e também que ele desenvolvesse uma postura de investigador, apresentando seus argumentos ao defender sua fórmula e ao testar a fórmula do colega, como sugere um dos objetivos gerais do ensino da Matemática nos PCN (1998).

> *(...) resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (p. 48).*

Essa atividade exigiria a participação efetiva do professor aplicador, no sentido de explicitar as condições de sua realização (as regras do jogo), seu objetivo principal e as eventuais dúvidas na elaboração das fórmulas matemáticas.

3.4 Fase 1

Nesta fase da seqüência didática, foi entregue a cada um dos alunos uma ficha de trabalho, contendo duas atividades. Estas não apresentam os passos para a elaboração das planilhas no Excel, como as anteriores. São atividades que envolvem propostas abertas, representando uma tentativa de engajar os alunos num trabalho empírico – apoiado pelo recurso tecnológico (Excel) – como uma ferramenta auxiliar na identificação de propriedades e relações entre os objetos matemáticos nos diversos casos tratados.

Estas atividades têm por objetivo propiciar um trabalho preparatório para a fase seguinte, que trata da produção de provas. Pretende-se com elas contribuir para que os alunos não se restrinjam ao empirismo ingênuo, mas, evoluam em seus procedimentos, atingindo um nível de validação, pelo menos do tipo "exemplo genérico". Em outras palavras, elaboramos tais atividades, visando favorecer a produção de conjecturas, a verificação experimental destas e a produção de justificativas da validade (ou não) das respostas, incluindo aspectos conceituais (produção de exemplos genéricos). Na seqüência, descrevemos em detalhes as duas atividades propostas.

3.4.1 Atividades 1 e 2

O objetivo destas atividades é resgatar as propriedades dos múltiplos e divisores de números naturais, por meio da análise da decomposição dos números envolvidos nas operações em jogo. Tínhamos a expectativa de que os alunos fizessem verificações de vários casos, elaborassem hipóteses sobre o comportamento de certos números e tentassem validar essas hipóteses, experimentalmente.

Esperávamos que os alunos percebessem a importância e necessidade das justificativas, em seu significado de explicação das respostas ou afirmações. Como sugere De Villiers (2001):

> *Assim, na maior parte dos casos em que os resultados em questão são intuitivamente evidentes por si mesmos e/ou são apoiados numa quase-empírica evidência convincente, a função da prova para os matemáticos não é a de verificação, mas sim a de explicação. (De Villiers, 2001, p. 33).*

Durante a aplicação destas atividades, o professor aplicador deveria assumir o papel de observador e mediador, incentivando os debates dos alunos, questionando a respeito de suas respostas, no sentido de fazê-los explicitar as escolhas feitas em suas resoluções. Na verdade, o professor aplicador deveria motivar e incentivar a interação entre as duplas de alunos, potencializando a comunicação e apoiando a troca de informações e “descobertas” dos alunos.

3.4.2 Descrição da Atividade 1

- Pense em um número: _________
- Multiplique por 4: _____________
- Verifique se o resultado é divisível por 12.

( ) Sim, pois____

( ) Não, por que____

Para auxiliar nas respostas dos itens abaixo, você pode usar uma planilha Excel. Assim, construa uma tabela que contenha as operações realizadas.

Analise cada item e responda:

a) 24 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ____

b) 16 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ____

c) 60 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ____

d) 33 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ____

e) 24 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ____

Descubra, pelo menos, outros 5 números que multiplicados por 4 são divisíveis por de 12.

a) ______x 4 divisível por 12
b) ______x 4 divisível por 12
c) ______x 4 divisível por 12
d) ______x 4 divisível por 12
e) ______x 4 divisível por 12

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

Figura 13: Enunciado da Atividade 1 – Fase 1

Nesta atividade, o aluno deve completar as lacunas dos primeiros itens e verificar se o resultado é divisível por 12, justificando sua resposta. Em seguida deve elaborar uma planilha, e gerar um “banco” de dados para auxiliá-lo na realização dos itens seguintes.

Imaginávamos que, para verificar se o número é divisível por 12, os alunos efetuariam cálculos (divisão do número por 12). Para a elaboração da planilha, o professor aplicador deveria orientar os alunos na construção de uma tabela como as anteriores, tendo na primeira coluna o número “n” pensado representando os primeiros números naturais não nulos.

Entendemos que esse formato é o mais adequado para subsidiar os itens que seguem.

No item que propõe “analise cada item e responda”, o aluno deve consultar a planilha elaborada e verificar, em cada item, se o produto de um número por 4 é divisível por 12. A seguir, o aluno deve preencher as lacunas com outros 5 números que multiplicados por 4 sejam divisíveis por 12, e finalizando, deve elaborar uma conjectura ("regra" geral) que possa ser utilizada em qualquer opção de número sugerido.

Esperávamos que com base na análise da decomposição do número 12 em fatores primos (12 = 2x2x3), os alunos percebessem que todos os números escolhidos, quando multiplicados por 4, seriam divisíveis por 12, se fossem múltiplos de 3. Quanto às justificativas para essa segunda parte da atividade, acreditávamos que os alunos utilizariam à planilha e apresentariam respostas baseadas nas informações dos cálculos nela exibidos. Nossa intenção era analisar, de acordo com a teoria de Balacheff (1988), qual seria o nível de validação atingido pelos alunos, em resposta a esta atividade.

Caso os alunos não atingissem a resposta esperada, o professor aplicador deveria retomar a atividade, explorando a planilha pelo acréscimo de outros exemplos, e assim instigar, questionar, criar situações para que os alunos pudessem perceber em que casos, um número escolhido, após ser multiplicado por 4, é divisível por 12.

3.4.3 Descrição da Atividade 2

Nesta atividade, ***não*** é permitido o uso do Excel, nem de calculadora.

Analise e responda:

63 x 7 é divisível por 14? Justifique sua resposta.

____

322 x 7 é divisível por 14? Justifique sua resposta.

____

Encontre quatro números que multiplicados por 7 são múltiplos de 14.

a) ______________________________
Justifique: ______________________________
b) ______________________________
Justifique: ______________________________
c) ______________________________
Justifique: ______________________________
d) ______________________________

Qual propriedade comum estes números apresentam?

____

Figura 14: Enunciado da Atividade 2 – Fase 1

Cada item desta atividade deve ser respondido sem a utilização do Excel ou da calculadora e deve ser justificado com os argumentos que levaram o aluno a concluir se o número apresentado, quando multiplicado por 7, é divisível por 14. Em seguida, solicita-se que ele encontre mais quatro exemplos de números que, multiplicados por 7, sejam múltiplos de 14. Concluindo a atividade, o aluno deve analisar e enunciar uma propriedade comum a esses números escolhidos. Esta atividade segue a mesma proposta da anterior, e tem a finalidade de que – sem efetuar a multiplicação do número escolhido por 7 o aluno perceba que o produto será múltiplo de 14 se o número escolhido for múltiplo de 2.

O fato de impedir o uso da planilha ou da calculadora é uma forma de incitar o aluno a pensar nas características dos números (em sua estrutura e decomposição) e não na justificativa por meio do cálculo. Assim como na atividade anterior, o aluno deve perceber que é possível responder com base na análise dos fatores de 14. Esperávamos, assim, que esta atividade tivesse potencial para levar os alunos a produzir uma prova conceitual com o papel de explicação, conforme a teoria apresentada por De Villiers (2001):

> *(...) Explicação: proporcionar compreensão sobre porque é verdade (...) (De Villiers, 2001, p. 3).*

3.5 Fase 2

Nesta fase da seqüência didática, também foi entregue a cada aluno um caderno de questões, contendo duas atividades, tendo sido permitido o uso do recurso tecnológico como apoio em sua resolução.

Sendo esta a última fase da seqüência didática, as atividades propostas possuem um perfil mais aberto, deixando espaços para que os alunos possam explicitar suas respostas, seus argumentos e suas validações.

Esperávamos, assim, que os argumentos apresentados pelos alunos ultrapassassem o processo empírico e fossem fundamentados em propriedades dos objetos em jogo, levando em conta sua generalidade. Acreditávamos que as provas apresentadas estariam vinculadas ao tipo de prova pragmática conceitual, definida por Balacheff (1988) como prova que recorre aos conhecimentos práticos.

3.5.1 Atividades 1 e 2

As Atividades 1 e 2 da Fase 2 têm exigências cognitivas maiores que as anteriores, pois são questões abertas, seguindo o mesmo perfil das questões A3, A4 e A5 do caderno de Álgebra, apresentado no Capítulo 1 desta dissertação.

O objetivo das atividades 1 e 2 é levar o aluno a desenvolver uma generalização fundamentada nas propriedades e na estrutura dos números utilizando seus conhecimentos construídos a partir da análise e experimentação de conjuntos de dados no Excel durante a realização das atividades anteriores. Sendo assim, esperávamos que os alunos expusessem o raciocínio utilizado em suas justificativas, para que pudéssemos avaliar os conhecimentos utilizados em suas validações, e classificar suas provas como empíricas ou conceituais.

Nesta fase, o professor aplicador teria o papel de observador e incentivador para que o aluno desenvolvesse todas as atividades, resgatando os conhecimentos necessários adquiridos no percurso de toda a seqüência didática, de acordo com a proposta sugerida pelos PCN:

> *Alem de organizador o professor também é facilitador nesse processo. Não mais aquele que expõe os conteúdos aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho. (PCN, 1998, p. 38)*

3.5.2 Descrição da Atividade 1

Vamos tentar responder à seguinte questão:

Quando o produto de **dois números consecutivos** é **múltiplo de 6**?

Para isso, crie uma planilha no Excel, como fizemos nas atividades anteriores.

Queremos "descobrir" uma regra para, dados dois números consecutivos quaisquer, decidir se o produto deles é divisível por 6, **SEM fazer os cálculos**.

Vamos lá, tentem "descobrir" essa regra.

✍

Explique como você chegou à resposta anterior.

✍

Agora, aplique sua regra para responder as questões abaixo.

Lembre-se: **SEM** fazer todos os cálculos indicados!

a) 76×77 é divisível por 6?
b) 105×106 é divisível por 6?
c) 234×235 é divisível por 6?

Usando a planilha do Excel verifique suas respostas.

- Se acertou tudo, Parabéns!!!!! ☺
- Se não, reveja sua regra e refaça as atividades. ☹

Figura 15: Enunciado da Atividade 1 – Fase 2

Com o primeiro questionamento da atividade A1 (Quando o produto de dois números consecutivos é múltiplo de 6?), pretendíamos levar os alunos a investigar e justificar para quais pares de números naturais consecutivos é possível ocorrer um produto que seja divisível por 6. Nesse processo de busca, esperávamos que os alunos utilizassem à planilha eletrônica (Excel), para testar e verificar em uma grande seqüência de números naturais consecutivos, quais características comuns os números escolhidos possuem e assim expressar sua regularidade. Ou seja, fariam uma generalização que responderia ao questionamento. Como sugerem os PCN:

> *Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas seqüências numéricas. (PCN, 1998, p. 72).*

Após testar, validar e provar a generalidade de seu raciocínio o aluno deveria elaborar uma regra geral, que, segundo nossa previsão, teria uma apresentação conceitual na língua natural, pois esse tipo de prova está mais próximo da realidade de nossos alunos, como conclui Santos (2007) na análise que faz das questões (A3) e (A4) do caderno de Álgebra do projeto AProvaME:

> *Ainda, o uso da língua materna é comum dentro dos Argumentos não-empiricos, assim como aconteceu com nosso estudo. (Santos, 2007, p. 121-122).*

Na seqüência, foram apresentados aos alunos alguns produtos de números consecutivos e eles deveriam responder, sem fazer cálculos e sem o uso da planilha, se esses produtos eram (ou não) divisíveis por 6, aplicando a “regra” elaborada na atividade anterior.

Esperávamos que os alunos reutilizassem os conhecimentos ou procedimentos anteriores, analisando o número 6, em sua forma fatorada 2x3, – número par e múltiplo de 3 – e as características de dois números naturais consecutivos (um par e outro ímpar múltiplo de 3, independente da ordem que aparecer). Esta atividade insere-se na seqüência, como preparatória para a última atividade que descrevemos em seguida.

3.5.3 Descrição da Atividade 2

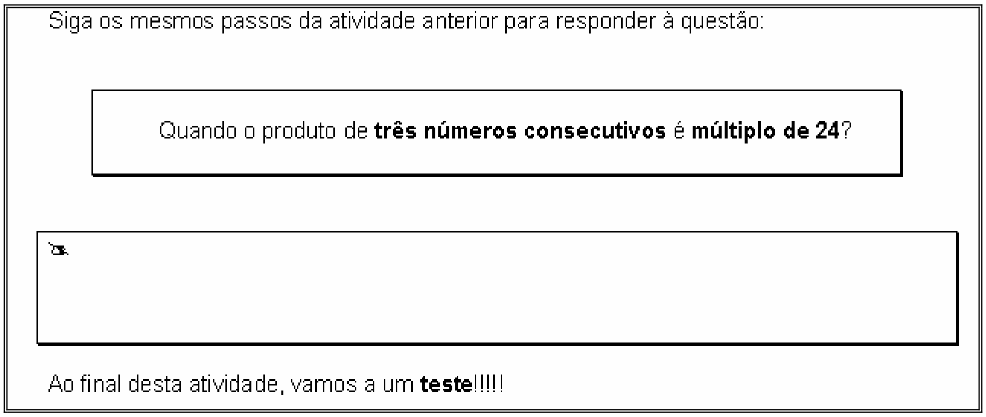


Figura 16: Enunciado da Atividade 2 – Fase 2

No desenvolvimento desta questão, esperava-se que os alunos sugerissem três números naturais consecutivos e, em seguida, verificassem se o produto deles é múltiplo de 24. Acreditávamos que os alunos seguiriam os passos dados na atividade anterior, elaborando uma planilha eletrônica (Excel) com as operações solicitadas. Para testar uma seqüência de números naturais consecutivos, buscando verificar e explicar que propriedade comum às ternas selecionadas, poderia validar sua regra. Segundo De Villiers (2001):

> *É por isso que uma explicação lógica ou demonstração é necessária para ter certeza absoluta (...) (De Villiers, 2001, p. 11).*

No desenvolvimento desta atividade, esperávamos que os alunos analisassem a decomposição do número 24 em fatores primos (2^3x3, ou seja, 8x3), e explicitassem sua regra, que é necessário que as ternas escolhidas contenham números múltiplos ou divisíveis de 8 e 3 independentemente da ordem em que apareçam.

No capítulo seguinte apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados na aplicação da seqüência didática.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta a caracterização do perfil dos sujeitos envolvidos, o material utilizado na aplicação da seqüência de atividades, as condições e os procedimentos para a coleta de dados.

Lembramos que o professor pesquisador ministra aulas na escola em que ocorreu o experimento, portanto, todos os alunos participantes são alunos do professor pesquisador.

4.2 Caracterização do perfil dos alunos

Os alunos que participaram desta pesquisa moram no interior do Estado de São Paulo e estudam em uma escola particular de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, com localização central e privilegiada. A escola possui boa estrutura física, com salas amplas, laboratórios de Informática, quadra poliesportiva, pátios para recreação e uma cantina.

Os alunos sujeitos deste estudo estão matriculados, regularmente, no 9º ano do Ensino Fundamental II e freqüentam aulas no período da manhã, das 7 horas às 12 horas 40 minutos, tendo 6 aulas semanais de Matemática.

O convite para participação da pesquisa foi feito de maneira verbal e aberta a uma sala de aula, para a qual explicitamos os objetivos da pesquisa e esclarecemos que o trabalho seria realizado em duplas, no laboratório de Informática, com a utilização do Excel. Acrescentamos que não era necessário ter conhecimentos prévios sobre o software, e que as atividades não seriam instrumentos de avaliação. Esclarecemos ainda que seriam realizados cinco encontros às sextas-feiras, das 14 horas às 15 horas 30 minutos, sendo, portanto, atividades extracurriculares.

Apresentaram-se para a pesquisa 14 alunos que foram organizados em 7 duplas, sem nenhuma influência de minha parte, sendo que 4 delas possuem um rendimento de bom para ótimo em Matemática, mantendo uma média de notas entre 8 e 10. São alunos participativos, que fazem suas tarefas escolares regularmente, questionando quando não entendem alguma explicação ou procedimento do professor. As outras 3 duplas que se apresentaram são alunos que gostam de Matemática, com um rendimento de regular para bom (mantêm uma média de notas de 5,5 a 7,5) e possuem algumas dificuldades elementares na matéria, como o domínio de regras de sinais, operações com potências, operações com frações e, às vezes, não fazem suas tarefas de casa.

De maneira geral, estes alunos têm comportamentos heterogêneos em relação à aprendizagem da Matemática, mas são alunos assíduos e demonstram comprometimento com sua aprendizagem.

No que se refere ao uso de computadores, apenas 1 aluno não possui computador em casa e os outros 13 estão todos conectados à *Internet*, utilizando-a, diariamente, para lazer em sites de relacionamentos (msn, orkut e games) e para fins escolares, utilizando o buscador Google para pesquisas e o Word para digitação de textos.

O material pedagógico utilizado diariamente nas aulas de Matemática é apostilado, adotado pela escola, cabendo ao professor sugerir atividades extras de livros didáticos, que complementem as atividades da apostila.

4.3 Caracterização do ambiente

Toda a fase experimental foi realizada no Laboratório de Informática da própria escola, um ambiente amplo, que atendia a todas as nossas necessidades para o bom desenvolvimento da seqüência didática.

Apresentamos, a seguir, as condições oferecidas pelo laboratório, (Figura 17):

Figura 17: Laboratório de Informática

- Computadores em perfeitas condições de uso;
- Sala ampla, iluminada, com ventiladores e ar condicionado;
- Bancada para o micro, com espaço para apoio de cadernos e cadeiras apropriadas;
- Software Excel instalado em todas as máquinas;
- Data show;
- Ambiente reservado, exclusivamente, para quatro encontros do projeto;
- Suporte técnico à disposição para qualquer imprevisto durante a aplicação da seqüência didática.

4.4 Equipamentos utilizados

Equipamentos	Finalidade
Filmadora	Registrar em vídeo as sessões realizadas (c/ o grupo todo)
Câmera Digital	Registrar as imagens para utilizar no projeto
Mp3	Registrar em áudio as interações das duplas selecionadas
Data Show	Projetar imagens para debates ou introdução das fases

Tabela 02: Equipamentos utilizados.

4.5 Procedimentos metodológicos

Neste item, relatamos os procedimentos realizados para a coleta de dados, bem como o desenvolvimento de cada encontro, a postura dos participantes envolvidos no processo experimental e os materiais utilizados.

4.5.1 Cronograma

Data	Fase	Tempo da sessão
23/03/2007	0	1hora 40 minutos
30/03/2007	1	1hora 40 minutos
13/04/2007	1	1hora 40 minutos
20/04/2007	2	1hora 40 minutos

Tabela 03: cronograma.

O cronograma foi definido a partir de discussão com os participantes envolvidos, sendo os encontros realizados todas as sextas-feiras, sempre no período da tarde (horário extra-classe), tendo início às 14 horas e término às 15h40. Foi decidido esse horário, pois os três últimos encontros aconteceriam durante a semana de provas, e às sextas-feiras, não prejudicaria o envolvimento dos alunos com as atividades.

4.5.2 Participantes do projeto

Iniciamos o experimento com sete duplas e finalizamos com quatro. As desistências dos alunos ocorreram por motivos particulares, fato que não interferiu no andamento da pesquisa, pois foram possíveis as alterações dos componentes das duplas formadas em cada fase. Essas alterações foram possíveis, porque as análises das atividades desenvolvidas na seqüência didática foram realizadas por fases, tendo como exigência mínima que os elementos de cada dupla, tivessem participado da fase anterior. A tabela a seguir apresenta os alunos que participaram de todas as fases do experimento.

Alunos Participantes do Experimento	
Marina Tireli	Talita
Guilherme Machado	Marcos
Laís	Paulo
Ana Luiza	Vinícius Marton

Tabela 04: Alunos participantes do Experimento.

O processo de realização dos experimentos contou com a presença de uma professora-observadora, que registrava o comportamento dos alunos frente à seqüência didática, os seus comentários, quantas vezes o aluno solicitava a presença do professor, as falas de interação aluno-aluno e professor-aluno, ou seja, ela anotava todas as ações importantes para o experimento.

4.5.3 Papel do professor

Durante o processo de realização da seqüência didática, foi estabelecido qual seria o papel que o professor deveria assumir em cada fase. Traçamos como meta de trabalho, que os alunos participantes fizessem o controle dos métodos utilizados na resolução das atividades, das decisões tomadas e das conjecturas elaboradas em cada atividade.

O professor faria intervenções para auxiliar na busca de soluções dos problemas de ordem técnica, como o uso de ferramentas do Excel, visto que alguns alunos não dominavam todos os recursos necessários do software. O professor também deveria intervir para dar informações sobre o conteúdo, quando solicitado pelos alunos, e auxiliaria na solução de eventuais impasses, nos procedimentos de resolução. A ele caberia organizar as discussões em momentos oportunos, principalmente para a retomada de alguns conceitos ou confrontação de respostas ou soluções (diferentes) apresentadas pelas duplas, sempre na perspectiva de envolver todos os participantes e regular a relação didática, motivando os alunos e devolvendo-lhes a responsabilidade de decisão de resposta para a atividade em jogo. Conforme sugestões apresentadas nos PCN (1998):

> *Além de organizador o professor também é facilitador nesse processo. Não mais aquele que expõe todo o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho. Nessa função, faz explanações, oferece materiais, textos etc.*
>
> *Outra de suas funções é como mediador, ao promover a análise das propostas dos alunos e sua comparação, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar. Nesse papel, o professor é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas. (PCN, 1998, p. 38)*

Esclarecemos, finalmente, que todos estes procedimentos foram seguidos, tendo o autor como professor pesquisador, tomado todas as precauções para que tudo ocorresse conforme o previsto.

Capítulo 5

EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI

5.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é a apresentação dos resultados de algumas atividades do experimento e da análise *a posteriori*, realizada pelo confronto de seus resultados com os objetivos estabelecidos na análise *a priori*. Procuraremos apontar indícios ou evidências de que o objetivo principal de nosso experimento foi alcançado, a saber: o desenvolvimento de atividades que levem os alunos a vivenciar diversas fases do processo de prova, conjecturando, argumentando e tentando validar essas conjecturas, com o auxilio de um recurso computacional – o Excel.

Analisaremos esses indícios e evidências, baseados nos tipos e níveis de provas propostos por Balacheff (1988), nas idéias de De Villiers (2001) sobre o papel e a função da prova e nas propostas dos PCN, conforme descrevemos no capítulo 2 desta dissertação.

Iniciamos o experimento com sete duplas, mas para a análise qualitativa dos resultados, foram escolhidas três duplas, sendo essa amostra considerada representativa para o trabalho. O critério utilizado para a seleção dessas duplas foi à assiduidade a todos os encontros. Denominamos essas duplas da seguinte forma: dupla A, dupla B e dupla C.

Apresentaremos alguns resultados obtidos com as atividades 1 e 4 da fase 0, propostas com o objetivo de familiarização com o Excel, conforme descrito na análise a *priori* e aprofundaremos a análise das atividades das fases 1 e 2 que têm um maior grau de exigências cognitivas.

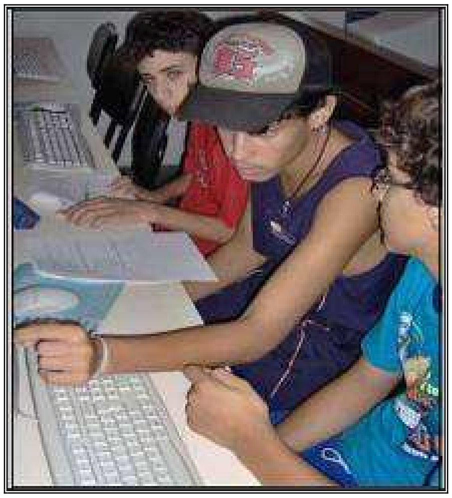


Figura 18: Alunos iniciando as atividades da Fase 0

5.2 Apresentação dos resultados da Atividade 1 – Fase 0

Sendo $a \in Z$ e $b \in Z$, determine $a+b \in Z$ em uma planilha do Excel.
1º) Abra uma planilha no Excel. Na célula A1, digite a; na célula B1, digite b; na célula C1, digite $a+b$ (conforme exemplo abaixo).
2º) Para criar nossa primeira fórmula, existem dois caminhos:

- Na célula C2, digite =A2+B2, finalizando clicando fora da célula C2.
- Digite = em C2, e em seguida clique em A2 digite +, clique em B2 e finalizar digitando Enter.

3º) Testando a fórmula. Na célula A2, digite 2; na célula B2, digite 4; selecione a célula C3 e verifique o resultado.
4º) Agora, crie uma tabela contendo pelo menos 20 somas.
Para isso:
a) Selecione a célula C2 clicando o mouse com o botão direito e selecionando o comando copiar.
b) Selecione as células pertencentes, a coluna $a+b$ de C3 a C11, clicando o botão direito do mouse selecione colar.
5º) Teste atribuindo valores para a e b, e verifique se a soma está correta.

	A	B	C
1	a	b	a+b
2	2	4	6
3	3	5	8
4	-10	15	5
5	-17	500	483
6	1024	-3254	-2230
7	15	-2457	-2442
8	10	44	54
9	-53	98	45
10	90	-100	-10
11	12	1	13

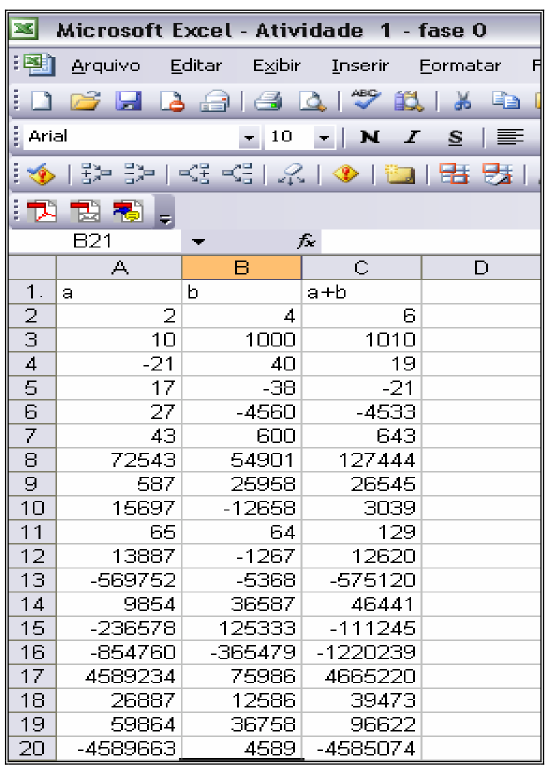
Comente esta atividade: ____.

Figura 19: Atividade 1 – Fase 0

O objetivo desta atividade era propiciar ao aluno um primeiro contato com o Excel e desenvolver habilidades como: confeccionar uma planilha, formatar a digitação nas células, elaborar e testar fórmulas e saber utilizar os comandos “copiar” e “colar” fórmulas, dando-lhe condições para elaborar bancos de dados em planilhas eletrônicas (Excel) para análise, verificação e validação de suas conjecturas. Contemplamos desta forma uma das propostas dos PCN (1998), a respeito da utilização de recursos tecnológicos na aula de Matemática:

> *Embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala a curto prazo.*
>
> *Eles podem ser usados nas aulas de Matemática com várias finalidades:*
>
> - *como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;*
> - *como auxiliar no processo de construção de conhecimento;*
> - *como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;*
> - *como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc.(PCN,1998, p. 44)*

5.2.1 Análise *a posteriori* da Atividade 1 - Fase 0



	A	B	C	D
1	a	b	a+b	
2	2	4	6	
3	10	1000	1010	
4	-21	40	19	
5	17	-38	-21	
6	27	-4560	-4533	
7	43	600	643	
8	72543	54901	127444	
9	587	25958	26545	
10	15697	-12658	3039	
11	65	64	129	
12	13887	-1267	12620	
13	-569752	-5368	-575120	
14	9854	36587	46441	
15	-236578	125333	-111245	
16	-854760	-365479	-1220239	
17	4589234	75986	4665220	
18	26887	12586	39473	
19	59864	36758	96622	
20	-4589663	4589	-4585074	

Figura 20: Planilha da Atividade1 – Fase 0 - Dupla A

Todas as duplas conseguiram elaborar as planilhas e apresentaram os resultados, conforme a planilha acima, sem maiores dificuldades, como declararam em seus cadernos de atividade:

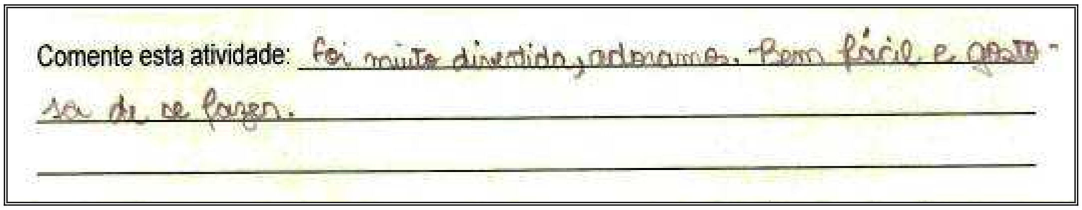

Comente esta atividade: Foi muito divertida, adoramos. Bem fácil e gosto-sa de se fazer.

Figura 21: Comentários sobre Atividade 1 da Fase 0 – Dupla A
(Foi muito divertida, adoramos. Bem fácil e gostosa de se fazer).

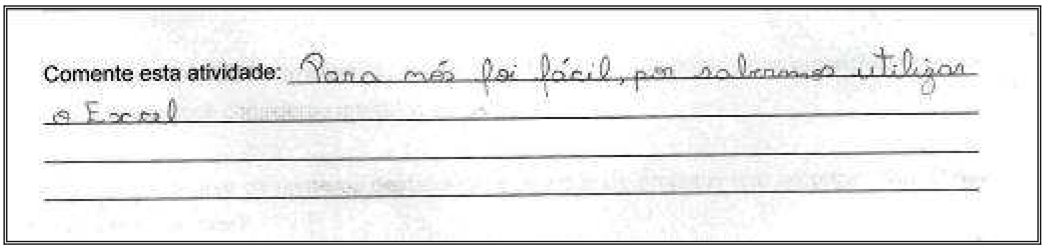

Comente esta atividade: Para nós foi fácil, por sabermos utilizar o Excel

Figura 22: Comentários sobre Atividade 1 da Fase 0 – Dupla B
(Para nós foi fácil, por sabermos utilizar o Excel).

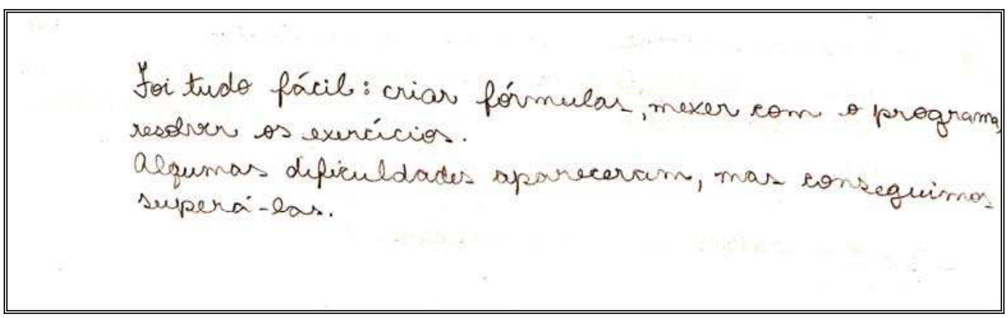

Foi tudo fácil: criar fórmulas, mexer com o programa resolver os exercícios.
Algumas dificuldades apareceram, mas conseguimos superá-las.

Figura 23: Comentários sobre Atividade 1 da Fase 0 – Dupla C
(Foi tudo fácil: criar fórmulas, mexer com o programa resolver os exercícios. Algumas dificuldades apareceram, mas conseguimos superá-las).

Logo de início, conforme relata à dupla C, foram observadas algumas dificuldades na elaboração das fórmulas. Acreditamos que isso poderia ter sido evitado, se houvéssemos anexado o quadro explicativo à ficha de atividades. O quadro explicativo, conforme está representado a seguir, tinha o objetivo de apresentar os comandos básicos das operações elementares da aritmética com seus respectivos exemplos, necessários para iniciar a Atividade 1.

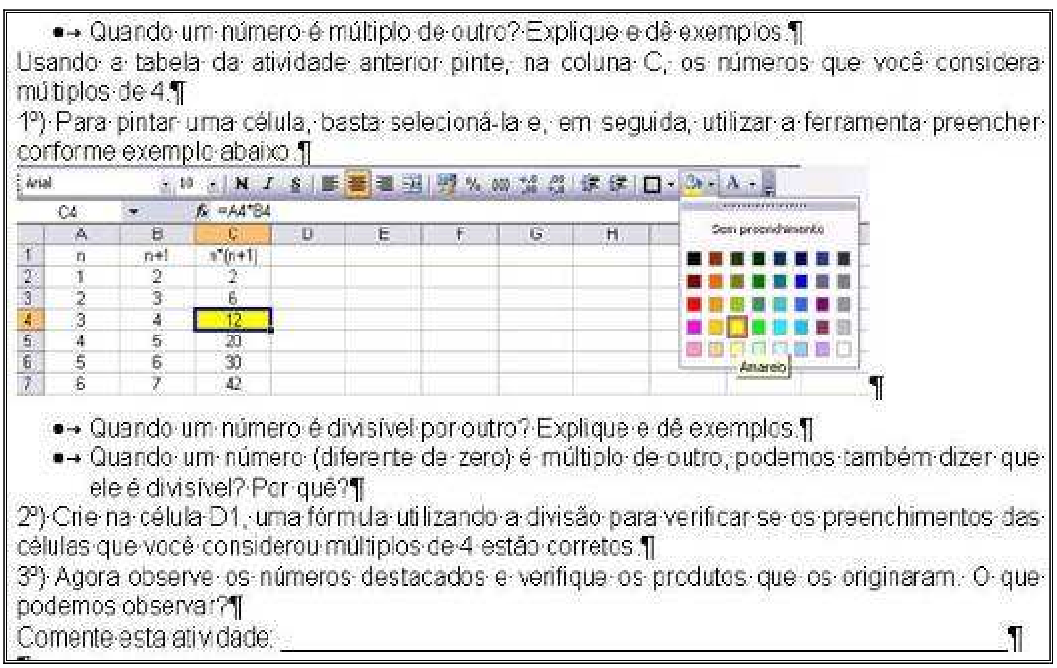
Operador aritmético	*Significado (exemplo)*
+ (sinal de mais)	Adição (4+3)
- (sinal de menos)	Subtração (4-3)
	Negação (-1)
*(asterisco)	Multiplicação (4*5)
/ (sinal de divisão)	Divisão (4/2)
= (sinal de igual)	Comparação
	Igual a (A1=A1)

Quadro 01: Quadro explicativo.

Resolvemos essas dúvidas projetando o quadro explicativo, com o auxílio de um D*ata Show* e os alunos conseguiram dar seqüência às atividades.

De maneira geral, foi muito produtivo e, pelas frases das duplas A e B, os alunos estavam motivados e gostaram das atividades. Acredito que o objetivo principal de manipulação e familiarização com o Excel foi atingido.

5.3 Apresentação dos resultados da Atividade 4 – Fase 0



- Quando um número é múltiplo de outro? Explique e dê exemplos.

Usando a tabela da atividade anterior pinte, na coluna C, os números que você considera múltiplos de 4.

1º) Para pintar uma célula, basta selecioná-la e, em seguida, utilizar a ferramenta preencher conforme exemplo abaixo.

- Quando um número é divisível por outro? Explique e dê exemplos.
- Quando um número (diferente de zero) é múltiplo de outro, podemos também dizer que ele é divisível? Por quê?

2º) Crie na célula D1, uma fórmula utilizando a divisão para verificar se os preenchimentos das células que você considerou múltiplos de 4 estão corretos.

3º) Agora observe os números destacados e verifique os produtos que os originaram. O que podemos observar?

Comente esta atividade: ______________________________

Figura 24: Atividade 4 – Fase 0

Ao propor a Atividade 4, tínhamos como objetivo o resgate das noções de múltiplos e divisores de números inteiros e da relação entre essas noções, por meio de verificações e testes nas planilhas elaboradas no Excel.

O primeiro questionamento da Atividade 4 é de grande importância para o desenvolvimento das Fases 1 e 2 da seqüência didática, pois pretende identificar as concepções dos alunos referentes às noções de múltiplos e divisores, fundamentais em nosso experimento. Ou seja, essas concepções serviriam de alicerce para os argumentos e a validação das conjecturas feitas pelos alunos. A frase abaixo extraída dos PCN revela a importância deste conteúdo no ensino da Matemática:

> *Reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de". (PCN, 1998, p. 71)*

5.3.1 Análise *a posteriori* da Atividade 4 - Fase 0

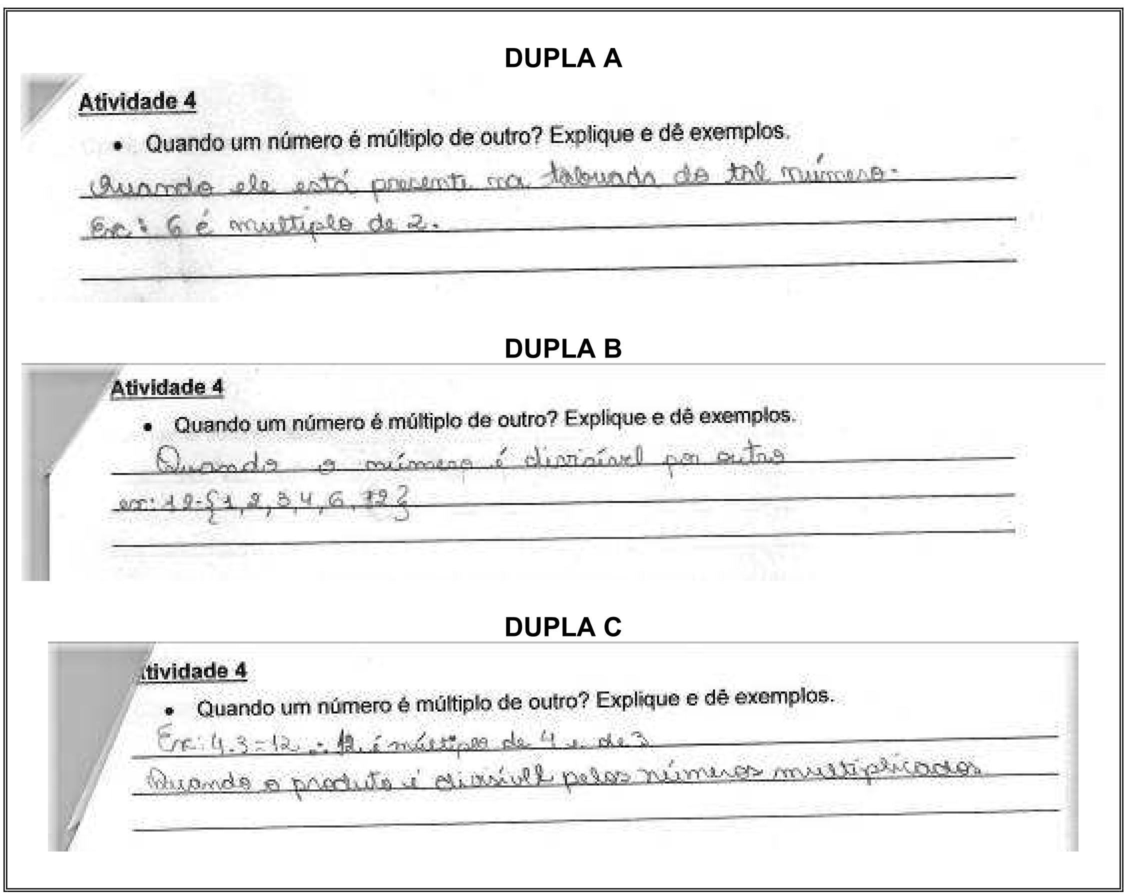


Figura 25: Respostas apresentadas Atividade 4 – Fase 0

Com esses primeiros questionamentos, envolvendo as noções de múltiplos e divisores, esperávamos que as duplas expressassem suas primeiras justificativas e explicações, antecipando procedimentos que seriam utilizados nas futuras fases, quando deveriam elaborar suas argumentações e conjecturas, atingindo assim, um dos objetivos do experimento, conforme propõem os PCN:

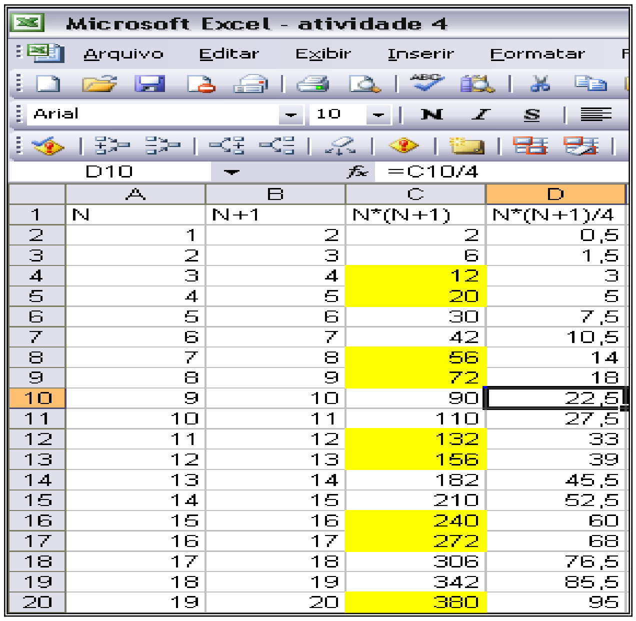
> *A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la (PCN, 1998, p. 71).*

Percebemos na resposta apresentada pela dupla A – ”q*uando ele esta presente na tabuada do tal número. Ex.: 6 é múltiplo de 2”* –, que estes alunos relacionam a noção de múltiplo de um número inteiro à tabuada. O exemplo está correto, mas os alunos relacionam o 6 somente com o 2, esquecendo-se de relacioná-lo com o 3.

A dupla B não foi feliz na forma como se expressou, mas, associou a noção de múltiplo de um número à idéia de número divisível por outro número. Em seu exemplo, os números representados entre chaves são divisores de 12. Isso parece sugerir que o aluno tem a noção de múltiplo de um número, embora tenha utilizado uma representação incorreta: 12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12}. Em suas conjecturas, o aluno pode ter considerado que 12 é divisível por 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

A dupla C demonstra que já tem noções de múltiplos de um número e de divisibilidade e inicia apresentando um exemplo – “*Ex.: 4x3=12, 12 é múltiplo de 4 e de 3. Quando o produto é divisível pelos números multiplicados“.* Estabelece corretamente a relação entre a noção de múltiplo de um número e fatores e completa seus argumentos relacionando a idéia de múltiplo de um número e as noções de divisibilidade, embora tenha apresentado uma frase um tanto “cíclica”.

Em seguida, as duplas deram seqüência à atividade 4, apropriando-se da planilha elaborada na Atividade 3. Conseguiram executar todos os comandos do Excel para a elaboração da planilha, gerando um conjunto de dados numéricos sem maiores dificuldades (Fig. 26).



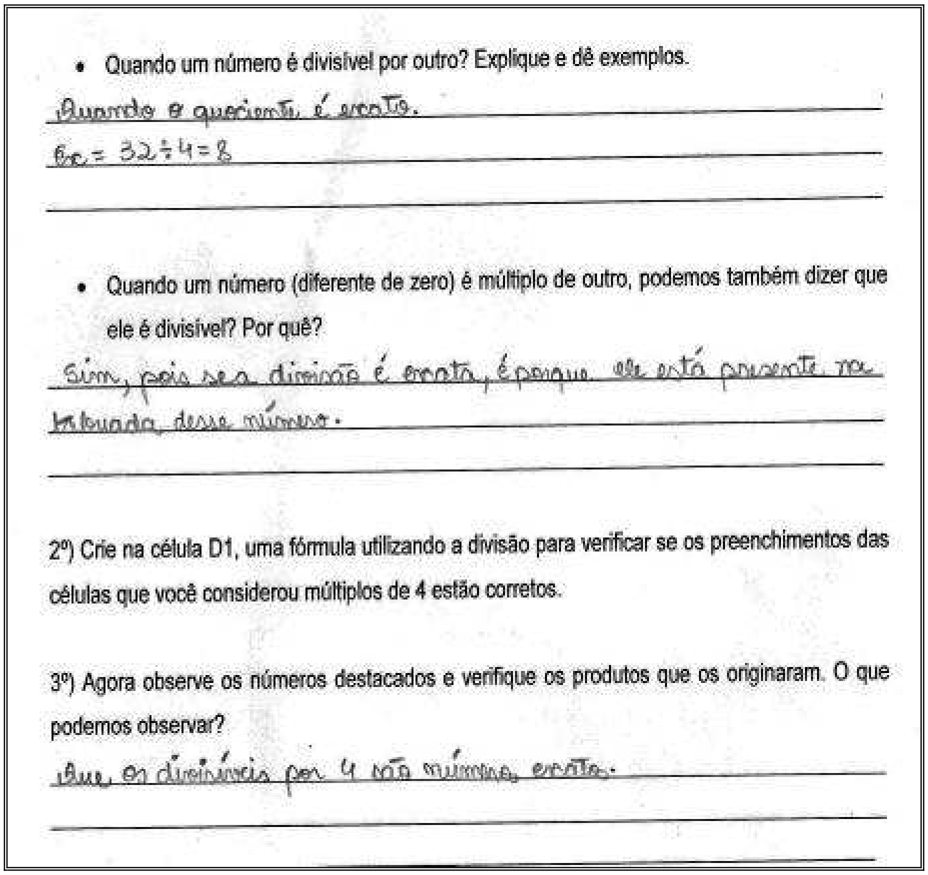
	A	B	C	D
1	N	N+1	N*(N+1)	N*(N+1)/4
2	1	2	2	0,5
3	2	3	6	1,5
4	3	4	12	3
5	4	5	20	5
6	5	6	30	7,5
7	6	7	42	10,5
8	7	8	56	14
9	8	9	72	18
10	9	10	90	22,5
11	10	11	110	27,5
12	11	12	132	33
13	12	13	156	39
14	13	14	182	45,5
15	14	15	210	52,5
16	15	16	240	60
17	16	17	272	68
18	17	18	306	76,5
19	18	19	342	85,5
20	19	20	380	95

Figura 26: Planilha elaborada pela Dupla B – atividade 4 – Fase 0

As duplas não apresentaram dificuldades para a elaboração da fórmula da coluna D. Com a análise dos resultados obtidos nesta coluna, pode ser feita uma seleção dos números naturais consecutivos múltiplos de 4. Os alunos realizaram esta seleção, indicando como múltiplos de 4 os números que, divididos por 4, têm como resultado um número inteiro.

Nesse ponto, alguns de nossos objetivos não foram alcançados, pois pretendíamos que eles verificassem quais pares de números naturais consecutivos geravam um produto múltiplo de 4 e identificassem a característica comum a esses números consecutivos, mas isso não ocorreu. Acreditamos que esse resultado tenha sido causado pela falta de compreensão do enunciado.

Reproduzimos, a seguir, as respostas apresentadas pelas duplas, em relação às noções de divisibilidade:



- Quando um número é divisível por outro? Explique e dê exemplos.

Quando o quociente é exato.

Ex= 32÷4=8

- Quando um número (diferente de zero) é múltiplo de outro, podemos também dizer que ele é divisível? Por quê?

Sim, pois se a divisão é exata, é porque ele está presente na tabuada desse número.

2º) Crie na célula D1, uma fórmula utilizando a divisão para verificar se os preenchimentos das células que você considerou múltiplos de 4 estão corretos.

3º) Agora observe os números destacados e verifique os produtos que os originaram. O que podemos observar?

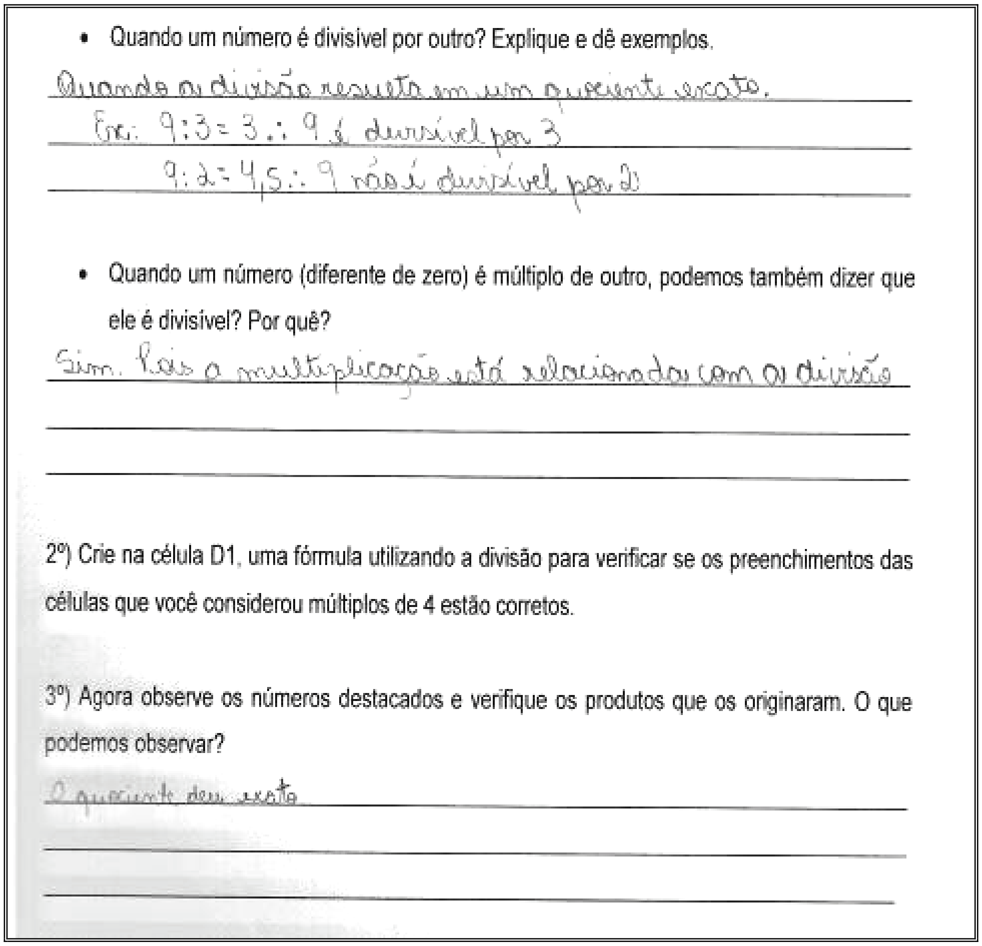
Que os divisíveis por 4 são números exatos.

Figura 27: Resposta aos 2º e 3º itens da Atividade 4 – Fase 0 - Dupla A

Em relação à idéia de número divisível por outro, a dupla A respondeu com clareza e não apresentou dificuldade. O exemplo apresentado é empírico, conforme prevíamos. Soube relacionar as noções de “múltiplo de” e “divisível por”, apresentando uma justificativa plausível.

No 3º item como descrevemos acima, a dupla não conseguiu identificar a regularidade existente nos pares de números naturais consecutivos que geravam um produto divisível por 4.

Apresentamos, a seguir, uma análise das respostas apresentadas pela dupla B, aos 2º e 3º itens da atividade 4 – Fase 0,



- Quando um número é divisível por outro? Explique e dê exemplos.

Quando a divisão resulta em um quociente exato.
Ex: 9:3 = 3 ∴ 9 é divisível por 3
9:2 = 4,5 ∴ 9 não é divisível por 2

- Quando um número (diferente de zero) é múltiplo de outro, podemos também dizer que ele é divisível? Por quê?

Sim. Pois a multiplicação está relacionada com a divisão

2º) Crie na célula D1, uma fórmula utilizando a divisão para verificar se os preenchimentos das células que você considerou múltiplos de 4 estão corretos.

3º) Agora observe os números destacados e verifique os produtos que os originaram. O que podemos observar?

O quociente deu exato

Figura 28: Reposta aos 2º e 3º itens da atividade 4 – Fase 0 – dupla B

As respostas apresentadas pela Dupla B demonstram que os alunos já construíram noções de divisibilidade de números naturais e conseguem relacioná-las com a idéia de múltiplo de um número inteiro. Em suas justificativas, a dupla apresentou exemplos empíricos no nível de provas pragmáticas.

A dupla demonstrou dificuldades para responder ao 3º item, examinando somente os casos em que se obtém resto zero, ao dividir o produto de dois números consecutivos por 4. Ou seja, estes alunos não buscaram uma regularidade entre os números consecutivos para justificar sua escolha.

Concluímos que as atividades da fase 0 atingiram plenamente o objetivo de familiarização dos alunos com a ferramenta tecnológica utilizada – o Excel –, favorecendo a explicitação de suas primeiras tentativas de argumentação e justificativas por meio de explicações vinculadas a procedimentos empíricos, sendo o primeiro nível de prova, segundo Balacheff (1988).

Com relação à revisão das noções de múltiplos e divisores de números naturais, consideramos que as atividades atingiram parcialmente seus objetivos. Em virtude disso, optamos por realizar uma intervenção, visando comparar as respostas apresentadas com os objetivos estabelecidos para este experimento, e propor aos alunos que complementassem suas respostas, produzindo mais exemplos e descrevendo com mais clareza suas explicações.

5.4 Intervenção para a retomada das noções de múltiplos e divisores

A intervenção referente ao aspecto conceitual de múltiplos e divisores, foi realizada no início da fase seguinte. Para esse encontro, utilizamos um Data Show que possibilitou a realização de um debate sobre as respostas apresentadas pelas duplas.

Foi proposto que cada dupla lesse a resposta que havia elaborado e em seguida, discutiríamos todas as frases a fim de construir uma resposta coletiva para cada item. A seguir, apresentamos as telas projetadas no Data Show e a frase coletiva elaborada pelos alunos:

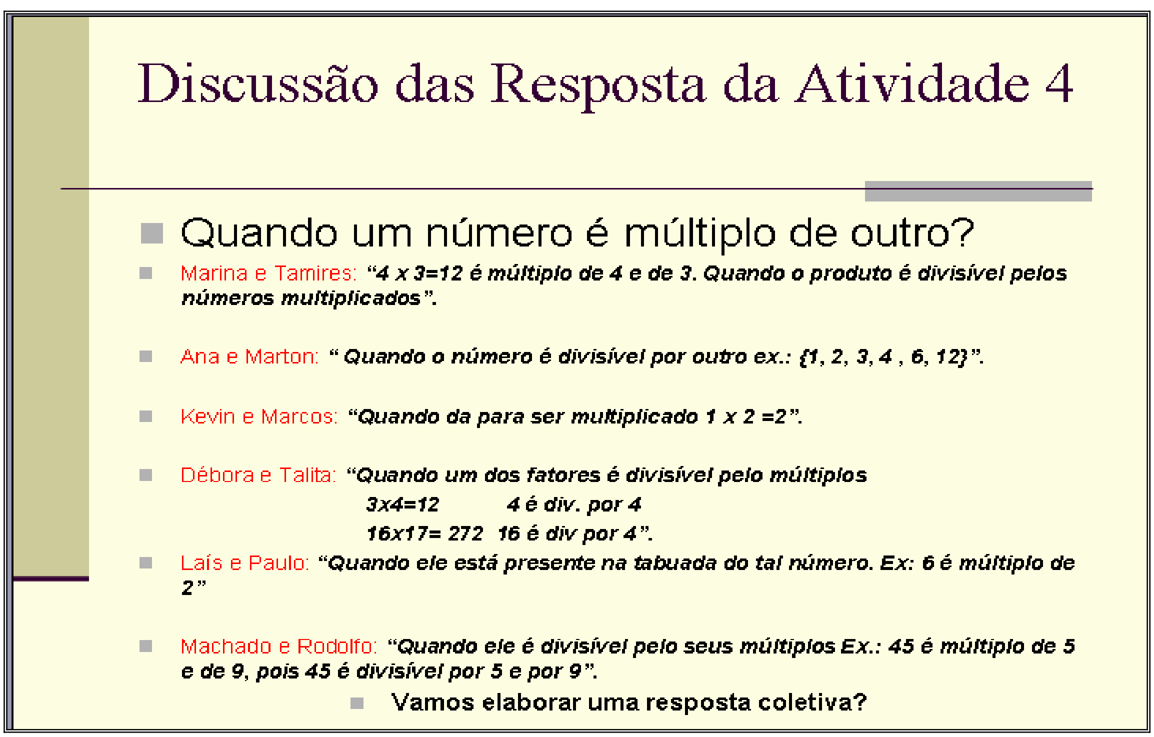


Figura 29: Slide - Concepções de múltiplos de um número inteiro – Fase Intervenção – duplas A, B, C.

As definições apresentadas pelas duplas demonstram que houve certa confusão em relação às noções envolvidas na atividade. Decidimos rever todas as respostas projetadas, e, discutindo uma a uma, chegamos a uma resposta coletiva definida pela turma. A frase coletiva elaborada pelos participantes como definição de múltiplo de um número x, foi:

“Quando está presente na tabuada do tal número x.”

O próximo slide foi utilizado para a discussão sobre as respostas que envolvem noções de divisibilidade. Iniciamos a discussão fazendo um levantamento das justificativas apresentadas:

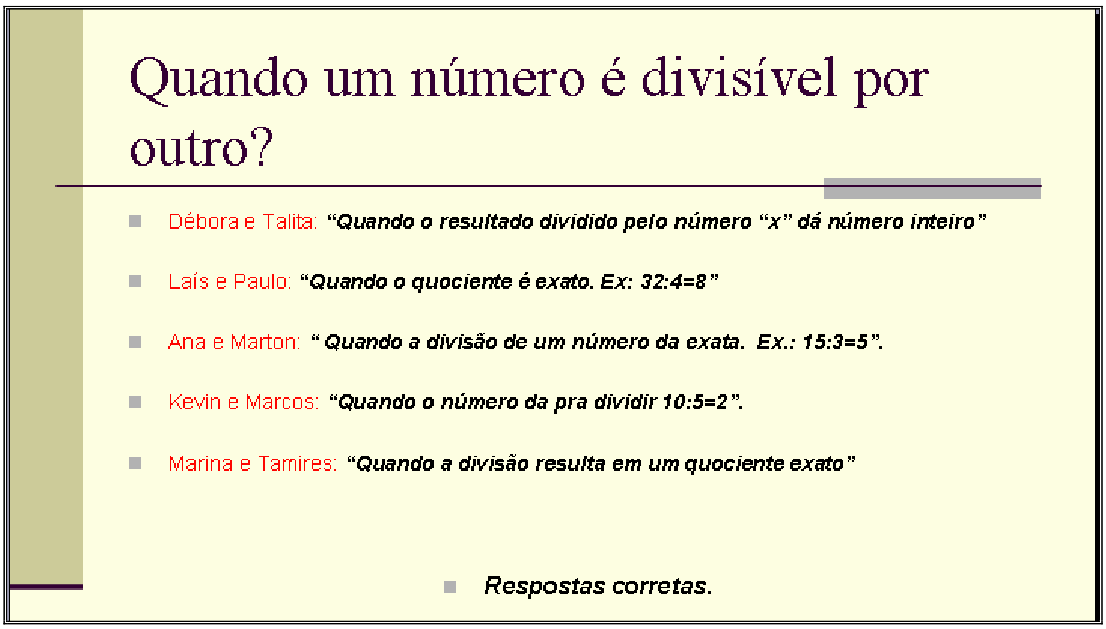


Figura 30: Slide - noções de divisibilidade – Fase Intervenção – duplas A, B, C.

Em seguida, discutimos as respostas apresentadas para a questão que trata de números divisíveis por outros, analisamos frase por frase, testando-as com exemplos e buscando sua validação nas planilhas eletrônicas. Chegamos à conclusão de que todas as justificativas apresentadas estavam corretas. Assim sendo, os sujeitos não acharam necessária a elaboração de uma frase coletiva que contemplasse as idéias de todos os participantes.

Encerramos a intervenção com a análise das respostas apresentadas para o item que requer uma conjectura envolvendo as noções de múltiplos e divisores.

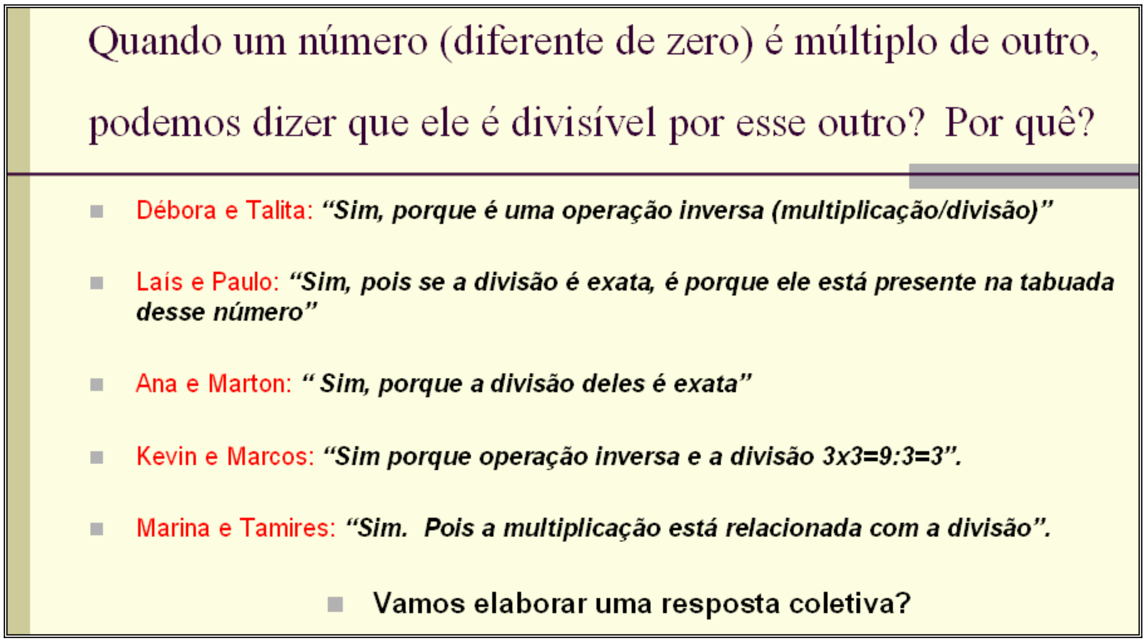


Figura 31: Slide – relação das noções de múltiplos e divisores de números naturais – Fase Intervenção – duplas A, B, C.

Os alunos buscaram validar suas conjecturas testando exemplos e buscando a verdade em cada frase elaborada pelo grupo. Depois de muita discussão, optaram pela resposta da dupla Laís e Paulo (uma das duplas selecionadas para a análise dos resultados de nosso experimento):

> "Sim, pois se a divisão é exata, é porque ele está presente na tabuada desse número".

Concluímos essa etapa da intervenção explicitando que se um número "é múltiplo de" um número inteiro, então "é divisível por" esse número inteiro. Observamos que a relação das noções de múltiplos e divisores, com a tabuada é significativa para as duplas. O termo tabuada foi usado para indicar que os múltiplos são produzidos quando efetuamos uma multiplicação.

Finalmente, analisamos o 3º item da Atividade 04, cujos objetivos não foram totalmente alcançados. Ao propor esta atividade, esperávamos que os sujeitos identificassem regularidades nos pares de números consecutivos, cujos produtos são múltiplos de 4. No quadro abaixo transcrevemos a áudio-gravação do momento de interação do professor aplicador com as duplas durante a intervenção.

Professor aplicador: O que têm de comum os pares dos números consecutivos, cujos produtos vocês selecionaram como múltiplos de 4. Por que vocês destacaram esses números? Vamos analisar o exemplo: **<u>23x24 = 552 é múltiplo de 4</u>** Dupla A: Acho que porque a divisão de 552 por 4 é exata! Professor aplicador: Gostaria que vocês observassem os números consecutivos e não o resultado da operação. Dupla B: Professor, eu acho que é porque o 24 é par. Dupla C: Porque um dos fatores é divisível pelo múltiplo. Professor aplicador: Como assim, o que garante que o produto de 23x24 é múltiplo de 4? Dupla C: Ah! Professor é porque o 24 está na tabuada do 4, então resultado da multiplicação é divisível por 4. Professor aplicador: OK! É por aí o caminho, alguém tem alguma outra sugestão? Dupla B: Então temos que ter um dos fatores na tabuada do 4? Professor aplicador: Verifiquem o produto de 52x53, é múltiplo de 4? Dupla C: Nenhum dos números esta na tabuada do 4, mas o 52 da para dividir por 4 então da certo. Dupla A: Professor! Na fatoração do 52 = 2^2x13 tem o 4, então vale? Professor aplicador: Bem! O que é preciso para garantir que o produto dos números consecutivos seja múltiplo de 4. Dupla C: Descobrimos, descobrimos professor! É obrigatório que um dos números multiplicados seja múltiplo de 4, daí da certo.

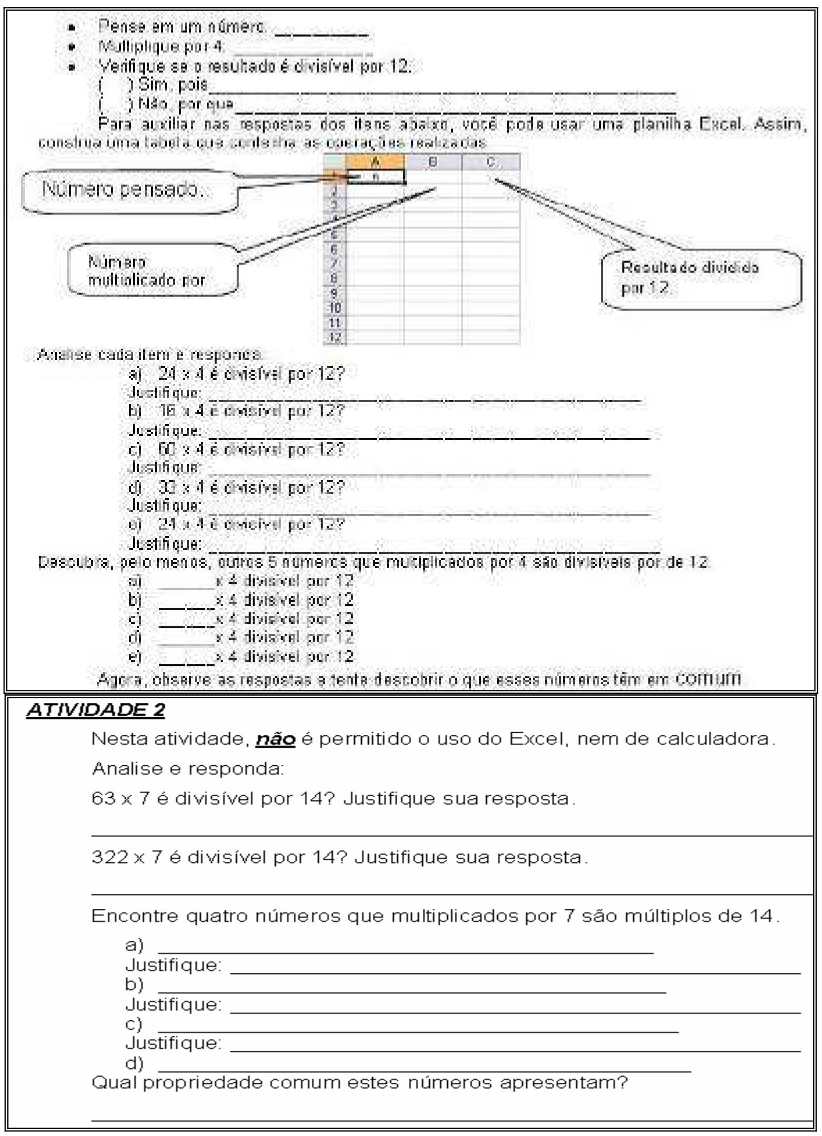
Quadro 02: Interação Professor-Dupla sobre a Atividade 4 – Fase 0

Pelo relato acima é perceptível que não foi tão fácil levar as duplas a perceber os fatos envolvidos na questão. Verificamos e testamos vários números em uma planilha eletrônica, até que alguma dupla conseguisse verbalizar o resultado esperado para este item da Atividade 04.

De maneira geral, no decorrer da intervenção, foi interessante observar a importância da interação social entre aluno-professor e aluno-aluno, para explicitar a validade de uma conjectura. Esse ato de comunicação de idéias por parte dos alunos no processo de provar seus argumentos, é uma das funções da prova constatadas por De Villiers (2001).

> *De modo semelhante, Davis (1976) também enunciou que um dos valores concretos da demonstração é a criação de um fórum para debate crítico. De acordo com este ponto de vista, a demonstração é um modo único de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, e entre os próprios estudantes. (De Villiers, 2001, p. 35).*

5.5 Análise *a posteriori* das Atividades 1 e 2 - Fase 1



- Pense em um número. ________
- Multiplique por 4: ________
- Verifique se o resultado é divisível por 12:

( ) Sim, pois ________

( ) Não, por que ________

Para auxiliar nas respostas dos itens abaixo, você pode usar uma planilha Excel. Assim, construa uma tabela que contenha as operações realizadas

Analise cada item e responda:

a) 24 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ________
b) 16 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ________
c) 60 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ________
d) 33 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ________
e) 21 x 4 é divisível por 12?
Justifique: ________

Descubra, pelo menos, outros 5 números que multiplicados por 4 são divisíveis por de 12.

a) ______ x 4 divisível por 12
b) ______ x 4 divisível por 12
c) ______ x 4 divisível por 12
d) ______ x 4 divisível por 12
e) ______ x 4 divisível por 12

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum

ATIVIDADE 2

Nesta atividade, ***não*** é permitido o uso do Excel, nem de calculadora.

Analise e responda:

63 x 7 é divisível por 14? Justifique sua resposta.

____

322 x 7 é divisível por 14? Justifique sua resposta.

____

Encontre quatro números que multiplicados por 7 são múltiplos de 14.

a) ________
Justifique: ________
b) ________
Justifique: ________
c) ________
Justifique: ________
d) ________

Qual propriedade comum estes números apresentam?

____

Figura 32: Enunciado das Atividades 1 e 2 – Fase 1

O objetivo das Atividades 1 e 2 é criar oportunidade para que o aluno experimente, em cada resposta apresentada, o ato de justificar, verificar se o que ele escreveu, argumentou e conjeturou, é de fato é verdadeiro e ficar convencido disto.

Pretendíamos tornar mais significativa para os alunos a importância experiência de desenvolver uma prova matemática, desafiá-los a expor seus resultados, concordando com Pietropaolo (2005), quando afirma que

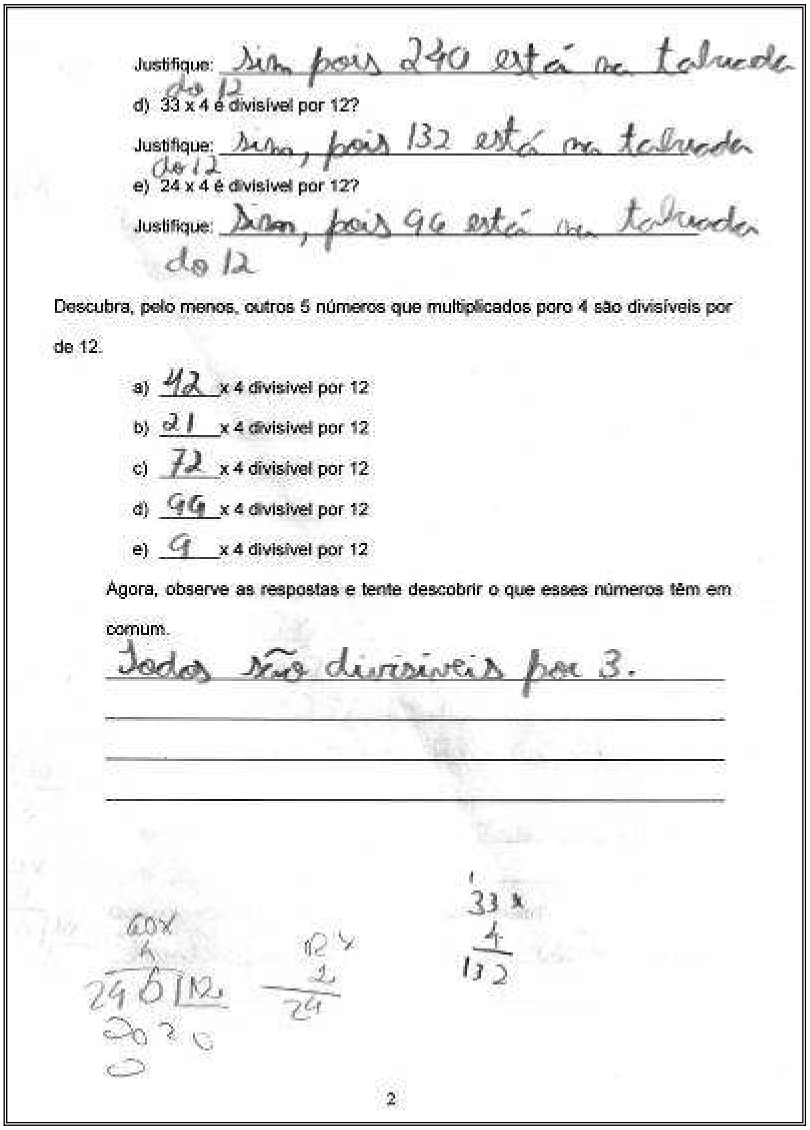
> *(...) a prova deve fazer parte da formação dos alunos da Educação Básica, desde que o significado a ela atribuído seja ampliado e que se caracterize por um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação (...) (Pietropaolo, 2005, p. 212).*

Esperávamos que os alunos se valessem dos conhecimentos adquiridos na fase anterior e apontassem a característica e regularidade comum aos números que, multiplicados por 4, resultam em um número divisível por 12. Finalmente, nossa expectativa era que, sem efetuar os cálculos, eles fossem capazes de decidir se o produto de 4 por um número escolhido é divisível ou não por 12.

O uso da planilha eletrônica foi permitido para que os sujeitos testassem e validassem seus argumentos e justificativas.

Avaliando as respostas dos alunos, podemos classificar suas provas em pragmáticas cruciais, representadas na língua materna.

5.5.1 Análise *a posteriori* das Atividades 1 e 2 - Fase 1



Justifique: sim pois 240 está na tabuada do 12

d) 33 x 4 é divisível por 12?

Justifique: sim, pois 132 está na tabuada do 12

e) 24 x 4 é divisível por 12?

Justifique: Sim, pois 96 está na tabuada do 12

Descubra, pelo menos, outros 5 números que multiplicados poro 4 são divisíveis por de 12.

a) 42 x 4 divisível por 12

b) 21 x 4 divisível por 12

c) 72 x 4 divisível por 12

d) 99 x 4 divisível por 12

e) 9 x 4 divisível por 12

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

Todos são divisíveis por 3.

60 x 4 = 240 | 12

12 x 2 = 24

33 x 4 = 132

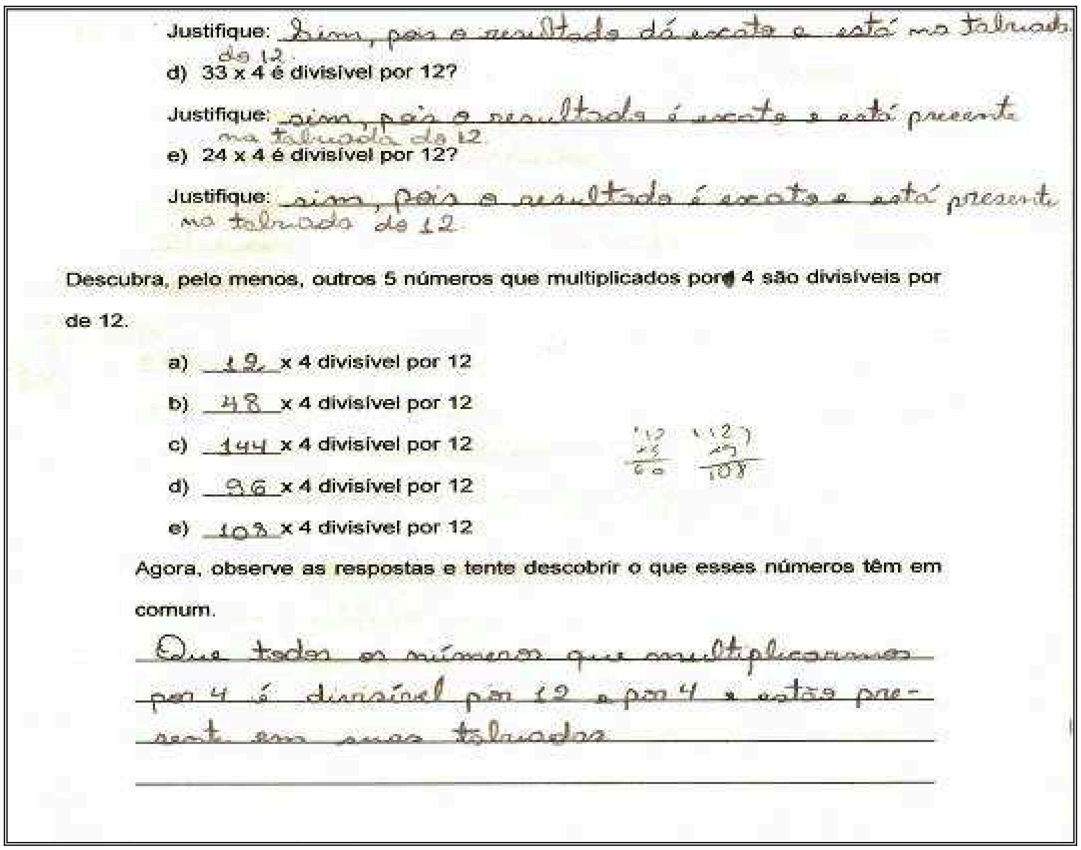
2

Figura 33: Protocolo Resposta apresentada pela dupla A – Atividade 1 – Fase 1 - dupla A

A dupla A iniciou as atividades, efetuando todas as multiplicações, ou seja, realizando os cálculos, como podemos observar na figura 33. Os alunos justificavam suas respostas após efetuar a multiplicação, como exemplo 33x4 = 132 é divisível por 12 porque o resultado está presente na tabuada do número 12. Este procedimento não era esperado para estas atividades, e assim, constatamos que o enunciado das atividades falhou, ou seja, é possível que os objetivos estabelecidos para esta atividade tivessem sido alcançados, se, no enunciado desta questão destacássemos que não era permitido efetuar os cálculos.

Quanto ao item que pede para o aluno descobrir cinco números que, multiplicados por 4, são divisíveis por 12, a dupla A foi a única que identificou corretamente a regularidade dos números escolhidos, concluindo que todos deveriam ser divisíveis por 3. Porém, não justificou sua resposta, uma vez que não havia solicitação de justificativa no enunciado da questão.

Podemos identificar nas figuras 34 e 35, que ilustram as respostas apresentadas pelas duplas B e C, respectivamente, que os alunos repetiram os mesmos procedimentos da dupla A, justificando suas respostas por meio de cálculos. O que difere são as justificativas e conclusões apresentadas como respostas ao último item. A seguir, descrevemos seus comentários:


Justifique: Sim, pois o resultado dá exato e está na tabuada do 12.

d) 33 x 4 é divisível por 12?

Justifique: sim, pois o resultado é exato e está presente na tabuada do 12

e) 24 x 4 é divisível por 12?

Justifique: sim, pois o resultado é exato e está present na tabuada do 12

Descubra, pelo menos, outros 5 números que multiplicados por 4 são divisíveis por de 12.

a) 12 x 4 divisível por 12

b) 48 x 4 divisível por 12

c) 144 x 4 divisível por 12

d) 96 x 4 divisível por 12

e) 108 x 4 divisível por 12

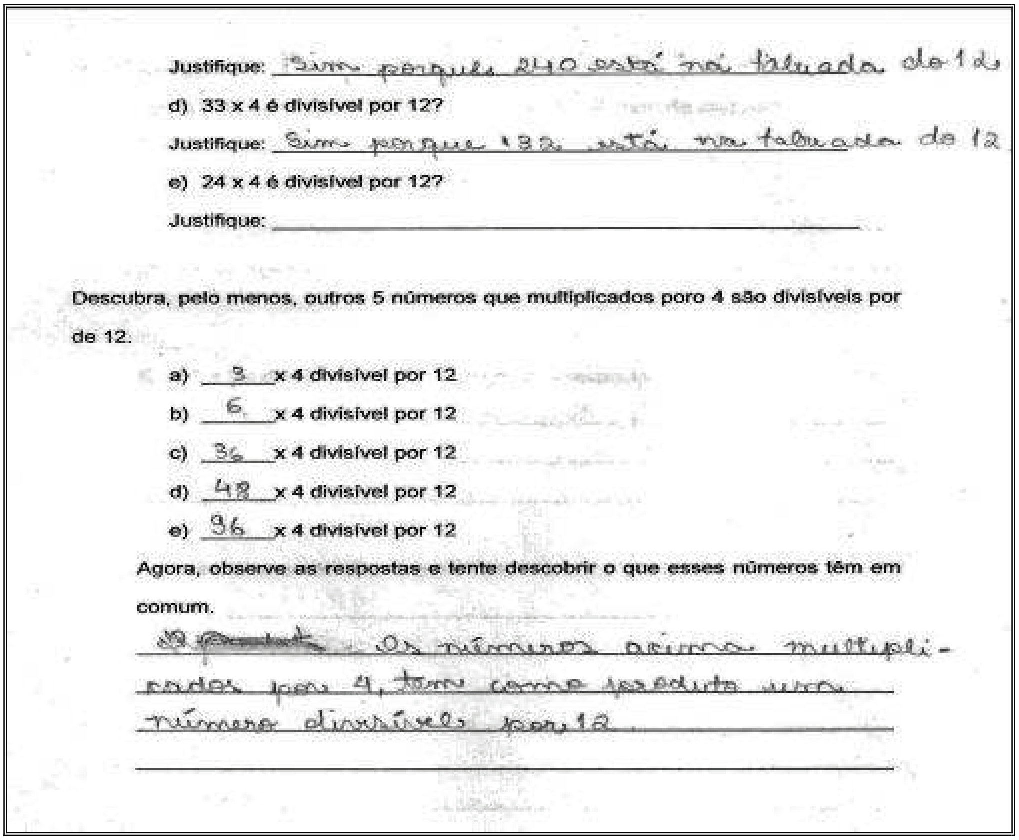
Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

Que todos os números que multiplicamos por 4 é divisível por 12 e por 4 e estão presente em suas tabuadas

Figura 34: Protocolo – Atividade 1 – Fase 1 - dupla B

Quanto aos alunos da dupla B, para apresentar sua resposta – *“Que todos os números que multiplicamos por 4 são divisíveis por 12 e por 4 e estão presentes em suas tabuadas”* –, efetuaram alguns cálculos e, baseados em poucos exemplos, formularam sua justificativas. Ou seja, não testaram vários números na tentativa de encontrar um contra-exemplo, que de fato existe. Esse tipo de atitude tomada pela dupla B é classificado por Balacheff (1988) como Empirismo Ingênuo, em que o aluno admite a validação de uma propriedade após a verificação de alguns poucos casos, não levando em conta a sua particularidade.

Vamos analisar a resposta apresentada pela dupla C:


Justifique: Sim porque 240 está na tabuada do 12

d) 33 x 4 é divisível por 12?

Justifique: Sim porque 132 está na tabuada do 12

e) 24 x 4 é divisível por 12?

Justifique: ______

Descubra, pelo menos, outros 5 números que multiplicados poro 4 são divisíveis por de 12.

a) 3 x 4 divisível por 12

b) 6 x 4 divisível por 12

c) 36 x 4 divisível por 12

d) 48 x 4 divisível por 12

e) 96 x 4 divisível por 12

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

~~[illegible]~~ Os números acima multiplicados por 4, tem como produto um número divisível por 12.

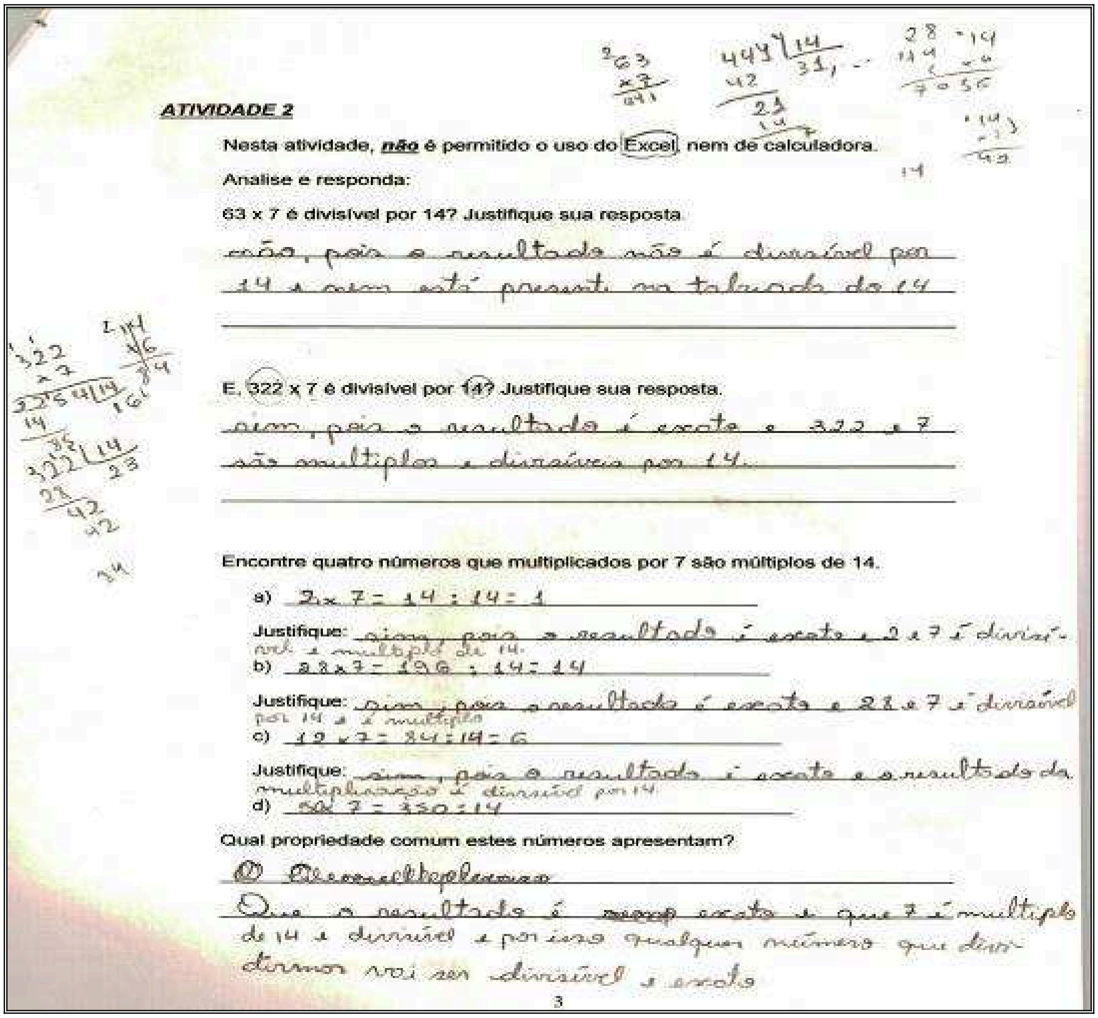
Figura 35: Protocolo – Atividade 1 – Fase 1 - dupla C

A justificativa apresentada pela Dupla C para o último item da atividade 1 foi:

“Os números acima multiplicados por 4 têm como produto um número divisível por 12”.

É possível que os alunos da dupla C não tenham interpretado corretamente o enunciado, pois não apontaram uma regularidade nos números que multiplicados por 4, resultam em um múltiplo de 12. No entanto, examinando os números indicados como respostas aos itens (a) a (e), observa-se que os alunos tiveram o cuidado de escolher valores convenientes, de tal forma que essa propriedade fosse verificada nos resultados. Uma vez que a resposta apresentada não mostra, claramente, o raciocínio utilizado para a escolha desses números, não há elementos suficientes que permitam avaliar se o objetivo desta atividade foi alcançado por esta dupla.

Quanto à Atividade 2 da Fase 1, escolhemos, aleatoriamente, uma ficha para ilustrar os tipos de resultados apresentados pelas duplas:



ATIVIDADE 2

Nesta atividade, **não** é permitido o uso do Excel, nem de calculadora.

Analise e responda:

63 x 7 é divisível por 14? Justifique sua resposta.

não, pois o resultado não é divisível por 14 e nem está presente na tabuada do 14

E. 322 x 7 é divisível por 14? Justifique sua resposta.

sim, pois o resultado é exato e 322 e 7 são multiplos e divisíveis por 14.

Encontre quatro números que multiplicados por 7 são múltiplos de 14.

a) 2 x 7 = 14 : 14 = 1

Justifique: sim, pois o resultado é exato e 2 e 7 é divisível e multiplo de 14.

b) 28 x 7 = 196 : 14 = 14

Justifique: sim, pois o resultado é exato e 28 e 7 é divisível por 14 e é multiplo

c) 12 x 7 = 84 : 14 = 6

Justifique: sim, pois o resultado é exato e o resultado da multiplicação é divisível por 14

d) 50 x 7 = 350 : 14

Qual propriedade comum estes números apresentam?

Que o resultado é exato e que 7 é multiplo de 14 e divisível e por isso qualquer número que der dirmos vai ser divisível e exato

3

Figura 36: Resposta apresentada pela dupla B – Atividade 2 – Fase 1

A análise das respostas contidas nesse protocolo nos levou a concluir que o mesmo raciocínio utilizado durante o desenvolvimento da atividade 1 serviu como base para a elaboração das respostas apresentadas na atividade 2.

Observa-se que os alunos efetuaram cálculos e repetiram os mesmos argumentos e justificativas utilizadas na atividade 1. Nota-se também que ainda não há, por parte destes alunos, clareza suficiente em relação às noções de múltiplos e divisores de um número inteiro, pois em suas justificativas afirmam "que o resultado é exato e que 7 é múltiplo de 14 e divisível e por isso qualquer número que dividirmos vai ser divisível e exato". Além disso, não houve a identificação de uma propriedade comum aos números que, multiplicados por 7, produzem um resultado divisível por 14, indicando que não ocorreu a generalização que desejávamos.

Tendo em vista os resultados observados, concluímos que os objetivos estabelecidos para a fase 1 de nosso experimento não foram totalmente alcançados.

Quanto à atividade 1, conforme expusemos em nossa análise *a priori*, esperávamos que os sujeitos levassem em conta a forma fatorada do número 12 (12 = 2x2x3), para perceber que o produto de 4 por um número natural será divisível por 12, se esse número for múltiplo de 3.

Porém, as respostas demonstram que os sujeitos não recorreram como esperávamos, a seus conhecimentos anteriores sobre decomposição de números naturais em fatores primos – basearam suas respostas, unicamente, na idéia de que um número a é divisível por um número b ($b \neq 0$), se a divisão de a por b for exata.

Embora tenham escolhido números divisíveis por 3, conforme se pode ver no protocolo da dupla C (Fig. 35), – o que está correto –, não foram capazes de explicitar essa característica, ou não a identificaram.

É possível, que os alunos ainda não houvessem construído satisfatoriamente, as noções de múltiplos e divisores de números naturais e também não tenham percebido as regularidades existentes nos números envolvidos na atividade Conseqüentemente, não fizeram à generalização esperada.

Entendemos então, que seria necessário refazer as atividades da fase 1, pois julgamos que o fato de não haverem sido alcançados os objetivos propostos comprometeria a próxima fase do experimento. Das três duplas selecionadas para a análise somente a dupla A atingiu parte dos objetivos, indicando uma regularidade – uma característica comum aos números escolhidos para suas respostas. Além disso, as duplas não exploraram suficientemente o Excel, que permitiria a investigação de uma grande quantidade de números para elaborar suas conjecturas.

5.6 Intervenção para a retomada das atividades 1 e 2 - Fase 1

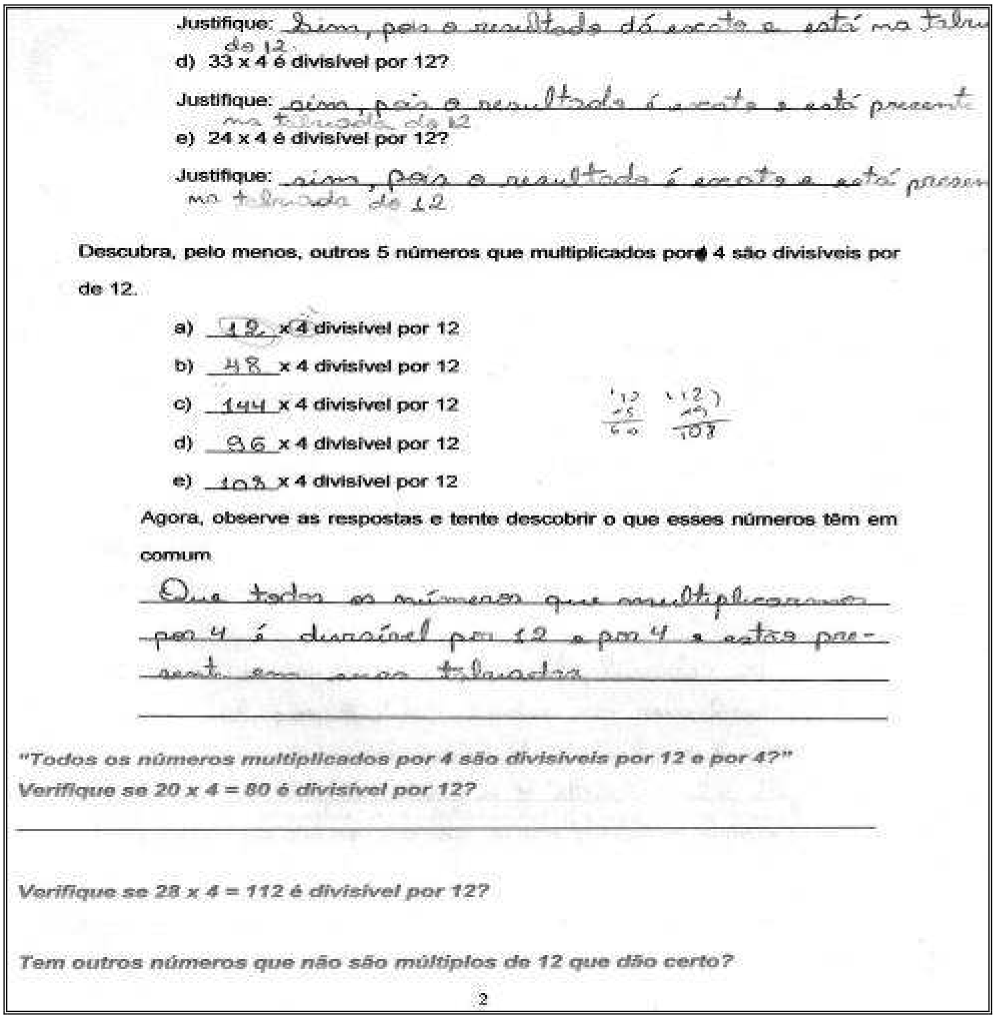
Primeiramente fizemos um comentário geral sobre as respostas apresentadas nas atividades 1 e 2. Esclarecemos que o intuído do nosso experimento não era verificar se eles sabiam ou não fazer cálculos envolvendo multiplicação e divisão, ou para responder se o produto de dois números é ou não múltiplo ou divisível por outro número.

Enfatizamos que as atividades propostas tinham o objetivo de propiciar a análise de uma situação matemática, de tal forma que eles pudessem observar regularidades, fazer generalizações, elaborar argumentos, conjecturas e provas, validando, explicando e justificando as respostas apresentadas.

Chamei a atenção do grupo para a utilização do Excel, valorizando a construção da planilha eletrônica com mais dados, pois desta forma ela possibilitaria a elaboração de conjecturas baseadas em uma análise mais ampla e empírica para verificar se o argumento inicialmente elaborado é verdadeiro para muitos casos ou não, e, possibilitando encontrar, mais facilmente, contra exemplos quando existirem.

Apresentamos a seguir, um relato da intervenção individualizada realizada com as duplas B e C.

Essa intervenção teve como pontos de partida, atividades desenvolvidas pelas duplas, durante a Fase 1, como segue:



Justifique: Sim, pois o resultado dá exato e está na tabuada do 12.

d) 33 x 4 é divisível por 12?

Justifique: sim, pois o resultado é exato e está presente na tabuada do 12

e) 24 x 4 é divisível por 12?

Justifique: sim, pois o resultado é exato e está presente na tabuada do 12

Descubra, pelo menos, outros 5 números que multiplicados por 4 são divisíveis por de 12.

a) 12 x 4 divisível por 12

b) 48 x 4 divisível por 12

c) 144 x 4 divisível por 12

d) 96 x 4 divisível por 12

e) 108 x 4 divisível por 12

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum

Que todos os números que multiplicarmos por 4 é divisível por 12 e por 4 e estão presentes em suas tabuadas

"Todos os números multiplicados por 4 são divisíveis por 12 e por 4?"

Verifique se 20 x 4 = 80 é divisível por 12?

Verifique se 28 x 4 = 112 é divisível por 12?

Tem outros números que não são múltiplos de 12 que dão certo?

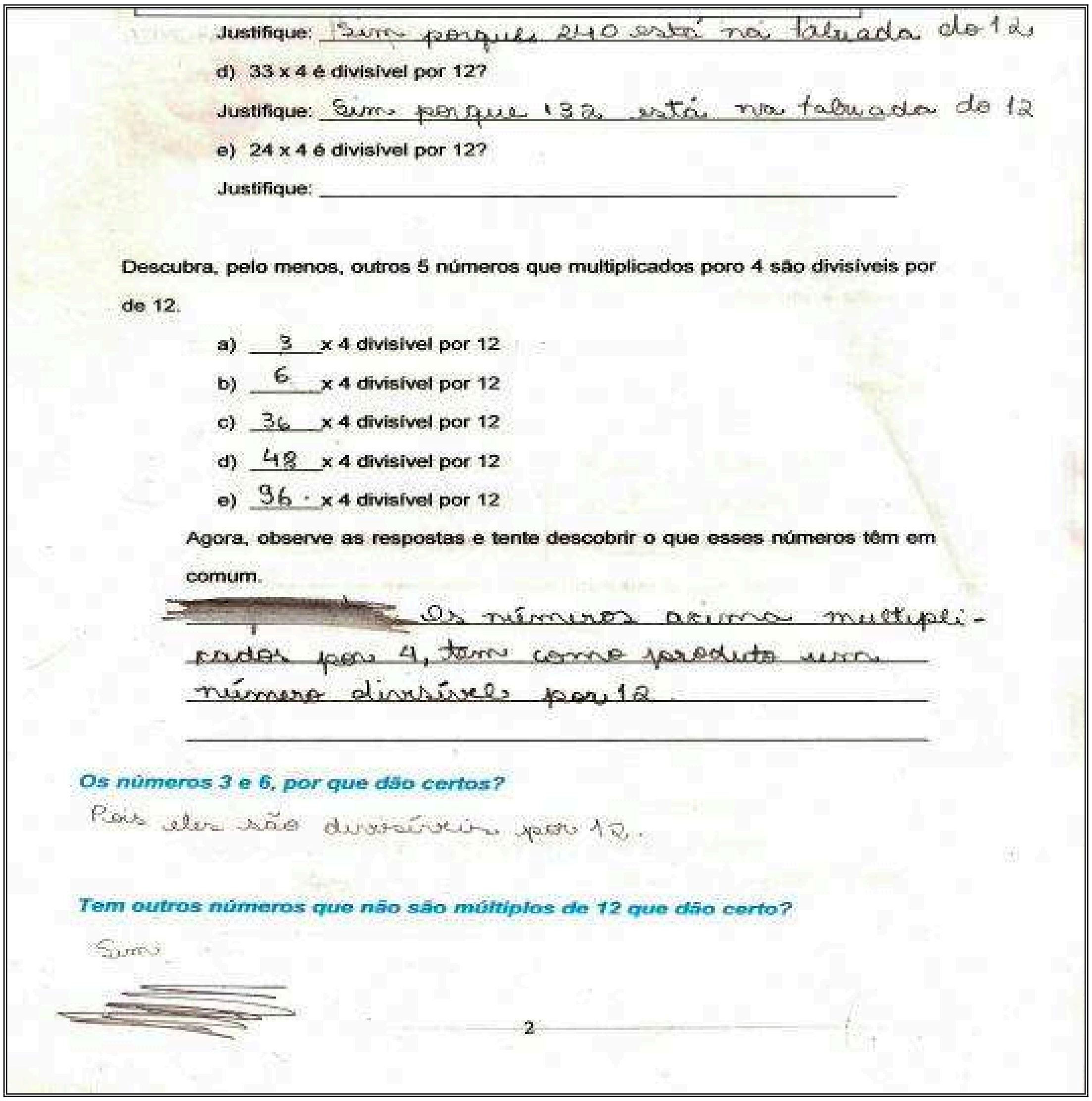
2

Figura 37: Xérox da resposta e questionamento - atividade 1 - Fase 1: Dupla B

Professor aplicador: Vocês apresentaram como resposta: "Todos os números multiplicados por 4 são divisíveis por 12 e por 4?", será que isso é verdade?
Aluno 1: É verdade professor, nós conseguimos apresentar exemplos.
Aluno 2: Todos os números que colocamos deram certo.
Professor aplicador: Vocês construíram a planilha eletrônica?
A 2: Sim e testamos com esses números que preenchemos as lacunas.
Professor aplicador: Tinham que testar a planilha com mais dados. Então verifique se o número 20 satisfaz suas explicações.
A 1: Calma aí, 20x4 = 80, bom....
A 2: Calma, calma... É mesmo 80 não é divisível por 12
Professor aplicador: Perceberam! Então vamos tentar o 28.
A 2: Acho que também não vai dar.
A 1: Não dá mesmo! 28 x 4 = 112, que não é divisível por 12.
Professor aplicador: Bom, Tem outros números que não são múltiplos de 12 que dão certo? Então vamos refazer a Fase 1.

Quadro 03: Interação: Professor - Dupla B

Podemos perceber nas primeiras colocações da dupla b, que o nível de prova de empirismo ingênuo classificado por Balacheff (1988) é notório quando os alunos ressaltam que encontraram exemplos e não se atentou as possibilidades de existir um contra-exemplo.



Justifique: Sim porque 240 está na tabuada do 12

d) 33 x 4 é divisível por 12?

Justifique: Sim porque 132 está na tabuada do 12

e) 24 x 4 é divisível por 12?

Justifique: ______________________

Descubra, pelo menos, outros 5 números que multiplicados poro 4 são divisíveis por de 12.

a) 3 x 4 divisível por 12

b) 6 x 4 divisível por 12

c) 36 x 4 divisível por 12

d) 48 x 4 divisível por 12

e) 96 x 4 divisível por 12

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

[redacted] Os números acima multiplicados por 4, tem como produto um número divisível por 12

Os números 3 e 6, por que dão certos?

Pois eles são divisíveis por 12.

Tem outros números que não são múltiplos de 12 que dão certo?

Sim

2

Figura 38: Xérox da resposta e questionamento da atividade 1 – Fase 1: Dupla C

Professor: Bom, vocês preencheram as lacunas corretamente, colocaram números que não são múltiplos de 12, como os números 3 e 6. Gostaria de saber por que os números 3 e 6 dão certo?
Aluna 1: É porque eles são divisíveis por 12.
P. Divisíveis ou divisores de 12?
Aluna 2: Eu escrevi errado professor, são divisores.
P: Vocês responderam que: "Os números acima multiplicados por 4, têm como produto um número divisível por 12." Tudo bem, o que esses números têm em comum que os torna após o produto por 4, divisíveis por 12? Existem e outros números que dão certo?
A 2: Sim.
P: Então vamos refazer as atividades da fase 1.

Quadro 04: Interação: Professor-Dupla C

Este momento ocorreu imediatamente antes de iniciarmos a próxima fase, que foi denominada como Refazendo a fase 1. Na seqüência apresentamos sua análise.

5.7 Análise *a posteriori* do Refazendo Atividade 1 – Fase 1

1) Descubra, pelo menos, outros 5 números que multiplicados por 4 são divisíveis por 12.

a) _______x 4 divisível por 12
b) _______x 4 divisível por 12
c) _______x 4 divisível por 12
d) _______x 4 divisível por 12
e) _______x 4 divisível por 12

Dê mais 3 exemplos (números que não sejam múltiplos de 12):

f) ________x 4 divisível por 12
g) ________x 4 divisível por 12
h) ________x 4 divisível por 12

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum. Retome e complete sua resposta.

____
____

Tente explicar por que isso acontece, ou seja, por que os números são desse tipo.

____
____

2) Construa uma tabela (100 números, aproximadamente) para descobrir os números que multiplicados por 6 sejam divisíveis por 14. Anote alguns exemplos.

a) _______x 6 divisível por 14　　b) _______x 6 divisível por 14
c) _______x 6 divisível por 14　　d) _______x 6 divisível por 14
e) _______x 6 divisível por 14　　f) _______x 6 divisível por 14
g) _______x 6 divisível por 14　　h) _______x 6 divisível por 14

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

____
____

Tente explicar por que isso acontece, ou seja, por que os números são dessa forma.

____

Figura 39: Enunciado da Atividade 1 revisada

Visto que as atividades aplicadas pela primeira vez na Fase 1 não surtiram os efeitos desejados e os objetivos não foram plenamente atingidos, achamos necessário refazer as atividades com o intuito de que todas as duplas atentassem e explicassem por que os números escolhidos multiplicados por 4 tornam-se divisíveis por 12.

No item 2 da Atividade 1, mantivemos o mesmo objetivo, somente mudando os números, esperando que as duplas percebessem que os números escolhidos devem ser necessariamente múltiplos de **7** ou divisíveis por **7**, visto que na fatoração do número 6 = 2x3 temos o **2**. Desta forma, teríamos no produto um número cuja decomposição em fatores primos conteria os fatores **2** e **7**, tornando-o assim divisível por 14 cuja a fatoração é igual a **2x7**.

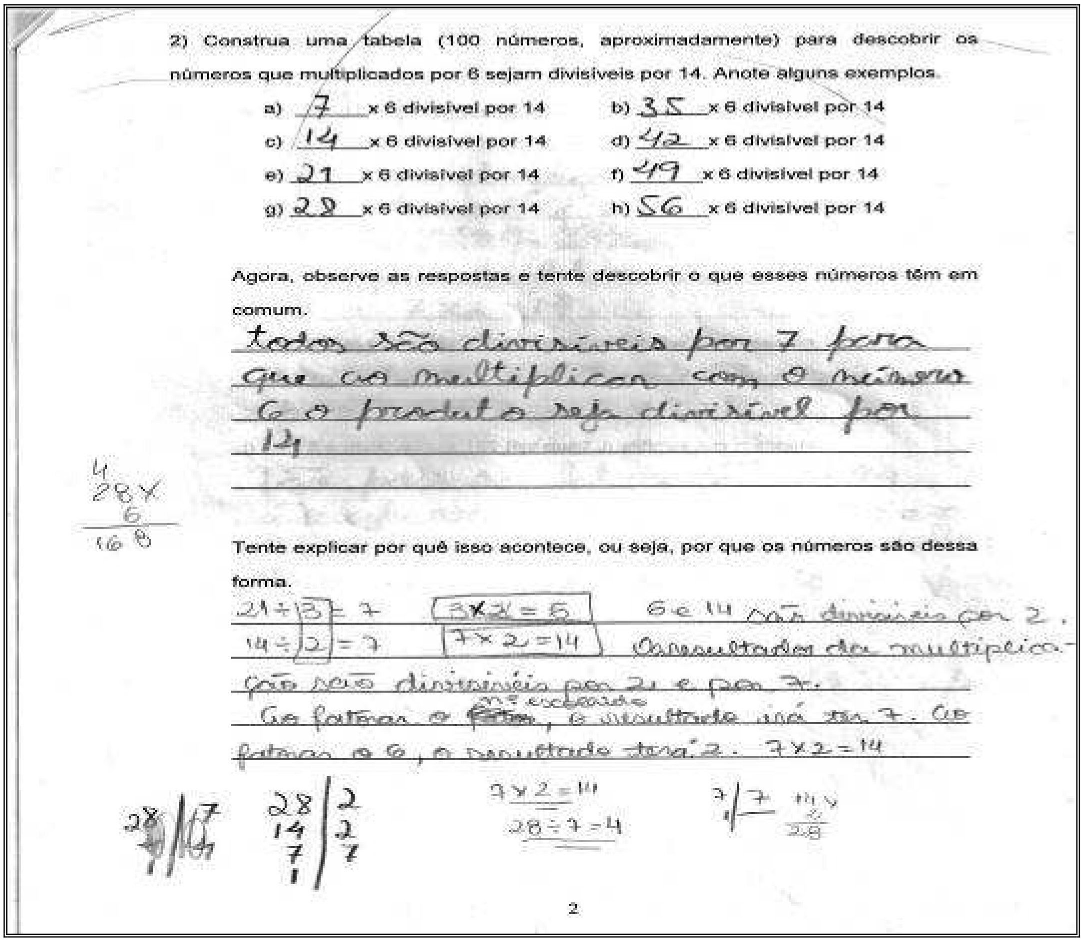
Sugerimos às duplas que elaborassem uma planilha eletrônica contendo no mínimo 100 números consecutivos, para testar e validar suas conjecturas e argumentos com maior eficácia, observando se existe algum contra-exemplo que as invalide.

Tentamos reformular os enunciados de forma a colocar a ênfase nas características dos números e também, destacando que era preciso tentar explicar e registrar o que se observa.

Essas atividades são de extrema importância para o desenvolvimento da Fase 2.

Na seqüência são apresentadas as respostas dos alunos ao item 2 da Atividade 1.

5.7.1 Análise *a posteriori* - Atividade 1 - Refazendo a Fase 1



2) Construa uma tabela (100 números, aproximadamente) para descobrir os números que multiplicados por 6 sejam divisíveis por 14. Anote alguns exemplos.

a) 7 x 6 divisível por 14 b) 35 x 6 divisível por 14

c) 14 x 6 divisível por 14 d) 42 x 6 divisível por 14

e) 21 x 6 divisível por 14 f) 49 x 6 divisível por 14

g) 28 x 6 divisível por 14 h) 56 x 6 divisível por 14

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

todos são divisíveis por 7 para que ao multiplicar com o número 6 o produto seja divisível por 14

Tente explicar por quê isso acontece, ou seja, por que os números são dessa forma.

$21 \div 3 = 7$ $3 \times 2 = 6$ 6 e 14 são divisíveis por 2. $14 \div 2 = 7$ $7 \times 2 = 14$ Os resultados da multiplicação são divisíveis por 2 e por 7. Ao fatorar o nº escolhido, o resultado irá ter 7. Ao fatorar o 6, o resultado terá 2. $7 \times 2 = 14$

$7 \times 2 = 14$

$28 \div 7 = 4$

2

Figura 40: Atividade 1 – Refazendo a Fase 1 - dupla A

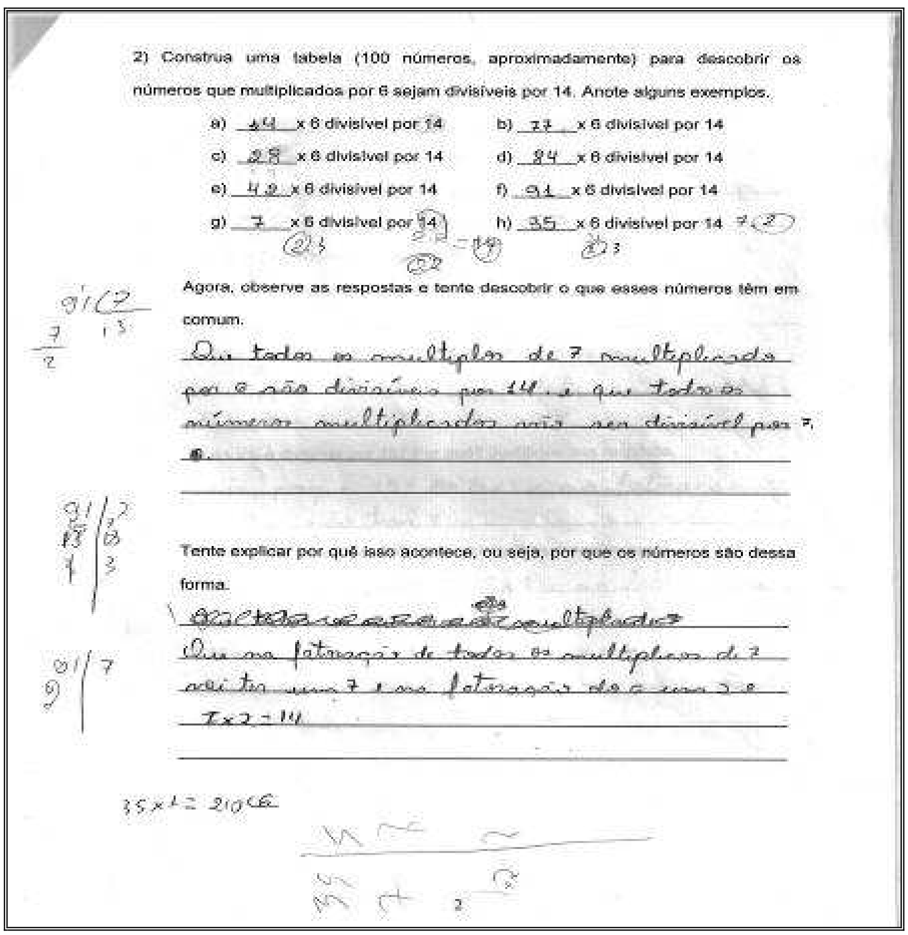
A dupla A conseguiu atingir o objetivo e explicou, utilizando propriedades, que os números escolhidos devem ser múltiplos de 7. Os alunos utilizaram-se do recurso da fatoração, como mostra a figura 40. A dupla A foi a primeira a fazer uso desse recurso, e desta forma conseguiu concluir a reposta apresentada na primeira aplicação da Atividade 1. Naquele momento a dupla só não conseguiu explicar, qual característica comum aos números escolhidos. O quadro abaixo apresenta a interação dos alunos da dupla A, na elaboração de sua conjectura:

Aluno 1: Olhe, observe a planilha os números que dão certo.
Aluna 2: São o 7, 14, 21, 28,... Todos são divisíveis por 7.
A 1: Como vamos explicar isso, não pode fazer cálculos.
A 2: Na outra atividade eu fiz a decomposição do 12 e deu certo.
A 1: Olha por que não pegar dois números, por exemplo, o 14 e o 21 trabalharmos com eles.
A 2: Ah, 21÷ **3**=7 e 14÷**2**=7 Então 3x2=6 e 7x2=14. O 6 e o 14 são divisíveis por 2.
A 1: Viu? Os resultados da multiplicação são divisíveis por 2 e por 7.
A 2: Eu sei como explicar: Ao fatorar o número escolhido, o resultado irá ter 7. Ao fatorar 6, o resultado terá 2. 7x2=14.

Quadro 05: Interação dos alunos - Atividade 1, item 2 – Refazendo a Fase 1 - dupla A

Analisando os argumentos da dupla A, pode-se notar que após um processo de tentativas os alunos conseguem chegar ao resultado esperado. Na formulação de sua conjectura eles utilizam à língua materna, ou seja, desenvolvem uma prova pragmática segundo Balacheff (1988).

A seguir, apresentamos a análise das respostas elaboradas pela dupla B.


2) Construa uma tabela (100 números, aproximadamente) para descobrir os números que multiplicados por 6 sejam divisíveis por 14. Anote alguns exemplos.

a) 14 x 6 divisível por 14 b) 77 x 6 divisível por 14
c) 28 x 6 divisível por 14 d) 84 x 6 divisível por 14
e) 42 x 6 divisível por 14 f) 91 x 6 divisível por 14
g) 7 x 6 divisível por 14 h) 35 x 6 divisível por 14

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

Que todos os múltiplos de 7 multiplicado por 6 são divisíveis por 14, e que todos os números multiplicados vão ser divisível por 7, 6.

Tente explicar por quê isso acontece, ou seja, por que os números são dessa forma.

Que na fatoração de todos os múltiplos de 7 vai ter um 7 e na fatoração do 6 tem 2 e 7x2=14

35x6= 210

Figura 41: Atividade 1 – Refazendo a Fase 1 - dupla B

As respostas apresentadas pela dupla B indicam que os alunos buscaram, por meio da fatoração, obter os fatores primos dos números 6 e 14. Desta forma, “descobriram” que os números a serem escolhidos deveriam ser múltiplos de 7.

As anotações registradas na folha de atividade parecem indicar que ainda havia alguma dúvida em relação ao número 91. Embora já houvesse concluído que os números escolhidos deveriam ser múltiplos de 7, a dupla realizou cálculos para a validação de suas conjecturas.

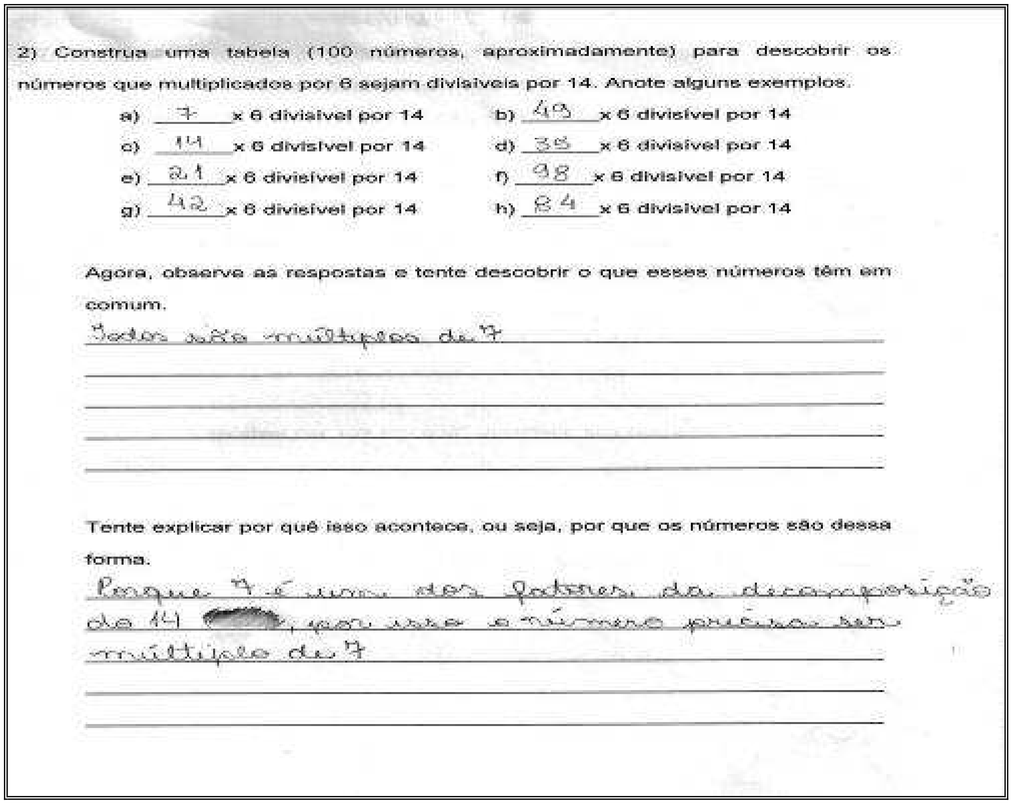
Esse tipo de procedimento de verificação é relevante, pois mostra que a dupla B, analisou cada número retirado da planilha, antes de preencher as lacunas, verificando se todos os números atendem à conjectura por eles elaborada.

O fato ocorrido nos remete à proposta de De Villiers (2001) que aponta a verificação como um dos papéis da prova matemática.

> *Os investigadores matemáticos, por exemplo, raramente examinam em detalhe as demonstrações publicadas, mas confiam em vez disso na autoridade reconhecida do autor, na verificação em certos casos especiais e numa avaliação informal, onde procuram ver se “os métodos e os resultados se ajustam, parecem aceitáveis” (...) (De Villiers, 2001, p. 02)*

Notamos que a dupla B, utilizou também a língua materna na elaboração de sua justificativa.

A seguir apresentamos as respostas da dupla C:


2) Construa uma tabela (100 números, aproximadamente) para descobrir os números que multiplicados por 6 sejam divisíveis por 14. Anote alguns exemplos.

a) 7 x 6 divisível por 14　　b) 49 x 6 divisível por 14
c) 14 x 6 divisível por 14　　d) 35 x 6 divisível por 14
e) 21 x 6 divisível por 14　　f) 98 x 6 divisível por 14
g) 42 x 6 divisível por 14　　h) 84 x 6 divisível por 14

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

Todos são múltiplos de 7

Tente explicar por quê isso acontece, ou seja, por que os números são dessa forma.

Porque 7 é um dos fatores da decomposição do 14, por isso o número precisa ser múltiplo de 7

Figura 42: Protocolo da Atividade 1 – item 2 – Refazendo a Fase 1 - dupla C

A dupla C apresentou respostas corretas, demonstrando segurança para explicar que os números escolhidos deveriam ser múltiplos de 7. Para elaborar sua resposta, consultou a tabela elaborada com o auxílio do Excel, não recorrendo a cálculos em momento algum.

No quadro 05, a seguir, transcrevemos o momento de interação da dupla C e na figura 43 a planilha, revelando os procedimentos utilizados antes da elaboração de sua justificativa:

Aluno 1: Vamos grifar na tabela os números onde a divisão deu exata.
Aluna 2: Pinta ele de amarelo, 7, 14, 21,..., 98 e 84, está na tabuada do 7.
A1: É deu certo porque o 14 está na tabuada do 7, olha: 14=2x7 e no 6 já tem 2 como fator.
A 2: Podemos falar que são todos múltiplos de 7.
A 1: Acho que pode sim deu certo para todos os números escolhidos.
A 2: Então explica você por que deu certo.
A 1: Eu falo e você escreve jóia!
A 2: Ok! Fala.
A 1: Porque 7 é um dos fatores da decomposição do 14, por isso o números precisam ser múltiplos de 7.

Quadro 06: Interação dos alunos - Atividade 1, item 2 – Refazendo a Fase 1 - dupla C

	A	B	C	D
1	n	n*6	(n*6)/14	
2	1	6	0.428571	
3	2	12	0.857143	
4	3	18	1.285714	
5	4	24	1.714286	
6	5	30	2.142857	
7	6	36	2.571429	
8	**7**	42	3	
9	8	48	3.428571	
10	9	54	3.857143	
11	10	60	4.285714	
12	11	66	4.714286	
13	12	72	5.142857	
14	13	78	5.571429	
15	**14**	84	**6**	
16	15	90	6.428571	
17	16	96	6.857143	
18	17	102	7.285714	
19	18	108	7.714286	
20	19	114	8.142857	
21	20	120	8.571429	
22	**21**	126	9	
23	22	132	9.428571	
24	23	138	9.857143	
25	24	144	10.28571	
26	25	150	10.71429	
27	26	156	11.14286	
28	27	162	11.57143	
29	**28**	168	12	
30	29	174	12.42857	
31	30	180	12.85714	

Figura 43: Planilha elaborada pela dupla C – Atividade 1, item 2 - Refazendo a Fase 1

Na interação da dupla C, percebemos que a primeira observação feita, é referente ao resultado da divisão, planejando indicar na tabela, as células em que o produto dos números escolhidos por 6 é divisível por 14. Em seguida, eles analisaram os fatores de 14 (14=2x7) – pois já sabiam que o número 2 é fator de 6 –, para depois buscar a propriedade comum aos números escolhidos. Constatando que todos os números são múltiplos de 7, finalizaram a atividade elaborando a conclusão.

A construção da tabela no Excel facilitou a identificação dos números que originavam o produto divisível por 14 e a elaboração das conclusões.

Já nessas primeiras atividades refeitas, podemos concluir que o momento de intervenção foi fator determinante para que as duplas conseguissem atingir o objetivo esperado. Vamos observar se o mesmo acontece na atividade 2 que apresentaremos na seqüência.

5.8 Análise *a posteriori* da Atividade 2 - refazendo a Fase 1

ATIVIDADE 2

Nesta atividade, **não é permitido** o uso do Excel ou da calculadora. Analise e responda ***SEM efetuar todos os cálculos indicados***:

a) 63 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

____

b) 322 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

____

c) 27 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

____

d) 44 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

____

e) 40 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

____

f) 56 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

____

Se você tivesse que explicar a um colega seu que faltou à aula, como é possível responder às questões **SEM efetuar todos os cálculos indicados**, o que você diria?

____

____

Agora, verifique com auxílio do Excel se suas respostas estão corretas.

(   ) Sim. Parabéns!!!!!

(   ) Não. Vamos rever e refazer os itens incorretos...

Figura 44: Enunciado da Atividade 2 – refazendo a Fase 1

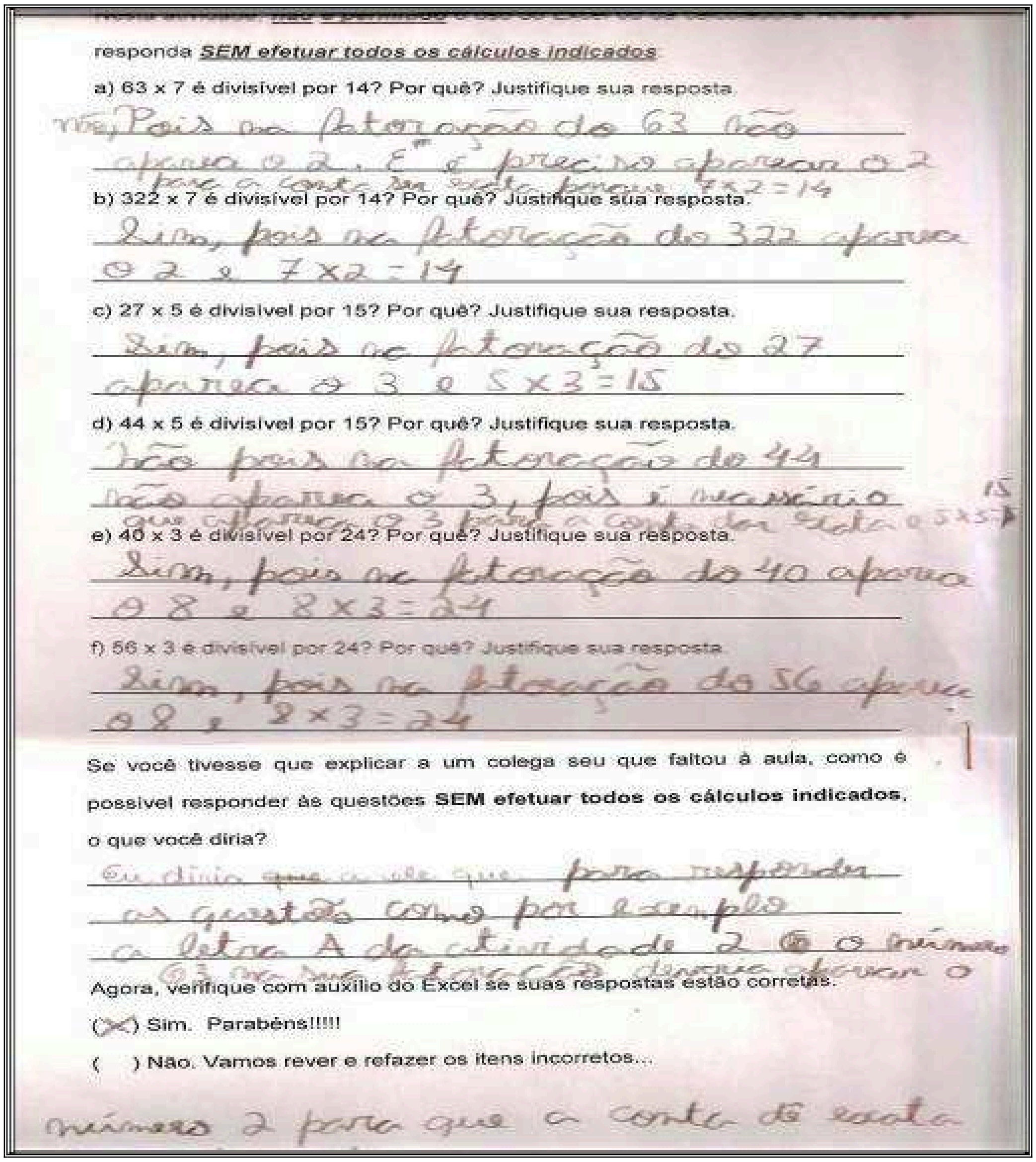
O objetivo desta atividade era verificar se as duplas haviam conseguido assimilar as noções necessárias para verificar, sem efetuar cálculos, se o produto de dois números é múltiplo de um terceiro número, analisando cada situação e justificando suas respostas.

Nesta fase elaboramos enunciados que possibilite um ambiente favorável para que os alunos tentassem obter uma generalização, produzindo uma explicação das propriedades em jogo. Supúnhamos que essa explicação poderia ser apresentada de maneira informal, no registro da língua natural.

Centramos nossas análises nas conjecturas elaboradas pelas duplas, examinando o tipo de argumentos utilizados e como explicitaram suas justificativas. Esse exame tinha o propósito de buscar indícios do nível de prova que alcançaram, baseados nos teóricos Balacheff (1988) e De Villiers (2001), pois durante o desenvolvimento da atividade 1 os sujeitos já haviam identificado a característica comum aos números escolhidos, utilizando como ferramenta a fatoração.

5.8.1 Análise *a posteriori* - Atividade 2 - Refazendo a Fase 1

Apresentamos a seguir, os protocolos referentes à atividade 2 da etapa Refazendo a Fase 1.


responda ***SEM efetuar todos os cálculos indicados***

a) 63 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

não, Pois na fatoração do 63 não aparece o 2. E é preciso aparecer o 2 para a conta ser exata porque 7x2=14

b) 322 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, pois na fatoração do 322 aparece o 2 e 7x2=14

c) 27 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, pois na fatoração do 27 aparece o 3 e 5x3=15

d) 44 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

Não pois na fatoração do 44 não aparece o 3, pois é necessário que aparece o 3 para a conta dar exata

e) 40 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, pois na fatoração do 40 aparece o 8 e 8x3=24

f) 56 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, pois na fatoração do 56 aparece o 8 e 8x3=24

Se você tivesse que explicar a um colega seu que faltou à aula, como é possível responder às questões **SEM efetuar todos os cálculos indicados**, o que você diria?

Eu diria ~~que~~ a ele que para responder as questões como por exemplo a letra A da atividade 2 o número 63 na sua fatoração deveria aparecer o número 2 para que a conta dê exata

Agora, verifique com auxílio do Excel se suas respostas estão corretas.

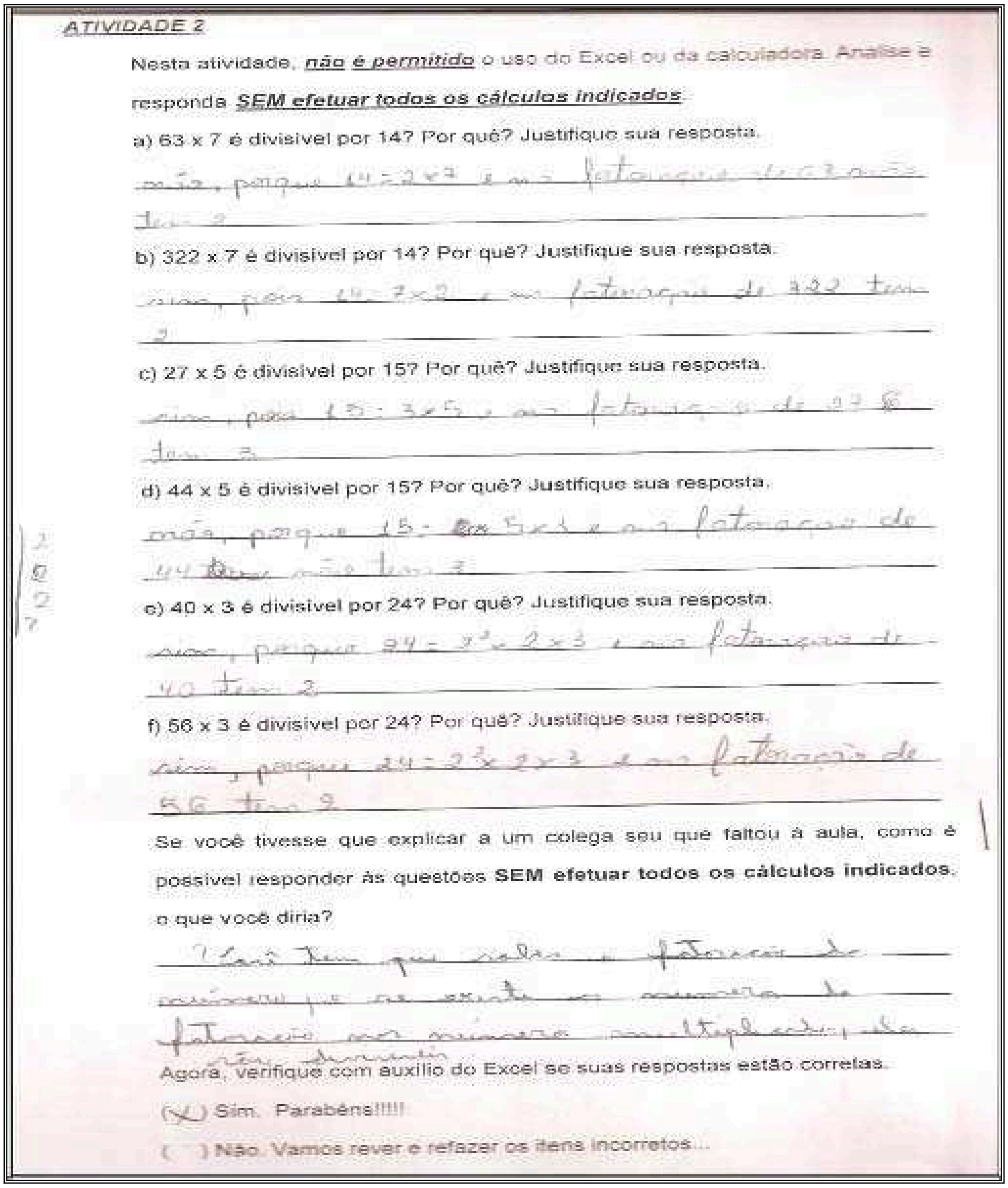
(X) Sim. Parabéns!!!!!

( ) Não. Vamos rever e refazer os itens incorretos...

Figura 45: Atividade 2 – Refazendo a Fase 1 - dupla A

Na resposta apresentada pela dupla A, podemos observar que atingiram o objetivo, utilizando a língua materna para explicitar as propriedades matemáticas em jogo. Podemos considerar essa explicação dentro da classificação de exemplos genéricos, de acordo com o modelo de Balacheff (1988).

Analisamos, a seguir, as respostas apresentadas pela dupla B:


ATIVIDADE 2

Nesta atividade, **não é permitido** o uso do Excel ou da calculadora. Analise e responda **SEM efetuar todos os cálculos indicados**.

a) 63 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

não, porque 14=2x7 e na fatoração de 63 não tem 2

b) 322 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

não, pois 14=7x2 e na fatoração de 322 tem 2

c) 27 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

sim, pois 15=3x5 e na fatoração de 27 tem 3

d) 44 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

não, porque 15=5x3 e na fatoração de 44 não tem 3

e) 40 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

não, porque 24=2²x2x3 e na fatoração de 40 tem 2

f) 56 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

sim, porque 24=2³x2x3 e na fatoração de 56 tem 2

Se você tivesse que explicar a um colega seu que faltou à aula, como é possível responder às questões **SEM efetuar todos os cálculos indicados**, o que você diria?

Você tem que saber a fatoração do [illegible]

Agora, verifique com auxílio do Excel se suas respostas estão corretas.

(X) Sim. Parabéns!!!!!

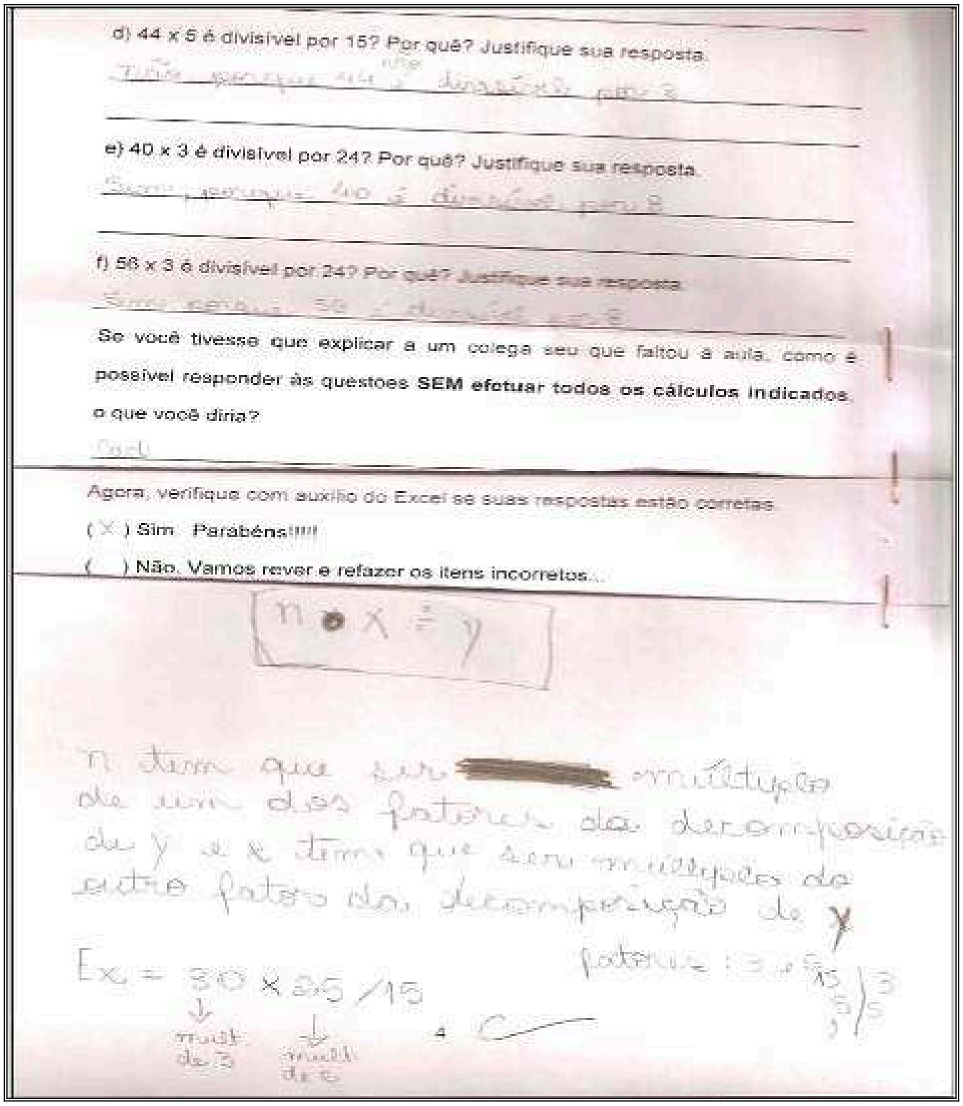
( ) Não. Vamos rever e refazer os itens incorretos...

Figura 46: Atividade 2 – Refazendo a Fase 1 - dupla B

A dupla B atingiu parte do objetivo da atividade, pois perceberam que 27 x 5 é divisível por 15, porque 3 está na fatoração de 27. Mas, não perceberam que para que um número multiplicado por 3 seja divisível por 24, deve ser múltiplo de 2^3.

A dupla baseou-se no empirismo, elaborando uma prova pragmática atingindo o nível de experimento crucial, alicerçada nos seus conhecimentos matemáticos transcritos em língua materna.

O protocolo apresentado na seqüência contém as respostas da dupla C, à atividade 2 da etapa Refazendo a Fase 1.



d) 44 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

Não porque 44 não é divisível por 3

e) 40 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim porque 40 é divisível por 8

f) 56 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim porque 56 é divisível por 8

Se você tivesse que explicar a um colega seu que faltou a aula, como é possível responder às questoes **SEM efetuar todos os cálculos indicados**, o que você diria?

Agora, verifique com auxilio do Excel se suas respostas estão corretas.

(X) Sim Parabéns!!!!!

( ) Não. Vamos rever e refazer os itens incorretos...

$\boxed{n \cdot x \div y}$

n tem que ser múltiplo de um dos fatores da decomposição de y e x tem que ser múltiplo do outro fator da decomposição de y

fatores: 3 e 5

Ex = 30 x 25 / 15

mult de 3 mult de 5

4

Figura 47: Atividade 2 – Refazendo a Fase 1 - dupla C

A dupla C atingiu o objetivo esperado. No item que solicita a explicação, a dupla iniciou uma tentativa de validação genérica, que faz parte do processo de transição de prova matemática pragmática para a conceitual, definidas por Balacheff (1988). Nesse processo de transição observamos que a dupla elaborou uma prova escrita em linguagem natural conceitual, tentando algebrizá-la. Consideramos, então, que a prova apresentada por esta dupla é uma prova mista.

Segundo De Villiers (2001) a justificativa apresentada pela dupla C enquadra-se dentro do papel da prova com a função de sistematização, em que o aluno tenta, num processo de verificação, organizar, avaliar a consistência e aplicabilidade de seus argumentos pré-estabelecidos.

> *A demonstração é, portanto, uma ferramenta indispensável para sistematizar vários resultados conhecidos num sistema dedutivo (De Villiers, 2001, p. 12).*

Concluímos que o objetivo desta fase foi atingido, pois as três duplas conseguiram perceber que é importante levar em conta os fatores dos números envolvidos na operação, e com isso, poder analisar os divisores e resolver a questão sem efetuar os cálculos.

Como comentamos anteriormente, não podemos deixar de salientar que o sucesso desta fase está diretamente ligado ao momento de intervenção. O trabalho feito com cada dupla surtiu efeito e o papel do professor foi fundamental, para que os objetivos do experimento fossem alcançados.

No próximo item analisamos os resultados da fase 2, que é a última da seqüência didática desenvolvida neste experimento.

5.9 Análise *a posteriori* - Atividades 1 e 2 – Fase 2

Fase 2

Atividade 1

Vamos tentar responder a seguinte questão:

Quando o produto de **dois números consecutivos** é **múltiplo de 6**?

Para isso, crie uma planilha no Excel, como fizemos nas atividades anteriores.

Queremos "descobrir" uma regra para, dados dois números consecutivos quaisquer, decidir se o produto deles é divisível por 6, **SEM fazer os cálculos**.

Vamos lá, tentem "descobrir" essa regra.

Explique como você chegou à resposta anterior.

Agora, aplique sua regra para responder as questões abaixo.

Lembre-se: **SEM** fazer todos os cálculos indicados.

a) 76 x 77 é divisível por 6?

b) 105 x 106 é divisível por 6

c) 234 x 235 é divisível por 6?

Usando a planilha do Excel verifique suas respostas.

- Se acertou tudo, Parabéns!!!!! ☺
- Se não, reveja sua regra e refaça as atividades. ☹

Atividade 2

Siga os mesmos passos da atividade anterior para responder a questão:

Quando o produto de **três números consecutivos** é **múltiplo de 24**?

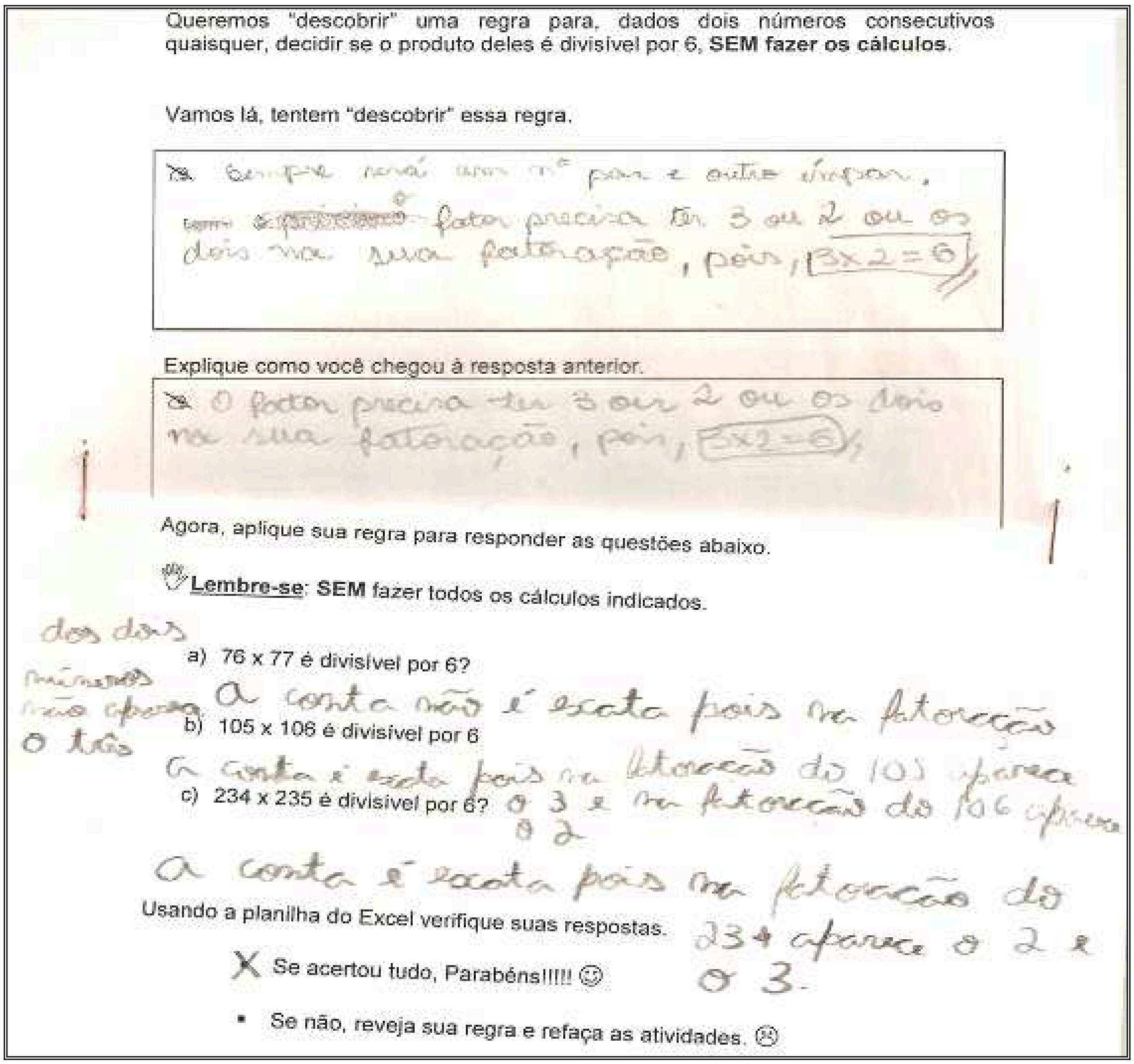
Ao final desta atividade, vamos a um **teste**!!!!!

Figura 48: Enunciado das Atividades 1 e 2 – fase 2

Esperávamos, com estas atividades, que as duplas se apropriassem do conhecimento adquirido nas fases anteriores e desenvolvessem suas conjecturas com base em propriedades conceituais, no nível das provas pragmáticas na língua natural, desvinculando do processo empírico.

Uma vez que estas atividades são mais abertas, fugindo do perfil das atividades anteriores, o uso da planilha eletrônica seria indispensável, pois somente desta maneira as duplas poderiam gerar um banco de dados, para analisar e encontrar subsídios para a elaboração de suas conjecturas, sem efetuar os cálculos, conforme foi descrito na análise *a priori*.

5.9.1 Análise *a posteriori* - Atividade 1 - Fase 2



Queremos "descobrir" uma regra para, dados dois números consecutivos quaisquer, decidir se o produto deles é divisível por 6, **SEM fazer os cálculos**.

Vamos lá, tentem "descobrir" essa regra.

Sempre terá um nº par e outro ímpar, ~~...~~ o fator precisa ter 3 ou 2 ou os dois na sua fatoração, pois, $\boxed{3 \times 2 = 6}$

Explique como você chegou à resposta anterior.

O fator precisa ter 3 ou 2 ou os dois na sua fatoração, pois, $\boxed{3 \times 2 = 6}$

Agora, aplique sua regra para responder as questões abaixo.

Lembre-se: **SEM** fazer todos os cálculos indicados.

dos dois números não aparece o três

a) 76 x 77 é divisível por 6?

a conta não é exata pois na fatoração

b) 105 x 106 é divisível por 6

a conta é exata pois na fatoração do 105 aparece o 3 e na fatoração do 106 aparece o 2

c) 234 x 235 é divisível por 6?

a conta é exata pois na fatoração do 234 aparece o 2 e o 3.

Usando a planilha do Excel verifique suas respostas.

X Se acertou tudo, Parabéns!!!!! ☺

- Se não, reveja sua regra e refaça as atividades. ☹

Figura 49: Protocolo da Atividade 1 – Fase 2 – dupla A

No quadro a seguir transcrevemos o momento de interação da dupla A com o professor aplicador no momento da resolução da atividade 1 – Fase 2.

Aluna 1: O professor tem que construir a tabela?
Professor: Sem a tabela é possível responder a questão?
Aluna 2: É igual à tabela da aula passada.
Professor: Tem que ler o enunciado da questão, para saber o que é preciso para elaborar a tabela.
A 1: Professor a tabela está correta?
Professor: Sim. É por aí o caminho.
A 1: Descobri os números que dão divisão exata por 6.
A 2: E agora professor, o que tem que fazer?
Professor: Lê o enunciado. Quando o produto de...
A 1: Professor, porque deu exato na planilha é só isso que eu consigo enxergar.
Professor: Não é isso que estamos querendo saber, lê o enunciado! Temos que olhar para o produto dos números consecutivos para ver o que eles têm em comum.
A 2: Ah! Lembrei tem que fatorar o 6 e depois olhar para os números.
A 1: Igual foi feito na aula passada.
A 2: Sim, o 6=2x3, tem que ter esses números. O professor, esta certo?
Professor: É por aí, mas vocês têm que olhar para os números multiplicados.
A 2: Olha na tabela é um número ímpar e outro par, por causa do 2x3.
A 1: Professor, eu acho que descobri. Está certa a resposta?
Professor: Isso é com vocês, analisem e elaborem a regra.
A 1: Eu escrevo a regra e você completa o resto dos exercícios.
A 2: OK!
A 1: Um número sempre será par e outro ímpar, o fator precisa ter 3 ou 2 ou os dois na sua fatoração, pois, 3x2=6. Está certo?
A 2: Acho que está. Professor, nós elaboramos a regra. Dá uma olha.
Professor: Já testaram para vários números? Eu só corrigir depois!
A 1: Escrevi a regra com minhas palavras.

Quadro 07: Interação: alunos da dupla A e professor - Atividade 1 – Fase 2.

A dupla A atingiu parte dos objetivos da atividade 1 da Fase 2, como se percebe na interação relatada no quadro 5, mediante o auxilio constante do professor. Demonstrou alguma dúvida a respeito da necessidade de construir a tabela (item indispensável) e, só depois do questionamento do professor, elaboram a planilha e responderam corretamente conforme a figura 50.

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar F

	A	B	C	D
1	n	n+1	n*(n+1)	(n*(n+1))/6
2	1	2	2	0.333333
3	**2**	**3**	**6**	**1**
4	**3**	**4**	**12**	**2**
5	4	5	20	3.333333
6	**5**	**6**	**30**	**5**
7	**6**	**7**	**42**	**7**
8	7	8	56	9.333333
9	**8**	**9**	**72**	**12**
10	**9**	**10**	**90**	**15**
11	10	11	110	18.33333
12	**11**	**12**	**132**	**22**
13	**12**	**13**	**156**	**26**
14	13	14	182	30.33333
15	**14**	**15**	**210**	**35**
16	**15**	**16**	**240**	**40**
17	16	17	272	45.33333
18	**17**	**18**	**306**	**51**
19	**18**	**19**	**342**	**57**
20	19	20	380	63.33333
21	**20**	**21**	**420**	**70**
22	**21**	**22**	**462**	**77**
23	22	23	506	84.33333
24	**23**	**24**	**552**	**92**
25	**24**	**25**	**600**	**100**
26	25	26	650	108.3333
27	**26**	**27**	**702**	**117**
28	**27**	**28**	**756**	**126**
29	28	29	812	135.3333

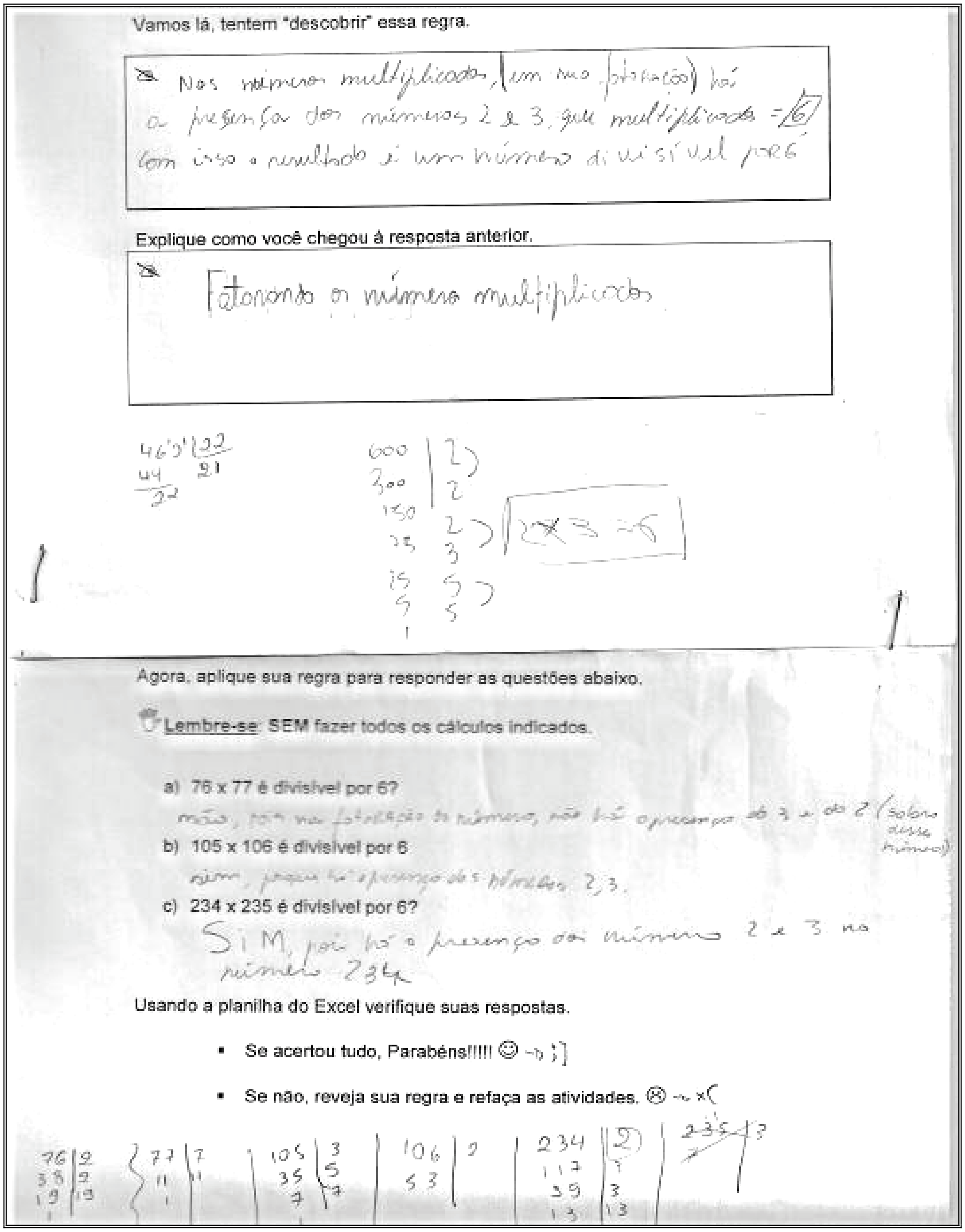
Figura 50: Planilha elaborada pela Dupla A - Atividade 1 – Fase 2

A dupla A conseguiu identificar os números consecutivos que eram múltiplos de 6, selecionando as divisões cujo quociente é um número inteiro. Com o incentivo do professor, resgatou procedimentos do último encontro, decompondo o número 6 em fatores primos (6=2x3).

Observa-se no diálogo estabelecido entre os componentes da dupla A, que haviam compreendido que, tomando dois números consecutivos, um seria par e o outro ímpar. Não mencionaram, porém, a necessidade de que o número ímpar seja múltiplo de 3.

Na elaboração de sua justificativa, a dupla A utilizou o recurso da língua natural conceitual, contendo algumas propriedades do objeto em jogo, o que já era esperado. No nosso entender, podemos considerar esse tipo de argumentação como experimento crucial, segundo Balacheff (1988), pois mediante a particularidade dos fatores primos da decomposição de 6 (6=2x3), logo generalizaram dizendo que o par de números consecutivos multiplicados deveria ser um par e outro ímpar. Esta afirmação indica que o aluno não observou que o fator 2 já está presente no número par. Assim, ou o outro fator (ímpar) deve ser múltiplo de 3, ou o número par deve ser divisível por 2 e 3, simultaneamente.

Na seqüência, apresentamos as respostas apresentadas pela dupla B.


Vamos lá, tentem "descobrir" essa regra.

Nos número multiplicados, (em sua fatoração) há a presença dos números 2 e 3, que multiplicados = $\boxed{6}$ com isso o resultado é um número divisível por 6

Explique como você chegou à resposta anterior.

Fatorando os número multiplicados

$\boxed{2 \times 3 = 6}$

Agora, aplique sua regra para responder as questões abaixo.

Lembre-se: SEM fazer todos os cálculos indicados.

a) 76 x 77 é divisível por 6?

não, pois na fatoração do número, não há a presença do 3 e do 2

b) 105 x 106 é divisível por 6

sim, porque há a presença dos números 2, 3.

c) 234 x 235 é divisível por 6?

SIM, pois há a presença dos números 2 e 3 no número 234

Usando a planilha do Excel verifique suas respostas.

- Se acertou tudo, Parabéns!!!!! ☺
- Se não, reveja sua regra e refaça as atividades. ☹

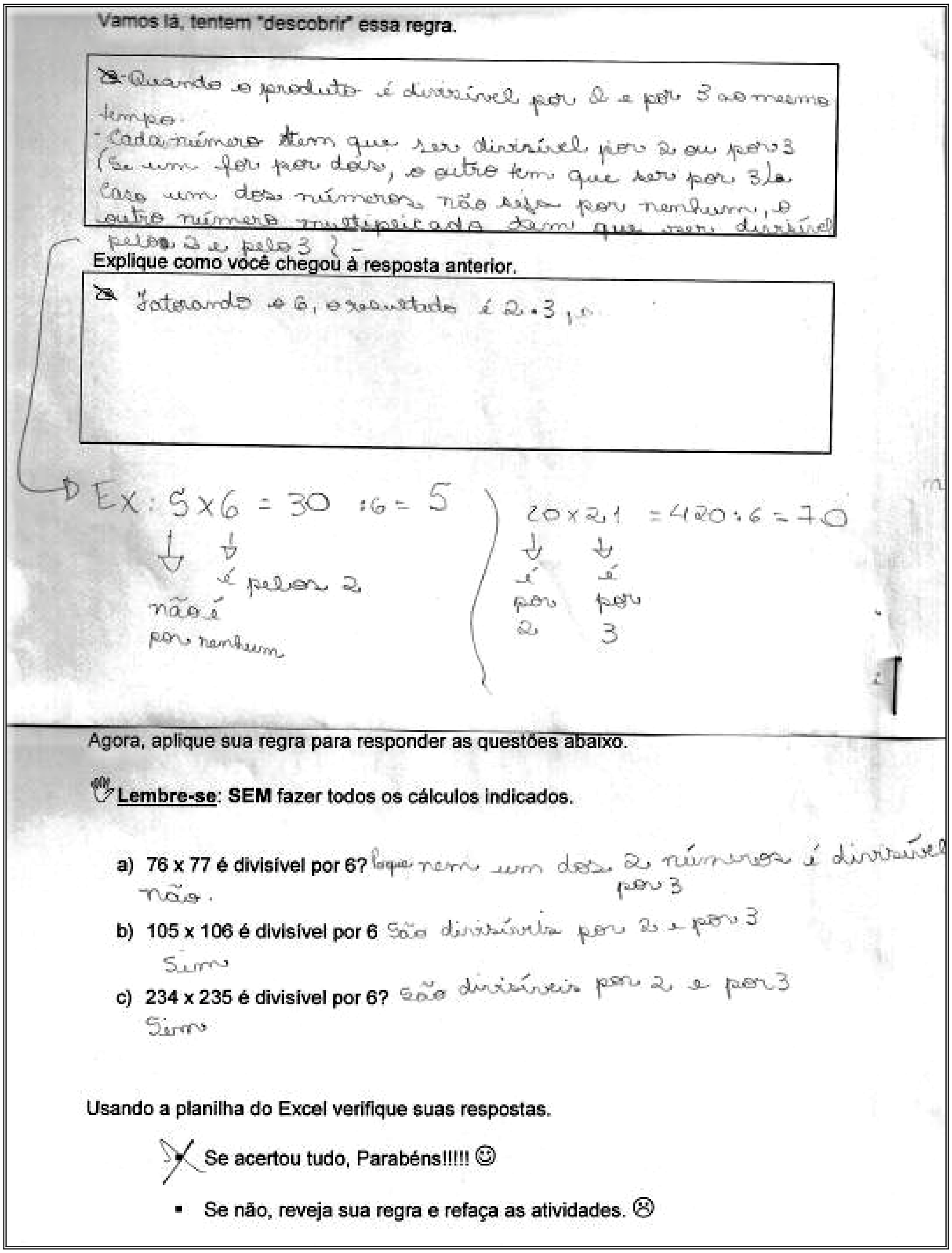
Figura 51: Protocolo da Atividade 1 – Fase 2 – dupla B

Durante o desenvolvimento da atividade, o comportamento da dupla B, não foi diferente do comportamento da dupla A. O professor aplicador incentivou os alunos, exaustivamente, relendo o enunciado da questão para que estes chegassem às respostas apresentadas.

A dupla elaborou corretamente a tabela no Excel, mas efetuou alguns cálculos na folha para obter seus resultados, conforme indica a figura 51. Concluímos, assim, que os objetivos estabelecidos para esta atividade não foram alcançados, ou seja, os alunos repetiram os mesmos procedimentos utilizados na atividade anterior, decompondo o número 6 em fatores primos e finalmente, deixando de expressar a propriedade comum dos pares de números consecutivos multiplicados.

Com base nos tipos de provas propostos por Balacheff (1988), julgamos que a justificativa apresentada por esta dupla pode ser classificada como empirismo ingênuo, expresso em língua natural.

Na figura 52 a seguir, apresentamos os resultados da dupla C, que manteve, em seus procedimentos, o mesmo perfil da dupla B, utilizando a fatoração do número 6 como argumento para a construção de sua justificativa.


Vamos lá, tentem "descobrir" essa regra.

- Quando o produto é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.
- Cada número tem que ser divisível por 2 ou por 3 (Se um for por dois, o outro tem que ser por 3) e Caso um dos números não seja por nenhum, o outro número multiplicado tem que ser divisível pelo 2 e pelo 3 } -

Explique como você chegou à resposta anterior.

Fatorando o 6, o resultado é 2 . 3, ...

Ex: 5x6 = 30 :6 = 5
não é por nenhum — é pelo 2

20x21 = 420 : 6 = 70
é por 2 — é por 3

Agora, aplique sua regra para responder as questões abaixo.

Lembre-se: **SEM fazer todos os cálculos indicados.**

a) **76 x 77 é divisível por 6?** Porque nem um dos 2 números é divisível por 3
não.

b) **105 x 106 é divisível por 6** São divisíveis por 2 e por 3
Sim

c) **234 x 235 é divisível por 6?** São divisíveis por 2 e por 3
Sim

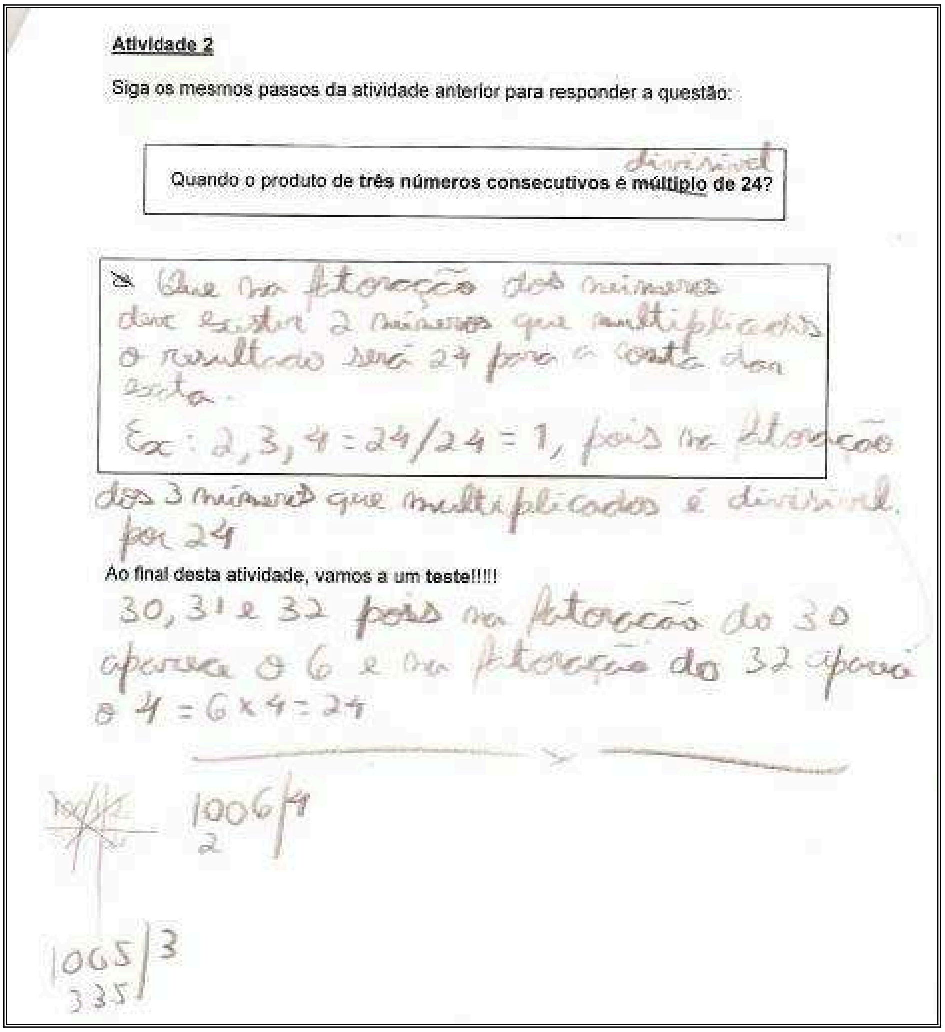
Usando a planilha do Excel verifique suas respostas.

- **Se acertou tudo, Parabéns!!!!! ☺**
- **Se não, reveja sua regra e refaça as atividades. ☹**

Figura 52: Atividade 1 – Fase 2 – dupla C

Notemos que a dupla C apresentou seus argumentos na língua natural e utilizou da particularidade de alguns casos como 5x6=30÷6=5 e 20x21=420÷6=70, para generalizar seus argumentos, ou seja, a regra. Enquadramos essa justificativa como exemplo genérico, de acordo com a classificação proposta por Balacheff (1988).

5.9.2 Análise *a posteriori* - Atividade 2 - Fase 2



Atividade 2

Siga os mesmos passos da atividade anterior para responder a questão:

divisível
Quando o produto de **três números consecutivos** é **múltiplo** de 24?

Que na fatoração dos números deve existir 2 números que multiplicados o resultado será 24 para a conta dar exata.
Ex: 2, 3, 4 = 24/24 = 1, pois na fatoração dos 3 números que multiplicados é divisível por 24

Ao final desta atividade, vamos a um teste!!!!!

30, 31 e 32 pois na fatoração do 30 aparece o 6 e na fatoração do 32 aparece o 4 = 6 x 4 = 24

1006 | 4
2

1065 | 3
335

Figura 53: Protocolo – Atividade 2 – Fase 2 – dupla A

Em suas respostas, a dupla A apresentou justificativas elaboradas de maneira informal, que, segundo a classificação proposta por Balacheff (1988), estão vinculadas aos tipos de provas pragmáticas alicerçadas na língua natural.

Observa-se, nos registros feitos, que, ao explicar os seus argumentos, procedimento importante destacado por De Villiers (2001), a dupla identifica as características que as ternas de números consecutivos devem possuir para que seu produto seja múltiplo de 24. Para essa descoberta buscaram encontrar na decomposição dos números escolhidos, fatores que multiplicados tinham como produto o número 24. Para a elaboração dessa justificativa, foi utilizada a planilha eletrônica exibida na figura 54, que possibilitou uma visão global do comportamento desses números.

	A	B	C	D	E
1	n	n+1	n+2	n*(n+1)*(n+2)	[n*(n+1)*(n+2)]/24
2	1	2	3	6	0.25
3	**2**	**3**	**4**	**24**	**1**
4	3	4	5	60	2.5
5	**4**	**5**	**6**	**120**	**5**
6	5	6	7	210	8.75
7	**6**	**7**	**8**	**336**	**14**
8	**7**	**8**	**9**	**504**	**21**
9	**8**	**9**	**10**	**720**	**30**
10	9	10	11	990	41.25
11	**10**	**11**	**12**	**1320**	**55**
12	11	12	13	1716	71.5
13	**12**	**13**	**14**	**2184**	**91**
14	13	14	15	2730	113.75
15	**14**	**15**	**16**	**3360**	**140**
16	**15**	**16**	**17**	**4080**	**170**
17	**16**	**17**	**18**	**4896**	**204**
18	17	18	19	5814	242.25
19	**18**	**19**	**20**	**6840**	**285**
20	19	20	21	7980	332.5
21	**20**	**21**	**22**	**9240**	**385**
22	21	22	23	10626	442.75
23	**22**	**23**	**24**	**12144**	**506**
24	**23**	**24**	**25**	**13800**	**575**
25	**24**	**25**	**26**	**15600**	**650**
26	25	26	27	17550	731.25
27	**26**	**27**	**28**	**19656**	**819**
28	27	28	29	21924	913.5
29	**28**	**29**	**30**	**24360**	**1015**
30	29	30	31	26970	1123.75
31	**30**	**31**	**32**	**29760**	**1240**

Figura 54: Planilha elaborada pela dupla A – Atividade 2 – Fase 2

O quadro a seguir ilustra o momento de interação dupla/professor durante a resolução da atividade.

Aluna 1: Professor, nós construímos a tabela.

Professor aplicador: Busquem encontrar uma propriedade comum entre os números escolhidos.

Aluno 2: Vamos selecionar os números que dão certo.

Aluno 1: Olha que esquisito um número dá certo, depois pula um para dar certo de novo, pula mais um e depois na seqüência aprecem três números seguidos que dão certos.

Aluno 2: É mesmo porque será. Professor, professor...

Aluno 1: Olha que estranho por que isso acontece?

Professor aplicador: Isso acontece por algum motivo, é isso que o exercício quer que vocês descubram! O que esses três números consecutivos têm em comum, para isso acontecer?

Aluno 2: Vamos tentar descobrir!

Aluno 1: Ah! Olha aqui, o primeiro 2x3x4=24/24=1 deu certo porque apareceu o 24.

Aluno 2: É mesmo vamos pegar um número maior para ver se dá certo?

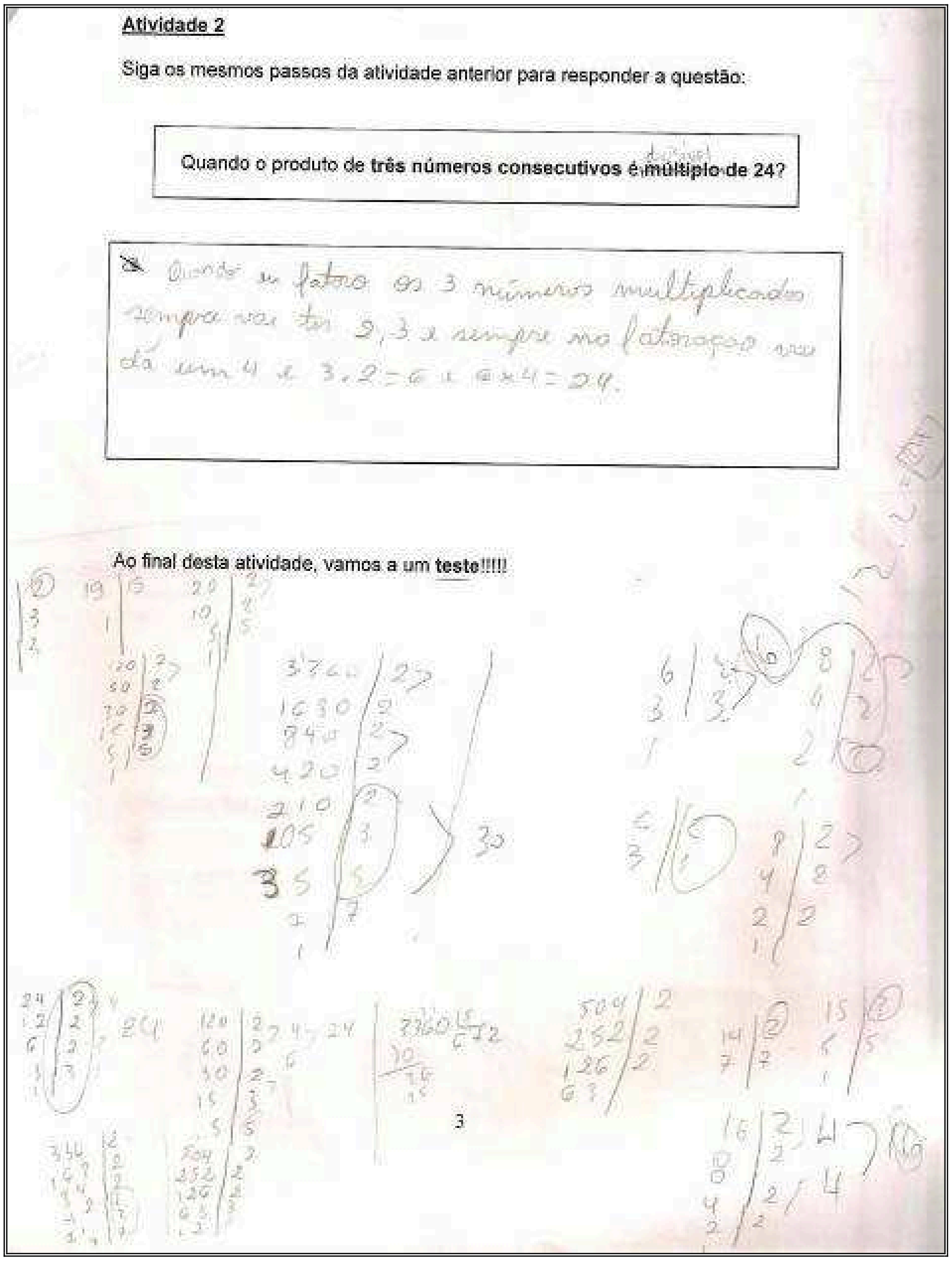
Aluno 1: É isso mesmo, olha na tabela o 30, 31 e 32 deu certo, pois na fatoração do 30 aparece o 6 e na fatoração do 32 aparece o 4 e 6x4=24.

Aluno 2: Professor está correto a nossa resposta?

Quadro 08: Interação: dupla A e professor - Atividade 2 - Fase 2.

Analisando os diálogos do quadro acima, observa-se que a dupla A, continuou dependendo do auxilio do professor para elaborar suas respostas. É importante notar que nesta última atividade eles não apresentaram cálculos – centraram-se na análise dos números escolhidos, conseguindo explicitar uma justificativa com mais propriedade em relação às demais.

Quanto à dupla B, mesmo com o incentivo e auxílio do professor durante a resolução da atividade, ainda apresentou os cálculos, conforme se observa na figura 55, a seguir.


Atividade 2

Siga os mesmos passos da atividade anterior para responder a questão:

Quando o produto de **três números consecutivos** é **múltiplo de 24?**

Quando se fatora os 3 números multiplicados sempre vai ter 2,3 e sempre na fatoração vai dá um 4 e 3.2=6 e 6x4=24.

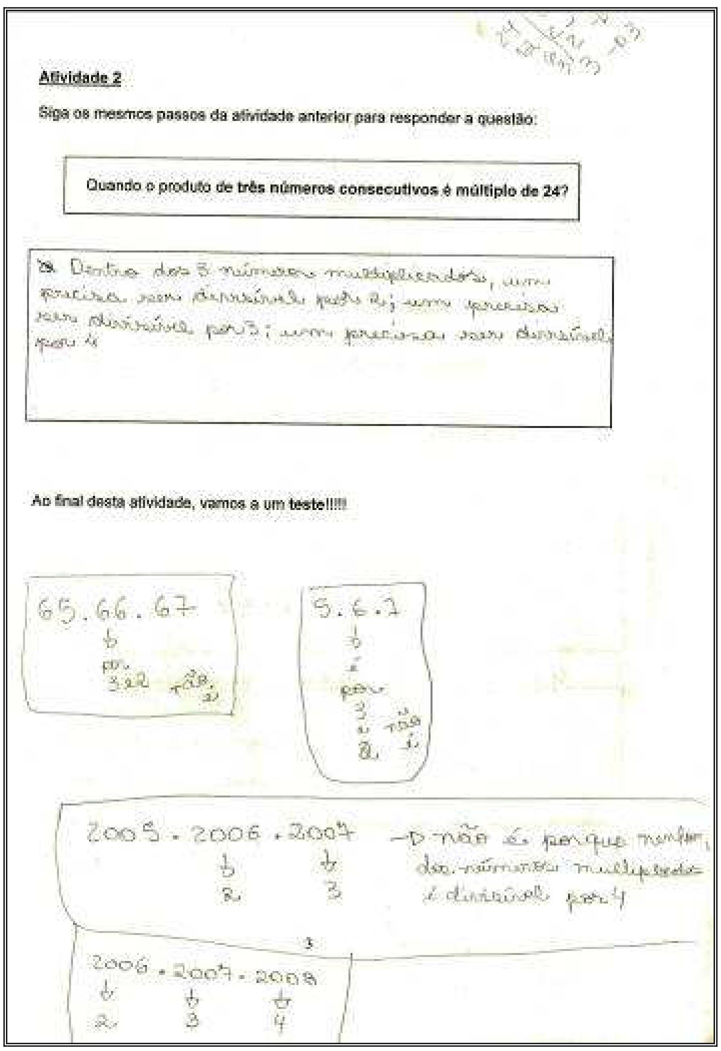
Ao final desta atividade, vamos a um **teste!!!!!**

Figura 55: Protocolo – Atividade 2 – Fase 2 - dupla B

Os cálculos apresentados pela dupla B nos levaram a concluir que esta não apresentou um crescimento significativo em relação à atividade anterior. Os alunos descobriram que os números escolhidos deveriam conter os números 6 (2x3) e 4 em sua decomposição em fatores primos, para que o produto fosse divisível por 24, mas, elaboraram uma argumentação confusa e informal, baseada no empirismo ingênuo, repetindo o mesmo tipo de prova que apresentaram durante todo experimento.

Quanto à dupla C, avaliamos que houve um avanço em relação ao seu desempenho na resolução da atividade anterior. Em seus registros, observa-se que, para elaborar as conclusões, não se apoiaram em cálculos e sim na análise dos dados obtidos com o auxílio da planilha eletrônica.

O protocolo exibido a seguir contém as conclusões elaboradas pela dupla C.



Atividade 2

Siga os mesmos passos da atividade anterior para responder a questão:

Quando o produto de três números consecutivos é múltiplo de 24?

Dentro dos 3 números multiplicados, um precisa ser divisível por 2; um precisa ser divisível por 3; um precisa ser divisível por 4

Ao final desta atividade, vamos a um teste!!!!!

65 . 66 . 67

5 . 6 . 7

2005 . 2006 . 2007 → não é porque nenhum dos números multiplicados é divisível por 4

2006 . 2007 . 2008

Figura 56: Protocolo – Atividade 2 – Fase 2 - dupla C

Nesse protocolo, observamos que a dupla C buscou na fatoração do número 24 ($24= 2^3x3$), elementos para verificar que propriedades deveriam ter os três números consecutivos para que seu produto fosse múltiplo de 24. Conseguiu, assim, atingir o objetivo esperado para a atividade, encontrando uma regularidade pertinente, explicitando seu argumento na língua natural.

É importante destacarmos que os alunos apresentaram as justificativas para atividade 2 seguindo todos a mesma linha de raciocínio, não mencionando outras possibilidades, ou seja, os alunos não concluíram, de forma mais geral, explicitando que, na fatoração dos três números consecutivos escolhidos, devem aparecer os fatores: 2^3 e 4 que poderiam aparecer em apenas um dos números escolhidos. Por exemplo: 24 25 e 26.

É importante registrar que a participação o professor foi imprescindível para a realização desta fase do experimento, fato que apresentaremos com maior riqueza de detalhes, na conclusão final deste trabalho.

CONCLUSÃO

6.1 Introdução

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de elaborar, aplicar e avaliar uma seqüência didática destinada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, tendo como objeto de estudo o ensino-aprendizagem de provas em Matemática, por meio de uma abordagem das noções de múltiplos e divisores de números inteiros, com o auxílio de uma ferramenta computacional.

Teoricamente, alicerçamos nosso trabalho em dois estudos que exploraram esse tema sob diferentes óticas: o trabalho de Balacheff (1988) sobre os tipos de prova e classificação por níveis e o estudo de De Villiers (2001) que apresenta os papéis e funções da prova. Levamos em conta também as sugestões apresentadas nos PCN (1998) a respeito do desenvolvimento de atividades que estimulem os alunos a formular argumentações e conjecturas, explicitando seus raciocínios.

Com base nesse referencial teórico, esta pesquisa busca alternativas para trabalhar com provas na educação básica, levando em conta o nível de conhecimento dos alunos nesta etapa de escolaridade e não focalizando o ponto e vista meramente formal. Visamos, desta forma, fazer uma abordagem mais ampla da atividade de provar na Matemática da sala de aula, levando em conta o processo de elaboração de conjecturas e hipóteses, de experimentação e argumentação.

A fase de experimentação foi aplicada a sete duplas de alunos do 9º ano do ensino fundamental, assistidos pelo professor pesquisador e por uma professora observadora, nas dependências do laboratório de informática. As duplas se apresentaram de maneira espontânea após convite aberto à classe envolvida, e apenas três duplas cumpriram todas as etapas do experimento. Toda a fase experimental foi realizada em uma escola particular de ensino situada no Estado de São Paulo na cidade de Lorena, Vale do Paraíba.

O recurso tecnológico utilizado na realização das atividades foi o Excel, que não ofereceu grandes dificuldades para as duplas, visto que os alunos possuíam microcomputador em casa todos já tinham visto o software, mas não haviam manipulado da maneira requerida para o experimento efetuado. O papel do Excel no experimento foi propiciar aos alunos a possibilidade de testar e verificar seus argumentos, apoiados na análise de seqüências numéricas elaboradas com o auxílio de planilhas eletrônicas.

Com a realização deste experimento, pretendíamos responder à seguinte indagação:

É possível desenvolver uma seqüência didática, com o auxílio de uma ferramenta tecnológica, de tal forma que o aluno se sinta desafiado a explicitar seus argumentos e validar suas respostas?

6.2 Principais resultados

O experimento foi realizado em três fases, cada qual com objetivos específicos, a fim de propiciar aos alunos as condições necessárias para avançar para a fase seguinte, como explicitaremos:

Na fase 0, o objetivo de nosso estudo era familiarizar os alunos com o Excel, explorando as noções matemáticas: “ser múltiplo de” e “ser divisível por”. Foi constatada uma dificuldade inicial de manipulação das ferramentas do software, para a construção das primeiras fórmulas. Sendo superada rapidamente após as projeções, em uma tela, dos comandos necessários para a construção das fórmulas.

Nas atividades que exploram as noções de múltiplos e divisores de números inteiros, constatamos que o objetivo foi atingido parcialmente, visto que, embora as duplas houvessem demonstrado algum conhecimento sobre as noções de múltiplos e divisores de números inteiros, apresentaram dificuldades ao explicitar seus argumentos.

Por exemplo, a resposta apresentada pela dupla B, à questão: *Quando um número é múltiplo de outro?* demonstra certa confusão, pois apresenta de maneira incorreta, os divisores de 12 (*12={1,2,3,4,6,12})*. É possível que os alunos tenham considerado o fato de que 12 é divisível por 1, 2, 3, 4 e 6.

O mesmo não aconteceu com a noção de número divisível por outro, em que as duplas expressaram seus argumentos em língua natural e empiricamente, em nível de prova pragmática, como revela o argumento apresentado pela dupla A (figura: 27): *"Quando o quociente é exato". "Ex.: 32: 4=8"*.

Mediante o comportamento das duplas que não conseguiram expressar corretamente suas idéias em relação à noção de múltiplos de números inteiros, realizamos um momento de intervenção para que a próxima fase transcorresse com sucesso.

O objetivo da fase 1 era levar os alunos a desenvolver suas primeiras tentativas de validação e explicitação de conjecturas elaboradas com o auxílio do recurso tecnológico. Ou seja, sem efetuar os cálculos, os alunos deveriam analisar as propriedades em jogo e fazer generalizações. Analisando as respostas apresentadas pelas duplas, podemos observar que não tendo destacado no enunciado que não era permitido efetuar os cálculos, comprometemos o objetivo estabelecido para estas atividades. Dessa forma, as duplas se apoiaram em cálculos com lápis e papel para expressar seus argumentos, mas mesmo assim percebemos nas respostas apresentadas pela dupla A na atividade 2 desta fase, que conseguiu atingir o objetivo, identificando a regularidade necessária aos números escolhidos, que multiplicados por 4, se tornariam divisíveis por 12. A dupla não justificou suas conclusões, porque o pedido de justificativa não estava explícito no enunciado da atividade.

Constatamos a necessidade de realizar uma intervenção, pois as dúvidas demonstradas pelos alunos poderiam comprometer a realização do experimento. Na seqüência, refizemos a fase 1, na tentativa de atingir o resultado esperado.

Após a intervenção, observou-se um avanço significativo, na elaboração de argumentos e justificativas e consideramos que nosso objetivo foi alcançado.

Esperávamos que, com o auxílio das planilhas eletrônicas, os alunos observassem regularidades, desenvolvessem provas pragmáticas representadas na língua natural, generalizando o seu resultado. Constatamos que as duplas A e C conseguiram atingir o objetivo estabelecido para esta fase. Já a dupla B atingiu apenas uma parte do objetivo, visto que ainda realizava cálculos com lápis e papel para elaborar as justificativas de seus argumentos.

Notamos que, de maneira geral, todas as justificativas apresentadas pelas duplas se mantiveram no quadro de provas pragmáticas empíricas, representadas em língua natural, como descrito por Balacheff (1988).

Apenas a dupla C apresentou uma tentativa de generalização que, segundo nosso ponto de vista, pode ser classificada como prova mista. Esse procedimento faz parte da transição da prova pragmática para a prova conceitual segundo Balacheff (1988).

Com relação ao processo de apresentação dos argumentos, verificamos que as conjecturas e validações explicitadas empiricamente pelos sujeitos de nosso estudo não diferem dos resultados apresentados por Santos (2007) que analisou as questões A3 e A4 do questionário de Álgebra do projeto AProvaME, que serviram de base para a formulação de nossas atividades :

> *Como visto nas questões estudadas, o processo de justificativa é basicamente feito com exemplos empíricos, sem a construção de argumentações válidas, com estruturas matemáticas bem definidas. Na questão A3, tivemos 55,76% das justificativas apresentadas nessas condições e na questão A4 27,53% das justificativas de maneira empírica (Santos, 2007, p. 121-122).*

Dessa forma, concluímos que nossas atividades, em relação à elaboração de justificativas e argumentações dos alunos, não revelaram resultados diferentes das pesquisas já realizadas com o mesmo propósito.

Na aplicação do *refazendo a fase 1*, os alunos deram um salto qualitativo importante, descrevendo justificativas, considerando mais as propriedades dos números, isentando-se dos cálculos e apresentando provas pragmáticas empíricas com maior freqüência em relação às fases anteriores.

6. 3 Considerações finais

Durante a realização de nossa pesquisa, percebemos a importância de desenvolver e aplicar seqüências didáticas envolvendo a prova matemática com uma abordagem construtiva. Pudemos constatar que não só os alunos apresentam dificuldades durante a realização do experimento – como revelaram as respostas dos sujeitos –, mas também os professores encontram dificuldades na elaboração e aplicação, quando buscam tornar significativo este tipo de atividade para o aluno.

O professor aplicador desempenhou o papel de mediador ativo, ajudando os alunos neste momento difícil de ruptura dos esquemas tradicionais de atividades matemáticas. As atividades que aplicamos exigem que o aluno perceba as propriedades numéricas envolvidas na questão e desta maneira desenvolva habilidades para elaborar suas validações.

Trabalhar com prova requer uma atenção minuciosa do professor, para deixar claro ao aluno que ele é agente da construção do seu conhecimento como sugerem os PCN (1998). Pudemos vivenciar esse fato quando aplicamos o *refazendo a fase 1*, assumindo a postura de professor mediador ativo, incentivando os alunos a expressarem seus raciocínios e transferindo-lhes a responsabilidade de elaborar suas respostas. Conseqüentemente, obtivemos os primeiros resultados significativos quando os alunos começaram apresentar provas conceituais, abandonando, um pouco, as provas pragmáticas empíricas.

Finalmente, acrescentamos que quando ingressamos no curso de Mestrado, tínhamos alguns anseios de saber como trabalhar atividades desafiadoras em nosso dia-dia com as ferramentas tecnológicas, a fim de aprimorar nossa prática docente.

Com a participação no projeto AProvaME, descobrimos e vivenciamos possibilidades reais de como abordar esses tipos de questões desafiadoras, constatando que é possível elaborar e propor questões que estimulem os alunos da educação básica no estudo de provas.

Encerramos nossas observações ressaltando a fundamental importância do papel do professor no ensino de provas em virtude das dificuldades dos alunos. Este fato aumenta a nossa responsabilidade de estar sempre engajados em desenvolver novas pesquisas, registrar e divulgar experiências que apontam para novas posturas que viabilizem o ensino de provas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHEEF, N. Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18 (2), p. 147-176, 1987

__________. Aspecto f proof in pupil's practice of school mathematics. Pimm, D. (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children.* London: Hodder and Stoughton, 1988. p. 216-235.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* matemática: ensino de 5ª a 8ª séries. Brasília, 1998.

CARVALHO, M. B. *Concepções de alunos sobre provas e argumentos matemáticos: análise de questionário no contexto do projeto AProvaME.* 2007. 138f. Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

DE VILLIERS M., Na alternative approach to proof in dynamic geometry In: Lehrer, R.; Chazan, D. (Ed). *New direction in teaching and learning Geometry.* P. 369-393, 1998.

___________. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad.* Revista Educação e Matemática, nº. 63, APM. Portugal. p. 33-36, June,2001.

DORO, A. T., *Argumentação e prova: Análise de argumentos geométricos de alunos de educação básica.* 2007. 117f. Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas. Autores associados (Coleção Formação de Professores), 2006.

GRAVINA, M. A., *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo.* 2001. 274f. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre.

HEALY, S. V.; HOYLES, C. A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 31, n. 4, p. 396-428, 2000.

LEANDRO, E. J., *Um panorama de argumentação de alunos da escola básica: o caso do factorial.* 2006. 139f. Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo.

NASSER, I; TINOCO, L. (Coord.) (2001). *Argumentação e provas no ensino de matemática.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ – Projeto Fundão.

PIETROPAOLO, R. C., *(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.* 2005. 388f. Tese de Doutorado – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, J. B. S., *Argumentação e prova: análise de argumentos algébricos de alunos de educação básica.* 2007. 145f. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo.

VAZ, R. L., *O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração.* 2004. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo.

ANEXO 1

Projeto AProvaME

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico

Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME)

Siobhan Victoria Healy (coord.)

Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM)

Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática

PUC/SP

1. Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validar conhecimento que contrasta com indução natural de processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, pode-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país. A título de ilustração, enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência para argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento (Healy e Hoyles, 2000; Lin, 2000). Ainda que tais estudos possam inspirar conjecturas referentes às concepções de prova de alunos brasileiros, esse contexto carece de um mapeamento preciso de tais concepções, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados: O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem. Neste enfoque, pretendemos investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições. Uma questão que se coloca é, então, como esta experiência com o computador influencia na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma outra questão recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação da inovação pelo professor.

2. Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.
3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

3. Metodologia e Estratégia de Ação

O projeto será organizado em duas fases, a primeira envolve um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiarão a segunda fase, na qual o foco será na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Além da equipe de pesquisadores, 15 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP (com população atual de 86 mestrandos) integrarão a equipe como *professores-colaboradores*, devendo participar de ambas as fases.

FASE 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos será um questionário a ser aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do estado da São Paulo. Inicialmente, cada professor-colaborador participante terá a incumbência de indicar de 6 a 10 turmas, e a partir daí, a amostra será determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual será criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto, o que será de responsabilidade de um dos pesquisadores. Além disso, ao longo da Fase 1, serão realizados encontros de trabalho presencial, com freqüência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores.

O questionário acima citado (denominado Q1) será elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreenderia itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplarão dois domínios matemáticos – Geometria e Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. Cabe destacar que o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988) fundamenta a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário. Concomitante à aplicação do questionário junto aos alunos, os professores de Matemática de cada turma responderão a um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de Q1, compreenderá questões sobre a Escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados serão organizados e classificados pela equipe de professores-colaboradores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.). Esse conjunto de dados terá uma estrutura hierárquica – alunos em turmas, em escolas e em regiões – e serão analisados segundo a construção de um modelo multi-nível (*Multi-level Modelling*) para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Goldstein, 1987). Os resultados dessas análises fornecerão um mapa das concepções dos alunos e como estas variam em relação a fatores individuais e escolares, baseados nos dados obtidos em Q2. Essa análise permitirá uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos, tanto aquelas que são contempladas no ensino atual, quanto aquelas que merecem maior atenção. A identificação desse segundo grupo servirá como base para o trabalho na fase 2, descrito na seqüência.

FASE 2

Esta fase contemplará dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem, o objetivo principal é a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltará ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que essas situações serão propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia nesta fase carateriza-se como *design-based research* (Cobb et al., 2003). Segundo esses autores, os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia planejada para essa fase compreenderá um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores (cf. amostra da Fase 1). Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguirá um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo deverá desenvolver situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Estes dois ambientes foram selecionados por serem familiares ao grupo de professores-colaboradores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Ao longo dessa fase, os grupos estarão reunindo-se semanalmente, alternando encontros presenciais e a distância, esta última modalidade possibilitada pelo espaço virtual criado na Fase 1.

1ª Etapa

Na primeira etapa do *design* (etapa intra-grupos), as situações serão elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Essas discussões e adaptações serão realizadas com base na análise das interações alunos/computadores, considerando quais aspectos de prova são favorecidos, ou ainda, a quais concepções estes aspectos estão relacionados. Para essa análise, serão coletados os seguintes dados: áudio-gravação dos diálogos entre os sujeitos envolvidos (professores, pesquisadores e alunos) e produções escritas e computacionais dos alunos. Além disso, em relação ao eixo de ensino, cada professor-colaborador construirá seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações no grupo. Essa documentação elaborada pelos professores fornecerá os dados referentes aos seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo (Shulman, 1987), no caso sobre a prova em Matemática, cuja análise buscará identificar transformações nesses conhecimentos.

2ª Etapa

Dando seqüência a esse processo de elaboração das situações, em uma segunda etapa (inter-grupos), as produções de cada grupo serão disponibilizadas no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador possa desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em Geometria e outra em Álgebra), em uma de suas turmas. A aplicação dessa atividade em classe será acompanhada e observada pelos pesquisadores e a sessão será vídeo-gravada para posterior análise. Novamente, as produções (escritas e computacionais) dos alunos serão coletadas. Além de categorizar os aspectos de prova que emergem nas interações alunos/computadores durante essas aplicações, o vídeo permitirá destacar as ações do professor e, em particular, os aspectos de prova privilegiados em suas intervenções. Após cada aplicação, professores-colaboradores e pesquisadores serão incumbidos de um relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre os resultados, os objetivos atingidos e as dificuldades ou problemas enfrentados. Esses relatórios serão também disponibilizados no espaço virtual do projeto visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações, complementações etc. das situações de aprendizagem.

3ª Etapa

Na terceira e última etapa de *design*, os dados a serem coletados em relação ao eixo de aprendizagem referem-se às respostas dos alunos participantes na Fase 2 ao questionário elaborado na Fase 1 (Q1). Essas respostas serão organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, será comparado àquele resultante da Fase 1. Para tanto, os encontros dos grupos colaborativos nessa etapa serão dedicados à avaliação das situações de aprendizagem tratadas, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes na Fase 2; quais características de prova que ainda necessitam de investimentos numa perspectiva de progressão.

4. Outros Projetos Financiados Atualmente

A pesquisadora que coordenará esse projeto, assim como os demais pesquisadores do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados não cotam, no momento, com projetos financiados por agências de fomento.

5. Principais Referências Bibliográficas

ALEKSANDROV, A. (1963). A General View of mathematics. In A. Aleksandrov, A. Kolmogorov, & M. Lavrent'ev (Eds.) *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (pp. 1-64). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (Eds.*) Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*.: *Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER , R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 9-13.

GARNICA, A. V. M. (1997). Da literatura sobre a prova rigorosa na Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*. APM-Portugal: 5(1), pp. 29 – 60.

GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática Bolema*. Rio Claro (SP): 15(18), pp.91 – 99.

GOLDSTEIN, H. (1987). *Multilevel models in educational and social research*. London: Griffin.

HEALY, S. V. (L.) (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri construction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima: Hiroshima University.

HEALY, S. V. (L.), & HOYLES, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report , University of London, Institute of Education.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES, C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235-256.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.

LIGHT, P., GIROTTO, V., & LEGRENZI, P. (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, 5, pp. 369-383.

LIN, F.-L. (2000). An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 84-89. Hiroshima: Hiroshima University.

MARIOTTI; M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), pp. 283-317.

TALL, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

THURSTON, W. H. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Monthly*, 30 (2, April), pp. 161-177.

VAZ, R e HEALY, L. (2003) Transformações geométricas do Cabri-géomètre: uma abordagem alternativa para prova? *II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos: SBEM.

WASON, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth, UK: Penguin Books.

WU, H. (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1).

ANEXO 2

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:.......................................

Data de nascimento: .... Data de hoje:...............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma dentre várias respostas.

Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente justificar da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

escola	
turma	
aluno	

Projeto AprovaMe

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4$ $4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$ $4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$ $4 + 6 = 10$

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

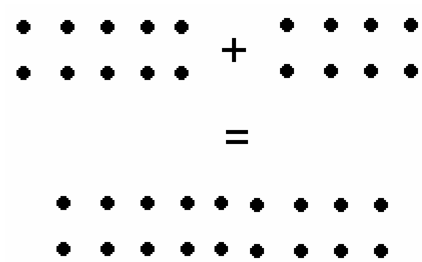
Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai

ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando se soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?

Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?

Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:..

Data de nascimento: .... Data de hoje:...............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma dentre várias respostas.

Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente justificar da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

escola

turma

aluno

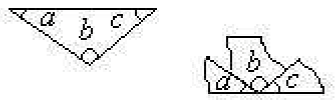
Projeto AprovaMe

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

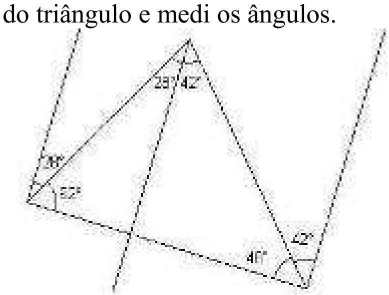
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180º.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

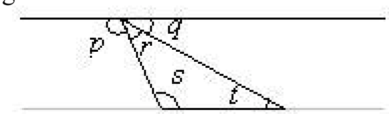
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



(90º – 28º) + 28º + 42º + (90º – 42º) = 180º *Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira*

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

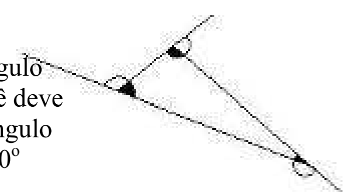


Afirmações	Justificativa
$p = s$..........................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^o$..........	Ângulos numa linha reta.

$\therefore s + t + r = 180^o$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360º. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta.
Isso faz um total de 540º. 540º – 360º = 180º.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer,
o resultado é sempre 180º

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos..		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer,
o resultado é sempre 180º.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

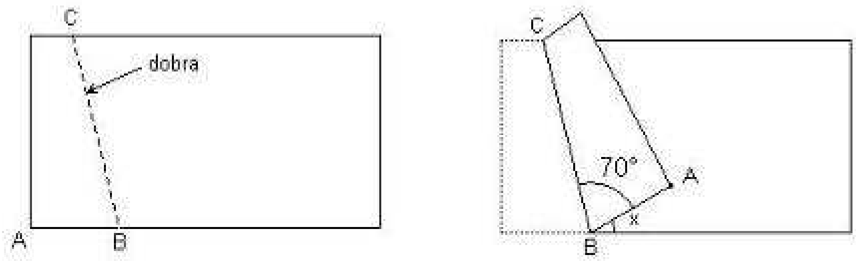
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Quando se soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer,
o resultado é sempre 360º.

Minha resposta:

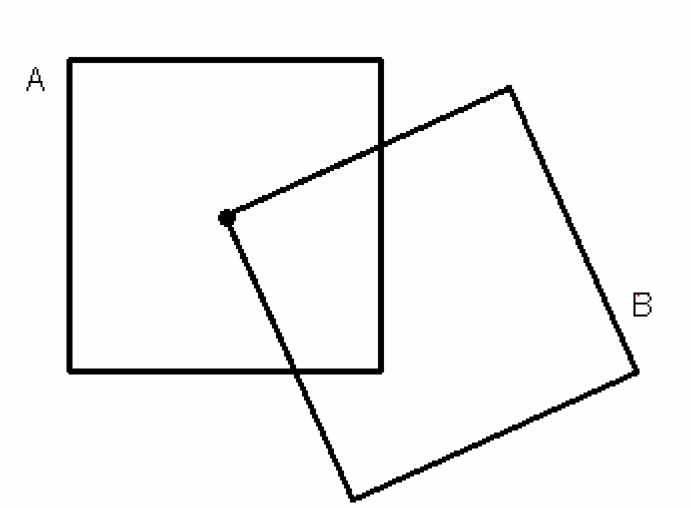
G4: **Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.**



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

ANEXO 3

Seqüência Didática - Fase 0

Nome: ____Idade: ____________

Nome: ____Idade: ____________

ATIVIDADES

Atividade 1

Sendo $a \in z$ e $b \in z$, determine $a+b \in z$ em uma planilha do Excel.

1º) Abra uma planilha no Excel. Na célula A1, digite a; na célula B1, digite b; na célula C1, digite $a+b$ (conforme exemplo abaixo).

	A	B	C
1	a	b	a+b
2			
3			
4			
5			

2º) Para criar nossa primeira fórmula, existem dois caminhos:

- Na célula C2, digite =A2+B2, finalizando clicando fora da célula C2.
- Digite = em C2, e em seguida clique em A2 digite +, clique em B2 e finalizar digitando Enter.

	A	B	C
1	a	b	a+b
2			=A2+B2
3			
4			
5			

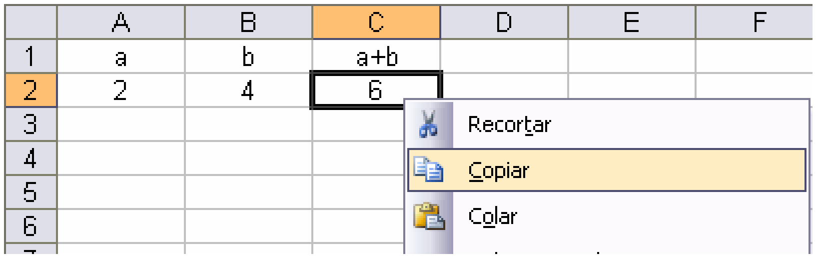
3º) Testando a fórmula. Na célula A2, digite 2; na célula B2, digite 4; selecione a célula C3 e verifique o resultado.

	A	B	C
1	a	b	a+b
2	2	4	6
3			
4			
5			
6			

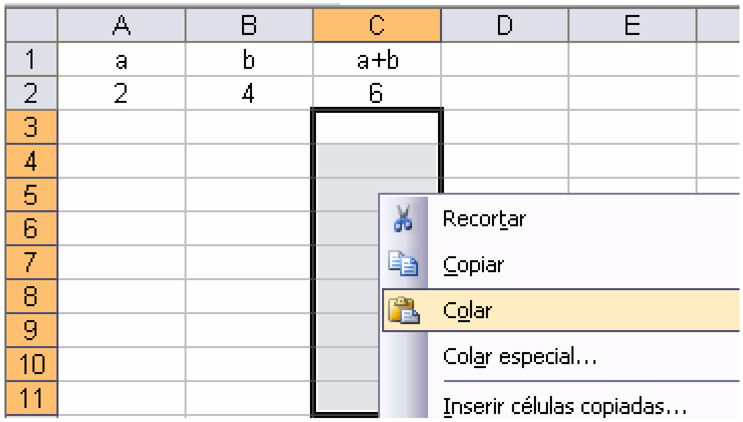
4º) Agora, crie uma tabela contendo pelo menos 20 somas.

Para isso:

a) Selecione a célula C2 clicando o mouse com o botão direito e selecionando o comando copiar.



b) Selecione as células pertencentes, a coluna $a+b$ de C3 a C11, clicando o botão direito do mouse selecione colar.



5º) Teste atribuindo valores para a e b, e verifique se a soma está correta.

	A	B	C
1	a	b	a+b
2	2	4	6
3	3	5	8
4	-10	15	5
5	-17	500	483
6	1024	-3254	-2230
7	15	-2457	-2442
8	10	44	54
9	-53	98	45
10	90	-100	-10
11	12	1	13

Comente esta atividade : ____

____

____

____

Atividade 2

Sendo n um número natural, então o número consecutivo de n é ________.

Crie uma tabela utilizando o Excel, tendo uma coluna de números naturais e outra coluna com seus respectivos consecutivos.

1º) Vamos atribuir títulos às colunas A e B, digitando n em A1 e seu consecutivo em B1.

	A	B
1	n	
2		
3		
4		
5		

Consecutivo de n.

Atividade 3

Utilizando a tabelas de números consecutivos que você criou na atividade 2, crie uma coluna com o produto desses números.

	A	B	C
1	n		
2	1	2	
3	2	3	
4	3	4	
5	4	5	
6	5	6	
7	6	7	
8	7	8	
9	8	9	
10	9	10	
11	10	11	
12	11	12	
13	12	13	
14	13	14	
15	14	15	
16	15	16	
17	16	17	
18	17	18	
19	18	19	
20	19	20	

Produto dos números consecutivos.

Consecutivo de n.

Comente esta atividade: ____

____

____

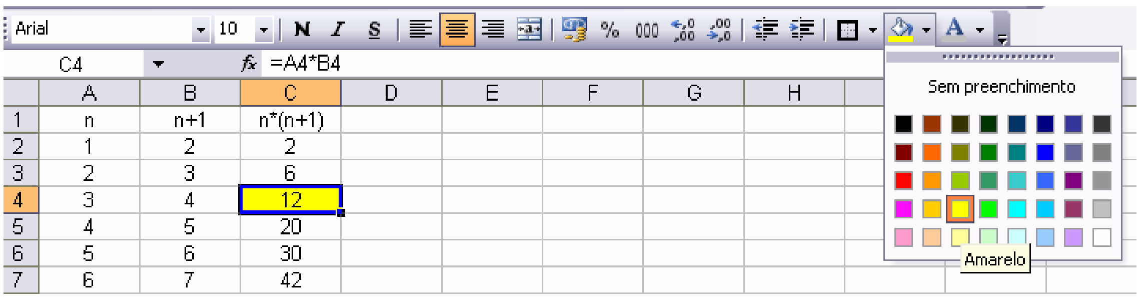
____

Atividade 4

- Quando um número é múltiplo de outro? Explique e dê exemplos.

Usando a tabela da atividade anterior pinte, na coluna C, os números que você considera múltiplos de 4.

1º) Para pintar uma célula, basta selecioná-la e, em seguida, utilizar a ferramenta preencher conforme exemplo abaixo.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	n+1	n*(n+1)					
2	1	2	2					
3	2	3	6					
4	3	4	12					
5	4	5	20					
6	5	6	30					
7	6	7	42					

- Quando um número é divisível por outro? Explique e dê exemplos.

- Quando um número (diferente de zero) é múltiplo de outro, podemos também dizer que ele é divisível? Por quê?

2º) Crie na célula D1, uma fórmula utilizando a divisão para verificar se os preenchimentos das células que você considerou múltiplos de 4 estão corretos.

3º) Agora observe os números destacados e verifique os produtos que os originaram. O que podemos observar?

Comente esta atividade:____

____

____

____

Atividade 5

O menor número múltiplo comum entre dois números diferente de zero, é chamado de: ___________________.

1º) Crie uma tabela no Excel, contendo 3 números naturais quaisquer, encontre o m.m.c. e explique como você deu para encontrou o m.m.c. desses números.

____

____

____

Atividade 6

Seja n um número natural. Seu maior divisor é ______________.

Objetivo: Verificar que o maior divisor de um número é o próprio número.

1º) Crie uma tabela com:

- Coluna A, números consecutivos e nomeia de n.
- Coluna C, divisores de 12 e nomeia de $D(12)$.
- Coluna D, divisores de 15 e nomeia de $D(15)$.
- Coluna E, divisores de 27 e nomeia de $D(27)$.
- Coluna F, divisores de 30 e nomeia de $D(30)$.

2º) Preencha, com cores diferentes, as células com os divisores de cada número da tabela.

3º) Existem números que sejam divisor ao mesmo tempo de 12, 15,27 e 30, na coluna n.

4º) Se existe, preencha a célula do maior desses números.

5º) Como nomeamos esse número?_______________

Comente esta atividade: ____

____

____

____

Atividade 7

Nessa atividade você ira elaborar uma fórmula matemática ***secreta***, e outras duplas tentarão descobrir. A sua ***fórmula secreta*** só poderá conter as 04 operações (+, -, *,/) e potência (^), e deverá apresentar uma resposta na coluna B quando digitar qualquer número natural na coluna A.

No final, anote a fórmula secreta inventada pela dupla.

Dupla __________

Fórmula: ________________________________

Comente esta atividade: ____
____
____
____

ANEXO 4

Seqüência Didática - Fase 1

Nome: ____Idade: ______

Nome: ____Idade: ______

Data: ______/________/2007

<u>Fase 1</u>

<u>ATIVIDADES</u>

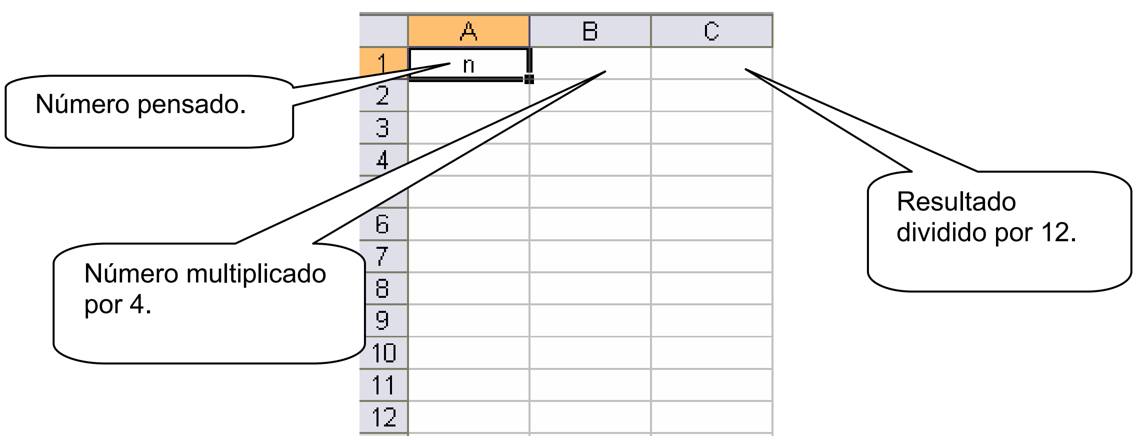
<u>ATIVIDADE 1</u>

- Pense em um número: __________
- Multiplique por 4: _______________
- Verifique se o resultado é divisível por 12.

( ) Sim, pois____

( ) Não, por que____

Para auxiliar nas respostas dos itens abaixo, você pode usar uma planilha Excel. Assim, construa uma tabela que contenha as operações realizadas.



Analise cada item e responda:

a) 24 x 4 é divisível por 12?

Justifique: ____

b) 16 x 4 é divisível por 12?

Justifique: ____

c) 60 x 4 é divisível por 12?

Justifique: ____

d) 33 x 4 é divisível por 12?

Justifique: ____

e) 24 x 4 é divisível por 12?

Justifique: ____

Descubra, pelo menos, outros 5 números que multiplicados por 4 são divisíveis por de 12.

a) ______x 4 divisível por 12

b) ______x 4 divisível por 12

c) ______x 4 divisível por 12

d) ______x 4 divisível por 12

e) ______x 4 divisível por 12

Agora, observe as respostas e tente descobrir o que esses números têm em comum.

____

____

____

____

ATIVIDADE 2

Nesta atividade, ***não*** é permitido o uso do Excel, nem de calculadora.

Analise e responda:

63 x 7 é divisível por 14? Justifique sua resposta.

____

____

____

322 x 7 é divisível por 14? Justifique sua resposta.

____

____

____

Encontre quatro números que multiplicados por 7 são múltiplos de 14.

a) ______________________________________

Justifique: ____

b) _______________________________________

Justifique: ____

c) ____

Justifique: ____

d) ____

Qual propriedade comum estes números apresentam?

____

ANEXO 5

Seqüência Didática - Fase 2

Nome: ____ Idade: ______

Nome: ____ Idade: ______

Data: ______/________/2007

Fase 2

ATIVIDADE 1

Vamos tentar responder a seguinte questão:

Quando o produto de **dois números consecutivos** é **múltiplo de 6**?

Para isso, crie uma planilha no Excel, como fizemos nas atividades anteriores.

Queremos “descobrir” uma regra para, dados dois números consecutivos quaisquer, decidir se o produto deles é divisível por 6, **SEM fazer os cálculos**.

Vamos lá, tentem “descobrir” essa regra.

Explique como você chegou à resposta anterior.

Agora, aplique sua regra para responder as questões abaixo.

✋ **Lembre-se**: **SEM** fazer todos os cálculos indicados.

a) 76 x 77 é divisível por 6?

b) 105 x 106 é divisível por 6

c) 234 x 235 é divisível por 6?

Usando a planilha do Excel verifique suas respostas.

- Se acertou tudo, Parabéns!!!!! ☺
- Se não, reveja sua regra e refaça as atividades. ☹

Atividade 2

Siga os mesmos passos da atividade anterior para responder a questão:

Quando o produto de **três números consecutivos** é **múltiplo de 24**?

✍

Ao final desta atividade, vamos a um **teste**!!!!!