PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Salete Rodrigues

Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com o auxílio do programa Aplusix

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Salete Rodrigues

Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com o auxílio do programa Aplusix

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da Profª. Doutora Barbara Lutaif Bianchini.

São Paulo

2008

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

AGRADECIMENTOS

Muitos contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho. Meu carinho e meus sinceros agradecimentos a todos, em especial:

À Profª. Drª. Barbara Lutaif Bianchini, por sua orientação, paciência e apoio em todos os momentos.

Às professoras Doutoras Sonia Pitta Coelho e Nielce Meneguelo Lobo da Costa, que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, pelas preciosas sugestões que contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

À Profª. Drª. Leila Zardo Puga pelo incentivo e acolhimento.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pela contribuição para o meu crescimento profissional.

À minha família, pelo apoio e pela compreensão nos momentos ausentes.

À grande amiga Marcelina, pelo carinho, apoio e auxílio durante o curso.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo que colaborou e tornou possível, com a bolsa concedida, a realização desse sonho.

Ao diretor e coordenadoras da escola, que abriram as portas para a realização desta pesquisa.

À professora Janete e seus alunos: Bruno, Eliel, Ester, Daniel, Diego, Talita e Elivania que acolheram este trabalho e contribuíram para a realização desta pesquisa.

Aos colegas do curso, pela amizade e companheirismo.

A todos os amigos, por todo o incentivo que me deram, de todas as formas de perto ou de longe.

RESUMO

Neste trabalho, investigamos o desempenho de alunos de 8° e 9° anos do ensino fundamental no estudo de produtos notáveis com o auxílio do programa de computador Aplusix. Ele está inserido no sub-projeto *“Expressões, equações e inequações – pesquisa, ensino e aprendizagem”*, que tem como objetivo caracterizar o ensino e aprendizagem sobre expressões, equações e inequações possibilitando desenvolver pesquisas nos planos cognitivo, didático e curricular do Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA) do Programa de Estudos Pós-Graduados da PUC/SP. Este trabalho leva em conta os baixos resultados das avaliações SAEB e SARESP e busca incluir novas tecnologias no ensino de matemática como estratégia para vencer as dificuldades de professores e alunos. Para isso, colocamos a seguinte questão de pesquisa: O programa Aplusix poderá contribuir para a coordenação de registros de representação semiótica em relação aos produtos notáveis? Em quê? Quais as evoluções percebidas? Em nossas análises fundamentamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), por meio de atividades que procuram favorecer a aprendizagem, utilizando-se de conversões entre registros de representação e tratamento num mesmo registro. A pesquisa é qualitativa num estudo diagnóstico com o auxílio de novas tecnologias pautada na metodologia da Engenharia Didática. Três alunos de uma escola pública de São Paulo participaram de dez sessões de 60 minutos cada, desenvolvendo as atividades individualmente. Diante dos resultados apresentados nos protocolos, comparando as atividades pré-teste e pós-teste, constatamos que houve evolução conceitual e avanços significativos quanto ao desempenho desses alunos nas conversões entre os registros figural, algébrico e numérico e o tratamento nos registros numérico e algébrico; consideramos que isso está relacionado às retroações do programa Aplusix e à mediação da pesquisadora que, em conjunto, possibilitaram tais avanços.

Palavras-chave: Álgebra, Produtos Notáveis, Programa Aplusix, Aprendizagem.

ABSTRACT

In this work, we investigate the students' performance of 8 ° and 9 ° years of the basic teaching in the study of notable products with the help of the program of computer Aplusix. He is inserted in the sub-project " Expressions, equations and inequations – inquiry, teaching and learning ", what has like objective characterizes the teaching and Learning on expressions, equations and inequations making possible to develop you investigate in the cognitive, educational plans and curricular of the Group of Inquiry of Algebraic Education (GPEA) of the Program of Postgraduate Studies of the PUC/SP. This work is taken into account the basses resulted from the evaluations SAEB and SARESP and search to include new technologies in the teaching of Mathematics like strategy to win the difficulties of teachers and students. For that, we put the next question of inquiry: Will the program Aplusix be able to contribute to the co-ordination of registers of representation semiotics regarding the notable products? In what? Which the perceived evolutions? In our analyses we base ourselves on the Theory of the Registers of Representation Semiotics of Duval (2003), through activities that try to favor the learning, making use of conversions between registers of representation and treatment in the same register. The inquiry is qualitative in a diagnostic study with the help of new technologies ruled in the methodology of the Educational Engineering. Three students of a public school of São Paulo participated of ten sessions of 60 minutes each, developing the activities individually. Before the results presented in the protocols, comparing the activities daily pay-test and powders-tests, we note that there was evolution conceptual and significant advancements as for the performance of these students in the conversions between the registers figural, algebraic and numerically and the treatment in the numerical and algebraic registers; we think that that is made a list to the reciprocal actions of the program Aplusix and to the mediation of the investigator that, together, such advancements made possible.

keywords: Algebra, Notable Products, Program Aplusix, Learning.

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO I

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

LISTA DE QUADROS

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO I

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EAD	Educação a Distância
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	Encontro Nacional De Educação Matemática
GPEA	Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa
MEC	Ministério da Educação e Cultura
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PEC	Programa de Educação Continuada
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio
POIE	Professor Orientador e Informática Educacional
PPP	Projeto Político Pedagógico
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SAAI	Sala de Acompanhamento de Apoio à Inclusão
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação de Educação Básica
SARESP	Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SEE	Secretaria do Estado da Educação
UFRS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por meio de análise dos resultados das avaliações do SAEB e SARESP, constatamos que um grande número de alunos não atinge um nível satisfatório, em geral. Comparando com o desempenho dos alunos do 9° ano, participantes das avaliações em 2005, percebemos um índice ainda mais baixo.

Entre as dificuldades apresentadas em matemática estão incluídos os cálculos algébrico e numérico. A partir desses resultados, vimos a necessidade de analisar tais dificuldades por meio de um estudo da aprendizagem da álgebra, utilizando um programa de computador onde a mediação do professor possibilitasse a construção de competências e o desenvolvimento de habilidades úteis na resolução desses problemas.

Desta forma, elaboramos este estudo que está dividido em cinco capítulos descritos da seguinte forma:

No capítulo I apresentamos as justificativas que nos levaram a esta pesquisa: trajetória profissional e acadêmica da pesquisadora; resultados de avaliações governamentais; a questão que norteou o desenvolvimento deste estudo; apresentamos nosso objeto de estudo “Produtos Notáveis”; incluímos síntese do levantamento bibliográfico; consideramos a importância do uso do computador na educação.

No capítulo II destacamos o referencial teórico, pautamo-nos nos fundamentos da teoria de Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval; procuramos investigar se há a coordenação desses registros diante de problemas envolvendo Produtos Notáveis. Utilizamos também, no desenvolvimento desta pesquisa, alguns aspectos da metodologia denominada de Engenharia Didática.

No capítulo III verificamos as sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental para trabalhar produtos notáveis e analisamos três livros didáticos, com intenção de verificar como estes livros estão incorporando as propostas sugeridas nos PCN sobre esse tema. Além disso, verificamos se os mesmos apresentam na introdução de produtos notáveis ou nas atividades propostas da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

No capítulo IV apresentamos os procedimentos metodológicos baseado na engenharia didática, cujo processo experimental é composto de quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, experimentação e, por último, a análise *a posteriori* e validação. São também explicitados os procedimentos que incluem as considerações para a elaboração da seqüência de atividades e coleta de dados.

No capítulo V expomos as análises *a priori* e *a posteriori* da seqüência de atividades.

As considerações finais foram incluídas no capítulo V, destacando alguns resultados a partir do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Neste capítulo fazemos nossas considerações e recomendações.

CAPÍTULO I

1. JUSTIFICATIVA

Neste capítulo apresentamos as justificativas que nos levaram a esta pesquisa. Iniciamos com a trajetória profissional e acadêmica da pesquisadora; verificamos os resultados de avaliações governamentais como SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) e SARESP 2005 (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo); apresentamos o objeto de estudo “Produtos Notáveis”; incluímos uma síntese da dissertação de Borges (2007) sobre polinômios; destacamos a importância do uso de tecnologias no ensino de matemática, assim como a mediação pedagógica e incluímos síntese das leituras de duas dissertações que utilizaram o Programa Aplusix em seus estudos, Burigato (2007) e Gonçalves (2007).

1.1 Trajetória Profissional e Acadêmica da Pesquisadora

Meu trabalho no ensino de matemática iniciou-se após o término da graduação (1992), com o título de Bacharel em Matemática. Mesmo não possuindo a licenciatura, fui contratada pela rede estadual de ensino do estado de São Paulo para ministrar aulas no curso noturno de uma escola da periferia de São Paulo. Na ocasião, a falta de professores na rede de ensino, principalmente na área de matemática, facilitou a contratação sem a habilitação.

Nos primeiros anos, trabalhando como professora, concomitante com o trabalho no comércio de suprimentos de informática em empresa privada no período diurno, fui, aos poucos, me identificando com a profissão e decidi ir além da graduação.

Participei de diversos cursos oferecidos pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo como Pró-Ciências, Programa de Educação Continuada – PEC (1998), Programa de formação continuada - Teia do Saber módulos I, II e III, entre 2003 e 2005, como também cursos direcionados à inclusão digital do professor: Supermáticas, *Cabri-Géomètre*, O X da Questão, Laboratório de Química e Física.

Outros cursos foram oferecidos por diferentes universidades como: o uso da planilha eletrônica na aula de matemática da Universidade Estadual de São Paulo (UNESP); projeto de aprendizagem em um curso de Educação à distância (EAD), oferecido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS) e pelo Programa PROINFO; especialização em geometria e álgebra para licenciatura pela Universidade de São Paulo (USP) e algumas oficinas de geometria e uso de *softwares*, oferecidas no período de férias escolares.

Em 1997, o Ministério da Educação (MEC) aprovou o Programa Especial de Formação Pedagógica - Resolução nº 2, um curso de 540 horas para graduados com interesse em adquirir a licenciatura plena. Obtive o certificado deste programa cursando as aulas aos sábados em período integral.

De posse do certificado, alguns empecilhos surgiram na aceitação deste, tanto pela rede estadual como pela municipal de São Paulo, o que me fez optar por refazer a licenciatura num curso regular.

Iniciando a licenciatura do curso regular numa universidade privada, desliguei-me da empresa que trabalhava e optei por fazer o curso no período da manhã. Como tinha o diploma de bacharel em matemática, fui dispensada de algumas disciplinas, o que possibilitou concluir o curso em um ano. Enfim, fui me aprimorando para o grande desafio da sala de aula.

Atualmente, sou professora efetiva na rede pública estadual de ensino de São Paulo ingressando em 1993 como contratada. Em 1998, apesar de ter sido aprovada em concurso, não me foi permitido o ingresso devido à data do término do Programa Especial de Formação Pedagógica - Resolução nº 2. Em 2004, com um novo concurso e já de posse do diploma de Licenciatura é que me efetivei na rede estadual de ensino do estado de São Paulo.

Há sete anos sou professora titular na rede municipal de ensino de São Paulo; nos últimos três, exercendo a função de Professora Orientadora de Informática Educacional (POIE). Desde o início de minha carreira de docência, trabalhei em todas as séries do ensino fundamental e do ensino médio, tanto do curso regular como de educação de jovens e adultos (EJA).

Com a oportunidade que a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo proporcionou ao oferecer bolsa de estudo para professores da rede, o apoio e incentivo de amigos e professores é que no segundo semestre de 2005 ingressei no curso de Estudos Pós-Graduados em Ensino de Matemática da Universidade Pontifícia Católica de São Paulo (PUC/SP), no Mestrado Profissional, onde estou desenvolvendo o meu projeto de pesquisa.

Esta pesquisa é parte de um projeto maior do Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA) da Pós-Graduação da PUC/SP. O principal objetivo do GPEA é investigar: Qual a Álgebra a ser Ensinada em Cursos de Formação de Professores de Matemática?

Composto por membros do GPEA, o sub-projeto "O que se entende por Álgebra?", compreende estudos sobre a Teoria dos Números (Aritmética) e a Álgebra. Dos projetos em andamento do grupo, este trabalho está inserido no subgrupo *"Expressões, equações e inequações – pesquisa, ensino e aprendizagem"*, que tem como objetivo caracterizar o ensino e aprendizagem sobre expressões, equações e inequações possibilitando desenvolver pesquisas nos planos cognitivo, didático e curricular, além de elaborar sínteses de pesquisas inter-relacionando os planos de investigação.

A metodologia utilizada nesta pesquisa corresponde à abordagem qualitativa com o auxílio de novas tecnologias, exigências do mundo moderno, para Coelho, Machado e Maranhão:

> [...] No mundo todo aumentou o uso de computadores e calculadoras no ensino da matemática; muitos *softwares* matemáticos estão disponíveis para diversos tópicos do currículo. Isso certamente levanta questões sobre quais são as contribuições das novas tecnologias para o ensino e aprendizagem e sobre os possíveis problemas de compreensão e raciocínio que elas podem gerar. É necessário coletar exemplos do uso da informação tecnológica e de *software* que enriquecem a experiência matemática dos estudantes e resultam em melhor compreensão e aprendizagem.(2003, p.2).

Nós professores nos deparamos com as dificuldades no aprendizado de matemática em todas as etapas, em particular, no ensino de álgebra, quando iniciado formalmente no 7º ano (6ª série) e enfatizado nos 8º e 9º anos. Parte dos alunos não consegue se apropriar de alguns conceitos e carrega algumas deficiências para o ensino médio e cursos universitários.

Assim, desenvolvemos este estudo com o auxílio de um programa de computador direcionado à aprendizagem da álgebra. Inicialmente pensamos em estudar os polinômios, mas percebemos que este campo da matemática é extenso; reduzimos para expressões algébricas; percebemos que o campo continuava amplo, até que decidimos focar nossa pesquisa em produtos notáveis.

1.2 Resultados SARESP e SAEB

As avaliações governamentais apresentam um quadro crítico quanto ao conhecimento matemático de alunos do ensino fundamental e médio das escolas do país.

Vamos analisar alguns dos resultados das provas: SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) e SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) 2005.

1.2.1 SAEB – Prova Brasil

De acordo com informações obtidas no site[1] do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas (INEP) este sistema de avaliação procura, a cada biênio, avaliar conhecimentos, habilidades e competências em língua portuguesa e matemática em estudantes de todo o país no término do ensino fundamental I, II e ensino médio.

Em matemática, os aspectos envolvidos em situações voltadas à resolução de problemas são: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações/Álgebra e Funções e Tratamento da Informação.

---

[1] http://www.inep.gov.br. acesso em 26 jul. 2007.

Há uma escala de níveis, na qual se espera que o aluno, ao término do ensino fundamental ou do médio, tenha desenvolvido os requisitos mínimos para dar continuidade aos estudos. Esse nível minimamente adequado corresponde a **300** pontos. A tabela abaixo destaca a média Brasil de Proficiência em matemática da 5° e 9° anos do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio no período de 1995/2005.

Tabela 2– Médias de Proficiência em Matemática
Brasil
1995 – 2005

Série	1995		1997		1999		2001		2003		2005		Dif.	Sig.
4a Série do E.F.	190,6	(1,5)	190,8	(1,2)	181,0	(0,9)	176,3	(0,8)	177,1	(0,8)	182,4	(0,9)	5,3	*
8a Série do E.F.	253,2	(1,9)	250,0	(2,1)	246,4	(1,1)	243,4	(1,2)	245,0	(1,1)	239,5	(1,1)	-5,5	*
3a Série do E.M.	281,9	(2,6)	288,7	(3,0)	280,3	(1,7)	276,7	(1,3)	278,7	(1,4)	271,3	(1,8)	-7,4	*

Tabela 1.1 - Ministério da Educação Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. SAEB-2005 Primeiros Resultados: Médias de desempenho do SAEB/2005 em perspectiva comparada. 2007. (p.7)

Em dez anos de SAEB ainda não atingimos o nível esperado e no ano de 2005 alunos da 8ª série atingiram o nível mais baixo com 239,5 pontos. O quadro de descrição de níveis de Escala (ANEXO I), informa que alunos da 8ª série (9º ano) que calculam o valor numérico de uma expressão algébrica, incluindo potenciação, estariam no nível **275** e alunos que resolvem problemas de cálculo numérico de uma expressão algébrica em sua forma fracionária no nível **325.**

A escola que participou de nossa pesquisa obteve nível de desempenho de **239,61** da Prova Brasil no ano de 2005 com 46 alunos da 8ª série participantes (ANEXO II).

A construção de competências e desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas estão divididos em quatro estágios: muito crítico, crítico, intermediário e adequado como mostra a tabela:

Muito Crítico	Não conseguem responder a comandos operacionais elementares compatíveis com a 8ª série. (Resolução de expressões algébricas com uma incógnita; características e elementos das figuras geométricas planas mais conhecidas).
Crítico	Desenvolvem algumas habilidades elementares de interpretação de problemas, mas não conseguem transpor o que está sendo pedido no enunciado para uma linguagem matemática específica, estando, portanto muito aquém do exigido para a 8ª série. (Resolvem expressões com uma incógnita, mas não interpretam os dados de um problema fazendo uso de símbolos matemáticos específicos. Desconhecem as funções trigonométricas para resolução de problemas).
Intermediário	Possuem habilidades matemáticas mais compatíveis com oito anos de escolarização. Além daquelas dos estágios anteriores consolidam habilidades que cabem destacar: identificam lados e ângulos de um quadrilátero (retângulo, losango, quadrado e trapézio); identificam o sistema de equações de primeiro grau, expressas em uma situação dada; lêem tabelas com números positivos e negativos e identificam o gráfico de colunas correspondentes.
Adequado	Interpretam e sabem resolver problemas de forma competente; fazem uso correto da linguagem matemática específica. Apresentam habilidades compatíveis com a série em questão. (Interpretam e constroem gráficos; resolvem problema com duas incógnitas utilizando símbolos matemáticos específicos e reconhecem as funções trigonométricas elementares). Além disso, resolvem problemas simples envolvendo frações e porcentagens, equação de segundo grau, o conceito de proporcionalidade; resolvem expressão envolvendo as quatro operações, potências e raízes.

Quadro 1.1 - Construção de competências e desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas em cada um dos estágios (resumo) 9° ano d e Matemática[2].

A avaliação de 2001 revelou que 55,8% dos estudantes da 8ª série (9ºano) do ensino fundamental do Estado de São Paulo e na avaliação de 2003, 51,6% dos estudantes estão nos estágios muito crítico e crítico na construção de competências matemáticas.

[2] O quadro encontra-se no site: http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/saeb/news04_08.htm. acesso em 26 jul. 2007.

1.2.2 Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP

A Secretaria de Estado da Educação (SEE) de São Paulo avalia o rendimento escolar dos alunos desde 1996, por meio do SARESP. As avaliações das habilidades em matemática ocorreram no período de 1996 a 2000, nos últimos anos as provas têm avaliado habilidades cognitivas somente de leitura e escrita, mas em 2005 o SARESP avaliou também habilidades em matemática, com resultados bastante preocupantes.

Segundo relatório expedido pela SEE, a porcentagem de acertos em matemática no estado de São Paulo no SARESP/2005 nas avaliações da 7ª série (8º ano) está na média de **34,9%** e na 8ª série (9º ano) de **31,5%**. A região do Estado em que a escola que participou da pesquisa fica situada obteve no 8º ano o percentual de acerto de **34,3%**, bem próxima da média do Estado, e no 9º ano **29,4% ,** abaixo da média do Estado.

A partir deste quadro, vimos à necessidade de destacar algumas questões do SARESP que estão relacionadas com nossa pesquisa.

Elas foram dadas em forma de teste, o aluno tem quatro opções e faz sua escolha por uma delas. Encontramos questões que envolvem conhecimentos dos conceitos de produtos notáveis, são elas:

Questão 1

A expressão algébrica que representa a situação: “o quadrado da soma de dois números, mais 5 unidades” é:
A) $x + y + 5^2$
B) $(x + y + 5)^2$
C) $(x + y)^2 + 5$
D) $x^2 + y + 5^2$
(SARESP/2000, 8° ano)

A alternativa correta é _C_.

Esta questão envolve a representação de uma expressão dada na língua natural para a representação algébrica. Consideramos que explorar atividades que envolvem estas representações pode contribuir para melhor aquisição dos conceitos da álgebra, desta forma nos sentimos inspirados em incluir em nosso estudo atividades similares a esta.

Questão 2

O resultado de (x+y).(x-y) é:

A) $x^2 + y^2$ B) (x – y) C) (x + y) D) $x^2 – y^2$

(SARESP/2000, 8° ano)

A alternativa correta é *D*.

O objetivo desta questão é desenvolver o produto da soma pela diferença de dois termos. Adaptamos esta atividade e a incluímos em nosso estudo, solicitando ao aluno que desenvolvesse a expressão sem lhe oferecer as alternativas do teste.

Questão 3

A expressão $x^2–a^2$ é equivalente a:

A) – 2ax B) $(x\text{-}a)^2$ C) $(x+a)^2$ D) (x-a)(x+a)

(SARESP/2005, 9° ano)

A alternativa correta é *D*.

De acordo com relatório expedido pela Secretaria Estadual da Educação (SEE), a questão acima obteve índice de acerto de **22,5%** e requereu do aluno habilidade em obter expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatoração e simplificações.

Adaptamos esta questão e a incluímos também em nossa seqüência de atividades, solicitando ao aluno fatorar a expressão, sem apresentarmos as alternativas.

As questões 4, 5 e 6 abaixo envolvem os conceitos matemáticos: simplificação de fração, fatoração de trinômios, fatoração da diferença de quadrados, operações (adição, subtração e multiplicação) de expressões algébricas. Embora não tenhamos incluído em nossa seqüência, também estão relacionadas com a pesquisa, pois tratam de verificar se os alunos adquiriram as habilidades necessárias para efetuar cálculos algébricos.

Questão 4

A expressão: (3x – 2)**.** 4y é equivalente a:

A) 12xy –2

B) 4xy

C) 12xy – 8y

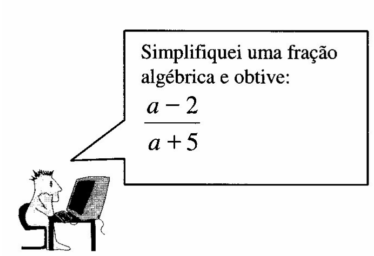
D) 3x-8y

(SARESP/2005, 8° ano)

A alternativa correta é _C_.

Pelo relatório da SEE, a atividade tem finalidade de constatar se o aluno adquiriu habilidade de efetuar operações com expressões algébricas. O índice de acerto da questão no Estado de São Paulo foi de **27,5%.**

Questão 5



Qual foi a fração simplificada?

A) $\dfrac{a^2-4}{a^2-7a+10}$

B) $\dfrac{a^2-4}{a^2+3a-10}$

C) $\dfrac{a^2+4a+4}{a^2+7a+10}$

D) $\dfrac{a^2-4}{a^2+7a+10}$

(SARESP/2000, 8° ano)

A alternativa correta é _D_.

Questão 6

Considerando A = $a^3 - 2a^2 + 3$ e B = $a^3 - 2a^2 - a + 5$, temos que A – B é igual a:

A) a–2 B) –a+8 C) $-4a^2$-a+8 D) $2a^3-4a^2-a+8$

(SARESP/2005, 8° ano)

A alternativa correta é _A_.

De acordo com relatório da SEE, o índice de acerto desta questão foi de **19,6%** e seu objetivo foi verificar a habilidade ao usar os procedimentos para efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas.

Considerando os resultados dos exames SAEB e SARESP/2005 apresentados, em que nossos alunos atingiram níveis de conhecimentos e índices de acertos muito baixos em questões que envolvem conceitos de álgebra, procuramos analisar tais dificuldades e vimos a necessidade de um estudo da aprendizagem de álgebra.

1.3 Questão da Pesquisa

Levando em conta as experiências de docência, a trajetória acadêmica, os objetivos do Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA) da Pós-Graduação da PUC/SP à qual esta pesquisa está inserida, a necessidade de estudos com o uso de novas tecnologias que enriquecem as experiências matemáticas e os resultados preocupantes dos exames SAEB e SARESP/2005, a questão que pretendemos responder ao final da pesquisa é: **O programa Aplusix poderá contribuir para a coordenação de registros de representação semiótica em relação aos produtos notáveis? Em quê? Quais as evoluções percebidas?**

1.4 Objeto de Estudo

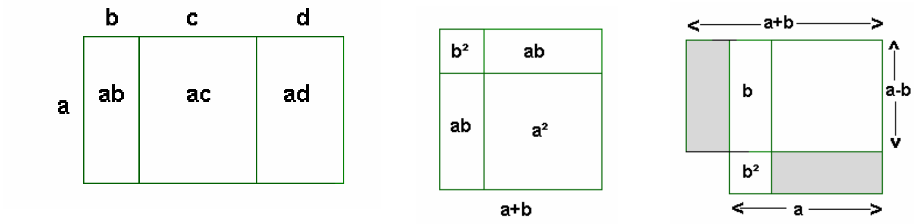
Desenvolvemos este estudo envolvendo "Produtos Notáveis" exploramos tanto os cálculos algébricos como a sua representação geométrica.

Em nosso levantamento bibliográfico, constatamos que os pitagóricos e também Euclides (300 a.C) representavam as soluções de equações algébricas utilizando-se da "álgebra geométrica".

Em sua obra *Elementos*, livro II, Euclides enunciou a proposição 4:

> *Se uma linha reta é cortada ao acaso, o quadrado do total é igual à soma do quadrado dos segmentos e duas vezes o retângulo formado pelos segmentos.* [Isto é em linguagem algébrica moderna $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$]. (Milies;Bussab, 1999, p.66).

A lei distributiva $a(b+c+d)=ab+ac+ad$, assim como a identidade $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ e a diferença de dois quadrados $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ eram representadas de modos semelhantes:



Podemos perceber a presença dessa “álgebra-geométrica” em nossa pesquisa quando exploramos as conversões dos registros figural e algébrico, nos casos do quadrado de um binômio e da diferença de dois quadrados.

Alguns matemáticos como Diophanto (séc II ou III); Al-Khowarizmi (780-850 d.C); Cardano (1501–1576); Tartaglia (1499-1577); Bombelli (1526-1572); Simon Stevin (1548 - 1620) e François Viète (1540-1603) deram grandes contribuições para o desenvolvimento da álgebra.

Segundo Domingues e Iezzi (2003), René Descartes (1596-1650) procurou estabelecer um vínculo entre a álgebra e a geometria, criou a geometria analítica, e para isso deu contribuições próprias para o desenvolvimento da álgebra, é o caso do princípio de identidade de polinômios.

Os tópicos explorados nesta pesquisa sobre “Produtos Notáveis” estão inseridos num tema mais abrangente denominado “Polinômios”. Esses conceitos são apresentados nos livros didáticos de álgebra do ensino superior e estão diretamente vinculados aos ensinos fundamental e médio.

Domingues e Iezzi (2003, p.282) definem a “Construção do Anel[3] de Polinômios”:

> Uma Função $f: A \rightarrow A$ denomina-se função polinomial sobre A, se existem elementos $a_o, a_1, \ldots, a_r$, em A tais que, para todo $x \in A$:
> $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_rx^r$

[3] Anel é um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição $(x, y) \mapsto x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \mapsto xy$. E chamado de anel se valem as propriedades da adição (associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro, todo elemento neutro admite opostos); as propriedades da multiplicação (associativa e distributiva em relação à adição). (Domingues; Iezzi, 2003. p. 211). Os exemplos mais importantes de anéis de integridade infinitos são Z, Q, R ou C.

A função *f* é denominada função polinomial ou polinômio associado à seqüência dada. Os números $a_o, a_1, .., a_r$, são denominados coeficientes e as parcelas a_o, a_1x, a_2x^2, a_3x^3,..., a_rx^r são chamados termos do polinômio *f*.

Um polinômio que contém um único termo a_rx^r é denominado de monômio; se o polinômio tiver dois termos é um binômio; com três termos um trinômio; e, com quatro ou mais termos, somente polinômio.

As operações de adição e multiplicação de dois polinômios quaisquer *f* e *g* são definidas por Domingues e Iezzi (2003) :

$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_rx^r = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e

$g(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ... + b_tx^t = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (a_o+b_o)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2 + ... + (a_r+b_t)\,x^r = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$

$(fg)(x) = f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ... + (a_rb_t)x^{r+t}$

A multiplicação dos polinômios *f* e *g* pode ser obtida multiplicando-se cada termo $a_i x^i$ de *f* por cada termo $b_j x^j$, segundo a regra $(a_i x^i).(b_j x^j) = (a_i b_j x^{i+j})$ e somando os resultados obtidos.

Em Iezzi (1977), a subtração de polinômios *f* e *g* é definida como f+(-g):

$(f-g)(x) = f(x)+(-g)(x) = (a_o-b_o) + (a_1-b_1)x + (a_2-b_2)x^2 + ... + (a_r-b_t)\,x^r$

O quadrado de um binômio foi bastante explorado neste estudo, pois é o produto de polinômios considerados “Notáveis”.

Milies e Coelho (2003) demonstram a fórmula do Teorema do Binômio:

Sejam *a* e *b* inteiros e *n* um inteiro positivo. Então,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Usando a notação de somatória temos: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

O binomial de $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ $n \in$ N, $p \in$ N e $p \le n$.

Em nossa pesquisa estudamos o caso para *n=2*, assim temos:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^1 b + \binom{2}{2} a^0 b^2$$

$$(a+b)^2 = \frac{2!}{0!(2-0)!} a^2 + \frac{2!}{1!(2-1)!} ab + \frac{2!}{2!(2-2)!} b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para o desenvolvimento do $(a-b)^n$ basta notar que a-b = a+(-b)

$$[(a+(-b)]^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^1 (-b) + \binom{2}{2} a^0 (-b)^2$$

$$[(a+(-b)]^2 = \frac{2!}{0!(2-0)!} a^2 - \frac{2!}{1!(2-1)!} ab + \frac{2!}{2!(2-2)!} b^2$$

$$[(a+(-b)]^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Incluímos dois casos de fatoração dos produtos notáveis em nosso estudo: diferença de quadrados e trinômio do quadrado perfeito, representados na forma geral $x^2 - y^2$ e $x^2 \pm 2xy + y^2$.

1.5 Pesquisa sobre Polinômios

Em nosso levantamento bibliográfico não encontramos uma quantidade significativa de pesquisas envolvendo os conceitos de produtos notáveis ou mesmo de polinômios.

Incluímos neste capítulo uma síntese desse levantamento. Analisamos uma dissertação de mestrado de Borges (2007) que investigou o conceito de polinômios em livros didáticos.

1.5.1 Polinômios no Ensino Médio: Uma Investigação em Livros Didáticos por Antonio José Borges (2007)

O objeto matemático de nosso estudo, “Produtos Notáveis”, está inserido num tema mais abrangente, “Polinômios”. Borges (2007), em sua dissertação, investiga sobre o tema polinômios em livros didáticos de ensino médio, verificando se este tema está articulado ao tema funções.

De suas leituras bibliográficas, Borges (2007) destacou o livro “As Idéias da Álgebra“ publicado no Brasil em 1995. Entre os 33 artigos de estudiosos estrangeiros da área de Educação Matemática, vários demonstram preocupação ou oferecem sugestões para o ensino de polinômios.

Sua investigação foi com base em análises de dois documentos oficiais: os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM/2000), que recomendam “aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais”; e a Proposta Curricular para o Ensino da Matemática do 2º grau da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo de 1995, que sugere que o estudo sobre polinômios e equações algébricas seja tratado sempre que possível recorrendo à fatoração e aos casos já conhecidos.

Borges (2007) analisou três coleções de livros didáticos aprovadas pelo catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM/2005) que também recomenda articulações entre os temas.

Em sua investigação, o pesquisador revelou que duas das três coleções analisadas não articulavam os conceitos de polinômios e função polinomial e uma coleção explicitava tal relação quando definia função polinomial ao identificar as expressões polinômio e função polinomial, embora a explorasse pouco.

A articulação entre polinômios e funções investigada por Borges (2007) nos livros didáticos de ensino médio deixa indícios da importância da construção eficaz do desenvolvimento e domínio dos conceitos de polinômios quando abordado no ensino fundamental.

1.6 Informática na Educação

Há muito tem se falado sobre a contribuição de tecnologias no processo de aprendizagem. Pesquisas evidenciam a precisão de inserir o computador nas escolas e enfatizam a necessidade do professor ter conhecimento sobre os potenciais educacionais do computador e ser capaz de alternar adequadamente atividades tradicionais de ensino e de aprendizagem e atividades que usam computadores.

Segundo Behrens (2000), a tecnologia da informação, entendida como os recursos de *hardware*, *software* e redes de computadores, pode ser utilizada como ferramenta complementar na aprendizagem. Os alunos podem se beneficiar dessa tecnologia que oferece diversos tipos de programas aplicados à educação, como:

- A exercitação (o objetivo é treinar certas habilidades consideradas as propostas mais pobres do ensino programado);
- Programas tutoriais (informações pedagogicamente organizadas como se fosse um livro animado, um vídeo ou um professor animado);
- Aplicativos (planilha eletrônica, editor de texto);
- Programas de autoria (linguagem de programação);
- Jogos;
- Simulações (vôo);
- Internet.

Para Behrens (2000):

> Torna-se importante considerar que esses recursos informatizados estão disponíveis, mas dependem de projetos educativos que levem à aprendizagem e que possibilitem o desenvolvimento do espírito critico e de atividades criativas. O recurso por si só não garante a inovação, mas depende de um projeto bem arquitetado, alimentado pelos professores e alunos que são usuários. O computador é a ferramenta auxiliar no processo de "aprender a aprender." (p. 99).

Para fazer uso das tecnologias como ferramenta educacional é preciso que o professor tenha noção do seu potencial, assim como dos possíveis usos dos programas de computador.

Em seu artigo, Allevato (2007) fornece um retrato parcial da produção de pesquisa sobre a utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na Educação Matemática, discutindo alguns aspectos emergentes em situações de ensino e pesquisa em que foi utilizado o computador. Para a autora e pesquisadores, as situações de ensino com o auxílio de tecnologias proporcionam o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem colaborativa.

Estudantes tendem a discutir com mais interesse as atividades matemáticas, pois os programas de computadores oferecem *feedbacks* que proporcionam a troca de experiências, caminhando por um jogo de contra-exemplos e introduzem novas conjecturas e reformulação de conceitos aprofundando compreensões matemáticas importantes, privilegiam ainda a compreensão conceitual em vez da aprendizagem de técnicas.

Para Allevato:

> As pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores conduz os estudantes a modos de pensar e construir conhecimentos típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos. Destacam-se aspectos como o uso regular de representações múltiplas, a construção de conhecimentos como redes de significados, as discussões desses significados com os colegas e com o professor, entre outros.(2007, p.76).

Quanto às representações múltiplas, a autora ratifica a possibilidade de coordenar representações múltiplas (gráficas, numéricas e algébricas) e afirma, com base na análise de pesquisas, que matemática visual ou discreta pode ser utilizada como recurso para atrair aqueles estudantes que rejeitam, explícita ou implicitamente, a hegemonia da álgebra.

Nesta pesquisa, utilizamos a coordenação de representações múltiplas ao propor atividades que envolviam conversões de registros de representação semiótica (figural, algébrica e numérica) e um programa de computador que oferece *feedbacks* ao aluno quando o informa sobre suas ações.

Os programas de computadores utilizados na educação estão classificados em dois tipos básicos de abordagens: a instrucionista e a construcionista**.**

De acordo com Valente (1993, p.32), “um software educacional pode ser considerado instrucionista quando alguém implementa no computador uma série de informações e essas informações são passadas ao aluno na forma de um tutorial, exercício-e-prática ou jogo”.

Papert (*apud* Valente, 1993, p.33) denominou de construcionista a “abordagem pela qual o aprendiz constrói, através do computador o seu próprio conhecimento”.

Costa (2004) analisou em sua pesquisa o processo de formação de professores com o uso de tecnologias, destacando a importância de se discutir nos projetos de formação de professores a abordagem pedagógica adotada:

> Na abordagem instrucionista, considera-se o computador como um instrumento para tornar o processo de transmissão de informações mais eficiente e provocar um aprimoramento nas técnicas de ensino. Já a abordagem construcionista considera o computador como uma ferramenta a ser tutorada pelo aluno para a construção do conhecimento, a partir de suas ações. (p. 64).

Bittar e Chaachoua (2004) analisam o programa de computador utilizado nesta pesquisa, o Aplusix[4], de acordo com as atividades que podem ser propostas, segundo a teoria construtivista da aprendizagem. Para eles, o programa Aplusix possui características para construir um *meio*[5] para a aprendizagem de álgebra e:

> A construção do conhecimento é o resultado da interação do sujeito com um *meio*, que deve ser organizado pelo professor a partir de escolhas judiciosas de problemas, dos tipos de ações possíveis do aluno sobre esse *meio*, e os tipos de retroações que o *meio* oferece**.**

[4] Aplusix está disponível no *site* http://aplusix.imag.fr. Possui atualmente uma versão *demo*, porém modificações ainda têm sido feitas com base nas experimentações realizadas.

[5] Um *meio* que é produtor de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como se faz a sociedade humana. Esse saber fruto da adaptação do aluno, se manifesta por meio de respostas novas que são a prova da aprendizagem (Brousseau, 1986 p.48 *apud* Bittar e Chaachoua, 2004 p.2).

As ações e retroações que o programa Aplusix oferece ao usuário permitem considerá-lo como um instrumento que pode efetivamente constituir um meio pertinente para a aprendizagem de álgebra.

Trata-se, de certo modo, de uma "experimentação dentro do modelo fornecido pelo ambiente informatizado". (Laborde C. e Capponi B. *apud* Bittar, 2006, p. 95).

1.6.1 O Uso de Tecnologias a e Mediação Pedagógica

Com a informática adquirindo cada vez mais destaque no cenário educacional, sua utilização como instrumento de aprendizagem aumenta rapidamente. Nesse sentido, a educação vem passando por mudanças estruturais e funcionais ante ao uso de tecnologias como instrumento educacional.

Para Masetto (2000), o uso da tecnologia como instrumento de aprendizagem poderá colaborar significativamente para tornar o processo de educação mais eficiente se for usada adequadamente, facilitando o alcance de objetivos. Isso requer mudanças no papel do professor; este deixa de desempenhar o papel de especialista que possui conhecimentos a comunicar e assume nova atitude, de mediação pedagógica.

> Por mediação pedagógica entendemos a atitude, o comportamento do professor que se coloca como facilitador, incentivador ou motivador da aprendizagem, que se apresenta com disposição de ser uma ponte entre o aprendiz e a sua aprendizagem – não uma ponte estática, mas uma ponte "rolante", que ativamente colabora para que o aprendiz chegue aos seus objetivos. (Masetto, 2000, p.144).

Entre as características de mediação pedagógica apresentadas por Masetto (2000) constatamos, em nossa pesquisa, a presença mais substancial de algumas como: debater dúvidas, questões ou problemas; apresentar perguntas orientadoras; orientar nas carências e dificuldades técnicas ou de conhecimento quando o aprendiz não consegue encaminhá-las sozinho; garantir a dinâmica do processo de aprendizagem; propor situações–problema e desafios; desencadear e incentivar reflexões; fazer a ponte entre outras situações análogas;

cooperar para que o aprendiz use e comande as novas tecnologias para suas aprendizagens e não seja comandado por elas ou por quem as tenha programado.

Nesta pesquisa, fizemos uso de tecnologias utilizando o programa de computador Aplusix para o desenvolvimento da seqüência de atividades. O programa possui recursos como incluir listas de atividades em seu banco de dados, informar ao aluno se há equivalência entre duas etapas de sua resolução e outros que estaremos detalhando mais adiante.

1.6.2 O Programa Aplusix

Aplusix é um programa direcionado à aprendizagem da álgebra, desenvolvido por pesquisadores da equipe DidaTIC, do laboratório Leibniz em Grenoble na França e tem como responsável pelo projeto no Brasil a Profª. Drª. Marilena Bittar da Universidade Federal do Mato Grasso do Sul (UFMS).

Como já mencionamos anteriormente, de acordo com Bittar e Chaachoua (2004) o programa Aplusix possui características para construir um "meio" para a aprendizagem de álgebra.

O programa Aplusix é de fácil utilização pelos usuários, pois, para escrever ou digitar a resolução de uma atividade é possível usar diretamente o teclado do computador ou o *mouse* para o teclado virtual.

Aplusix oferece ao usuário quatro modos diferentes de trabalho: Micromundo[6], Exercícios, Lista de Exercícios e Videocassete.

Micromundo, este ambiente funciona como uma folha em branco, o aluno digita o exercício que pretende resolver. Apresenta (Figura 1.1) a tela principal com uma atividade inserida pelo aluno, podemos observar também o teclado virtual:

[6] Um micromundo é um "sistema que permite simular ou reduzir um domínio do mundo real, e que tem como objetivo abordar e resolver uma classe de problemas" (Bellemain *apud* Bittar e Chaachoua, 2004, p.2).

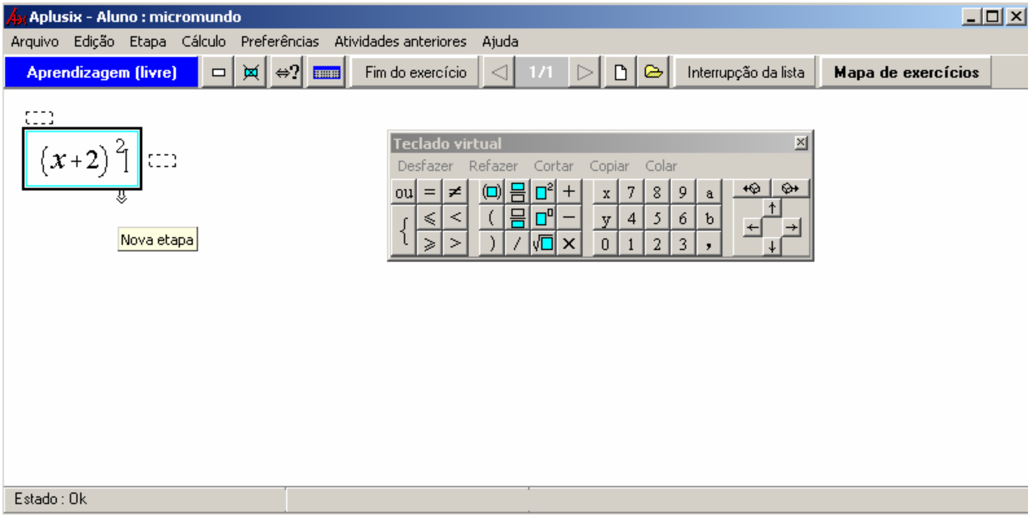


Figura 1.1 - Ambiente Micromundo do programa Aplusix

O programa Aplusix oferece um banco de dados com aproximadamente 400 atividades, incluindo: cálculo numérico, desenvolvimento, fatoração, resoluções de equações de 1º e 2º graus, inequações de 1º grau e sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas; organizadas por temas e níveis de dificuldades. Observa-se (Figura 1.1) que o aluno tem acesso a esse banco de dados ao clicar no botão ”Mapa de exercícios”.

Ao escolher uma atividade no banco de dados, o aluno pode optar em resolvê-la como “Aprendizagem” ou “Teste”.

Na resolução de atividades no modo “Aprendizagem” aparece o símbolo ‖ quando há equivalência entre duas etapas consecutivas e o símbolo ✳ quando ocorre algum tipo de erro, indicando que há um engano naquela passagem ou etapa. Ao mostrar a equivalência ou não entre as etapas, faz com que o aluno reflita constantemente sobre suas ações. Oportunamente esse aluno trabalha com algumas retroações e na verificação dos cálculos pode optar por deixar somente a resposta que considera correta.

Na resolução de atividades no modo “Teste”, o aluno desenvolve as atividades em até 30 minutos sem obter informações sobre seu trabalho, ao final é informado de sua pontuação e pode optar por passar para o modo “Autocorreção”, no qual é possível rever seu trabalho com as indicações dos cálculos corretos e errados e se a atividade está terminada ou não. É possível então retomar as atividades para corrigi-las, com a ajuda das retroações do modo “Aprendizagem”.

O professor ou o próprio aluno pode observar todos os procedimentos realizados no desenvolvimento das atividades (Teste ou Aprendizagem) com um recurso que o programa Aplusix oferece: o **videocassete**. Ele grava todas as ações, mesmo que o aluno apague várias vezes, e ainda registra quanto tempo levou para resolver cada atividade, bem como, registra hora, dia, mês e ano em que a mesma foi realizada.

A Figura 1.2 abaixo mostra que o aluno desenvolveu corretamente uma atividade no modo “Aprendizagem”.

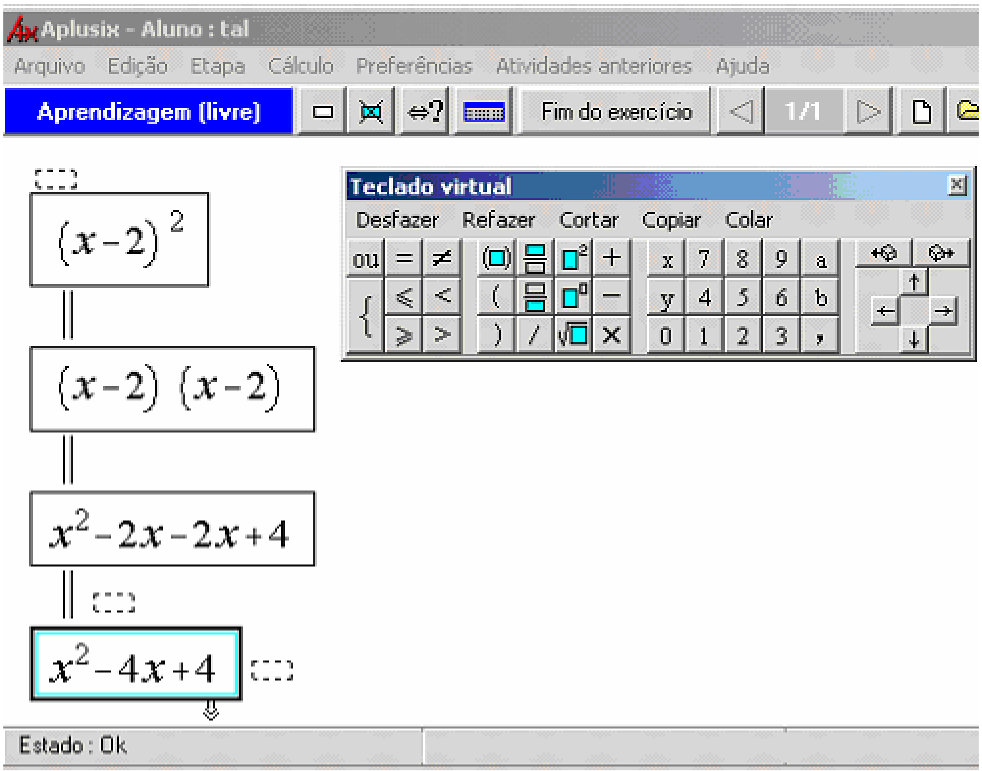


Figura 1.2 - Exemplo de atividade desenvolvida no Aplusix modo “Aprendizagem”

Com o recurso videocassete, o professor observa quais foram as etapas que o aluno percorreu até obter o resultado correto, verificando as passagens feitas. (Figuras 1.3 e 1.4):

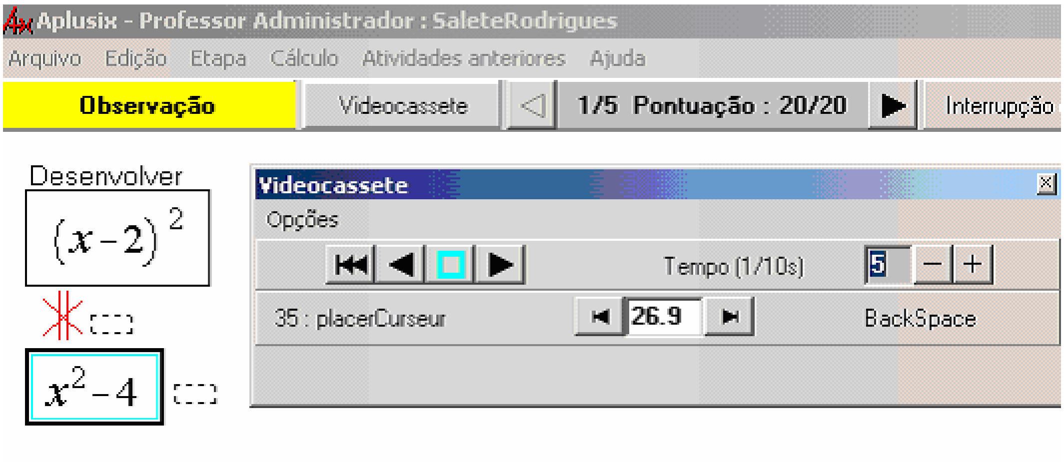


Figura 1.3 - Exemplo de observação com videocassete

Inicialmente elevou cada termo ao quadrado; o programa informou que não eram equivalentes as duas etapas. A informação dada pelo programa induziu o aluno a buscar uma resposta satisfatória repensando sobre a resposta dada e o erro cometido. Procurou alternativas, conforme mostram as observações do videocassete:

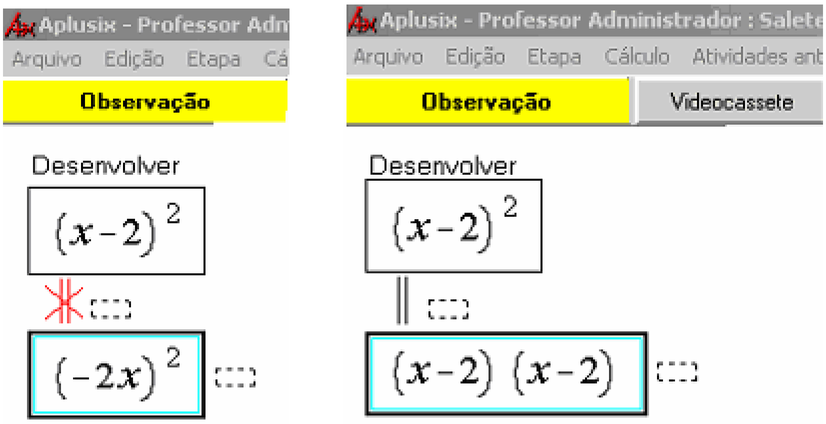


Figura 1.4 - Observações com o videocassete

A partir do momento em que o programa acusa que há equivalência entre as etapas, o aluno dá continuidade ao desenvolvimento, certo de que está resolvendo a atividade corretamente.

O programa Aplusix possui uma opção de “Comentar etapa”, é um campo destinado para comentários que o usuário pode colocar sobre suas resoluções. Abaixo (Figura 1.5) exemplo do comentário de um aluno ao desenvolver uma atividade “Teste”.

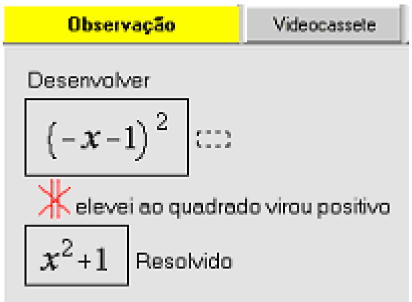


Figura 1.5 - Uso do recurso “Comentar etapa”

Os alunos que participaram de nosso estudo foram orientados para utilizar este recurso em todas questões, mas só o fizeram em algumas situações, provavelmente por não ter o hábito de justificar por escrito suas respostas. Os comentários feitos pelos alunos nos foram úteis em nossas análises, pois nos auxiliaram na compreensão dos métodos e técnicas utilizados por eles nas resoluções dos exercícios.

Ao desenvolver os problemas inseridos no programa Aplusix o aluno pode optar por editar o texto do problema. Desta forma ele tem à direita de sua tela as questões de cada seção, facilitando a visualização das questões e das figuras como apresentamos abaixo:

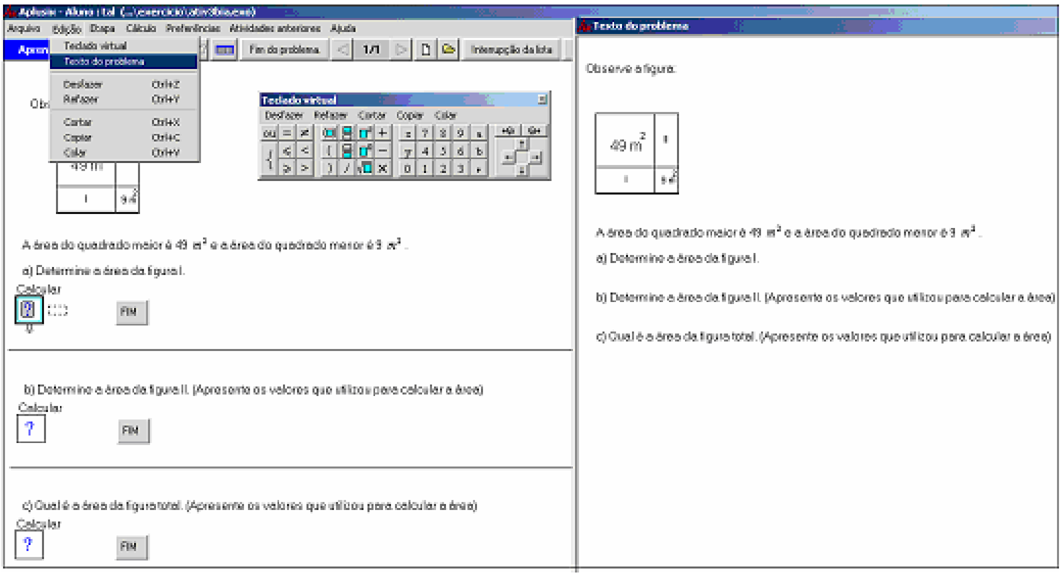


Figura 1.6 – Edição do texto do problema no programa Aplusix

Outro recurso do programa Aplusix é a possibilidade de criar seqüências de atividades e inseri-las no banco de dados, utilizando o *Aplusixeditor*. Este recurso foi utilizado em nossa pesquisa, pois criamos uma seqüência de atividades em função dos objetivos que pretendíamos, personalizando as ações possíveis para o aluno e as retroações oferecidas pelo programa. É possível no *Aplusixeditor* inserir atividades de dois tipos: Exercícios e Problemas. Nestas atividades há opção de escolha pelo professor ao inseri-las, ou pelo aluno quando recorre ao banco de dados para resolver na modalidade “Aprendizagem” ou “Teste”.

Para inserir exercícios no banco de dados há quatro opções: Calcular, Desenvolver, Fatorar ou Resolver. Bastam digitar a expressão e salvar em uma pasta “Exercícios”, localizada nos aplicativos do Aplusix. Abaixo um exemplo para inserir um exercício na lista:

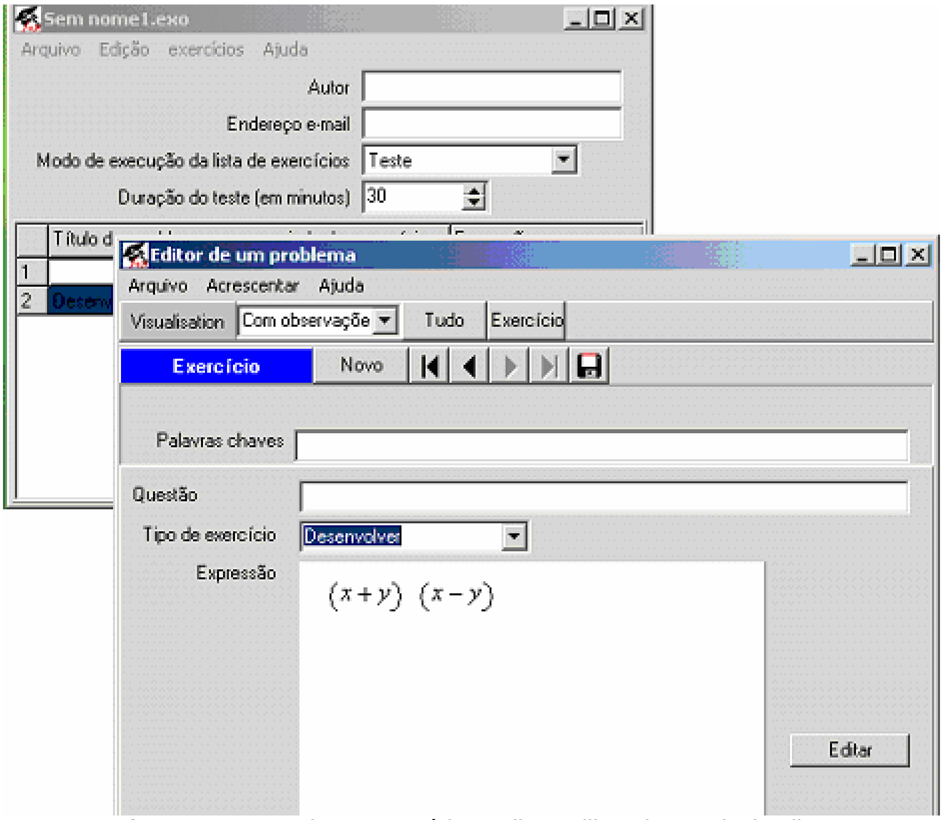
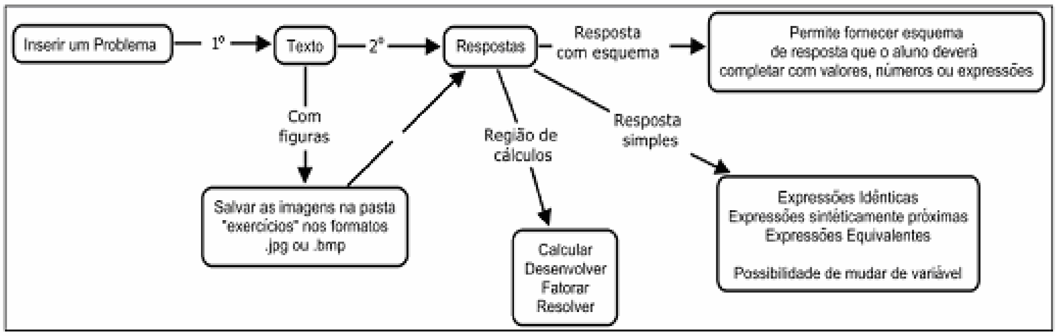


Figura 1.7 - Inserir um exercício na lista utilizando o *Aplusixeditor*

Inicialmente o professor faz sua opção no “Modo de execução da lista de exercícios”, Aprendizagem ou Teste e programa o tempo de duração; no caso do teste, escolhe o tipo de exercício (Calcular, Desenvolver, Fatorar ou Resolver), digita a expressão e para finalizar deve salvar na pasta “Exercícios”.

Para inserir um problema no banco de dados do Aplusix, primeiro o professor digita o texto do problema e depois faz a opção pelo tipo de resposta. Conforme quadro abaixo:



Quadro – 1.2 Esquema para inserir um problema no banco de dados do Aplusix

Na inserção de problemas na lista do Aplusix, é possível também incluir figuras. Inicialmente digita-se a pergunta no campo "Texto" do editor, o problema é enunciado em língua natural.

Um problema pode ter várias questões que são chamadas de "Seções". No campo "Texto", para a inserção de uma figura é utilizado o menu do botão direito do *mouse*, as figuras devem estar previamente salvas na pasta "Exercícios" dos aplicativos do Aplusix no formato *bmp*. Algumas das figuras utilizadas em nossa pesquisa foram construídas no programa *Cabri-Géomètre*, depois transferidas (copiar/colar) para o programa *Paint* onde são salvas em bitmap (formato bmp). O resultado dessa inserção é um item "apx:img" , como mostra a figura abaixo:

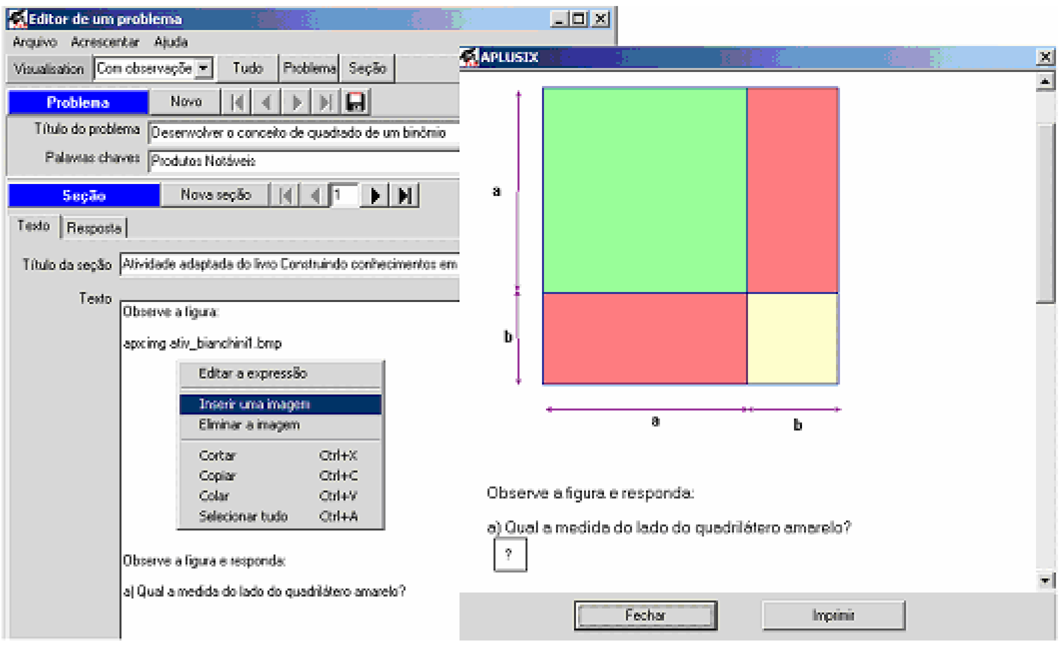


Figura 1.8 - Inserir uma figura na lista utilizando o *Aplusixeditor*

Para editar a resposta esperada deve-se clicar na pasta “Resposta” e escolher um tipo de resposta entre Região de cálculos, Respostas simples ou Respostas com esquema, como mostra a figura:

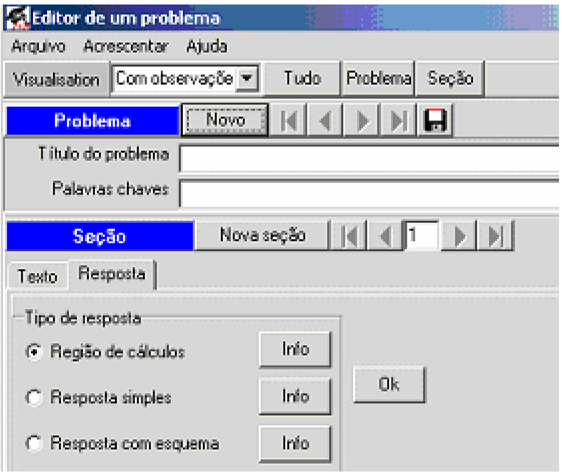


Figura 1.9 - Opções de respostas ao inserir problemas

- Região de cálculos. Escolhe-se o tipo de exercício (Calcular, Desenvolver, Fatorar ou Resolver), edita-se a expressão e escolhe entre fornecer a expressão inicial ao aluno ou deixar que ele escreva a expressão inicial.
- Resposta simples. Edita-se a resposta esperada e escolhe por um modo de comparação entre a resposta esperada e a resposta do aluno.

Tomemos o exemplo, Figura 1.10, um problema para representar com uma expressão algébrica a sentença: A área do quadrado de lado igual a (n+1). A resposta esperada foi editada como $(n+1)^2$.

Figura 1.10 - Exemplo de resposta simples do *Aplusixeditor*

O professor faz a opção se há possibilidade de mudar a variável e o modo de comparação entre a resposta esperada e a resposta do aluno:

-Expressões idênticas;

-Expressões sintaticamente próximas: neste modo o Aplusix utiliza a comutatividade, a associabilidade e as simplificações para a comparação, entre a resposta do aluno e a resposta esperada; se o aluno responder $(1+n)^2$ ou $(1n+1)^2$ sua resposta será aceita;

- Expressões equivalentes, neste modo o Aplusix utiliza a equivalência para efetuar a comparação; se o aluno responder (n+1)(n+1) ou n^2+2n+1 sua resposta será aceita.

- Resposta com esquema. Permite fornecer expressões que o aluno completa ou substitui por valores, números ou expressões.

No Brasil podemos encontrar o programa Aplusix em versão de demonstração no site[7] oficial, mas ainda não se encontra à venda. Em alguns países como França, Itália e Reino Unido ele já é comercializado.

Para utilizar o programa neste estudo, obtivemos uma autorização de uso exclusivo para pesquisa.

Incluímos o programa Aplusix como auxiliar para a aprendizagem de produtos notáveis, pois tem iguais recursos aos sugeridos nos PCN:

---

[7] http://aplusix.imag.fr.

proporcionam o desenvolvimento da autonomia do aluno possibilitando: a ação, reflexão e criação de soluções das atividades matemáticas; adapta-se ao ritmo de aprendizagem de cada um e permite que o aluno aprenda com seus erros. Nos PCN esses recursos são considerados um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos e podem contribuir para que o processo de ensino e de aprendizagem de matemática se torne uma atividade experimental mais rica.

1.7 Algumas Pesquisas Com o Programa Aplusix

Em nosso levantamento bibliográfico, encontramos duas pesquisas que fizeram uso do programa Aplusix e nos auxiliaram no desenvolvimento de nosso estudo.

1.7.1 Um Estudo com os Números Inteiros Usando o Programa Aplusix com Alunos de 6ª Série do Ensino Fundamental por Renata Siano Gonçalves (2007)

A pesquisa de Gonçalves (2007) apresenta um estudo sobre a aprendizagem de oito alunos do 7° ano do ensino fun damental sobre números inteiros. Seu objetivo principal foi estudar a resolução de situações-problema envolvendo números inteiros por meio da ferramenta computacional, o programa Aplusix.

Diante da necessidade de uma aluna utilizar papel para representar um problema, Gonçalves ressalta: “Podemos ressaltar que o programa Aplusix possui suas limitações nesse aspecto, pois não disponibiliza de um ambiente em que o aluno represente seu raciocínio por meio de figuras de uma forma espontânea e criativa.” (p. 77).

Cita outras desvantagens do uso do programa Aplusix no processo de ensino e de aprendizagem:

> Pudemos perceber também algumas desvantagens, ou seja, algumas ferramentas que o programa não proporciona e que sentimos falta, por exemplo: o programa não permite o uso de construções de desenhos, representações que muitas vezes os alunos precisam para expor o seu raciocínio; outra fonte que o

> programa poderia obter é um ambiente em que os alunos pudessem pesquisar, relacionar e comparar teorias juntamente com suas propriedades favorecendo a pesquisa e o estudo dos conteúdos selecionados pelo Aplusix. (p.81).

Apesar das limitações do programa citadas por Gonçalves, ela relaciona algumas vantagens do uso do Aplusix com as ferramentas:

- *Autocorreção*, o aluno pode rever e alterar de imediato ou posteriormente todas as passagens de atividades resolvidas no modo Aprendizagem ou Teste;
- *Videocassete*, permite visualizar todas as ações realizadas no desenvolvimento das atividades.
- *Aplusixeditor*, permite criar arquivos de exercícios ou de problemas.

Em nossa pesquisa, utilizamos as ferramentas videocassete e *aplusixeditor*, o que será explicado detalhadamente neste trabalho.

A pesquisadora disponibiliza no apêndice de sua dissertação um manual detalhado do Aplusix versão 1.73, mais abrangente do que o disponível no site[8] oficial. Esta versão, 1.73, ficou disponível no site oficial no período de 2005 e 2006. Atualmente a disponibilidade do programa é a versão modificada, Aplusix II, que possibilita inserir imagens em seus problemas, recurso utilizado nesta pesquisa sobre produtos notáveis.

1.7.2 Estudo de Dificuldades na Aprendizagem da Fatoração nos Ambientes: Papel e Lápis e no *Software* Aplusix por Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato (2007)

Em sua pesquisa com 25 alunos do nono ano do ensino fundamental, Burigato (2007) apresenta um estudo de dificuldades na aprendizagem da fatoração de expressões algébricas nos ambientes: papel e lápis e no *software* Aplusix, com o objetivo de:

---

[8] http://aplusix.imag.fr.

- Identificar teoremas em ação[9] utilizados pelos alunos ao fatorar expressões algébricas;
- Investigar a estabilidade dos teoremas em ação construídos pelos alunos. (p.24).

O quadro teórico utilizado para o estudo é a proposta de Gérard Vergnaud sobre a Teoria dos Campos Conceituais, buscando identificar os teoremas em ação utilizados pelos alunos ao fatorar uma expressão algébrica.

Inicialmente os estudantes realizaram um teste diagnóstico com doze questões de fatoração utilizando o *software* Aplusix. Das questões de fatoração desse teste, seis envolvem fatoração com produtos notáveis, são elas:

3. Fatore: $x^2 - 16$
4. Fatore: $x^2 + 4x +4$
7. Fatore: $(x-2)(x+1)+3(x+1)$
8. Fatore: $(x-2)^2+x^2 -4$
10.Fatore: $4x^2- 4x +1$
11.Fatore: $x^2- 2x +1$

(Burigato, 2007, p.51)

O objetivo da autora ao incluir estas questões no teste diagnóstico foi o de observar se os alunos conseguem fatorar os trinômios quadrados perfeitos e a diferença de quadrados.

Após o teste diagnóstico, a turma foi dividida em dois grupos, um grupo realizou 10 atividades da seqüência didática em papel e lápis e o outro com o *software* Aplusix.

Os objetivos das atividades da seqüência didática estão relacionados no quadro abaixo:

[9] Teoremas em ação são os conhecimentos que os alunos consideram pertinentes para tratar uma situação proposta, contudo, em alguns casos, eles podem não ser adequados fazendo com que os alunos venham a cometer erros (Vergnaud, *apud* Burigato, 2007. p.2).

Atividades	Tarefa	Objetivo das atividades
I , II e III	Colocar o fator comum em evidência.	Verificar quais dificuldades os alunos apresentam ao tentar fatorar colocando um fator comum em evidência.
IV, VI e VIII	Desenvolver os produtos notáveis: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos e produto da soma pela diferença de dois termos.	As atividades foram trabalhadas com a intenção de dar suporte para o reconhecimento do trinômio na fatoração dos produtos notáveis das atividades V, VII e IX que envolvem as três situações: quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença de dois termos, por isso, as resoluções dessas atividades não foram analisadas pela autora.
V, VII e IX	Fatorar polinômios que envolvem as três situações: quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença de dois termos.	Analisar as dificuldades e identificar os possíveis teoremas em ação.
X	Fatorar todos os tipos de polinômios trabalhados nas atividades anteriores.	Verificar se as dificuldades apresentadas e os teoremas em ação falsos, utilizados anteriormente se repetem.

Quadro 1.3 - Objetivo das atividades da seqüência didática

Nas análises das resoluções dos alunos nas atividades (V, VII e IX), a pesquisadora observou que eles apresentaram dificuldade na fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de quadrados; que as dificuldades estão na multiplicação de monômios, redução de termos semelhantes, extração da raiz quadrada de termos que são quadrados perfeitos, tentativa de extrair a raiz de termos que não são quadrados perfeitos.

Burigato (2007) considera ter atingido o objetivo em identificar algumas dificuldades que os alunos apresentam em fatorar expressões algébricas, destacando os teoremas em ação utilizados nas resoluções das atividades. Abaixo relacionamos os teoremas em ação falsos mais utilizados nas atividades V, VII e IX:

Fatorar as expressões:	Resposta esperada (correta)	Falsos
$x^2 + 2ax + a^2$	$(x+a)^2$	$(x+2a)^2$
$x^2 + a^2 + 2ax$		$(x+2ax)^2$
$x^2 - 2ax + a^2$	$(x-a)^2$	$(x-2a)^2$
$x^2 + a^2 - 2ax$		$(x+a)^2$
$a^2x^2 + 2abx + b^2$	$(ax+b)^2$	$(ax+2ab)^2$
		$(x+2ax)^2$
$a^2x^2 - 2abx + b^2$	$(ax - b)^2$	$(ax+b)^2$
		$(a^2x+b^2)^2$
$x^2 - a^2$	$(x-a)(x+a)$	$(x-a^2)(x+a^2)$
$a^2x^2 - b^2$	$(ax-b)(ax+b)$	$(a^2x-b)(a^2x+b)$
		$(ax-b^2)(ax+b^2)$
		$(a^2x-b^2)(a^2x+b^2)$

Quadro 1.4 – Teoremas em ação falsos na forma geral utilizados nas atividades V,VII e IX

A pesquisadora buscou também em seu estudo avaliar a utilização do *software* Aplusix. Observou que “os alunos se mostraram mais motivados a fazer várias tentativas de resolução das atividades em função das retroações que ele oferece” (Burigato, 2007. p.127).

O recurso do videocassete em seu estudo possibilitou observar o uso de vários teoremas em ação falsos, utilizados no decorrer das atividades, pois proporciona um maior acesso às resoluções dos alunos.

Observou que nos resultados do grupo que utilizou o *software* Aplusix houve aplicação de mais teoremas em ação corretos ao final das questões do que o grupo de alunos que utilizou papel e lápis, portanto considerou que o grupo do Aplusix se saiu melhor e sugeriu a integração do *software* em atividades matemáticas, “cabendo ao professor o papel de mediador nesse processo” (Burigato, 2007. p.128).

1.7.3 Síntese das Leituras

As leituras de pesquisas que fizeram uso do programa Aplusix, Gonçalves (2007) e Burigato (2007), nos auxiliaram bastante para o desenvolvimento de nosso trabalho.

As vantagens dos recursos do *aplusixeditor*, citada por Gonçalves (2007), foram de grande importância em nossa pesquisa. Inserimos uma seqüência de atividades entre problemas e exercícios com o objetivo de observar a coordenação de registros de representação.

Quanto à autocorreção, outro recurso do programa, não consideramos necessário utilizá-la, embora no estudo piloto um dos alunos ao desenvolver as atividades do pré-teste a tenha utilizado. Não era a nossa intenção naquele momento, pois o objetivo do teste era diagnosticar seus conhecimentos prévios.

Gonçalves (2007) expõe a limitação do programa ao citar a falta de um ambiente que permita a construção de desenhos. Essa desvantagem para nossa pesquisa fez com que optássemos por desenvolver uma das questões de nossa seqüência de atividades em papel e lápis.

Burigato (2007) desenvolveu seus estudos identificando os teoremas em ação, utilizados pelos alunos na fatoração de expressões algébricas inclusive de produtos notáveis e utilizou o programa Aplusix como um recurso para suas análises. Em nossa pesquisa, a seqüência de atividades tem seu foco na aprendizagem de produtos notáveis incluindo a fatoração destes. Pudemos observar que as dificuldades dos alunos, detectadas por Burigato (2007), em trabalhar com a fatoração de expressões algébricas utilizando-se de propriedades operatórias para: multiplicação de monômios, redução de termos semelhantes e extrair raiz quadrada conduziram a teoremas de ação falsos (erros). Tais dificuldades também ocorreram com os sujeitos de nossa pesquisa.

Fizemos uso do videocassete, um recurso do programa facilitador para as análises, citado por Gonçalves (2007) e Burigato (2007), pois proporciona um maior acesso às resoluções dos alunos. Em nossa pesquisa, tal recurso foi fundamental para nossas análises, logo relatamos todos os comandos nas resoluções das atividades propostas.

CAPÍTULO II

2. REFERENCIAL TEÓRICO

A dificuldade de compreensão de conceitos matemáticos, em particular da linguagem algébrica, os obstáculos encontrados no estudo de polinômios, assim como no aprendizado de produtos notáveis, como comprovam os resultados de desempenho dos alunos pode levar ao fracasso escolar. Para entender melhor essa problemática, pautamo-nos nos fundamentos da teoria desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval[10] sobre registros de representações semióticas; procuramos investigar se há a coordenação desses registros diante de problemas envolvendo Produtos Notáveis.

Utilizamos também para o desenvolvimento de nossa pesquisa alguns aspectos da metodologia denominada de Engenharia Didática, o que justificamos pelo fato de se tratar de uma concepção que dá importância tanto à dimensão teórica, como à experimental da pesquisa.

2.1 Registros de Representações Semióticas

A teoria de Raymond Duval trata das dificuldades que os alunos têm na compreensão da matemática e, a partir desse fato, adota uma abordagem cognitiva capaz de levá-los a compreender melhor os processos matemáticos.

A comunicação em matemática é estabelecida por meio de representações. Para Damm (1999):

> Os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações. (p.135)
> Os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma

[10] Raymond Duval, Filósofo e psicólogo, desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação matemática (IREM) de Estrasburgo, na França (1970-1999). Atualmente é professor emérito na Université de Littoral Cote d'Opale, França. Com importantes estudos relativos à Psicologia Cognitiva.

> representação. Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. (p. 137).

De acordo com Duval (2003), é necessária a mobilização dos registros de representações, assim como é de extrema relevância na compreensão em matemática a distinção entre um objeto matemático e a representação que se faz dele.

> A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. (p.21).

Para Duval, as duas características que diferenciam a atividade cognitiva do pensamento matemático em relação a outros domínios do conhecimento são: as representações semióticas e a grande variedade de representações semióticas

As representações semióticas que tornam possível efetuar certas funções cognitivas do pensamento humano por meio de dois aspectos:

- A representação do objeto matemático, chamada de “semiosis”, que significa produzir e a apreender uma representação semiótica;
- O próprio objeto matemático, a “noésis”, que significa a apreensão conceitual do objeto.

A apreensão conceitual só será alcançada quando o indivíduo conseguir articular os distintos registros de representação de um determinado conceito coordenando a *semiosis* e a *noésis*.

A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática (sistema de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, etc), originam os registros e permitem a passagem, coordenadamente, de um para outro durante uma resolução da atividade matemática.

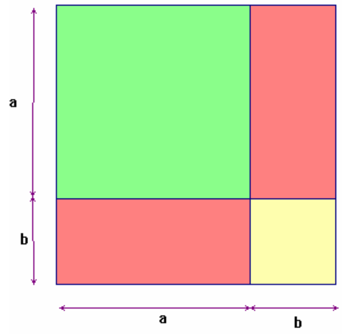
O que garante apreender o objeto matemático, a conceitualização, é a coordenação entre vários registros de representação. Segundo Duval, "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas." (p.15).

Para análise da atividade matemática numa perspectiva de aprendizagem e de ensino, Duval (2003), afirma que há dois tipos de transformação de representações semióticas: *os tratamentos e as conversões:*

Os tratamentos modificam as representações num mesmo registro, como por exemplo, ao desenvolver a expressão (x - a) (x + a) temos: $(x-a)(x+a) = x^2 + ax - ax – a^2 = x^2 – a^2$; a atividade foi apresentada no registro algébrico e o tratamento foi efetuado dentro desse mesmo registro.

As conversões transformam as representações e consistem em mudar de registro conservando os mesmo objetos denotados, vejamos os exemplos:

- Representar com uma expressão algébrica a sentença "O quadrado de um número". A atividade consiste na conversão de uma expressão no registro da língua natural para o registro algébrico x^2.
- Representar a área total da figura utilizando uma expressão algébrica:



a atividade consiste na conversão de um registro figural para o registro algébrico: $(a+b)^2$.

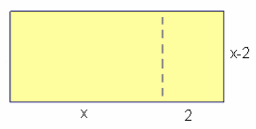
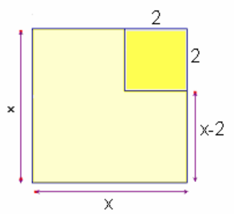
No entanto, a atividade de conversão apresenta os fenômenos: variações de congruência e não-congruência e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

O fenômeno de congruência ocorre quando comparamos a representação no registro de partida com o registro de chegada e a conversão verificada é uma situação de simples codificação**.** Se a representação não transparece, ocorre a não-congruência.

Duval (2003) apontou a existência de muitos fatores que determinam o caráter de congruência ou não-congruência entre representações de um mesmo objeto que se originam de sistemas semióticos diferentes. Existem três condições a serem satisfeitas para que dois sistemas semióticos de representação sejam congruentes:

- Correspondência semântica entre unidades significantes que as constituem;
- Conversão de uma unidade significante da representação de partida a uma só unidade significante na representação de chegada;
- A conservação da ordem das unidades nas duas representações.

Quando estão satisfeitas as três condições, o fenômeno é de congruência. Caso contrário, o fenômeno é de não congruência. Abaixo um exemplo de cada fenômeno:

Registro de Partida	Registro de chegada	Fenômeno
A diferença do quadrado do número *x* e o quadrado do número *y.*	$x^2 - y^2$	Congruência
Representar a expressão x^2-4 por meio de uma figura geométrica.	$(x+2)(x-2)$  ou  	Não-Congruência

Quadro 2.1 - Exemplos de fenômenos de congruência e não-congruência

Observando as conversões no Quadro 2.1, no primeiro exemplo, vimos que ocorre o fenômeno de congruência, há uma correspondência entre o enunciado e a expressão algébrica, há conversão de uma representação de partida em uma só unidade na representação de chegada.

No exemplo em que ocorre o fenômeno de não-congruência há necessidade de efetuar uma mudança da expressão x^2-4 para outra equivalente (x+2)(x-2) e depois construir um retângulo de lados *(x+2)* e *(x-2)*. Podemos afirmar que não houve a conservação na ordem das unidades.

Damm (*apud* Passoni e Campos, 2003) constatou em suas pesquisas que os problemas não-congruentes são os que persistem como obstáculo para os alunos.

O outro tipo de fenômeno é o do sentido da conversão. Normalmente professores dão ênfase somente a um sentido, acreditando que seria automática a conversão no outro. É necessário que o professor elabore questões que permitam o movimento em ambos. Vejamos um exemplo em que a conversão é representada dessa forma:

Registro de Partida	Registro de Chegada
O quadrado de um número	x^2
$y^2 - 1$	A diferença entre o quadrado de um número e um

Quadro 2.2 - Exemplo de registro de partida e registro de chegada

Alguns métodos necessários numa pesquisa que facilitem a observação da mobilização de vários registros de representação semiótica e a conversão dessas representações são sugeridos por Duval (2003) :

> Em toda análise de tarefa como em toda resolução de problemas, é necessário *distinguir cuidadosamente o que sobressalta no tratamento em um registro e aquilo que sobressalta em uma conversão*, esta consistindo em uma simples mudança de registros ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes. (p.24).
> [...]Todos os registros de representação não possuem a mesma natureza. Distinguimos dois registros monofuncionais, os quais foram desenvolvidos com finalidades específicas de tratamento, e os registros multifuncionais, que foram desenvolvidos como a língua natural.(p.25).

Duval classifica os registros semióticos em discursivos e não-discursivos, cada um dividindo-se em duas categorias, multifuncionais e monofuncionais. Nesta pesquisa, os registros semióticos trabalhados foram:

	Representação Discursiva	**Representação Não-Discursiva**
Registros Multifuncionais Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua Natural ▪Associações Verbais (conceituais). ▪Forma de raciocinar: argumentação a partir de observações.	Figuras geométricas planas, apreensão operatória, construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos	▪Sistema de escritas: Numéricas (posicional de base dez e fracionária) e algébricas. ▪Cálculo numérico e algébrico.	-

Quadro 2.3 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático utilizados em nossa pesquisa

Portanto, os métodos necessários e relevantes para Duval são: destacar em toda resolução de problemas o tratamento e a conversão de registros e diferenciar os registros monofuncionais dos multifuncionais. Assim, o uso da conversão como instrumento de análise destaca as variáveis cognitivas próprias do funcionamento de cada registro e explora as variações de congruência e não-congruência que podem surgir entre dois registros nas múltiplas representações dos objetos matemáticos.

Em nossa pesquisa, consideramos até dois registros de representação de um mesmo objeto matemático (produtos notáveis):

- Conversão do registro da língua natural para o registro algébrico;
- Conversão do registro algébrico para o registro da língua natural;
- Conversão do registro figural (representação geométrica) para o sistema de escrita numérica, registro numérico;
- Conversão do registro figural para sistema de escrita algébrica, registro algébrico; e
- Conversão do registro algébrico para o registro figural.

Além das conversões dos registros de representação, incluímos também o tratamento dentro de um mesmo registro deste objeto matemático:

- Tratamento dentro do registro algébrico;
- Tratamento dentro do registro numérico.

2.2 Referencial Metodológico - Engenharia Didática

A engenharia didática surgiu no ensino da matemática na década de 1980 e é considerada por estudiosos como uma metodologia de investigação, cujo principal objetivo é organizar o trabalho didático na exploração do domínio do conhecimento.

Artigue (1996) compara o trabalho da engenharia didática com o trabalho do engenheiro que se apóia em conhecimentos da ciência, pois ambos se submetem a um controle científico ao mesmo tempo em que trabalham sobre objetos menos precisos.

Na engenharia didática o trabalho do professor, ao elaborar ou escolher uma seqüência de ensino, deve levar em conta, de forma integrada: o domínio do conhecimento, a experiência prévia do aluno, o papel do professor e dos educandos. Para tanto, em cada seqüência, é necessária uma definição do significado da aprendizagem.

Artigue (1996, p.196) caracteriza esta metodologia como: "[...] um esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino."

Artigue (1996) distingue dois níveis da engenharia didática que se completam, a microengenharia (estudo de um determinado assunto) e a macroengenharia (estudo dos fenômenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem).

Outras duas características da engenharia didática são:

- O registro na qual se situa e pelos modos de validação que lhe estão associados, "[...] no registro de estudos de casos, e cuja validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre as análises *a priori* e a análise *a posteriori.*"(Artigue,1996. p.197).
- Instrumento para investigação na sala de aula: "Investigações que visam os estudos dos processos de

> aprendizagem de um dado conceito [...] daquelas que são transversais aos conteúdos, ainda que o seu suporte seja o ensino de um domínio preciso.” (Douady, *apud* Artigue, 1996. p. 197).

Apresentaremos e descreveremos a seguir as diferentes fases da engenharia didática descrita por Artigue (1996), são:

- Análise preliminar;
- Concepção e análise *a priori* das situações da engenharia didática;
- Experimentação;
- Análise *a posteriori* e validação.

1ª Fase - Análises preliminares

Para Artigue (1996), a primeira fase da engenharia didática: análises prévias, leva em conta os objetivos específicos da pesquisa, apoiando-se num quadro teórico didático e em conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio estudado.

Neste primeiro nível de elaboração, as análises são feitas para fundamentar a concepção da engenharia, porém, elas são retomadas e aprofundadas durante todo o desenvolvimento do projeto.

No estudo prévio das concepções dos estudantes e os constrangimentos identificados, ou seja, nas dificuldades e os erros perseverantes, a engenharia surge para gerar, de forma controlada, a evolução das concepções.

Para a primeira fase da Engenharia Didática empregada nesta pesquisa, verificamos os resultados de estudos e testes avaliativos como exames SAEB e SARESP/2005; verificamos as sugestões dos Parâmetros Curriculares nacionais (PCN) e analisamos livros didáticos. Sentimos então a necessidade de fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes, assim entrevistamos uma professora regente de classe e analisamos os cadernos de dois alunos.

2ª Fase - Concepção e análise *a priori* das situações da engenharia didática

Com as análises preliminares feita pelo pesquisador na primeira fase, são selecionadas as variáveis de comando julgadas importantes para trabalhar. Estas variáveis são de dois tipos: **macro-didática** ou global, referente à organização global da engenharia e **micro-didática** ou local, referente à organização de uma sessão ou uma fase.

A segunda fase da Engenharia Didática compreende a concepção e a análise *a priori*, consiste em descrever e analisar o objeto de estudo e fazer previsões para melhorias do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. A análise *a priori* tem uma parte de descrição e outra de previsão.

Para Artigue (1996), as descrições e previsões das análises *a priori* procuram:

- Descrever as opções do nível local (relacionando ou não com as escolhas globais) e as características da situação a-didática[11] decorrentes de cada escolha;
- Analisar as possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que o aluno dispõe durante a execução da seqüência;
- Prever os possíveis campos de comportamentos e procurar mostrar de que forma as análises permitem controlá-los, garantindo a ocorrência de tais comportamentos que resultariam no desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Estas elaborações de hipóteses são comparadas posteriormente com os resultados finais e levam à verificação da validação ou não dessas hipóteses.

Nesta pesquisa, elaboramos uma seqüência de atividades e analisamos o registro de representação de cada atividade proposta e seus objetivos. Destacamos quais os conhecimentos prévios necessários

[11] Uma situação a-didática é uma situação que pode ser vivida pelo aluno como pesquisador de um problema matemático, independente, neste sentido, do professor. O aluno sabe que o problema tem fins didáticos (novo conhecimento).

para as resoluções e as possíveis dificuldades que os alunos poderiam apresentar no desenvolvimento das atividades.

3ª Fase - Experimentação

A terceira fase, a experimentação, se inicia no contato do pesquisador com a população de alunos na aplicação da seqüência didática. Nesta fase experimental, fazem-se necessários os seguintes pontos:

> - Explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa;
> - Estabelecimento do contrato didático[12];
> - Aplicação dos instrumentos de pesquisa;
> - Registros das observações feitas durante a experimentação e das produções dos alunos na sala de aula ou fora dela.
>
> (Machado, 1999, p. 206).

Neste estudo, a seqüência de atividades foi desenvolvida em três etapas: pré-teste, aprendizagem e pós-teste. Os registros das observações durante a experimentação foram feitos por meio de gravações do "videocassete", contendo todo o desenvolvimento das atividades. Contamos com a colaboração de uma observadora e gravamos também parte das sessões em uma filmadora instalada no laboratório de informática.

4ª Fase - Análise *a posteriori* e validação

Na quarta e última fase, análise *a posteriori* e validação, as análises se apóiam nos dados coletados durante a experimentação como produções de alunos e observações, são confrontados com as análises *a priori* para validação ou não das hipóteses.

Com base nos registros das observações, confrontamos as análises *a priori* para validação ou não das hipóteses.

---

[12] (Brousseau , *apud* Pais, 2001, p. 78) define contrato didático como sendo "estudo das regras e das condições que condicionam o funcionamento da educação escolar, quer seja no contexto de uma sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar, quer seja na dimensão mais ampla do sistema educativo".

CAPÍTULO III

3. PRODUTOS NOTÁVEIS EM DOCUMENTOS OFICIAIS E LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, verificamos as sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental para trabalhar produtos notáveis e analisamos três livros didáticos, consultados pela professora para a preparação de suas aulas e com a intenção de verificar como estes livros estão incorporando as propostas sugeridas nos PCN sobre esse tema. Além disso, verificamos se os mesmos apresentam na introdução de produtos notáveis ou nas atividades propostas a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental

No Brasil, a proposta dos PCN do Ensino Fundamental, em vigor desde 1998, tem como finalidade orientar as políticas públicas e as práticas escolares do ensino básico brasileiro com o objetivo de “educar para a cidadania”.

Segundo os PCN:

> A matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (BRASIL, 1998, p. 27).

Nesse caráter de desempenho das contribuições básicas para a formação do cidadão, as propostas dos PCN para os conteúdos do ensino fundamental na área de matemática são:

> [...] Números e operações que abrangem o campo da aritmética e da álgebra, espaço e formas relacionados diretamente com o campo da geometria, grandezas e medidas possibilitam a conexão entre a aritmética, álgebra, geometria e outros campos do conhecimento e tratamento da informação,

> estudos relativos a noções de estatística e de probabilidade. (BRASIL, 1998, p. 49).

Esses conteúdos são organizados em ciclos e algumas sugestões são dadas para o “fazer matemática” em sala de aula como: resolução de problemas como ponto de partida, conexões com a história da matemática, generalizações de padrões no estudo da álgebra, construção com régua e compasso no estudo da geometria, uso das tecnologias da comunicação, jogos corporativos e conexões com outras áreas do conhecimento.

Em nossa pesquisa, envolvendo uma pequena parte da álgebra, mais precisamente “produtos notáveis”, analisamos nos PCN as sugestões para a prática escolar deste assunto.

O ensino da matemática indicado para o quarto ciclo, que corresponde ao oitavo e nono anos, deve visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

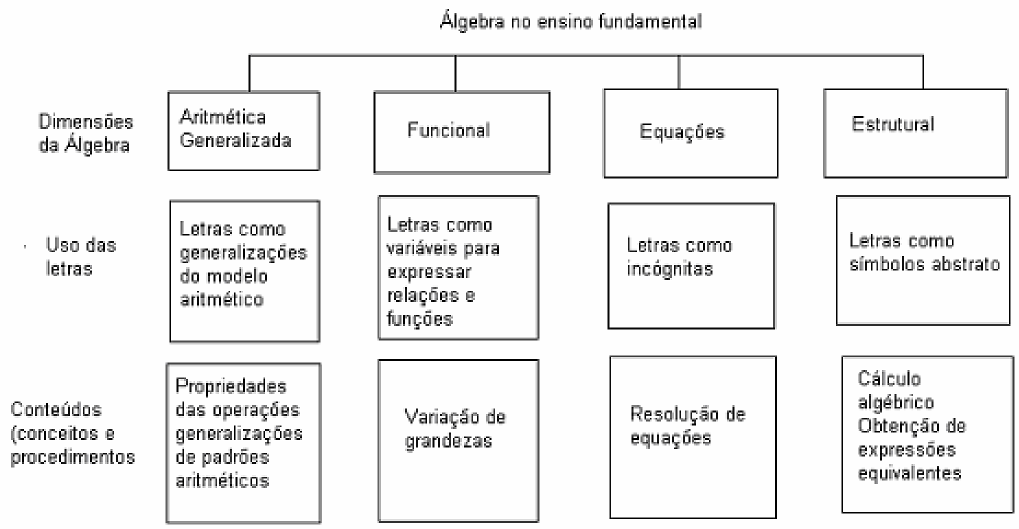
> • Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas — expressões, igualdades e desigualdades —, identificando as equações, inequações e sistemas;
> • Resolver situacões-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> • Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de independência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p. 81).

Para o quarto ciclo os PCN propõem trabalhar com situações-problema diversificadas, proporcionando ao aluno dar significado à linguagem, às idéias matemáticas e reconhecer as diferentes funções da álgebra. Assim, as propostas para o estudo da álgebra em relação aos conceitos e procedimentos nesse ciclo são:

> - Tradução de situações-problema por equações e inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades de igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.
> - Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações de primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-la, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano,

> discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.
> - Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas.
> - Obtenção de expressões equivalentes uma expressão algébrica por meio de fatorações e simplificações.
> - Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta. (BRASIL, 1998, p. 87-88).

As contribuições para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico sugerem trabalhar atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da álgebra, “interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras.” (BRASIL, 1998, p.116). Conforme quadro:

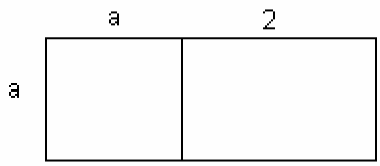


Quadro 3.1 - Dimensões da álgebra no ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 116)

Segundo os PCN “Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões ao longo do terceiro e quarto ciclos.” (1998, p.117).

Das diferentes interpretações da álgebra apresentadas no quadro, vamos exemplificar aqui apenas a dimensão estrutural que está diretamente relacionada com o nosso estudo. Os PCN (1998, p.121) indicam um exemplo:

> A “visualização” de expressões algébricas, por meio dos cálculos de áreas e perímetros de retângulos, que é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas, como:



> 1º) Cálculo da área do retângulo pela multiplicação das dimensões do retângulo: *a* e *a*+2: a.(a+2).
>
> 2º) Cálculo da área do retângulo pela soma das áreas das figuras que o compõem, o quadrado e o retângulo menor: a^2+2a.
>
> Obtendo-se assim $a.(a+2) = a^2 + 2a$.

Nesse estudo, exploramos os conceitos dos produtos notáveis por meio de cálculos de área de retângulos e a sua representação geométrica, pois de acordo com os PCN: “A utilização desses recursos possibilita ao aluno conferir um tipo de significado às expressões.”(BRASIL,1998, p.121).

Segundo os PCN, as contribuições dos recursos tecnológicos são facilitadores no processo ensino e aprendizagem. Podemos considerar que:

> - Relativizam a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
> - Evidenciam para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de vários problemas;
> - Possibilitam o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
> - Permitem que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo (BRASIL,1998, p.43).

A inclusão de um programa computacional de álgebra em nosso trabalho vem ao encontro das finalidades do uso de tecnologias nas aulas de matemática que os PCN colocam:

> - Como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;
> - Como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
> - Como meio para desenvolver autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem: pensar, refletir e criar soluções;

- Como ferramenta para realizar determinadas atividades - uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados, etc. (BRASIL, 1998, p. 44).

3.2 Livro Didático

Incluímos neste capítulo uma breve análise de três livros didáticos do 8º ano (7ª série), utilizados para consulta pela professora regente das turmas que participaram desta pesquisa.

Consideramos que o conhecimento produzido em sala de aula por professor e aluno é fortemente influenciado pelo livro didático. Autores dos PCN (1998, p.22) afirmam que: "...os professores apóiam-se quase que exclusivamente nos livros didáticos...", são estes muitas vezes os responsáveis pelo direcionamento do trabalho do professor no ano letivo.

Os livros analisados são amplamente usados no território nacional, pois são distribuídos pelo Ministério de Educação e Cultura - MEC para escolas públicas, portanto os julgamos um forte indicador dos saberes que são considerados importantes para serem ensinados. Dessa forma, os livros didáticos podem nos dar algumas pistas do que ocorre na sala de aula. Os livros analisados são:

- Construindo Conhecimentos em Matemática, 7ª série. Bianchini e Miani, Editora Moderna, 2000.
- A Conquista da Matemática A+Nova, 7ª série. Giovanni, Castruci e Giovanni Jr, Editora FTD, 2002.
- Tudo é Matemática, 7ª série. Luis Roberto Dante, Editora Ática, 2004

Para esta investigação, procuramos identificar se os autores das obras privilegiam os diferentes registros de representação do objeto em estudo, assim como verificar quais conversões são feitas entre os registros de partida e de chegada. Pautamo-nos também nas sugestões dos PCN, com a intenção de verificar se os autores utilizam no estudo dos produtos notáveis o cálculo de áreas e perímetro de retângulos.

Tomando o livro **Construindo Conhecimentos,** inicialmente investigamos se os autores exploraram a conversão do registro na língua natural para o registro algébrico como também no sentido contrário, do registro algébrico para o registro na língua natural.

Notamos que expressões algébricas são introduzidas por meio de exemplos que utilizam a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, depois são exploradas em algumas atividades que utilizam essa conversão e apenas duas dessas atividades utilizam a conversão no sentido contrário: do registro algébrico para o registro da língua natural, como mostra o exemplo:

Praticando

1 Escreva no seu caderno a expressão algébrica que traduz as sentenças a seguir.
a) A soma do número x com o triplo do número y. $x + 3y$
b) O quociente do número a pelo número b. $\frac{a}{b}$
c) A soma dos quadrados dos números a e b. $a^2 + b^2$
d) A terça parte do quadrado do número m. $\frac{1}{3}m^2$

2 Nas seguintes sentenças abaixo a letra x representa um número. Escreva uma sentença que corresponda à expressão algébrica:
a) $x + 4$ b) $5x - 10$ c) $\frac{x}{4}$ d) $x^2 + 2x$

Figura 3.1 - Atividades envolvendo a conversão de registros nos dois sentidos: língua natural e algébrico (Bianchini e Miani, 2000, p.46)

Os livros **Tudo é Matemática** e **Construindo Conhecimentos**, pouco exploram as conversões do registro da língua natural para o registro algébrico. O livro **A Conquista** é o que oferece mais atividades desse gênero. Os três livros apresentam timidamente situações de conversões do registro algébrico para o registro da língua natural.

A pouca atenção que os livros dedicam a essas conversões pode facilitar a aquisição de concepções erradas pelos alunos ao iniciar o estudo da álgebra.

Lochhead e Mestre (1995) apresentam conclusões de seus estudos no campo da pesquisa cognitiva e discutem algumas técnicas práticas que utilizam no trabalho docente no processo de tradução das palavras para a álgebra, considerando: “A técnica mais direta, consiste em simplesmente começar fornecendo aos alunos uma prática ampla do próprio processo de tradução, isolada dos outros aspectos da resolução de problemas.” (p.149).

Podemos observar que a prática ampla do próprio processo de tradução corresponde a elaborar propostas com um número considerável de situações em que haja conversões do registro da língua natural para o registro algébrico assim como no sentido contrário, para melhor aquisição dos conceitos e amenizar as dificuldades em resolver problemas algébricos, em particular quando envolvem a tradução da linguagem escrita corrente para a linguagem matemática.

As conversões dos registros figural e numérico são pouco exploradas nos livros analisados: o livro **Construindo Conhecimentos** apresenta duas atividades. Vejamos uma delas:

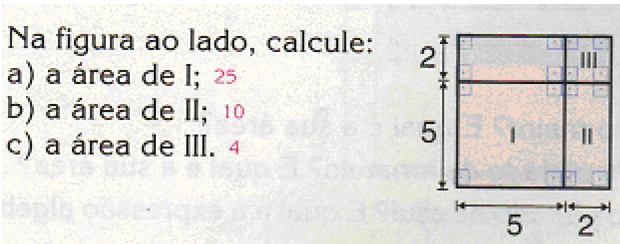


Figura 3.2 – Atividade que envolve a conversão do registro figural para o numérico (Bianchini e Miani, 2000, p. 154)

Na atividade (Figura 3.2), foram dadas medidas dos lados de um dos quadrados e de um dos lados do retângulo e pede-se a área de cada figura que compõe o quadrado maior de lado *5+2*, ou seja, espera-se que ao desenvolver a atividade formulada no registro figural o aluno faça a conversão para o registro numérico e o tratamento dentro do registro numérico ao calcular as áreas.

O livro **A Conquista** explora as conversões dos registros figural e numérico ao introduzir o conceito de raiz quadrada exata e na introdução de produtos notáveis, apresenta o exemplo:

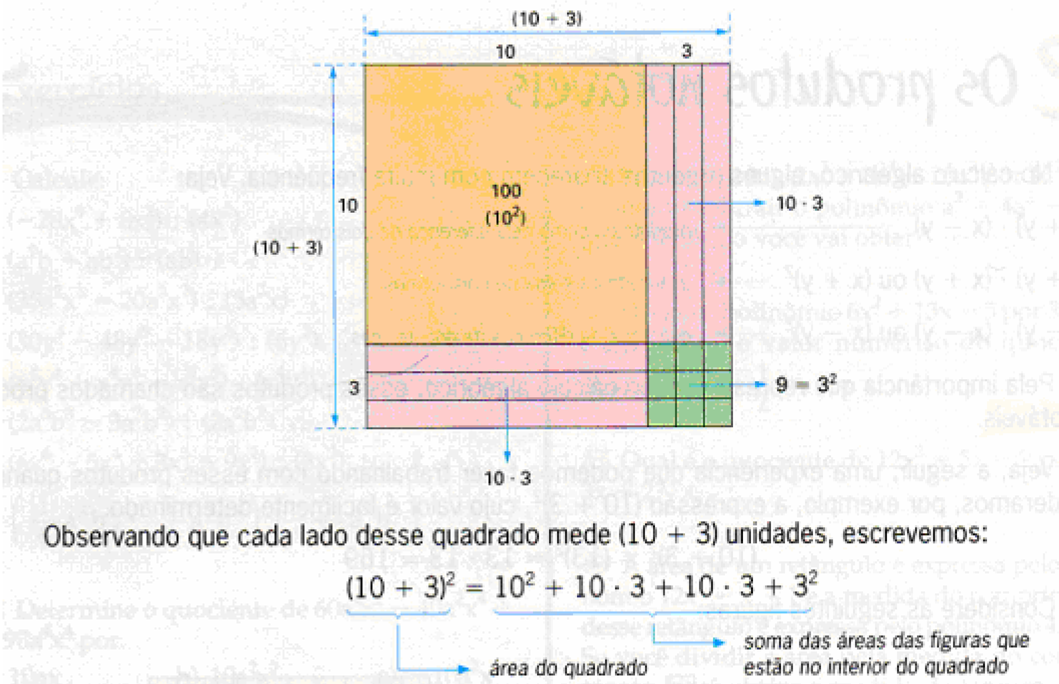


Figura 3.3 – Exemplo que envolve a conversão do registro figural para o numérico (Giovani, Castruci e Giovani Jr, 2002, p.84)

O livro **Tudo é Matemática** não apresenta exemplos ou atividades envolvendo esta conversão.

Acreditamos que a aquisição de conceitos algébricos explorados por meio de registros figurais, como sugerem os PCN, possibilita ao aluno atribuir um tipo de significado às expressões. Utilizar as conversões entre os registros figural e numérico contribuem para a compreensão dos conceitos aritméticos, que ligados às operações fundamentais, seus algoritmos e propriedades, é imprescindível para o entendimento da linguagem algébrica.

Demana e Leitzel (1995) trabalharam no projeto intitulado ANN[13] e pesquisaram sobre a necessidade dos alunos trabalharem com conceitos-chave da álgebra num contexto numérico, antes de enfrentarem as suas formalidades. Os resultados do projeto confirmaram que “os conceitos básicos da álgebra são acessíveis aos alunos em suas experiências aritméticas, por meio de cálculos numéricos e de resolução de problemas”.

Produto notável no livro **Construindo Conhecimentos**, apresenta o termo quadrado de um binômio introduzido por meio de seqüências de

---

[13] Appaching Álgebra Numerically (ANN).

atividades na seção “Fazendo descobertas”. É uma proposta que conduz à reflexão de modo que os alunos possam concluir que:

- O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo, então temos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo, temos: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

A proposta envolve conversão do registro figural para o registro algébrico; adaptamos tais atividades em nossa pesquisa, pois consideramos que as atividades proporcionam ao aluno um alto nível de investigação abrangendo os produtos notáveis.

Entre as atividades das seções “Praticando” e “Revendo”, cinco utilizam esta mesma conversão, as demais são atividades que envolvem tratamento dentro do registro algébrico.

Nesta obra, observamos que as operações com números reais e polinômios, fatoração e produtos notáveis possuem interligação com a geometria em vários exercícios contendo perímetro, área e volume, assim como sugerem os PCN. Também notamos a álgebra sendo apresentada por meio do estudo das estruturas.

Nos livros **A Conquista** e **Tudo é Matemática** os conceitos de produtos notáveis foram introduzidos de maneira muito semelhante, pelo desenvolvimento da expressão algébrica, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a.a + a.b + b.a + b.b = a^2 + 2ab + b^2$ e pela representação geométrica:

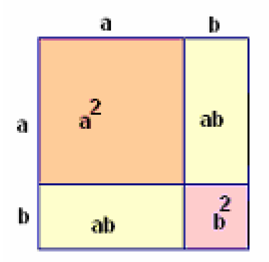


Figura 3.4 - Representação geométrica do quadrado da soma (Dante, 2004, p.165)

No livro **A Conquista**, ao término dos exemplos tanto do quadrado de um binômio quanto do produto da soma pela diferença de dois termos, há quadros apresentando o desenvolvimento dos produtos notáveis como este reproduzido a seguir:

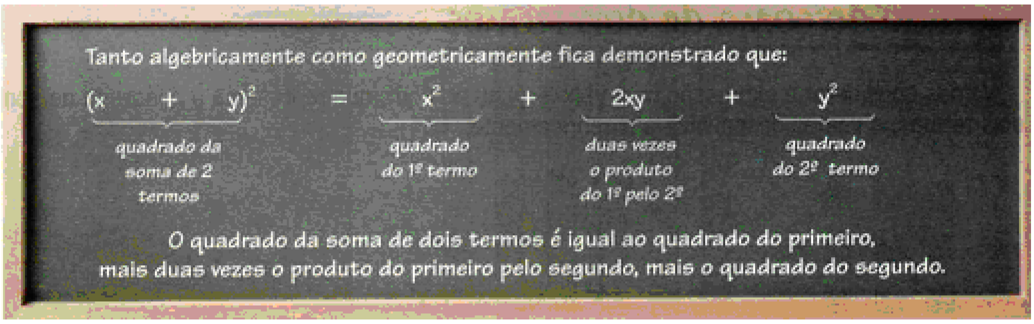


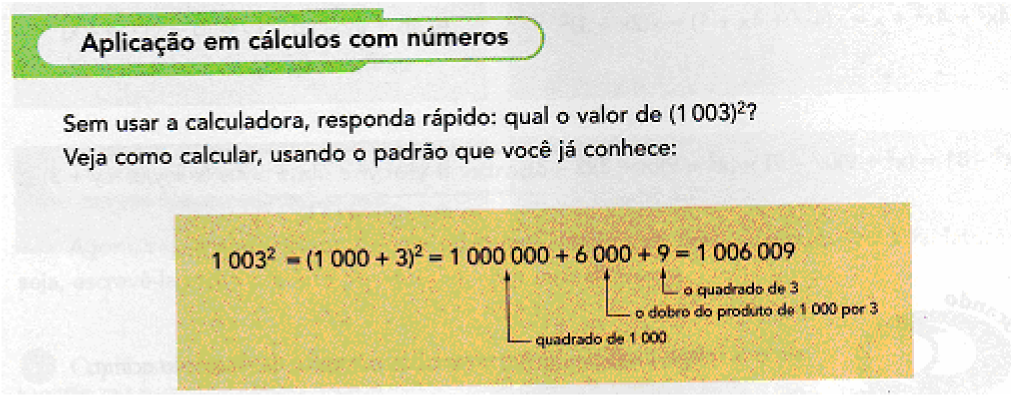
Figura 3.5 – Desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos
(Giovani, Castruci e Giovani Jr, 2002, p.86)

As atividades sugeridas nas duas obras não são da mesma forma que foram introduzidas, ou seja não envolve o registro figural para os casos de produtos notáveis e quadrado de um binômio. Há uma quantidade considerável de atividades envolvendo somente o tratamento no registro algébrico:

Forma geral	Tudo é Matemática	A conquista
$(a+b)^2$	19	15
$(a-b)^2$	30	6
$(a+b)(a-b)$	16	8

Quadro 3.2 – Quantidades de atividades de desenvolvimento dos produtos notáveis

O livro **Tudo é Matemática** traz exemplos de aplicações dos produtos notáveis e de fatoração que são explorados por meio de cálculos numéricos, simplificação de frações algébricas e resolução de equação-produto. Vejamos um exemplo:



Aplicação em cálculos com números

Sem usar a calculadora, responda rápido: qual o valor de $(1\,003)^2$?
Veja como calcular, usando o padrão que você já conhece:

$$1\,003^2 = (1\,000 + 3)^2 = \underbrace{1\,000\,000}_{\text{quadrado de } 1\,000} + \underbrace{6\,000}_{\text{o dobro do produto de } 1\,000 \text{ por } 3} + \underbrace{9}_{\text{o quadrado de } 3} = 1\,006\,009$$

Figura 3.6 - Exemplo de aplicação dos produtos notáveis em cálculo numérico (Dante, 2004, p.170)

Constatamos que nestas duas obras, **A Conquista** e **Tudo é Matemática**, a geometria envolvendo cálculo de áreas e perímetro nos estudos dos conceitos de produtos notáveis é meramente ilustrativo, pois os autores não propõem atividades desse tipo dando prioridade para uma abordagem da álgebra estritamente estrutural.

No sentido contrário, a conversão do registro algébrico para o figural inexiste nos livros **Tudo é Matemática** e **Construindo Conhecimentos** e apenas uma atividade na seção “Explorando” do livro **A Conquista**.

Ao analisar os três livros didáticos utilizados pela professora, **Construindo Conhecimentos, A Conquista** e **Tudo é Matemática** constatamos que todos seguem as considerações feitas pelos PCN e apresentam manual do professor ou orientação para o professor com sugestões para facilitar o trabalho na sala de aula.

Lopes (2000), em sua tese, analisa livros didáticos e tem como base os PCN. Considera necessário que o livro didático deva: incorporar a metodologia de resolução de problemas, orientar na determinação do conteúdo, garantir certo nível de investigação acerca do conteúdo, garantir que os conceitos sejam facilmente transferidos a novas situações, sugerir o uso de recursos institucionais complementares, sugerir indicadores e formas de avaliação e incorporar a história da matemática.

Procuramos identificar nos livros analisados se são exploradas as conversões dos registros de representação semiótica em ambos os sentidos. Observamos que os volumes do 8º ano das coleções: **A Conquista** e **Tudo é Matemática**, utilizados em nossa análise, apresentam a introdução dos conceitos de produtos notáveis empregando conversões do registro figural para o registro algébrico e o tratamento no registro algébrico. As atividades para o aluno desenvolver não possuem conversões, são propostas para empregar o tratamento dentro do registro algébrico.

O mesmo acontece com o estudo das expressões algébricas por meio de cálculos de áreas e perímetros de retângulos, que são utilizados somente para introdução dos conceitos e não nas atividades desenvolvidas pelo aluno.

O livro **Construindo Conhecimentos** apresenta tanto na introdução dos casos de produtos notáveis como nas atividades propostas conversões do registro figural para o registro algébrico, do registro figural para o registro numérico e o tratamento dentro dos registros algébrico e numérico, possui ainda interligação com a geometria em vários exercícios contendo perímetro, área e volume.

Constatamos que nas sugestões apresentadas no manual ou nas orientações do professor para facilitar o trabalho na sala de aula não há indicações de programas de computador específico para trabalhar álgebra. O livro **A Conquista** não apresenta nenhuma sugestão. Os livros **Tudo é Matemática** e **Construindo Conhecimentos,** sugerem como recurso didático o uso de planilha de cálculo, como o Excel[14], que ajuda os alunos a compreenderem fórmulas algébricas; as demais sugestões estão no campo da geometria, como os programas de computador: Logo, Cabri-Géomètre e Geometricks.

[14] Excel é um programa de computador não-educativo, mas muito usado para elaborar planilhas de cálculo, entender fórmulas e construir gráficos.

CAPÍTULO IV

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa tem como objetivo analisar procedimentos que os alunos utilizam ao desenvolver os produtos notáveis. Para atingir esse objetivo, optamos por um estudo diagnóstico de abordagem qualitativa com o auxílio de novas tecnologias e procuramos adaptar a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática. Seu processo experimental é composto de quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, experimentação e, por último, a análise *a posteriori* e validação.

Participaram desta pesquisa 7 alunos de 8º e 9º anos de uma escola pública de São Paulo. Como este grupo de alunos já estudou o conceito de produtos notáveis em sala de aula, sentimos a necessidade de fazer um levantamento dos seus conhecimentos prévios.

Analisamos os cadernos de dois deles, o que nos ajudou na elaboração das atividades, pois consideramos que conhecer os conceitos já apresentados aos alunos nos auxiliaria na proposta de atividades que nos permitiram partir de questões similares às já estudadas para outras diferenciadas, como por exemplo, atividades envolvendo conversão do registro figural para o algébrico ou numérico.

Entrevistamos a professora regente da classe para colher informações sobre o ensino deste conteúdo no ano de 2006 para esses mesmos alunos.

Para o estudo da aprendizagem dos produtos notáveis, desenvolvemos uma seqüência de atividades que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico, focado numa dimensão estrutural da álgebra, a qual utiliza letras como símbolos abstratos e cálculo algébrico para obtenção de expressões equivalentes.

Utilizamos também, como um recurso facilitador da aprendizagem algébrica sugerida nos PCN, o cálculo de áreas de retângulos, parte das figuras trabalhadas com medidas numéricas, parte com medidas algébricas e as conversões nos dois sentidos do registro da língua natural para o registro algébrico.

Incluímos o programa Aplusix como ferramenta para a aprendizagem dos produtos notáveis, pois tem iguais recursos aos sugeridos nos PCN: proporciona o desenvolvimento da autonomia do aluno, possibilitando a ação, reflexão e criação de soluções das atividades matemáticas; adapta-se ao ritmo de aprendizagem de cada um e permite que o aluno aprenda com seus erros. Nos PCN, esses recursos são considerados um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos e podem contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de matemática se torne uma atividade experimental mais rica.

4.1 Apresentação da Escola

Como já foi dito no início deste capítulo, a pesquisa foi desenvolvida com alunos de 8º e 9º anos de uma escola pública da periferia de São Paulo, inaugurada no ano de 2000, num terreno cedido pela comunidade local, em estrutura de aço modular (latinha). Em 2006, ela foi transferida para um prédio de alvenaria, contando com 14 salas de aula, além de salas de leitura, informática, música, ateliê, acompanhamento e apoio à inclusão (SAAI) e quadra de esportes.

Possui 1310 alunos matriculados, 444 alunos no período da manhã, 455 no período da tarde e 411 no noturno; conta com uma equipe técnica formada por: diretor, assistente de diretor, dois coordenadores e um auxiliar de direção em cada período. A escola funciona em três turnos: ciclos I e II regular nos dois primeiros turnos e no terceiro, Educação de Jovens e Adultos (EJA) ciclos I e II.

Localizada em um conjunto habitacional, atendeu, de início, alunos migrantes que anteriormente moravam em comunidades carentes organizadas em favelas, e, em pequena parte, moradores dessa região primeiramente povoada.

As ações da escola são acompanhadas pela comunidade; as lideranças participam de discussões de problemas comuns do entorno e a escola tem como meta intensificar sua relação com a comunidade no processo de elaboração do Projeto Político Pedagógico (PPP), melhorando a qualidade da participação dos pais na vida dos alunos e da escola por meio de palestras de orientação e prevenção, participação na Associação de Pais e Mestres ou no Conselho de Escola, dentro do conceito de formação permanente e gestão democrática[15].

O Plano de ensino da área de conhecimento de Matemática para o ciclo II está de acordo com o Projeto Político Pedagógico da escola (ANEXO III). A matemática é considerada como um saber relacionado com a realidade sócio-cultural, tendo sua ação pedagógica:

- Na utilização de resolução/formulação de problemas de situações que emergem da realidade social do aluno e de situações matemáticas;
- Na relação linguagem informal do aluno com a linguagem simbólica da matemática;
- No desenvolvimento do pensamento matemático, reconhecendo e aplicando raciocínio lógico-matemático;
- Na interligação com outras áreas do conhecimento;
- Na aquisição de conhecimentos básicos, a fim de possibilitar sua integração na sociedade;
- No desenvolvimento de um pensamento reflexivo que lhe permita interagir, propor e contribuir para transformações na sociedade em que vive.

Para aplicação da nossa pesquisa, contamos inicialmente apenas com um computador da escola e um da pesquisadora para o estudo piloto. Após aprovação do nosso projeto de pesquisa pela Coordenadoria de Educação, pudemos instalar o programa em vinte computadores e então aplicarmos a seqüência de atividades.

---

[15] Gestão Democrática é formada por alguns componentes básicos: constituição do conselho escolar, elaboração do Projeto Político Pedagógico (PPP) de maneira coletiva e participativa; definição e fiscalização da verba da escola pela comunidade escolar; divulgação e transparência na prestação de contas; avaliação institucional da escola, professores, dirigentes, estudantes, equipe técnica; eleição direta para diretor.

4.2 Entrevista com a Professora

Com o objetivo de obter informações sobre o trabalho com expressões algébricas aplicado em sala de aula, vimos a necessidade de entrevistar a professora regente das turmas que participaram da nossa pesquisa.

No ano de 2006, a professora regente de quatro turmas do oitavo ano e uma de nono ano do ensino regular diurno da unidade escolar, aceitou participar da investigação. Esta professora terminou a graduação em matemática no ano de 1998, trabalha na rede de ensino público de São Paulo há cinco anos, os últimos dois na escola em que foi desenvolvida a nossa pesquisa.

Em entrevista (ANEXO IV), a professora afirmou que considera importante trabalhar expressões algébricas em situações ligadas à realidade do aluno, algo mais concreto, voltado para o seu dia-a-dia, pois acredita que assim poderá despertar a curiosidade do aluno para o fazer matemático.

A professora declarou se deparar com alunos desinteressados, despreparados, sem os requisitos mínimos para a compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados em sala de aula, assim, considerou muito positiva nossa iniciativa e acredita que esta pesquisa poderá contribuir no aprendizado da sala de aula; vê o laboratório de informática como um aliado acreditando que os alunos possam demonstrar maior interesse no estudo de expressões algébricas quando utilizam o computador.

Além disso, deu-nos sugestões para nossa pesquisa, como a exploração de conceitos nos quais os alunos apresentem um grau maior de dificuldades, por exemplo quando se trata de expressões algébricas, que a seu ver são: transformar uma sentença dada na língua materna para a linguagem algébrica, entender a representação de números por meio de letras e calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.

A sua sugestão: “transformar uma sentença dada na língua materna para a linguagem algébrica”, foi incluída em nossa pesquisa atividades que envolvem a conversão nos dois sentidos, registros da língua natural e algébrico.

Em nossa entrevista com a professora regente, pudemos verificar sua preocupação com a aprendizagem dos alunos, pois muitos não apresentam conhecimentos mínimos necessários para o 8º ano, fazendo com que alguns conceitos que são considerados conhecimentos prévios para novos conhecimentos sejam retomados constantemente; para ela isso pode ser um reflexo da progressão continuada[16] ou da ausência dos pais na vida estudantil do aluno, porque não há cobranças, assim os alunos não se sentem responsáveis pelo seu aprendizado.

4.3 Relatos das Anotações dos Alunos em seus Cadernos

Para elaborar a seqüência de atividades da pesquisa no programa Aplusix, tivemos a intenção de considerar os conhecimentos prévios dos alunos; portanto, como ponto de partida surge à necessidade de relatar em quais momentos do curso foram introduzidas às noções iniciais de álgebra e de que maneira foi trabalhado o assunto produtos notáveis.

Utilizamos os cadernos de dois alunos para nosso relato, apresentando em um diagrama (ANEXO V) uma visão geral dos conceitos trabalhados no ano letivo de 2006 e no primeiro semestre de 2007.

No primeiro semestre de 2006, os conteúdos trabalhados no 8° ano foram: cálculos numéricos (potenciação/radiciação); conversão do registro da língua natural para o registro algébrico; expressões algébricas: racionais inteiras e fracionárias/ irracionais; valor numérico de uma expressão algébrica e polinômios (classificação, operações).

A introdução aos conceitos algébricos iniciou-se com o texto “O uso de letras para representar números”, contando um pouco da história da matemática e da evolução do cálculo literal. Percebemos nesta introdução que a professora utilizou a história da matemática como um recurso, assim como sugerem os PCN.

---

[16] Progressão Continuada**:** Procedimento utilizado pela escola que permite ao aluno avanços sucessivos e sem interrupções, nas séries, ciclos ou fases. Propõe avaliações: constantes, contínuas e cumulativas, além de se basear na idéia de que reprovar o aluno sucessivamente não contribui para melhorar seu aprendizado. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), de 1996 propõe a progressão continuada organizada em forma de ciclos.

Percebemos também que foram exploradas as conversões dos registros de representação da língua natural para o registro de representação algébrica, conforme exemplo abaixo de uma das atividades trabalhadas:

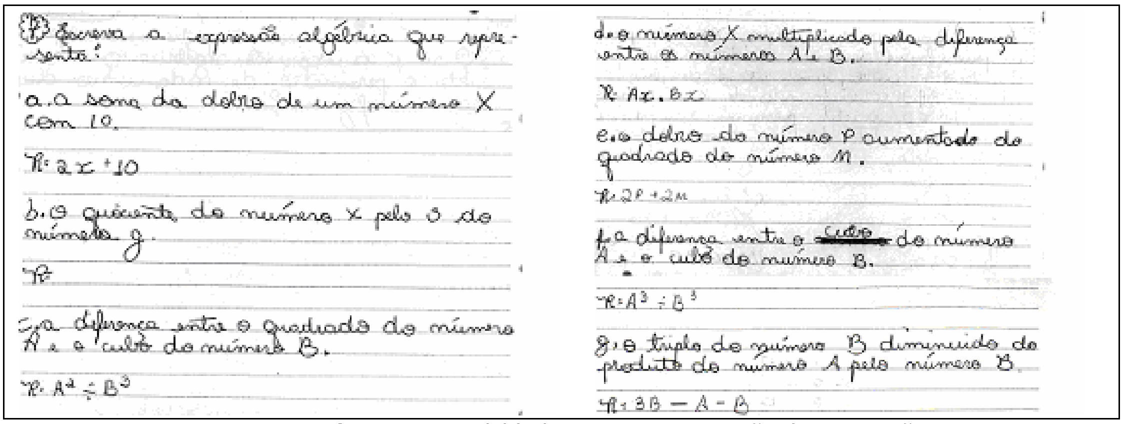


Figura 4.1 – Atividade para representação de expressões

O objetivo desta atividade é fazer a conversão da expressão dada na língua natural para o registro de representação algébrica.

Observamos que somente a alternativa *a* está correta, a alternativa *b* da questão não está bem formulada: “o quociente do número *x* pelo 3 do número g” não foi respondido pelo aluno.

No item *c*, em que se pede a diferença entre o quadrado do número *A* e o cubo do número *B*, o aluno interpretou o quadrado e o cubo corretamente, mas tomou a diferença como divisão. Respondeu : $A^2 \div B^3$ quando deveria responder $A^2 - B^3$.

No item *d,* em que se pede o número x multiplicado pela diferença entre dois números, o aluno representou *Ax.Bx* quando deveria responder *x(A – B),* que equivale a *Ax - Bx*, ignorando o significado da palavra diferença.

No item *e*, o aluno representou o quadrado do número *M* como *2M* da mesma forma que ele representou o dobro de um número *P* como 2*P*, não fazendo distinção entre o significado das palavras dobro e quadrado; a resposta correta seria $2P + M^2$.

No item *f,* o aluno interpretou da mesma forma que no item *c*, o significado do cubo dos números *A* e *B* está correto, mas considerou a diferença como quociente, portanto a resposta correta é $A^3 – B^3$.

No item *g,* em que se pede o triplo do número *B,* o aluno desenvolveu corretamente, mas diminuído do produto do número A pelo número *B* ele interpretou o produto como diferença, portanto a resposta correta é *3B – AB.*

Assim, observamos que há erros nas respostas das atividades realizadas no caderno do aluno e que somente foi explorada a conversão da representação da língua natural para o registro de representação algébrica e; não há proposta de conversão no sentido contrário, do registro de representação algébrica para o registro da língua natural.

Para Duval (2003), o fenômeno de conversão, quando se inverte o sentido, pode conduzir contrastes muito fortes de acerto. Desta forma, incluímos em nossa seqüência atividades envolvendo os dois sentidos na conversão dos registros: língua natural e algébrico.

No 2º semestre de 2006, a professora continuou o trabalho com polinômios. Os conceitos de produtos notáveis foram abordados em meados desse semestre e foram estudados os três casos:

- Produto da soma pela diferença de dois termos (x+y) (x-y);
- Quadrado da soma de dois termos (x+y) (x+y) ou $(x+y)^2$;
- Quadrado da diferença de dois termos (x-y) (x-y) ou $(x-y)^2$.

A definição dos produtos notáveis do quadrado da soma de dois termos foi introduzida por meio da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e em seguida a regra:

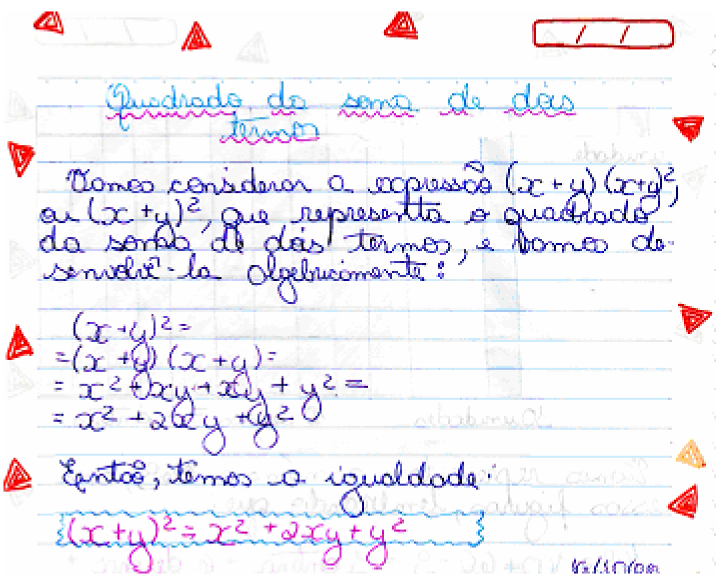


Figura 4.2 – Introdução de Produtos Notáveis: quadrado da soma de dois termos

Observamos que a frase foi escrita: *Vamos considerar a expressão (x+y)(x+y)²*; o segundo fator da multiplicação não deveria estar elevado ao quadrado. Provavelmente o aluno copiou errado da lousa e não se deu conta disso. Em seguida é apresentada a equivalência entre o quadrado da soma e a multiplicação dos dois fatores iguais (x+y)(x+y), utilizando-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para o desenvolvimento, apresentando a seguinte informação:

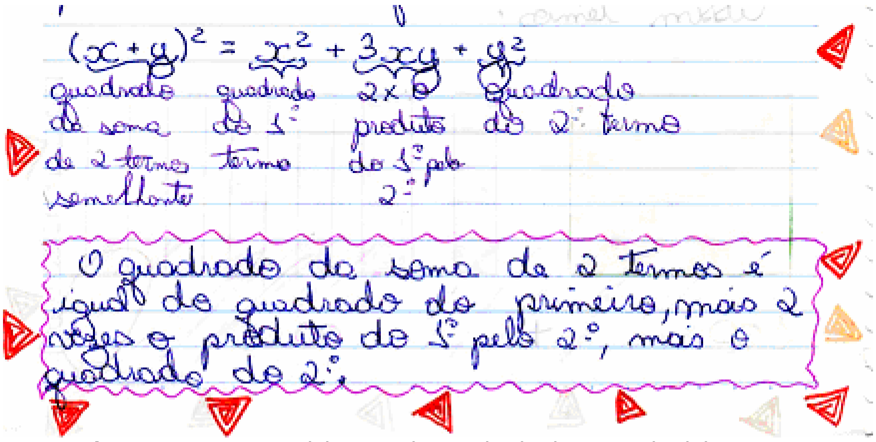


Figura 4.3– Desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos

No desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos, a relação entre $(x + y)^2 = x^2 + 3xy + y^2$ apresenta dois erros em suas anotações:

- O quadrado da soma de 2 termos semelhantes, a palavra “semelhantes” está colocada indevidamente, pois *x* e *y* não são termos semelhantes e;
- x^2 + **3xy** + y^2, duas vezes o produto do 1º pelo 2º, o aluno anotou 3xy, sendo o correto 2xy.

Comparando os cadernos dos alunos, observamos nesta introdução que as anotações de um deles nem sempre segue da mesma forma como o professor anota na lousa. Com essas anotações erradas, o aluno ao estudar em casa ou se preparar para provas irá sentir dificuldades e poderá adquirir conceitos errados, assim muito provavelmente a compreensão dos conceitos matemáticos ficará comprometida.

Para a definição do produto da soma pela diferença de dois termos foi utilizada a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição como podemos constatar a seguir:

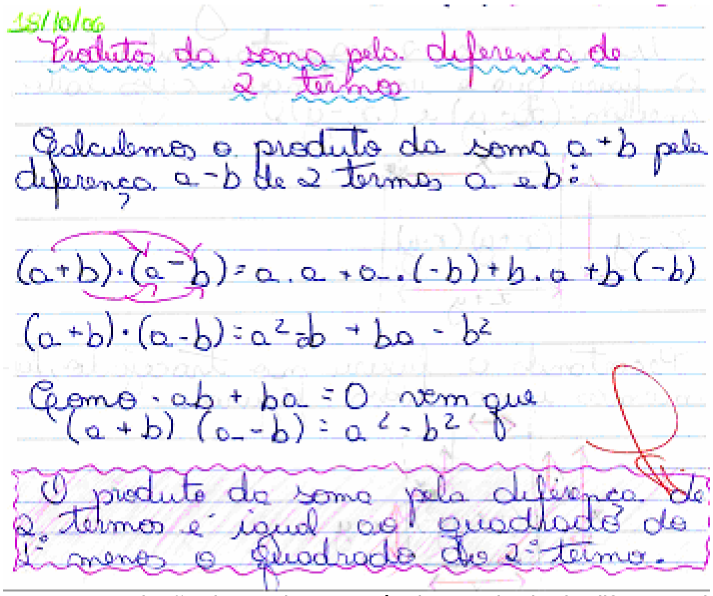


Figura 4.4 - Introdução de Produtos Notáveis: quadrado da diferença de dois termos

O desenvolvimento da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (subtração) foi usado corretamente e a conclusão final em que "O produto da soma pela diferença de 2 termos é igual ao quadrado do 1º menos o quadrado do 2º termo" apresenta um visto da professora.

Neste exemplo, há a representação geométrica da soma pela diferença dos termos, considerando-se dois segmentos de comprimentos *x* e *y* constrói-se um retângulo cujos lados medem *(x+y)* e *(x-y)*.

As figuras construídas pelo aluno não ficaram bem definidas quanto às medidas dos lados do retângulo; abaixo está a figura que o aluno deveria construir em seu caderno:

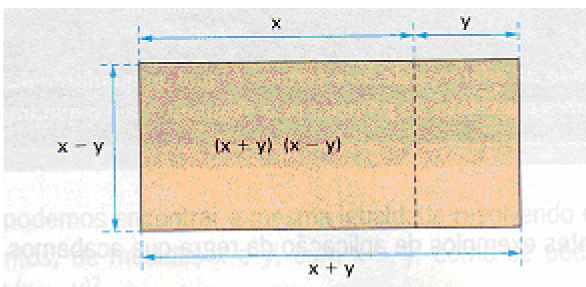


Figura 4.5 – Fonte: Giovani, Castruci, Giovani Jr, A Conquista da Matemática 7ª série, 2000 (p. 90)

E uma outra representação em que se retirou o retângulo de lados *y* e *(x-y)* de sua posição inicial, transportando-o para a parte superior obtém-se uma nova figura:

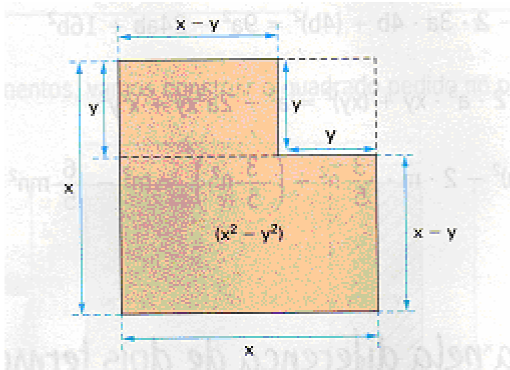


Figura 4.6 - Fonte: Giovani, Castruci, Giovani Jr, A Conquista da Matemática 7ª série, 2000 (p. 90)

A partir da representação geométrica e da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mostrou-se que $x^2 – y^2 = (x+y)(x-y)$.

Após as definições e demonstrações algébricas e geométricas dos dois casos de produtos notáveis: o quadrado da soma e o produto da soma pela diferença de dois termos, deparamo-nos com uma lista considerável de atividades de aplicação de um dos conceitos estudado, o quadrado da soma de dois termos com expressões nos formatos: $(x+a)^2$; $(x+y)^2$; $(ax+b)^2$; $(ax+by)^2$; $(x^n + y^m)$ em que *a* e *b* representam números Reais.

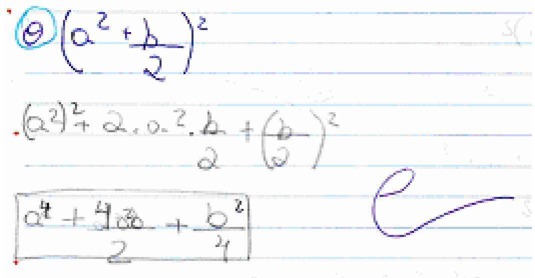


Figura 4.7– Atividade para desenvolver o quadrado da soma

As atividades, cujo objetivo é desenvolver o quadrado da soma usando o conceito de produtos notáveis, apresentam sinais de correção pelo aluno. Observando o item ***o*** da atividade, apesar de ser considerado na correção como certa, a resposta não está totalmente correta, pois o aluno elevou o coeficiente ao quadrado considerando de forma errada o termo

$\frac{2a^2b}{2} = \frac{4a^2b}{2}$. Para o estudo do produto da soma pela diferença não houve atividade.

Para o terceiro caso dos produtos notáveis, foi apresentada a definição do quadrado da diferença de dois termos utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e uma lista de atividades para calcular utilizando a regra, como expressões nas formas $(x\text{-}a)^2$; $(x\text{-}y)^2$; $(ax\text{-}b)^2$; $(ax\text{-}by)^2$; $(x^n - y^m)$ em que *a* e *b* representam números reais. Vejamos um exemplo:

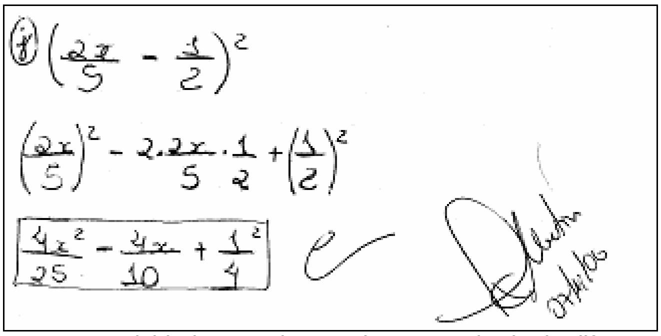


Figura 4.8 - Atividade para desenvolver o quadrado da diferença

Observamos que o aluno aplicou a regra corretamente, as atividades estão corrigidas e com o visto da professora. Os casos das frações que poderiam ser simplificadas no final do cálculo algébrico não foram abordados em nenhuma das atividades que envolveram números fracionários.

Constatamos que os conceitos de produtos notáveis, em parte, foram trabalhados por meio de cálculos de área de retângulos e a sua representação geométrica, estando de acordo com os PCN: “A utilização desses recursos possibilita ao aluno conferir um tipo de significado às expressões.”(1998, p.121).

Porém, as atividades propostas são específicas de tratamento no registro algébrico, numa abordagem da álgebra estritamente estrutural.

Para Duval (2003, p.31), “uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros são condições para a compreensão em matemática”. Assim incluímos em nossa pesquisa atividades que abordam tanto o tratamento no registro algébrico como as conversões dos registros figural e algébrico.

Ao final do semestre, a professora iniciou o estudo das equações do 1°grau e seguiu com o assunto até o término do ano letivo.

No ano de 2007, os alunos desta turma cursaram o 9º ano; o professor antes de iniciar a equação do 2º grau incompleta, faz uma rápida revisão de produtos notáveis, conforme notamos nas resoluções das atividades. Inicialmente em uma lista com expressões para desenvolver os produtos notáveis em que os alunos optaram por aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como mostra a figura:

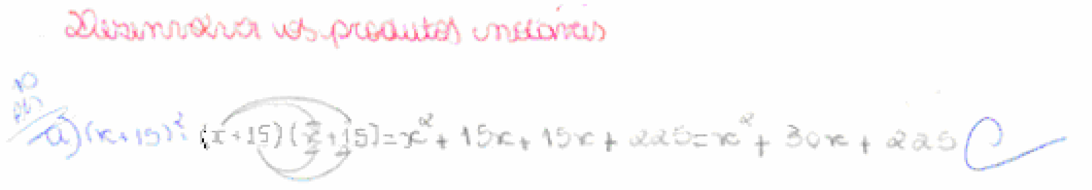


Figura 4.9 - Atividade desenvolvida pelo aluno sobre produtos notáveis

Em seguida o professor apresenta a “regra prática” dos produtos notáveis para o quadrado da soma, quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença:

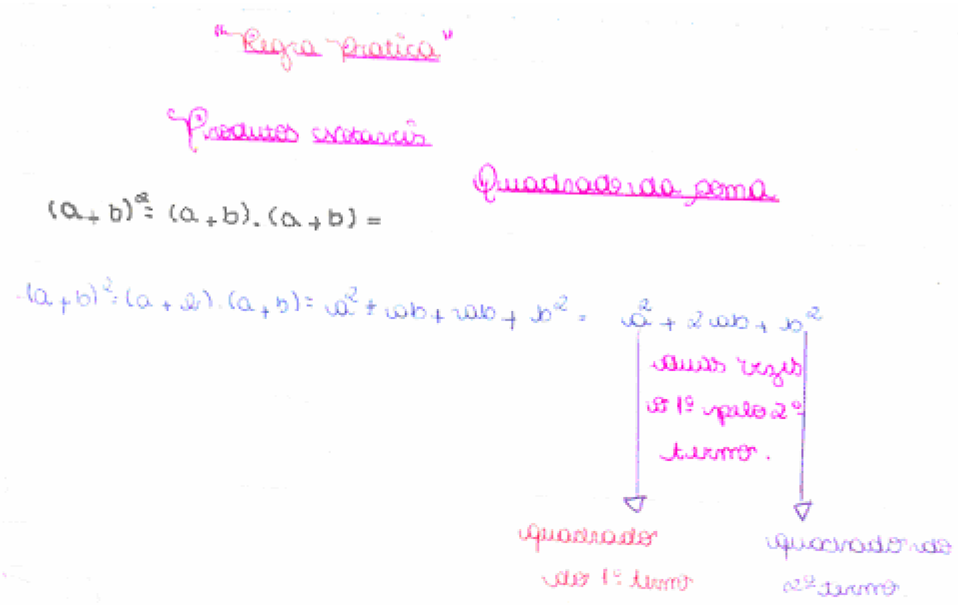


Figura 4.10 - “Regra Prática” do produto da soma de dois termos

Após a apresentação há atividades para desenvolver os produtos notáveis usando a “regra prática”:

Figura 4.11 – Exemplo de atividade para desenvolver os produtos notáveis usando a “regra prática”

4.4 Coleta de Dados

Apresentamos e discutimos nosso projeto de pesquisa com membros da Diretoria de Ensino da região, direção, coordenação da escola e pais dos alunos envolvidos, que autorizaram seus filhos a participar voluntariamente desta pesquisa por meio de assinatura de termo de compromisso (ANEXO VI), por estar em de acordo com os objetivos do Projeto Político Pedagógico da escola.

Os alunos envolvidos no projeto exploraram e utilizaram o programa Aplusix por diversas vezes durante as aulas de informática, freqüentadas pela turma uma vez por semana. Estudantes do 9º ano do período da manhã aceitaram participar da pesquisa, retornando no período da tarde.

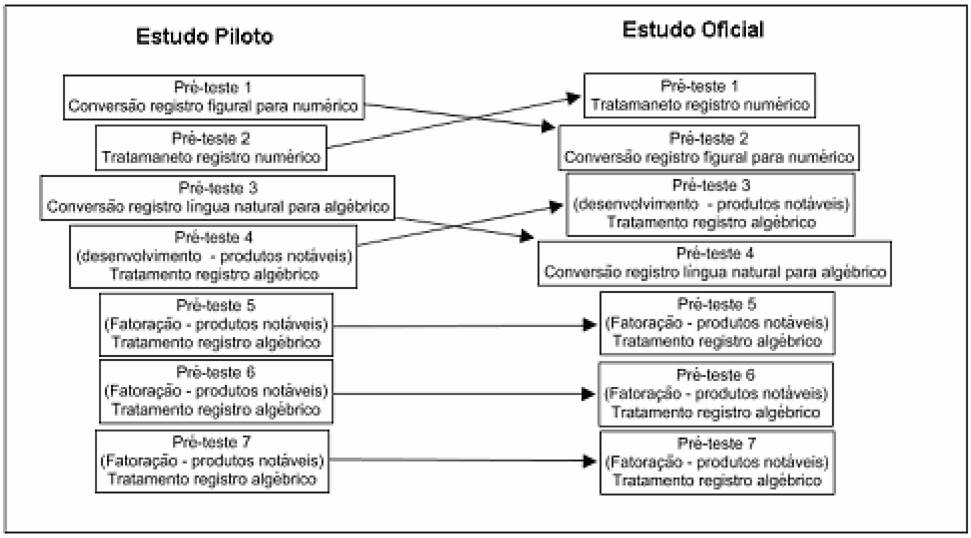
4.4.1 Estudo Piloto

Inicialmente fizemos um estudo piloto com dois alunos que desenvolveram as atividades individualmente e que os chamaremos pelas iniciais de seus nomes de alunos **B** e **D,** e uma dupla que chamaremos de dupla **E**. Para esse estudo tivemos 12 encontros de 60 minutos cada.

Desenvolvemos uma seqüência de atividades em três fases: pré-teste (ANEXO VII), atividades de aprendizagem (ANEXO VIII) e pós-teste (ANEXO IX), inseridas no banco de dados do programa Aplusix. Avaliamos a viabilidade dessa seqüência e a reestruturamos para o estudo oficial.

Fizemos o estudo piloto com o objetivo de sanar possíveis falhas estruturais que pudessem aparecer na seqüência de atividades ou no uso do programa Aplusix. Ele nos auxiliou para darmos um direcionamento no estudo oficial: fizemos alterações, acrescentamos algumas atividades, excluímos outras e adaptamos o programa para nossos interesses.

No quadro abaixo, relacionamos a estrutura das atividades do estudo piloto do pré-teste e as alterações para o estudo oficial.



Quadro 4.1 - Estrutura das atividades dos estudos piloto e oficial do pós-teste

No estudo oficial, optamos por iniciar com uma atividade que envolvesse o tratamento no registro numérico; assim, fizemos alterações na ordem dos testes: o pré-teste 1, no estudo piloto, era o segundo teste que o aluno teria para resolver, já no oficial, optamos por deixar em primeiro.

Ao analisar o estudo piloto, percebemos que contaminamos as amostras ao propor atividades anteriores que levaram o aluno a aplicar as mesmas propriedades utilizadas para os produtos notáveis quando se tratava de cálculo numérico como, por exemplo, na expressão $(5+3)^2$ ou mesmo por termos explicado ao grupo que o assunto de nosso estudo era produtos notáveis.

O aluno **B** e a dupla **E** do estudo piloto utilizaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição quando seria mais simples efetuar as operações dentro dos parênteses e depois elevar ao quadrado ou multiplicar os resultados.

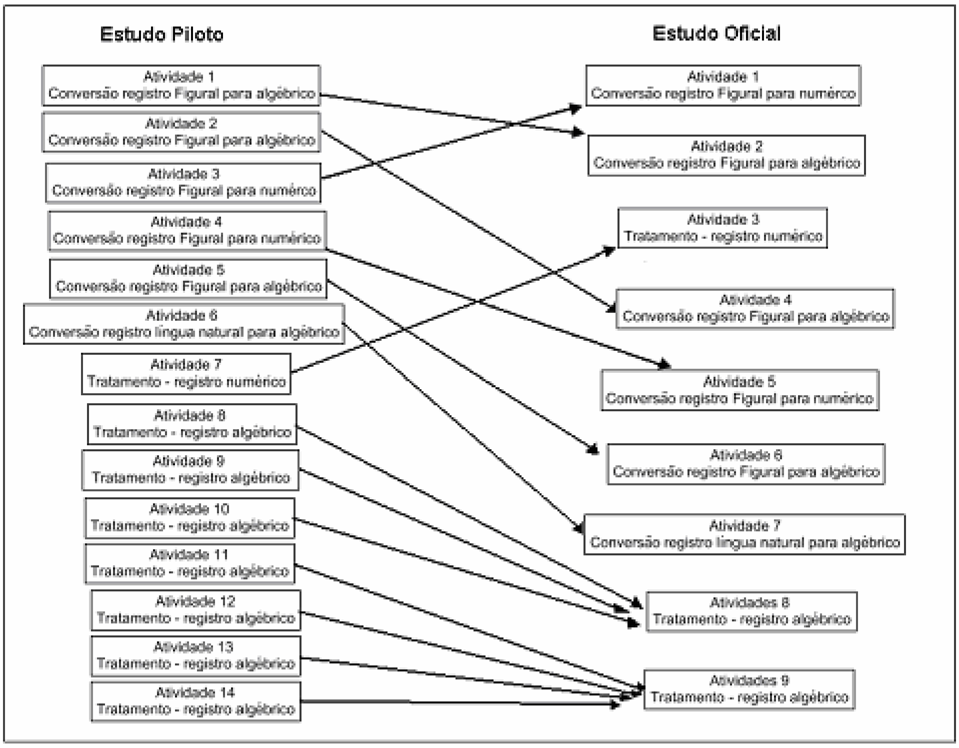
Desta forma, optamos por iniciar com esta atividade que envolve o tratamento no registro numérico. Na seqüência, o pré-teste 2 trata de conversão do registro figural para o numérico.

Modificamos a ordem da aplicação entre o terceiro e o quarto testes. Observamos que no estudo piloto aplicamos uma seqüência de atividades que envolviam conversões entre dois registros seguida de uma seqüência de atividades que envolviam tratamento dentro do mesmo registro. Consideramos necessário intercalar as atividades de conversões e tratamento para possibilitar ao aluno manter relações entre as diferentes formas de registros e transitar com mais facilidade entre um registro e outro.

O pré-teste 4 do estudo piloto passou para o teste 3 do estudo oficial, pois consideramos que a questão para desenvolver os produtos notáveis encontrava-se extensa e com um número menor de expressões teríamos mais condições de atingir nossos objetivos. Assim, mantivemos as expressões: $(a+3)^2$, $(x+5)(x-5)$, $(3x+5y)^2$ e $(2n-1)^2$, substituímos o número inteiro da expressão (y-2)(y-2), pela fração $\frac{1}{2}$ e acrescentamos a expressão $(-x-1)^2$ que possui os termos do binômio negativos e excluímos três expressões.

Os três últimos pré-testes envolvem conceitos de fatoração de produtos notáveis e não foram modificados, pois consideramos que incluir questões com alternativas nesta fase, assim como questões do SARESP/2005, poderiam levar o aluno a refletir sobre sua escolha.

As atividades de aprendizagem de nosso estudo foram analisadas após a aplicação do estudo piloto. Alteramos a ordem das questões e a estrutura de algumas delas como mostra o quadro abaixo:



Quadro 4.2 - Estrutura das atividades dos estudos piloto e oficial das atividades de aprendizagem

Optamos por iniciar esta fase com as conversões entre os registros de representações figural e numérico, assim mudamos a atividade três para a de número um. Na seqüência, a que era primeira passou para segunda e envolve conversão do registro figural para o algébrico.

A terceira atividade de cálculo numérico, em nosso estudo piloto, era a de número sete, novamente percebemos a necessidade de intercalar as atividades de conversões e tratamento.

A quarta atividade, de conversão de registro figural para algébrico, antes era a segunda.

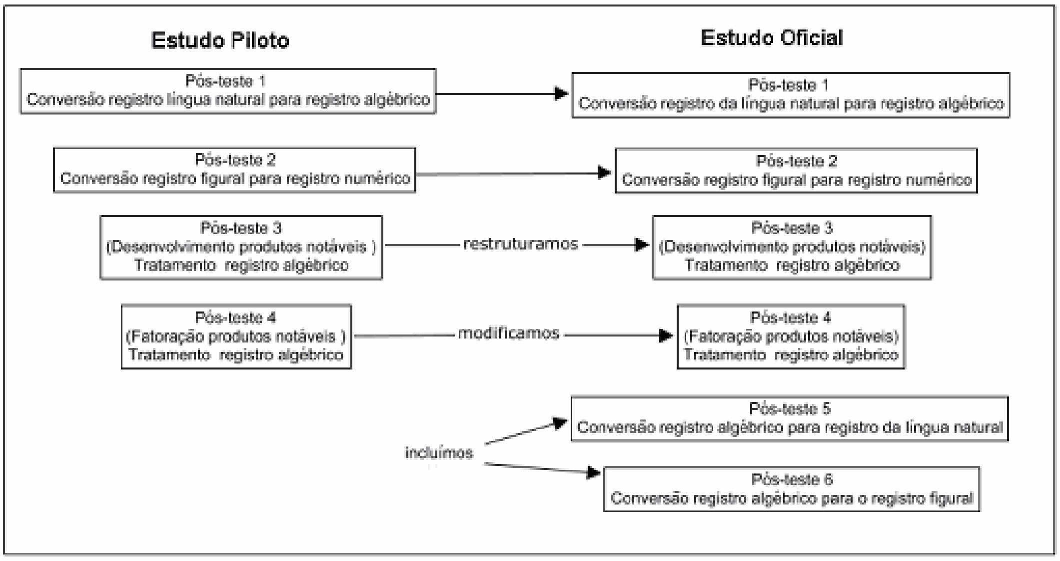
As atividades cinco, seis e sete envolvem conversão do registro figural para o registro numérico, conversão do registro figural para o registro algébrico e conversão de uma expressão dada no registro de representação da língua natural para o de registro algébrico. Respectivamente em nosso estudo piloto, estas atividades eram de números quatro, cinco e seis.

Reformulamos as atividades oito, nove e dez que totalizavam 16 expressões de nosso estudo piloto em uma única questão com 6 expressões que envolvem o tratamento no registro algébrico na atividade oito.

Mantivemos as expressões $(x+y)(x-y)$, $(x-2)^2$, $(5x+4y)^2$ da mesma forma que o estudo piloto. Incluímos a expressão $(-y-1)^2$ com os termos do binômio negativos, e acrescentamos a expressão $(n-\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})$, embora naquele estudo houvesse um número maior de expressões que envolviam operações com número fracionários, consideramos que mantê-los poderia acrescentar dificuldades para os alunos, pois nosso objetivo, neste momento, era de trabalhar as regras e técnicas para o desenvolvimento dos produtos notáveis. Invertemos o segundo binômio da expressão $(b+a)(a+b)$, nossa intenção foi o de verificar se o aluno seria capaz de identificar que se tratava de um produto notável e utilizar a regra corretamente.

Na última atividade do modo “aprendizagem”, reformulamos as quatro últimas atividades de fatoração do estudo piloto. As questões foram mantidas mas sem alternativas, optamos pelo desenvolvimento das mesmas. Às expressões para fatorar acrescentamos mais uma, $y^2 - \frac{1}{9}$, com o objetivo de envolver fatoração com números fracionários.

Analisamos as atividades desenvolvidas no estudo piloto do pós-teste e fizemos pequenas modificações como mostra o quadro:



Quadro 4.3 - Relação das atividades dos estudos piloto e oficial do pós-teste

Mantivemos o primeiro e o segundo testes aplicados no estudo piloto. O terceiro teste reestruturamos, excluímos seis expressões, mantivemos as expressões $(a-2)^2$ e (b-a)(b+a), modificamos a ordem dos termos da expressão $(3a+2b)^2$ para (3a+2b)(2b+3a) e acrescentamos as expressões: $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ e $(-m-2)^2$.

Conservamos as três expressões sobre fatoração do quarto teste e acrescentamos mais uma envolvendo a fatoração do produto da soma pela diferença com número fracionário.

Incluímos mais dois testes que envolvem conversões dos registros de representação algébrica para o registro de representação da língua natural e a conversão do registro algébrico para o registro de representação figural, respectivamente.

4.4.2 Estudo Oficial

Quinze estudantes do 9º ano do período da manhã aceitaram participar do estudo oficial retornando à escola no período da tarde. Desses, três foram selecionados para análise. O critério de escolha foi o de não considerar os que faltaram a alguma atividade. Eles trabalharam individualmente nos 10 encontros* de 60 minutos cada, no período de 03/10/2007 à 30/11/2007.

Quando iniciamos nossos estudos, os alunos já haviam explorado bastante o programa com o qual iríamos trabalhar. Assim, não foi preciso intervenções quanto a dúvidas na sua utilização. Um dos participantes demonstrou ter afinidades com a matemática e desenvolveu a seqüência em apenas cinco encontros.

As três fases da seqüência envolveram conversões de registros (algébrico, numérico e figural) e tratamento dos registros numérico e algébrico:

Pré-teste: Com o objetivo de diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos, a primeira seqüência de atividades foi desenvolvida no programa Aplusix no modo “teste”, um recurso do programa que funciona como uma avaliação e o aluno não tem informação se estão ou não corretas suas resoluções. Não fizemos nenhuma intervenção nos procedimentos de resolução dos alunos, mesmo quando éramos solicitados, pois queríamos que as resoluções fossem as mais independentes possíveis.

No estudo piloto, um dos alunos passou da forma “teste” para a “autocorreção”. Em virtude de conhecer bem o programa sabia que assim ele lhe forneceria informações para responder corretamente as questões. Como nosso alvo era diagnosticar seus conhecimentos prévios, procuramos reforçar as orientações e esclarecer os objetivos, evitando o uso da autocorreção nesta fase principalmente ao aplicarmos o estudo oficial.

---

* Apenas o sujeito S1 participou dos 10 encontros, S2 e S3 desenvolveram as atividades em 5 e 9 encontros respectivamente.

Atividades de Aprendizagem: Os alunos desenvolveram a seqüência utilizando o programa Aplusix no modo "aprendizagem". Com este recurso do programa eles são informados se há equivalência entre duas etapas consecutivas, e podem refletir sobre a resposta dada, procurando solução para o problema.

Os estudantes buscaram as questões previamente inseridas no banco de dados e utilizaram o teclado manual ou virtual para responder as questões diretamente na tela do Aplusix que se encarregou de gravar no videocassete todos os comandos dados por eles.

Nesta fase, fizemos intervenções e, por diversas vezes, requisitaram nossa atenção para esclarecer dúvidas.

Dos três participantes de nossa pesquisa tivemos:

Um aluno que apresentou ter dificuldade na compreensão dos conceitos matemáticos a quem chamaremos de S1.

Um aluno que chamaremos de S3, apresentou algumas dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos. Em alguns casos, quando o programa informava que a resolução naquela etapa estava errada, procurava alternativas e muitas vezes sem encontrar, voltava na mesma que já havia sido recusada anteriormente. Fez vários pedidos de intervenção para a pesquisadora.

Um aluno que chamaremos de S2, considerou a disciplina de matemática interessante e demonstrou facilidade em entender seus conceitos; desenvolveu a seqüência de atividades em menos tempo que os outros participantes e fez poucas requisições de ajuda da pesquisadora.

Pós-teste: Na terceira e última fase, os alunos desenvolveram a seqüência de atividades novamente no modo "teste" do programa Aplusix. Não houve nenhuma intervenção de nossa parte, pois nosso objetivo nesta fase foi verificar os possíveis avanços na aprendizagem pela comparação com o pré-teste.

No estudo oficial, inserimos uma atividade usando papel e lápis, sem fazer uso do computador. A questão era para representar as expressões algébricas $(x+1)^2$, $x^2–4$ e $(x–3)^2$ por meio de figuras geométricas. Nosso objetivo ao inserir esta atividade foi o de verificar se os alunos fariam a conversão do registro algébrico para o registro figural, procuramos explorar a conversão neste sentido, pois como vimos nos livros didáticos analisados esta conversão é muito pouco explorada.

Contamos com a colaboração voluntária de uma professora que atuou como observadora e fez anotações durante a aplicação de algumas das atividades. Com o auxílio de uma câmera filmadora obteve imagens do ambiente da sala de informática em alguns encontros e gravamos as vozes de dois alunos quando requisitavam ajuda da pesquisadora. Essas gravações e observações foram utilizadas para as análises em nossa pesquisa, assim como as gravações feitas pelo “videocassete” no programa Aplusix.

CAPÍTULO V

5. ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos as atividades desenvolvidas e suas análises. Dividimos nosso estudo em três fases, na primeira aplicamos o pré-teste como instrumento diagnóstico, na segunda desenvolvemos atividades de aprendizagem e na terceira e última fase, o pós-teste.

Nosso critério de escolha nesse estudo sobre produtos notáveis foi envolver conversões de registros figural, algébrico e numérico, e tratamento dentro do mesmo registro algébrico e numérico.

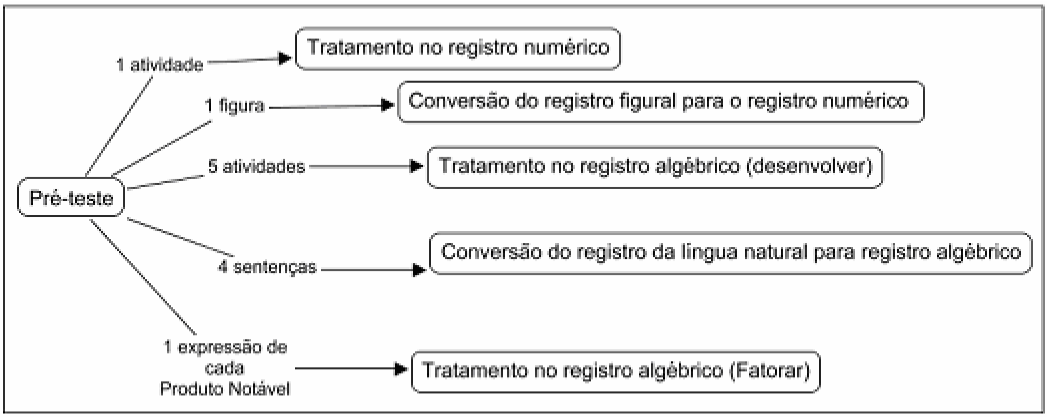
Levamos em conta que os livros didáticos abordam esse assunto no 8º ano e que os PCN sugerem a articulação da álgebra e da geometria por meio de cálculo de área de retângulos e o conhecimento prévio de nossos alunos sobre produtos notáveis como já expusemos neste trabalho.

5.1 Análise do Pré-teste

Os alunos desenvolveram as atividades do pré-teste com o auxílio do programa Aplusix no modo "Teste"; tiveram um tempo máximo de 30 minutos para resolver cada teste da maneira que julgassem correto sem a interferência do programa ou da pesquisadora em suas resoluções.

Nosso objetivo neste "Teste" foi verificar se faziam as conversões de registros ou o tratamento num mesmo registro e diagnosticar as principais dificuldades deles ao resolvê-los.

Abaixo apresentamos um quadro com a estrutura da seqüência de atividades do pré-teste:



Quadro 5.1 - Estrutura das atividades do pré-teste

Para esta primeira fase, elaboramos sete questões envolvendo cinco conceitos entre conversões e tratamentos de produtos notáveis. As expressões para fatorar foram separadas em três atividades, uma para cada produto notável.

As atividades desenvolvidas, os registros de representações envolvidos, os conhecimentos necessários para as resoluções das atividades e as possíveis dificuldades que nossos alunos poderiam encontrar ao resolver as questões propostas detalharemos a seguir.

5.1.1 Análise *a Priori* do Pré-teste

Pré-teste 1 (Tratamento no registro numérico)

Qual o valor de:

a) $(5+3)^2$

b) $(5-3)^2$

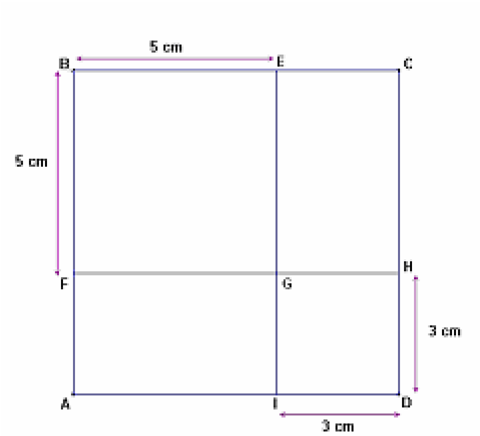
c) $(5+3)(5-3)$

A atividade foi proposta no registro numérico com os objetivos de calcular o quadrado da soma, o quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença de dois números.

Os conhecimentos necessários para a resolução da atividade foram operações com números Inteiros, potenciação, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e propriedades dos produtos notáveis.

As possíveis dificuldades que os alunos poderiam apresentar para resolução da atividade seria quanto a erros na operação de multiplicação ou aplicação incorreta das propriedades do quadrado de um binômio, na forma geral, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$, com *a* e *b* sendo números naturais.

<u>Pré-teste 2</u> (Registro figural → Registro numérico)



a) Qual a área do quadrilátero FBEG?

b) Qual a área do quadrilátero IGHD?

c) Qual a área do quadrilátero AFGI?

d) Qual a área do quadrilátero GECH?

e) Qual a área do quadrilátero ABCD?

Para o desenvolvimento da atividade foi preciso observar as figuras e identificar: o quadrado FBEG de lado 5m; o quadrado IGHD de lado 3m; dois retângulos AFGI e GECH de lados 5m e 3m e o quadrado ABCD de lado 8m formado pelas quatro figuras anteriores e calcular as áreas de cada figura identificada anteriormente.

Os registros de representações semióticas envolvidos na atividade foram figural e numérico.

Os conhecimentos necessários para a resolução da atividade foram identificação das figuras geométricas (quadrados e retângulos), operações com números naturais e conceito do cálculo de áreas.

Os possíveis obstáculos que os alunos poderiam encontrar para resolução da atividade estariam ligados a erros na operação de multiplicação e quanto à utilização do conceito de perímetro, ou seja, teriam a possibilidade de confundir os conceitos de área com perímetro e somar os valores correspondentes aos quatro lados da figura quando deveriam multiplicar dois dos lados.

<u>Pré-teste 3</u> (Tratamento no registro algébrico)

Desenvolver

a) $(a+3)^2$

b) (x+5)(x-5)

c) (3x+5y) (3x+5y)

d) $(y-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})$

e) $(2n-1)^2$

f) $(-x-1)^2$

Esta atividade foi apresentada no registro algébrico e compreendeu o tratamento deste mesmo registro. Seu objetivo foi o desenvolvimento dos produtos notáveis, ou seja, quadrado da soma, quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença em três níveis de dificuldades:

- Duas expressões no nível 1, da forma $(x\pm a)^2$ e (x+a)(x-a), com *a* número inteiro;
- Duas expressões no nível 2, da forma $(ax\pm b)^2$ e (ax+by)(ax-by) com *a* e *b* inteiros. O desenvolvimento das expressões requeria um pouco mais de habilidade matemática tanto ao multiplicar os monômios com coeficientes inteiros quanto ao elevá-lo ao quadrado, sendo assim consideramos que estavam no nível médio; e
- Duas expressões no nível 3, da forma (x-a)(x+a) e $(-x-a)^2$ com *a* número racional. Incluímos uma expressão com número fracionário, pois pesquisas revelam que os alunos apresentam dificuldade em trabalhar com cálculos envolvendo fração; acrescentamos também uma expressão para o cálculo do quadrado de um binômio de termos negativos, pois expressões assim não são muito comuns, não encontramos atividades

similares no caderno do aluno e em um dos livros didáticos analisados encontramos três.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram operações com o conjunto dos números reais, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, regras de potenciação, desenvolvimento dos produtos notáveis, operações com monômios e polinômios.

Os possíveis erros que os alunos poderiam cometer na resolução da atividade foram quanto à operação com números inteiros e racionais, como por exemplo: adicionar números opostos mantendo um dos sinais **+5x – 5x = ±10x** ou somar numeradores e denominadores nas operações envolvendo números racionais na forma de fração $-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}y=-\frac{2}{4}y$.

Também poderiam apresentar dificuldades na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou nos produtos notáveis e elevar cada termo ao quadrado considerando a expressão $(a+3)^2 = a^2+3^2$, aplicar a "regra prática" de produtos notáveis sem se dar conta de que na expressão $(-x-1)^2$ o primeiro termo é negativo.

<u>Pré-teste 4</u> (Registro língua natural → Registro algébrico)

Represente com uma expressão algébrica as sentenças:
a) O quadrado da soma dos números *a* e *b*.
b) A diferença do quadrado do número *a* e o quadrado do número *b*.
c) A área de um quadrado de lado *l* = (x+2).
d) O quadrado da diferença de dois termos *x* e *y*.

Esta atividade consistia na conversão de uma expressão dada no registro da língua natural para o do registro algébrico.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade eram leitura e interpretação do texto matemático, representação algébrica, conceito de área, e conceito de potenciação.

As possíveis dificuldades que os alunos poderiam encontrar para o desenvolvimento da atividade eram quanto à interpretação do texto;

poderiam na expressão “O quadrado da soma dos números *a* e *b*” escrever a expressão na linguagem algébrica sem utilizar os parênteses a^2+b^2 ou $a+b^2$ quando deveriam escrever $(a+b)^2$; de modo análogo na expressão “O quadrado da diferença de dois termos *x* e *y*” escrever $x^2 - y^2$ ou $x – y^2$ quando deveriam escrever $(x – y)^2$.

Para os três últimos testes, fizemos uma única análise, pois consideramos que as atividades de fatoração têm objetivos semelhantes.

Pré-teste 5 (Tratamento no registro algébrico)

x^2 – 10x +25 é igual a:

a) (x+5)(x-5)

b) (x-5)(x-5)

c) (x+5)(x+5)

d) (x-5)(x+5)

Pré-teste 6 (Tratamento no registro algébrico)

(SARESP/2005) A expressão x^2- a^2 é equivalente a:

a) -2ax

b) $(x-a)^2$

c) $(x+a)^2$

d) (x-a) ((x+a)

Pré-teste 7 (Tratamento no registro algébrico)

y^2 +6y+9 é igual a:

a) (y+3)(y-3)

b) (y-3)(y+3)

c) (y-3)(y-3)

d) $(y+3)^2$

As atividades 5, 6 e 7 envolveram o registro de representação algébrica e tinham como objetivo a fatoração do trinômio quadrado perfeito e da diferença entre dois quadrados. As questões apresentaram diferentes alternativas de escolha de resposta e o aluno escolheu uma entre quatro.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram: interpretação do texto matemático, conceito e cálculo de raízes quadradas exatas, aplicação do trinômio quadrado perfeito e da diferença entre dois quadrados.

Os possíveis obstáculos que os alunos poderiam encontrar para resolução das atividades seriam quanto à interpretação do texto matemático, o desconhecimento das propriedades dos produtos notáveis, dificuldades nas operações com números inteiros e, em alguns casos, o aluno poderia optar por aplicar as propriedades dos produtos notáveis partindo das alternativas para concluir qual teria como resposta o enunciado do problema.

5.1.2 Análise *a Posteriori* do Pré-teste

Os alunos desenvolveram as atividades de pré-teste utilizando o programa Aplusix no modo “teste”, não receberam informações sobre suas resoluções e tinham um tempo máximo de 30 minutos para resolver cada teste.

O programa além de gravar todos os comandos dados por meio do videocassete também gravou o tempo gasto em cada atividade. Abaixo relacionamos o tempo gasto para solução das atividades do pré-teste pelos três alunos:

Pré-teste	S1	S2	S3
1	30min 00s	01min 11s	15min 21s
2	09min 27s	05min 02s	30min 00s
3	30min 00s	16min 13s	28min 13s
4	09min 47s	03min 30s	09min 20s
5	06min 40s	08min 18s	23min 33s
6	16min 45s	01min 46s	08min 18s
7	04min 33s	08min 44s	13min 36s
Total	**1h 47min 12s**	**44min 44s**	**2h 08min 21s**

Quadro 5.2 – Tempo gasto para resolução do pré-teste

Constatamos (Quadro 5.2) que o tempo gasto pelo sujeito S2 foi consideravelmente menor que os outros dois sujeitos, S1 e S3. Em geral, S2 obteve mais respostas corretas, evidenciando facilidade e rapidez em realizar cálculos.

Os sujeitos S1 e S3, ao resolver os testes, demonstraram insegurança e dependência da pesquisadora ou colegas; antes de responder perguntavam se estava correto. S1 não respondeu enquanto não houve a confirmação da pesquisadora e esta pedia para que colocassem as respostas que acreditavam estarem corretas, pois os primeiros testes eram justamente para saber quais conceitos eles sabiam. A seguir apresentaremos as soluções dos alunos das atividades do pré-teste.

Soluções dos alunos do pré-teste 1

Qual o valor de:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	Erros
a) $(5+3)^2$	Elevou cada termo ao quadrado $5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$. Usou o recurso de comentar etapa: "*Eu só me lembro que sinais iguais somam e sinais diferentes subtraem*".	Resolveu corretamente, somou os números dos parênteses e depois elevou ao quadrado.	Resolveu corretamente, somou os números dos parênteses e depois elevou ao quadrado.	2	$5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$
b) $(5-3)^2$	Respondeu 34, não apresentou os cálculos para chegar nesse resultado, usou o recurso de comentar etapa: " *bom eu fiz o que eu lembrei um pouco de potenciação*". O aluno informou ter elevado os dois termos ao quadrado $5^2 - 3^2 = 25 + 9 = 34$.	Resolveu corretamente, subtraiu os números dos parênteses e depois elevou ao quadrado $2^2 = 4$.	Inicialmente resolveu corretamente subtraindo os números dentro dos parênteses e elevou ao quadrado, depois apagou tudo e elevou $5^2 - 3^2 = 25-9 = 16$.	1	$5^2-3^2 = 25+9 = 34$ $5^2-3^2 = 25-9 = 16$
c) $(5+3)(5-3)$	Eliminou os parênteses alterando a operação para 5+3+5-3, considerou +5 - 3 = -8 e efetuou as operações: 8-8 = -16.	Resolveu corretamente, efetuou as operações dentro dos parênteses e depois multiplicou.	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas ao multiplicar (-3).(5) continuou multiplicando com os outros termos da expressão: (5+3)(5-3) = 25+15.15+9 e não subtraiu 15 como deveria.	1	5+3+5-3 = 8-8 8-8 = -16 (5+3)(5-3) = 25+15.15+9

Quadro 5.3 – Soluções dos alunos no pré-teste 1

O **pré-teste1** envolveu tratamento no registro de representação numérica, podemos observar (Quadro 5.3) que os sujeitos S1 e S3 apresentaram dificuldades nos itens para resolver o quadrado de um binômio, elevando cada termo ao quadrado: $(5+3)^2 = 5^2+3^2$ e $(5-3)^2 = 5^2-3^2$.

Para o produto da soma pela diferença de dois números os erros mais freqüentes foram quanto às operações com números inteiros.

Observamos que os sujeitos S1 e S3 não dominam totalmente as técnicas de operações com expressões numéricas.

No **pré-teste 2**, os alunos trabalharam no registro figural ao reconhecer figuras planas (quadrados e retângulos) e não apresentaram dificuldades quanto à identificação destas figuras.

Podemos observar (Quadro 5.4) que para o cálculo das áreas das figuras, os sujeitos S1 e S2 apresentaram dificuldade em diferenciar os conceitos de área e perímetro, pois, somaram os lados; S1 somou as medidas dos quatro lados; S2 somou as medidas de três lados dos quadriláteros.

O sujeito S3 apresentou esta mesma dificuldade apenas no quinto e último item da questão. Nos quatro primeiros itens, observamos que este sujeito possui algumas noções do conceito de área, mas não domina totalmente as técnicas. Iniciou calculando a área corretamente, multiplicou as medidas dos lados, mas continuou a operação determinando o quadrado do resultado dessa multiplicação.

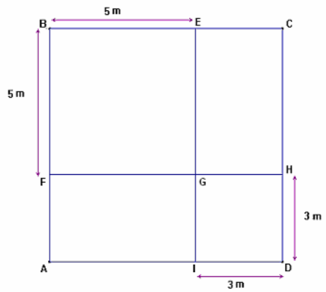
Observamos também que os três sujeitos não utilizaram a unidade de medida metro em suas respostas.

Consideramos que os sujeitos de nosso estudo não fizeram a conversão do registro figural para o numérico, pois fizeram confusão entre área e perímetro dos quadriláteros.

Soluções dos alunos do pré-teste 2

Observe a figura e responda:	S1	S2	S3	Acertos	Erros
a) Qual a área do quadrilátero FBEG?	Somou os quatro lados do quadrilátero, ou seja, calculou o perímetro e não a área.	Somou três lados do quadrilátero 5+5+5=15.	Multiplicou 5.5=25 e em seguida 25.25=625.	Nenhum	5+5+5+5=20 5+5+5=15 $(5^2)^2=625$
b) Qual a área do quadrilátero IGHD?	Somou os quatro lados do quadrilátero, ou seja, calculou o perímetro e não a área.	Somou três lados do quadrilátero 3+3+3=9.	Multiplicou 3.3=9 e 9.9=81.	Nenhum	3+3+3+3=12 3+3+3=9 $(3^2)^2=81$
c) Qual a área do quadrilátero AFGI?	Somou os quatro lados do quadrilátero, ou seja, calculou o perímetro e não a área.	Somou três lados do quadrilátero 3+5+3=11.	Multiplicou 3.5=15 e 15.15=225.	Nenhum	3+5+3+5=16 3+5+3=11 $(3.5)^2=225$
d) Qual a área do quadrilátero GECH?	Somou os quatro lados do quadrilátero, ou seja, calculou o perímetro e não a área.	Calculou a área do retângulo somando os lados 5+3+5+3 = 16.	Multiplicou 3.5=15 e 15.15=225.	Nenhum	3+5+3+5=16 3+5+3=11 $(3.5)^2=225$
e) Qual a área do quadrilátero ABCD?	Somou os quatro lados do quadrilátero, ou seja, calculou o perímetro e não a área.	Somou os quatro lados do quadrilátero, ou seja, calculou o perímetro e não a área.	Somou os quatro lados do quadrilátero, ou seja, calculou o perímetro e não a área.	Nenhum	8+8+8+8=32

Quadro 5.4 - Soluções dos alunos no pré-teste 2



Soluções dos alunos do pré-teste 3

Desenvolver	S1	S2	S3	Acertos	Erros
a) $(a+3)^2$	Utilizou o recurso de comentar etapa: "*bom eu elevei três por ele mesmo e joguei o a pro final*". e respondeu 3.3=9a.	Somou $a+3 = 3a^2 = 9a^2$.	Elevou cada termo ao quadrado $a^2 + 3^2$ e somou $a^2 + 9 = 9a$ desprezando o expoente de *a* .	Nenhum	$(a+3)^2 = 3.3 = 9a$ $(a+3)^2 = 3a^2 = 9a^2$ $a^2 + 3^2 = 9a$
b) (x+5)(x-5)	Utilizou o recurso de comentar etapa: "*bom eu só multipliquei*" e respondeu x=25.	Somou os termos de dentro dos parênteses obtendo: (x+5)(x-5) = 5x - 5x = 0.	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente , mas ao multiplicar 5.(-5) = 25.	Nenhum	(x+5)(x-5) = x-25 x=25 (x+5)= 5x (x-5)= 5x 5.(-5) = 25
c) (3x+5y)(3x+5y)	Utilizou o recurso de comentar etapa: "*multipliquei 3.5 e assim por diante*" 9x+15x+15x+9 "*somei 9x+15x*" 24x+24x, x = 48.	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente e obteve o resultado: $9x^2+30xy+25y^2$.	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente mas errou ao multiplicar x.x = x e y.y= y .	1	x.x = x y.y= y 3x.3x = 9x 3x.5y =15 x
d) $\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$	Seu objetivo foi de aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: $\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) = y-\frac{2}{4}$, efetuou a multiplicação: $\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{4}$ e y . y = y	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente mas ao multiplicar: $y.\left(-\frac{1}{2}\right) = y.\frac{1}{2}$ alterou o sinal de y para: $-y.\left(-\frac{1}{2}\right) = y.\frac{1}{2}$	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição somente com dois dos termos: $\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) = y^2+\frac{1}{4}$.	Nenhum	$y.\left(-\frac{1}{2}\right) = y.\frac{1}{2}$ $\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{4}$ y . y = y $\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) = y^2+\frac{1}{4}$
e) $(2n-1)^2$	Justificou: "*elevei 2 e 1 ao quadrado*" e respondeu x= 5n.	Elevou cada termo ao quadrado $4n^2 + 1$	Elevou cada termo ao quadrado 4n -1, não elevou n ao quadrado, justificou: "*subtraí*" 3n	Nenhum	$(2n-1)^2 = 4n - 1 = 3n$ $(2n-1)^2 = 4n^2+1$ $(2n-1)^2 = 4n+1 = 5n$
f) $(-x-1)^2$	Justificou "*elevei 1 ao quadr...*" e respondeu 2x	Elevou os dois termos ao quadrado e justificou: "*elevei ao quadrado virou positivo*" $x^2 + 1$	Elevou os dois termos ao quadrado e justificou: "*menos com menos mais*" $x^2 + 1$	Nenhum	$(-x-1)^2 = x^2+ 1$ $(-x-1)^2 = 2x$

Quadro 5.5 - Soluções dos alunos no pré-teste 3

No **pré-teste 3,** procuramos verificar quais procedimentos os alunos aplicariam no desenvolvimento de seis expressões distribuídas entre quadrado de um binômio e do produto da soma pela diferença de dois termos.

Observamos (Quadro 5.5) que as expressões $(a+3)^2$, $(2n-1)^2$ e $(-x-1)^2$,foram desenvolvidas erroneamente pelos três sujeitos de nossa investigação, levando cada termo ao quadrado.

Os sujeitos S1 e S3 desprezaram os quadrados dos termos literais quando elevaram 2n ao quadrado consideraram *4n* e um erro comum dos alunos foi efetuar a operação entre um termo algébrico e outro numérico como a+3=3a, 4n+1= 5n e 4n-1=3n.

No produto da soma pela diferença de dois termos na expressão (x+5)(x-5), nenhum sujeito acertou.

O sujeito S2 utilizou a mesma técnica da expressão anterior pois somou *x* e 5 e um dos termos ficou positivo o outro negativo, logo obteve o resultado igual a zero.

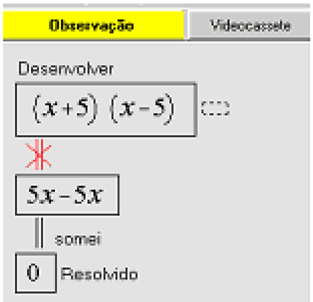


Figura 5.1 - Protocolo do sujeito S2

O protocolo (Figura 5.1) faz parte da observação feita pela pesquisadora no programa Aplusix, em que se nota que o mesmo acusa o erro nas duas primeiras etapas; da segunda para a terceira não acusa erro, pois há equivalência entre elas.

Os três sujeitos desenvolveram as expressões (3x+5y)(3x+5y) e $\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Observamos que os sujeitos de nossa investigação cometeram erros nas operações de multiplicação quando aplicaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; nas operações de multiplicação de monômios multiplicaram os coeficientes e não multiplicaram a parte literal e apresentaram dificuldades em lidar com os sinais. Os sujeitos S1 e S3 desenvolveram a expressão com número racional $\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$ de maneira semelhante: multiplicaram apenas os primeiros e segundos termos entre si.

Consideramos que os sujeitos de nosso estudo não dominam as técnicas de tratamento do registro algébrico no desenvolvimento do produto da soma pela diferença e quadrado de um binômio. Também apresentam dificuldades nas operações com números inteiros, racionais e no cálculo algébrico.

No **pré-teste 4**, observamos (Quadro 5.6) que o sujeito S2 fez as conversões do registro de representação da língua natural para o registro algébrico corretamente nas quatro expressões.

A conversão da expressão “A diferença do quadrado do número *a* e o quadrado do número *b*” para a representação algébrica obteve 100% de acerto, consideramos que para a representação algébrica da expressão há congruência entre os registros de partida e chegada.

Na expressão que envolveu a área de um quadrado de lado *(x+2)*, S1 demonstrou não ter o domínio completo sobre o conceito de área, elevou apenas o primeiro termo ao quadrado x^2+2. Os sujeitos S2 e S3 representaram pela multiplicação do binômio corretamente.

Nas expressões que envolviam o quadrado da soma ou da diferença de dois termos, S1 e S3 não fizeram a conversão corretamente, elevaram cada termo ao quadrado a^2+b^2 quando deveriam utilizar os parênteses e depois elevar ao quadrado, resultando na expressão $(a+b)^2$.

Consideramos que S1 e S3 não fizeram a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico.

Soluções dos alunos no pré-teste 4

Represente com uma expressão algébrica as sentenças:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	Erros
a) O quadrado da soma dos números *a* e *b*	Elevou cada termo ao quadrado $a^2 + b^2$.	$(a+b)^2$ correto.	Elevou cada termo ao quadrado $a^2 + b^2$.	1	$a^2 + b^2$
b) A diferença do quadrado do número *a* e o quadrado do número *b*	a^2-b^2 correto.	a^2-b^2 correto.	a^2-b^2 correto.	3	Nenhum
c) A área de um quadrado de lado *l = (x+2)*	Elevou o primeiro termo ao quadrado $x^2 +2$.	$(x+2)(x+2)$ correto.	$(x+2)(x+2)$ correto.	2	$x^2 +2$
d) O quadrado da diferença de dois termos *x* e *y*	Elevou cada termo ao quadrado $x^2 - y^2$.	$(x-y)^2$ correto.	xy^2.	1	$x^2 - y^2$ xy^2

Quadro 5.6 - Soluções dos alunos no pré-teste 4

Soluções dos alunos no pré-teste 5

x^2 – 10x +25 é igual a:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	Erros
a) (x+5)(x-5)			Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Concluiu que não é a alternativa *a* .	3	Nenhum
b) (x-5)(x-5)		Inicialmente optou pela alternativa *c* depois alterou justificando que (-5x)+(-5x) = -10x.	Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Justificou: "*eu fiz a conta da a,b, c e d e só a b deu certo*".	2	(x-5)(x-5)≠ x^2 – 10x +25
c) (x+5)(x+5)			Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Concluiu que não é a alternativa *c*.	3	Nenhum
d) (x-5)(x+5)	Optou pela alternativa *d* e justificou: "*por que os sinais são iguais como a expressão que temos acima*", ou seja, no primeiro fator o sinal é negativo e no segundo o sinal positivo assim seguiu a mesma ordem que se apresentou a expressão dada.		Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Concluiu corretamente que **não** é a alternativa *d*.	2	(x-5)(x+5)= x^2 – 10x +25

Quadro 5.7 - Soluções dos alunos no pré-teste 5

Soluções dos alunos no pré-teste 6

A expressão $x^2 - a^2$ é equivalente** a :	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	erros
a) $-2ax$			Utilizou papel e lápis. Concluiu que a alternativa a não é equivalente à expressão $x^2 - a^2$.	3	Nenhum
) $(x-a)^2$	Optou pela alternativa b e justificou: "*... Escolhi porque é que tem mais lógica na expressão*", ou seja, elevou o primeiro e o segundo termos ao quadrado.	Optou pela alternativa b e justificou "*elevei ao quadrado*", ou seja, elevou o primeiro e o segundo termos ao quadrado.	Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Concluiu que a alternativa b é a correta, justificou: "*eu resolvi cada conta e a letra b é a correta*".	Nenhum	$(x-a)^2 = x^2 - a^2$
c) $(x+a)^2$			Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Concluiu que a alternativa c não é equivalente à expressão $x^2 - a^2$.	3	Nenhum
d) $(x-a)(x+a)$			Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Concluiu que a alternativa d não é equivalente à expressão $x^2 - a^2$, pois não reduziu os termos semelhantes $x^2 + xa - xa + a^2$.	Nenhum	$(x-a)(x+a) \neq x^2+xa-xa+a^2$

SARESP 2005 8ª série

Quadro 5.8 - Soluções dos alunos no pré-teste 6

** Mantivemos a expressão *equivalente* conforme a atividade foi proposta na avaliação do SARESP/2005, sendo que o correto seria a expressão *igual*, como foram propostas nas atividade pré-teste 5 e pré-teste 7.

Soluções dos alunos no pré-teste 7

y^2 +6y+9 é igual a:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	erros
a) (y+3)(y-3)			Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Concluiu que a alternativa a não é equivalente à expressão y^2 +6y+9.	3	Nenhum
b) (y-3)(y+3)			Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Concluiu que a alternativa b não é equivalente à expressão y^2 +6y+9.	3	Nenhum
c) (y-3)(y-3)			Utilizou papel e lápis e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Concluiu que a alternativa c não é equivalente à expressão y^2 +6y+9.	3	Nenhum
d) $(y+3)^2$	Optou pela alternativa correta , não justificou	Observação: o aluno respondeu nenhuma das anteriores (NDA). Justificou: *"(y+3)(y+3) não tem essa alternativa"*	Observação: o aluno respondeu: nenhuma, Justificou: "*resolvi todas as alternativas e concluí que a correta é (y+3)(y+3)*"	1	$(y+3)^2 \neq (y+3)(y+3)$

Quadro 5.9 - Soluções dos alunos no pré-teste 7

Os três últimos testes envolveram fatoração do trinômio quadrado perfeito e diferença de quadrados. Formulamos as questões com quatro alternativas em que apenas uma delas estaria correta.

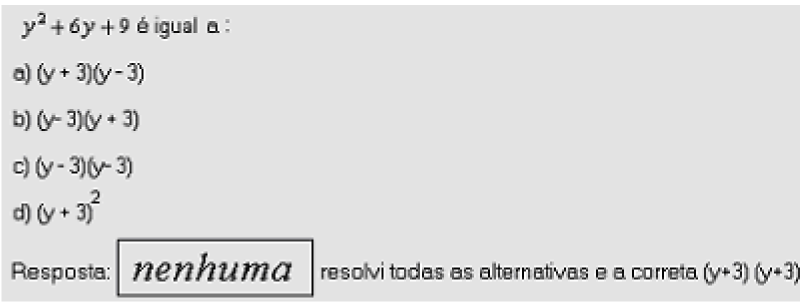
O sujeito S3 utilizou papel e lápis, desenvolveu cada alternativa, ou seja, aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para verificar qual alternativa coincidia com as expressões dos enunciados das questões.

Constatamos nas soluções dos pré-testes que na fatoração da expressão $x^2–10x+25$**,** pré-teste 5 (Quadro 5.7), o sujeito S1 comparou esta expressão com (x-5)(x+5) e considerou que no produto do primeiro polinômio a operação é de subtração e no segundo a operação é de adição, portanto os sinais estão na mesma ordem que se apresentam a expressão dada.

Os três sujeitos desenvolveram a segunda alternativa do pré-teste 6 (Quadro 5.8) elevando cada termo ao quadrado, $(x-a)^2=x^2–a^2$; consideraram esta a alternativa correta e utilizaram o recurso de comentar etapa para justificar: “elevei ao quadrado” , “*...*Escolhi porque é que tem mais lógica na expressão”.

O sujeito S3 ao desenvolver a expressão (x-a)(x+a) no papel, não reduziu os termos semelhantes $x^2+xa-xa-a^2$ então concluiu que x^2-a^2 não é equivalente a (x-a)(x+a).

No pré-teste 7, pedia-se a expressão igual a y^2+6y+9. Observamos (Quadro 5.9) que tanto S3 como S2 responderam que nenhuma das alternativas estava correta, pois não reconheceram a expressão $(y+3)^2$ como equivalente a (y+3)(y+3). Como mostra a Figura 5.2:



y^2+6y+9 é igual a :

a) (y + 3)(y - 3)

b) (y- 3)(y + 3)

c) (y - 3)(y- 3)

d) $(y + 3)^2$

Resposta: nenhuma resolvi todas as alternativas e a correta (y+3) (y+3)

Figura 5.2 – Protocolo do sujeito S3

Observamos as anotações que o sujeito S3 fez no papel ao desenvolver cada alternativa. Para o quadrado da soma elevou cada termo ao quadrado (Figura 5.3), portanto não apresentou equivalência com a expressão dada, assinalou abaixo com *X,* considerando que a alternativa não era a correta, acrescentou mais um item com a expressão (y+3)(y+3).

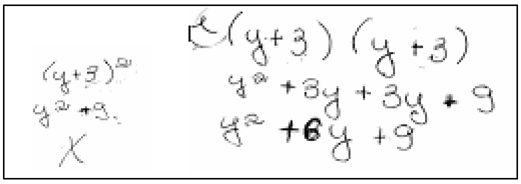


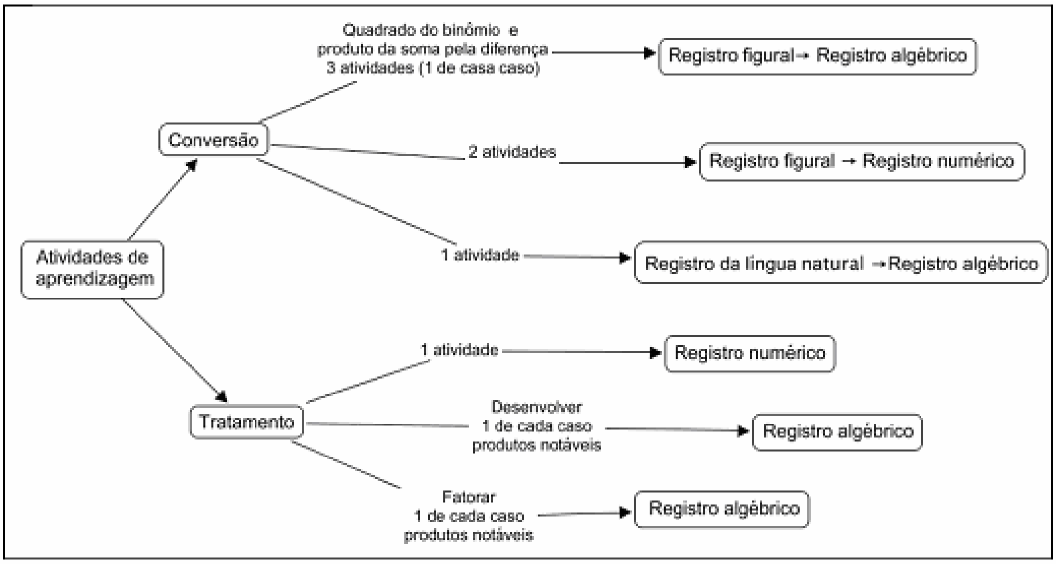
Figura 5.3 - Protocolo do sujeito S3

Os três últimos testes envolviam o tratamento no registro algébrico. Observamos que os sujeitos não utilizaram técnicas de fatoração; S2 não utilizou lápis e papel, observamos que ele desenvolveu mentalmente cada alternativa assim como S3 que utilizou lápis e papel.

5.2 Atividades de Aprendizagem

Esta seção de atividades foi desenvolvida com o auxilio do programa Aplusix no modo “Aprendizagem”, os alunos obtiveram informações do programa por meio dos sinais de equivalência sobre suas resoluções. Eles puderam refletir sobre suas respostas e corrigi-las caso houvesse erros; houve intervenção da pesquisadora quando foi solicitada pelos alunos.

Abaixo apresentamos um quadro com a estrutura da seqüência de atividades de aprendizagem:



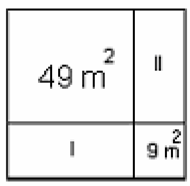
Quadro 5.10 - Estrutura das atividades de aprendizagem

Elaboramos nove atividades que envolveram conversões de registros de representações ou tratamento dentro de um mesmo registro. A seguir relatamos alguns detalhes dessas escolhas, nossas considerações dos conhecimentos necessários para as resoluções das atividades e as possíveis dificuldades que nossos alunos poderiam encontrar ao resolver as questões propostas.

5.2.1 Análise *a priori* das Atividades de Aprendizagem

Atividade 1 (Registro figural → Registro numérico)

Observe a figura:



A área do quadrado maior é $49m^2$ e a área do quadrado menor é $9m^2$.

a) Determine a área da figura I.

b) Determine a área da figura II.

c) Qual é a área da figura total.

Para a resolução da atividade foi necessário observar a figura e identificar: um quadrado composto por dois quadrados de tamanhos diferentes com áreas de $49m^2$ e $9m^2$ e dois retângulos identificados como figuras I e II que possuem o mesmo tamanho.

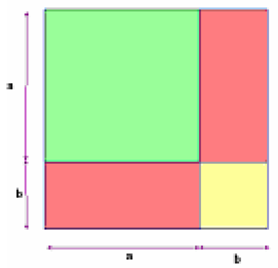
Para o cálculo das áreas dos retângulos, o aluno teria que extrair as raízes de $49m^2$ e $9m^2$ e concluir que as medidas dos lados desses quadrados medem 7m e 3m respectivamente, logo a área do retângulo de lados 7m e 3m é $21m^2$.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram identificação das figuras geométricas (quadrados e retângulos), operações com números naturais e conceito do cálculo de área.

Os possíveis obstáculos que os alunos poderiam encontrar para resolução da atividade seriam erros nas operações de multiplicação e na extração da raiz quadrada.

<u>Atividade 2</u> (Registro figural→ Registro algébrico)[17]

Observe a figura e responda:



a) Qual a medida do lado do quadrilátero amarelo?

b) Qual é a área do quadrilátero amarelo?

c) Qual é a medida do lado do quadrilátero verde?

d) Qual a área do quadrilátero verde?

e) Como podemos representar algebricamente a área de cada quadrilátero pintado de vermelho?

f) Qual é a medida do lado do quadrilátero (maior) formado pelos quadrados: verde, amarelo e pelos retângulos vermelhos?

g) Qual a expressão algébrica que representa a área desse quadrilátero maior?

---

[17] Atividade adaptada do livro Construindo conhecimentos em Matemática, 7ª série. Autores: Edwaldo Bianchini e Marcos Miani (p.152).

h) Qual a expressão algébrica que representa a soma das áreas das quatro figuras que formam o quadrado maior?
i) Usando a soma das áreas das figuras que compõem o quadrado maior, encontre uma expressão algébrica com três termos que indique a área do quadrado maior.
j) Qual relação é possível estabelecer entre as expressões algébricas encontradas nos itens: (g) e (i)?
g) Sabendo-se que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$, desenvolva esse produto usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Com a Atividade 2 exploramos os conceitos do quadrado da soma de dois termos por meio de conversão do registro de representação figural para o registro algébrico.

Pediu-se a observação de uma figura, um quadrado de lados *(a+b)*. Ela é composta por dois quadrados menores, um amarelo de lado *b* e o outro verde de lado *a* e dois retângulos vermelhos de lados *a* e *b*.

Elaboramos uma seqüência de questões sobre as medidas dos lados e áreas das figuras que compõem o quadrado maior, com o objetivo de conduzir a reflexões de modo que os alunos concluíssem que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram: identificação das figuras geométricas (quadrados e retângulos), conceito do cálculo de área, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, operações de adição e multiplicação de monômios e polinômios.

As possíveis dificuldades que os alunos poderiam encontrar para o desenvolvimento da atividade seriam quanto à interpretação do texto e operações com monômios e polinômios.

Atividade 3 (Tratamento no registro numérico)

a) Calcular $(7 - 2)^2$
b) Calcular $(7+2)(7 - 2)$
c) Calcular $(7 + 2)^2$

Esta atividade está relacionada com o pré-teste 1, pois são da mesma natureza. Lembramos que no “Teste” o aluno não recebeu informações de suas resoluções e neste momento recebe o auxílio tanto do programa quanto da pesquisadora quando solicitada.

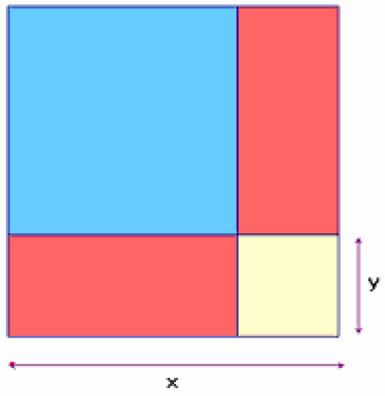
A atividade foi proposta no registro numérico e seus objetivos eram: calcular o quadrado da soma, o quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença de dois números.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram: operações com números Inteiros, potenciação, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e propriedades dos produtos notáveis.

As possíveis dificuldades que os alunos poderiam encontrar para resolução da atividade seriam quanto a erros na operação de multiplicação ou aplicação incorreta das propriedades do quadrado de um binômio, como na forma geral $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$, *a* e *b* números naturais.

<u>Atividade 4</u> (Registro Figural → Registro algébrico)[18]

Observe a figura e responda às questões a seguir:



a) Qual é a medida do lado do quadrado maior composto pelas figuras: azul, amarela e pelas duas figuras vermelhas?

b) Qual é a área desse quadrado maior?

c) Qual é a medida do lado do quadrado amarelo?

d) Qual é a área do quadrado amarelo?

e) Qual é a medida do lado do quadrilátero azul?

[18] *ibid* (p.153)

f) Qual é a expressão algébrica que representa a área do quadrilátero azul?

g) Como podemos representar algebricamente a área de cada quadrilátero vermelho?

h) Qual a expressão algébrica que representa a área do quadrado azul?

Use a área do quadrado maior e subtraia a área dos dois retângulos vermelhos e a área do quadrado amarelo.

i) Encontre uma expressão algébrica com três termos que identifique a área do quadrado azul.

j) Que relação é possível estabelecer entre as expressões algébricas encontradas nos itens (f) e (i)?

l) Desenvolver: (x-y)(x-y).

Com a Atividade 4, exploramos os conceitos do quadrado da diferença de dois termos por meio de conversão do registro de representação figural para o registro algébrico.

Pediu-se para observar uma figura, um quadrado de lado *x*, composta por dois quadrados menores, um amarelo de lado *y* e o outro azul em que as medidas não são dadas diretamente. Há necessidade do aluno deduzir que a medida do lado desse quadrado é *(x-y)* e dois retângulos vermelhos de lados *(x-y)* e y, também não informados diretamente.

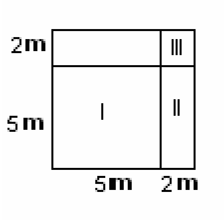
Foi dada uma seqüência de questões sobre as medidas dos lados e áreas das figuras que compõem o quadrado maior com o objetivo de conduzir as reflexões de modo que os alunos concluam que $(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2-2xy+y^2$.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram: identificação das figuras geométricas (quadrados e retângulos), conceito do cálculo de área, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (subtração), operações de monômios e polinômios.

As possíveis dificuldades que os alunos poderiam encontrar para o desenvolvimento da atividade são quanto à interpretação de texto, operações com monômios e polinômios.

<u>Atividade 5</u> (Registro Figural → Registro numérico)

Observe a figura:



a) **Qual é a área da figura I?**
b) **Qual é a área da figura II?**
c) **E a área da figura III?**

Nesta atividade exploramos a conversão do registro de representação figural para o registro numérico.

Para a resolução da atividade seria necessário observar a figura e identificar: um quadrado de lado (5m+2m), composto por dois quadrados identificados como figuras I e III cujos lados medem *5m* e *2m* respectivamente, um retângulo identificado como figura II com medidas de lados *2m* e *5m* e um outro retângulo sem identificação com medidas idênticas às do retângulo II.

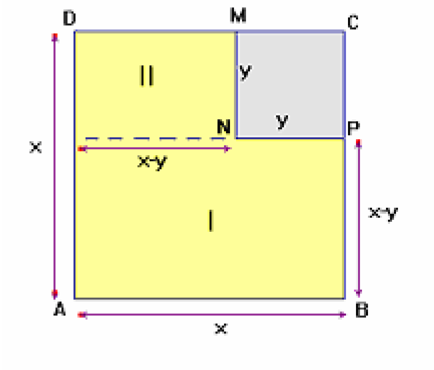
Para responder às perguntas sobre as áreas das figuras I, II e III bastaria multiplicar as medidas dos lados.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram: identificação das figuras geométricas (quadrados e retângulos), operações com números naturais e conceito do cálculo de área.

Os possíveis obstáculos que os alunos poderiam encontrar para resolução da atividade seriam quanto a erros nas operações de multiplicação com números naturais e dúvidas quanto ao conceito de área.

Atividade 6 (Registro figural → Registro algébrico)[19]

Na figura, o lado do quadrado ABCD mede *x* e o lado do quadrado CMNP mede *y*.



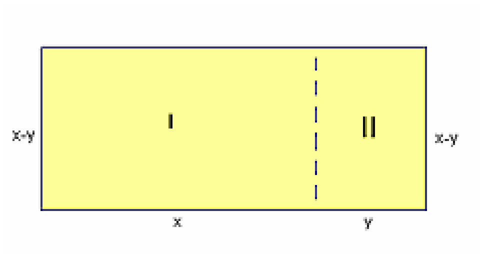
a) Escreva a área da região amarela como diferença de dois quadrados.

b) Indique o produto que fornece a área da figura II.

c) Indique o produto que fornece a área da figura I.

d) Indique a soma das áreas da figura I e II.

e) Se mudarmos de posição o retângulo II , obtemos uma nova figura:



Represente a área dessa nova figura como produto de dois polinômios.

f) Escreva a igualdade entre os resultados encontrados nos itens (a) e (e).

Com a Atividade 6 exploramos os conceitos produto da soma pela diferença de dois termos por meio de conversão do registro de representação figural para o registro algébrico.

Pedimos que observassem as figuras, um quadrado ABCD de lados *x* e o quadrado CMNP de lados *y*

Foi dada uma seqüência de questões sobre as medidas dos lados e áreas das figuras que compõem o quadrado maior com o objetivo de

---

[19] *ibid* (p.161).

conduzir a reflexões de modo que os alunos concluam que $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram: identificação das figuras geométricas (quadrados e retângulos), composição e decomposição de figuras planas, conceito do cálculo de área, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (subtração) e operações de monômios e polinômios.

As possíveis dificuldades que os alunos poderiam encontrar para o desenvolvimento da atividade seriam quanto à interpretação do texto, operações com monômios e polinômios.

Atividade 7 (Registro da língua natural → Registro algébrico)

Represente com uma expressão algébrica as sentenças:

a) O quadrado de um número;

b) A soma do quadrado do número *x* e o quadrado do número *y*;

c) A soma dos números *a* e *b*

d) O quadrado da soma dos números *a* e *b*;

e) A área do quadrado de lado igual a *(n+1)*.

Esta atividade requereu conversão de uma expressão dada no registro de representação da língua natural para o registro de representação algébrica.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram: leitura e interpretação do texto matemático, representação algébrica, conceito de área e conceito de potenciação.

A dificuldade que os alunos poderiam encontrar para o desenvolvimento da atividade seria quanto à interpretação do texto.

Atividade 8 (Tratamento no registro algébrico)

Desenvolver:

a) $(x + y)(x - y)$

b) $(x - 2)^2$

c) $(5x + 4y)^2$

d) $(-y-1)^2$

e) $(n - \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2})$

f) (b+a)(a+b)

O objetivo desta atividade era o desenvolvimento dos produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença em três níveis de dificuldades, assim como o pré-teste 3, mas, com o diferencial de que neste desenvolvimento o aluno receberia auxílio nas resoluções.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (subtração), cálculos algébricos e numéricos e propriedades de produtos notáveis.

As dificuldades que os alunos poderiam encontrar ao desenvolver a atividade seriam quanto aos cálculos algébrico e numérico, aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou a aplicação de produtos notáveis.

Atividade 9 (Tratamento no registro Algébrico)

Fatorar:

a) $x^2 - 20x + 100$

b) $y^2 + 16y + 64$

c) $x^2 - 25$

d) $y^2 - \frac{1}{9}$

Esta atividade envolveu o tratamento no registro de representação algébrica e teve como objetivo a fatoração do trinômio quadrado perfeito e da diferença entre dois quadrados.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade foram interpretação do texto matemático, cálculo de raízes quadradas exatas, desenvolvimento do trinômio quadrado perfeito e da diferença entre dois quadrados.

Os possíveis obstáculos que os alunos poderiam encontrar para resolução das atividades seriam quanto à interpretação do texto matemático, o desconhecimento de produtos notáveis e dificuldades nas operações com números racionais.

5.2.2 Análise *a posteriori* das Atividades de Aprendizagem

Nesta fase, os alunos desenvolveram as atividades utilizando o programa Aplusix no modo “Aprendizagem”; obtiveram informações do programa por meio dos sinais de equivalência sobre suas resoluções e, sem limite de tempo, quando necessário recorreram à pesquisadora cada vez que encontraram dúvidas.

Abaixo, relacionamos o tempo gasto para solução das atividades de aprendizagem:

Atividade	**S1**	**S2**	**S3**
1	33min 16s	09min 08s	21min 40s
2	1h 44min 00s	28min 30s	1h 01min 00s
3	20min 17s	54s	20min 42s
4	1h 16min 00s	21min 27s	42min 13s
5	13min 10s	01min 50s	06min 49s
6	53min 40s	11min 10s	37min 41s
7	08min 56s	03min 05s	11min 46s
8	1h 05min 00s	24min 03s	42min 27s
9	33min 39s	14min 24s	46min 36s
Total	**6h 47min 58s**	**1h54min31s**	**4h 50min 54s**

Quadro 5.11 - Tempo gasto para resolução das atividades de aprendizagem

Constatamos que nesta fase o tempo gasto pelo sujeito S2 também foi consideravelmente menor que os outros dois sujeitos, observamos que em geral S2 fez poucas requisições da ajuda da pesquisadora e houve mais respostas certas, evidenciando facilidade e rapidez em realizar cálculos.

O sujeito S3 desenvolveu a seqüência desta fase em 5 encontros, demonstrou mais dependência da pesquisadora e requisitou sua ajuda várias vezes; em geral queria saber onde errou, pois o programa o informou, mas mesmo assim precisou ser conduzido ao raciocínio para entender onde errou.

O sujeito S1 desenvolveu a seqüência desta fase em 7 encontros; inicialmente não perguntou muito e ficou tentando resolver as questões sozinho; algumas vezes parou e pediu para tomar água, retornando após

10 a 15 minutos; pareceu-nos não se concentrar muito, pois olhava atentamente para a tela por muito tempo. Num segundo momento S1 mudou de atitude, começou pedindo ajuda do colega ao lado; a pesquisadora interveio e acompanhou as resoluções em que apresentava dificuldades em definir os passos a serem dados; no aguardo de cada orientação, demonstrou insegurança e pouca iniciativa em seguir avante. Em geral não reconheceu atividades iguais às que haviam sido revistas há poucos minutos.

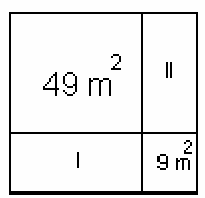
A seguir, apresentaremos quadros com as questões, com os procedimentos de cada sujeito e os erros cometidos no desenvolvimento da seqüência de atividades modo “Aprendizagem”, desenvolvidas no programa de computador Aplusix pelos três sujeitos participantes de nosso estudo.

Após a apresentação dos quadros incluímos uma síntese destes relatos.

Aprendizagem 1

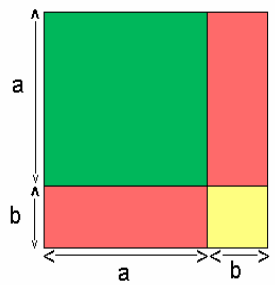
Observe a figura. A área do quadrado maior é $49m^2$ e a área do quadrado menor é $9m^2$.	**S1**	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
a) Determine a área da figura I.	O aluno fez várias tentativas: 18, 21, 91, 15, 14, 32, 01, 7, 20, 7.3=21.	Extraiu a raiz quadrada de 49 e 9 e multiplicou 7x3, não utilizou a unidade de medida m^2, o programa informa "a resposta está errada, a variável esperada: m", fez algumas tentativas até concluir que o que estava faltando era a unidade de medida $21m^2$.	Extraiu a raiz quadrada de 49 e 9 e multiplicou 7x3 , não utilizou a unidade de medida m^2, o programa informa "a resposta está errada, a variável esperada: m", fez algumas tentativas até concluir que o que estava faltando era a unidade de medida $21m^2$.	Falta da unidade de medida
b) Determine a área da figura II.	Defeito no videocassete.	$21m^2$ correto.	Desenvolveu corretamente e utilizou o recurso de comentar etapa "*7x7=49 e 3x3 = 9*"	Nenhum
c) Qual é a área da figura total?	Defeito no videocassete.	Multiplicou $10m x 10m = 100m^2$, corretamente.	Multiplicou $10m x 10m = 100m^2$, corretamente.	Nenhum

Quadro 5.12 – Soluções dos alunos da atividade Aprendizagem 1



Aprendizagem 2

Observe a figura	S1	S2	S3	Erros cometidos no desenvolvimento
a) Qual a medida do lado do quadrilátero amarelo?	Respondeu corretamente: b.	Respondeu corretamente: b.	Respondeu corretamente: b.	Nenhum
b) Qual é a área do quadrilátero amarelo?	Fez algumas tentativas b+b, b+a e b^2.	Respondeu corretamente: b^2.	Respondeu corretamente: b^2.	área do quadrado de lado *b:* b+b e b+a
c) Qual é a medida do lado do quadrilátero verde?	Respondeu corretamente: a.	Respondeu corretamente: a.	Respondeu corretamente: a.	Nenhum
d) Qual a área do quadrilátero verde?	Inicialmente respondeu b^2 depois alterou para a^2.	Respondeu corretamente: a^2.	Respondeu corretamente: a^2.	$a.a = b^2$
e) Como podemos representar algebricamente a área de cada quadrilátero pintado de vermelho?	Fez várias tentativas a^2+b^2, a+b,(a+b), (ab), (a.b) e finalizou com ab.	Respondeu corretamente: ab.	Respondeu corretamente: ab.	área do retângulo de lados *a* e *b: a^2+b^2, a+b, (a+b)*
f) Qual é a medida do lado do quadrilátero (maior) formado pelos quadrados: verde, amarelo e pelos retângulos vermelhos?	Fez tentativas como: a^2, (a^2+b^2), e ab+ab.	Fez algumas tentativas pensando na área do quadrilátero depois percebeu que foi pedido o lado do quadrilátero.	Fez diversas tentativas: ba^2, ab^2, a^2b^2 e então chegou na correta (a+b).	Somar os segmentos *a* e *b* : ba^2, ab^2, a^2b^2, a^2, (a^2+b^2) e ab+ab.



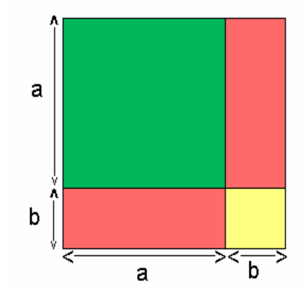
Continuação Aprendizagem 2

	S1	S2	S3	Erros cometidos no desenvolvimento
g) Qual a expressão algébrica que representa a área desse quadrilátero maior?	$(a+b)(a+b)$ correto.	$(a+b)(a+b)$ correto.	Fez diversas tentativas: ab, ab^2, a^2+b^2, ba e então chegou na resposta correta $(a+b)(a+b)$.	Cálculo da área do quadrado de lado *(a+b)*: ab, ab^2, a^2+b^2 e ba
h) Qual a expressão algébrica que representa a soma das áreas das quatro figuras que formam o quadrado maior?	Fez tentativas como: $(b+b^2)(a+a^2)$, a^2+b^2, $(a^2+b^2)ab$, $a.2$, b^2a^2ab, $a+ba$, $(a+b)(a+b)$, $(a^2+b^2)(a+b)$, $(a^2+b^2)(a^2+b^2)$, a^2b^2abab, $(a^2b)(abab)$, $(a^2b^2)(ab+ab)$, $(a^2b^2(ab.ab)$, $(a^2+b^2)(ab+ab)$. Requisitou auxílio à pesquisadora que ajudou na interpretação da pergunta.	Entendeu soma das áreas como soma dos lados e somou $(a+b+a+b+a+b+a+b)$, depois alterou para soma das quatro áreas encontradas nos itens anteriores e expressou corretamente $(a.a+a.b+b.a+b.b)$.	Fez diversas tentativas: $a^2.b^2$, ab^2, a^2+b^2, $a^2b.2$, voltou para a expressão a^2+b^2 , a^2+b^2a , Requisitou auxílio, a pesquisadora ajudou na interpretação da pergunta que representou corretamente: $a^2+b^2+ab+ba$.	Soma das áreas dos quadriláteros: $a^2.b^2$, ab^2, a^2+b^2, $a^2b.2$, a^2+b^2a, $(a+b+a+b+a+b+a+b)$ $(b+b^2)(a+a^2)$, $(a^2+b^2)ab$, $a.2$, b^2a^2ab, $a+ba$, $(a+b)(a+b)$, $(a^2+b^2)(a+b)$, $(a^2+b^2)(a^2+b^2)$, a^2b^2abab, $(a^2b)(abab)$, $(a^2b^2)(ab+ab)$, $(a^2b^2(ab.ab)$, $(a^2+b^2)(ab+ab)$
i) Usando a soma das áreas das figuras que compõem o quadrado maior, encontre uma expressão algébrica com três termos que indique a área do quadrado maior.	$a+b+ab$, a^4b^4, a^4+b^4. Defeito no videocassete.	Utilizou a solução do item anterior e reduziu os termos semelhantes $(a^2+ 2ab+b^2)$.	Utilizou a solução do item anterior e reduziu os termos semelhantes , mas inicialmente somou $ab+ab = a^2b$, depois ab^2 e a^2b^2 . Requisitou auxílio, a pesquisadora retomou as regras de redução de termos semelhantes e esperou que ele encontrasse a solução $(a^2+2ab+b^2)$.	$ab+ab = a^2b$ $ab+ab =ab^2$ $ab+ab = a^2b^2$ $a^2+b^2+ab+ab= a^4b^4$ $a^2+b^2+ab+ab= a^4+b^4$

Continuação Aprendizagem 2

	S1	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
j) Qual relação é possível estabelecer entre as expressões algébricas encontradas nos itens: (g) e (i)?	Defeito no videocassete.	Relacionou corretamente $(a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$.	Relacionou corretamente $(a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$.	Nenhum
l) Sabendo-se que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$, desenvolva esse produto usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.	Defeito no videocassete.	Aplicou a propriedade corretamente $(a+b)^2 =$ $(a+b)(a+b) =$ $a^2+2ab+b^2$.	Aplicou a propriedade corretamente $(a+b)^2 =$ $(a+b)(a+b) =$ $a^2+2ab+b^2$.	Nenhum

Quadro 5.13 – Soluções dos alunos da atividade Aprendizagem 2



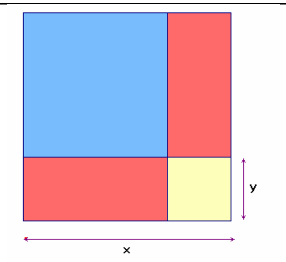
Aprendizagem 3

Calcular	S1	S2	S3	Erros cometidos no desenvolvimento
a) $(7 - 2)^2$	Subtraiu e resolveu a potência corretamente $5^2=25$.	Subtraiu e resolveu a potência corretamente $5^2=25$.	Aplicou a "regra prática" do produto notável corretamente $7^2 -2.7.2 +2^2 = 25$.	Nenhum
b) $(7+2)(7 - 2)$	Efetuou as operações dentro dos parênteses, inicialmente somou os resultados 9+5, depois multiplicou corretamente obtendo o resultado 45.	Efetuou as operações dentro dos parênteses e depois multiplicou corretamente.	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, cometeu erro na multiplicação: 7.7 =14, corrigiu e desenvolveu corretamente.	$7.7 = 14$ $(9)(5) = 9+5$
c) $(7 + 2)^2$	Inicialmente elevou cada termo ao quadrado obtendo 49+4, depois somou dentro dos parênteses $9^2= 9+9=18$, utilizou o recurso de comentar etapa "somei as partes obtidas". Recebeu a informação que a solução estava errada, alterou para $9^2 = 81$.	Somou e elevou ao quadrado corretamente.	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	$(7 + 2)^2=49+4$ $9^2=9+9=18$

Quadro 5.14 – Soluções dos alunos da atividade Aprendizagem 3

Aprendizagem 4

Observe a figura e responda às questões a seguir	**S1**	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
a) Qual é a medida do lado do quadrado maior composto pelas figuras: azul, amarela e pelas duas figuras vermelhas?	Respondeu corretamente: x.	Respondeu corretamente: x.	Respondeu corretamente: x.	Nenhum
b) Qual é a área desse quadrado maior?	Respondeu corretamente: x^2	Respondeu corretamente: x^2	Respondeu corretamente: x^2	Nenhum
c) Qual é a medida do lado do quadrado amarelo?	Respondeu corretamente: y.	Respondeu corretamente: y.	Respondeu corretamente: y.	Nenhum
d) Qual é a área do quadrado amarelo?	Respondeu corretamente: y^2	Respondeu corretamente: y^2	Respondeu corretamente: y^2	Nenhum
e) Qual é a medida do lado do quadrilátero azul?	Fez diversas tentativas $x+y^2$, x^2+y^2, $x+y$, x^2+y^2, xy, x^2+x^2, xy. Requisitou auxílio, a pesquisadora ajudou na interpretação da pergunta. O aluno avançou.	$(x-y)$. Correto.	Olhou a figura, pensou e requisitou auxilio, a pesquisadora ajudou na interpretação da pergunta. O aluno avançou. Respondeu: $x-y$. Quis saber: “esta é a resposta?”, sem escrever esperou a confirmação.	$x+y^2$ x^2+y^2 $x+y$ xy x^2+x^2 xy

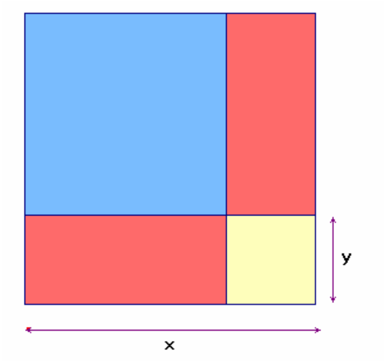


Continuação Aprendizagem 4

	S1	S2	S3	Erros cometidos no desenvolvimento
f) Qual é a expressão algébrica que representa a área do quadrilátero azul?	Fez tentativas: (x-y), (xy), x^2+x^2, x^2-x^2, x^2x^2, $x^2.y^2$, x+y e chegou a solução: $(x-y)^2$.	(x-y)(x-y) correto.	Fez diversas tentativas: x-y , $x-y^2$, $x-y^2.x-y^2$, x^2-y^2, pediu ajuda. A pesquisadora orientou que ele deveria utilizar parênteses, $x^2\ (-y)^2$, x^2 - $(y)^2$, $(-x^2)$ - $(-y)^2$, x^2 - y^2, $(x^2 - y^2)$, $(x-y^2)$ e chegou a solução: $(x-y)^2$.	x-y $x-y^2$ $x-y^2.x-y^2$ x^2-y^2 $x^2\ (-y)^2$ $(-x^2) - (-y)^2$ $(x^2 - y^2)$ $(x-y^2)(x-y)$ (xy) x^2+x^2 x^2-x^2 x^2x^2 $x^2.y^2$ x+y
g) Como podemos representar algebricamente a área de cada quadrilátero vermelho?	Fez várias tentativas : x^2y^2, x^2+y^2, (x+y), x-y, $x-y^2$, x+y, x+x, xx, x-y, $x-y^2$, x+y, x^2+y^2. xy, xx, xy, x-y, x-y.x-y, x-y.y e finalmente (x-y)y.	(x-y).y Correto.	Inicialmente multiplicou os lados do quadrado azul sem o uso dos parênteses: x-y.x-y, o programa informou que havia erro, fez tentativas $(x+y)^2$, x-y.y, perguntou: “O que está errado?” A pesquisadora informou que estavam faltando os parênteses. Pensou um pouco e finalizou (x-y)y.	x^2y^2 x^2+y^2 (x+y) $x-y^2$ x+y x+x x^2+y^2. xy xx xy x-y x-y.x-y x-y.y x-y.x-y $(x+y)^2$

Continuação Aprendizagem 4

	S1	S2	S3	Erros cometidos no desenvolvimento
h) Qual a expressão algébrica que representa a área do quadrado azul? Use a área do quadrado maior e subtraia a área dos dois retângulos vermelhos e a área do quadrado amarelo.	Com orientação da pesquisadora buscou os resultados encontrados nos itens anteriores construindo a expressão: $x^2 - (x-y)y - (x-y)y - y^2$.	Requisitou auxílio, a pesquisadora ajudou na interpretação da pergunta. O aluno avançou e obteve a expressão : $x^2 - (x-y)y - (x-y)y - y^2$.	Fez algumas tentativas $(x-y)x^2$, $x-yx^2$, $x^2(x-y)$, $x^2(x-y)(x-y)$. “Não entendi”, diz o aluno pedindo ajuda. A pesquisadora ajudou na interpretação da pergunta. O aluno avançou. Iniciou com: $(x)^2- (y)^2$ e verificou a solução, “estava errada”, completou incluindo as áreas dos retângulos: $x^2 - (x-y)y-(x-y)y-y^2$.	$(x-y)x^2$ $x-yx^2$ $x^2(x-y)$ $x^2(x-y)(x-y)$



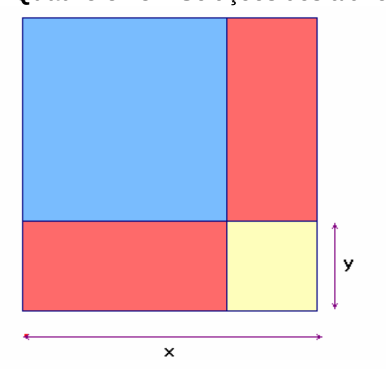
Continuação Aprendizagem 4

	S1	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
i) Encontre uma expressão algébrica com três termos que identifique área do quadrado azul.	Com orientação da pesquisadora observou a expressão obtida no item anterior e detectou os termos semelhantes.: $-(x-y)y-(x-y)y = 2(x+y)y$ $-(x-y)y-(x-y)y =-2(x-y)y$ $-(x-y)y-(x-y)y = -2y(x-y)$ $-(x-y)y-(x-y)y = -2yx+2y^2$ substituindo na expressão anterior temos: $x^2 - (x-y)y - (x-y)y - y^2 =$ $x^2 - 2yx+2y^2- y^2=$ $x^2 - 2yx+y^2=$	Com um pouco de dificuldade para reduzir a expressão acima em um trinômio, pediu ajuda, identificou os termos semelhantes $-(x-y)y-(x-y)y$ adicionou $-2(x-y)y$, pediu ajuda novamente, a pesquisadora sugeriu que aplicasse a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, após algumas tentativas finalizou corretamente	Com um pouco de dificuldade para reduzir a expressão em um trinômio, pediu ajuda, identificou os termos semelhantes $-(x-y)y-(x-y)y$. Fez diversas tentativas para desenvolver a expressão $-(x-y)y-(x-y)y = (x^2 - y)^2y^2$, $-(x^2-y)^2y^2$, $-(x-y)y^2$, $-(x-y)y^2$, $-(x-y)y$,$-x^2-y^2$, $(-x^2-y^2)$, $-(x-y)^2$, $-(x-)y^2$. Pediu ajuda. A pesquisadora orientou: "Quantos termos semelhantes você tem? Quais são eles? Sinais iguais somam as expressões. Como fica? " Digitou $x^2 - 2(x-y)y-y^2$ e desenvolveu $x^2 - 2(x-y)y-2y^2$. Perguntou mais uma vez sobre o que devia fazer. A pesquisadora sugeriu: aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição multiplicando o binômio por 2 e por y. Primeiro multiplicou por dois $x^2 -(2x-2y)y-2y^2$ e depois multiplicou por y: $x^2-2xy-2y^2-y^2$, alterou para $x^2-2xy+2y^2-y^2$ e reduziu os termos semelhantes: $x^2 -2xy + y^2$	$-(x-y)y-(x-y)y=$ $(x^2 - y)^2y^2$ $-(x^2-y)^2y^2$ $-(x-y)y^2$ $-(x-y)y^2$ $-(x-y)y$ $-x^2-y^2$ $(-x^2-y^2)$ $-(x-y)^2$ $-(x-y)y^2$

Continuação Aprendizagem 4

	S1	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
j) Que relação é possível estabelecer entre as expressões algébricas encontradas nos itens (f) e (i)?	Defeito no videocassete.	Relacionou corretamente $(x-y)(x-y) = x^2-2xy+y^2$.	Relacionou corretamente $(x-y)(x-y) = x^2-2xy+y^2$.	Nenhum
l) Desenvolver: $(x-y)(x-y)$	Defeito no videocassete.	Desenvolveu corretamente aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição $(x-y)(x-y) = x^2-2xy+y^2$.	Desenvolveu corretamente aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição $(x-y)(x-y) = x^2-2xy+y^2$.	Nenhum

Quadro 5.15 – Soluções dos alunos da atividade Aprendizagem 4



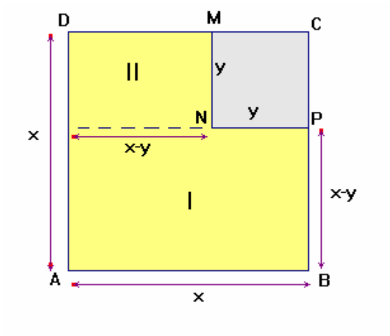
Aprendizagem 5

Observe a figura	**S1**	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
a) Qual é a área da figura I?	Inicialmente somou os lados 5m+5m+5m+5m=20m depois multiplicou dois dos lados e obteve a área 25m².	Multiplicou os lados do quadrado 5mx5m = 25m² corretamente.	Inicialmente somou os lados 5m+2m=7m , depois multiplicou 5m.5m corretamente.	Calculou o perímetro quando deveria calcular a área e somou dois dos lados 5m+2m.
b) Qual é a área da figura II?	Multiplicou os lados do quadrado 5mx2m = 10m² corretamente.	Multiplicou os lados do quadrado 5mx2m = 10m² corretamente.	Apresentou o cálculo multiplicando os lados do retângulo 5m.2m = 7m², mas somou os valores, depois corrigiu para 10m².	5m.2m = 7m²
c) Qual é a área da figura III?	Multiplicou os lados do quadrado 2mx2m = 4m² corretamente.	Multiplicou os lados do quadrado 2mx2m = 4m² corretamente.	Multiplicou os lados do quadrado 2mx2m = 4m² corretamente.	Nenhum
d) E a área total da figura?	Respondeu corretamente 49m² e utilizou o recurso de comentar etapa: "*eu somei os lados 2m e 5m q deu 7 depois eu multipliquei*".	Somou os lados e multiplicou 7m.7m = 49m².	Somou os lados e multiplicou 7m.7m = 49m².	Nenhum

Quadro 5.16 – Soluções dos alunos da atividade Aprendizagem 5

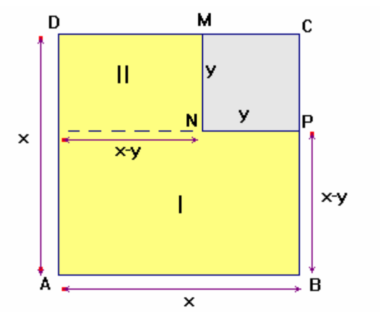
Aprendizagem 6

Na figura, o lado do quadrado ABCD mede *x* e o lado do quadrado CMNP mede *y*.	**S1**	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
a) Escreva a área da região amarela como diferença de dois quadrados	Inicialmente respondeu x^2-y, Requisitou auxílio, a pesquisadora ajudou na interpretação da pergunta. O aluno avançou, pensou e respondeu x^2-y^2 corretamente.	Respondeu x^2-y^2 corretamente.	Inicialmente respondeu xy^2, Requisitou auxílio, a pesquisadora ajudou na interpretação da pergunta. O aluno avançou, pensou e respondeu x^2-y^2 corretamente. .	x^2-y xy^2
b) Indique o produto que fornece a área da figura II	Anotou x-y.y, não utilizou os parênteses, há intervenção da pesquisadora que explica que há necessidade de identificar os lados. Pensou um pouco e utilizou os parênteses (x-y)y. A pesquisadora sugeriu que aplicasse a propriedade da multiplicação em relação à adição. Primeira resposta x-y^2 , depois alterou para y-x^2. A pesquisadora questionou por que tem x^2? Multiplicou novamente xy-y^2.	Respondeu (x-y)y e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	Fez tentativas: x^2 +y^2 , x-y-y, x-y-y^2, $(x-y)^2$, Requisitou auxílio, a pesquisadora ajudou na interpretação da pergunta. O aluno avançou, pensou respondeu corretamente. “Então a área é a multiplicação da base pela altura”. Respondeu (x-y)y e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	Representação da área do retângulo de lados *y* e *(x-y)*: x^2+y^2 x-y-y x-y-y^2 (x-y) x-y .y x-y^2 y-x^2



Continuação Aprendizagem 6

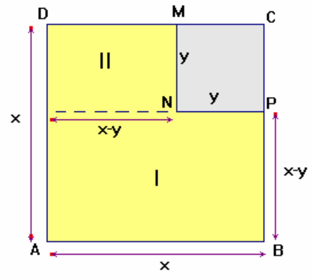
	S1	S2	S3	Erros cometidos no desenvolvimento
c) Indique o produto que fornece a área da figura I	Respondeu (x-y)x e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	Respondeu (x-y)x e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	Respondeu (x-y)x e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	Nenhum
d) Indique a soma das áreas da figura I e II	A pesquisadora ajudou o aluno na interpretação da pergunta. Este somou as áreas encontradas nos itens anteriores, fez algumas tentativas para reduzir os termos semelhantes xy-yx: (xy^2), e (2xy). Houve necessidade de explicar sobre os coeficientes 1 e -1. Concluiu que yx -xy = 0xy , o programa informa que a expressão está inacabada. Novamente a pesquisadora foi requisitada e explicou o que faltava para finalizar a expressão.	Defeito no videocassete.	Somou os resultados dos itens (b) e (c) $xy-y^2+x^2-xy$, Cometeu um engano ao reduzir os termos semelhantes $xy - yx = xy^2$.	$xy - yx = xy^2$ $xy - yx = 2xy$

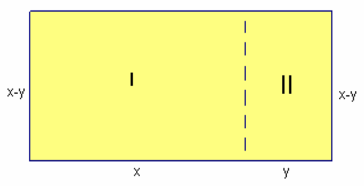


Continuação Aprendizagem 6

Se mudarmos de posição o retângulo II , obtemos uma nova figura:	**S1**	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
e) Represente a área dessa nova figura como produto de dois polinômios.	Foi necessário o auxílio da pesquisadora na interpretação da pergunta. O aluno concluiu que para o cálculo da área : “multiplicamos os lados $(x+y)(x-y)$” .	Defeito no videocassete.	Escreveu a expressão $x-y.x+y$, o programa acusou que havia erro. Apresentou dificuldade em detectar que o erro era a falta de parênteses. Pensa, pergunta ao colega, pede ajuda à pesquisadora.	Representação da área do retângulo de lados $(x+y)$ e $(x-y)$: $x-y.x+y$
f) Escreva a igualdade entre os resultados encontrados em nos itens (a) e (e).	Relacionou corretamente $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.	Defeito no videocassete.	Buscou as respostas dos itens anteriores $x^2 + y^2 = (x-y)(x+y)$ e multiplicou alguns termos obtendo o resultado $x^2 -xy$, o programa informou ter erro, pediu ajuda, a pesquisadora sugeriu aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.	$(x-y)(x+y)=x^2 -xy$

Quadro 5.17 – Soluções dos alunos da atividade Aprendizagem 6





Aprendizagem 7

Represente com uma expressão algébrica as sentenças:	**S1**	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
a)O quadrado de um número;	Representou corretamente x^2.	x^2+y^2.	Representou corretamente x^2.	x^2+y^2
b) A soma do quadrado do número *x* e o quadrado do número *y*;	Inicialmente respondeu x+y depois mudou para x^2+y^2.	x^2+y^2 correto.	Representou incorretamente com as expressões : xy^2 e x^2y^2 , depois mudou para x^2+y^2.	x+y xy^2 x^2y^2
c) A soma dos números *a* e *b*	Representou corretamente a+b.	a+b correto.	Representou incorretamente com as expressões: ab^2 e ab, depois representou corretamente a+b.	ab^2 ab
d) O quadrado da soma dos números *a* e *b*;	Fez algumas tentativas: a^2+b^2, a+b+a+b e finalizou com (a+b)(a+b)	$(a+b)^2$ correto.	Fez algumas tentativas: a^2+b^2, ab^2, a+b, e finalizou com (a+b)(a+b).	a^2+b^2 a+b+a+b ab^2 a+b
e) O quadrado da diferença dos números x e y	Representou (x-y)(x-y) correto.	Representou $(x-y)^2$ correto.	Representou $(x-y)^2$ correto.	Nenhum
f) A área do quadrado de lado igual a *(n+1).*	Inicialmente representou $n+1^2$. A pesquisadora interveio revendo o conceito da área do quadrado. Inseriu os parênteses $(n+1)^2$.	Representou corretamente $(n+1)^2$.	Representou corretamente $(n+1)^2$.	$n+1^2$

Quadro 5.18 – Soluções dos alunos da atividade Aprendizagem 7

Aprendizagem 8

Desenvolver:	**S1**	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
a) $(x + y)(x - y)$	Aplicou a "regra prática" do quadrado da soma de dois termos, depois aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Errou ao reduzir os termos semelhantes:$+xy-xy = xy$. Requisitou auxílio, não percebeu onde estava o erro. Corrigiu para $0xy$, o programa informou que a expressão não estava totalmente acabada, recorreu à pesquisadora novamente que explicou sobre o termo $0xy$.	Desenvolveu corretamente, aplicou a "regra prática" e justificou "*sinais diferentes o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo termo*".	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente. Errou ao multiplicar $x.y = -xy$.	$x.y = -xy$
b) $(x - 2)^2$	Aplicou a "regra prática" do quadrado da diferença de dois termos, corretamente.	Multiplicou os termos $(-2x)^2$ e depois x^2-4, voltou para a primeira solução. Requisitou a pesquisadora que sugeriu aplicar a definição de potenciação $(x-2)(x-2)$ e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.	Aplicou a "regra prática" do quadrado da diferença de dois termos, corretamente.	$x-2 = -2x$

Continuação Aprendizagem 8

	S1	S2	S3	Erros cometidos no desenvolvimento
c) $(5x + 4y)^2$	Aplicou a "regra prática" mas ao elevar o primeiro e segundo termos ao quadrado considerou somente a parte literal: $(5x^2 + 2.5x.4y + 4y^2)$, pediu ajuda. A pesquisadora orientou manter os termos entre parênteses, continuou e chegou a solução esperada $(25x^2 + 40xy + 16y^2)$.	Aplicou a definição de potência e em seguida aplicou a propriedade da multiplicação em relação à adição corretamente.	Aplicou a "regra prática" mas ao elevar o primeiro e segundo termos ao quadrado considerou somente a parte literal: $(5x^2 + 2.5x.4y + 4y^2)$, pediu ajuda . A pesquisadora orientou manter os termos entre parênteses ao desenvolver os parênteses agora só eleva os coeficientes: $(25x + 1.5x.4y + 16y)$. Percebeu o erro e fez nova tentativa, chegou a solução esperada $(25x^2 + 40xy + 16y^2)$ e continuou o desenvolvimento somando: $25x^2 + 16y^2 = 41xy^2$. O programa acusou erro, requisitou auxílio da pesquisadora que reviu as regras da adição de termos semelhantes, observou que os termos não são semelhantes e corrigiu.	$(5x^2 + 2.5x.4y + 4y^2)$ $25x^2 + 16y^2 = 41xy^2$
d) $(-y-1)^2$	Aplicou a "regra prática" do quadrado da diferença de dois termos, não observou que o 1º termo era negativo e desenvolveu $(-y-1)^2 = (y-2y+1)$. Pediu ajuda para a pesquisadora que sugeriu o uso de parênteses. Desenvolveu corretamente.	Utilizou a definição de potenciação, aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição cometeu erros como: $(-y).(-y) = 2y$ e $(-y).(-1) = -1y$	Aplicou a "regra prática" do quadrado da diferença de dois termos, não observou que o 1º termo é negativo e desenvolveu $(-y-1)^2 = (y-2y+1)$. Inicialmente procurou o erro alterando o último termo que estava correto, pediu ajuda. A pesquisadora sugeriu que utilizasse parênteses para o primeiro termo $(-y)$. Desenvolveu $(-y)^2 = -2y^2$, fez algumas tentativas até concluir que $(-y)^2 = y^2$ e que $-2.(-y).1 = 2y$.	$(-y).(-y) = 2y$ $(-y).(-1) = -1y$ $(-y)^2 = -2y^2$ $(-y-1)^2 = (y-2y+1)$

Continuação Aprendizagem 8

	S1	S2	S3	Erros cometidos no desenvolvimento
e) $\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)$	Olhando para o problema o aluno falou: "não sei como resolve". A pesquisadora interveio retomando os dois métodos de resolução: “a regra prática” e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. O aluno optou por aplicar a propriedade. A pesquisadora sugeriu que considerasse n como a fração $\frac{n}{1}$ e explicou que para multiplicar: $\frac{n}{1}.\frac{n}{1}$, inicialmente multiplicamos os numeradores n.n e depois os denominadores. Apresentou dificuldade ao efetuar $-\frac{1n}{2}-\frac{1n}{2}$. Foi necessário que a pesquisadora explicasse o procedimento para a soma de frações com mesmo denominador. O aluno concluiu que o resultado ficaria então: $\left(-\frac{2n}{2}\right)$, e obteve a expressão $\frac{n^2}{1}-\frac{2n}{2}+\frac{1}{4}$, o programa não considerou totalmente acabada a expressão, esperava-se que o aluno simplificasse a fração.	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente, mas ao multiplicar $n.\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{n}{2n}$, o programa acusou erro, o aluno procurou o erro na operação $\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)$, pensou em mudar mas não encontrou alternativa, procurou auxílio. A pesquisadora informou que o problema estava na fração $-\frac{n}{2n}$. Pensou e alterou para $-\frac{n}{2}$, depois somou $-\frac{n}{2}+\left(-\frac{n}{2}\right)=-2.\frac{n}{2}$. O programa informou que não estava totalmente acabada a expressão, esperava-se que o aluno simplificasse a fração: $n^2-2.\frac{n}{2}+\frac{1}{4}$.	Inicialmente elevou os dois termos ao quadrado $n^2-\frac{1}{4}$, o programa informa que não está correto. Aplica a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição multiplica: $n.\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1n}{2n}$. O programa acusou erro. O aluno pede ajuda para a pesquisadora que explicou a regra de multiplicação de frações. O aluno continuou e reduziu os termos semelhantes $-\frac{1n}{2}-\frac{1n}{2}=-\frac{2n}{4}$, novamente pediu ajuda, a pesquisadora explica a regra de adição de frações, continuou, obteve a solução $n^2-\frac{2n}{2}+\frac{1}{4}$, o programa não considerou totalmente acabada a expressão, esperava-se que o aluno simplificasse a fração.	$n.\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{n}{2n}$ $-\frac{1n}{2}-\frac{1n}{2}=-\frac{2n}{4}$ $\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)=$ $n^2-\frac{1}{4}$

Continuação Aprendizagem 8

	S1	**S2**	**S3**	Erros cometidos no desenvolvimento
f) (b+a)(a+b)	Com os termos permutados o aluno ficou um pouco confuso; primeiro aplicou a "regra prática" dos produtos notáveis considerando $(b+a)^2$ e continuou a desenvolver aplicando a regra novamente para $(a+b)^2$. O programa acusou o erro, apagou tudo e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	O aluno percebeu que os termos estavam permutados, mesmo assim utilizou a "regra prática" do produto notável do quadrado da soma corretamente.	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	$(b+a)(a+b) = (b+a)^2(a+b)^2$

Quadro 5.19 – Soluções dos alunos da atividade Aprendizagem 8

Aprendizagem 9

Fatorar:	S1	S2	S3	Erros cometidos no desenvolvimento
a) x^2 - 20x +100	Respondeu rapidamente (x-10)(x+10), observou e procurou o erro, alterou para (x-10)(x-10) e $(x-10)^2$ correto.	Inicialmente transformou em multiplicação (x.x - 2.5x.2 + 10.10), depois mudou o termo central para (-2.10x) , justificando "as pontas têm que ser multiplicado ele por ele mesmo e no meio duas vezes a letra pelo número" concluindo: $(x-10)^2$.	Inicialmente considerou que $(x-10)^2$ poderia ser a solução, aplicou a "regra prática" e confirmou ser a solução do problema.	(x-10)(x+10) (x-5)(x-5) $(x-5)^2$
b) y^2 + 16 y + 64	Inicialmente considerou como solução $y^2 + 8^2$, trocou por $(y+8y)^2$ e depois alterou para $(y+8)^2$.	Efetuou a fatoração corretamente obtendo a solução $(y+8)^2$.	Efetuou a fatoração corretamente obtendo a solução $(y+8)^2$.	y^2+8^2 $(y+8y)^2$
c) x^2 – 25	Inicialmente tentou transformar no trinômio $x^2+2.x.5+5^2$, depois obteve como resultado $(x-5)^2$. O programa acusou erro, pediu ajuda, a pesquisadora reviu os três casos de produtos notáveis estudados. Pensou e respondeu: (x+5)(x-5), correto.	Efetuou a fatoração corretamente e obteve a solução (x+5)(x-5).	Efetuou a fatoração corretamente e obteve a solução (x+5)(x-5).	$(x-5)^2$
d) $y^2 - \frac{1}{9}$	Respondeu $\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$, depois alterou para $\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)$, ainda apresentava erro, fez outra alteração para $\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)$.	Efetuou a fatoração corretamente e obteve a solução $\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)$.	Inicialmente considerou como solução $\left(y+\frac{1}{3}\right)^2$, depois optou por $\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)$.	$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$ $\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)$ $\left(y+\frac{1}{3}\right)^2$

Quadro 5.20 – Soluções dos alunos da atividade Aprendizagem 9

As atividades de Aprendizagem 1 e Aprendizagem 5 envolveram o cálculo de áreas de figuras planas, necessitando a conversão do registro figural para o numérico e o tratamento no registro numérico. Em nossas observações, Quadro 5.12 e Quadro 5.16, já apresentados, constatamos que os sujeitos não utilizaram as unidades de medidas metro e metro quadrado de imediato, só depois de receber a mensagem “a resposta está errada. A variável esperada é: *m*”, passaram a utilizá-las.

Observamos que o sujeito S1 iniciou as atividades fazendo tentativas sem refletir sobre seu erro, demonstrou dúvidas quanto ao conceito de área, confundindo com o conceito de perímetro. Pediu ajuda para a pesquisadora. Tentou calcular o produto de dois números iguais cujo resultado era 49. Utilizando-se de papel e lápis o aluno efetuou cálculos, fez a tabuada do 4, 6, 7 e 8, a pesquisadora observou que o aluno errou a multiplicação a partir de 7x4, corrigiu o erro e pediu que ele continuasse a correção.

A atividade de Aprendizagem 2 envolveu a conversão do registro figural para o registro algébrico e o tratamento no registro algébrico, assim como as atividades de Aprendizagem 4 e Aprendizagem 6, tem as mesmas características, diferenciadas pelo estudo do quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença de dois termos, respectivamente.

Nas observações das soluções dos alunos, Quadro 5.13, Quadro 5.15 e Quadro 5.17, consideramos que os três sujeitos apresentaram dificuldades em interpretar as questões e fizeram várias requisições da ajuda da pesquisadora; precisaram ser conduzidos ao raciocínio que os fizessem entender os procedimentos do desenvolvimento das expressões algébricas e da interpretação do texto.

Apresentaremos uma situação em que foi solicitada a ajuda da pesquisadora pelo sujeito S1, na atividade Aprendizagem 6 sobre o cálculo das áreas de uma figura composta pela figura I, um retângulo de lados *x* e *(x-y)* e pela figura II, um retângulo de lados *y* e *(x-y)*. O aluno precisou ser conduzido ao raciocínio pela pesquisadora:

Pesquisadora: Qual a área da figura I ? Já foi calculada?

S1: (x^2-xy)**.**

Pesquisadora: Qual a área da figura II?

S1: ($xy-y^2$).

Pesquisadora: O problema pede que você some as duas áreas.

O aluno copia as respostas dos itens anteriores sem o sinal (+) para representar a soma x^2 –xy $xy-y^2$.

Pesquisadora: Onde está a soma das áreas?

O aluno acrescenta o símbolo de adição: $x^2-yx + xy-y^2$.

Pesquisadora: Este é o resultado?

S1: Não

Pesquisadora: O que está faltando?

S1: Somar

Pesquisadora: Quais os termos podemos somar?

S1: Os iguais x^2 e y^2. (apontou na tela).

Pesquisadora: *x* é igual a *y*?

S1: Não, é que os dois estão elevados ao quadrado.

Pesquisadora: Os termos são semelhantes quando as partes literais são iguais "às letras".

S1: Os semelhantes então são xy e (–yx).

Pesquisadora: Quais são os coeficientes de xy? O número que aparece antes da parte literal, neste caso não aparece nenhum número. O que isso significa? Quanto é esse coeficiente?

S1: Um.

Pesquisadora: Um, é no primeiro caso; e no segundo?

S1: Também é um.

Pesquisadora: E o sinal que está antes de xy ?

S1: Então é menos um.

Pesquisadora: Você tem 1xy – 1xy. Calcule.

S1: 0xy. Então a expressão fica: $x^2 +0xy -y^2$.

O programa informa "a expressão não está totalmente acabada".

Pesquisadora: O que falta para finalizar?

S1: x^2?

Pesquisadora: O que você tem aqui? Aponta para a expressão 0xy.

S1: Zero xy.

Pesquisadora: Há necessidade de deixar essa expressão?

O aluno apagou a parte numérica e deixou a parte literal xy.

Pesquisadora: Se você apagar o zero você muda a expressão para 1xy.

Colocou o zero onde estava e apagou (0xy-) deixando a expressão x^2+y^2.

Pesquisadora: Porque você eliminou o sinal do y^2?

S1: Então fica $x^2 – y^2$?

Pesquisadora: Perfeito.

Consideramos que as dificuldades mais presentes nestas atividades foram quanto à interpretação do texto matemático; a conversão da representação figural para algébrica principalmente no caso em que foi necessário subtrair os segmentos de medidas *x* e *y* e também quanto ao cálculo algébrico.

Observamos que nas expressões envolvendo multiplicação de monômio por polinômio, adição e subtração de monômios, redução de termos semelhantes, foram feitas diversas tentativas para chegar à solução. Consideramos que os alunos de nosso estudo ainda não dominavam as operações envolvendo cálculo algébrico, mas estas atividades de Aprendizagem podem ter contribuído para o entendimento de tais tópicos.

Ao finalizar as tarefas, a pesquisadora questionou se haviam compreendido bem as relações dos três casos de produtos notáveis:

$(a+b)^2= (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$

$(x-y)^2= (x-y)(x-y) = x^2-2xy+y^2$

$(x+y)(x-y) = x^2-y^2$

Os alunos consideraram que compreenderam as relações e completaram falando o que lembravam ter estudado nas aulas de matemática, a “regra prática”, para $(a+b)^2$: “quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo termo, mais o segundo termo ao quadrado”; para $(x-y)^2$: “quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo termo, mais o segundo termo ao quadrado” e para (x+y)(x-y): “quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo”.

Na atividade que envolveu cálculo numérico com o produto da soma pela diferença, o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números (Aprendizagem 3), constatamos em nossas observações, (Quadro 5.14), que os sujeitos de nosso estudo não apresentaram dificuldades; os erros cometidos foram na operação de multiplicação e no desenvolvimento da expressão $(7+2)^2$, elevando cada termo ao quadrado 49+4 quando deveria somar os números e calcular a potência $(9)^2=81$.

Observamos que o sujeito S2 resolveu a atividade com rapidez, em 54 segundos (Quadro 5.11), e não apresentou dificuldade alguma; o sujeito S3 utilizou propriedades dos produtos notáveis, procurou um caminho mais longo na resolução e apresentou poucos erros, provavelmente por falta de atenção; o sujeito S1 cometeu mais erros conceituais nas operações e no cálculo do quadrado da soma, elevando cada termo ao quadrado.

A atividade Aprendizagem 7 envolveu a conversão do registro de representação da língua natural para o registro de representação algébrica.

Constatamos em nossas observações, (Quadro 5.18) que a conversão da expressão "A soma do quadrado de um número x e o quadrado do número y ", teve respostas como: $x+y$, xy^2 e x^2y^2.

Na representação da expressão "a soma dos números a e b", somente o sujeito S3 fez duas tentativas antes de expressar corretamente, suas tentativas foram: ab^2 e ab.

Na representação da expressão "O quadrado da soma dos números a e b", os sujeitos S1 e S3 fizeram algumas tentativas como: a^2+b^2, $a+b+a+b$, ab^2 e $a+b$, finalizaram com a expressão (a+b)(a+b).

Na expressão que envolveu a área de um quadrado de lado $(n+1)$, o sujeito S1 demonstrou não ter o domínio completo sobre o conceito de área, elevou apenas o segundo termo ao quadrado $n+1^2$; a pesquisadora interveio e levou o aluno a modificar seu raciocínio até concluir que necessitava de parênteses.

A atividade Aprendizagem 8 envolveu o tratamento no registro algébrico no desenvolvimento do quadrado do binômio e do produto da soma pela diferença de dois termos. Constatamos em nossas observações, (Quadro 5.19), que os sujeitos de nosso estudo aplicaram a "regra prática" dos produtos notáveis nas expressões que envolviam o quadrado de um binômio e nas expressões envolvendo o produto da soma pela diferença aplicaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Os alunos cometeram alguns erros em suas resoluções durante o desenvolvimento da atividade, como havíamos previsto em nossa análise *a priori*; os erros comuns foram quanto às manipulações algébricas. Apresentamos abaixo esses erros:

Erros nas resoluções	**Cálculo Algébrico**
Adicionar um termo algébrico a um numérico	x-2=-2x
Multiplicação de monômios	x.y=-xy (-y)(-y)=2y
Multiplicação de monômios com coeficientes inteiros	(-y)(-1) = -1y
Adição de monômios	$25x^2 + 16y^2 = 41xy^2$
Potenciação de monômios	$(-y)^2 = -2y^2$ $(5x)^2 = 25x$ $(4y)^2 = 4y^2$ $(-y)^2 = y$
Operações com números racionais	$-\frac{1n}{2}-\frac{1n}{2}=-\frac{2n}{4}$

Quadro 5.21 – Erros comuns nas resoluções da atividade 8

A pesquisadora foi requisitada com freqüência nesta atividade pelos alunos.

O sujeito S1 errou ao reduzir os termos semelhantes xy-xy = xy, alterou para 0xy. O programa informou: “a expressão não está totalmente acabada”. Não percebeu onde estava o erro, pediu ajuda à pesquisadora que lhe explicou sobre o termo 0xy.

Novamente pediu auxílio à pesquisadora, assim como o sujeito S3, quando desenvolveram as expressões de forma errada $(-y-1)^2=y^2-2y+1$ e $(5x +4y)=5x^2+2.5x.4y+4y^2$, a pesquisadora os orientou que mantivessem os termos entre parênteses.

O sujeito S3 pediu auxílio à pesquisadora quando efetuou o cálculo algébrico $25x^2+16y^2 = 41xy^2$ e o programa acusou erro; esta explicou as regras de redução dos termos semelhantes, ele observou que os termos não eram semelhantes e corrigiu.

O sujeito S2 pediu ajuda à pesquisadora quando efetuou a operação dentro dos parênteses multiplicando os termos $(x-2)^2=(-2x)^2$; depois alterou sua solução, elevou cada termo ao quadrado, $(x-2)^2 = x^2-2^2$, a pesquisadora sugeriu aplicar a definição de potenciação (x-2)(x-2) e aplicar a propriedade da multiplicação em relação à adição.

Observamos que os três alunos fizeram várias tentativas e requisições até chegarem à resposta esperada ao desenvolver a expressão com números racionais fracionários, $\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)$, optaram por utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. As orientações da pesquisadora foram : sugeriu que considerasse *n* como a fração $\frac{n}{1}$ e explicou que para multiplicar $\frac{n}{1}.\frac{n}{1}$, inicialmente multiplicamos os numeradores *n.n* e depois os denominadores; explicou o procedimento para operações com frações com mesmo denominador $-\frac{1n}{2}-\frac{1n}{2}$ e a simplificação da fração $-\frac{2n}{2}$; o programa não considerou totalmente acabada a expressão, pois era esperado que o aluno simplificasse a fração.

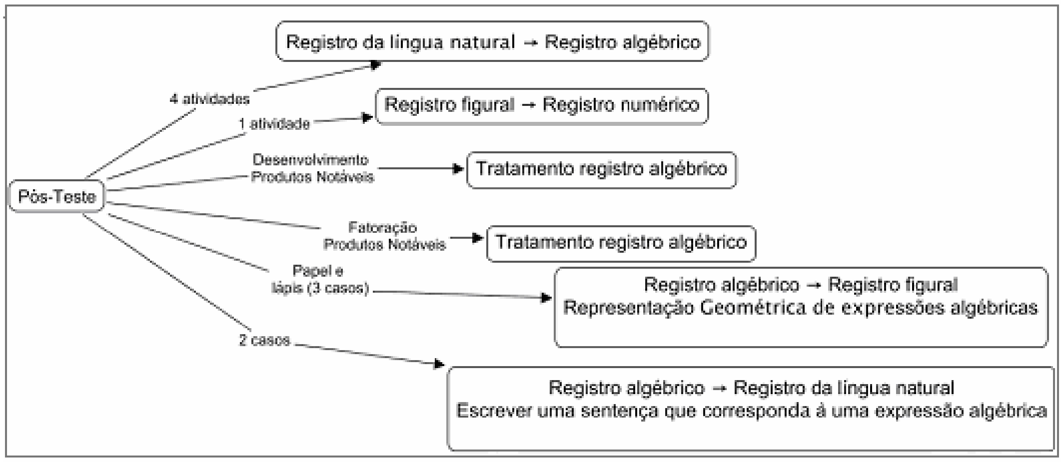
A última atividade da seqüência, Aprendizagem 9, requereu o tratamento no registro algébrico de quatro expressões de fatoração de produtos notáveis.

Nas observações do desenvolvimento das atividades apresentadas no Quadro 5.20, a pesquisadora foi pouco requisitada, apenas o sujeito S1 apresentou dificuldade em relacionar o trinômio quadrado perfeito e a diferença de quadrados como casos de produtos notáveis.

5.3 Análise do Pós-teste

Nesta última fase, pós-teste, nosso objetivo foi avaliar a evolução dos alunos em relação ao pré-teste quanto às conversões de registros ou o tratamento num mesmo registro.

Na seqüência, apresentaremos a estrutura da seqüência de atividades do pós-teste no quadro:



Quadro 5.22 - Estrutura das atividades do pós-teste

Preparamos seis atividades que envolviam conversões de registros de representações ou tratamento num mesmo registro, das quais cinco foram desenvolvidas com o auxílio do programa Aplusix no modo “Teste”, com um tempo máximo de 30 minutos para resolver cada uma da maneira que julgassem correto sem a interferência do programa ou da pesquisadora em suas resoluções; uma atividade foi desenvolvida com papel, lápis, borracha e régua, sem o auxílio do computador.

5.3.1 Análise *a Priori* do Pós-teste

Pós-teste 1 (Registro da língua natural → Registro algébrico)

Represente com uma expressão algébrica as sentenças:
a) A área do quadrado de lado igual a *(x - y)*;
b) O quadrado da soma dos números *x* e *y*;
c) A diferença do quadrado do número *x* e o quadrado do número *y.*

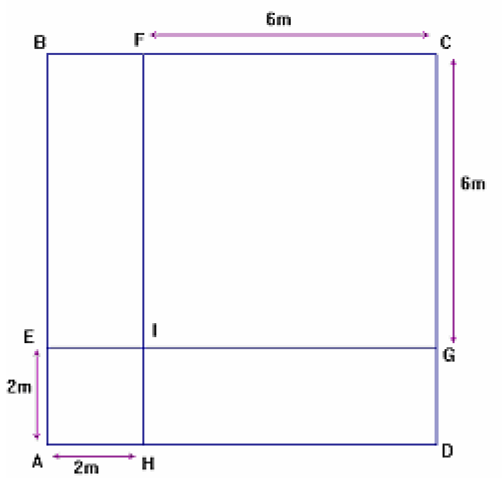
Esta atividade envolvia a conversão de uma expressão dada no registro de representação da língua natural para o registro de representação algébrica.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade eram: leitura e interpretação do texto matemático, representação algébrica e conceito de área.

A possível dificuldade que os alunos poderiam encontrar para o desenvolvimento das atividades seria quanto à interpretação do texto. Como por exemplo: “O quadrado da soma dos números x e y”, o aluno poderia escrever a expressão na linguagem algébrica sem utilizar os parênteses x^2+y^2, quando deveria escrever $(x+y)^2$.

<u>Pós-teste 2</u> (Registro figural → Registro numérico)

Observe a figura:



Qual a área dos quadriláteros?

a) AEIH

b) IFCG

c) HIGD

d) EBFI

e) ABCD

Na resolução da atividade, necessitava observar a figura e identificar: o quadrado IFCG de lado 6m; o quadrado AEIH de lado 2m; dois retângulos EBFI e HIGD de lados 6m e 2m e o quadrado ABCD de lado 8m, formado pelas quatro figuras anteriores e calcular a área de cada figura identificada anteriormente.

Os registros de representação semiótica envolvidos na atividade foram figural e numérico.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade eram: identificação das figuras geométricas (quadrados e retângulos), operações com números naturais, conceito de área.

Os possíveis obstáculos que os alunos poderiam encontrar para resolução da atividade seriam erros na operação de multiplicação e na utilização do conceito de perímetro, ou seja, poderiam confundir os conceitos de área com perímetro, somando os valores correspondentes aos quatro lados da figura quando deveriam multiplicar dois dos lados.

Pós-teste 3 (Tratamento no registro algébrico)

Desenvolver:

a) $(a - 2)^2$

b) $(3a + 2b)(2b + 3a)$

c) $(b - a)(b + a)$

d) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$

f) $(-m - 2)^2$

O objetivo desta atividade foi o desenvolvimento dos produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença em três níveis de dificuldades.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade eram: propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (subtração), cálculos algébrico e numérico e propriedades de produtos notáveis.

Os possíveis obstáculos que os alunos poderiam encontrar para resolução das atividades seriam quanto à aplicação incorreta de produtos notáveis e dificuldades nas operações com números racionais.

Pós-teste 4 (Tratamento no registro algébrico)

Fatore as expressões

a) $x^2 - a^2$

b) $y^2 - 14y + 49$

c) $4x^2 + 4x + 1$

d) $y^2 - \frac{1}{25}$

Esta atividade envolveu o tratamento no registro de representação algébrica e tinha como objetivo a fatoração do trinômio quadrado perfeito e da diferença entre dois quadrados.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade eram: conceito e cálculo de raízes quadradas exatas, propriedade do trinômio quadrado perfeito e da diferença entre dois quadrados.

Os possíveis obstáculos que os alunos poderiam encontrar para resolução das atividades seriam quanto à aplicação incorreta de produtos notáveis e dificuldades nas operações com números racionais.

Pós-teste 5 (Registro algébrico → Registro da língua natural)

Escreva a expressão algébrica abaixo usando a língua natural.

a) $a^2 - b^2$

b) $(x+y)^2$

Incluímos este teste, que não fazia parte de nosso estudo piloto, com o objetivo de verificar se o aluno fazia a conversão do registro algébrico para o registro da língua natural após ter desenvolvido diversas atividades de aprendizagem no programa Aplusix.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade eram: interpretação do texto matemático, conceito da diferença entre dois quadrados, operações algébricas e conhecimentos sobre produtos notáveis e fatoração.

As dificuldades que os alunos poderiam encontrar ao resolver este teste poderiam ser a representação da língua natural e a aplicação incorreta de produtos notáveis (fatoração e/ou desenvolvimento).

<u>Pós-teste 6</u> (Registro algébrico → Registro figural)

Utilize figuras geométricas que você estudou e represente as expressões algébricas:

a) $(x+1)^2$

b) $x^2 - 4$

c) $(x - 3)^2$

Este teste também não figurava em nosso estudo piloto, contudo consideramos importante incluir uma atividade que envolvesse a conversão do registro algébrico para o registro figural.

Os conhecimentos necessários para resolução da atividade eram: interpretação do texto matemático, conhecimento da diferença entre dois quadrados e quadrado do binômio, cálculos algébricos e numéricos, fatoração e figuras geométricas.

A dificuldade que os alunos poderiam encontrar ao resolver este teste seria em relacionar a expressão algébrica a uma figura geométrica.

5.3.2 Análise *a Posteriori* do Pós-teste

Assim como ocorreu nas atividades pré-teste e aprendizagem, nesta fase, pós-teste, o sujeito S2 demonstrou agilidade nos cálculos. Apresentamos o quadro abaixo com o tempo que cada sujeito levou para desenvolver a seqüência de atividades.

Pós-teste	S1	S2	S3
1	04min 43s	01min 28s	17min 31s
2	08min 26s	04min 06s	15min 06s
3	28min 53s	05min 45s	23min 07s
4	13min 08s	09min 08s	13min 36s
5	09min 00s	01min 16s	07min 41s
TOTAL	**1h 04min 10s**	**21min 43s**	**1h 17min 01s**

Quadro 5.23 – Tempo gasto para resolução do pós-teste

A seguir, apresentaremos quadros com sínteses das questões, com os procedimentos de cada sujeito e os erros cometidos no desenvolvimento da seqüência de atividades modo “Teste”, assim como a análise *a posteriori* da seqüência de atividades.

Pós-teste 1

Represente com uma expressão algébrica as sentenças:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	Erros
a) A área do quadrado de lado igual a *(x - y)*	Representou (x-y), não elevou ao quadrado.	Representou corretamente $(x-y)^2$.	Representou corretamente $(x-y)^2$.	2	(x-y)
b) O quadrado da soma dos números *x* e *y*	Representou $x^2 + y^2$.	Representou corretamente $(x+y)^2$.	Representou corretamente $(x+y)^2$.	2	x^2+y^2
c) A diferença do quadrado do número *x* e o quadrado do número *y.*	Representou corretamente x^2-y^2.	Representou corretamente x^2-y^2.	Representou corretamente x^2-y^2.	3	Nenhum

Quadro 5.24 – Soluções dos alunos da atividade pós-teste 1

Constatamos em nossas observações do teste diagnóstico, pré-teste, que o sujeito S2 ao resolver os testes fazia a conversão da representação do registro da língua natural para o registro algébrico corretamente, assim como no **pós-teste 1** (Quadro 5.24).

O sujeito S3 representou corretamente as expressões do pós-teste. Consideramos que houve uma evolução conceitual em termos de representação semiótica deste aluno e o sujeito S1 continuou com os erros de conversão na expressão “o quadrado da soma dos números *x* e *y*” respondeu da mesma forma x^2+y^2.

Observamos nas sínteses do **pós-teste 2** (Quadro 5.25) que os três sujeitos fizeram corretamente as conversões dos registros de representação figural para o numérico, assim como o tratamento no registro numérico.

Apenas o sujeito S2 não utilizou a unidade de medida e somou os termos corretamente da expressão (6+2)(6+2), mas trocou a operação de multiplicação para a de adição: 8+8=16.

Não houve confusão entre os conceitos de área e perímetro como ocorreu no teste diagnóstico dos três alunos.

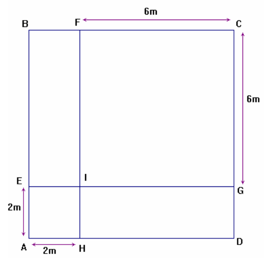
Verificamos que todos fizeram a conversão do registro figural para o registro numérico corretamente. S1 continuou apresentando dificuldade com cálculos numéricos do mesmo modo que em seu teste diagnóstico, S2 e S3 efetuaram o tratamento no registro numérico corretamente.

Consideramos que houve uma evolução nas resoluções, pois os sujeitos não apresentaram dificuldade em resolver a questão que envolvia conceitos de área e somente S1 não demonstrou evolução no cálculo numérico.

Pós-teste 2

Observe a figura:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	Erros
a) AEIH	Calculou corretamente $4m^2$.	Calculou corretamente $4m^2$ mas não usou a unidade de medida.	Calculou corretamente $4m^2$.	3	Nenhum
b) IFCG	Calculou corretamente $36m^2$.	Calculou corretamente $36m^2$ mas não usou a unidade de medida.	Calculou corretamente $36m^2$ mas não usou a unidade de medida corretamente (m).	3	Nenhum
c) HIGD	Calculou corretamente $12m^2$.	Calculou corretamente $12m^2$ mas não usou a unidade de medida.	Calculou corretamente $12m^2$.	3	Nenhum
d) EBFI	Calculou corretamente $12m^2$.	Calculou corretamente $12m^2$ mas não usou a unidade de medida.	Calculou corretamente $12m^2$.	3	Nenhum
e) ABCD	Calculou corretamente $64m^2$ embora tenha considerado as medidas dos lados como $8m^2$ e não 8m.	Apresentou a expressão (6+2)(6+2) corretamente, somou os termos dentro dos parênteses mas trocou a operação de multiplicação para adição 8+8 = 16.	Calculou corretamente $64m^2$.	2	$(6+2)(6+2)= 8 + 8$ $8m^2 \cdot 8m^2 = 64m^2$

Quadro 5.25 – Soluções dos alunos da atividade pós-teste 2



Pós-teste 3

Desenvolver:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	Erros
a) $(a - 2)^2$	Aplicou a regra dos produtos notáveis, obteve a solução correta a^2-4a+4.	Aplicou a regra dos produtos notáveis, obteve a solução correta a^2-4a+4.	Aplicou a regra dos produtos notáveis, obteve a solução correta a^2-4a+4.	3	Nenhum
b) (3a +2b)(2b+3a)	Aplicou a "regra prática" corretamente.	Considerou a expressão $(3a+2b)^2$ e desenvolveu "o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o segundo ao quadrado" corretamente, obteve a solução $9a^2+12ab+4b^2$.	Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	3	Nenhum
c) (b - a)(b + a)	Aplicou a regra dos produtos notáveis, obteve a solução correta b^2-a^2.	Aplicou a regra dos produtos notáveis obteve a solução correta b^2-a^2.	Aplicou a regra dos produtos notáveis, obteve a solução incorreta b^2+a^2.	2	b^2+a^2
d) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$	Aplicou a regra dos produtos notáveis, obteve a solução correta: $x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}$.	Aplicou a regra dos produtos notáveis, obteve a solução correta $x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}$.	Aplicou a regra dos produtos notáveis, obteve a solução correta $x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}$.	3	Nenhum
e) $(-m-2)^2$	Aplicou a "regra prática", $(-m)^2-2.2+4$, não considerou o sinal negativo de m ao multiplicar o primeiro termo.	Aplicou a regra dos produtos notáveis, m^2 - **2.m.2** + 4, não se deu conta de que o primeiro termo é negativo.	Transformou em produto (-m-2)(-m-2) e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição corretamente.	1	$(-m-2)^2 =$ m^2 - **2.m.2** + 4

Quadro 5.26 – Soluções dos alunos da atividade pós-teste 3

Com o **pós-teste 3,** procuramos verificar se os sujeitos de nosso estudo faziam corretamente o tratamento do registro de representação algébrica no desenvolvimento do quadrado de um binômio e produto da soma pela diferença.

Observamos (Quadro 5.26) que em todas as expressões deste teste os sujeitos S1 e S2 não fizeram o uso da propriedade da multiplicação em relação à adição, utilizaram a "regra prática".

Na expressão em que os termos são negativos $(-m-2)^{2,}$ esta "regra prática" parece não ser muito eficiente, pois os alunos apresentaram dificuldade quando se depararam com os termos negativos, desenvolvendo a expressão de forma errada $m^2\mathbf{-2.m.2}+4$.

S3 aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição na expressão com termos negativos e desenvolveu corretamente. Na expressão (b-a)(b+a) aplicou a "regra prática" e obteve a solução b^2+a^2 quando deveria ser b^2-a^2.

Consideramos que os três sujeitos empregaram bem seus conhecimentos nas resoluções das expressões que envolviam cálculos algébricos. Demonstraram uma evolução considerável no tratamento no registro algébrico comparado com o teste diagnóstico.

Pós-teste 4

Fatorar as expressões:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	Erros
a) $x^2 - a^2$	Transformou o binômio num trinômio $x^2 + 2.x.a+a^2$	$(x+a)(x-a)$ correto	$(x+a)(x-a)$ correto	2	$x^2 - a^2 =$ $x^2 + 2.x.a+a^2$
b) $y^2 - 14y + 49$	$x^2 - 7^2 = (x+7)^2$	$(y-7)^2$ correto	$(y-7)^2$ correto	2	$y^2 - 14y + 49 =$ $x^2 - 7^2 =$ $(x+7)^2$
c) $4x^2 + 4x + 1$	$(2x +4x +1)^2$	$(2x+1)^2$ correto	$(2x+1)^2$ correto	2	$(2x +4x +1)^2$
d) $y^2 - \frac{1}{25}$	Transformou o binômio no trinômio: $xy^2 - 2y\frac{1}{25} - \left(\frac{1}{25}\right)^2$	$\left(y-\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)$ correto	$\left(y-\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)$ correto	2	$xy^2 - 2y\frac{1}{25} - \left(\frac{1}{25}\right)^2$

Quadro 5.27 – Soluções dos alunos da atividade pós-teste 4

Nossa proposta para o **pós-teste 4** foi de fatorar as expressões do trinômio quadrado perfeito e da diferença de quadrados. Os sujeitos S2 e S3 resolveram corretamente as quatro expressões de fatoração deste teste (Quadro 5.27).

Consideramos que o sujeito S1 não desenvolveu habilidades para o tratamento do registro algébrico quando se trata de fatoração. Conforme mostramos no quadro:

Fatorar as expressões:	**S1**	Erros
$x^2 - a^2$	Transformou o binômio num trinômio $x^2 + 2.x.a+a^2$	$x^2 - a^2 =$ $x^2+2.x.a+a^2$
$y^2 - 14y + 49$	$y^2 - 7^2 = (y+7)^2$	$y^2–14y+49 =$ $y^2 - 7^2 =$ $(y+7)^2$
$4x^2 + 4x + 1$	$(2x +4x +1)^2$	$(2x +4x +1)^2$
$y^2 - \frac{1}{25}$	Transformou o binômio no trinômio: $xy^2 - 2y\frac{1}{25} - \left(\frac{1}{25}\right)^2$	$xy^2 - 2y\frac{1}{25} - \left(\frac{1}{25}\right)^2$

Quadro 5.28 – Fatorações de expressões algébricas feitas pelo sujeito S1

Observamos em suas resoluções, nas duas expressões que envolvem a diferença de quadrados $x^2 - a^2$ e $y^2 - \frac{1}{25}$, que S1 transformou-as em trinômio quadrado perfeito quando deveria fatorar e obter o produto da soma pela diferença de dois termos.

Nas expressões do trinômio quadrado perfeito, observamos que S1 tinha noção de que precisava extrair as raízes quadradas do primeiro e terceiro termos; no trinômio em que o segundo termo era negativo, $y^2–14y+49$, ele eliminou este termo mas manteve a operação de adição $(y+7)^2$ quando deveria subtrair $(y-7)^2$. Na fatoração do trinômio $4x^2 + 4x + 1$, não excluiu o termo 4x.

Consideramos que S2 e S3 efetuaram o tratamento no registro algébrico corretamente e apresentaram evolução nestes conceitos se compararmos com os testes diagnósticos. Em contrapartida, S1 apresentou dificuldade com cálculos algébricos.

Pós teste 5

Escreva as expressões algébricas abaixo usando a língua natural:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	Erros
a) $a^2 - b^2$	"*a* ao quadrado e *b* negativo ao quadrado"	Utilizou as regras de fatoração (a+b)(a-b)	"a subtração do *a* ao quadrado e *b* ao quadrado"	2	"- O que é língua natural? Errei esse exercício porque não sabia o que era língua natural. Acho que seria melhor pedir para escrever por extenso."
b) $(x+y)^2$	"*x* positivo ao quadrado e *y* positivo ao quadrado"	Transformou o quadrado em multiplicação (x+y)(x+y)	"a soma do número *x* mais *y* ao quadrado"	1	"*x* positivo ao quadrado e *y* positivo ao quadrado".

Quadro 5.29 – Soluções dos alunos da atividade pós-teste 5

Consideramos importante no **pós-teste 5** verificar se os alunos faziam a conversão do registro de representação algébrica para o registro da língua natural, dessa forma adaptamos a opção de "comentar etapa" do programa Aplusix para escrever a expressão.

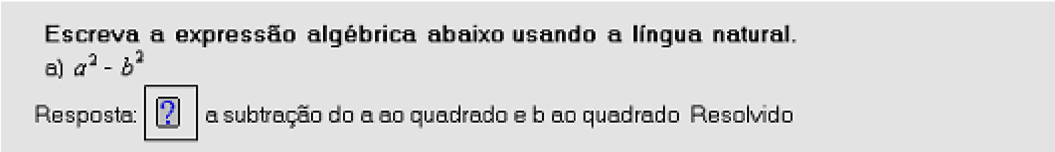


Figura 5.4 - Protocolo pós-teste do sujeito S3

As expressões não foram digitadas no campo de resposta, pois nele o programa aceitava variável ou expressões algébrica e numérica. No caso do texto, poderia ser escrito neste campo, mas não seria possível dar espaços entre as palavras, como mostramos na Figura 5.5:

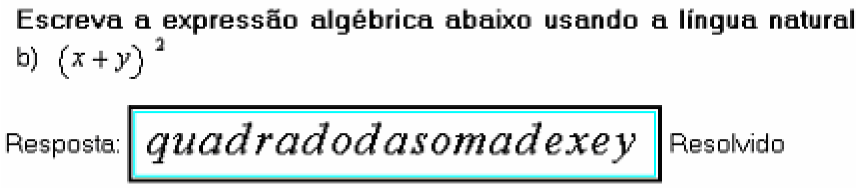


Figura 5.5 - Exemplo de digitação de texto no campo de respostas do Aplusix

Pelos protocolos (Quadro 5.29), consideramos que S1 e S3 fizeram a conversão satisfatoriamente para a expressão $a^2–b^2$.

O sujeito S3 também fez a conversão corretamente para a expressão $(x+y)^2$ "a soma do número *x* mais *y* ao quadrado".

S2 utilizou regras de fatoração na expressão da diferença de quadrados e desenvolveu o quadrado da soma de dois termos transformando em produto. Ao final desta atividade o aluno questionou:

S2: O que é língua natural? Errei esse exercício porque não sabia o que era língua natural. Acho que seria melhor pedir para escrever por extenso.

A dificuldade na interpretação do enunciado apresentada por S2 não estava prevista em nossas análises *a priori,* no entanto não nos surpreendeu a sugestão do aluno, visto que a expressão "por extenso" é habitual em livros didáticos e provavelmente seu uso em sala de aula, por isso consideramos que a expressão "língua natural" por não ser muito usada é desconheci da pelos alunos.

Pós-teste 6

Represente geometricamente as expressões algébricas:	**S1**	**S2**	**S3**	Acertos	Erros
a) $(x+1)^2$	Representou por meio de um quadrado de lado (x+1).	Representou por meio de um quadrado de lado (x+1).	Representou por meio de um quadrado de lado (x+1).	3	Nenhum
b) x^2-4	Representou por meio de um retângulo, justificou "1 lado da figura vale x-2, o lado vezes ele mesmo daria nesse caso x^2-4 também elevado ao quadrado". Mas anotou na figura o lado maior com medida x e o lado menor com medida (-2).	Representou por meio de um quadrado. Alegou ter feito a figura certa (retângulo), apagou e fez errado (quadrado).	Representou por meio de um retângulo com a medida do lado menor (x-2) e do lado maior (x+2).	1	Representação por meio de um quadrado
c) $(x-3)^2$	Representou por meio de um quadrado maior de lado x, dividido em quatro figuras: um quadrado de lado (-3), outro quadrado de lado x-3, dois retângulos de lados (x-3) e (-3).	Representou por meio de um quadrado de lado (x-3).	Representou por meio de um quadrado de lado (x-3).	3	Considerou a medida do quadrado menor (-3) quando deveria considerar (3).

Quadro 5.30 – Soluções dos alunos da atividade pós-teste 6

Sentimos a necessidade de incluir uma atividade envolvendo a conversão do registro de representação algébrica para o figural, com o objetivo de verificar se o aluno faria a conversão neste sentido, pois desenvolveram algumas atividades de aprendizagem no sentido contrário.

No **pós-teste 6** havia três expressões algébricas para representar geometricamente: a diferença de quadrados, o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos.

Na expressão $(x+1)^2$, os sujeitos de nossa pesquisa representaram corretamente por meio de um quadrado de lado (x+1).

Na expressão x^2-4, o sujeito S2 empregou corretamente seus conhecimentos de fatoração da diferença de quadrados e concluiu que a figura teria lados *(x+2)* e *(x-2)*, representando-a por meio de um quadrado:

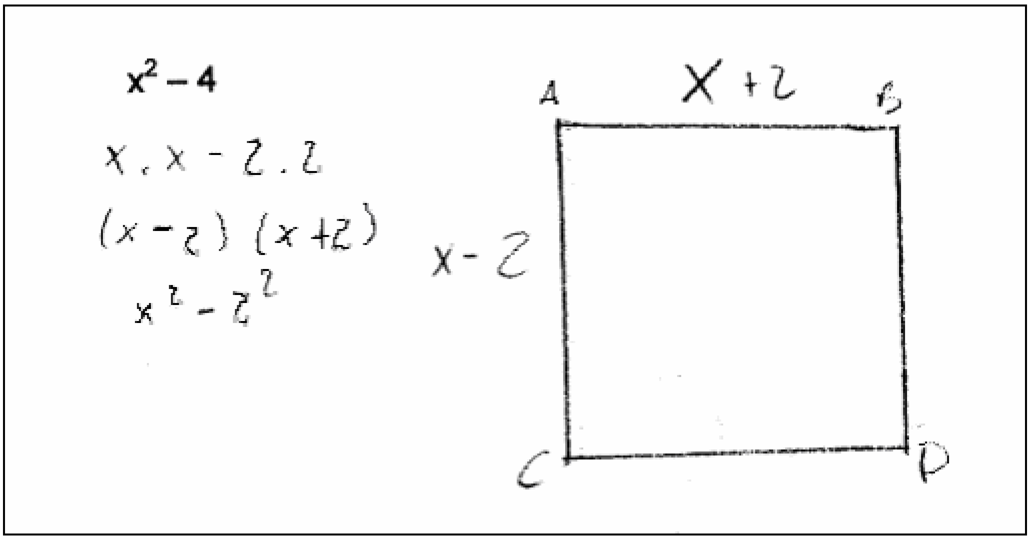


Figura 5.6 - Protocolo sujeito S2

Ao final, o aluno alegou ter feito a figura certa (retângulo), mas apagou e fez errado (quadrado).

Nesta expressão S1 representou a figura por meio de um retângulo de lados *(-2)* e *x,* fazendo comentários sobre sua representação. Mostraremos a seguir:

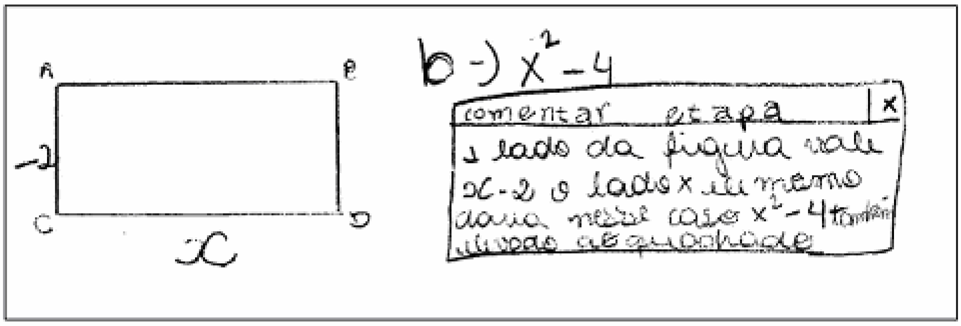


Figura 5.7 - Protocolo sujeito S1

S1, em seus comentários, escreveu: “1 lado da figura vale x-2, o lado vezes ele mesmo daria neste caso x^2-4”. Nestes comentários, pareceu-nos que o aluno procurou fatorar a expressão dada x^2-4 e obteve a expressão$(x-2)^2$.

Apesar de ter escrito que um lado da figura vale (x-2), representou a figura por meio de um retângulo com medidas (-2) e *x.*

Na expressão do quadrado da diferença, S2 e S3 representaram corretamente por meio de um quadrado de lado *(x-3)*. S1 representou por meio do quadrado CABD de lado *x* composto por dois quadrados CFGE e GIBH de lados *(-3)* e (x-3),respectivamente, e dois retângulos congruentes FAIG e IGHD em que um dos lados mede *(x-3).* Como podemos constatar no protocolo (Figura 5.8):

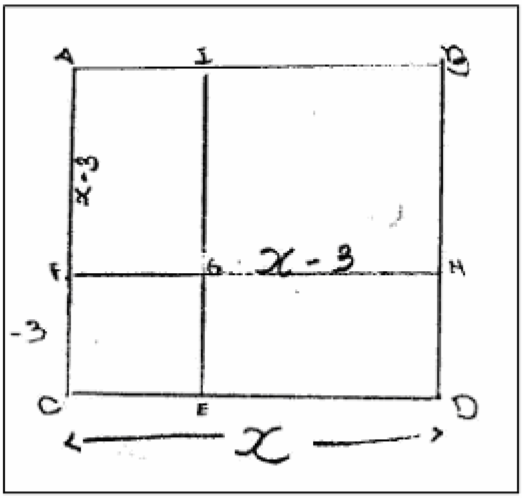


Figura 5.8 - Protocolo do sujeito S1

Consideramos que S1 fez a conversão do registro algébrico para o registro figural corretamente, embora tenha considerado a medida do lado do quadrado menor igual a *(-3)*.

As conversões do registro algébrico para o figural das expressões que envolveram o quadrado de um binômio, realizadas pelos três sujeitos de nosso estudo foram consideradas satisfatórias.

Na expressão que envolveu diferença de quadrados, foi necessário inicialmente fatorar a expressão para identificar os lados da figura, depois atentar para os lados que não eram da mesma medida e, em seguida, deveriam construir um retângulo.

Consideramos que essa questão, diferença de quadrados, envolveu o fenômeno de não-congruência na conversão entre o registro algébrico e figural. Com a ocorrência desse fenômeno, S1 e S2 demonstraram ter dificuldades para fazer a conversão, portanto consideramos que as suas conversões não foram satisfatórias quando ocorreu o caso de não-congruência.

Com o objetivo de verificar se os sujeitos de nosso estudo apresentaram evolução quando efetuaram as conversões de registros de representação ou tratamento num mesmo registro, contidos nas atividades, confrontamos os resultados pré-teste e pós-teste, apresentados no Quadro 5.31:

Conversões e Tratamento	S1		S2		S3	
	PRÉ	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**
Registro na língua natural → Registro algébrico	Não	Não	Sim	Sim	Não	Sim
Registro figural → Registro numérico	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim
Registro algébrico→ Registro na língua natural	Não foi proposto	Sim	Não foi proposto	Não	Não foi proposto	Sim
Registro algébrico → Registro figural	Não foi proposto	Parcial	Não foi proposto	Parcial	Não foi proposto	Sim
Tratamento no registro numérico	Não	Não	Sim	Sim	Não	Sim
Tratamento no registro algébrico – desenvolver os produtos notáveis -	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim
Tratamento no registro algébrico - Fatorar as expressões -	Não	Não	Não	Sim	Não	Sim

Quadro 5.31 – Quadro comparativo dos resultados do pré-teste e pós-teste

Constatamos que S1 ao desenvolver as atividades do pré-teste não efetuava as conversões de registros ou os tratamentos num mesmo registro corretamente; no pós-teste, apresentou evolução somente na conversão do registro figural para o numérico e no tratamento do registro algébrico. Para as conversões que não foram propostas anteriormente, registro algébrico para língua natural e registro algébrico para o figural, consideramos que S1 fez as conversões corretamente, somente apresentou dificuldade com a representação geométrica da diferença de quadrados.

S2 demonstrou que sabia fazer a conversão do registro na língua natural para o registro algébrico e o tratamento no registro numérico corretamente no pré-teste e continuou no pós-teste. Portanto, nas duas fases, manteve o mesmo desempenho.

Para as duas atividades envolvendo conversões, que não foram propostas anteriormente, S2 apresentou dificuldades na interpretação do texto e na conversão do registro algébrico para o figural, somente com a expressão diferença de quadrados.

Nas demais atividades que incluíam conversões ou tratamento num mesmo registro, S2 teve acerto total ao desenvolver o pós-teste, portanto, consideramos que demonstrou evolução fazendo conversões e tratamentos no mesmo registro satisfatoriamente.

Observamos que S3 apresentou evolução significativa, pois ao desenvolver o pré-teste não efetuava as conversões de registros ou os tratamentos num mesmo registro corretamente e, como pudemos constatar (Quadro 5.31), ao desenvolver as atividades do pós-teste fez todas as conversões, inclusive as conversões que não foram propostas anteriormente.

Concluímos que, de maneira geral, ocorreram avanços significativos entre as atividades do pré-teste e pós-teste e consideramos que isso está relacionado às retroações do programa Aplusix e à mediação da pesquisadora que, em conjunto, possibilitaram aos alunos tais avanços.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi investigar a aprendizagem de produtos notáveis de alunos dos 8° e 9° anos em uma escola pública, com o auxílio do programa de computador Aplusix, direcionado à aprendizagem da álgebra, verificando se os alunos faziam conversões de registros de representações semióticas e tratamento num mesmo registro (Duval, 2003) por meio de uma seqüência de atividades propostas pela pesquisadora e desenvolvida por estes mesmos alunos.

Pautamo-nos na teoria de registro de representação semiótica de Raymond Duval, na qual a comunicação em matemática é estabelecida por meio de representação, sendo necessária a mobilização desses registros de representações.

As representações semióticas e a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática (sistema de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, etc), originam os registros e permitem a passagem, coordenadamente, de um para outro durante uma resolução da atividade matemática.

Para Duval (2003), o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, é a coordenação entre vários registros de representação: "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas." (p.15).

Utilizamos para o desenvolvimento de nossa pesquisa a metodologia da engenharia didática, optando por uma abordagem qualitativa e utilizando quatro das suas fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Em nossas análises preliminares, partimos das dificuldades apresentadas por alunos do ensino fundamental no estudo de produtos notáveis, pelo levantamento dos resultados das avaliações SAEB e SARESP/2005 que evidenciavam, nos baixos resultados atingidos em todo país, o grau de dificuldades na aquisição de conceitos básicos.

Dificuldades estas que os acompanhavam ao longo de sua trajetória educacional.

Este quadro crítico foi melhor explicitado no capítulo I, em que foram apresentados dados e análises que nos encaminharam para a presente pesquisa, na busca de investigar o uso do recurso tecnológico do programa Aplusix como uma ferramenta útil na superação dessas dificuldades.

Sentimos a necessidade de investigar em quais momentos do curso foram introduzidas as noções iniciais de álgebra e de que maneira foi trabalhado o assunto produtos notáveis para esses alunos.

Como ponto de partida, para obter informações sobre o trabalho com expressões algébricas aplicadas em sala de aula, entrevistamos a professora regente das turmas que participaram de nossa pesquisa.

A seguir, verificamos as sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental para trabalhar produtos notáveis e constatamos que recomendam estudá-los por meio de cálculos de área de retângulos e da sua representação geométrica, pois “A utilização desses recursos possibilita ao aluno conferir um tipo de significado às expressões.” (BRASIL, 1998, p.121). Os PCN também consideram que as contribuições dos recursos tecnológicos são facilitadores no processo ensino e aprendizagem.

Na seqüência, fizemos um breve relato das anotações de aula feitas por dois alunos (8° e 9° anos) em seus cader nos.

Incluímos, nesta investigação, uma breve análise de três livros didáticos do 8º ano utilizados para consulta pela professora, constatamos que todos seguem as considerações feitas pelos PCN e apresentam manual ou orientação para o professor com sugestões para facilitar o trabalho na sala de aula, explorando as conversões dos registros de representação semiótica em graus diversos.

Dois deles apresentam a introdução de produtos notáveis empregando conversões do registro figural para o registro algébrico e o tratamento no registro algébrico e as atividades são propostas apenas para empregar o tratamento no registro algébrico sem as conversões de registro de representação.

Um deles traz, tanto na introdução de produtos notáveis como nas atividades propostas, conversões do registro figural para o registro algébrico, do registro figural para o registro numérico e o tratamento nos registros algébrico e numérico. Apresenta, ainda, interligação com a geometria em vários exercícios de perímetro, área e volume.

A partir disso, elaboramos uma seqüência de atividades e a inserimos no banco de dados do programa Aplusix. Analisamos os registros de representação semiótica envolvidos em cada atividade proposta e seus objetivos, e destacamos quais os conhecimentos prévios necessários para as resoluções e as possíveis dificuldades que os alunos poderiam apresentar no desenvolvimento das atividades.

A seqüência foi desenvolvida em três etapas: pré-teste, aprendizagem e pós-teste. Os registros das observações durante a experimentação, correspondente a essas três fases, foram feitos por meio de gravações do "videocassete", um recurso do programa Aplusix, que grava todo o desenvolvimento das atividades e possibilita um maior acesso às resoluções dos alunos. Contamos com a participação efetiva de três alunos denominados em nossa pesquisa de S1, S2 e S3 e com a colaboração de uma observadora e gravamos parte das sessões com uma filmadora instalada no laboratório de informática, mas que não foi analisada nesta pesquisa.

Com base nos registros das observações confrontamos as análises *a priori* para validação ou não das hipóteses, comparamos as conversões de registro de representação semiótica e o tratamento no mesmo registro das atividades pré-teste e pós-teste e constatamos o que se segue.

Registro na língua natural → Registro algébrico

Um dos alunos ao resolver os testes diagnósticos fazia a conversão da representação do registro da língua natural para o registro algébrico corretamente, assim como no pós-teste. Outro, representou corretamente as expressões somente no pós-teste. Consideramos que houve uma evolução nos conceitos de representação deste aluno e um terceiro continuou com os erros de conversão na expressão "o quadrado da soma dos números *x* e *y*” respondeu da mesma forma que no pré-teste: x^2+y^2.

Registro figural → Registro numérico

No pré-teste para o cálculo das áreas das figuras, dois alunos apresentaram dificuldade em diferenciar os conceitos de área e perímetro, pois somaram os lados. Observamos que os três participantes fizeram corretamente as conversões dos registros de representação figural para o numérico no pós-teste, confirmando uma evolução conceitual, pois não apresentaram dificuldade em resolver questões que envolviam os conceitos de área.

Registro algébrico→ Registro da língua natural

Atividades envolvendo estas conversões não foram propostas nas fases do pré-teste e aprendizagem, dois dos alunos fizeram a conversão satisfatoriamente e um aluno desconhecia o significado da expressão “língua natural” e por isso apresentou dificuldades na interpretação do texto.

Registro algébrico →Registro figural

No pós-teste, propusemos três expressões algébricas para serem representadas geometricamente: a diferença de quadrados, o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos. Atividades envolvendo estas conversões não foram propostas nas fases do pré-teste e aprendizagem. Consideramos satisfatórias as conversões apresentadas pelos três alunos, embora dois deles tenham apresentado dificuldade com a representação geométrica da diferença de quadrados.

Tratamento no registro numérico

O sujeito S2, ao resolver o pré-teste efetuou corretamente o tratamento no registro numérico, assim como no pós-teste. O sujeito S3 desenvolveu corretamente o tratamento no pós-teste, e o sujeito S1 continuou apresentando dificuldade com cálculos numéricos do mesmo modo que em seu teste diagnóstico, não demonstrando avanços no cálculo numérico.

Tratamento no registro algébrico – desenvolver os produtos notáveis -

Observamos nas atividades do pré-teste que os três alunos não faziam o tratamento no registro algébrico e consideramos que houve uma evolução significativa nos resultados do pós-teste destes alunos quanto ao desenvolvimento das expressões que envolvem conceitos de operações algébricas.

Tratamento no registro algébrico - Fatorar as expressões -

Nas atividades de fatoração aplicadas no pré-teste foram apresentadas diferentes alternativas de escolha de resposta. Os alunos tiveram de escolher uma entre quatro, assim, procuraram desenvolver cada uma delas aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para verificar qual alternativa coincidia com as expressões dos enunciados das questões. Observamos que estes alunos não utilizaram as propriedades de fatoração.

No pós-teste, as expressões de fatoração não foram apresentadas com diferentes alternativas de escolha de resposta e dois dos alunos resolveram corretamente as quatro expressões. Verificamos que houve uma evolução conceitual destes sujeitos, comparando com o pré-teste, e um aluno não desenvolveu habilidades para o tratamento do registro algébrico quando se tratava de fatoração.

Observamos que ocorreram avanços significativos quanto ao desempenho dos alunos entre as atividades do pré-teste e pós-teste. Consideramos que as retroações do programa Aplusix e a mediação da pesquisadora possibilitaram aos alunos tais avanços.

Pelas considerações de Masetto (2000) sobre mediação pedagógica e o uso da tecnologia, entendemos que o mesmo ocorreu em nossa pesquisa. A pesquisadora agiu como mediadora pedagógica.

Essa intervenção no ensino nos pareceu presente desde o início do estudo: na escolha das atividades inseridas no banco de dados do programa, na análise da seleção de atividades do estudo piloto, nas modificações efetuadas, nas inserções ou exclusões feitas, ou seja, na reformulação da seqüência para o estudo oficial.

Também cremos que houve a mediação pedagógica quando os sujeitos de nosso estudo desenvolveram a seqüência de atividades no modo “Aprendizagem”, visto que eram informados de seus erros pelo programa e, muitas vezes, recorreram à pesquisadora para tirar dúvidas ou por necessidade de serem conduzidos ao raciocínio correto.

Ressaltamos que o auxílio do programa Aplusix no desenvolvimento deste estudo favoreceu o alcance de resultados positivos, pois observamos que os alunos se mostraram mais motivados em função das retroações do programa.

Dentre as ferramentas por ele disponibilizada as que mais auxiliaram nesta pesquisa, são as que incluem a possibilidade de inserção no banco de dados de uma seqüência de atividades, elaboradas e organizadas pela pesquisadora, o *Aplusixeditor* e o videocassete que permitiu maior acesso às resoluções dos alunos.

Sentimos necessidade de algumas ferramentas a mais no programa, assim como foi destacado por Gonçalves (2007), ou seja, a possibilidade de construção de desenho para facilitar o aluno na representação de determinadas atividades e um ambiente em que os alunos pudessem pesquisar, relacionar e buscar informações favorecendo a pesquisa e o estudo dos conteúdos selecionados pelo Aplusix.

Desta forma, com relação à primeira, incluímos uma atividade envolvendo conversão do registro algébrico para o registro figural feito em papel, lápis, borracha e régua e, com relação à segunda houve mediação da pesquisadora fornecendo, no momento adequado, estímulos e questionamentos que pudessem favorecer as ações de relacionar, comparar e concluir, enfim, o raciocínio.

A experiência na elaboração deste trabalho nos proporcionou idéias e propostas para novas pesquisas. Salientamos a necessidade de um estudo mais amplo de polinômios, envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e suas propriedades.

Finalmente, ao término deste estudo manifestamos aqui o desejo de que tenha contribuído com o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA no qual este trabalho está inserido e de alguma forma influencie e motive outros professores de matemática em sua prática.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Sueli Gomes. **Aspectos Emergentes da Utilização do Computador na Educação Matemática**. In FRANZONI, M. ALLEVATO, N.S.G (org) Reflexão sobre a Formação de Professores e o Ensino de Ciências e Matemática. Campinas, SP Ed. Alínea, 2007. Cap. 4 (p. 75-96).

ARTIGUE, Michele**. Engenharia Didáctica.** In Brun, J. (direção) Didáctica das Matemáticas**:** Instituto Piaget, 1996.

BAUMGART, John K. **História da Álgebra**. Trad. Domingues, Hygino H. São Paulo: Atual,1992. Série: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula, v.4.

BEHRENS. Marilda Aparecida. **Projetos de aprendizagem colaborativa num paradigma emergente.** In Moran, J.M., Masetto, M.T., Behrens, M.A. Novas tecnologias e mediação pedagógica, Campinas, SP: Papirus, 2000, (p.133-173). (coleção Papitus Educação)

BIANCHINI, E., MIANI, M. **Construindo Conhecimentos em Matemática 7ª série.** São Paulo/SP. Ed. Moderna. 2000.

BITTAR, Marilena. **Possibilidades e dificuldades na incorporação do uso de *softwares* na aprendizagem de matemática. Um estudo de um caso: O *software* Aplusix**. Águas de Lindóia / SP 2006. Anais III SIPEM-GT6 (p. 91 -102). Disponível em <http://www.desenho.ufpr.br/IIISIPEM/GT6.pdf>. Acesso em 09/03/2008.

BITTAR, M., CHAACHOUA, H. **Integração de um software para a aprendizagem da álgebra: Aplusix**. Recife 2004. Anais VIII ENEM. Recife – UFPE, 2004. Mesa Redonda: Investigação da Educação Matemática e Ensino Fundamental. CD-ROM.

BITTAR, M.; CHAACHOUA, H.; FREITAS, J.L.M. **Aplusix: Um software para o ensino de álgebra elementar**. Recife 2004. Anais VIII ENEM. Recife – UFPE, 2004a. Mesa Redonda: Investigação da Educação Matemática e Ensino Fundamental. CD-ROM.

BITTAR, M.; CHAACHOUA, H.; NICAUD, J.F. **Determinação automática de concepções de alunos em álgebra**. Série Estudos. Periódico do Mestrado em Educação da UCDB. Campo Grande – MS, nº 19, p.77 – 99, jan./jun. 2005.

BORGES, José Antonio. **Polinômios no Ensino Médio: Uma Investigação em Livros Didáticos.** Dissertação de Mestrado PUC/SP 2007.

BOYER Carl B. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzabach; tradução Elza F. Gomide - 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BROUSSEAU, D. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathematiques. Recherches em Didactique dês Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage, 1986, vol. 7 nº2, p. 3 3-115

BURIGATO, Sonia Maria Monteiro da Silva. **Estudo de dificuldades na aprendizagem na fatoração nos Ambiente: Papel e lápis e no software Aplusix.** Dissertação de Mestrado. UFMS/MS, 2007.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais PCN**. Terceiro e Quarto ciclo. Brasília: MEC/SEE, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Salto para o futuro: construindo a escola cidadã, projeto político-pedagógico**. Brasília: MEC, 1998.

_____________, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. **Prova Brasil Escala de matemática,** 2005**.** Disponível em: <http://www.inep.gov.br/basica/saeb/prova_brasil/escala_mat.htm> Acesso em 26/07/2007.

_____________, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. **Prova Brasil,** 2005**.** Disponível em : <http://provabrasil.inep.gov.br/pdf/3502441_35243619.pdf> Acesso em 26/07/2007.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da Costa. **Formação de Professores para o Ensino de Matemática com a Informática Integrada a prática Pedagógica: Exploração e análise de Dados em Bancos Computacionais**. Tese de Doutorado, PUC/SP, 2004.

CRUZ, Eliana da Silva **A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental: um estudo sob a ótica da organização praxeológica.** Dissertação Mestrado, PUC/SP, 2005.

DAMM, Regina Flemming. **Registro de Representação**. In MACHADO S. A. Et.d. Educação Matemática uma Introdução, São Paulo, Educ, 1999, (p.135-153).

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática 7ª série.** São Paulo, Ática, 2002.

DEMANA, Franklin; LEITZEL Joan. Estabelecendo Conceitos Fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: COXFORD A.F. SHULTE A.P. (org), **As Idéias da Álgebra.** Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p.70-78.

DOMINGUES, Hygino, H. IEZZI Gelson. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática: Registros e Representação Semiótica**, Campinas /SP: Papirus, 2003. (Coleção Papirus Educação) p.11-33.

GIOVANI J.R; GIOVANI JR. **Matemática Pensar e Descobrir 7ª série**, São Paulo, FTD, 2000.

GONÇALVES, Renata Siano. **Um Estudo com os Números Inteiros Usando o Programa Aplusix com Alunos de 6ª série do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Complexos, polinômios e Equações, v. 6. São Paulo, Atual Ed. 1977.

LOCHHEAD J., MESTRE J.P. **Das Palavras à Álgebra: Corrigindo Concepções Erradas**. In: COXFORD A.F. SHULTE A.P. (org), **As Idéias da Álgebra.** Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p.144-154.

LOPES, J. A, **Livro didático de matemática: Concepção, seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendências em Educação Matemática**, Tese de doutorado UNICAMP/2000

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática: Registros e Representação Semiótica**. Campinas /SP: Papirus 2003. 160 p.

____________ Educação Matemática Uma Introdução: Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. São Paulo. Educ 1999. p.197–208.

MARANHÃO M.C.S; MACHADO S.D. A; COELHO S.P. **Qual a Álgebra a ser Ensinada em Cursos de Formação de Professores de Matemática?** In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática , 2004, VIII ENEM..

_____________. **Projeto: O que se Entende por Álgebra?.** In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática , 2003, II SIPEM. Anais do II SIPEM, 2003. v. 1, p. 1-12.

MASETTO, Marcos T. **Mediação Pedagógica e o uso da Tecnologia.** In Moran, J.M., Masetto, M.T., Behrens, M.A. Novas tecnologias e mediação pedagógica, Campinas, SP: Papirus, 2000, (p.133-173). (coleção Papitus Educação)

____________. **Projeto: O que se entende por álgebra?** In: ENEM, 2004, Recife. Anais do ENEM.São Paulo: SBEM, 2004. v.1. p. 1-16.

MENEZES, Ebenezer Takuno de; SANTOS, Thais Helena dos."**Progressão continuada" (verbete).** ***Dicionário Interativo da Educação Brasileira*** - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora, 2002. Disponível em
<http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=68> , Acesso em 22/1/2008.

MILIES, F.C.P.,COELHO, S.P. **Números: Uma Introdução à Matemática**. 3. ed. São Paulo. Editora da universidade de São Paulo, 2003.(p.35-44).

MILIES, F.C.O., BUSSAB J.H.O. **A geometria na antiguidade clássica**. São Paulo, FTD, 1999.

MORAN José Manuel. **Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas.** In Moran, J.M., Masetto, M.T., Behrens, M.A. Novas tecnologias e mediação pedagógica, Campinas, SP: Papirus, 2000 (p.11–65). (coleção Papitus Educação).

PASSONI J.C; CAMPOS T.M.M. RE **Revisitando os Problemas Aditivos de Vergnaud de 1976.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em matemática: Registros e Representação Semiótica**, Campinas /SP: Papirus, 2003. (Coleção Papirus Educação) p.49-56.

PAIS Luiz Carlos. **Didática da Matemática - Uma Análise da Influencia Francesa.** Belo Horizonte, Autêntica, 2001, (Coleção “Tendências em Educação Matemática”). Cap VII p.77-87.

PONTE J.P. BROCARDO J., OLIVEIRA H., **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

RIBEIRO, Alessandro J. **Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP.** Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

SMOLE Kátia Cristina Stocco, KIYUKAWA Rokusaburo. **Matemática**. Ensino médio, v.3 Editora Saraiva 1ª edição. São Paulo, 1998.

VALENTE José Armando. **Computadores e Conhecimento Repensando a Educação**. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1993.

ANEXO I

Quadro de descrição de níveis de escala do SAEB/2005 de proficiência em matemática

Nível	Descrição dos Níveis da Escala
125	• Neste nível, os alunos da 4ª e da 8ª séries resolvem problemas de cálculo de área com base na contagem das unidades de uma malha quadriculada e, apoiados em representações gráficas, reconhecem a quarta parte de um todo.
150	Os alunos da 4ª e da 8ª séries são capazes de: • Resolver problemas envolvendo adição ou subtração, estabelecendo relação entre diferentes unidades monetárias (representando um mesmo valor ou numa situação de troca, incluindo a representação dos valores por numerais decimais); • Calcular adição com números naturais de três algarismos, com reserva; • Reconhecer o valor posicional dos algarismos em números naturais; • Localizar números naturais (informados) na reta numérica; • Ler informações em tabela de coluna única; e. • Identificar quadriláteros.

175	Os alunos das duas séries, neste nível:
	• Identificam a localização (lateralidade) ou a movimentação de objeto, tomando como referência à própria posição;
	• Identificam figuras planas pelos lados e pelo ângulo reto;
	• Lêem horas e minutos em relógio digital e calculam operações envolvendo intervalos de tempo;
	• Calculam o resultado de uma subtração com números de até três algarismos, com reserva;
	• Reconhecem a representação decimal de medida de comprimento (cm) e identificam sua localização na reta numérica;
	• Reconhecem a escrita por extenso de números naturais e a sua composição e decomposição em dezenas e unidades, considerando o seu valor posicional na base decimal;
	• Efetuam multiplicação com reserva, tendo por multiplicador um número com um algarismo;
	• Lêem informações em tabelas de dupla entrada;
	• Resolvem problemas:
	  o Relacionando diferentes unidades de uma mesma medida para cálculo de intervalos (dias e semanas, horas e minutos) e de comprimento (m e cm); e.
	  o Envolvendo soma de números naturais ou racionais na forma decimal, constituídos pelo mesmo número de casas decimais e por até três algarismos.

200	Além das habilidades descritas anteriormente, os alunos das duas séries: • Identificam localização ou movimentação de objetos em representações gráficas, com base em referencial diferente da própria posição; • Estimam medida de comprimento usando unidades convencionais e não-convencionais; • Interpretam dados num gráfico de colunas por meio da leitura de

	valores no eixo vertical; • Estabelecem relações entre medidas de tempo (horas, dias, semanas), e, efetuam cálculos utilizando as operações a partir delas; • Lêem horas em relógios de ponteiros, em situação simples; • Calculam resultado de subtrações mais complexas com números naturais de quatro algarismos e com reserva; e. • Efetuam multiplicações com números de dois algarismos e divisões exatas por números de um algarismo. Os alunos da 8ª série ainda são capazes de: • Localizar pontos usando coordenadas em um referencial quadriculado; • Identificar dados em uma lista de alternativas, utilizando-os na resolução de problemas, relacionando informações apresentadas em gráfico e tabela; e. • Resolvem problemas simples envolvendo as operações, usando dados apresentados em gráficos ou tabelas, inclusive com duas entradas.

225	Os alunos da 4ª e da 8ª séries:
	
	• Calculam divisão com divisor de duas ordens;
	• Identificam os lados e, conhecendo suas medidas, calculam a extensão do contorno de uma figura poligonal dada em uma malha quadriculada;
	• Identificam propriedades comuns e diferenças entre sólidos geométricos (número de faces);
	• Comparam e calculam áreas de figuras poligonais em malhas quadriculadas;
	• Resolvem uma divisão exata por número de dois algarismos e uma multiplicação cujos fatores são números de dois algarismos;
	• Reconhecem a representação numérica de uma fração com o apoio de representação gráfica;
	• Localizam informações em gráficos de colunas duplas;
	• Conseguem ler gráficos de setores;
	• Resolvem problemas:
	    ○ Envolvendo conversão de kg para g ou relacionando diferentes unidades de medida de tempo (mês/trimestre/ano);
	    ○ De trocas de unidades monetárias, envolvendo número maior de cédulas e em situações menos familiares;
	    ○ Utilizando a multiplicação e reconhecendo que um número não se altera ao multiplicá-lo por um; e.
	    ○ Envolvendo mais de uma operação.
	
	Os alunos da 8ª série, ainda:
	
	• Identificam quadriláteros pelas características de seus lados e ângulos;
	• Calculam o perímetro de figuras sem o apoio de malhas quadriculadas;
	• Identificam gráfico de colunas que corresponde a uma tabela com números positivos e negativos; e.
	• Conseguem localizar dados em tabelas de múltiplas entradas.

250	Os alunos das duas séries:
	
	• Calculam expressão numérica (soma e subtração), envolvendo o uso de parênteses e colchetes;
	• Identificam algumas características de quadriláteros relativas aos lados e ângulos;
	• Reconhecem a modificação sofrida no valor de um número quando um algarismo é alterado e resolvem problemas de composição ou decomposição mais complexos do que nos níveis anteriores;
	• Reconhecem a invariância da diferença em situação-problema;
	• Comparam números racionais na forma decimal, no caso de terem diferentes partes inteiras, e calculam porcentagens simples;
	• Localizam números racionais na forma decimal na reta numérica;
	• Reconhecem o gráfico de colunas correspondente a dados apresentados de forma textual;
	• Identificam o gráfico de colunas correspondente a um gráfico de setores; e.
	• Resolvem problemas:
	    ○ Realizando cálculo de conversão de medidas: de tempo (dias/anos), de temperatura (identificando sua representação numérica na forma decimal); comprimento (m/km) e de capacidade (ml/L); e
	    ○ De soma, envolvendo combinações, e de multiplicação, envolvendo configuração retangular em situações contextualizadas.
	
	Os alunos da 8ª série ainda:
	
	• Associam uma trajetória representada em um mapa à sua descrição textual;
	• Localizam números inteiros e números racionais, positivos e negativos, na forma decimal, na reta numérica;
	• Resolvem problemas de contagem em uma disposição retangular envolvendo mais de uma operação;
	• Identificam a planificação de um cubo em situação contextualizada;
	• Reconhecem e aplicam em situações simples o conceito de porcentagem; e
	• Reconhecem e efetuam cálculos com ângulos retos e não-retos.

275	Os alunos das duas séries:
	
	• Identificam as posições dos lados de quadriláteros (paralelismo);
	• Estabelecem relação entre frações próprias e impróprias e as suas representações na forma decimal, assim como localizam-nas na reta numérica;
	• Identificam poliedros e corpos redondos, relacionando-os às suas planificações;
	• Resolvem problemas:
	    ○ Utilizando multiplicação e divisão, em situação combinatória;
	    ○ De soma e subtração de números racionais (decimais) na forma do sistema monetário brasileiro, em situações complexas;
	    ○ Estimando medidas de grandezas, utilizando unidades

	convencionais (L). Na 8ª série: • Efetuam cálculos de números inteiros positivos que requerem o reconhecimento do algoritmo da divisão inexata; • Identificam fração como parte de um todo, sem apoio da figura; • Calculam o valor numérico de uma expressão algébrica, incluindo potenciação; • Identificam a localização aproximada de números inteiros não ordenados, em uma reta onde a escala não é unitária; e. • Solucionam problemas de cálculo de área com base em informações sobre os ângulos de uma figura.

300	Os alunos da 4ª e da 8ª séries resolvem problemas:
	
	• Identificando a localização (requerendo o uso das definições relacionadas ao conceito de lateralidade) de um objeto, tendo por referência pontos com posição oposta a sua e envolvendo combinações;
	• Realizando conversão e soma de medidas de comprimento e massa (m/km e g/kg);
	• Identificando mais de uma forma de representar numericamente uma mesma fração e reconhecem frações equivalentes;
	• Identificando um número natural (não informado), relacionando-o a uma demarcação na reta numérica;
	• Reconhecendo um quadrado fora da posição usual; e
	• Identificando elementos de figuras tridimensionais.
	
	Na 8ª série, os alunos ainda:
	
	• Avaliam distâncias horizontais e verticais em um croqui, usando uma escala gráfica dada por uma malha quadriculada, reconhecendo o paralelismo entre retas;
	• São capazes de contar blocos em um empilhamento representado graficamente e sabem que, em figuras obtidas por ampliação ou redução, os ângulos não se alteram.
	• Calculam o volume de sólidos a partir da medida de suas arestas;
	• Ordenam e comparam números inteiros negativos e localizam números decimais negativos com o apoio da reta numérica;
	• Conseguem transformar fração em porcentagem e vice-versa;
	• Identificam a equação do primeiro grau adequada para a solução de um problema;
	• Solucionam problemas:
	    o Envolvendo propriedades dos polígonos regulares inscritos (hexágono), para calcular o seu perímetro;
	    o Envolvendo porcentagens diversas e suas representações na forma decimal; e
	    o Envolvendo o cálculo de grandezas diretamente proporcionais e a soma de números inteiros.

325	Neste nível, os alunos da 8ª série resolvem problemas: • Calculando ampliação, redução ou conservação da medida (informada

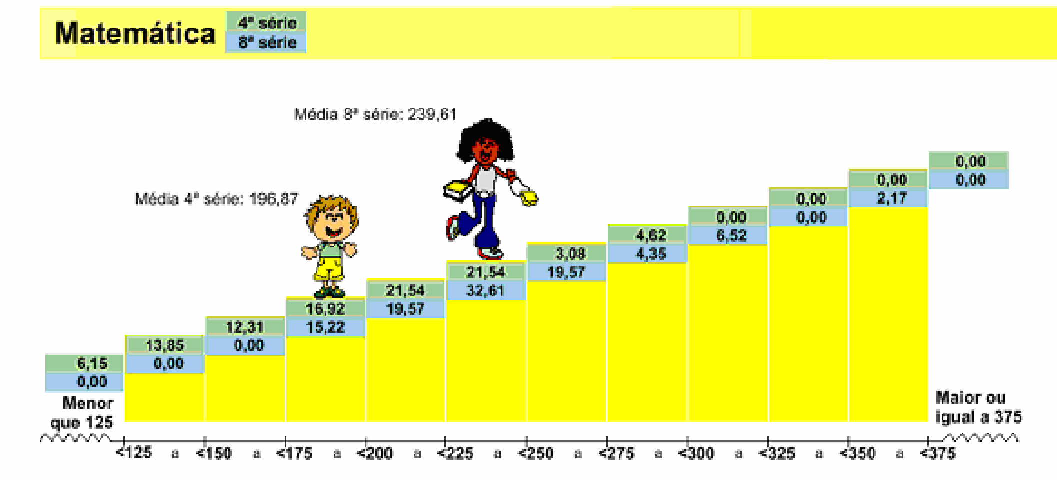
	inicialmente) de ângulos, lados e área de figuras planas; • Localizando pontos em um referencial cartesiano; • De cálculo numérico de uma expressão algébrica em sua forma fracionária; • Envolvendo variação proporcional entre mais de duas grandezas; • Envolvendo porcentagens diversas e suas representações na forma fracionária (incluindo noção de juros simples e lucro); e • De adição e multiplicação, envolvendo a identificação de um sistema de equações do primeiro grau com duas variáveis. Além disso: • Classificam ângulos em agudos, retos ou obtusos de acordo com suas medidas em graus; • Realizam operações, estabelecendo relações e utilizando os elementos de um círculo ou circunferência (raio, diâmetro, corda); • Reconhecem as diferentes representações decimais de um número fracionário, identificando suas ordens (décimos, centésimos, milésimos); • Identificam a inequação do primeiro grau adequada para a solução de um problema; • Calculam expressões numéricas com números inteiros e decimais positivos e negativos; • Solucionam problemas em que a razão de semelhança entre polígonos é dada, por exemplo, em representações gráficas envolvendo o uso de escalas; • Efetuam cálculos de raízes quadradas e identificam o intervalo numérico em que se encontra uma raiz quadrada não-exata; • Efetuam arredondamento de decimais; • Lêem informações fornecidas em gráficos envolvendo regiões do plano cartesiano; e. • Analisam gráficos de colunas representando diversas variáveis, comparando seu crescimento.
350	Além das habilidades demonstradas nos níveis anteriores, neste nível, os alunos da 8ª série: • Resolvem problemas envolvendo ângulos, inclusive utilizando a Lei Angular de Tales e aplicando o Teorema de Pitágoras; • Identificam propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando as últimas às suas planificações; • Calculam volume de paralelepípedo; • Calculam o perímetro de polígonos sem o apoio de malhas quadriculadas; • Calculam ângulos centrais em uma circunferência dividida em partes iguais; • Calculam o resultado de expressões envolvendo, além das quatro operações, números decimais (positivos e negativos potências e raízes exatas); • Efetuam cálculos de divisão com números racionais (forma fracionária e decimal simultaneamente); • Calculam expressões com numerais na forma decimal com

	quantidades de casas diferentes;
	• Conseguem obter a média aritmética de um conjunto de valores;
	• Analisam um gráfico de linhas com seqüência de valores;
	• Estimam quantidades baseadas em gráficos de diversas formas;
	• Resolvem problemas:
	    ○ Utilizando propriedades dos polígonos (número de diagonais, soma de ângulos internos, valor de cada ângulo interno ou externo), inclusive por meio de equação do 1º grau;
	    ○ Envolvendo a conversão de m 3 em litro;
	    ○ Que recaem em equação do 2º grau;
	    ○ De juros simples; e
	    ○ Usando sistema de equações do primeiro grau.

375	

ANEXO II

Gráfico Comparativo de Níveis de Escala do Saeb/2005 com Destaque da Pontuação da Escola que Participou da Pesquisa



Fonte: http://www.inep.gov.br

Quadro Comparativo de Níveis de Escala do SAEB/2005

4ª SÉRIE		8ª SÉRIE
	Brasil	
182,25	Escolas estaduais	238,76
178,66	Escolas municipais	234,12
179,98	Total	237,46
	Seu estado	
183,86	Escolas estaduais	240,85
183,38	Escolas municipais	236,76
183,60	Total	240,05
	Seu município	
178,00	Escolas estaduais	234,16
166,86	Escolas municipais	232,27
172,46	Total	233,39
196,87	Sua escola	239,61

Fonte: http://www.inep.gov.br

ANEXO III

Plano de ensino de Matemática - ciclo II -2006

PLANO DE ENSINO – CICLO II 1º a 4º ANOS

AREA DE CONHECIMENTO : **MATEMÁTICA**

PROPOSTA PEDAGOGICA: Compromisso Ético, por parte de todos os atores e autores do processo educativo, com esta e as futuras gerações, traduzido em atitudes que possam garantir qualidade e dignidade de vida para todos.
"Escola e Comunidade: uma prática pedagógica coletiva, rumo a uma Sociedade democrática, justa, humana e solidária.

OBJETIVO DA ÁREA: Compreender a Ciência Matemática e seus conceitos fundamentais como parte de sua cultura e como instrumento no seu cotidiano; desenvolver a capacidade de observação , reconhecendo-a enquanto construção humana, relacionando-a com o contexto cultural, social, político e econômico; conscientizar os alunos quanto à importância da aprendizagem e suas implicações; desenvolver atividades diversificadas, nas quais se envolvam os conteúdos de sala de aula e da vida diária; aproveitar os momentos coletivos para elaborar atividades que envolvam outras disciplinas; diversificar linguagens para diferentes alunos, com diferentes dificuldades; contribuir para que o aluno possa elaborar estratégias pessoais diante de situações-problemas; desenvolver o raciocínio lógico-matemático de modo a torná-lo um indivíduo que possa contribuir para a transformação da sociedade.

Conteúdos Conceituais/Procedimentais/atitudinalS	Metodologia/Estratégia	Avaliação
1º Ano **1º Bimestre:** • **História da matemática;** • Sistemas de numeração (hindu-arábico e romano) • Números naturais; reta de números naturais; • As quatro operações e suas propriedades • Reconhecer e aplicar as quatro operações em diferentes situações; • Potência ; produto e quociente de potências; • Introdução a unidades de medidas; medidas de comprimento,massa, superfície e volume. **2º Bimestre:** • Raiz quadrada de números naturais; • Números primos; • Fatoração com números primos; • M.M.C • Introdução à Geometria: ponto, reta e plano; **3º Bimestre:**	Aula expositiva e dialogada Resolução de problemas mediante quatro passos: • Resumir • Planejar • Resolver • Comprovar Resolução e correção de exercícios para eliminar dúvidas; Atividades individuais e em grupos Atividades extra-classe Ler e escrever diferentes escritas numéricas Ler e escrever diferentes linguagens Identificação de termos e	Processo diagnóstico e contínuo que leva em conta: Participação e cooperação Interesse; Atividades realizadas durante as aulas e em casa; Autonomia do raciocínio matemático e a capacidade de argumentação do aluno; A leitura e interpretação da linguagem matemática e sua relação com outras linguagens

• Conjunto dos números racionais; operações com números naturais (adição,subtração,multiplicação e divisão) • Geometria: Polígonos 4º **Bimestre:** • Potência e raiz Quadrada de números racionais; produto e quociente de potências • Notação decimal: operações com números na notação decimal (adição, subtração, multiplicação e divisão) • Triângulo: classificação e classificação de quadrilátero. 2º Ano; 1º Bimestre: • Conjunto dos números inteiros; • Operações com números inteiros (adição, subtração, multiplicação, divisão) 2º Bimestre: • Potência e Raiz quadrada de números inteiros; • Conjunto dos números racionais relativos; • Operações com números racionais relativos; Adição, subtração, multiplicação, divisão; • Unidades de medidas • Área e perímetro; 3º Bimestre: • Conjunto dos números racionais relativos; • Potenciação e radiciação; • Equação do 1º grau; Aplicação das equações; Resolução de equações; • Problemas com equação do 1º grau; • Geometria: conceitos e cálculos de área e perímetro, ângulos, retas paralelas, polígonos e triângulos; 4º Bimestre: • Porcentagem; • Juros Simples; • Razão e Proporção • Geometria: classificação dos ângulos; construção de ângulos. **3º Ano:** **1º Bimestre:** • Os números reais: números racionais, irracionais, reais e a reta; **2º Bimestre:**	propriedades de uma operação Simplificacão de dados quando possível Estímulo ao cálculo mental Jogos: Caça-números, Caça-palavras Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto; Propor a resolução de exercícios; Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas; Propor a realização de atividades em grupos; Realizar atividades extra-classe; Ler e escrever diferentes escritas numéricas; Reconhecer e aplicar as quatro operações em diferentes situações; Identificar termos e propriedades de uma operação; Simplificar dados quando possível; Resolver problemas mediante quatro passos: resumir, planejar, resolver e comprovar; Estimular o cálculo mental; Ler e escrever diferentes linguagens.	Organização do material Avaliações individuais e em grupos; Auto-avaliação Avaliações individuais e em grupos Observação sistemática

• Cálculo Algébrico: expressões algébricas ou literais, redução de termos semelhantes; polinômio; **3º Bimestre:** • Equações do 1º grau • Equações fracionárias; **4º Bimestre:** • Inequação • Congruência de triângulos **4º Ano** **1º Bimestre:** • Potenciação • Radiciação; **2º Bimestre;** • Equações do 2º grau • Equação literal **3º Bimestre:** • Equação biquadrada • Sistema simples de Equações do 2º grau **4º Bimestre:** • Razões trigonométricas • Juros • Porcentagem		

Planejamento de Matemática – ciclo II – 2007

PLANEJAMENTO: REGULAR – CICLO II - 2007

DISCIPLINA: MATEMÁTICA ANO(SÉRIE): 8ª SÉRIE PROF.:

OBJETIVOS GERAIS DA PROPOSTA PEDAGÓGICA DA U.E:

Nossa Proposta Pedagógica é tornar o aluno protagonista da construção do conhecimento, crítico, responsável, sensível e solidário, justo, empreendedor, sonhador, político e ético. Intensificar o envolvimento dos alunos e, conseqüentemente da comunidade escolar, em atividades proporcionadas por esta U.E., utilizando-se das múltiplas linguagens para enfatizar o processo de alfabetização e letramento, através de subprojetos como: Ler e Escrever nos Ciclos I e II, Projeto Mão na Massa, EDUCOM. Radio, SAAI, Projeto de Recuperação Paralela, além da utilização das Salas de Leitura e Informática também a participação deliberativa dos membros no Conselho de Escola e APM.

Defendemos o compromisso ético, por parte de todos os atores e autores do processo educativo, com esta e com as futuras gerações, traduzido em atitudes que possam garantir qualidade e dignidade de vida para todos.

METAS DA U.E. A SEREM ATINGIDAS ATÉ 20 DE DEZEMBRO:

1. Dar continuidade ao trabalho com relação à aprendizagem dos educandos, aprimorando o processo de alfabetização e letramento, baseando-se no Programa Ler e Escrever nos Ciclos I e II da Secretaria Municipal de Educação (SME).

2. Trabalho com valores: ética, respeito, criticidade, responsabilidade, autonomia, solidariedade, protagonismo, sustentabilidade.

3. Estabelecer parcerias com a família e/ou responsáveis pelos alunos, através de encontros de formação nos quais esses familiares participem efetivamente do processo educativo dos nossos educandos, para que os objetivos e metas desta U.E. possam ser atingidos.

4. Promover atividades que oportunizem a integração e a participação efetiva entre a comunidade escolar e a comunidade do entorno, aumentando significativamente essa participação

OBJETIVOS GERAIS DO CICLO II:

Com base nos PCNs, o aluno ao final do Ciclo II e Ensino Fundamental, deverá ser capaz de:

- Utilizar as múltiplas linguagens (verbal, matemática, gráfica, plástica, corporal, entre outras) como meio pra se expressar e comunicar suas idéias, interpretando e usufruindo das produções da cultura;
- Analisar informações relevantes do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número de relações entre elas, fazendo uso do conhecimento adquirido para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- Identificar em situações práticas, que muitas informações são organizadas em tabelas e gráficos para facilitar a leitura e a interpretação, e construir formas pessoais de registro para comunicar informações coletadas;
- Usar os conhecimentos adquiridos por meio da prática de reflexão sobre a língua para expandirem as possibilidades de uso da linguagem e a capacidade de análise crítica;
- Conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;
- Conhecer e cuidar do próprio corpo, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva e
- Desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA DISCIPLINA:

→ Entender a matemática como instrumento de comunicação e compreensão do mundo em que vivemos e utiliza-la como instrumento facilitador nos aspectos do cotidiano, estabelecendo relações entre os conceitos de aritmética, geometria e álgebra;

→Interpretar, construir e resolver problemas utilizando-se, quando necessário, da álgebra;

→Dominar as operações matemáticas no conjunto dos números Naturais, Inteiros, Racionais e Reais;

→ Desenvolver o pensamento geométrico através das propriedades das varias formas geométricas e suas transformações;

→Atentar para a matemática enquanto linguagem visual imediata, analisando, interpretando e construindo vários tipos de gráficos.

INSTRUMENTOS / MEIOS / ESTRATÉGIAS:

As aulas aconteceram com os alunos dispostos em duplas e contemplarão: aulas expositivas; exercícios de fixação de conteúdos; uso periódico de calculadora. Para alguns tópicos estão previstas atividades práticas de experimentação. Alem disso, os alunos serão incentivados à Pesquisa e apresentação aos colegas de temas previamente sugeridos.

AVALIAÇÃO:

As avaliações ocorrerão durante o processo de forma a quantificar e qualificar o conteúdo assimilado pelos alunos, observando o conteúdo fundamental necessário para que se possa considerar que um aluno adquiriu as capacidades previstas de modo a poder continuar aprendendo durante todo o processo da educação.

Além disso as avaliações serão diagnosticas, e servirão para corrigir o curso das aulas e embasar o processo de recuperação.

Serão considerados como instrumentos de avaliação: provas, trabalhos em grupos, trabalhos extra classe e toda a produção de qualidade realizada pelos alunos em classe.

CONTEÚDOS

1° BIMESTRE	2° BIMESTRE	3° BIMESTRE	4° BIMESTRE
• Propriedades das potências; • Números irracionais; • Cálculo experimental do número pi; • Radiciação e propriedades; • Produtos Notáveis; • Equações irracionais; • Resolução de problemas relacionados ao número pi.	• Equações fracionárias de 1° Grau; • Equações incompletas de 2° Grau; • Equações completas de 2° Grau; •Tópicos de Geometria Plana (Perímetro e área de Polígonos rergulares)	• Resolução de problemas usando a álgebra; • Gráficos de equações de 2° Grau; • Sistema de equações de 2 grau; • Propriedades dos triângulos; • Teorema de Tales.	• Teorema de Pitágoras; • Atividades praticas relacionadas às medidas de ângulos e lados num triangulo; • Relações trigonométricas no triângulo retângulo; • Resolução de problemas usando a trigonometria.

ANEXO IV

Entrevista com a Professora Regente

(1) **Pesquisadora:** Qual a metodologia utilizada para trabalhar expressões algébricas?

Professora: Situações ligadas à realidade do aluno, algo mais concreto, atividades voltadas para o seu dia-a-dia.

(2) **Pesquisadora:** Qual (is) o(s) livro(s) utilizado(s)?

Professora: Não há livro para uso do aluno, utilizo alguns para preparar a aula: A Conquista da Matemática, Tudo é Matemática e Construindo conhecimentos em Matemática.

(3) **Pesquisadora:** Quais as dificuldades que você encontrou para trabalhar esse conceito?

Professora: Independente do assunto a dificuldade que o professor encontra é despertar a curiosidade do aluno e fazer com que ele se interesse pelo estudo da matemática. Há um grande desinteresse por parte de muitos alunos.

Percebo que para muitos alunos faltam os pré-requisitos, com a falta de conteúdos anteriores, sentem dificuldade para assimilar algo novo, alguns se sentem incapazes de aprender determinado assunto. Para convencê-lo de que ele é capaz de aprender sendo o conteúdo fácil ou difícil, é muito complicado.

(4) **Pesquisadora:** Quais as dificuldades que os alunos apresentam no aprendizado desse conceito?

Professora: Entender a representação de números por meio de letras e interpretar a linguagem comum para a linguagem matemática.

Para o aluno é muito abstrato substituir um número por uma letra, mas à medida que você vai desenvolvendo as atividades, no decorrer das aulas, a dificuldade de abstração que ele tinha inicialmente, se torna mais compreensível. Ele começa a entender a substituição dos números pelas letras, torna-se mais concreto o aprendizado para ele.

(5) **Pesquisadora:** Que parte das expressões algébricas você gostaria que fosse trabalhada no laboratório?

Professora: Resolução de problemas através da representação de símbolos matemáticos e valor numérico de uma expressão algébrica.

(6) **Pesquisadora:** Você acha que as aulas no laboratório podem ajudar?

Professora: Com certeza, pois fora da rotina da sala de aula, tudo que é diferente, os alunos gostam da aula de informática, independente do que for trabalhado, só pelo fato de estar no laboratório e talvez eles demonstrem um interesse maior que pode contribuir no aprendizado dentro da sala de aula.

(7) **Pesquisadora:** No planejamento constam conteúdos que não foram abordados, Inequações, por exemplo, o que acontecerá com esses conteúdos?

Professora: Ao efetuar uma avaliação prévia no início do ano constatei que muitos não tinham os requisitos mínimos das séries anteriores e a todo o momento precisei retomar os conteúdos anteriores.

A greve[20] atrapalhou o andamento do processo e mesmo havendo reposições, a participação do aluno é pequena.

Inequações, conteúdo que ficou pendente, provavelmente será trabalhado pelo professor de oitava série.

(8) **Pesquisadora:** A falta de assiduidade dos alunos contribuiu para o não cumprimento do planejamento?

Professora: Em dias normais de aula os alunos estão sempre presentes, faltam mais quando se anuncia que haverá uma avaliação. De 50% a 60% da turma comparecem. Acredito que os alunos não estejam preparados para serem avaliados e sentem medo ou receio de não conseguir fazer o que foi proposto. As provas são realizadas

[20] Greve do professor da rede pública municipal de São Paulo no ano de 2006 durou 17 dias.

bimestralmente ou ao término de cada conteúdo, trabalho também com atividades em grupo em dupla ou individual com consulta em caderno.

(9) **Pesquisadora:** Na escola, as posições das carteiras estão em formato de U, esta posição das carteiras facilita ou dificulta as atividades?

Professora: A posição que está atualmente é indiferente, não ajuda e nem atrapalha para a aula de matemática. O ideal seria trabalhar com grupos de quatro alunos.

(10) **Pesquisadora**: Como você vê a questão da disciplina na sala de aula? Influencia no aprendizado?

Professora: Algumas turmas dão mais trabalho do que outras, mas depende da postura do professor. Em geral não tenho problema com indisciplina, as turmas são tranqüilas durante a aula, na troca de aula percebo grande tumulto e fica para o professor que vem em seguida resolver.

(11) **Pesquisadora:** Há participação dos pais no processo de aprendizagem do aluno?

Professora: A participação dos pais na vida estudantil do aluno é muito pequena. Se os pais fossem mais presentes os alunos não estariam da forma que estão. Falta responsabilidade aos alunos. À medida que você trabalha atividades em sala de aula, para casa ou trabalho (como não são cobrados pelos pais) cientes que não há reprovação se tornam desinteressados. Em reuniões de pais só comparecem os pais dos bons alunos, os que não têm problemas. Esse distanciamento dos pais e a certeza da aprovação automática são fatores para o desinteresse e comodismo, pois fazendo ou não a atividade nada acontece.

(12) **Pesquisadora:** Como você vê a reprovação somente no final do ciclo para o ensino da matemática?

Professora: A progressão continuada é um atraso na questão da matemática, torna o aluno irresponsável; veio para problematizar o sistema de educação. No término do ciclo (oitava série), o aluno toma consciência, pois ocorre a reprovação e, no Ensino Médio ele torna-se mais responsável.

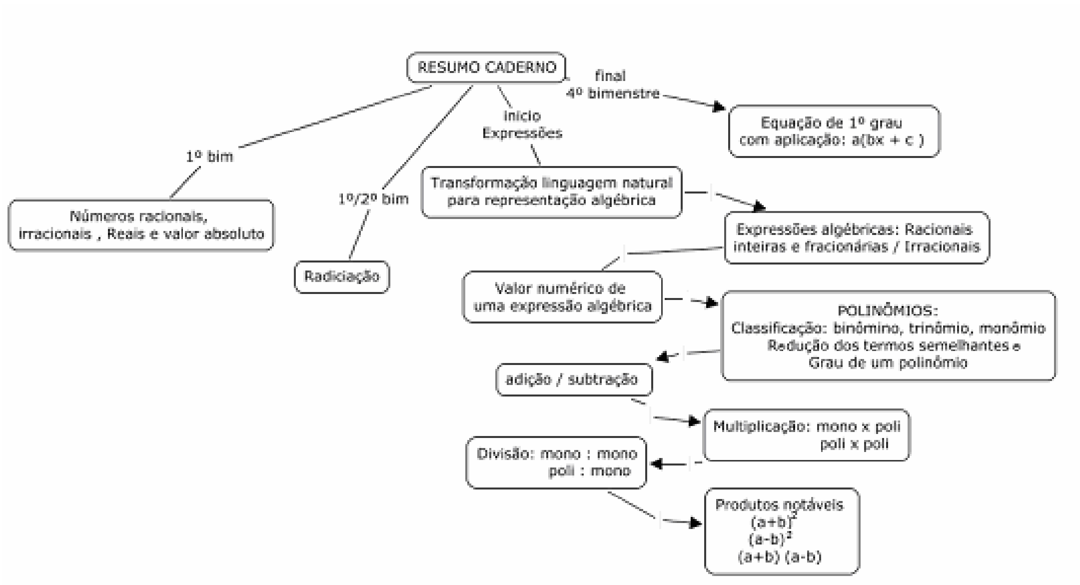
(13) **Pesquisadora:** Você indicaria alguns alunos para participar da pesquisa?

Professora: Alunos desinteressados no aprendizado de matemática: Isaac 7ª B, Juliana 7ª D, Ricardo 7ª D, Aline 7ª A, Wagner 7ª C.

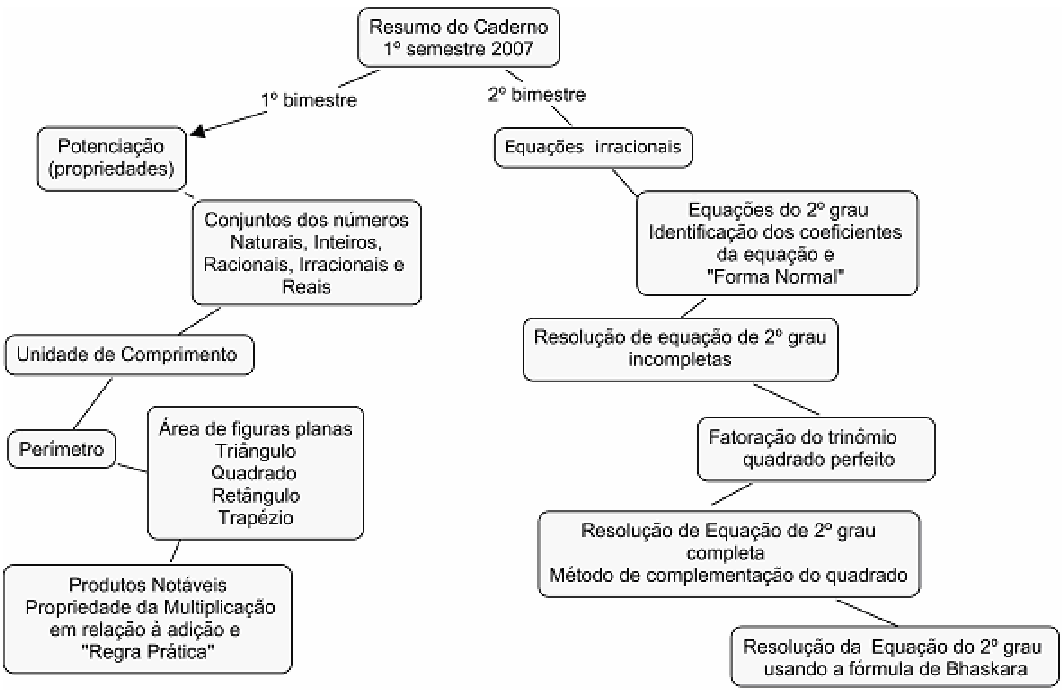
Alunos com grande dificuldade em matemática: Karina 7ª B, Renan 7ª C, Julio César 7ªA, Julio César 7ªD, Amanda 7ª C.

ANEXO V

Quadro-resumo referente aos conteúdos contidos nos cadernos de dois alunos da 8º ano em 2006



Quadro-resumo referente aos conteúdos contidos no caderno do aluno da 9º ano no primeiro semestre de 2007



ANEXO VI

AUTORIZAÇÃO PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA

São Paulo,....... de ....de 2007.

Autorização do responsável legal do(a) aluno(a) ________________ ________________ matriculado(a) no 9º ano do ensino fundamental II, a participar como voluntário(a) de uma pesquisa sob responsabilidade da pesquisadora Salete Rodrigues, aluna do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC-SP e da Professora Barbara Lutaif Bianchini, orientadora da pesquisa e docente do Programa de Mestrado da PUC-SP.

O objetivo da pesquisa é desenvolver e aplicar uma seqüência didática de ensino para conteúdos de álgebra com o auxílio do software Aplusix. Os encontros são semanais: segunda-feira e/ou quarta-feira e/ou sexta-feira, no período da tarde, com inicio previsto para outubro e término novembro de 2007.

Conto com a autorização da Direção desta Instituição de Ensino e informo que todas as publicações realizadas a partir desse trabalho, serão feitas preservando a identidade dos alunos envolvidos.

____
Nome do responsável

____
Assinatura do responsável

____
Salete Rodrigues

À

Direção

Venho pelo presente solicitar vossa autorização para que eu, Salete Rodrigues, possa desenvolver parte de meu trabalho de Mestrado, junto aos alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental II desta Unidade Escolar.

A pesquisa consiste em encontros semanais, fora do período de aula, com entrevistas e pesquisas direcionadas, o objetivo é desenvolver e aplicar uma seqüência didática de ensino para conteúdos de álgebra fazendo uso do software Aplusix.

Informo que estou providenciando autorizações junto aos responsáveis para que os alunos participem desse trabalho.

Certo de ser merecedora de vossa atenção envio meus agradecimentos.

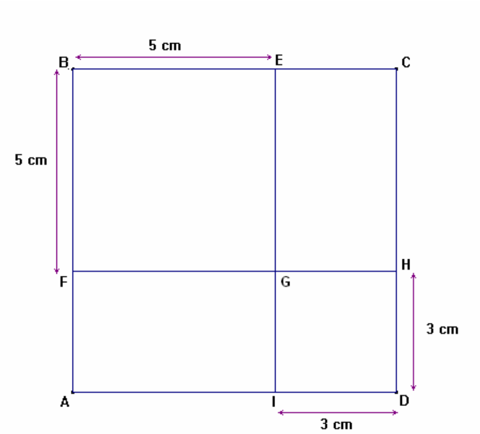
Salete Rodrigues

ANEXO VII

Pré-teste do estudo piloto

:

Pré-teste 1



a) Qual a área do quadrilátero FBEG?

b) Qual a área do quadrilátero IGHD?

c) Qual a área do quadrilátero AFGI?

d) Qual a área do quadrilátero GECH?

e) Qual a área do quadrilátero ABCD?

Pré-teste 2

Qual o valor de:

a) $(5+3)^2$

b) $(5-3)^2$

c) $(5+3)(5-3)$

Pré-teste 3

Represente com uma expressão algébrica as sentenças:

a) O quadrado da soma dos números ***a*** e ***b***.

b) A diferença do quadrado do número ***a*** e o quadrado do número ***b***.

c) A área de um quadrado de lado ℓ= (x+2).

d) O quadrado da diferença de dois termos ***x*** e ***y.***

Pré-teste 4

Desenvolver:

a) $(a+3)^2$

b) $(x+5)(x-5)$

c) $(3x+5y)^2$

d) $(y-2)(y-2)$

e) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

f) $(2n - 1)^2$

g) $(x-a)(x+a)$

h) $(x^2 - y^2)^2$

i) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

Pré-teste 5

$x^2 - 10x + 25$ é equivalente a:

a) $(x+5)(x-5)$

b) $(x-5)(x-5)$

c) $(x+5)(x+5)$

d) $(x-5)(x+5)$

Pré-teste 6

(SARESP/2005) A expressão $x^2 - a^2$ é equivalente a:

a) $-2ax$

b) $(x-a)^2$

c) $(x+a)^2$

d) $(x-a)$ (($x+a$)

Pré-teste 7

$y^2 + 6y + 9$ é equivalente a:

a) $(y+3)(y-3)$

b) $(y-3)(y+3)$

c) $(y-3)(y-3)$

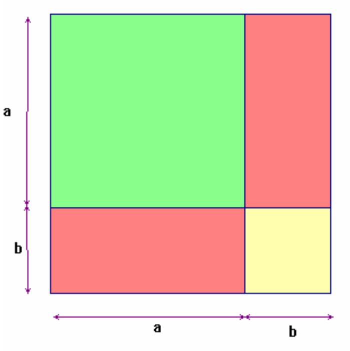
d) $(y+3)^2$

ANEXO VIII

Atividades de aprendizagem do estudo piloto

Atividade 1

Observe a figura e responda:



a) Qual a medida do lado do quadrilátero amarelo?

b) Qual é a área do quadrilátero amarelo?

c) Qual é a medida do lado do quadrilátero verde?

d) Qual a área do quadrilátero verde?

e) Como podemos representar algebricamente a área de cada quadrilátero pintado de vermelho?

f) Qual é a medida do lado do quadrilátero (maior) formado pelos quadrados: verde, amarelo e pelos retângulos vermelhos?

g) Qual a expressão algébrica que representa a área desse quadrilátero maior?

h) Qual a expressão algébrica que representa a soma das áreas das quatro figuras que formam o quadrado maior?

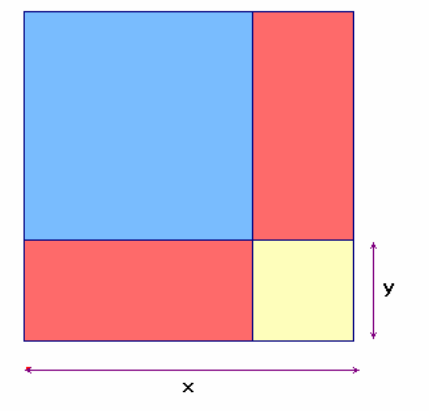
i) Usando a soma das áreas das figuras que compõem o quadrado maior, encontre uma expressão algébrica com três termos que indique a área do quadrado maior.

j) Qual relação é possível estabelecer entre as expressões algébricas encontradas nos itens: (g) e (i)?

g) Sabendo-se que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$, desenvolva esse produto usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Atividade 2

Observe a figura e responda às questões a seguir:



a) Qual é a medida do lado do quadrado maior composto pelas figuras: azul, amarela e pelas duas figuras vermelhas?

b) Qual é a área desse quadrado maior?

c) Qual é a medida do lado do quadrado amarelo?

d) Qual é a área do quadrado amarelo?

e) Qual é a medida do lado do quadrilátero azul?

f) Qual é a expressão algébrica que representa a área do quadrilátero azul?

g) Como podemos representar algebricamente a área de cada quadrilátero vermelho?

h) Qual a expressão algébrica que representa a área do quadrado azul?

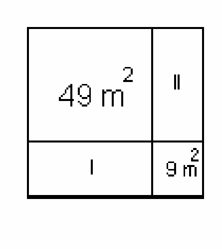
Use a área do quadrado maior e subtraia a área dos dois retângulos vermelhos e a área do quadrado amarelo.

i) Encontre uma expressão algébrica com três termos que identifique área do quadrado azul.

j) Que relação é possível estabelecer entre as expressões algébricas encontradas nos itens (f) e (i)?

l) Desenvolver: (x-y)(x-y).

Atividade 3
Observe a figura:



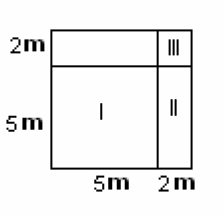
A área do quadrado maior é $49m^2$ e a área do quadrado menor é $9m^2$.

a) Determine a área da figura I.

b) Determine a área da figura II.

c) Qual é a área da figura total.

Atividade 4
Observe a figura:



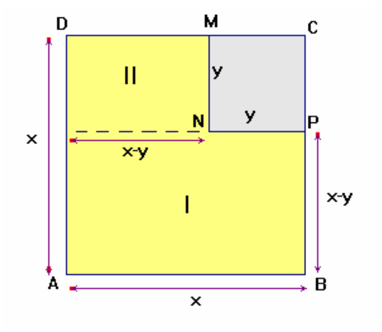
d) Qual é a área da figura I?

e) Qual é a área da figura II?

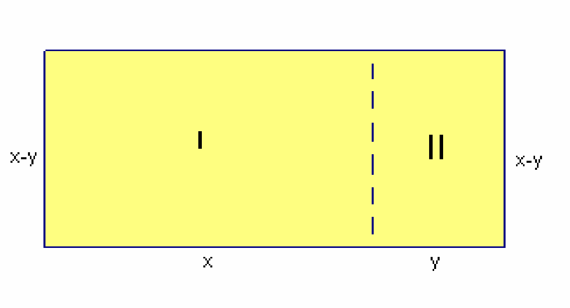
f) E a área da figura III?

Atividade 5

Na figura, o lado do quadrado ABCD mede *x* e o lado do quadrado CMNP mede *y*.



a) Escreva a área da região amarela como diferença de dois quadrados
b) Indique o produto que fornece a área da figura II
c) Indique o produto que fornece a área da figura I
d) Indique a soma das áreas da figura I e II
e) Se mudarmos de posição o retângulo II , obtemos uma nova figura:



Represente a área dessa nova figura como produto de dois polinômios.

f) Escreva a igualdade entre os resultados encontrados em nos itens (a) e (e).

Atividade 6

Represente com uma expressão algébrica as sentenças:

a) O quadrado de um número;
b) A soma do quadrado do número *x* e o quadrado do número *y*;
c) A soma dos números *a* e *b*
d) O quadrado da soma dos números *a* e *b*;
e) A área do quadrado de lado igual a *(n+1)*;

Atividade 7

a) Calcular $(7 - 2)^2$
b) Calcular (7+2)(7 - 2)
c) Calcular $(7 + 2)^2$

Atividade 8

Resolva os seguintes produtos notáveis:

a) $(x + 1)^2$

b) $(x + y)(x - y)$

c) $(x - 2)^2$

d) $(b + a)(b + a)$

e) $(n - 5)(n - 5)$

f) $(4 - m)(4 + m)$

Atividade 9

Desenvolva os produtos notáveis

a) $(2n - 1)(2n - 1)$

b) $(5x + 4y)^2$

c) $(7 - 2a)(7 + 2a)$

d) $(3a – 2b)^2$

Atividade 10

Desenvolver:

a) $(x^2 – 1)(x^2 + 1)$

b) $\left(ab + \frac{1}{2}\right)^2$

c) $(x^2 - 1)^2$

d) $\left(\frac{x}{2} - 2\right)\left(\frac{x}{2} - 2\right)$

e) $(2x^2 + x)^2$

f) $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)$

Atividade 11

$x^{2\,-}$ 20x +100 é equivalente a:

a) $(x + 10)(x + 10)$

b) $(x - 10)(x + 10)$

c) $(x - 10)(x - 10)$

d) $(x + 10)(x - 10)$

Atividade 12

$y^2 + 16y + 64$ é equivalente a:

a) $(y + 8)(y + 8)$

b) $(y - 8)(y + 8)$

c) $(y - 8)(y - 8)$

d) $(y - 8)^2$

Atividade 13

$x^2 - 25$ é equivalente a:

a) $(x + 5)(x - 5)$

b) $(x + 5)^2$

c) $(x - 5)(x - 5)$

d) $(x + 5)(x + 5)$

Atividade 14

a) Fatorar: $a^2 - 1$

b) Escreva o polinômio que elevado ao quadrado corresponde ao trinômio: $x^2 - 2xy + y^2$

c) Fatorar a diferença entre os dos quadrados: $y^2 - 81$

d) Escreva o polinômio que elevado ao quadrado corresponde ao trinômio: $x^2 + 2x + 1$

ANEXO IX
Pós-teste do estudo piloto

Pós-teste 1

Represente com uma expressão algébrica as sentenças:

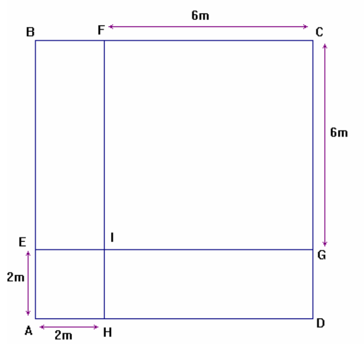
a) A área do quadrado de lado igual a *(x - y)*

b) O quadrado da soma dos números *x* e *y*

c) A diferença do quadrado do número *x* e o quadrado do número *y.*

Pós-teste 2

Observe a figura:



Qual a área dos quadriláteros?

a) AEIH

b) IFCG

c) HIGD

d) EBFI

e) ABCD

Pós-teste 3

Resolva os seguintes produtos notáveis:

a) $(a - 2)^2$

b) $(m + 1)(m + 1)$

c) $(3a + 2b)^2$

d) $(1 - y^2)^2$

e) $(b - a)(b + a)$

f) $(y^2 + x)^2$

g) $\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{3}\right)$

h) $(5 + m)^2$

i) $\left(\frac{y}{2}-\frac{x}{2}\right)^2$

Pós-teste 4

Fatore as expressões:

a) $x^2 - a^2$

b) $y^2 - 14y + 49$

c) $4x^2 + 4x + 1$