PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

CARLOS NELY CLEMENTINO DE OLIVEIRA

NÚMEROS COMPLEXOS

Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2010

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

CARLOS NELY CLEMENTINO DE OLIVEIRA

NÚMEROS COMPLEXOS

Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profa. Dra.*** *Maria José Ferreira da Silva.*

São Paulo

2010

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:________________________________ **Local e Data:**______________________

DEDICATÓRIA

Para minha avó, Diamantina Fernandes Negreiros (*in memoriam*).

Para Rosa, minha vida, de quem serei eterno cúmplice.

Para Júlia e Laura, duas felicidades que preenchem minha alma.

Para meus pais, Zilmar Alves de Oliveira e Janete Clementino de Oliveira, para quem não há palavras que traduzam toda minha gratidão.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva, pelo seu acolhimento, empenho e disponibilidade para o diálogo durante todo o processo de elaboração desse trabalho

Ao Sr. Mauro de Salles Aguiar, diretor presidente do Colégio Bandeirantes Ltda., por proporcionar, de forma incondicional, todas as condições necessárias para que eu pudesse realizar esse trabalho mas, sobretudo, por seu grande incentivo e confiança.

À Banca Examinadora composta pelos Professores Doutores Saddo Ag Almouloud e Nílson José Machado, pelas inestimáveis contribuições, feitas à época do Exame de Qualificação.

RESUMO

O assunto Números Complexos tem sido, já faz algum tempo, objeto visto como desnecessário de ser ensinado no Ensino Médio. Alguns professores – e consequentemente seus alunos – acreditam que aplicações desses números só serão vistas em cursos mais avançados, nas faculdades, na área de ciências exatas. Não fosse ainda conteúdo constante nos programas de vestibulares, provavelmente tal assunto já teria sido eliminado do currículo. Acreditamos ser possível, não obstante essa situação, explorar aspectos gráficos relacionados aos números complexos, uma vez que as operações com esses números estão relacionadas a rotações, translações, simetrias, ampliações e reduções no plano de Argand-Gauss. Essas são as razões que nos levaram à proposta desse trabalho, a saber, investigar se uma sequência didática explorando os aspectos gráficos dos números complexos tornaria o seu aprendizado mais significativo. Os principais referenciais teóricos foram os Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval e a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, que permearam a metodologia da Engenharia Didática. Nosso trabalho nos mostrou, por um lado, estudantes motivados que começaram a elaborar conjecturas a respeito de possíveis resultados no plano complexo e que queriam se aprofundar no assunto e, por outro, a falta de articulação entre geometria, números complexos e vetores, na vida acadêmica desses estudantes. Superadas as dificuldades iniciais de se efetuarem as conversões do registro algébrico para o gráfico, a pesquisa mostrou que os alunos passaram a fazer inferências corretas sobre os resultados de transformações no plano complexo e mostrou, sobretudo, que há possibilidades de se resgatar um ensino significativo para os números complexos, desde que se promova a articulação entre os diferentes registros de representação desses números. Embora a aplicação à resolução de problemas de geometria plana não tenha sido completamente exitosa, a possibilidade dessas aplicações é latente e deveria ser melhor explorada.

Palavras-chave: Números complexos. Plano complexo. Transformações. Geogebra.

ABSTRACT

For quite a long time the issue of Complex Numbers has been seen as a minor or unnecessary object of interest and study to be taught in High School. Some teachers – and therefore their students – believe that applications of such numbers will only be a matter of interest in more advanced courses, in college, or in the area of exact sciences. Weren´t this subject still constant content in the program of entrance university exams, it would have probably been already removed from the curriculum. We believe that it is possible, despite this situation, to explore graphic aspects related to complex numbers, since the operations with these numbers are related to rotation, translation, symmetry, extension and reduction in the Argand-Gauss plane. These are the reasons which have led us to the proposal of this paper, namely, investigating whether a didactic sequence exploring the graphic aspects of complex numbers would make their learning more meaningful. The main theoretical reference points were Registers of Semiotic Representation of Raymond Duval and Theory of Didactic Situations of Guy Brousseau, which permeate the methodology of Didactic Engineering. Our research has shown us, on the one hand, motivated students who started elaborating surmises related to possible results in the complex plane and who wanted to learn more and, on the other hand, the lack of articulation among geometry, complex numbers and vectors in their academic life. After overcoming the initial difficulties of making the conversions of the algebraic register into a graph, the research has shown that the students began to make correct inferences about the results on the changes in the complex plane and mostly displayed that there are possibilities of rescuing a meaningful teaching of complex numbers, provided that the articulation among the different registers of these numbers representation is encouraged. Although the application to the solution of problems in plane geometry has not been completely successful, the possibility of these applications is potential and it should be better explored.

Key words: Complex numbers. Complex plane. Mapping. Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No primeiro artigo da edição número 47 da Revista do Professor de Matemática, o seguinte problema[1], denominado de “problema da ilha do tesouro”, é apresentado:

> Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo de 90°, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90°, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas. Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui.” Repete então os mesmo procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita etc., e encontra o tesouro. A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático? (CARNEIRO, 2001, p. 3-4).

Menciona o autor do artigo que esse problema foi apresentado a professores do ensino médio, alunos de um curso de formação continuada, sobre números complexos. Tal problema causou, entre os participantes do curso, segundo palavras do autor, “uma comoção”. Todos esses professores admitiram que, caso o curso não fosse sobre números complexos, a nenhum deles teria ocorrido a ideia de resolver o problema usando a álgebra dos números complexos. E, mesmo depois da sugestão para fazê-lo, quase ninguém conseguiu. Desnecessário dizer que ficamos igualmente surpresos por saber da possibilidade de se usar números complexos para resolver problemas de geometria. Foi esse, sem dúvida, o artigo que inspirou a busca por mais informações sobre o assunto e que culminou nesse trabalho.

Por lecionar geometria plana há vários anos, não poderíamos deixar de investigar essa nova possibilidade: o uso de números complexos como um recurso para resolver problemas de geometria plana, o que se iniciou com a verificação da

[1] O problema consta à p.16 do livro Polynomials, de autoria de E. J. Barbeau, editora Springer, primeira edição de 1989.

literatura disponível. Há poucas dissertações sobre o assunto. Na proposta curricular para o estado de São Paulo de 2008, no Caderno do Professor: matemática, ensino médio, 3ª série, 2º bimestre, consta sugestão para abordagem dos números complexos, com ênfase em aspectos gráficos. No entanto, tal abordagem ainda não faz parte da maioria dos livros didáticos. Porém é possível encontrar literatura sobre esse assunto em livros importados, que constam nas referências desse trabalho.

Conjecturamos então, a partir da leitura do artigo, que o insucesso na resolução do problema da ilha do tesouro deve-se a uma falha no conteúdo de matemática do ensino médio: tanto o assunto vetores quanto a representação gráfica dos números complexos, como vetores no plano de Argand-Gauss, não são abordados nesse nível de escolaridade, o que acarreta o desconhecimento das propriedades relativas às rotações, translações e simetrias que decorrem das operações com esses números. Surgiu daí a problemática estudada nesse trabalho.

O primeiro passo na direção de verificar se nossas conjecturas estavam corretas consistiu em propor para quatro professores, que lecionam há vários anos em uma escola particular de São Paulo, o seguinte problema: sendo os pontos A (1,1) e B (2, 3) vértices consecutivos de um quadrado, determine os outros vértices. Esse problema tem as mesmas características do problema da ilha do tesouro: poderia ser resolvido com geometria analítica, o que demandaria algum trabalho algébrico para resolver as equações envolvidas ou, alternativamente, poderia ser resolvido com números complexos, com bem menos operações, talvez até mentalmente. Os professores resolveram o problema, alguns até de mais de um modo, porém nenhum deles o fez usando números complexos. Isso nos leva a crer que os estudantes não estudam as propriedades gráficas dos números complexos e tampouco saberiam aplicá-las aos problemas de geometria, ou de transformações no plano complexo. A partir daí, pareceu-nos que o problema a ser investigado estava delineado: ensinar o conteúdo números complexos com ênfase em seus aspectos gráficos, tornaria os alunos mais aptos a resolver certos problemas, como os de geometria plana, por exemplo?

Procuramos então nos PCN+ (2002) [2] as recomendações com relação ao estudo dos números complexos. Também consultamos as críticas de Lima (2002), em relação a 12 coleções de livros didáticos de matemática. Segundo este autor, essas coleções representam o perfil de cerca de 80% dos livros didáticos adotados no país. As ponderações sobre os PCN+ (2002) e os resultados de nossas consultas fazem parte de nossos estudos preliminares e estão no capítulo 2.

Também faz parte do capítulo 2 um breve estudo histórico a respeito da evolução da noção de números complexos. Surpreendeu-nos saber que o assunto remonta a Diofanto, que viveu provavelmente no século III da nossa era. São descritos os esforços de matemáticos famosos que tentaram dar significado aos números que expressavam raízes quadradas de números negativos. O capítulo 2 finaliza apresentando a abordagem para números complexos, contida no "Caderno do Professsor: matemática, ensino médio, 3ª série, 2º bimestre" da proposta curricular para o estado de São Paulo de 2008. Tal abordagem dos números complexos leva em conta tanto o aspecto histórico quanto o aspecto gráfico que dá sentido ao fato de que $i^2 = -1$.

Os números complexos têm como característica a possibilidade de admitirem diferentes formas de representação. Tais formas são explicitadas no capítulo 3, em que nos apoiamos no quadro teórico dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, para apresentar as articulações entre os diferentes tipos de registros de representação desses números: forma algébrica, forma de pares ordenados, forma de vetores, forma trigonométrica e forma matricial. Demonstramos, ainda nesse capítulo 3, os isomorfismos entre alguns dos conjuntos que representam os números complexos.

Com o objetivo de investigar se um aprendizado dos números complexos, com ênfase em seus aspectos gráficos, seria significativo, elaboramos uma sequência didática, baseada na metodologia da Engenharia Didática, de Michelle Artigue. As atividades propostas nessa sequência, a descrição das observações feitas e as respectivas análises *a priori* e *a posteriori* encontram-se no capítulo 4.

---

[2] Parâmetros Curriculares Nacionais.

Finalmente, em nossas considerações finais, resumimos nossas principais observações e ponderações a respeito da sequência didática que foi aplicada e, considerando nossas três hipóteses de pesquisa, tentamos responder a nossa questão de pesquisa.

1 PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo abordamos, em linhas gerais, um problema no ensino do conteúdo de números complexos no ensino médio: a falta de ênfase em suas propriedades gráficas. Corroboramos alguns autores que defendem que a visualização é um dos processos relevantes para o pensamento matemático avançado.

1.1 Justificativa e relevância da Pesquisa

No prefácio de seu livro “Visual Complex Analysis”, Needham (2001, p. vii) conta uma parábola a respeito de uma sociedade, em que os cidadãos são encorajados, de fato até compelidos para, a partir de certa idade, ler e (algumas vezes) escrever peças musicais. Tudo muito admirável. Entretanto, essa sociedade também tem uma curiosa – poucos se lembram de como tudo começou – e perturbadora lei: *músicas nunca devem ser ouvidas ou executadas!*

Needham (2001, p. vii) conclui afirmando que, embora tal lei seja injusta e irracional, em nossa sociedade de matemáticos, nós temos uma lei similar. Não é uma lei escrita, mas ela diz que *Matemática não deve ser visualizada!*

Na obra “Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio”, de autoria de LIMA (2001), doze coleções de livros didáticos de Matemática para o ensino médio foram analisadas por oito matemáticos. Após a leitura das críticas e sugestões dos analistas, fica-se com impressão de que a parábola de Needham não é descabida, pelo menos no que diz respeito ao assunto números complexos. E números complexos é um campo fértil para a visualização de transformações geométricas e abordagens simultâneas com Geometria Analítica, que costuma ser dada na mesma série, além de permitir visualizar graficamente algumas funções como sendo resultados de translações, rotações, simetrias etc.

Ao que tudo indica, os livros didáticos exploram apenas as manipulações algébricas com os números complexos. Em alguns a radiciação dos números complexos tem sua interpretação geométrica apresentada. No entanto, em se tratando de números complexos, pode-se visualizar muito mais do que isso. É possível para o professor realizar a apresentação do tópico Números Complexos aos estudantes do Ensino Médio interpretando as operações com os números como transformações geométricas que ocorrem no plano de Argand-Gauss.

É fato que o desenvolvimento dos Números Complexos seguiu um longo caminho, desde sua criação até os nossos dias. Tais números são parte essencial na história das equações e, por si só, tal aspecto já seria bastante relevante para ser apresentado pelo professor aos seus alunos, para despertar-lhes o interesse ou, pelo menos, curiosidade, pela evolução das ideias matemáticas. É plausível supor que tal atitude contribuiria para desmistificar o senso predominante de que as ideias matemáticas foram obras de gênios inspirados que criaram objetos abstratos, cuja utilidade parece ser restrita apenas aos problemas abordados nos livros escolares, distantes do cotidiano.

Parece-nos, portanto, bastante razoável que, como primeira abordagem, o professor apresente os Números Complexos segundo o seu desenvolvimento histórico, levando os alunos a perceber que foram as equações do 3º grau que levaram à criação dos Números Complexos.

> Historicamente os Números Complexos surgiram quando Bombelli, ao tentar resolver uma equação do 3º grau, usando a fórmula de Cardano-Tartaglia, depara-se com a raiz quadrada de um número negativo. Como ele sabia a priori que esta equação tinha solução, é levado a pensar que existe a raiz quadrada de um número negativo e começa a operar com essas raízes, não as considerando como números, mas sim como representações [...] A ideia é propor aos alunos que resolvam uma equação do terceiro grau, pelo método de Cardano-Tartaglia. Ao resolvê-la eles poderão se deparar com a raiz quadrada de um número negativo [...]. (ROSA, 1998, p. 114).

Esta abordagem é exequível, uma vez que a fórmula de Cardano-Tartaglia é fácil de ser encontrada nos livros, com exemplos de aplicações e, na proposta curricular elaborada pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, está até deduzida (caderno do professor, ensino médio, 3ª série, 2º bimestre – 2008, p. 16). Porém, acreditamos que se pode ir um pouco mais longe do que isso, e as interpretações gráficas das operações com os complexos também podem ser abordadas, uma vez que a aritmética dos números complexos não oferece grandes dificuldades. No entanto,

> [...] em 80% dos textos [...] a conexão com a Geometria é deficiente, o que é estranho, pois a Geometria Analítica acabou de ser estudada

> [...] As aplicações geométricas das operações entre complexos (principalmente a multiplicação), tão belas como variadas, não são exploradas. Isto é imperdoável, pois todo matemático ou usuário da Matemática, ao pensar num número complexo, sempre o imagina como um ponto do plano coordenado e as operações são interpretadas como transformações geométricas. (LIMA, 2001, p. 467).

Os efeitos das abordagens levadas a cabo pelos professores que seguem tais livros didáticos são descritos por Dreyfus, no capítulo 2 de *Advanced Mathematical* Thinking:

> Em outras palavras, o que a maior parte dos estudantes aprende em seus cursos de matemática é realizar um grande número de procedimentos padronizados, elencados em formalismos precisamente definidos, para obter respostas para classes de exercícios claramente delimitadas [...]. (DREYFUS, 1991, p. 28, tradução nossa[3].).

Segundo Dreyfus (1991, p.29) a igualdade

$$\int_{a}^{b} g(x)dx = \int_{a+k}^{b+k} g(x-k)dx .$$

não leva mais do que alguns segundos para ser interpretada por um matemático,

> [...] cujo processamento mental tem provavelmente incluídos componentes de **representação** [...] **transformação** (**translação**), **visualização** e dedução [...] Possíveis processos de especialização e então generalização também podem ser envolvidos [...]. (DREYFUS, 1991, p. 29, tradução nossa[4], grifo nosso).

No entanto, para um estudante do Ensino Médio, tal problema pode não ser tão trivial, pois "o pensamento matemático avançado, como no tratamento do especialista é um processo extremamente complexo, no qual um grande número de processos componentes interage de forma intrincada." (DREYFUS, 1991, p.29, tradução nossa[5].).

---

[3] In other words, what most students learn in their mathematics course, is to carry out a large number of standardized procedures, cast in precisely defined formalisms, for obtaining answers to clearly delimited classes of exercise questions.

[4] [...] his mental processing hás probably included components of representing [...] transforming (by translation), visualizing, and deducing […] Possibly processes of specializing have also been involved.

[5] Advanced mathematical thinking, as in the expert´s treatment is an extremely complex process, in which a large number of component processes interact in intricate ways.

Uma abordagem que enfatize a parte gráfica dos complexos parece-nos altamente relevante por vários motivos. Um deles é o fato de que promove a articulação entre os diferentes tipos de registros que os representam, e é essa *coordenação de vários registros uma condição necessária para a compreensão "conceitual"*, segundo Duval (2007 apud Almouloud, p. 75).

Buscamos então, construir, especificamente, um conhecimento a respeito dos números complexos, sob um aspecto que não é, como veremos mais adiante, considerado com devida atenção. Cabe, então, lembrarmos Machado (2009, p. 62), para quem

> Construir o conhecimento seria, pois, como construir uma grande rede de significações, em que "nós" seriam os conceitos, as noções, as ideias, em outras palavras, os significados; e os fios que compõem os nós seriam as relações que estabelecemos entre algo em que concentramos nossa atenção e as demais ideias, noções ou conceitos. Tais relações condensam-se em feixes, que, por sua vez, articulam-se em uma grande rede.

Torna-se talvez um pouco trabalhoso para o professor que utiliza apenas giz e lousa, representar os complexos no plano de Argand-Gauss e apelar para que o estudante "imagine" a rotação, a translação etc., entre tais números. Portanto, um segundo motivo que apresentamos para a ênfase na parte gráfica é a disponibilidade e o acesso que temos hoje em dia aos softwares de geometria dinâmica, em particular, um deles que é obtido gratuitamente pela internet: o Geogebra. E as palavras de Dreyfus parecem encorajar-nos nesse sentido:

> Computadores podem servir como ferramentas heurísticas para matemáticos e estudantes de matemática, do mesmo modo como um microscópio serve ao biólogo: se a ferramenta é direcionada sobre fenômenos interessantes e corretamente focada, ela pode mostrar um quadro inesperado, frequentemente um **quadro visual**, **do fenômeno em estudo**, e então levar a novas ideias, ao reconhecimento de relações desconhecidas até agora. (DREYFUS, 1991, p. 30, tradução nossa[6], grifo nosso).

Ainda, um terceiro motivo, encontra-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN$^+$, 2000), no capítulo intitulado "O ensino articulado das ciências e sua avaliação". Neste, é salientado, que:

---

[6] Computers can serve as heuristic tools for the mathematician and the mathematics student in much the same way as a microscope serves the biologist: if the tool is directed onto interesting phenomena and correctly focused, it may show an unexpected picture, often a visual one, of the phenomenon under study, and thus lead to new ideas, to the recognition of heretofore unknown relationships.

> Cada uma dessas novas ferramentas e desses novos procedimentos sinaliza o anacronismo de qualquer ensino centrado unicamente no discurso, mesmo porque, muitas vezes, as inovações pedagógicas não se subordinam aos recursos materiais suplementares, mas dependem, sobretudo, de novas atitudes relativamente ao processo de ensino aprendizagem [...]. (IBID, p. 136).

A revisão bibliográfica para elaboração desse trabalho mostrou-nos que as apresentações das propriedades gráficas dos números complexos são um tópico ainda pouco abordado nas escolas e mesmo nas faculdades, haja vista as poucas dissertações (apenas seis, de 1970 até 2009), nenhuma tese e mesmo o pouco conteúdo em livros didáticos. Encontramos alguns resultados, teoremas que associam geometria plana com números complexos em algumas apostilas e material resumido, na internet. Tal material parece destinado a um público já experiente: em alguns casos são para alunos que pretendem prestar prova de olimpíadas de matemática, em outros, parecem destinar-se a professores em cursos de formação ou em encontros matemáticos.

Porém, em nosso entender, ressaltar o vínculo entre números complexos e as transformações associadas aos vetores que os representam, no plano complexo, não envolve a apresentação de uma nova disciplina ou um novo conteúdo, mas apenas de um novo enfoque.

A impressão que se tem, quando se lê o conteúdo matemático de nossa proposta, é de que serão necessários muito tempo e esforços para sua execução. Esta é, no entanto, apenas uma impressão e o empenho para aquela tarefa é mais do que justificável. Primeiramente, pelo fato de que tempo e esforços já são gastos com os mesmos conteúdos. Em segundo lugar, porque o aspecto visual se constitui em um grande apelo ao aprendizado, além de ser importante no que tange ao pensamento matemático avançado. Como Einstein escreveu a Hadamard:

> Palavras e linguagem, escritas ou verbais, não parecem ter o menor papel no mecanismo de meu pensamento. As entidades psíquicas que servem de elementos para o pensamento são certos sinais ou imagens, mais ou menos claros, que podem se reproduzir e combinar à vontade. (HADAMARD, 2009, p.101).

Um exemplo desse tipo é conhecido na história das ciências. No século XVIII uma princesa alemã tornou-se amiga de Euler. Como descreve Machado (1989, p. 20-24), Euler pretendia mostrar à princesa, de modo claro, o que se podia e o que não se podia concluir a partir de cada uma das proposições aristotélicas (Todo A é

B, Alguns A são B, Nenhum A é B, Alguns A não são B). Euler representa as idéias gerais por círculos. Para representar que cada A é um B, imagina-se um círculo A no interior de um círculo B. De modo oposto, se nenhum A é B, imagina-se um círculo A totalmente fora do círculo B. Porém, se alguns A são B e outros não, os dois círculos se interceptam.

Porém, nem todos os indivíduos têm o mesmo processo de visualização. O caso de Polya, embora raro segundo Hadamard (2009), é um exemplo:

> Acho que a ideia decisiva que resolve um problema está muitas vezes ligada a uma palavra ou frase bem escolhida. A palavra ou a frase ilumina a situação, confere às coisas uma fisionomia [...]. Isso pode preceder de perto a ideia decisiva, ou pode segui-la imediatamente, ou até chegar ao mesmo tempo que ela... A palavra exata, a palavra apropriada, ajuda-nos a lembrar a ideia matemática, talvez de modo menos completo e objetivo que uma figura ou uma anotação matemática, mas de maneira análoga... Isso pode ajudar a fixá-la na memória. (POLYA apud HADAMARD, p. 102, 2009).

Hadamard (2009) também apelava às imagens, quando raciocinava, e declara:

> Julgo [...] como faz a maioria dos cientistas, que quanto mais difícil e complexa é uma questão, mais desconfiamos das palavras, mais achamos que temos de controlar esse perigoso aliado, portador de uma exatidão por vezes pérfida. (HADMARD, 2009, p.112).

Porém, Hadamard (2009) considera interessante uma comparação feita por William Hamilton, no que diz respeito ao processo intelectual:

> Nessa operação, é impossível vencer a menos que cada metro – ou melhor, cada centímetro – de nosso avanço seja garantido por um arco de alvenaria antes de prosseguir a escavação. Ora, a linguagem, para o espírito, é exatamente o que o arco é para o túnel. O poder de pensar e o poder de escavar não dependem de palavras, num caso, e de alvenaria, no outro; mas, sem esses procedimentos subsidiários, não se poderia ir além de um início rudimentar. (apud HADAMARD, 2009, p. 117).

Após descobrirmos certas facilidades para executar construções, rotações e translações no ambiente do software Geogebra, percebemos que a tentativa e erro, a experimentação, a visualização e a abstração estão tão intrinsecamente ligadas e absorvem tanto a atenção, que consideramos esse o estopim que nos motivou a executar tal proposta com alunos, para que eles pudessem visualizar as transformações gráficas relativas aos números complexos. Mas é possível também realizar a proposta utilizando-se apenas lápis e papel quadriculado. O foco é menos para a mídia do que para as transformações a serem visualizadas no plano complexo.

1.2 Delimitação do problema

O tópico números complexos faz parte do programa de matemática do 3º ano do Ensino Médio. Como tal, é apresentado no mesmo ano em que o aluno também se aprofunda no estudo dos entes geométricos, manipulando equações que representam esses entes, ou seja, é a série em que o aluno estuda Geometria Analítica e explora o plano cartesiano.

Uma das primeiras dissertações que trataram da problemática dos números complexos no ensino foi escrita pela professora Nilze Silveira de Almeida, em 1992, intitulada “Uma experiência didática de formação matemática-epistemológica com professores do segundo grau”, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Nela a professora descreve os resultados de um curso de especialização, realizado em 4 horas aulas semanais, durante sete semanas, ministrado para um grupo de professores de ensino fundamental e médio. O curso utilizou a análise de textos históricos para mostrar as diferentes representações dos números complexos, além de suas respectivas aplicações.

Entre outros resultados de Silveira (1992, p.140-141), destacamos:

- Todos os professores alteraram sua postura em relação ao ensino dos números complexos, ou seja, passaram a ver a importância de se apresentar a historicidade de tal assunto como complemento da aprendizagem.
- Todos entenderam a importância de se estender a utilização dos números complexos a outras áreas de estudo, tais como a Geometria Plana, a Geometria Analítica, a Trigonometria etc., como instrumento na resolução de problemas.
- Embora todos fossem unânimes em admitir a real importância de tal estudo no trabalho em sala de aula, todos consideraram que as possibilidades de sua aplicação eram muito restritas, “dada a situação precária em que se encontra o ensino em nosso país, atualmente” (*sic*). Contudo, todos manifestaram um

grande interesse em estender o uso da epistemologia a outras áreas de estudo, em nível do 2º grau.

Ao que tudo indica, a experiência da abordagem histórica e epistemológica teve consequências positivas com o grupo de 30 professores. Embora os professores tenham entendido a importância de se estender a utilização dos números complexos a outras áreas de estudo, não temos como saber se realmente o fizeram ou pelo menos como o fariam.

Parece-nos consensual que fazer professores ampliarem seus horizontes é um ótimo resultado e é possível que esse estudo tenha tido um efeito multiplicador entre os professores. No entanto, somos levados a crer que os vínculos entre os números complexos e a geometria plana deixaram de ser apresentados aos alunos, seja pelo termo "possibilidades de aplicação muito restritas", que parece revelar pouca visão dos professores sobre os possíveis usos dos números complexos, bem como "situação precária em que se encontra o ensino", que deixa transparecer uma visão algo pessimista em relação à educação.

Complementando seus estudos, em sua dissertação, Rosa (1998, p.116-148) propõe atividades com números complexos e em sua abordagem, tal como Silveira (1992), utiliza a evolução histórica desses números, mas com uma diferença: as atividades de Rosa são dirigidas a grupos de alunos.

Segundo o autor, sua ênfase era trabalhar com a mudança da forma algébrica para a trigonométrica, tornando possível a potenciação e a radiciação, o que permitiria resolver problemas que recaíssem em equações do terceiro grau, cujas soluções apresentassem raízes quadradas de números negativos.

Um dos argumentos principais de Rosa (1998, p. 25-26), é que teria de haver uma manifestação de desequilíbrio, para que o estudante sentisse a necessidade de extrair a raiz quadrada de um número negativo. Como provocar essa necessidade "*uma vez que as aplicações desses números só aparecem no terceiro grau, nos cursos de Engenharia, Matemática e Física, em problemas de condução de calor, de potencial eletrostático, de escoamento de fluídos, etc.?*"

Concordamos apenas em parte com o autor, pois entendemos que as rotações, simetrias, translações etc. dos vetores representantes de números complexos no plano de Argand Gauss também podem ser consideradas como aplicações desses números a problemas de Geometria plana, o que é parte de nosso trabalho, cujo problema central tentamos delimitar.

Em sua pesquisa, Rosa (1998, p.26) assumiu como hipótese que seria necessário levar os alunos a uma situação em que enfrentassem um problema com soluções reais, mas tais que, para chegar a elas, fosse necessário trabalhar com raízes quadradas de números negativos.

Entre as conclusões do trabalho de Rosa, destacamos que:

> Os alunos tiveram a oportunidade de descobrir qual foi o motivo que levou os matemáticos a extraírem as raízes quadradas de um número negativo, percebendo que os conceitos matemáticos não são simplesmente inventados, mas surgem, quando da resolução de problemas.
>
> Sentiram (os alunos) a necessidade de mudar do **registro de representação das fórmulas no registro algébrico**, para o **geométrico**, e efetuaram essa mudança. (ROSA, 1998, p. 164-165, **grifo do autor**).

Ao ler essa última conclusão ficamos interessados em saber se outra sequência, dessa vez para explorar não a solução de raízes de equações polinomiais de grau três, mas para as propriedades geométricas dos números complexos não teria tido sucesso, uma vez que os estudantes já estavam efetuando essa mudança de registros. Ao que tudo indica, e isso consta na análise do conteúdo números complexos nos livros didáticos, no capítulo 2, p. 50, tal enfoque está longe de ser abordado nos livros.

Após dois meses da aplicação de sua sequência didática, Rosa (1998) aplicou teste aos alunos que participaram de sua pesquisa e a análise dos resultados obtidos o levou Rosa a concluir ainda que:

1. para os alunos submetidos a sua sequência didática, "*o obstáculo epistemológico de se considerar os números complexos como simples representações matemáticas sem significado de número, foi superado*" (ibidem, p.168) e

2. comparando com os resultados obtidos com alunos do curso de Engenharia Mecânica da Universidade de Mogi, (não submetidos a sequência), sua proposta teve "*pleno êxito*", Rosa (1998, p.170).

Do que foi visto até agora percebemos nos trabalhos de Silveira (1992) e de Rosa (1998) a preocupação em justificar, com base na epistemologia e na história dos números complexos, a existência desses números. A primeira considerou o uso de textos históricos, de Argand, de Gauss e outros matemáticos, como importantes ferramentas para o estudo epistemológico dos complexos com os professores. O segundo também considerou a evolução histórica dos complexos como fator central para o desenvolvimento de sua sequência didática, aplicada a alunos do Ensino Médio.

Os resultados obtidos numa e noutra pesquisa apontam a necessidade de uma apresentação histórica como fator de motivação inicial ao estudo dos complexos. Desejamos ressaltar que, em nossa revisão bibliográfica, encontramos mais quatro dissertações sobre o tema. Embora conste em alguns desses trabalhos as visualizações gráficas das operações com os números complexos, as aplicações ou pelo menos suas construções, não são contempladas nas sequências didáticas descritas. Em Araújo (2006), a sequência foi realizada em 12 aulas. Numa das aulas, como atividade, é proposto aos alunos resolver o seguinte problema: “ABCD é um quadrado. Se A=(1, 2) e B=(2, 5), então determine as coordenadas de C e D”. Esse problema pode ser resolvido de várias formas diferentes: desde o simples uso de régua, lápis e papel quadriculado até diferentes abordagens com o uso de Geometria Analítica. (veja Anexo). A autora diz ter respondido todas as indagações e discutido as possíveis alternativas de resolução para a questão, mas não as descreve no trabalho e somos levados a concluir que a solução mais breve, via números complexos e vetores, não foi apresentada. Tal inferência é baseada na leitura que fizemos da sequência de atividades descrita, em que não são apresentadas as ferramentas necessárias para a resolução daquele problema, via complexos, a saber: que a multiplicação de um número complexo por i (unidade imaginária) equivale, graficamente, a efetuar uma rotação do vetor que representa o número complexo, de 90^o, em sentido anti-horário, em torno da origem. Mais do que apresentar, construir resultados como estes, em nossa sequência didática, com nossos alunos, é nosso objetivo precípuo.

Outra sequência didática foi realizada por Santos (2008). Nela, o autor propõe os seguintes problemas:

Questão a: Dividir 14 em duas partes tal que o produto delas seja 40. Quanto medirá cada uma dessas partes? *(sic)*

Questão b: Dividir 10 em duas partes tal que o produto delas seja 24. Quanto medirá cada uma dessas partes? (*sic*)

Questão c: Dividir 10 em duas partes tal que o produto delas seja 40. Quanto medirá cada uma dessas partes? (*sic*)

Os dois primeiros problemas têm solução nos reais, mas o terceiro não. Isso levaria os alunos, segundo o autor, a extraírem raízes quadradas de números negativos. Santos (2008) justifica em suas conclusões que:

> Em seu trabalho, o autor, (Rosa, 1998), ratifica a forma de introduzir sua sequência, isto é, através de resoluções de equações cúbicas, entendendo que para que um aluno de ensino médio venha a extrair raízes quadradas de números negativos, este necessitará ter alguma motivação que o leve a isso [...] optamos por iniciar nossa sequência com uma abordagem mais leve para a realidade escolar de um aluno da escola pública, isto é, através de resolução de equações quadráticas [...]. (SANTOS, 2008, p. 87-88).

Historicamente, é fato que foram as equações polinomiais de grau três, e não as polinomiais do segundo grau, que provocaram o surgimento dos números complexos. Não resta dúvida quanto ao papel relevante dos trabalhos que mencionamos até agora e que fazem parte da nossa pesquisa bibliográfica. No entanto, seus enfoques são basicamente sobre a álgebra dos números complexos. Nosso interesse é mudar o foco e investigar se uma abordagem dos números complexos – seja com o software Geogebra, seja com lápis e papel – explorando suas transformações gráficas no plano de Argand-Gauss, com respectivas mudanças de quadros e representações pode favorecer o desenvolvimento do estudante no que se refere ao uso consciente das propriedades algébricas e geométricas desses números, o que nos leva a formular a questão que norteia nosso trabalho: ***ensinar o conteúdo Números Complexos, enfatizando seus aspectos gráficos, torna seu aprendizado mais significativo****?*

Julgamos necessário destacar que entendemos por aprendizagem significativa aquela em que o conhecimento é abarcado pela estrutura cognitiva do aluno e passa a fazer parte desta, podendo ser utilizado em resolução de problemas diferentes dos que se impuseram pela primeira vez em que tal conhecimento foi adquirido. O objetivo da sequência didática, portanto, é fazer com que, ao final desta, o aluno mobilize seus conhecimentos, adquiridos durante a aplicação da sequência didática, com o intuito de resolver problemas com formulações diferentes das que foram vistas na sequência.

Cabe aqui apresentar três hipóteses relativas à nossa problemática, a primeira é que os aspectos gráficos concernentes aos números complexos não são apresentados no ensino médio, durante o estudo desses números. A segunda é que os professores não utilizam esses aspectos e propriedades para resolver problemas de Geometria plana. E como terceira hipótese acreditamos que a visualização desses aspectos, pode ajudar a compreensão do assunto por parte dos alunos.

Realizaremos, com o uso do software Geogebra, uma sequência didática que propiciará ao aluno a visualização e apreensão das propriedades gráficas resultantes das operações com os números complexos pois, concordando com Dreyfus (1991, p. 31, tradução nossa[7]), "v*isualização tem um papel essencial no trabalho de muitos matemáticos eminentes.*"

Visando reforçar o que foi dito até agora, apresentaremos o resultado de um problema que foi proposto a quatro professores de uma escola particular de São Paulo, sendo que os professores poderiam resolver o problema em casa e trazer a solução em outro dia.

O problema proposto aos professores de uma escola particular de São Paulo, em que estudam os sujeitos da pesquisa, foi o seguinte: os pontos A = (1, 1) e B = (2, 3) são vértices consecutivos de um quadrado. Determine os outros vértices desse quadrado.

O professor "M", que leciona Geometria Analítica há pelo menos 30 anos, resolveu o problema de quatro formas diferentes e que podem ser visualizadas no Anexo A, p.181; a primeira baseada apenas na fórmula de distância entre dois pontos; a segunda baseada na fórmula de distância entre dois pontos e na que fornece as coordenadas do ponto médio de um dado segmento; a terceira baseada em equações de retas, coeficiente angular, fórmula que dá a tangente do ângulo entre duas retas e no particular fato de que os coeficientes angulares de retas perpendiculares são recíprocos; finalmente, na quarta resolução, o professor utilizou equação de circunferência. As soluções são mostradas no Anexo.

---

[7] Visualization plays an essential role in the work of many eminent mathematicians.

O professor “R” também leciona há mais de três décadas, tem muita experiência, é autor de livros didáticos e fez duas soluções, que podem ser vistas no Anexo B, p.184: uma por rotação, que parece basear-se no fato de o vetor de coordenadas (a, b) ser perpendicular ao vetor de coordenadas (-b, a) e outra analítica, em que utilizou a fórmula de distância entre dois pontos e depois o teorema de Pitágoras.

O professor “F”, que é licenciado há um ano, utilizou equações de retas, com seus coeficientes angulares, fórmula de distância entre dois pontos e, de forma similar ao professor “M”, resolveu alguns sistemas de equações. Essas soluções podem ser vistas no Anexo C, p. 185, e nos levam a crer que, ao menos em seu curso de licenciatura, esse professor também não viu as aplicações dos números complexos em problemas de geometria plana. Assim, fica evidente a valorização das soluções por meio da Geometria Analítica, em que predomina o uso da Álgebra. Ao mesmo tempo, o plano cartesiano serve apenas paras esboço das figuras, estáticas e sem dinamismo.

O professor “A” resolveu o problema baseado no fato de que os pontos fornecidos com coordenadas inteiras facilitavam muito a visualização no plano cartesiano, como pode ser visto no Anexo D, à página 186. Então, lançando mão de congruência entre triângulos, resolveu de forma elementar o problema. No entanto, em entrevista, disse que havia rabiscado muito e feito várias vezes o desenho à mão livre, sem escala e que a solução só ficou organizada após ter desenhado um sistema de eixos cartesianos em escala e passado a limpo a solução que emergiu de suas tentativas anteriores. O fato de que esse professor não tenha utilizado complexos na resolução do problema é notável, pois em entrevista relatou que o conteúdo de números complexos é a sua principal matéria, que leciona há pelo menos vinte e cinco anos.

Duas resoluções desse problema, com o uso de números complexos, podem ser vistas nas páginas 157-159 desse trabalho. Do que foi apresentado até o momento e reforçando o nosso interesse pela visualização dos aspectos gráficos dos números complexos, no que segue apresentaremos o quadro teórico que dará suporte a nossa pesquisa.

1.4 Quadro teórico

Explanamos em linhas gerais a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, duas teorias que embasarão a elaboração e análise das atividades propostas na sequência didática.

1.4.1 Registros de Representação Semiótica

A matemática, por excelência, trabalha com objetos abstratos, inacessíveis à percepção. Portanto, para mobilizar um conhecimento matemático, é necessário o recurso de representações, o que é lembrado por Duval (2009):

> [...] a passagem do não-consciente ao consciente corresponde a um processo de objetivação para o sujeito que toma consciência. A objetivação corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado. As representações conscientes são aquelas que apresentam este caráter intencional e que completam uma função de objetivação. (DUVAL, 2009, P. 40-41).

Ainda segundo esse autor, “as representações, por sua vez, podem ser externas ou internas. Entenda-se como externo / interno aquilo que, de um indivíduo, de um organismo ou de um sistema, é diretamente visível e observável e aquilo que, ao contrário, não o é.”

Para Duval (2009, p.42) as representações externas são, por natureza, representações semióticas e são acessíveis a todos os sujeitos que aprenderam o sistema semiótico utilizado. Já as representações internas são aquelas que pertencem a um sujeito e que não são comunicadas a outro, pela produção de uma representação externa. Ademais, em matemática

> [...] as representações através de símbolos, signos códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo **registros de representação** diferentes de um mesmo objeto matemático. (DAMM, 2002, p. 137, grifo nosso).

Essa citação ajuda a entender o que vem a ser a noção de registro, embora não a defina explicitamente. Já Machado (2003, p. 14) chega a classificar os tipos de registro, mas também não define o que vem a ser registro, preferindo designar por “registro” de representação os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em matemática, tais como os sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural (Ibidem).

Quem apresenta a definição é Almouloud (2007, p.71), citando Duval: “um *registro* de representação é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente.” Porém, como assinala Damm (2002)

> O problema é que esta noção é muito geral e também muito difícil. Precisões importantes são necessárias. [...] a mais recente: ela (a *precisão*) acentua ao mesmo tempo o caráter semiótico das representações e a existência de vários registros de representação semiótica. E é esta que se revela o instrumento mais forte para estudar os problemas de aquisição dos conhecimentos matemáticos. (DAMM, 2002, p. 137).

Para podermos ter acesso ao objeto números complexo, necessariamente teremos de lançar mão de representações semióticas, que são formas sob as quais as informações são descritas. Na obra Semiósis e Pensamento Humano (1995), Duval elaborou a denominada Teoria dos Registros de Representação Semiótica, em que, segundo o autor, os registros de representação podem ser, basicamente, de quatro tipos: língua natural, sistemas de escritas, figurais e gráficos, como exemplificado na Figura 1.

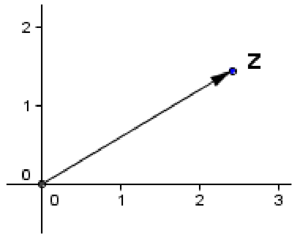
Registro da língua natural	**Registro algébrico**	**Registro trigonométrico**	**Registro gráfico**
Um número complexo	z ou $a+bi$	$z = \|z\|\left(cos\theta + i \cdot sen\theta\right)$	

Figura 1. Registros de representação semiótica.

Há que se ressaltar a existência de dois tipos de transformações de registros, a saber, as conversões e os tratamentos. E mais, como lembra Damm (2002):

> Convém aqui lembrar que as representações semióticas têm dois aspectos, sua forma (ou representante) e seu conteúdo (o representado). A forma muda segundo o sistema semiótico utilizado: existem vários registros de representação para o mesmo objeto,

correspondendo a cada um deles um tipo diferente de tratamento. (DAMM, 2002, p. 141)

O tratamento de uma representação é a transformação da representação em outra equivalente, mas no mesmo registro, ao passo que a conversão é a transformação da representação em outra equivalente, mas em outro registro. Como exemplo de tratamento, podemos apresentar $(a+bi)i = 2 \Leftrightarrow -b+ai = 2$. Nesse caso a representação $(a+bi)i = 2$ foi transformada na representação $-b+ai = 2$, isto é, mudou-se a representação, mas esta permaneceu no mesmo registro: o registro algébrico.

Agora tomemos como exemplo a sentença "dois números complexos cuja distância, um do outro, é de duas unidades". Pode-se passar desta representação na língua natural para a representação simbólica, se escrevemos $|z-w| = 2$. Efetuamos então uma conversão, pois a representação em língua natural foi transformada na representação $|z-w| = 2$, isto é, houve uma mudança de representações, com troca de registros: do registro em língua natural passou-se para o registro algébrico. Podemos ainda, como mostra a Figura 2, passar da representação $|z-w| = 2$ para a representação figural. Tal procedimento caracteriza uma conversão, já que há uma mudança de registros, a saber, do algébrico para o geométrico.

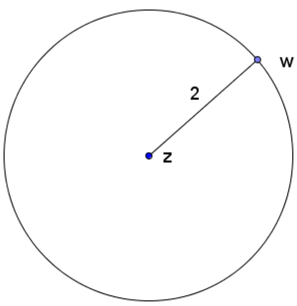


Figura 2. Exemplo de conversão de registros.

Almouloud (2007, p. 74) aponta que "existem tratamentos que podem se tornar algoritmos (um conjunto de regras operatórias), como aqueles que o ensino da matemática tende a privilegiar [...] eles (os algoritmos) são comuns tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio."

Duval (apud Damm, 2002, p. 143), chama de *semiósis*, a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e *noésis* a apreensão conceitual de um objeto. E o autor (Ibidem, p. 144-146) aponta três atividades cognitivas fundamentais ligadas à *semiósis*: formação de uma representação identificável; o *tratamento* da representação; a conversão entre representações. Porém, como indicado pela autora:

> No ensino de matemática, o problema se estabelece justamente porque só se levam em consideração as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto, o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis, mas sim a *coordenação entre estes vários registros de representação*. (DAMM, 2002, p.147).

A importância da existência da diversidade de registros de representação para o funcionamento do pensamento humano é apontada por Duval (2009, p.44):

> [...] não somente a possibilidade de efetuar tratamentos equivalentes a custos menores, desde que efetuemos uma mudança de registros apropriada, mas também para complementar os tratamentos, para ultrapassar os limites inerentes a cada registro no cumprimento de uma atividade complexa. (Ibidem).

O autor indica ainda a existência de problemas específicos às mudanças de registro. Entre esses, destacaremos a possibilidade de não-congruência numa conversão. Por exemplo, a expressão "o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa" e sua conversão em escritura algébrica $y > x$. Segundo Duval (2009, p.64), observa-se uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes respectivas e é suficiente para efetuar a conversão. Neste caso, a conversão inversa permite reencontrar a expressão inicial do registro de partida.

Seja agora a expressão "o conjunto dos pontos que têm uma abscissa positiva"; sua escrita algébrica será $x > 0$. O autor assinala que falta, na escritura algébrica, uma unidade significante que corresponda a "positivo". É preciso recorrer à perífrase "> 0", combinação de duas unidades significantes para amenizar essa ausência. Duval (2009, p.65) ainda assinala que a dificuldade para efetuar a conversão da expressão "o conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal" para "$xy > 0$" é ainda maior, pois aqui não existe mais correspondência termo a termo entre as unidades significantes respectivas das duas expressões;

torna-se necessária uma reorganização da expressão dada no registro de partida para se obter a expressão correspondente no registro de chegada. Além disso:

> a perífrase “ > 0” traduz tanto “de mesmo sinal” quanto “positivo”. A conversão inversa não permite reencontrar a expressão inicial: “xy > 0” traduz-se naturalmente por “o produto da abscissa e da ordenada é superior a 0 (é positivo)” e não por “o conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal”. (DUVAL, 2009, p. 65)

Apesar dessas dificuldades, o autor assinala que recorre-se à atividade cognitiva de conversão das representações como a uma atividade natural adquirida, por todos os alunos; atividade sobre a qual as aprendizagens de tratamentos e as aprendizagens conceituais poderiam se apoiar.

Como assinala Damm (2002):

> A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto. (DAMM, 2002, p. 144).

Forma algébrica, pares ordenados, forma trigonométrica e forma matricial são algumas possíveis representações para os números complexos. No entanto, em nossos estudos, constatamos que a representação gráfica de um número complexo, como um vetor, é pouco explorada e, por vezes, sequer é apresentada nos livros didáticos, a não ser de forma apenas introdutória, quando se pretende falar da forma trigonométrica dos complexos. Dentre os registros de representação semiótica, consideramos os registros gráficos como parte indissociável e essencial para compreensão dos números complexos. São esses registros gráficos e suas conversões que pretendemos explorar na sequência didática que aplicaremos.

1.4.2 Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida por Guy Brousseau (1986). Trata-se de um modelo teórico apoiado nas ideias de Piaget, por meio do qual se intentava compreender melhor a interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu*, que, como afirma Almouloud

> é um sistema antagonista ao sujeito, sendo o *milieu* adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que, por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão a respeito de

> suas ações e de sua aprendizagem. Ou seja, o aprendiz é o responsável por sua aprendizagem. (ALMOULOUD, 2007, p. 35).

No início, a maior preocupação de Brousseau era detectar como o aluno aprende e quais as dificuldades na aprendizagem. Identificando os problemas, o próximo passo seria decidir qual a estratégia para solucioná-los. A intervenção dos professores também foi analisada. Brousseau queria estudar como o professor deveria introduzir determinados conceitos para os alunos, o que fez surgir a noção de variáveis didáticas, com as quais o processo de aprendizagem está relacionado. Tais variáveis podem ser: de contexto, didáticas, constitutivas do saber, etc.

Brousseau (s/d, apud SILVA, 2002) notou que nem sempre o aluno dá a resposta esperada em determinada situação e que a aprendizagem depende da atitude do aluno frente ao trabalho do professor, parecendo haver um acordo tácito entre professor e aprendiz. Surge, a partir daí, a noção de contrato didático.

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é um conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir[...] (Ibidem, p. 43-44)

A Teoria das Situações Didáticas tem por finalidade criar um modelo para o ensino e a aprendizagem, enfatizando neste processo dois tipos de situações: a adidática e a didática. A situação adidática é, segundo Brousseau (1986), a situação que ocorre

> Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer indicação intencional (BROUSSEAU, s/d, apud FREITAS, 2002, p. 69).

Ainda segundo o autor,

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (ALMOULOUD, 2007, p. 33).

Na fase adidática o aluno interage com o meio, que é antagônico. Durante esta interação, todas as vezes que o aluno supera o antagonismo proposto ocorre um avanço na aprendizagem.

> Para analisar o processo da aprendizagem, a teoria das situações observa e decompõe esse processo em quatro fases diferentes, nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber. Nessas fases interligadas, podem-se observar tempos dominantes de *ação*, de *formulação*, de *validação* e de *institucionalização*. (ALMOULOUD, 2007, p.36).

Essas fases são a dialética da ação, quando ocorrem reflexão e formulação de hipóteses, que pode ser individual ou em grupo; a dialética da formulação, quando há discussão, troca de informações e conclusões com os outros; a dialética da validação, quando o aluno tenta mostrar que suas “descobertas” são verdadeiras e, finalmente, a dialética da institucionalização, quando o professor organiza o saber aprendido.

Uma boa fase adidática demanda preparação cuidadosa, pois o professor deverá ter clareza sobre diversos componentes da atividade, entre eles os objetivos do ensino, o conteúdo e as variáveis didáticas.

Nessa fase adidática o professor deverá formular uma situação-problema, considerando os conhecimentos prévios do aprendiz, isto é, quais os saberes que os alunos já possuem e aos quais ele poderá recorrer a fim de resolver a situação-problema, visto que o saber que será ensinado não é explicitado para o aluno.

> Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir que o aluno julgue o resultado de sua ação e ajuste-o, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*. (ALMOULOUD, 2007, p.37).

Espera-se que neste ambiente, proposto por Brousseau, o aluno migre da condição de passivo e aja no processo de aprendizagem. Por isso o autor utiliza o termo agente para o aprendiz. É o objetivo de nossa sequência didática para apreensão das propriedades gráficas relativas aos números complexos: proporcionar aos alunos situações adidáticas, nas quais ele possa engajar-se em resolver os problemas propostos, construindo o seu conhecimento.

1.5 Procedimentos metodológicos

Desenvolveremos nossos estudos utilizando os princípios da Engenharia Didática, de Michèle Artigue (1995). Trata-se de uma metodologia de pesquisa que, segundo a autora,

> é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apóia em conhecimentos científicos da área, aceita se submeter a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência.(apud Almouloud, 2007, p. 171).

A Engenharia Didática engloba várias fases, a primeira sendo os estudos preliminares. Entre esses estudos, é discutido o ensino atual do objeto matemático em questão e seus efeitos, os resultados de pesquisas na área – descrito no capítulo 1 – bem como as recomendações dos parâmetros curriculares nacionais e a abordagem do assunto segundo os livros didáticos, descritos no capítulo 2, nos itens 2.1 e 2.2, respectivamente.

Os estudos preliminares devem ainda contemplar a gênese histórica do saber em estudo, o que é feito também no capítulo 2, no item 2.3. Além disso, as concepções de professores e de alunos, a respeito dos saberes em jogo, também devem ser estudadas. Para isso, em nosso trabalho, elaboramos um questionário-diagnóstico, para coleta de dados dos alunos, cujos resultados encontram-se no capítulo 4, no item 4.2. Também aplicamos a 4 professores a resolução de um problema que, com o uso dos saberes relativos aos números complexos, teria uma solução com poucas operações. As resoluções encontram-se no Anexo, p. 163.

Esses estudos nos ajudam a definir a questão de pesquisa permitem a elaboração de uma sequência didática, constituída de quatro etapas: concepção, realização, observação e análise *a priori* da sequências de ensino. A análise *a priori* reveste-se de particular importância, uma vez que o sucesso da situação-problema depende da qualidade dessa análise que, entre outras atribuições, descreve a escolha das variáveis locais e as características das situações adidáticas, tenta prever e analisar as dificuldades que os alunos podem apresentar na resolução de cada atividade, bem como seus comportamentos e qual tipo de intervenção pode ser feita e se tal intervenção permite o desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

A aplicação da sequência e a correspondente observação dos sujeitos envolvidos devem apoiar-se em tudo o que foi planejado e elaborado na análise *a priori*, e quando eventuais correções ou ajustes fizerem-se necessários, deve-se retornar aquele planejamento, verificando quais são as melhores formas de se acertarem os rumos do experimento. Esta fase de experimentação conduz a uma análise *a posteriori*. Essa depende dos dados coletados em material didático, vídeo, etc. Esses protocolos serão analisados pelo pesquisador e os resultados obtidos serão confrontados com a análise *a priori*, para que se estime a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos identificados, para que os principais resultados e questões levantadas pela pesquisa sejam discutidos. Tais questões podem, inclusive, ser objeto de outras pesquisas.

As variáveis didáticas são consideradas no planejamento da sequência didática e a sua escolha faz parte da engenharia. Uma variável macrodidática, por exemplo, é uma variável global, da organização geral da engenharia. Em nosso estudo, escolhemos como uma variável macrodidática a representação gráfica do número complexo como vetor, no plano de Argand-Gauss, o que será abordado no capítulo 3, que enfoca diferentes tipos de registros de representação para os números complexos. Por outro lado, em algumas atividades, será necessário lançarmos mão da escrita algébrica, o que demandará conversões da representação gráfica para a algébrica. Estas são, então, variáveis microdidáticas, por conta de suas características locais, restritas a algumas fases da sequência didática. Outro exemplo de variável macrodidática escolhida foi o número de atividades programadas: sete com duração de uma hora cada uma.

Realizaremos a sequência didática reunindo os alunos em duplas, visando facilitar o trabalho, uma vez que ROSA (1998, p. 165), em suas conclusões, observou que “ao trabalharem em duplas, os alunos participaram mais ativamente da formação do conceito de número complexo quando discutem a realização da atividade proposta”. Porém não será permitido a uma dupla interagir com outra.

A sequência se constitui de duas partes. A primeira delas está divida em cinco atividades, que têm o propósito de fazer com que o aluno explore e compreenda as propriedades gráficas relacionadas aos números complexos, no plano complexo. A segunda parte, Atividades 5 e 6, envolvem a resolução de problemas. Para isso, os assuntos a serem tratados em cada atividade ficaram assim divididos:

Atividade 1: Representação de números complexos no plano complexo, conjugado e oposto de um número complexo..

Atividade 2: Adição de complexos.

Atividade 3: Criação de ferramentas no Geogebra.

Atividade 4: Multiplicação de complexos.

Atividade 5: Divisão de complexos.

Atividade 6: Resolução de problemas.

Atividade 7: Resolução de problemas

Os sujeitos da pesquisa são seis alunos, de uma escola particular de São Paulo. O experimento será feito em sala separada da sala de aula, com computadores disponíveis, com o software de geometria dinâmica Geogebra instalado. Além dos protocolos, em que os alunos anotarão suas resoluções e conclusões, o pesquisador contará com vídeo da experimentação, que será feito por professora de matemática. As identidades dos alunos, por motivo de privacidade, serão preservadas.

Iniciaremos então a nossa engenharia didática com os estudos preliminares sobre o nosso objeto de estudo, os números complexos.

2 ESTUDOS PRELIMINARES

Como parte da Engenharia Didática, comentaremos a apresentação dos números complexos nos livros didáticos, bem como as indicações feitas nos PCN^+ (2002). Apresentamos um breve estudo da evolução histórica e epistemológica dos números complexos, além de uma possível abordagem dos mesmos. Apesar de o estudo do objeto número complexo fazer parte dos estudos preliminares, deixamo-lo para o capítulo 3, por entendermos que os registros de representação que o objeto possibilita merecem maior destaque e detalhamento.

2.1 Os números complexos nos PCN

Após leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio PCN^+[8] (2002), refletimos sobre competências e habilidades que pretendemos desenvolver nos estudantes, no que concerne ao estudo dos números complexos.

Percebemos que várias das competências apontadas e detalhadas nos PCN^+ (2002), podem ser exploradas no uso do software Geogebra:

> ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, fórmulas, equações ou representações geométricas; expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática; apresentar ideias, solucionando problemas. Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. (Ibidem, p.114)

Os PCN^+ (2002), Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – ressaltam que “o professor de Matemática deve estar atento para ilustrar a utilidade dos instrumentos de representação que ensina.” E, entre as competências que devem ser desenvolvidas, espera-se que os alunos possam “ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas.” Pensamos que a proposta do presente trabalho, em particular da

[8] Acessado em 24/08/2009: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf e em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf.

sequência didática com o software Geogebra, pode atender ao que se anseia na descrição, uma vez que o uso do software ajudará o estudante a compreender, do ponto de vista gráfico, o que acontece geometricamente com os segmentos orientados que representam os números complexos, quando são efetuadas operações sobre eles.

Ainda nos PCN+ (2002) há ênfase com relação ao fato de que equações algébricas, apresentadas abstratamente, podem ter muitos significados, relativamente distintos. E cita como exemplo o fato de $y = 3x + 2$ ou $y = x^2$ poderem expressar variações nas funções de ambos os lados de cada equação e a igualdade ou equivalência entre estes lados, que contêm elementos com significados distintos. “A primeira das expressões poderia representar a conversão de uma moeda em outra, numa casa de câmbio, onde 3 seria a taxa de câmbio do dia, e 2, a tarifa fixa cobrada pela operação.”

De forma similar, o produto $z \cdot i$, não pode ser apenas visto como uma operação algébrica. É importante que os alunos possam efetuar uma mudança do registro algébrico para o gráfico e perceber que, graficamente, este produto corresponde a uma rotação do vetor que representa o complexo z, de um ângulo de 90^o em torno da origem do plano de Argand-Gauss. Estaríamos atendendo a recomendação dos PCN+ (2002, p.27), no que trata de desenvolver no estudante a articulação dos símbolos e códigos, estendendo a linguagem algébrica para a visualização gráfica.

A proposta de resolução de problemas que envolvam operações com números complexos também atende a tópicos do conjunto das competências de **investigação** e **compreensão**, porque solicita “identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e possíveis estratégias para resolvê-la. [...] estabelecer relações; identificar regularidades, invariantes e **transformações**.” (grifo nosso).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também salientam que:

> Nessa etapa da escolaridade (Ensino Médio), portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem [...]. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam

> o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber. (PCN$^+$, 2002, p.112)

É preciso que enfatizemos que propostas pedagógicas como a de Rosa (1998), que propõe uma abordagem histórica para aquisição dos conteúdos referentes aos números complexos, corroboram a observação anterior e, segundo seu autor, é uma proposta eficaz com relação ao ensino.

Quando trata especificamente dos temas estruturadores do ensino de Matemática, os PCN$^+$ (2002) lembram que diversos fatores fazem parte da elaboração do trabalho pedagógico. Entretanto, um primeiro critério mais básico e geral, é que “os conteúdos ou temas escolhidos devem permitir ao aluno desenvolver as competências descritas anteriormente, avançando a partir do ponto em que se encontra.” Além disso, “os temas devem, ainda, permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos para garantir maior significação para a aprendizagem.”

Particularmente em Geometria e medidas, os PCN$^+$ (2002) salientam que usar as formas geométricas

> é uma capacidade importante para a compreensão e **construção de modelos** para resolução de questões de Matemática e de outras disciplinas. [...] o aluno poderá desenvolver habilidades de **visualização**, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. (grifo nosso).Para desenvolver esse raciocínio de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; [...] planificações e **construções com instrumentos.** (Ibidem,2002, p. 123, grifo nosso).

Entre as estratégias para ação, os PCN+ elegem a resolução de problemas como a perspectiva metodológica e esta deve ser entendida como a “postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado”. É nesse sentido que, após a construção das ferramentas para efetuar adição, subtração e multiplicação de números complexos, faz sentido a exploração do ambiente gráfico com situações que levem o aluno a questionar e a visualizar. Por exemplo, o que ocorre, graficamente, quando se multiplica um número complexo qualquer por um número real? Ou: o que ocorre graficamente quando multiplicamos um número imaginário puro por outro número complexo qualquer?

Os PCN$^+$ (2002, p.129) também ressalvam que

> A seleção das atividades de aprendizagem a serem propostas deve garantir espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais. O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender.

Esse documento lembra também que o uso diversificado de material didático – tais como jornais, filmes, vídeos, programas de tevê, livros revistas, etc. – tem conduzido a resultados notáveis. Nesse universo, o uso dos computadores merece ser destacado, pois abre portas para um mundo de informações e novos procedimentos com relação à escrita e a organização de dados.

Em vista do que foi exposto, acreditamos que a abordagem dos números complexos, fazendo uso de software de geometria dinâmica é uma tentativa de se perseguir os objetivos propostos pelos PCN, tanto no que diz respeito às articulações entre as distintas frentes da matemática, quanto ao aspecto de visualização das propriedades algébricas entre esses números, além da exploração de translações, simetrias e rotações.

Apesar de toda a proposta contida nesse documento, a qual nos esforçaremos para contemplar em nossa atividade, parece-nos ainda que os números complexos não alcançaram a devida importância, pois

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como **esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido** para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas.(PCN$^+$, 2002, p. 122, grifo nosso).

Sobre isso, talvez seja oportuno lembrar o comentário de Carneiro:

> A humanidade levou milhares de anos para descobrir os complexos, mas somente 200 anos após começou a perceber o verdadeiro significado e as potencialidades de aplicação dessa descoberta. Passados outros 200 anos, o ensino dos números complexos necessita beber mais nessa fonte que é a abordagem geométrica dos números complexos [...]. (CARNEIRO, 2004, p. 24).

Portanto, discordamos dos PCN$^+$ (2002) nesse ponto, pois não acreditamos que o tema números complexos, isolado da resolução de equações, perca o seu sentido. E mesmo para quem não pretende continuar seus estudos na área, entendemos que os números complexos podem, desde que devidamente abordados, servir para resolver problemas de geometria plana, por exemplo. As visualizações proporcionadas por atividades com lápis e papel quadriculado ou com o uso do software Geogebra permitem de maneira ágil ilustrar as operações com tais números, emprestando significados gráficos para a escrita algébrica e, como numa via de mão dupla, permitindo também que situações visualizadas graficamente possam ser escritas em registros de escrita algébrica.

2.2 Os números complexos nos livros didáticos

A obra "Exames de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio" é uma publicação da VITAE, do IMPA e da SBM. Nela, são analisadas doze coleções de matemática por oito matemáticos, sendo Lima (2001) o autor. Resumiremos brevemente, as principais falhas apontadas nessas coleções, concernentes a abordagem dos números complexos.

Em geral, faltam figuras para ilustrar que o conjugado de um complexo é o seu simétrico em relação ao eixo real e para ilustrar que a soma de números complexos se faz geometricamente pela regra do paralelogramo e também para ilustrar a multiplicação de números complexos. As apresentações feitas não fazem conexões com outros temas já estudados. Fatos elementares como, por exemplo, $z^{-1} = \overline{z}$, quando z tem módulo 1, não são destacados.

Erroneamente é dito em várias obras que foram as equações do segundo grau que obrigaram os matemáticos a desenvolverem os números complexos. Por vezes uma interpretação geométrica poderia tornar uma explicação ou um problema mais simples. Por exemplo, seria útil interpretar módulo como distância, o que facilitaria a compreensão de que os complexos que são soluções da equação $|z-a| = r$ estão em uma circunferência de centro a e raio r.

Para Lima (2001) outra falha comum é que a definição de imaginário puro exclui o zero do conjunto dos imaginários puros e que argumentos só são considerados com valores no intervalo $[0, 2\pi]$. O tratamento dos números complexos é essencialmente algébrico e, portanto, sem aplicações relevantes.

Parece-nos que de todas as falhas apontadas, a falta de interpretação geométrica das operações entre os números complexos é a que mais sobressai, embora o autor aponte também nas obras analisadas frases incorretas, tais como: "para simplificar a notação, criou-se o número i, de modo que o quadrado desse número fosse igual a -1..." ou, ainda, "Gauss passou a usar o símbolo (a,b) para representar o número complexo $a+bi$ e definiu as operações entre complexos como operações entre pares ordenados". Um ponto se revelou comum a quase todas as obras: a ausência de uma abordagem sobre vetores que, segundo os autores, deveria ser tratado matematicamente. O que ocorre com relação a algumas operações com vetores que são abordadas nas aulas de Física.

Em resumo, a conexão entre os números complexos e a Geometria é deficiente, o que revela um a falta de articulação entre os capítulos, uma vez que a Geometria Analítica acabou de ser estudada. As aplicações geométricas das operações entre os complexos não são exploradas, o que não leva o aprendiz a interpretar as operações como transformações geométricas.

Esses aspectos reforçam a necessidade de se apresentar os números complexos com ênfase em seus aspectos gráficos e com vistas à resolução de problemas de geometria plana. O registro de representação algébrico é necessário, mas a sua articulação com o registro de representação gráfico, vetorial e trigonométrico, também é essencial na medida em que proporciona visualizações de propriedades que, de outra forma, ficariam sem tanta evidência, como será apresentado no tópico 3.4.

2.3 Breve história e epistemologia dos números complexos

2.1.1 Diofanto e Viète

Não se sabe ao certo a nacionalidade nem em que época viveu Diofanto que é, geralmente, considerado pelos historiadores como sendo do século III da nossa era. Mas o fato é que a relação entre pares de números já era observada por Diofanto. Em sua *Arithmetica* (p.25, livro III, problema 19), citado por Stillwell (2006, p. 34, tradução nossa[9]) consta: "*65 é naturalmente dividido em dois quadrados de*

[9] 65 is naturally divided into two squares in two ways, namely $7^2 + 4^2$ and $8^2 + 1^2$, which is due to the fact that 65 is the product of 13 and 5, each of which is the sum of two squares.

dois modos, a saber, $7^2 + 4^2$ e $8^2 + 1^2$, o que é devido ao fato de 65 ser o produto de 13 e 5, cada um dos quais é soma de dois quadrados”.

De acordo com Eves (2004, p. 208), na *Arithmetica* de Diofanto há muitas proposições relativas à representação de números como soma de dois, três ou quatro quadrados, um campo de investigação que iria ser completado mais tarde por Fermat, Euler e Lagrange.

Ainda de acordo com Stillwell (2006, p. 34-35), tudo indica que Diofanto já sabia que o produto da soma de dois quadrados é também uma soma de dois quadrados, isto é,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2 \qquad (1)$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2 \qquad (2)$$

Desse modo, sendo 65 = 13 x 5, pela identidade (1) pode-se escrever:

$$65 = 13\cdot 5 = (3^2+2^2)(2^2+1^2) = (3\cdot 2 - 2\cdot 1)^2 + (2\cdot 2 + 3\cdot 1)^2 = 4^2 + 7^2.$$

O outro modo de escrever 65 como soma de dois quadrados, isto é, $8^2 + 1^2$, vem da identidade (2).

Segundo o autor (Ibidem, p. 35, tradução nossa), Diofanto dá apenas um único exemplo de (1). Sua notação (*de Diofanto*) não tem símbolos para mais do que uma variável, então ele espera que o leitor deduza, a partir dos exemplos bem escolhidos, a regra geral.

Assim, se dois números x e y são resultantes da soma de dois quadrados, isto é, $x = a^2 + b^2$ e $y = c^2 + d^2$, então o produto desses dois números, isto é, $x \cdot y$ é dado pela soma dos quadrados de $ac - bd$ e $bc + ad$. Então vemos que a regra de Diofanto tem exatamente a mesma forma que a regra para a multiplicação de números complexos e isso, de acordo com o autor (ibidem, p.35), não é apenas uma coincidência.

O módulo de um número complexo $a + bi$ é dado por $\sqrt{a^2+b^2}$. Portanto, (1) expressa a propriedade de que o produto dos módulos de dois números complexos é igual ao módulo do produto desses números, isto é:

$$| a+bi || c+di | = |(a+bi)(c+di)|$$
$$| a+bi || c+di | = |(ac-bd)+(bc+ad)i|$$

Logo, elevando ambos os membros ao quadrado, e considerando que $|x|^2 = x^2$, tem-se que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$.

> Interpretando a^2+b^2 como o quadrado da hipotenusa de um triângulo, de catetos a e b, Diofanto associou a^2+b^2 com o par a, b. Logo, pode-se concluir que há uma interpretação geométrica possível para a (1), que é mostrada na Figura 3: o produto de dois triângulos retângulos para se obter um terceiro. Poderíamos chamar os dois primeiros triângulos de triângulos-fatores e o terceiro de triângulo-produto. Portanto, vê-se, na Figura 3 que a hipotenusa do triângulo-produto é o produto das hipotenusas dos triângulos-fatores. Vê-se, dessa forma que, graficamente, o produto de somas de quadrados comporta-se do mesmo modo que o produto de números complexos. (STILLWELL, 2006, p. 35, tradução nossa[10]).

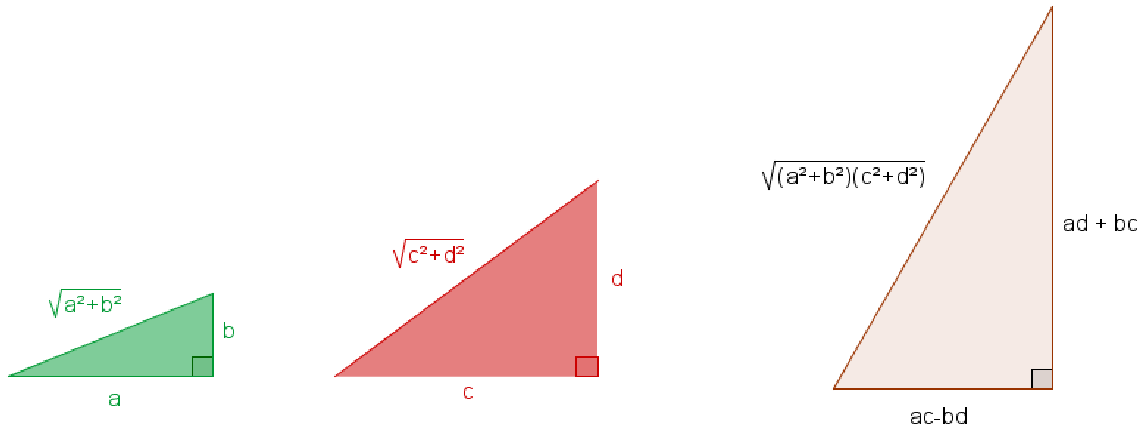


Figura 3. O “produto” de triângulos, de Diofanto.

Segue ainda o autor (ibidem, p. 36-37) descrevendo a parte histórica:

> Em 1590 o matemático francês François Viète, estudando o produto de triângulos de Diofanto, descobriu uma propriedade tão notável quando o produto das hipotenusas dos triângulos: a propriedade aditiva dos ângulos desses triângulos. Se os ângulos de dois triângulos são α e β, como mostrados na Figura 4, então o ângulo do triângulo-produto é a soma dos ângulos dos triângulos-fatores.

[10] [...]He views a^2+b^2 as the square on the hypotenuse of a right-angled triangle with perpendicular sides a and b. Thus he definitely associates a^2+b^2 with a pair a, b. The rule behind (1) takes two right-angled triangles and finds a third (which we might call the “product” triangle) whose hypotenuse is the product of the hypotenuses of the first two.

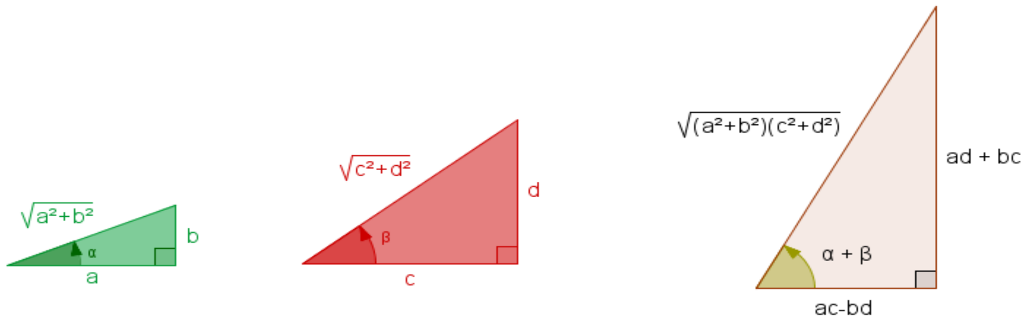


Figura 4. O "produto" de triângulos, por Viète.

Na busca por se representar graficamente os números complexos, apenas no século XIX os resultados de Diofanto e Viète foram entendidos como sendo partes da mesma estrutura.

2.1.2 Cardano e Tartaglia.

Em 1531, Nicolò Fontana, o Tartaglia, escreveu em suas memórias ter descoberto uma regra para resolver equações de terceiro grau. Segundo Garbi (2005, p.121), o resultado foi publicado na Ars Magna, por Girolamo Cardano (1501-1576), quebrando a promessa e juramentos feitos a Tartaglia, de que não revelaria a fórmula.

Repetiremos, a seguir, com a notação algébrica moderna, os passos executados por Tartaglia e Cardano para a resolução da equação geral do terceiro grau dada por $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, e que se encontra no Caderno do professor, da proposta curricular do Estado de São Paulo (2008) para a 3ª série do ensino médio.

Primeiramente, dividem-se todos os coeficientes por a.

Então a equação fica $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$.

Pondo $\frac{b}{a} = B$, $\frac{c}{a} = C$ e $\frac{d}{a} = D$, temos $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.

Fazendo a mudança de variáveis $x = y - \frac{B}{3}$, eliminamos o termo em x^2:

$$\left(y - \frac{B}{3}\right)^3 + B\left(y - \frac{B}{3}\right)^2 + C\left(y - \frac{B}{3}\right) + D = 0$$

$$y^3 - y^2B + yB^2 - \frac{B^3}{27} + By^2 - 2\cdot\frac{B^2}{3} + \frac{B^3}{9} + Cy - \frac{CB}{3} + D = 0$$

$$y^3 + \left(B^2 + C\right)y + \frac{2B^3}{27} - \frac{2B^2}{3} - \frac{CB}{3} + D = 0$$

Ou seja, a equação é da forma

$$y^3 + My + N = 0, \qquad (1)$$

em que M e N podem ser determinados em termos de B, C e D.

A equação (1) pode ser resolvida a partir da identidade

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 \qquad (2)$$

Rearranjando (2) temos

$$(p+q)^3 - 3pq(p+q) - \left(p^3 + q^3\right) = 0 \qquad (3)$$

Comparando (1) e (3), sai que, determinando p e q como acima, teremos $y = p + q$ como solução para (1). Fazemos então $\begin{cases} -3pq = M \\ -\left(p^3 + q^3\right) = N \end{cases}$ e daí $\begin{cases} p^3q^3 = \dfrac{M^3}{27} \\ \left(p^3 + q^3\right) = -N \end{cases}$

(4)

Esse sistema (4) constitui um problema clássico. De p^3 e q^3 são conhecidos a soma e o produto, $\frac{M^3}{27}$ e $-N$, respectivamente. Logo, p^3 e q^3 são raízes de uma equação do segundo grau, a saber, $z^2 + Nz + \left(\frac{M}{3}\right)^3 = 0$. Temos então:

$$z = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4\left(\frac{M}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{N}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2 - 4\left(\frac{M}{3}\right)^3}{4}} = -\frac{N}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4} - \frac{-4\left(\frac{M}{3}\right)^3}{4}}$$

Isto é, $z = -\frac{N}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}$

Assim, as raízes do sistema (4) serão

$$p^3 = -\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad q^3 = -\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3} \quad \text{ou}$$

$$p^3 = -\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad p^3 = -\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}$$

De qualquer modo, como $y = p + q$, segue que

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}}\ .$$

2.1.3. O nascimento dos números complexos - Bombelli

Veremos a seguir como a fórmula de Cardano-Tartaglia, apesar de correta, levaram a números cuja interpretação, a princípio, foi difícil para os matemáticos, a saber, números que expressavam raízes quadradas de números negativos. Para entender como isso aconteceu, comecemos por aplicar a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver a equação $x^3 - 3x - 2 = 0$. Temos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{1+0} + \sqrt[3]{1-0} = 2\,.$$

E $x = 2$ é, de fato, uma raiz.

Agora, utilizemos a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ que, por simples inspeção, podemos verificar que tem $x = 4$ como raiz. Utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, segue que

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}}$$

Ou seja, $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

De acordo com Rosa (1998, p. 50), essa foi a primeira solução encontrada por Raphael Bombelli (1526 – 1573) ao tentar resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. É assim que, ao que tudo indica, surge pela primeira vez uma equação cúbica cuja solução apresenta raízes quadradas de números negativos, mas que, efetivamente, tem uma solução inteira.

Apesar de considerar as raízes quadradas de números negativos como inúteis e sofísticas, Bombelli começou a operar com elas, aplicando as regras usuais da Álgebra. Ainda de acordo com o autor, supondo que existisse uma expressão da forma $a+\sqrt{-b}$ que fosse raiz cúbica de $2+\sqrt{-121}$, Bombelli impõe que $\left(a+\sqrt{-b}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$.

Se $a+\sqrt{-b}$ foi considerada raiz cúbica de $2+\sqrt{-121}$, então poder-se-ia supor também que a raiz cúbica de $2-\sqrt{-121}$ fosse da forma $a-\sqrt{-b}$, o que acarretaria, necessariamente, $a=2$, uma vez que isso tornaria a soma das raízes cúbicas obtidas pela fórmula de Cardano-Tartaglia igual a 4, isto é,

$a+\sqrt{-b}$ + $a-\sqrt{-b}=4$.

Faltava então determinar o valor de b, o que é feito a partir da equação $\left(a+\sqrt{-b}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$, assumindo $a=2$ e aplicando as regras usuais da Álgebra:

$$8+12\sqrt{-b}-6b-b\sqrt{-b}=2+\sqrt{-121}$$

$8+12\sqrt{b}\sqrt{-1}-6b-b\sqrt{b}\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1}$ $\left(8-6b\right)+\left(12\sqrt{b}-b\sqrt{b}\right)\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1}$ e,

daí, o sistema $\begin{cases} 8-6b=2 \\ 12\sqrt{b}-b\sqrt{b}=11 \end{cases}$`

que acarreta $b=1$

Bombelli concluiu que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$ e que $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$.

Portanto, o valor de x é $x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$ e, de acordo com Lima et al (1999, p. 161), foi assim que, de forma ainda não totalmente confortável, a partir de Bombelli, os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos.

2.1.4. John Wallis

John Wallis (1616 – 1703), contemporâneo de Isaac Newton, foi o primeiro a tentar desvincular a noção de número de sua associação tradicional com quantidade. Embora os números complexos não façam muito sentido como quantidade, faltava descobrir um modelo que lhes emprestasse uma interpretação adequada. Segundo Domingues (2009, p. 327) é de Wallis a primeira tentativa de representação geométrica dos complexos.

Segundo Eves (2005, p. 433), sua *De álgebra tractatus; historicus & practicus*, escrita em 1673, publicada em inglês em 1685 e em latim em 1693; é considerada a primeira tentativa séria de uma história da matemática na Inglaterra e lá se encontra o primeiro registro da tentativa de se dar uma interpretação gráfica às raízes complexas de uma equação quadrática real.

Como introdução à sua análise da raiz quadrada de um número negativo, Wallis começa observando, em sua *Algebra*, que os números negativos, por muito tempo vistos como suspeitos pelos matemáticos, tinham de fato uma perfeita e clara interpretação física. Segundo Nahin:

> Dirigindo a atenção de seus leitores para uma reta, com algum ponto marcado como o *ponto zero* ou origem, Wallis escreveu que um número positivo significava distância medida do ponto zero *para a direita*, e que um número negativo significava distância medida do ponto zero *para a esquerda*. (NAHIN, 2007, p.42, tradução nossa[11]).

Ou seja, Wallis interpretou números negativos como distâncias em sentido oposto ao positivo, à esquerda de um dado ponto. Sua interpretação geométrica dos números complexos começa com o diagrama da Figura 5.

---

[11] Directing his readers´ attention to a straight line, with some point marked as the *zero point* or origin, Wallis wrote that a positive number means distance measured from the zero point *to the right*, and that a negative number means distance measured from the zero point *to the left*.

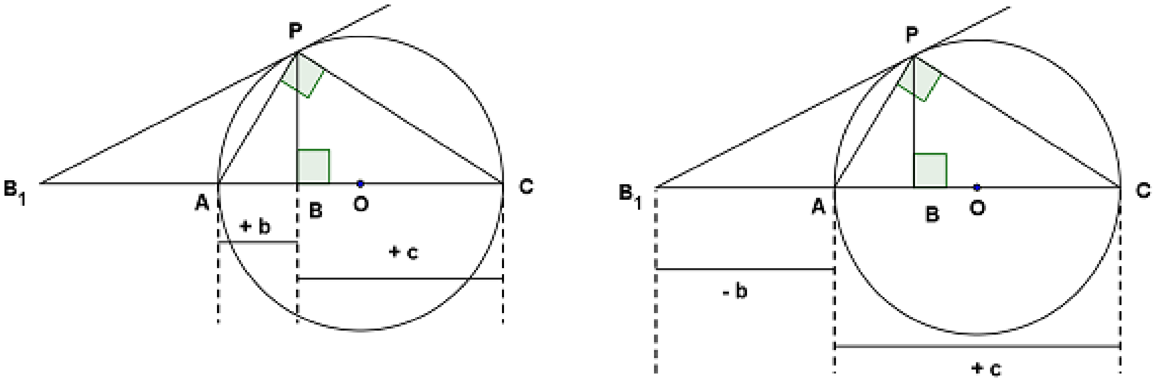


Figura 5. Wallis e raízes quadradas de números negativos 1.

Por um lado, pode-se provar com geometria plana elementar que PB é média geométrica de AB e BC e que, por outro lado, PB_1 é média geométrica entre AB_1 e B_1 C. Em notação algébrica: $PB = \sqrt{(AB)(BC)}$ e $PB_1 = \sqrt{(AB_1)(B_1C)}$. Adotando a convenção de sinais estipulada por Wallis para indicar o sentido para onde se tomam as medidas em relação à origem, teríamos $PB = \sqrt{(+b)(+c)}$ e $PB_1 = \sqrt{-b.(+c)}$

Em outras palavras, Wallis criara uma interpretação geométrica para a raiz quadrada de um número negativo.

Ainda segundo Nahin (2007, p.45), Wallis, também investigou uma construção geométrica que o levou a interpretar geometricamente a raiz quadrado de números negativos. O problema era construir um triângulo em que fossem dados dois lados e um ângulo não compreendido por esses lados. A Figura 6 mostra essa situação, no caso em que os lados dados são PA e PB (que tem mesmo comprimento que PB´) e o ângulo α. A altura PC é determinada a partir dos dados. No entanto, se PC < PB, então há duas soluções possíveis: uma é o triângulo PAB_1 e a outra é o triângulo PAB. Porém, se tivermos PC > PB, então o problema não tem solução se procurarmos soluções B e B_1 que pertençam à reta determinada por A e C.

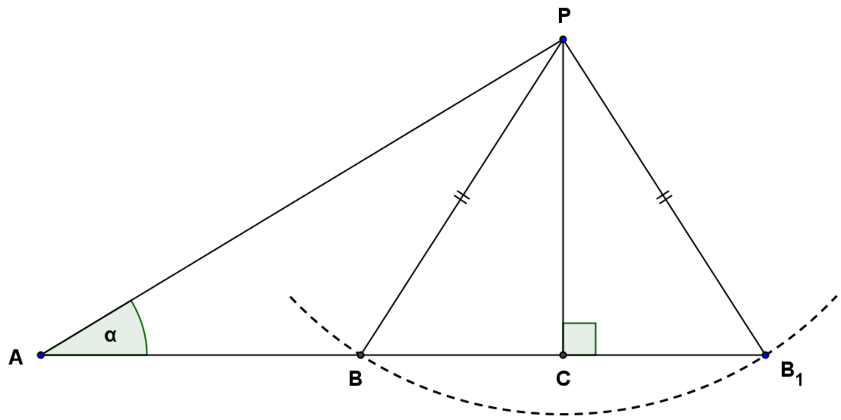


Figura 6. Wallis e raízes quadradas de números negativos 2.

Expressemos, algebricamente, os comprimentos de AB e AB_1.

$$AB = AC - BC = \sqrt{(AP)^2 - (PC)^2} - \sqrt{(PB)^2 - (PC)^2}$$

$$AB_1 = AC + CB_1 = \sqrt{(AP)^2 - (PC)^2} - \sqrt{(PB)^2 - (PC)^2}$$

Usamos no último radical o fato de que PB_1= PB. Ambas as equações mostram que se tivermos PC > PB, então os radicandos serão números negativos e, portanto, o problema original não terá solução. No entanto, engenhosamente, Wallis arranjou um modo de interpretar tal situação.

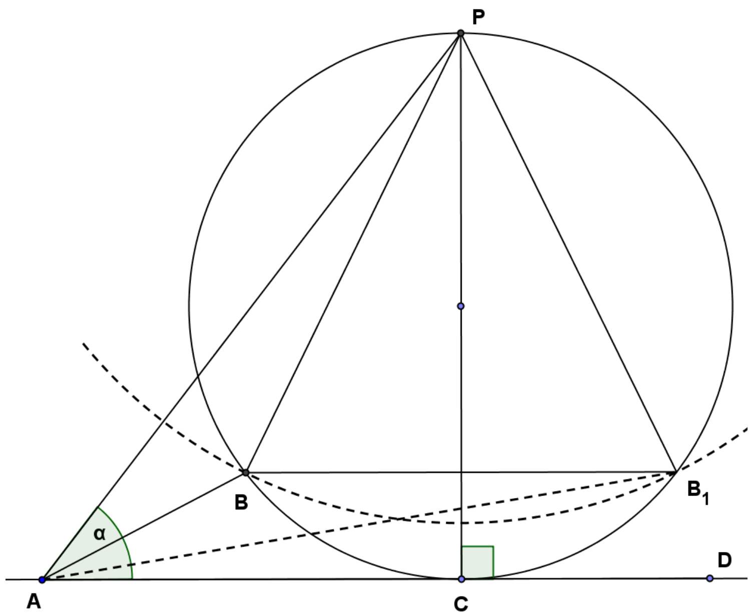


Figura 7. Wallis e raízes quadradas de números negativos 3.

De acordo com Nahin (2007, p. 46), o grande “insight” de Wallis foi perceber que, no caso em que PC > PB, é possível determinar dois pontos B e B_1, como solução do problema, **se permitirmos que eles não pertençam a reta AD**. Na Figura 7 pode-se ver a saída: Wallis construiu uma circunferência com diâmetro PC; em que C é o pé da perpendicular traçada tal como na configuração mostrada pela Figura 6, da primeira solução. Em seguida, usando P como centro, desenhou um arco de raio PB até que este arco interceptasse a circunferência de diâmetro PC em B e B_1. Assim, os triângulos PAB e PAB_1 são as soluções procuradas, isto é, eles são determinados pelos lados PA e PB (com $PB=PB_1$) e pelo ângulo PÂD = α. Note que este ângulo não é ângulo interno dos triângulos que são solução, mas isso não era requisito do problema original, que pedia apenas para se determinar o triângulo, quando dados dois lados e um ângulo não formado por eles.

Wallis chegou próximo da representação gráfica dos números complexos. No entanto a representação dos números complexos como pontos no plano, com a direção horizontal e vertical representando as partes reais e imaginárias levaria ainda um século para acontecer.

2.1.5. Wessel, Argand, Gauss.

Caspar Wessel (1745 – 1818), Jean Robert Argand (1768 – 1822) e Gauss (1777 – 1855) foram, depois de Wallis, os primeiros a perceber a associação entre os números complexos e os pontos reais do plano. Foi Wessel (s/d, apud DOMINGUES, 2009, p.328), um agrimensor norueguês, quem primeiro formulou a adição de vetores: “adicionam-se dois segmentos de reta, unindo-os de tal maneira que o segundo comece onde o primeiro termina e então se traça um segmento de reta do primeiro ao último ponto dos segmentos unidos. Este segmento é a soma dos segmentos unidos.” Essa definição corresponde à adição de dois vetores.

Wessel, deu sua contribuição em 1797, na forma de um artigo, intitulado *Om Directionens analytiske Betregning* (Sobre a representação analítica de vetores), encaminhado à Academia Real Dinamarquesa de Ciências, que foi publicado nas *Atas da Academia em 1799*. Em seu trabalho, Wessel mostrou que representando por 1 um segmento de reta unitário e por ε um outro segmento de reta unitário, perpendicular ao primeiro, então as relações geométricas euclidianas nesse plano implicavam que $\varepsilon^2 = -1$. De acordo com Wessel (s/d, apud ROSA, 1998, p. 67):

> Seja +1 a unidade positiva e seja uma certa perpendicular unitária, com o mesmo ponto de origem, +ε. A direção do ângulo de +1 é igual a 0^o, a de -1 igual a 180^o, a de +ε igual a 90°, e a de -ε igual a 270° . Tem-se então (de acordo com regras anteriormente deduzidas):
>
> | | +1 | - 1 | + ε | - ε |
> |---|---|---|---|---|
> | +1 | +1 | - 1 | + ε | - ε |
> | -1 | - 1 | +1 | - ε | + ε |
> | + ε | + ε | - ε | - 1 | + 1 |
> | - ε | - ε | + ε | + 1 | - 1 |
>
> Disso nós vemos que ε vem a ser $\sqrt{-1}$, e o produto segue as regras algébricas usuais. (Ibidem, p. 67)

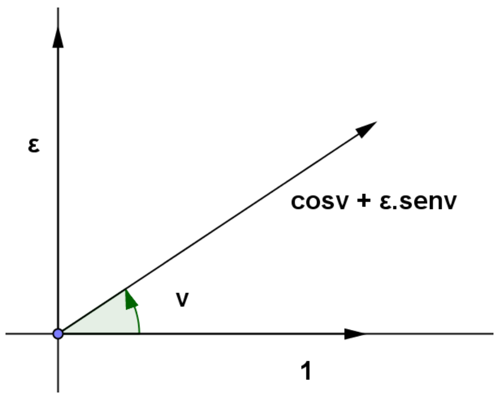


Figura 8. Diagrama de Wessel para números complexos.

A Figura 8 ilustra a ideia de Wessel, de que a reta que forma ângulo ν com a unidade +1 é dada por cos ν + ε sen ν e quando multiplicada por cos u + ε sen u, o produto vem a ser a reta com ângulo de direção ν + u, representada por cos(ν + u) + ε sen (ν + u).

Por sorte o artigo de Wessel não desapareceu da história. Foi encontrado, por um antiquário, cerca de noventa e oito anos após ter sido escrito. Eves (2004, p. 522) assegura que “esse lapso de quase um século no reconhecimento do trabalho de Wessel explica porque o plano complexo veio a ser chamado de plano de Argand, em vez de plano de Wessel”.

Em 2001 a Real Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras publicou uma obra intitulada “Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of

Complex Numbers”[12], como homenagem pelo bicentenário da obra de Wessel. Nessa obra, um dos artigos, assinado por Otto B. Bekken (2001, p. 123) afirma que “a semelhança entre o produto de triângulos de Viète e o produto de segmentos de reta de Wessel são muito parecidos, mas se Wessel teve acesso ou viu os trabalhos de Viète, isso nós não sabemos”.

Jean Robert Argand, um guarda-livros suíço, em 1806 deu uma contribuição significativa para o entendimento do aspecto geométrico dos números complexos, num artigo publicado nos *Annales de Mathématiques*, cujo título era *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (Ensaio sobre a maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas). Nele, Argand aponta que se multiplicarmos +1 por i obtemos i; se multiplicarmos esse resultado por i obtemos -1. Ele pensa então em representar o produto por i como uma rotação de 90^o no sentido anti-horário, em torno da origem.

De acordo com Domingues (2009) foi Gauss quem, de fato, tornou amplamente aceita a interpretação geométrica dos números complexos, em sua tese de doutoramento (1799), em que demonstrou uma primeira versão do que ele mesmo chamou de Teorema Fundamental da Álgebra[13] ,

> ele pressupôs uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano cartesiano e os números complexos de tal modo que se $a+bi$ é uma raiz complexa de um polinômio real não nulo P, então (a,b) está na intersecção das curvas $u=0$ e $v=0$, obtidas mediante a decomposição $P(x+yi)=u(x,y)+iv(x,y)$. (DOMINGUES, 2009, p.328).

Apesar desse feito, apenas em 1831 Gauss publicou algo sobre a representação gráfica dos números complexos. Ainda conforme Domingues (2009, p.328), “apesar disso, a expressão técnica número complexo, criada por ele para designar os novos números, vingou.”

Parece que, finalmente, a questão sobre a existência dos números complexos estava encerrada, o que fica bem caracterizado nas palavras de Eves (2005, p.524):

---

[12] Ainda no prelo, pode ser visualizado em http://books.google.com/books?isbn=8778762367, acessado em 02/11/2009.

[13] Todo polinômio em um variável, com coeficientes reais, tem pelo menos uma raiz complexa.

> A simples ideia de considerar as partes real e imaginária de um número complexo $a+bi$ como as coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido de que a cada número complexo corresponde um único ponto do plano e vice-versa. Ver é crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictício dos números imaginários foram geralmente abandonadas.

É essa representação em coordenadas retangulares que por vezes é vista no Ensino Médio, porém sem articulação com os demais registros de representação. Essa representação e sua articulação com as demais serão exploradas no capítulo 3. O próximo tópico mostra de modo elementar, como é possível iniciar a apresentação de números complexos, criando uma motivação, por meio do uso de problemas que recaem em equações de terceiro grau e, a partir daí, abordando uma de suas principais transformações no plano: a rotação.

2.2 Uma possível abordagem do objeto matemático número complexo

Este tópico trata da apresentação dos números complexos, a partir de um problema que recai em uma equação do terceiro grau. O problema é seguido de discussão sobre as raízes quadradas de números negativos, que culmina em uma interpretação gráfica no plano.

2.2.1 Abordagem a partir de equação do 3º grau

Justamente por não representarem quantidades nem serem resultados de contagem e por não se aplicarem a necessidades do cotidiano, os números complexos têm sido considerados com desconfiança tanto por alunos quanto por professores do Ensino Médio conforme pesquisado por Fabiani (1998, p.87-90).

Além disso, conforme Spinelli aponta,

> Boa parte do tradicional estudo dos complexos no Ensino Médio fica restrita ao tratamento das operações entre eles, de modo semelhante ao qual é submetida à criança quando, na educação infantil, começa a tomar contato com as operações entre números naturais. [...] Vale refletir sobre qual contexto se desenvolve o estudo das operações entre complexos no nível médio. (SPINELLI, 2009, p. 3)

Uma abordagem inicial dos números complexos pode ser feita considerando-se o conhecimento que os alunos possuem sobre resolução de problemas que envolvam números reais. A fim de exemplificarmos, tomaremos a proposta curricular para o Estado de São Paulo (2008), que traz em seu Caderno do Professor, além da dedução da fórmula de Cardano-Tartaglia, a proposição de algumas atividades e, entre estas, há a que se encontra na página 16 do mencionado Caderno e que aqui adaptamos:

Problema 1: Uma das raízes de uma equação de 3º grau, do tipo

$$y^3 + My + N = 0$$

pode ser obtida por meio da fórmula

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}}$$

Encontre uma raiz da equação $y^3 - 3y - 2 = 0$.

Espera-se que o aluno, a partir da fórmula fornecida, efetue os cálculos

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{(-27)}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{(-27)}{27}}} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{1+0} + \sqrt[3]{1-0} \Leftrightarrow y = 2$$

Portanto, $y = 2$ é uma raiz da equação fornecida. Embora pareça para o aluno que a fórmula de Cardano-Tartaglia é apenas mais uma fórmula matemática, deve ser salientado que há situações em que, sabe-se por inspeção que há uma raiz para a equação do terceiro grau mas, aparentemente, a fórmula de Cardano-Tartaglia não a fornece. A investigação de tal problema leva aos números complexos. A situação é vista na atividade seguinte, que se encontra à página 16, do referido Caderno , cujo enunciado e resolução são transcritos a seguir:

Problema 2: Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com base retangular, de lados 3m e 5m e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4m^3 maior do que o do paralelepípedo.

a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x.

b) Use a fórmula do exercício anterior para determinar as raízes da equação do item **a**. A que conclusão você chega?

c) Verifique diretamente na equação dada que x = 4 é uma raiz, ou seja, fazendo x = 4m, temos o cubo com volume $64m^3$ e o paralelepípedo com volume $60m^3$. Como podemos interpretar o resultado do item **b**?

Resolução:

a) $x^3 = 15x + 4$ ou seja, $x^3 - 15x + 4 = 0$.

b) $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$; pela fórmula, parece não existir raiz da equação, uma vez que nos deparamos, nos cálculos, com a raiz quadrada de um número negativo.

c) Certamente a equação admite x = 4 como raiz, como se pode verificar diretamente. No uso da fórmula das raízes, os cálculos foram interrompidos quando surgiu a raiz quadrada de -121.

Ocorre aqui uma situação de desequilíbrio cognitivo em que há, por um lado, a impossibilidade de se extrair a raiz quadrada de um número negativo e, por outro, a demanda de se compatibilizar os conhecimentos instituídos pela fórmula de Cardano-Tartaglia com a solução concreta e real do problema.

Apesar dessa motivação inicial, a sequência de estudo dos complexos não pode ficar restrita à resolução de equações polinomiais, como aponta Spinelli (2009):

> Rapidamente é necessário atingir o degrau do verdadeiro significado dos complexos, que reside na possibilidade de serem gerenciadores de transformações isométricas no plano. Para tanto, a apresentação do plano de Argand-Gauss e a associação entre este plano e a reta Real passa a ser prioridade. (SPINELLI, 2009, p.6).

É o que buscaremos fazer a seguir, retomando os diferentes registros de representação dos números complexos – algébrico, gráfico, trigonométrico e de escrita simbólica – que podem ser estudados a partir de vários pontos de vista, tais como vetores, pontos, transformações, matrizes.

2.2.2 A inspiração para $i^2 = -1$

A exploração do item **b** do **problema 2**, no tópico precedente, a saber, resolver a equação $x^3 - 15x + 4 = 0$, apresentada na página 59, conduz à representação de $\sqrt{-1}$ por i, de modo que teríamos $i^2 = -1$. Assumindo isso e operando-se algebricamente, chega-se à raiz x = 4. Mas isso é apenas uma suposição e torna-se necessária a sua apresentação de forma mais consistente.

O número imaginário i não está entre os números reais, representados na reta real. A pergunta é: como representar, então, esse número i ? Como representar os números da forma $y.i$, ou ainda, os da forma $x + y.i$, em que x e y são números reais? Como abordado na parte histórica dessa dissertação, levou muitas décadas, desde os trabalhos de John Wallis (1616 – 1703) até Gauss, em 1799, para que a representação de um número complexo $z = x + y.i$ como pontos de um plano ganhasse força e aceitação. A inspiração para tal representação pode ter partido do raciocínio que descreveremos a seguir.

Quando multiplicamos um número real positivo por -1, a sua imagem na reta real, como mostrado na Figura 9, é deslocada segundo um arco de 180°, passando da semirreta positiva para a semirreta negativa. Isto é, se $\boldsymbol{n}$ é esse número real positivo, então $\boldsymbol{n} \cdot (-1) = -\boldsymbol{n}$. Isso, graficamente, equivale a uma rotação de 180°, do ponto que representa o número $\boldsymbol{n}$, em torno da origem, no sentido anti-horário.

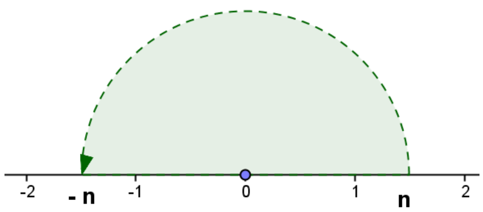


Figura 9. Multiplicação de um número real positivo por -1.

Multiplicar um número real por -1, ou seja, por i^2, significa multiplicá-lo por i e novamente por i, isto é: $\boldsymbol{n} \cdot (-1) = \boldsymbol{n} \cdot i \cdot i = -\boldsymbol{n}$.

Como o resultado das duas multiplicações sucessivas de um número por i foi uma rotação da imagem desse número segundo um ângulo de 180° no sentido anti-horário, torna-se natural considerar que, graficamente, cada multiplicação por i tem como resultado uma rotação da imagem desse número segundo um ângulo de 90^o em torno da origem, no sentido anti-horário. Desse modo, multiplicar um número real por i equivale graficamente a representar a imagem desse número em um eixo perpendicular à reta real, como mostrado na Figura 10.

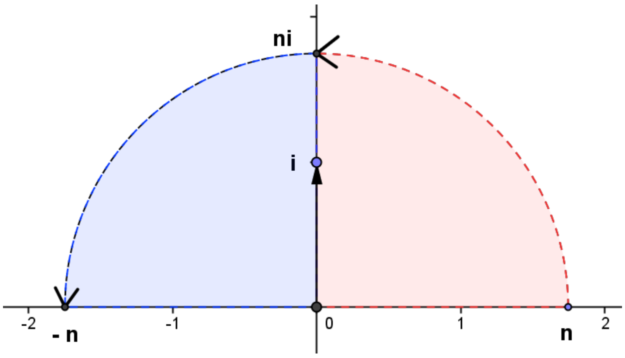


Figura 10. Multiplicação de um número real por i².

É provável que essa tenha sido a inspiração fundamental para a representação do número imaginário i no eixo perpendicular ao eixo real. Assim, podemos representar qualquer número complexo $z = x + yi$ como um ponto do plano, gerado pelas unidades real 1 e imaginária i, o que faz do plano em que os complexos são representados uma extensão da reta real.

É possível, a partir de agora, fazer corresponder cada número complexo $a + bi$ a um $a + bi$ ponto (a,b) do plano cartesiano, e vice-versa.

Consideramos importante exemplificar como é possível visualizar os resultados de algumas operações com os números complexos no plano de Argand-Gauss por pelo menos dois motivos. O primeiro é porque representa um passo natural, uma vez que acabamos de “ampliar” a reta real; o segundo é porque ajuda a tornar plausível a manipulação com o novo tipo de representação de tais números. Entretanto são necessários tanto o enfoque vetorial dos números complexos quanto alguma nomenclatura correspondente, como imagem e afixo. Por esse motivo, deixaremos para mostrar tais visualizações depois de apresentarmos o enfoque vetorial dos números complexos, no item 3.3 do próximo capítulo.

3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE COMPLEXOS

Veremos nesse tópico os diferentes registros de representação semiótica para os números complexos: registro algébrico, registro como pares ordenados, registro vetorial, registro trigonométrico e registro matricial. Em particular, demonstramos os isomorfismos entre certos conjuntos que representam esses números.

3.1 Registro de representação algébrico

No tópico 2.2.2 vimos como foi constituído o registro algébrico dos números complexos na forma $a+bi$, em que a e b são números reais, chamados, respectivamente, de parte real e parte imaginária do número complexo $a+bi$. Por ser registro de representação semiótica, o registro algébrico deve permitir uma transformação interna, que é tratamento, possível pelas operações e propriedades desse registro. Assim, nesse registro de representação, são definidas as operações de adição e multiplicação. Antes, definimos a igualdade entre dois números complexos. Dizemos que dois números complexos $a+bi$ e $c+di$ são iguais se $a=c$ e $b=d$.

Sendo $u=a+bi$ e $v=c+di$, definimos a adição desses números do seguinte modo:

$$u+v=(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$$

Isto é, basta somar as partes reais e as partes imaginárias de cada um.

A definição da multiplicação parte de $u\cdot v=(a+bi)(c+di)$, o que levaria a $u\cdot v=ac+adi+bci+bdi^2$. Levando-se em conta o fato de que $i^2=-1$, temos

$u\cdot v=ac+adi+bci-bd$. Comutando os termos, vem que

$u\cdot v=ac-bd+adi+bci$, ou seja, $u\cdot v=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Consideremos o conjunto $A=\{a+bi, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$, com as operações de adição e multiplicação definidas por $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ e por

$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$. Então, sendo x, y e z elementos quaisquer de A, pode-se demonstrar que são válidas as propriedades associativa e comutativa da adição, isto é, $(x+y)+z=x+(y+z)$ e $x+y=y+x$.

Essas duas propriedades nos liberam de usar parênteses em expressões como $u+z+w$ e nos permitem escolher a ordem das parcelas na soma dos números complexos.

Existe elemento neutro para adição: é o número $0+0i$, que indicaremos simplesmente por 0. Este número é tal que $x+0=x$, qualquer que seja x pertencente ao conjunto A.

Para a adição existe, também, o elemento oposto, isto é, para todo x pertencente ao conjunto A, existe um elemento, que indicaremos por $-x$ e chamaremos de oposto de x, tal que $x+(-x)=0$.

Essas propriedades nos permitem definir subtração de números complexos. Subtrair y de x, isto é, efetuar $x-y$, é adicionar x ao oposto de y, ou seja, é efetuar a seguinte adição: $x+(-y)$

Para a multiplicação também são válidas as propriedades associativa e comutativa, isto é, $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ e $x\cdot y=y\cdot x$, quaisquer que sejam esses elementos pertencentes ao conjunto A.

Tal como para a adição, essas propriedades nos desobrigam de usar parênteses e nos permitem escolher a ordem dos fatores, numa multiplicação do tipo $u\cdot z\cdot w$.

A multiplicação de números complexos no registro algébrico também goza da propriedade da existência do elemento neutro: é o número $1+0i$, que indicaremos apenas por 1, e esse número é tal que $x\cdot 1=1\cdot x$, qualquer que seja x pertencente ao conjunto A.

A existência do elemento inverso também é garantida: para todo x pertencente ao conjunto A, existe um elemento, que indicaremos por x^{-1} e que chamaremos de inverso de x, tal que $x\cdot x^{-1}=1$. Essa propriedade permite definir a divisão de um complexo x por um complexo não nulo y, como sendo o produto de

x pelo inverso de y, isto é, dividir x por y é efetuar a seguinte multiplicação: $x \cdot y^{-1}$. Pode-se demonstrar que se $x = a + bi$, então $x^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$.

Em geral para facilitar os cálculos envolvidos em uma divisão, define-se *conjugado* de um complexo $x = a + bi$ (indicado por $\overline{x}$) como sendo o número complexo $\overline{x} = a - bi$. Assim, por exemplo, se desejamos efetuar a divisão de $u + vi$ por $a + bi$, multiplicamos o numerador e o denominador da divisão indicada $\frac{u + vi}{a + bi}$ pelo conjugado do denominador. Assim, tem-se:

$$\frac{u + vi}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{(ua + bv) + (av - bu)i}{a^2 + b^2} = \frac{ua + bv}{a^2 + b^2} + \frac{av - bu}{a^2 + b^2} i$$

O resultado é exatamente o mesmo de se multiplicar $u + vi$ por $(a + b)^{-1}$, isto é, de se multiplicar $u + vi$ por $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$.

Vale também a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

O conjunto $A = \{a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, por ter as operações de adição e multiplicação como foram definidas, satisfazendo as propriedades que foram listadas (até a distributiva) é um corpo comutativo. Isso é relevante, uma vez que são essas operações com essas propriedades que permitem todos os tratamentos dentro do registro de representação algébrica. Tais tratamentos nos permitem inferir várias outras propriedades, tais como a unicidade do elemento neutro, a unicidade do elemento inverso, a propriedade do cancelamento[14] etc.

Há uma limitação, no entanto. Se desejarmos definir potenciação e radiciação com esses números, certamente a representação algébrica oferecerá dificuldades operacionais. Tome-se, por exemplo, a tarefa de se extrair a raiz sexta de $64i$. Dispondo apenas do registro de representação algébrica, teríamos de impor que $(a + bi)^6$ fosse igual a $64i$ e, a partir daí, desenvolver o binômio, separar a parte real

---

[14] $x + y = y + z \Leftrightarrow x = z$

e imaginária, igualar respectivamente a 0 e a 64 e resolver o sistema obtido. Como apontado por Duval (2009, p.44), a diversidade de registros propicia a complementaridade dos tratamentos para ultrapassar os limites próprios de cada registro no cumprimento de uma atividade complexa. Veremos nos tópicos seguintes, que há outros registros de representação para os números complexos que facilitam esse trabalho. Mostraremos as conversões entre esses diferentes registros.

3.2 Registro de representação por pares ordenados

Segundo Domingues (2009, p. 329), uma questão, no início do século XIX incomodava os matemáticos mais preocupados com o rigor formal: o fato de que a expressão algébrica $a+b\sqrt{-1}$ envolvia a soma de duas quantidades, a e $b\sqrt{-1}$, de naturezas diferentes. Ainda segundo o autor, foi em 1833 que o matemático, físico e astrônomo William R. Hamilton, numa comunicação à Academia Irlandesa pôs fim a essa questão, considerando, segundo o autor, a terna formada por $\mathbb{R}^2$, isto é, $\{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, e as operações de adição e multiplicação, definidas da seguinte maneira:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Hamilton estava, desse modo, constituindo um novo registro de representação semiótica para os números complexos: o registro desses números como pares ordenados de números reais.

Nesse novo registro essas operações gozam das mesmas propriedades que existentes para o registro algébrico: associativa, comutativa, existência do elemento neutro e existência do elemento oposto (para adição) e inverso (para a multiplicação), além da distributiva. Enfim, a terna introduzida por Hamilton, constituída por $\mathbb{R}^2$, pela adição e pela multiplicação definidas sobre esse conjunto é um *corpo comutativo.* Enfatizamos que são essas operações, com as respectivas propriedades que permitem os tratamentos dentro desse registro de representação semiótica por pares ordenados.

Embora a divisão de pares ordenados seja trabalhosa e não usual, a existência do elemento inverso para multiplicação nos permite defini-la. Para exemplificar, vejamos como isso é possível.

Se $(a,b)\neq(0,0)$ é um elemento de $\mathbb{R}^2$, então o seu inverso é $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$, pois

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2}-b\cdot\frac{-b}{a^2+b^2},a\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}+b\cdot\frac{a}{a^2+b^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2},\frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

A divisão de um par ordenado (a,b) por outro $(c,d)\neq(0,0)$, é então definida como sendo o produto de (a,b) pelo inverso de (c,d), isto é

$$(a,b)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2},\frac{-d}{c^2+d^2}\right)=\left(a\cdot\frac{c}{c^2+d^2}-b\cdot\frac{-d}{c^2+d^2},a\cdot\frac{-d}{c^2+d^2}+b\cdot\frac{c}{c^2+d^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{ac-bd}{c^2+d^2},\frac{bc+ad}{c^2+d^2}\right)$$

Vê-se, portanto, que a divisão demanda um custo alto em termos de operações. Tal custo será minimizado com a constituição do registro de representação gráfico para os números complexos, como veremos mais adiante.

Se considerarmos a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, que associa cada número real a ao par $(a,0)$ (simbolicamente, escrevemos $a\to(a,0)$), teremos que f é injetora e transforma a soma (produto) de dois números reais na soma (produto) dos pares a eles associados. De fato: $a+b\to(a+b,0)$, pela definição da função f.

$(a+b,0)=(a,0)+(b,0)$, pela definição da adição em $\mathbb{R}^2$.

Portanto, $a+b\to(a,0)+(b,0)$.

Analogamente, temos $a\cdot b\to(a\cdot b,0)$, pela definição da função f.

E, além disso, $(a\cdot b,0)=(a\cdot b-0\cdot 0,a\cdot 0+b\cdot 0)=(a,0)\cdot(b,0)$.

Logo, $a \cdot b \to (a,0)\cdot(b,0)$.

Tal fato permite identificar um número real a com o elemento $(a,0)$ e, por conseguinte, considerar todo número real como um particular elemento de $\mathbb{R}^2$. Em outras palavras, podemos considerar o conjunto dos números reais como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, ou em símbolos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Além disso, identificando (0,1) com i, temos

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b\cdot 0 - 0\cdot 1, b\cdot 1 + 0\cdot 0) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1)$$

Isto é, $(a,b) = a + b\cdot i$. Portanto os pares ordenados estão representados na forma esperada. Também: $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$.

Se tomarmos o conjunto $A = \{a + b\cdot i,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$, podemos mostrar que há um isomorfismo entre A e $\mathbb{R}^2$. Isso significa que há uma aplicação bijetora de A em $\mathbb{R}^2$ que preserva a adição e a multiplicação. Vamos explicitar o que entendemos por “preservar” a adição e a multiplicação.

Consideremos então o diagrama mostrado na Figura 11, que ilustra uma aplicação entre dois conjuntos. Dizer que a aplicação f “preserva” a operação de adição, por exemplo, significa que se tomarmos um par (x, y) em A e fizermos a adição dos elementos desse par, obtendo $x + y$, obteremos o elemento correspondente a esta soma, em B, seja determinando $f\left(x+y\right)$, seja considerando-se o par $\left(f(x), f(y)\right)$ e aplicando-se a adição definida em B para calcular $f(x) + f(y)$.

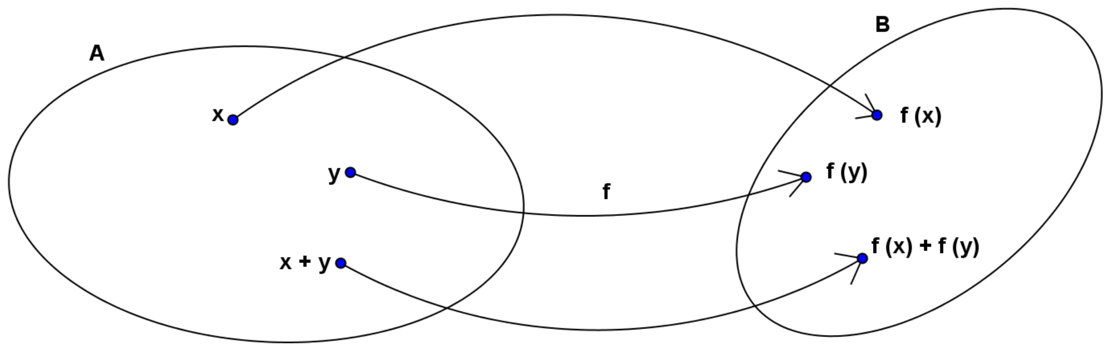


Figura 11. Aplicação de A em B, preservando a adição.

A definição a seguir formaliza essa ideia.

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma aplicação $f: A \to B$ é chamada isomorfismo de A em B se, $\forall x, y \in A$, tivermos

(i) f é bijetora

(ii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e

(iii) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$,

Vamos provar então que os corpos A e $\mathbb{R}^2$ são isomorfos.

Tomemos $f: A \to \mathbb{R}^2;\ x + yi \mapsto (x, y)$.

(i) f é bijetora. Provemos inicialmente que f é injetora. De fato, se tivermos $a+bi \in A$ e $c+di \in A$, tais que $f(a+bi) = (a,b)$ e $f(c+di) = (c,d)$, então $f(a+bi) = f(c+di)$ acarreta $(a,b) = (c,d)$. As propriedades das operações entre pares ordenados de números reais permitem os tratamentos:

$(a,b) = (c,d)$

$(a,b) + (-c,-d) = (c,d) + (-c,-d)$

$(a-c, b-d) = (c-c, d-d)$

$(a-c, b-d) = (0,0)$

Logo, $a-c=0$ e $b-d=0$, o que garante que $a=c$ e $b=d$. Portanto, $a+bi = c+di$ e f é injetora.

Provemos agora que f é sobrejetora. Seja (u,v) um elemento qualquer de $\mathbb{R}^2$. Basta tomarmos $a = u+vi$, para termos $f(a) = f(u+vi) = (u,v)$. Isso mostra que f é sobrejetora. Portanto, f é bijetora, pois é injetora e sobrejetora.

Sejam $x = a+bi$ e $y = c+di$. Temos:

(ii) $f(x+y) = f\left[(a+bi)+(c+di)\right] = f\left[(a+c)+(b+d)i\right] =$

$= (a+c, b+d) = (a,b) + (c,d) = f(x) + f(y)$

(iii) $f(x \cdot y) = f\left[(a+bi)\cdot(c+di)\right] = f\left[(ac-bd)+(ad+bc)i\right] = (\quad)$

$$= (ac - bd, ad + bc) = (a,b) \cdot (c,d) = f(x) \cdot f(y).$$

Portanto, podemos concluir que os corpos A e $\mathbb{R}^2$ são isomorfos. Uma vantagem disso é a possibilidade de tomar-se um problema que envolva números complexos, que esteja formulado utilizando o registro de representação de pares ordenados, convertê-lo para o registro de representação algébrico, resolver o problema nesse registro e depois converter a solução para o registro de representação de par ordenado.

É possível definirmos potenciação e radiciação dos números complexos no registro de representação algébrica ou no de pares ordenado. No entanto, na prática, à medida que o expoente da potência aumenta, o trabalho com os cálculos se tornam enfadonhos. Veremos mais adiante como o registro de representação trigonométrico será proveitoso para essas operações.

3.3 Registro de representação gráfico

A constituição do registro de representação por vetores, para os números complexos está apoiada no registro de representação por pares ordenados e nos possibilita assim a representação gráfica desses números. Vejamos como.

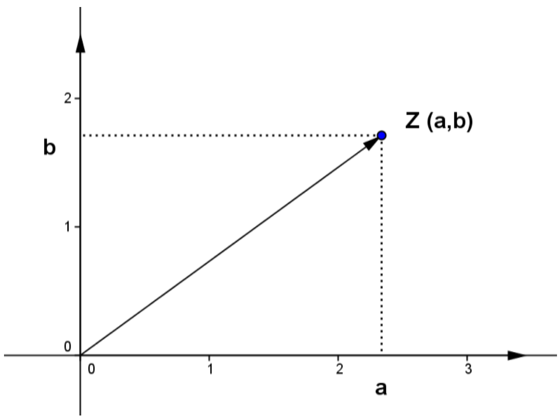


Figura 12. Representação gráfica de um número complexo.

Como foi apresentado, podemos associar cada número complexo escrito no registro algébrico $z = a + bi$ a um par ordenado $z = (a,b)$. Além disso, a Figura 12 mostra que podemos associar o par ordenado $z = (a,b)$ ao ponto Z, do plano cartesiano. Dessa forma, os pares ordenados representados no referencial cartesiano permitem a representação gráfica de um número complexo por meio de um vetor com origem na origem do sistema e extremidade no ponto Z, representante gráfico do par ordenado (a,b). Entretanto, faremos aqui uma ressalva. Vetor, por definição, é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Logo, qualquer vetor, com mesmo módulo, direção e sentido que outro vetor pode ser tomado como um representante dessa classe. O mesmo não ocorre com um vetor que representa um número complexo: se tomarmos outro vetor equipolente àquele, sua extremidade não corresponderá às mesmas coordenadas do número complexo representado pelo primeiro vetor. Porém utilizaremos o termo vetor para tal representante de um número complexo como sinônimo de "vetor com origem na origem do plano complexo".

O ponto Z, como mostra a Figura 12, também é chamado de ***imagem*** do par ordenado (a,b). O número complexo $z = a + bi$ é o ***afixo*** de Z. A função que faz corresponder a cada número complexo $z = a + bi$ a sua imagem, isto é, o ponto $Z = (a,b)$, é uma função bijetora. Quando isso ocorre, dizemos que tal correspondência é biunívoca, ou seja, a cada número complexo $z = a + bi$ corresponde um, e um só, ponto Z do plano complexo, de tal modo que $Z = (a,b)$.

Os números complexos representados na forma $(a,0)$ são representados como vetores contidos no eixo x e podem ser escritos também no registro algébrico por $a + 0i = a$. Portanto, são números reais e é por esse motivo que o eixo dos x é chamado de *eixo real*.

Os números complexos representados na forma $(0,b)$ são representados por vetores contidos no eixo y e por permitirem a escrita no registro algébrico como $0 + bi = bi$, são chamados de números *imaginários puros* e o eixo y é chamado de *eixo imaginário*.

Em resumo, mostramos até aqui a conversão do registro de representação algébrico de um número complexo $z = a + bi$ para o registro por pares ordenados de números reais (a,b); também mostramos que esses podem ser representados como pontos no plano cartesiano e, uma vez que a esses pontos associamos as extremidades de vetores que têm origem na origem do plano cartesiano, estamos efetuando uma conversão do registro de números complexos por pares ordenados para o registro gráfico por vetores. O plano cartesiano, dessa forma, passa a se chamar plano complexo.

No registro de representação gráfico para números complexos os tratamentos serão possíveis pela operação de adição e as respectivas propriedades, já conhecidas para vetores.

Com o registro de representação gráfico, vê-se que é possível dar uma interpretação gráfica para operações com os números complexos, qual seja, transformações gráficas com os vetores que representam tais números. Como visto no estudo histórico, a definição da adição de vetores foi formulada primeiramente por Caspar Wessel (DOMINGUES, 2009, p. 328): adicionam-se dois segmentos de reta unindo-os de tal maneira que o segundo comece onde o primeiro termina e então se traça um segmento de reta do primeiro ao último ponto dos segmentos unidos. Este segmento é a soma dos segmentos unidos.

A soma desses números no plano como mostra a figuras 13, é obtida aplicando-se a regra: translada-se um desses vetores, de modo que sua origem coincida com a extremidade do outro; o vetor que tem como origem a origem do primeiro vetor e como extremidade a extremidade do último, é o vetor que representa a soma dos dois vetores iniciais.

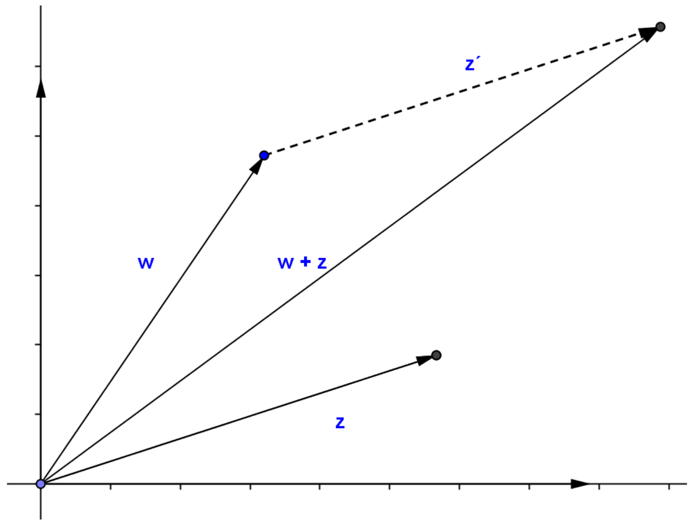


Figura 13. Adição no plano complexo: w + z.

Se decidíssemos transladar w em vez de z, o resultado, como mostra a Figura 14, seria o mesmo. Constatamos assim que a propriedade comutativa da adição vetorial decorre da própria definição de adição entre vetores.

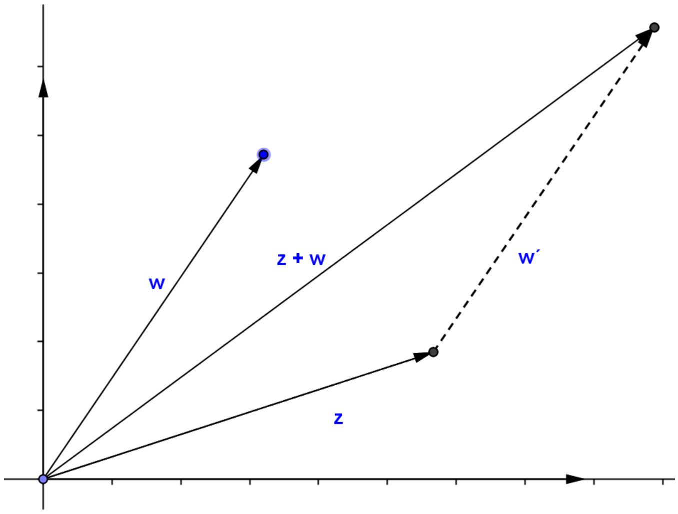


Figura 14. Adição no plano complexo: z + w.

Portanto, graficamente, isto é, no plano de Argand-Gauss, a soma dos complexos, como ilustra a Figura 15, pode ser obtida pela regra do paralelogramo, utilizada para a adição de vetores.

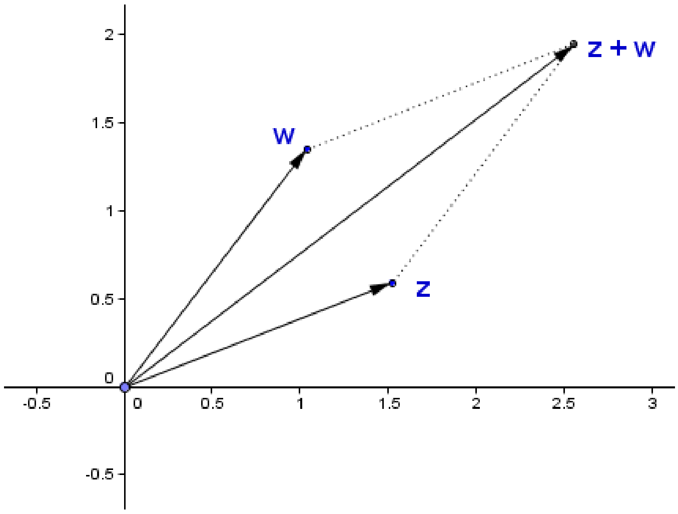


Figura 15. Adição de complexos pela regra do paralelogramo.

As propriedades da adição, no registro gráfico, são as mesmas já conhecidas para adição de vetores: associativa, comutativa, existência do elemento neutro (o vetor nulo, representante do par (0,0)) e existência do oposto. O vetor representante do oposto de um número complexo z é, como pode ser visto na Figura 16, o vetor de mesmo módulo, mesma direção e sentido contrário ao do vetor que representa z.

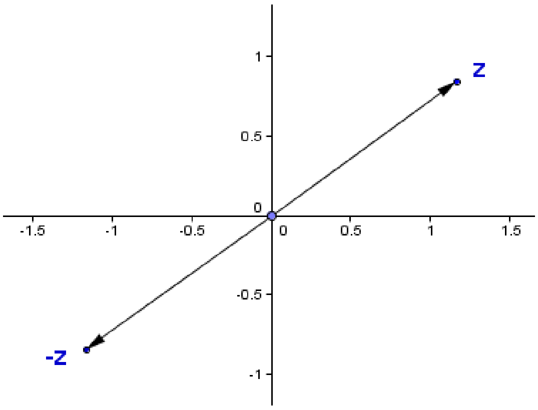


Figura 16. Oposto de um número complexo.

Assim, um número complexo e o seu oposto guardam entre si uma relação de simetria em relação à origem do plano complexo e é a propriedade da existência do elemento oposto que nos permite definir diferença entre dois números complexos. A diferença entre dois números complexos z e w, mostrada na Figura 17, é então representada graficamente, como a adição do vetor que representa z com o vetor que representa o oposto do vetor representante de w, isto é, $z-w=z+(-w)$.

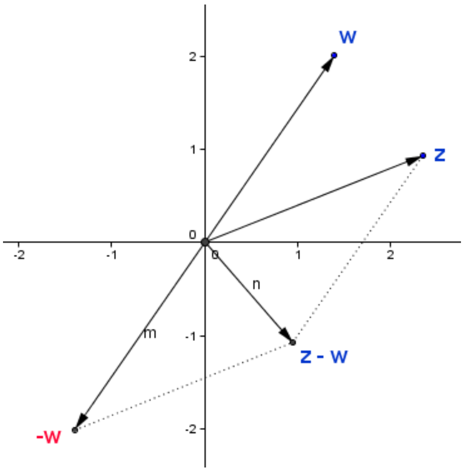


Figura 17. Registro gráfico de z - w.

Embora não se defina, no ensino médio, a multiplicação de vetores, não há impedimentos para a interpretação gráfica do comportamento dos vetores representantes de dois números complexos, quando esses são multiplicados. Para tanto, será necessário estipularmos duas componentes do vetor representante do número complexo. Se a imagem do complexo z for o ponto $Z \neq (0,0)$, então se define como **módulo** de z o módulo do vetor que o representa, isto é, como ilustrado na Figura 18, $|z| = \left\|\overrightarrow{OZ}\right\| = \rho$.

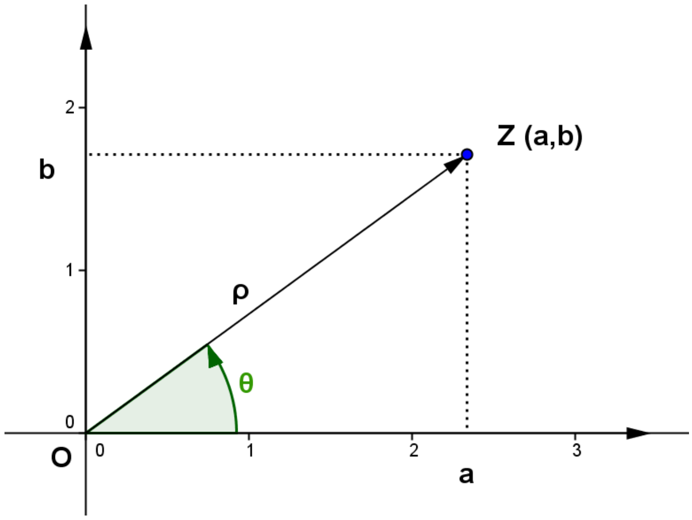


Figura 18. Módulo e argumento de um complexo.

O vetor que representa o número complexo não nulo z forma um ângulo θ com o semi-eixo positivo dos x. Porém há infinitos ângulos que z forma com o semi-eixo positivo dos x, se considerarmos os ângulos que diferem de θ por um múltiplo de 2π. Definiremos como *argumento de* z o ângulo que z forma com o semi-eixo positivo dos x e que pertence ao intervalo $[-\pi,\pi]$. Esse argumento será chamado de *argumento principal de* x e será indicado por $\text{Arg}\, z$. Então, na Figura 18, temos que $\text{Arg}\, z = \theta$.

Assim, para interpretar as transformações gráficas que ocorrem com os vetores que representam números complexos, quando esses são multiplicados, começaremos analisando o caso em que os vetores estejam contidos no eixo x, ou seja, os números complexos são reais.

Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ dois vetores representantes de dois números reais b e c, respectivamente. Se um dos fatores é zero, o produto é igual a zero. Neste caso, o vetor que representa o produto degenera-se em um ponto. Suponhamos então que nenhum dos fatores é zero. Sendo $\overrightarrow{AD}$ o vetor que representa o produto dos dois vetores dados, o módulo de $\overrightarrow{AD}$ será igual ao produto dos módulos, isto é, $|b|\cdot|c|$. $\overrightarrow{AD}$ terá o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, no caso em que $c>0$ e terá sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$, no caso em que $c<0$. Convertendo para o registro gráfico, o sentido de $\overrightarrow{AD}$ será igual ao de $\overrightarrow{AB}$ quando o argumento de c for igual a 0^o e será contrário ao de $\overrightarrow{AB}$ quando o argumento de c for igual a 180^o. A Figura 19 ilustra o caso em que $b=2$ e $c=-1,5$.

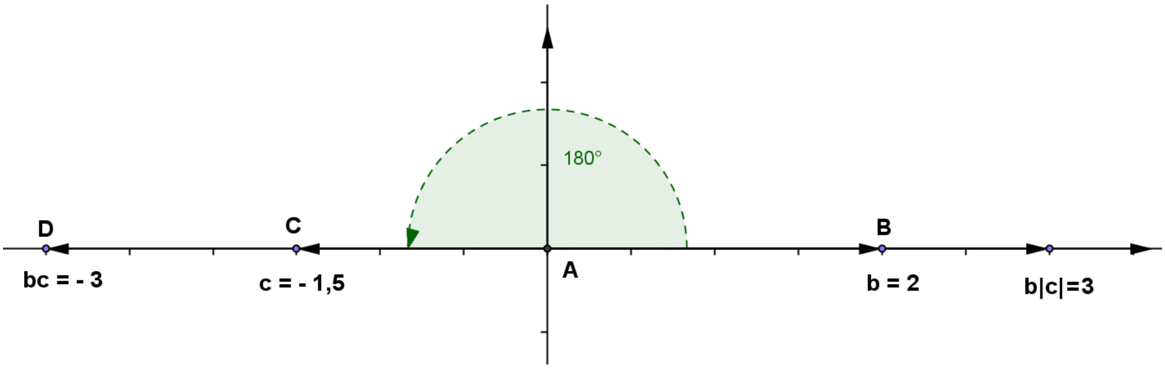


Figura 19. Multiplicação de números reais: aspecto gráfico.

Em resumo: para multiplicarmos **graficamente** os números reais representados pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, devemos multiplicar $\overrightarrow{AB}$ por $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$, isto é, $|c|$, mantendo o sentido de $\overrightarrow{AB}$. Em seguida devemos **girar** $\overrightarrow{AB}$ segundo um ângulo igual ao argumento de c (isto é, 0^o, se $c>0$; ou 180^o, se $c<0$) em torno de A. **Em suma, ocorre uma homotetia de razão igual ao módulo de um dos números e uma rotação em torno da origem, segundo um ângulo igual ao argumento do vetor que representa o número.**

O plano complexo é como dissemos antes uma extensão da reta real. Veremos que, tal como esperado, a regra para a multiplicação que acabamos de ver, no eixo real, também é válida no plano complexo.

Então vejamos o caso geral, isto é, o comportamento gráfico de vetores que representam números complexos, não necessariamente reais, quando estes são multiplicados.

Consideremos então, como mostra a Figura 20, dois vetores, representantes de dois números complexos z e w.

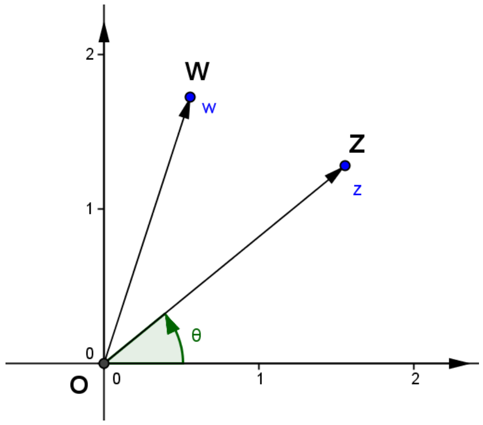


Figura 20. Dois vetores representando números complexos.

Para multiplicarmos os números complexos z e w, devemos realizar transformações com os vetores que os representam, isto é, $\overrightarrow{OZ}$ e $\overrightarrow{OW}$. Para isto, devemos proceder exatamente do mesmo modo como fizemos no caso dos dois números reais, analisado anteriormente: devemos tomar $\overrightarrow{OW}$ e multiplicá-lo por $\left\|\overrightarrow{OZ}\right\|$ (homotetia) e, em seguida, girar o vetor resultante em torno do ponto O, segundo um ângulo igual ao argumento de $\overrightarrow{OZ}$ (rotação).

Essa é exatamente a mesma regra inferida anteriormente e a Figura 21 exibe o resultado de sua aplicação.

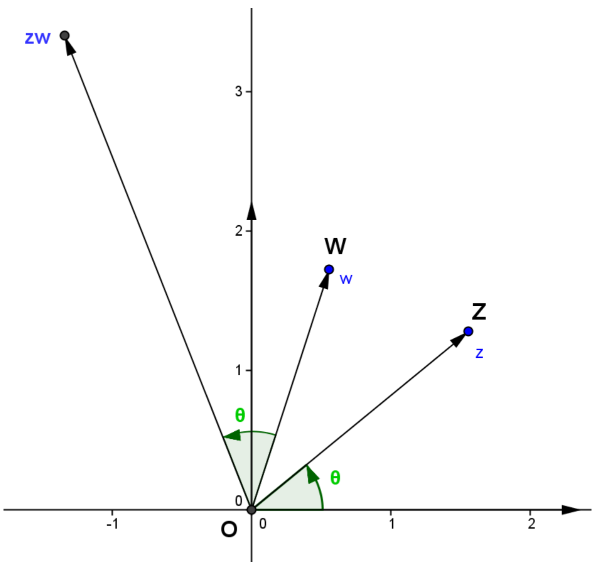


Figura 21. Representação gráfica da multiplicação de complexos.

De acordo com Lima (2001, p.375) a conversão do registro algébrico para o registro gráfico não é muito contemplada nos livros didáticos (LIMA, 2001, p. 375).

No entanto, a conversão do registro de representação algébrico para o registro de representação gráfico, dos números complexos, possibilita a verificação da validade das propriedades relativas às operações de adição e multiplicação desses números. Por exemplo, demonstremos a validade da propriedade distributiva: $(z+w)\cdot u = z\cdot u + w\cdot u$.

Note que, na Figura 25, o vetor $\overrightarrow{AB'}$ é um representante da soma dos vetores que representam z e w.

Ainda pode-se ver na Figura 25, que os lados do triângulo ABB´ foram multiplicados por $|u|$, obtendo-se desse modo o triângulo APQ, semelhante ao triângulo ABB´. Assim sendo, os lados do triângulo APQ são formados por vetores, obtidos a partir dos vetores z, w e $z+w$ multiplicados por um fator igual a $|u|$.

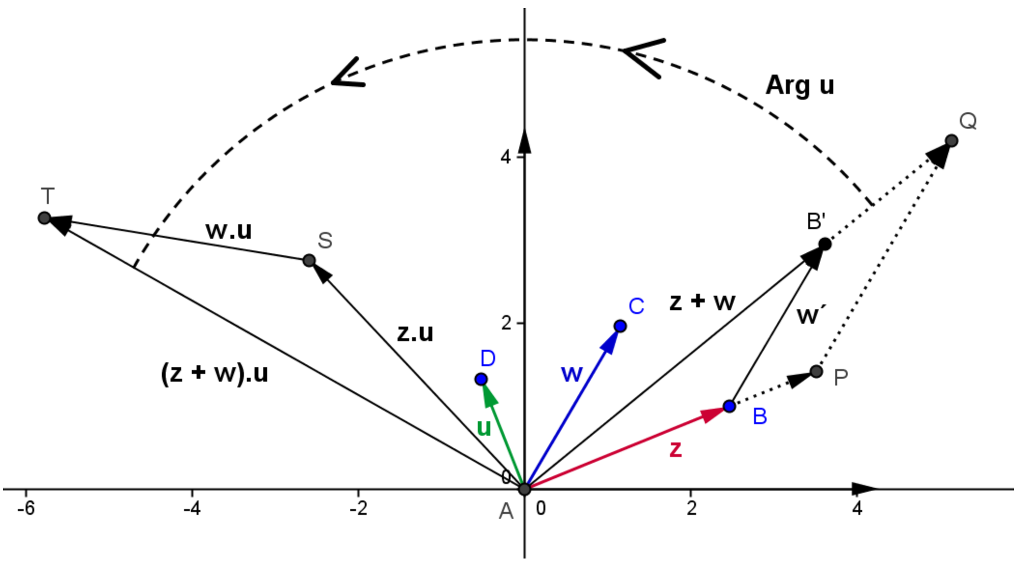


Figura 22. Dedução gráfica da propriedade distributiva.

Girando o triângulo APQ em torno de A, segundo um ângulo igual ao argumento de u, determinamos o triângulo AST. Pela definição de multiplicação tomada na página 78, os lados do triângulo AST são os vetores representantes de

$z \cdot u$, $w \cdot u$ e $(z+w) \cdot u$. Pela regra da adição de vetores, aplicada a esse mesmo triângulo, temos que $(z+w) \cdot u = z \cdot u + w \cdot u$, como queríamos demonstrar.

A conversão para o registro de representação gráfico abre assim as portas para a possibilidade de se verificarem, graficamente, as propriedades relativas às operações de adição e multiplicação com os números complexos, corroborando, apenas com os tratamentos gráficos correspondentes, o fato de que o conjunto desses números constitui um corpo comutativo. Isto, por sua vez, legitima os respectivos tratamentos que são efetuados nos registros algébricos. A respeito de visão e visualização, Duval assegura que

> A percepção visual precisa de exploração por meio de movimentos físicos, porque ela nunca dá uma apreensão completa do objeto. Ao contrário, a visualização pode dar pelo menos uma apreensão completa de qualquer organização de relações. Nós podemos dizer "pode dar" e "não pode dar" porque visualização requer um longo treinamento [...] Entretanto, o que a visualização apreende pode ser o início de uma série de transformações, o que faz o seu poder inventivo. (DUVAL, 1999, p.7, tradução nossa[15]).

Acrescenta ainda esse autor que, em matemática, a visualização não funciona como representações icônicas: olhá-las não é suficiente para ver, isto é, perceber e entender o que é realmente representado. Segundo ele, as figuras geométricas ou gráficos cartesianos não são diretamente disponíveis como representações icônicas podem ser. E seu aprendizado não pode ser reduzir ao treino de construí-las. Em suma, visualização em matemática é necessária porque exibe organização de relações, mas não é primitiva, porque não é mera percepção visual.

Portanto, diferentemente das abordagens que têm sido feitas no Ensino Médio, em que se prioriza o registro algébrico dos números complexos, concluímos que o vínculo entre este registro e o registro de representação gráfico por meio de vetores é necessário e constitui um caminho para a apreensão dos complexos.

Mostraremos agora, como complemento ao que foi visto nos tópicos 2.2.1 e 2.2.2, às páginas 60-64, como é possível visualizar os resultados de algumas

---

[15] Visual perception needs exploration through physical movements because it never gives a complete apprehension of any organization of relations. We say "can get" and "cannot get" because visualization requires a long training […] However, what visualization apprehends can be the start of a series of transformations, that makes its inventive power.

operações com os números complexos no plano de Argand-Gauss. Naquele ponto havíamos visto que, graficamente, a multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária i era equivalente a girar o vetor que representa o número segundo um ângulo de 90^o em torno da origem do plano complexo. Acabamos de ver que a multiplicação de números inteiros, por sua vez, pode ser interpretada por meio de homotetias no plano. Digamos que desejamos multiplicar os números complexos $-2+3i$ e $2+2i$, representados no plano complexo como mostra a Figura 23. Então através de tratamentos algébricos podemos escrever:

$$(-2+3i)\cdot(2+2i) = -2(2+2i)+3i(2+2i)$$

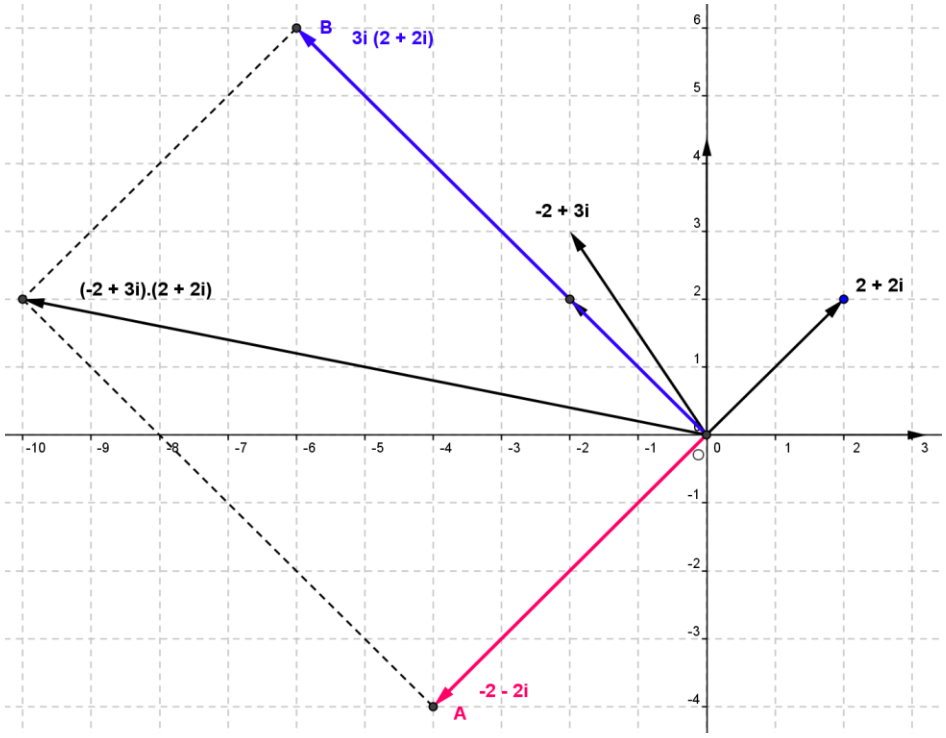


Figura 23. Produto de complexos, por transformações.

Devemos primeiramente marcar no plano cartesiano o vetor correspondente a $2+2i$ e depois multiplicá-lo por -2, o que equivale a obter um vetor com o dobro de seu módulo, mesma direção e sentido contrário ao de $2+2i$. Tal vetor está representado na Figura 23 como $\overrightarrow{OA}$. A parcela $3i(2+2i)$ nos diz que devemos multiplicar o vetor que representa $2+2i$ por i, o equivale a girá-lo segundo um ângulo de 90^o em torno da origem do plano complexo, no sentido anti-horário e depois multiplicar o vetor obtido por 3, o que resulta no vetor $\overrightarrow{OB}$. A adição dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, pela regra do paralelogramo, nos fornece o resultado procurado.

A divisão de dois números complexos w e $z\,(z \neq 0)$ é definida como a multiplicação de w pelo inverso de z. É de se esperar, como indicado na Figura 24, que tal operação comporte-se como inversa da operação de multiplicação. De fato. Seja $r = \dfrac{w}{z}$, então $|r| = \left|\dfrac{w}{z}\right|$. Ou ainda, $|r| = \dfrac{|w|}{|z|}$. Assim, vemos que o módulo de r é obtido dividindo-se o módulo de w pelo módulo de z.

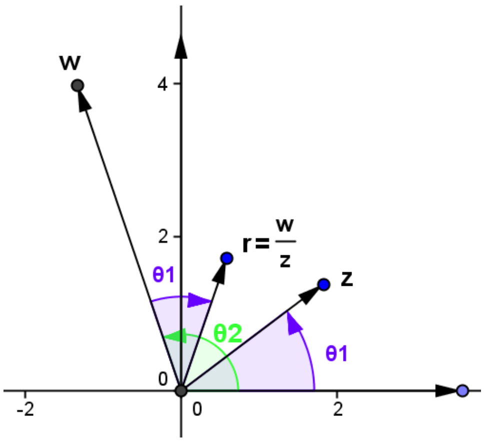


Figura 24. Divisão de números complexos.

Se a multiplicação de z por r implica em girar r segundo um ângulo igual ao argumento de z em torno da origem, no sentido anti-horário, obtendo-se w, então o argumento de r, como pode ser visto na Figura 24, é a diferença entre os argumentos de w e z. Resumo: para se efetuar a divisão de w por z, deve-se, graficamente, dividir o módulo de w pelo módulo de z e girar o vetor obtido segundo um ângulo igual ao argumento de z, em torno da origem, no sentido horário. Isto é, a operação de divisão comporta-se graficamente como inversa da multiplicação.

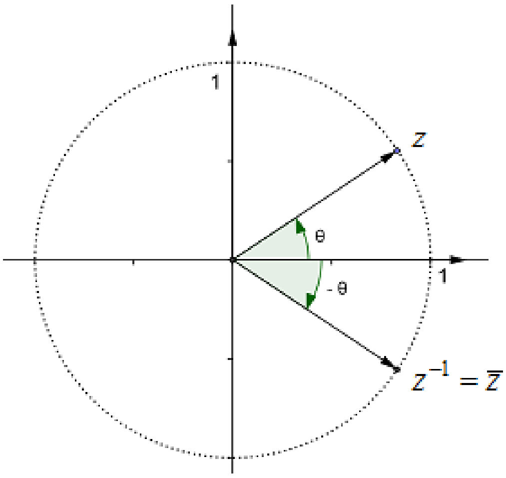


Figura 25. Se |z| = 1, então o inverso de z é o seu conjugado.

Uma propriedade que pode ser verificada graficamente, na Figura 25, é que se um número complexo tiver módulo unitário, então o cálculo de seu inverso é imediato, porque o seu inverso é igual ao seu conjugado. Em termos simbólicos: se z tem módulo unitário, então $z^{-1} = \overline{z}$. Isso justifica-se pelo fato de que $z^{-1} = \frac{1}{z}$. Portanto, se estamos dividindo 1 por z, o vetor que representa o 1 irá rotacionar de um ângulo igual ao argumento de z, no sentido horário e seu módulo não sofrerá alteração uma vez que, tendo z módulo unitário, o quociente do módulo de 1 pelo módulo de z resultará igual a 1.

Observamos até aqui os seguintes registros de representação para os números complexos:

Registro de representação algébrico $x + yi$.

Registro de representação por pares ordenados de números reais (a,b).

Registro de representação gráfico, por meio de vetores com origem na origem do plano cartesiano e extremidade na imagem Z do par ordenado (a,b) de números reais.

Registro gráfico por meio de vetores, em que o módulo de um número complexo não nulo z, associado à sua imagem Z pode ser interpretado como a distância OZ e seu argumento como o ângulo entre o semi-eixo positivo dos x e $\overrightarrow{OZ}$. Doravante nos permitiremos confundir o número complexo z com o vetor que o representa. Dessa forma, simplificando a linguagem escrita, poderemos escrever simplesmente “girar z” em vez de “girar o vetor representante do número complexo z”.

Além disso, há também, a escrita “intrínseca” ou “simbólica”: z, z', w,... que simplifica os cálculos algébricos, quando não são necessárias as partes imaginárias nem reais, nem o módulo nem o argumento do número complexo, que podem ser retomados em outro momento.

No entanto, falta um registro de representação que torne a potenciação e a radiciação mais simples, pois os registros algébricos têm um alto custo de operações, dependendo do expoente da potência, ou do índice da raiz. O registro de representação necessário é o trigonométrico e é o que estudaremos a seguir. Faremos no próximo tópico a conversão do registro gráfico para o registro trigonométrico, e vice-versa: os resultados obtidos por meio da trigonometria serão interpretados no plano complexo. Isso facilitará tanto a potenciação quanto a radiciação com números complexos.

3.4 Registro de representação trigonométrico

A importância do *registro trigonométrico de um número complexo* está no fato de facilitar, como veremos adiante, não só a potenciação e a radiciação como também permitir visualizações das propriedades gráficas relativas à multiplicação, divisão, potenciação e radiciação desses números, de modo mais simples do que seria se dispuséssemos apenas dos registros de representação algébrico ou por pares ordenados, ou mesmo gráficos. No que se segue, faremos a conversão do registro de representação gráfico para o registro de representação trigonométrico.

Para constituir esse registro, comecemos considerando o vetor $\overrightarrow{OZ}$, mostrado na Figura 26, representante do par ordenado (a,b). Como já provamos que $\mathbb{R}^2$ e o conjunto $A = \{a+bi,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$ são isomorfos, podemos dizer também que o vetor $\overrightarrow{OZ}$ representa o número complexo $z = a+bi$.

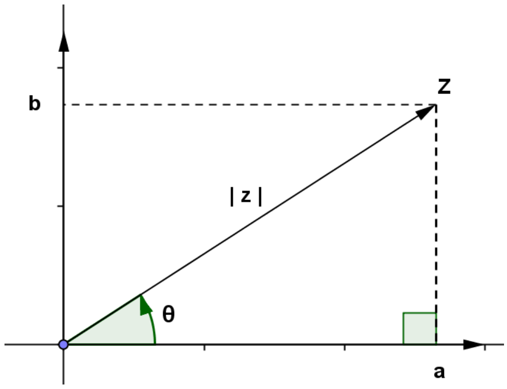


Figura 26. Diagrama para dedução da forma trigonométrica de complexos.

Então, pela Figura 26, temos $\dfrac{a}{|z|} = cos\theta$ e $\dfrac{b}{|z|} = sen\theta$. Portanto, $a = |z|cos\theta$ e $b = |z|sen\theta$, de modo que podemos proceder à seguinte conversão:

$z = a + bi$ = $|z|cos\theta$ + $|z|sen\theta i$ = $|z|(cos\theta + isen\theta)$.

Portanto, $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$ é o denominado registro de representação trigonométrico para números complexos.

O custo operacional para a adição, no registro trigonométrico, é mais alto do que para os demais registros. Por exemplo, para adicionarmos dois números, digamos $z = |z|(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $w = |w|(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, mostrados na Figura 27, devemos calcular o módulo e o argumento do vetor resultante. Vejamos.

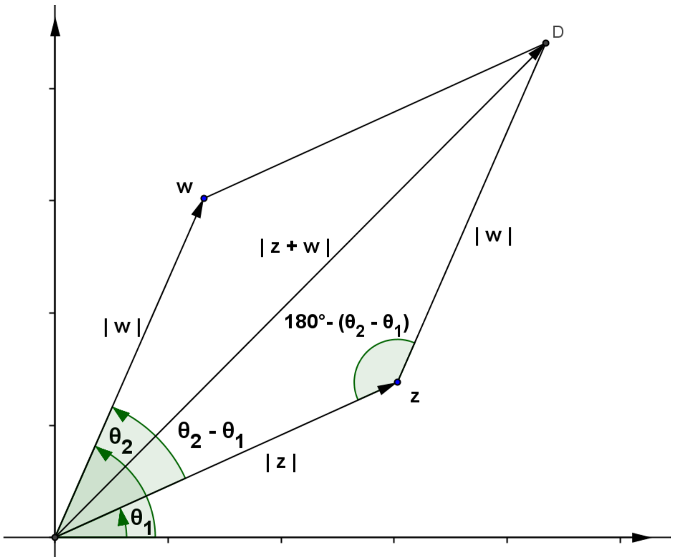


Figura 27. Soma de complexos no registro trigonométrico.

Pelo teorema dos cossenos, aplicado ao triângulo obtido no paralelogramo da Figura 27, o módulo do vetor resultante da soma dos números $z = |z|(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $w = |w|(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, é dado por

$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2|z|\cdot|w|cos\left[180^o - (\theta_2 - \theta_1)\right]$, ou seja,

$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\cdot|w|cos(\theta_2 - \theta_1)$, ou ainda

$|z+w| = \sqrt{|z|^2 + |w|^2 + 2|z|\cdot|w|cos(\theta_2 - \theta_1)}$

O cálculo do argumento do número complexo resultante da adição de z e w é também trabalhoso. Se γ fosse esse argumento, então aplicando o teorema dos senos ao mesmo triângulo em que aplicamos o teorema dos cossenos, teríamos

$\gamma = \dfrac{|w|\theta_2 - |z|(\theta_2 - \theta_1)}{|w|}$.

Como vemos, o registro trigonométrico apresenta limitações para a operação de adição, embora seja possível verificar a validade das propriedades de associatividade, comutatividade etc. Entretanto, são as multiplicações, divisões, potenciações e radiciações que, nesse registro, nos proporcionarão outros resultados, com menos custos.

Se $z = |z|(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $w = |w|(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, então a operação de multiplicação de z por w é expressa por $z\cdot w = |z|\cdot|w|\left(cos(\theta_1+\theta_2) + i\cdot sen(\theta_1+\theta_2)\right)$, isto é, *o módulo do produto de dois números complexos é o produto dos módulos e o argumento do produto é a soma dos argumentos*. Isso é justificado por trigonometria, como segue:

$$z.w = |z|(cos\theta_1 + isen\theta_1)|w|(cos\theta_2 + isen\theta_2)$$
$$z.w = |z||w|(cos\theta_1 + isen\theta_1)(cos\theta_2 + isen\theta_2)$$
$$z.w = |z||w|(cos\theta_1 cos\theta_2 + i^2 sen\theta_1 sen\theta_2 + isen\theta_1 cos\theta_2 + isen\theta_2 cos\theta_1)$$
$$z.w = |z||w|(cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2 + i(sen\theta_1 cos\theta_2 + sen\theta_2 cos\theta_1))$$
$$z.w = |z||w|\left[cos(\theta_1+\theta_2) + isen(\theta_1+\theta_2)\right]$$

A interpretação geométrica desse resultado coincide com o que foi verificado quando do estudo do registro gráfico: se os números complexos z e w são representados pelos vetores $\overrightarrow{OZ}$ e $\overrightarrow{OW}$, então o produto $p = z \cdot w$ será representado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$, que pode ser obtido com duas transformações geométricas. Primeira: rotaciona-se $\overrightarrow{OW}$ em torno da origem por ângulo igual a Arg z. Segunda: multiplica-se o vetor obtido pelo módulo de z o que, para recordar e ilustrar, é mostrado na Figura 28. Multiplicar $\overrightarrow{OW}$ pelo módulo de z e rotacionar o vetor obtido, em torno da origem, por um ângulo igual a Arg z, conduz ao mesmo resultado, o que equivale, graficamente, a dedução da propriedade comutativa da multiplicação. Em síntese: o resultado obtido quando efetuamos a multiplicação no registro de representação trigonométrico endossa o que foi visto no estudo do registro de representação gráfico para os números complexos.

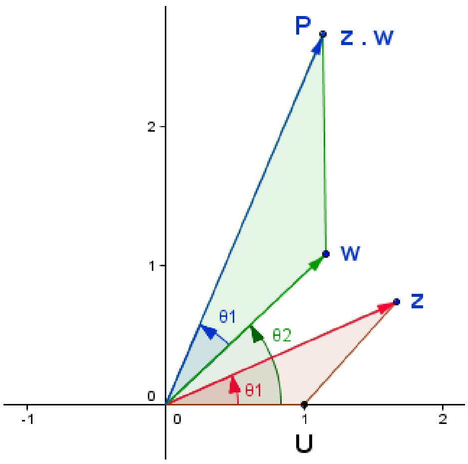


Figura 28. Multiplicação de números complexos.

Notemos que PÔW = ZÔU = θ_1 e que $\frac{|z \cdot w|}{|z|} = \frac{|w|}{1}$ nos permite afirmar, pelo caso lado – ângulo – lado (L.A.L.), que os triângulos OUZ e OWP são semelhantes. Portanto, a obtenção do produto $z.w$, a partir da localização de z e w poderia ser realizada, graficamente, dispondo-se apenas de régua e compasso, para o transporte dos ângulos do triângulo OUZ para se obter o triângulo OWP.

Há alguns casos particulares importantes e que devem ser considerados, pois implicam em conversões entre registro algébrico e registro gráfico. Vejamos.

1) O ponto representante de z é real não nulo. Nesse caso, a imagem de z pertence ao eixo real e, consequentemente, o argumento de z é 0 ou π, conforme z seja positivo ou negativo, respectivamente. Então, a conversão para o registro gráfico, como mostra a Figura 29, evidencia que, se rotacionamos $\overrightarrow{OW}$ segundo um ângulo igual ao Arg z, em torno da origem, somos levados a concluir que P, a imagem de $z \cdot w$, pertence à reta que contém $\overrightarrow{OW}$.

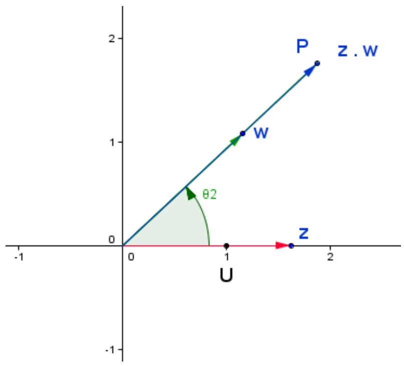


Figura 29. Produto de complexos, sendo um real não nulo.

2) Um dos números complexos, digamos z, tem módulo unitário e não é real. Então z é da forma $z = cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1$, $\theta_1 \neq k\pi$, k sendo um inteiro. Logo, como mostra a Figura 30, a multiplicação de w por z resulta apenas em uma rotação do vetor que o representa, isto é, $\overrightarrow{OW}$, segundo um ângulo θ_1, em torno da origem, no sentido anti-horário.

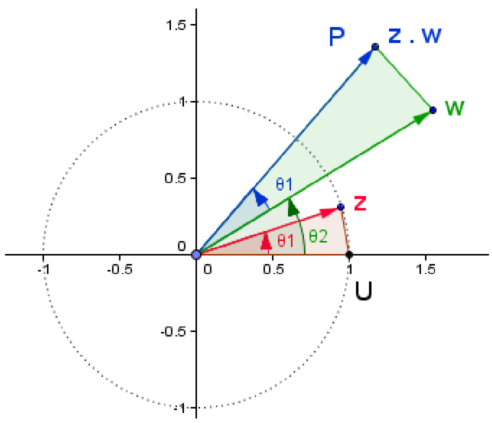


Figura 30. Multiplicação de um complexo por outro, de módulo unitário.

3) O número z é i ou $-i$. Sendo assim, z é unitário e tem argumento igual $\frac{\pi}{2}$.

Isso significa que a multiplicação de w por z resultará em uma rotação do vetor que representa w, isto é, $\overrightarrow{OW}$, segundo um ângulo de 90^o em torno da origem, no sentido anti-horário, se $z = i$, o que é ilustrado pela Figura 31. Se $z = -i$, a rotação será de 90°, no sentido horário.

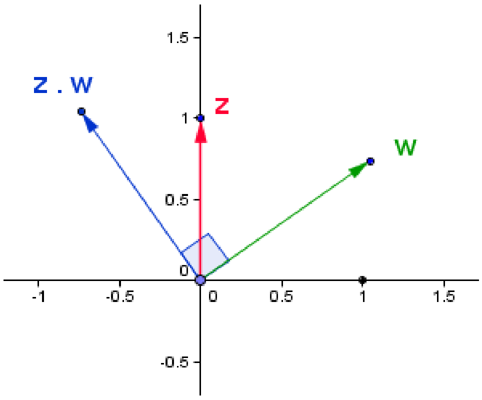


Figura 31. Multiplicação de um complexo por i.

Pode-se demonstrar que a operação de multiplicação de números complexos, no registro trigonométrico goza das propriedades comutativa, associativa, existência do elemento neutro e existência do elemento inverso. Enfatizamos mais uma vez que são essas propriedades que permitem os tratamentos dentro desse registro.

Passamos agora a analisar a divisão de complexos, na representação trigonométrica e faremos as interpretações gráficas correspondentes.

Se $z = |z|(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $w = |w|(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, $z \neq 0$, então o *quociente* de w por z é expresso por

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \cdot \left(cos(\theta_2 - \theta_1) + i \cdot sen(\theta_2 - \theta_1)\right) .$$

Portanto, o módulo do quociente entre dois números complexos é igual ao quociente entre os módulos, e o argumento é dado pela diferença entre os argumentos considerados. Para provar que

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \cdot \left(cos(\theta_2 - \theta_1) + i \cdot sen(\theta_2 - \theta_1) \right),$$

basta provarmos que $\frac{|w|}{|z|} \cdot \left(cos(\theta_2 - \theta_1) + i \cdot sen(\theta_2 - \theta_1) \right)$ multiplicado por z é igual a w. Como foi visto, multiplicar dois complexos, na representação trigonométrica equivale a multiplicar os seus módulos e somar seus argumentos. Portanto, $\frac{|w|}{|z|} \cdot \left(cos(\theta_2 - \theta_1) + i \cdot sen(\theta_2 - \theta_1) \right) \cdot z$ é igual a

$\frac{|w|}{|z|} \cdot \left(cos(\theta_2 - \theta_1) + i \cdot sen(\theta_2 - \theta_1) \right) \cdot |z| (cos\theta_1 + isen\theta_1)$, que é o mesmo que

$\frac{|w|}{|z|} \cdot |z| [cos(\theta_2 - \theta_1 + \theta_1) + i \cdot sen(\theta_2 - \theta_1 + \theta_1)]$, que resulta em

$|w| [cos(\theta_2) + i \cdot sen(\theta_2)]$, que é igual a w, como queríamos demonstrar.

No plano de Argand-Gauss sejam $\overrightarrow{OZ}$, $\overrightarrow{OW}$, e $\overrightarrow{OQ}$ os vetores representantes de z, w e $\frac{w}{z}$, respectivamente. A interpretação geométrica para a divisão de dois números complexos (veja Figura 32) corresponde, geometricamente, ao que já foi estudado no registro de representação gráfico: rotacionar $\overrightarrow{OW}$ de um ângulo igual a θ_1, no sentido horário, em torno da origem e depois dividir o módulo do vetor obtido por um valor igual ao módulo de z.

Notamos também, na Figura 32, que o ponto Q é o terceiro vértice do triângulo OWQ, semelhante ao triângulo OZU, pelo caso L.A.L.

Isso permitiria, tal como no caso da multiplicação, a determinação da imagem de $\frac{w}{z}$, se dispuséssemos apenas de régua e compasso.

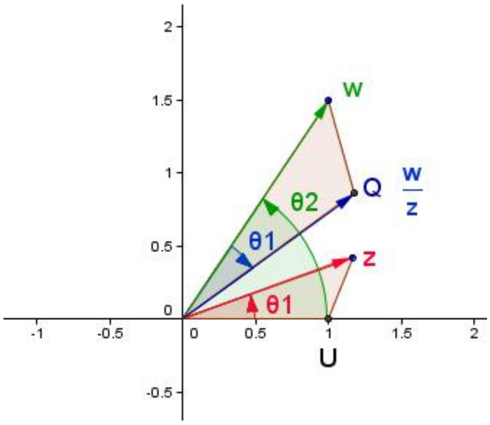


Figura 32. Divisão de números complexos.

Se a multiplicação do complexo z pelo complexo w rotaciona w no sentido anti-horário, segundo o argumento de z, a divisão de w por z faz exatamente o contrário, isto é, rotaciona w no sentido horário, segundo o argumento de z.

Acreditamos, portanto, que a exploração dessas representações gráficas pode levar o aprendiz a constatar que a operação de divisão é a operação inversa da multiplicação, no conjunto dos números complexos: a divisão "desfaz", graficamente, o que a multiplicação faz. A esse respeito, o comentário de Bongiovanni nos parece pertinente:

> Em geral, no ensino as atividades matemáticas só levam em conta tratamentos. Duval sustenta que numa fase de aprendizagem a conversão desempenha um papel essencial na apreensão do conceito e que as conversões são mudanças de registro mais eficazes para aquisição de um conceito. (BONGIOVANNI, s/d, notas de aula, p. 21).

Uma vez que a multiplicação e a divisão foram exploradas, surge naturalmente a pergunta sobre a potenciação e a radiciação no conjunto dos números complexos. É o que abordaremos a seguir.

Como foi visto, a multiplicação de dois números complexos tem como resultado outro número complexo, cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores. A enésima potência inteira de um número complexo z nada mais é do que o produto de n fatores iguais a z. Se aplicarmos esta definição e o resultado para a multiplicação, teremos:

$$z = |z|(cos\theta + isen\theta)$$

$$z^2 = |z|(cos\theta + isen\theta)\cdot|z|(cos\theta + isen\theta) = |z|^2\left[\cos(2\theta) + isen(2\theta)\right]$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = |z|^2 \left[\cos(2\theta) + isen(2\theta)\right] \cdot |z|(cos\theta + isen\theta) = |z|^3 \left[\cos(3\theta) + isen(3\theta)\right] \ldots$$

$$z^n = |z|^n \left[\cos(n\theta) + isen(n\theta)\right]$$

Esse é apenas um modo de se inferir a fórmula, que demanda uma demonstração que pode ser feita por indução sobre n.

Segundo Eves (2004, p.467-468), foi Abraham De Moivre quem contribuiu nessa área, primeiro com a fórmula que exprime a potência de um complexo na forma trigonométrica, isto é, sendo n inteiro, tem-se

$$\left[r \cdot \left(cos\theta + i \cdot sen\theta\right)\right]^n = r^n \cdot \left[cos\left(n\theta\right) + i \cdot sen\left(n\theta\right)\right]$$

conhecida como primeira fórmula de De Moivre. A fórmula é trivial para n igual a zero ou n igual a 1. Para n inteiro e maior que 1, a fórmula decorre da aplicação reiterada da multiplicação entre complexos.

Para n inteiro e negativo, isto é, $n = -m$, com m inteiro e positivo, temos:

$$\left[r \cdot \left(cos\theta + i \cdot sen\theta\right)\right]^n = \left[r \cdot \left(cos\theta + i \cdot sen\theta\right)\right]^{-m} = \frac{1}{\left[r \cdot \left(cos\theta + i \cdot sen\theta\right)\right]^m} =$$

$$= \frac{1 \cdot cos 0 + i \cdot sen 0}{r^m \left[cos\left(m\theta\right) + i \cdot sen\left(m\theta\right)\right]} = \frac{1}{r^m} \cdot \left[cos\left(0 - m\theta\right) + i \cdot sen\left(0 - m\theta\right)\right] =$$

$$= r^{-m} \cdot \left[cos\left(-m\theta\right) + i \cdot sen\left(-m\theta\right)\right] = r^n \cdot \left[cos\left(n\theta\right) + i \cdot sen\left(n\theta\right)\right].$$

Em cursos mais avançados pode-se ainda provar que a fórmula é válida para expoentes complexos.·.

A Figura 33 exibe as imagens de z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6 e z^7, respectivamente. A dissertação de Fabiani (1998, p.154-156), aborda com os alunos a exploração das potências de um número complexo, com o uso de calculadora gráfica. Porém, parece que não obteve sucesso na atividade, pois como a autora relata (ibidem, p.154), “Muitos (alunos) desistiram de pensar e reclamavam da dificuldade em resolver o problema. Percebi que houve pouco rendimento e que muitos alunos não aceitaram esse trabalho.”.

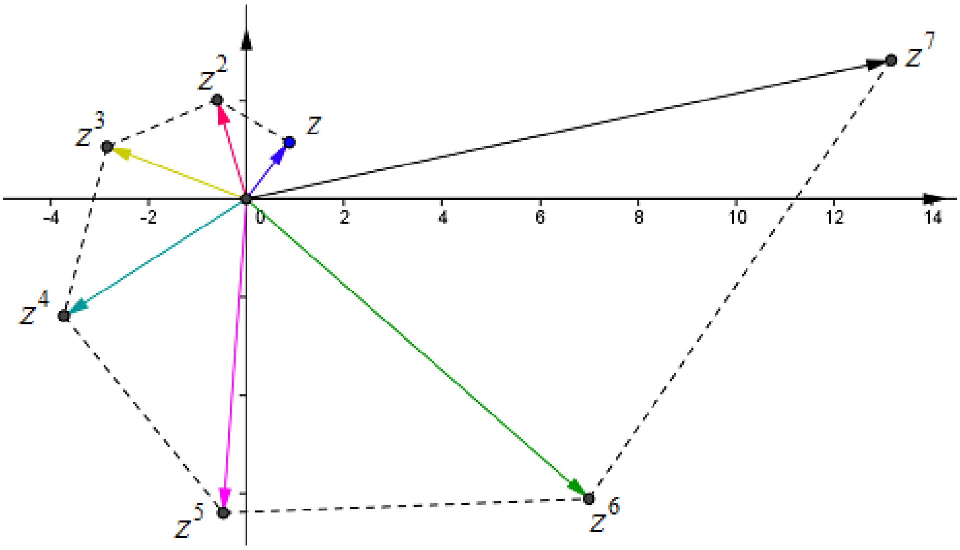


Figura 33. Potências inteiras de um número complexo.

Lendo o trabalho da pesquisadora, percebemos que os recursos tecnológicos de que dispunha eram mais limitados do que os de hoje, o que pode ter sido o motivo do seu insucesso nesta atividade. As imagens que constam em sua dissertação, por exemplo, mostram imagens - obtidas em calculadoras gráficas - em que as linhas eram grossas e serrilhadas e que demandavam o domínio de certas sintaxes para se obter as imagens desejadas. Por outro lado, nos pareceu que a atividade proposta demandava muitos cálculos antes de se passar a visualização de onde se localizavam as imagens das potências do dado número complexo.

Passaremos a estudar agora a radiciação de números complexos, partindo de um exemplo e depois o generalizando.

Abordaremos agora a operação de radiciação no conjunto dos números complexos. Façamos primeiramente um exemplo particular, como por exemplo, o de se extrair as raízes sextas do número complexo $w = 64i$. Nesse caso, utilizando a representação trigonométrica, temos que

$$64i = 64\left(cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2}\right).$$

Determinar a raiz sexta de w significa determinar um complexo $z = s\left(cos\alpha + isen\alpha\right)$, tal que $z^6 = 64i$.

Pela fórmula de De Moivre, teremos: $z^6 = s^6(cos6\alpha + isen6\alpha)$.

$z^6 = 64i$ acarreta $s^6(cos6\alpha + isen6\alpha) = 64\left(cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2}\right)$.

Dois números complexos em suas representações trigonométricas são iguais se, e somente se, seus módulos e argumentos forem iguais. Assim, temos;

$s^6 = 64 \Leftrightarrow s = 2$ e

$6\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\frac{\pi}{2}}{6} + \frac{2k\pi}{6}$, com k inteiro.

Vemos que todas as raízes sextas de w têm o mesmo módulo: 2.

Tomando valores inteiros consecutivos para k, vemos que os argumentos, α, das raízes crescem em progressão aritmética de razão igual a $\frac{2\pi}{6}$.

Para k = 0, temos $z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{12} + isen\frac{\pi}{12}\right)$

Para $k = 1$, temos $z_1 = 2\left(cos\frac{5\pi}{12} + isen\frac{5\pi}{12}\right)$

Para $k = 2$, temos $z_2 = 2\left(cos\frac{9\pi}{12} + isen\frac{9\pi}{12}\right)$

Para $k = 3$, temos $z_3 = 2\left(cos\frac{13\pi}{12} + isen\frac{13\pi}{12}\right)$

Para $k = 4$, temos $z_4 = 2\left(cos\frac{17\pi}{12} + isen\frac{17\pi}{12}\right)$

Para $k = 5$, temos $z_5 = 2\left(cos\frac{21\pi}{12} + isen\frac{21\pi}{12}\right)$

Se $k = 6$, temos $z_6 = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi\right)isen\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi\right)\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{12} + isen\frac{\pi}{12}\right) = z_0$

Ou seja, as raízes começam a se repetir. Essas informações podem ser visualizadas com apenas um olhar, na Figura 34. O fato de todas as raízes terem módulo igual a 2 é percebido quando se visualiza que as extremidades dos vetores que representam essas raízes, pertencem à circunferência de centro na origem e raio 2, mostrada pontilhada na Figura 34. A primeira raiz, z_0, obtida quando fazemos k =0 e obtemos $z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{12} + isen\frac{\pi}{12}\right)$ tem argumento igual a $\frac{\pi}{12}$, ou 15°. Para obtermos graficamente z_1 basta girar o vetor que representa z_0, segundo um ângulo igual a $2\pi/6$, em torno da origem. Para obter z_2, giramos o vetor representante de z_1, segundo um ângulo igual a $2\pi/6$, em torno da origem. E assim por diante.

Segundo Duval (2009, p.19), toda tarefa na qual a conversão das representações é congruente dá lugar a uma taxa elevada de sucesso. Portanto, acreditamos que a mudança do registro algébrico para o gráfico favorece muito a apreensão do assunto estudado. Uma vez determinada uma das raízes, a obtenção das demais é feita rotacionando-se sucessivamente o vetor representante da primeira raiz por um ângulo igual a $2\pi/n$.

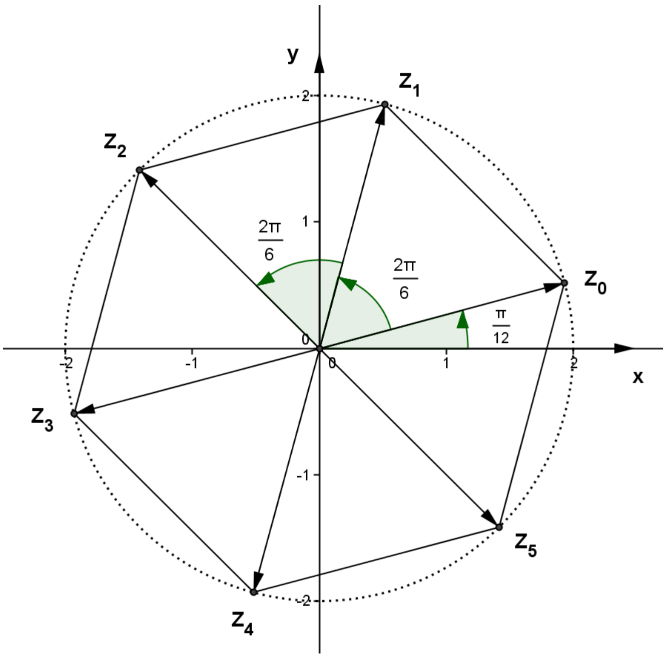


Figura 34. Raízes sextas de 64i.

De um modo geral, extrair as raízes n-ésimas de um número complexo, isto é, efetuar $\sqrt[n]{r\cdot\left(cos\theta + i\cdot sen\theta\right)}$, significa determinar números complexos z tais que

$z^n = r\cdot\left(cos\theta + i\cdot sen\theta\right)$.

Quem resolveu tal problema foi Euler (GARBI, 2006, p. 185), que descobriu que todo número complexo não nulo tem n raízes enésimas (n inteiro). Assim, todo número complexo não nulo tem duas raízes quadradas, três raízes cúbicas, quatro raízes quartas, etc. A demonstração desse fato segue exatamente o mesmo raciocínio do exemplo que foi dado.

Se $z = s\left(cos\alpha + isen\alpha\right)$, teremos

$$z^n = \left[s\left(cos\alpha + i \cdot sen\alpha\right)\right]^n = r \cdot \left(cos\theta + i \cdot sen\theta\right)$$

Portanto, aplicando a fórmula de De Moivre ao primeiro membro dessa última equação, tem-se

$$s^n\left[cos\left(n\alpha\right) + i \cdot sen\left(n\alpha\right)\right] = r \cdot \left(cos\theta + i \cdot sen\theta\right).$$

Para que dois números complexos, representados na forma trigonométrica sejam iguais é necessário e suficiente que tenham módulos iguais e argumentos congruentes. Isso acarreta, para a última igualdade escrita acima:

$s^n = r$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi,\ \ k$ inteiro.

Logo, teremos para módulo s e argumento α de z os valores

$s = \sqrt[n]{r}$ e $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, com k inteiro. Portanto, a fórmula que fornece as raízes enésimas de um número complexo $r \cdot \left(cos\theta + i \cdot sen\theta\right)$, é dada por

$$\sqrt[n]{r \cdot \left(cos\theta + i \cdot sen\theta\right)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot sen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

A fórmula obtida acima nos dá duas informações importantes a respeito das raízes de um complexo:

1ª) todas as raízes têm o mesmo módulo, $\sqrt[n]{r}$; isso quer dizer que se $r \neq 0$, os pontos imagens dessas raízes situam-se em uma circunferência de centro na origem e raio igual a $\sqrt[n]{r}$;

2ª) tomando valores inteiros consecutivos para k, os argumentos das raízes crescem em progressão aritmética de razão igual a $\dfrac{2\pi}{n}$. Isto significa que as imagens dessas raízes são vértices de um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$.

3ª) z tem apenas n raízes enésimas. Lembrando que $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, vejamos os valores de α, quando variamos k:

Para k = 0, temos $\alpha = \dfrac{\theta}{n}$

Para k = 1, temos $\alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$

Para k = 2, temos $\alpha = \dfrac{\theta}{n} + 2\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

Para k = 3, temos $\alpha = \dfrac{\theta}{n} + 3\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

...

Para k = $n-1$, temos $\alpha = \dfrac{\theta}{n} + (n-1)\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

Para k = n, temos $\alpha = \dfrac{\theta}{n} + (n)\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi$

Para k = $n+1$, temos $\alpha = \dfrac{\theta}{n} + (n+1)\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{\theta}{n} + \left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + 2\pi$

Ocorre então que, a partir de k = n, os argumentos começam a diferir por múltiplos inteiros de 2π. Logo, as raízes enésimas de z também começam a se repetir, o que nos leva a concluir que apenas n delas são distintas.

O estudo que acabamos de fazer nos faz concordar com Duval (2009), para quem

> Um sujeito no qual a coordenação dos registros é encontrada suficientemente desenvolvida pode muito bem se ater às representações de um só registro [...] Mas, na realidade, ele dispõe potencialmente de representações que se destacam de outros registros e que ficam associadas de maneira latente às que ele utiliza. Essa coordenação lhe dá, com respeito a representações

> semióticas que ele utiliza, esse grau de liberdade permitindo ter estratégias heurísticas, conduzir bem os tratamentos escolhidos e controlar a sua pertinência. (DUVAL, 2009, p. 91).

A conversão do registro de representação vetorial para o registro de representação trigonométrico possibilitou minimizar o trabalho para extração de raízes de números complexos. Uma vez obtida as soluções no registro trigonométrico, a conversão para o registro gráfico permitiu observar a regularidade existente: a de que os vértices das raízes enésimas de um número complexo são vértices de um polígono regular de n vértices, que pertencem à uma circunferência de centro na origem e raio igual à raiz enésima do módulo do número.

3.5 Registro de representação por matrizes

Em Rogalski (2001, p. 62), vê-se que é possível se constituir um registro de representação matricial para os números complexos. Trata-se de um registro diferente dos que são encontradas nos livros didáticos e, com vistas à clareza da exposição, faremos aqui algo um pouco mais detalhado do que o mencionado autor apresenta em sua obra.

A base desse estudo é a associação que se pode fazer entre um número complexo na forma algébrica $z = a + bi$ e as matrizes quadradas anti-simétricas 2x2, da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Vejamos a correspondência entre as propriedades dos números complexos no registro algébrico e no registro matricial.

Primeiramente observamos que a adição de números complexos, no registro por matrizes, corresponde à adição de matrizes no registro algébrico. De fato, se $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, então

$z + w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$, o que corresponde, no registro de representação algébrico a $(a+c)+(b+d)i$

Para multiplicar os números complexos, basta multiplicar as matrizes correspondentes, na forma usual:

$z \cdot w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$, o que corresponde, no registro algébrico a $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

O conjugado de um número complexo representado matricialmente é a transposta da matriz que lhe corresponde. Vejamos, se $z = a+bi$, então z corresponde a $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $\overline{z} = a - bi$. Daí:

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} a & -(-b) \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^T$$

O elemento neutro para adição de números complexos, isto é, o número $0+0i$, é representado pela matriz nula.

O elemento neutro para multiplicação de números complexos, isto é, o número $1+0i$, é representado pela matriz identidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A associatividade e comutatividade dos números complexos também estão garantidas pela associatividade e comutatividade dessas matrizes.

O inverso de um número complexo não nulo é representado pela inversa da matriz que lhe corresponde. Provemos. Tomemos $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Daí, com as operações elementares de matrizes, obtemos $z^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$.

Logo:

$$z \cdot z^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} & \dfrac{ab-ab}{a^2+b^2} \\ \dfrac{ab-a}{a^2+b^2} & \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ corresponde, no registro algébrico, ao número $1+0i=1$, como queríamos demonstrar.

Agora trataremos de formalizar a conversão entre o registro de representação algébrica e o registro de representação matricial dos números complexos.

Comecemos por chamar de K o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2, sobre $\mathbb{R}$, da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Consideremos também definidas para tal conjunto as operações usuais de adição e multiplicação de matrizes.

Inicialmente observamos que qualquer matriz pertencente a K pode ser escrita na forma $aI+bJ$, em que $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ademais, tem-se:

$$J^2 = J \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando a definição de multiplicação de matrizes, vem que

$$J^2 = J \cdot J = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 1\cdot 1 & 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot(-1)+0\cdot 0 \end{pmatrix}$$

Ou seja,

$$J^2 = J \cdot J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

O leitor poderá provar que a adição e a multiplicação dos elementos de K comportam-se como a adição e a multiplicação dos números complexos, isto é, $(aI+bJ)+(cI+dJ)=(a+c)I+(b+d)J$

e $(aI+bJ)(cI+dJ)=(ac-bd)I+(ad+bc)J$.

Além disso, pode ser demonstrado que as propriedades associativa, comutativa, existência do elemento neutro etc. estão garantidas para os elementos de K. O elemento neutro para a adição é a matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e o elemento oposto da matriz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

Já para a multiplicação, o elemento neutro é a matriz identidade e o elemento inverso da matriz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, não nula, é a matriz $\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & -\dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$

Também é válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Nosso objetivo agora é provar que os conjuntos $A=\{a+bi,\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\}$ e K são isomorfos. Isso significa que há uma aplicação bijetora de A em K que preserva a adição e a multiplicação[16].

Lembramos que, sendo A e B conjuntos quaisquer, uma aplicação $f: A\to B$ é chamada isomorfismo de A em B se, $\forall x, y\in A$, tivermos

(i) f é bijetora

(ii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ e

(iii) $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$,

Vamos provar então que os corpos A e K são isomorfos.

Tomemos $f: A\to K;\ \ x+yi \mapsto xI+yJ$.

(i) f é bijetora. De fato, sejam z e w pertencentes a A, tais que $f(z)=a+bi$ e $f(w)=c+di$. Se tivermos $f(z)=f(w)$, então $aI+bJ=cI+dJ$, o que acarreta $(a-c)I+(b-d)J=0_{2x2}$ e, portanto, $a=c$ e $b=d$, o que mostra que $z=w$. Assim, f é injetora.

---

[16] Para retomar explanação sobre isomorfismo, veja página 70.

Agora seja $uI+vJ$ um elemento qualquer de K. Então, tomando-se $z=u+vi$, teremos $f(z)=f\left(u+vi\right)$ e, por definição, $f\left(u+vi\right)=uI+vJ$. Portanto, f é sobrejetora. Logo, f é bijetora, pois é injetora e sobrejetora.

(ii) $f(z+w)=f\left[(a+bi)+(c+di)\right]=f\left[(a+c)+(b+d)i\right]=$

$=(a+c)I+(b+d)J=(aI+bJ)+(cI+dJ)=f(z)+f(w)$

(iii) $f(z\cdot w)=f\left[(a+bi)\cdot(c+di)\right]=f\left[(ac-bd)+(ad+bc)i\right]=$

$=(ac-bd)I+(ad+bc)J=acI-bdI+adJ+bcJ=$

$=acI^2+bdJ^2+adIJ+bcIJ=\left(acI^2+bcIJ\right)+\left(adIJ+bdJ^2\right)=$

$=cI\left(aI+bJ\right)+dJ\left(aI+bJ\right)=\left(aI+bJ\right)\left(cI+dJ\right)=f(z)\cdot f(w)$

Portanto, podemos concluir que os corpos A e K são, de fato, isomorfos. A importância desse resultado reside no fato de que os elementos de A e K têm apenas nomes e representações diferentes, o mesmo ocorrendo com as operações definidas para eles. No entanto, A e K podem ser considerados “indistintos” como corpos. Consequentemente poderíamos tomar um problema qualquer a respeito de números complexos, em que os números estivessem na forma de registros de representação algébricas, isto é, na forma $a+bi$, e convertê-los para a forma matricial, ou seja, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Talvez operacionalmente o problema se tornasse mais simples. Então resolveríamos o problema no universo dessas matrizes e a solução, uma vez determinada, poderia ser convertida para a forma algébrica, já que os conjuntos A e K são isomorfos. Como já estabelecemos o isomorfismo entre o conjunto A e o $\mathbb{R}^2$, podemos assegurar que K e $\mathbb{R}^2$ também são isomorfos. Vimos também que os pares ordenados (a,b) de números reais associam-se de maneira única com os vetores que têm origem na origem do plano cartesiano e extremidade no ponto que é a imagem de (a,b). Isso permite demonstrar o isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ e o conjunto de vetores do plano, com origem na origem do sistema e extremidade no ponto imagem de (a,b). Também pode-se mostrar que existe uma correspondência biunívoca entre os vetores que representam os números complexos no plano cartesiano e os registros de representação trigonométricos desses números. Por permitir tantas representações diferentes, e por mostrar aplicações diversas, consideramos que o estudo dos números complexos deve ser levado em conta no Ensino Médio.

Em síntese: o estudo dos números complexos pode ser feito a partir de vários registros de representação semiótica: registro algébrico, registro por pares ordenados, registro gráfico por vetores, registro trigonométrico, registro por matrizes, e por transformações no plano. Em nosso estudo utilizaremos todos esses registros, exceto o matricial, explorando as transformações que ocorrem no plano complexo.

4 A PESQUISA

Descreveremos brevemente, nesse capítulo, as principais características que consideramos para a escolha dos sujeitos da pesquisa, bem como a sequência de atividades propostas, com as respectivas análises a priori e a posteriori. A fim de facilitar a leitura, apresentamos o enunciado de cada atividade, seguido de descrição das reações que foram observadas nos sujeitos, bem como as respectivas análises.

4.1 Os sujeitos da pesquisa

Os sujeitos da pesquisa são seis alunos da terceira série do Ensino Médio de uma escola particular de São Paulo, portanto na faixa etária de 17 a 19 anos. Os alunos dessa escola podem escolher entre três áreas, a concentração principal de matérias no Ensino Médio: exatas, biológicas ou humanidades. Decidimos optar por alunos cujo interesse principal não fosse a área de exatas, para não termos o fator de motivação prévia dos alunos a nosso favor.

Dissemos à página 24 que tínhamos três hipóteses para verificar em nossa pesquisa. A primeira é que os aspectos gráficos concernentes aos números complexos não são apresentados no ensino médio. A segunda é que os professores não utilizam esses aspectos e propriedades para resolver problemas de geometria plana. A terceira é que a visualização dos registros de representação gráfica dos complexos pode ajudar a compreensão do assunto por parte dos alunos.

Devido ao fator tempo e às hipóteses de pesquisa apresentadas, notadamente a primeira, decidimos aplicar nosso trabalho a alunos que já haviam visto números complexos, conteúdo que é abordado no primeiro bimestre da terceira série do Ensino Médio, naquela escola.

Embora esses alunos não tenham matemática como principal área de interesse – quatro são de biológicas e dois são de humanidades – suas médias em matemática são regulares, isto é, alcançam a média necessária para aprovação na escola, pois consultando o boletim dos mesmos verificamos que alcançam uma média 6, numa escala de 0 a 10. Um detalhe: são três meninos e três meninas.

Pudemos perceber em entrevista informal que esses alunos pareceram motivados e sentiram-se de certa forma valorizados por terem sido escolhidos para serem os sujeitos da pesquisa. Cabe ainda observar que, apesar de estarem atarefados com preparações para exames vestibulares, esses alunos mostraram-se empolgados e muito interessados em participar das atividades. Esse ânimo perdurou durante os encontros e estabeleceu uma relação de confiança entre o pesquisador e os sujeitos, o que foi bom para a pesquisa, na medida em que os sujeitos aceitaram o contrato didático, provavelmente diferente daquele a que estavam acostumados em salas de aula.

Para manter a privacidade desses alunos, utilizaremos nomes fictícios, tanto na descrição do que foi observado na pesquisa, quanto nas análises a posteriori.

Previamente aplicamos um questionário para verificar as concepções dos sujeitos a respeito do conteúdo números complexos. Sete alunos participaram dessa atividade. Porém, devido a outros compromissos, um deles não fez parte do grupo ao qual foi aplicada a sequência didática.

4.2 Análise do questionário

QUESTIONÁRIO

1. Cite uma aplicação dos números complexos

As respostas foram:

- Resolver equação de 2º grau de $\Delta < 0$.
- Descobrir raiz de números negativos.
- Para achar a raiz de números negativos.
- Resolver raízes com números negativos, quando o índice é par.
- Programas de computador
- Computadores
- Computação, eletrônica

Nenhum aluno mencionou que os números complexos poderiam ser aplicados à resolução de problemas de Geometria, ou para efetuar rotações ou translações no plano complexo, o que corrobora o levantamento feito sobre os livros didáticos e mesmo sobre os PCN^{+}(2000).

2. Escolha a alternativa que você julgar correta:
a. ( ) Os números complexos surgiram quando um matemático, resolvendo uma equação polinomial do segundo grau, encontrou um discriminante ($\Delta = b^2 - 4a.c$) negativo.
b. ( ) Os números complexos foram descobertos quando um matemático tentava resolver uma equação polinomial de grau três.

Os sete alunos assinalaram a alternativa a. Isso torna evidente o fato de que a abordagem histórica sobre as resoluções das equações do 3º grau não é feita, apesar de já ter sido sugerida por Almeida (1992) e Rosa (1998). Esse fato também reforça o que foi visto em na análise dos livros didáticos: muitos asseguram que os números complexos foram criados para resolver equações do segundo grau que apresentavam discriminante negativo.

3. Assinale dentre os nomes abaixo, aquele(s) que você associaria com a história dos números complexos
( ) Wallis ( ) Bombelli ( ) Argand ( ) Wessel ( ) Gauss.

Apesar de o enunciado deixar clara a possibilidade de se assinalar mais do que um nome, seis alunos assinalaram apenas “Gauss” e um aluno assinalou “Argand”. Tal como a questão 2, esta questão mostra que a parte histórica dos números complexos não é contemplada no curso que esses alunos têm na sua escola.

4. Você já resolveu algum problema de geometria utilizando os números complexos?
( ) Sim ( ) Não

Os sete alunos responderam “Não”. No estudo dos complexos são comuns problemas que envolvem módulos serem tratados apenas algebricamente, sem identificar, por exemplo, que a distância entre as imagens de dois complexos z e w nada mais é do que o módulo da diferença entre eles. Assim, os alunos podem até determinar a resposta, através de técnicas operatórias, mas sem entender, pelo visto, que estão resolvendo um problema de Geometria.

5. Se um ponto do plano cartesiano, que representa um número complexo, está localizado no primeiro quadrante, então o ponto que representa o conjugado desse número está localizado no
(   ) 1º quadrante   (   ) 2º quadrante   (   ) 3º quadrante   (   ) 4º quadrante

Quatro alunos assinalaram como resposta o 3º quadrante.

Um aluno assinalou como resposta o 2º quadrante.

Dois alunos assinalaram a resposta correta, o 4º quadrante.

Pelo visto os alunos também não assimilaram que, no plano complexo, a imagem de um número complexo e a do seu conjugado guardam uma relação de simetria axial.

6. Assinale qual das alternativas abaixo tem estreita relação com a adição de números complexos	
a. ( ) Regra do paralelogramo	b. ( ) Teorema de Pitágoras
c. ( ) Teorema de Tales	d. ( ) Semelhança de triângulos

Apenas um aluno assinalou a Regra do paralelogramo como resposta. Dois assinalaram o Teorema de Pitágoras e quatro assinalaram o Teorema de Tales. Novamente percebe-se a total falta de enfoque gráfico, no caso para a adição entre dois números complexos.

7. Considere um ponto pertencente a uma circunferência de centro na origem e raio 2 como representante um número complexo. Considere outro ponto, pertencente a uma circunferência de centro na origem e raio 3, como

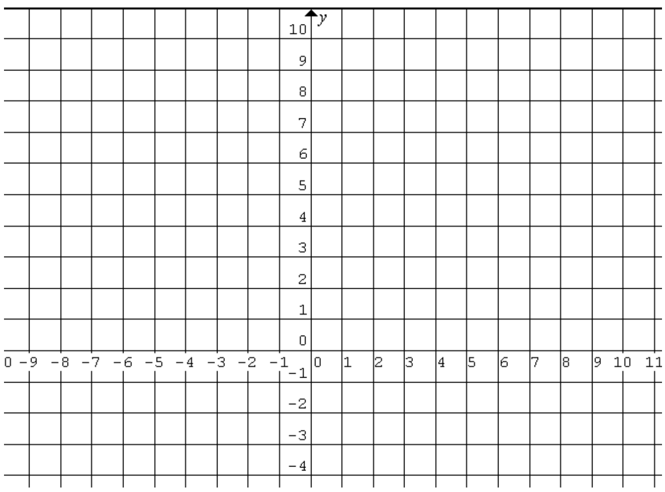
representante de um número complexo. Então o ponto que representa o produto desses dois números complexos pertence a uma circunferência	
a. ( ) com centro na origem e raio 1	d. com centro em (2, 3) e raio 1
b. ( ) com centro na origem e raio 6	e. com centro na origem e raio 9
c. ( ) com centro em (2, 3) e raio 8	

Todos os alunos acertaram essa resposta. Temos por hipótese que a frase “o módulo do produto é igual ao produto dos módulos”, repetida durante as aulas, pode ter sido a causa do acerto, nessa questão.

8. A imagem do número complexo z pertence ao terceiro quadrante do plano complexo. Ao multiplicarmos este número por i (a unidade imaginária), a imagem de z pertencerá:		
a. ( ) ao 1º quadrante	b. ( ) ao 2º quadrante	c. ( ) ao 3º quadrante
d. ( ) ao eixo real	e. ( ) ao eixo imaginário	

Quatro alunos assinalaram corretamente, “2º quadrante” e observamos que fizeram cálculos com valores particulares, para poderem responder, isto é, não apelaram para interpretação gráfica. Dois alunos assinalaram “eixo imaginário” e um aluno assinalou “eixo real”.

9. Considere a região triangular do plano complexo cujos vértices são os pontos (1,1), (3, 1) e (1,3). Utilize os quadriculados abaixo para representar essa região e o resultado da transformação que adiciona o número complexo
4 + 3i a cada ponto da região.



Quatro alunos executaram o desenho corretamente e outros três apenas sabiam localizar o triângulo inicial, mas não obtido pela transformação. Mesmo essa operação que consiste em deslocar a figura quatro unidades para a esquerda e três unidades para cima, ainda não é dominada pela totalidade dos estudantes.

O questionário corroborou a falta de visão de aplicação dos números complexos, por parte dos estudantes, como mostrou a primeira questão; mostrou também o desconhecimento da origem dos números complexos, como ficou evidente na segunda questão. A falta de abordagem de problemas de geometria que utilizem esses números, que pode ser constatado na questão número quatro, e as falhas na visualização de propriedades geométricas básicas, como pode ser percebido nas questões cinco, seis e oito. Esse resultado direcionou a elaboração da sequência didática que queríamos aplicar. Tal elaboração e as análises *a priori* e *a posteriori* da mesma serão discutidas mais adiante.

4.3 Descrição da aplicação

A pesquisa foi elaborada para ser realizada em sete encontros, de uma hora cada, entre os meses de novembro e dezembro de 2009. Porém a Atividade 4 foi mal dimensionada e teve de ser realizada em dois encontros. Os seis sujeitos, três meninos e três meninas, trabalharam em duplas, menino-menina, em todos os encontros. Eles foram observados e auxiliados em suas dúvidas pelo autor desse trabalho. Para auxiliar na pesquisa contamos também com a colaboração de uma professora de matemática, que filmou e registrou todo o processo. Os alunos recebiam uma folha impressa com a proposta da Atividade, e foi estabelecido pelo pesquisador que cada dupla deveria trabalhar sem interagir com as outras duplas.

4.4 A sequência didática – concepção, análises *a priori* e *a posteriori*

Descreveremos a seguir cada uma das atividades que foram propostas aos sujeitos, cujos enunciados, para facilitar a leitura, destacamos em retângulos. Para cada uma há a respectiva análise a priori, bem como uma descrição do que se observou durante a aplicação, seguida da correspondente análise a posteriori.

Atividade 1
a) Um número complexo $z = a + b.i$ pode ser representado, no plano complexo, como um vetor com origem coincidindo com a origem desse plano e extremidade com coordenadas (a, b). Represente um número complexo z qualquer no Geogebra.

Análise a priori. O objetivo desse item da atividade é familiarizar o aluno com a representação gráfica de um número complexo no plano complexo, como um vetor com centro na origem e extremidade no ponto cujas coordenadas são dadas pela parte real e pela parte imaginária do número complexo, respectivamente. Esse objetivo justifica-se pelo fato de que tal representação não é enfatizada nos livros didáticos (LIMA, 2001, p. 307) e nem no curso de matemática dos sujeitos submetidos a essa sequência didática. Espera-se que o aluno utilize a ferramenta "**Vetor definido por dois pontos**" (Figura 35), clique na origem e depois em um ponto qualquer da janela do software, que exibe o plano complexo. A Figura 36 mostra a janela de Álgebra do Geogebra, bem como o plano complexo com o vetor construído.

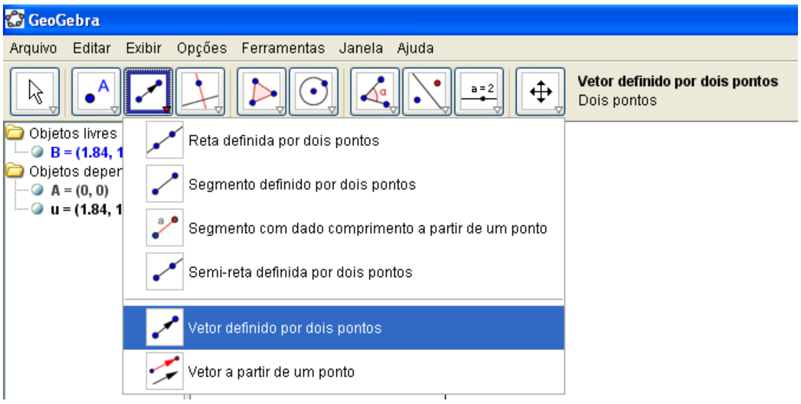


Figura 35. Ferramenta "Vetor definido por dois pontos".

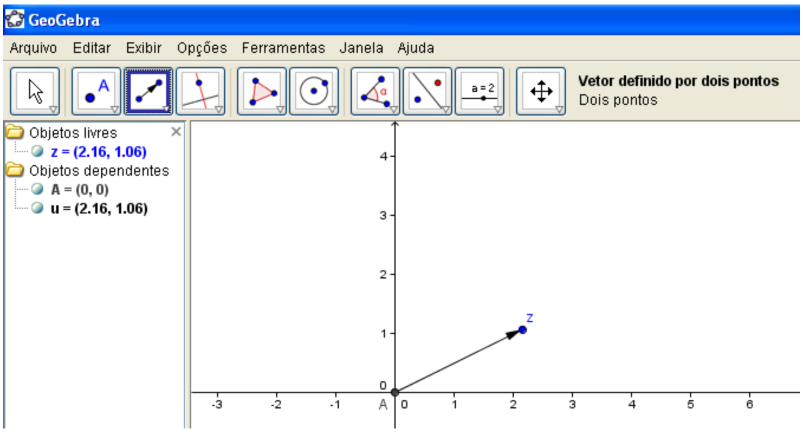


Figura 36. Vetor representante de um complexo z.

Análise a posteriori. Não houve obstáculos a serem registrados nesse item. A dificuldade inicial em localizar a ferramenta vetor, no software, foi superada em poucos minutos e, logo as três duplas de estudantes já estavam com um vetor representante de um número complexo na tela.

b) Construa o conjugado de z, isto é, $\overline{z}$. Descreva qual é, graficamente, a relação que existe entre z e $\overline{z}$.

Análise a priori. A finalidade desta atividade é fazer com que o aluno comece a coordenar as diferentes representações de números complexos, porque, segundo Bresson (2009 apud Duval, p. 91) “as figuras e os esquemas permitem representar a totalidade das relações entre os elementos” e,

> geralmente, a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação. (Duval, 2009, p. 81).

Nesse sentido espera-se que o aluno comece a realizar a conversão entre o registro algébrico de $\overline{z} = a - bi$ e o registro gráfico de $\overline{z}$ como o simétrico de z em relação ao eixo real do plano complexo. Listamos algumas soluções possíveis.

Uma primeira solução pode ser realizada utilizando-se a ferramenta “**Reflexão com relação a uma reta**” que está disponível no software. A ajuda que aparece na barra de ferramentas do software indica “**Reflexão com relação a uma reta** – Objeto, depois a reta de reflexão”. Isso indica que se deve primeiro clicar no objeto e depois clicar na reta em relação a qual o objeto será refletido. No entanto, o software não permite que o objeto a ser refletido seja um vetor. É necessário, portanto, como pode ser visto na Figura 37, primeiro refletir a extremidade do vetor e depois construir o vetor refletido.

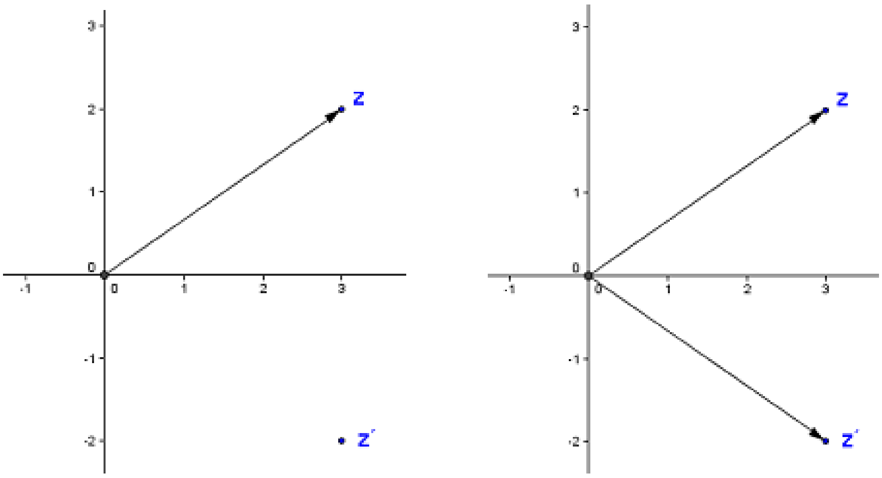


Figura 37. Construção do conjugado, no Geogebra.

Em uma segunda solução o aluno pode utilizar a ferramenta "**Reta perpendicular**". Com esta, ele constrói, como pode ser visto na Figura 38, a reta que passa pelo ponto imagem de z e que é perpendicular ao eixo real. Note-se que o ponto de interseção entre a perpendicular e o eixo real é a abscissa da imagem de z, isto é, Re (z).

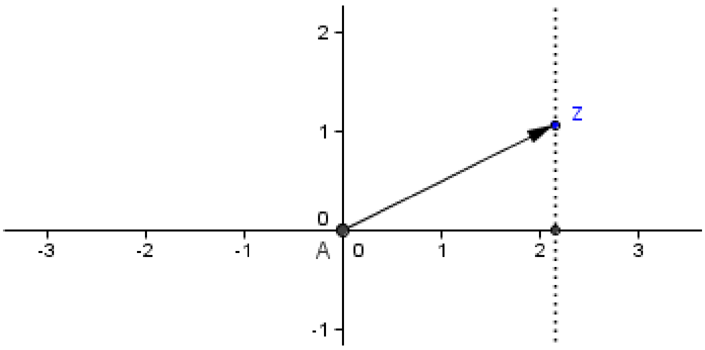


Figura 38. Perpendicular ao eixo real, passando pela imagem de z.

Com a ferramenta "**Círculo definido pelo centro e um de seus pontos**" o aluno constrói a circunferência, ilustrada na Figura 39, com centro em O e que passa pela imagem de z.

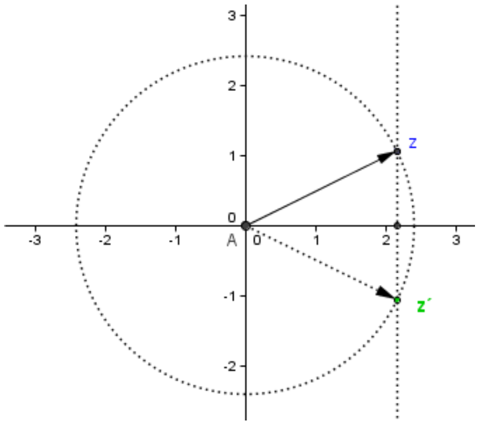


Figura 39. Construção do conjugado, com perpendicular e círculo.

Finalmente, também ilustrado na Figura 39, com a ferramenta “Interseção de dois objetos”, o aluno determina a interseção entre a circunferência e a reta perpendicular previamente construída. Esta interseção é o simétrico de z em relação ao eixo real. Basta construir o vetor com origem na origem do plano complexo e extremidade nesse último ponto determinado.

Outra possibilidade para a construção da solução é a seguinte: desenhar duas circunferências, com centros distintos e pertencentes ao eixo real, mas ambas passando pela extremidade, digamos P, do vetor que representa o número complexo, do qual se deseja construir o conjugado. A outra interseção dessas circunferências, distinta de P, como pode ser vista na Figura 40, é a extremidade do vetor, representante do conjugado do complexo. A justificativa matemática dessa construção retoma congruência de triângulos e resultados associados aos triângulos isósceles.

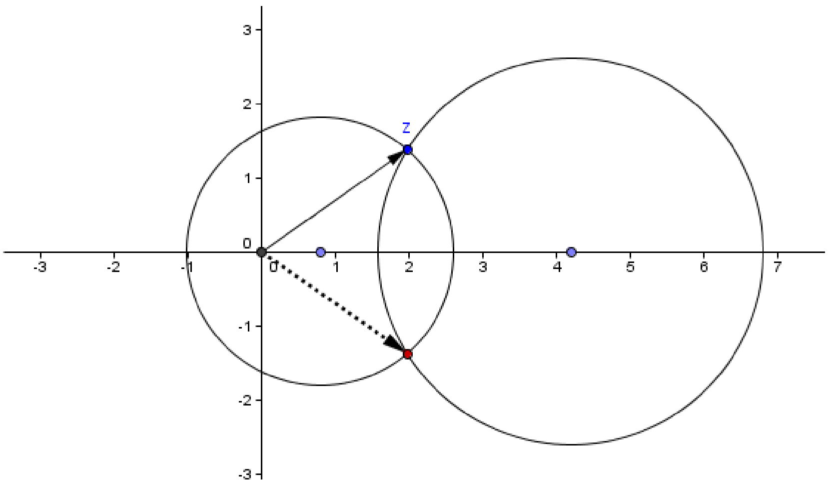


Figura 40. Construção do conjugado, com uso de circunferências.

Não descartamos que também seja possível, nesse momento, o surgimento de outras tentativas de soluções. Por exemplo, é possível que os alunos utilizem as ferramentas “**Girar em Torno de um Ponto por um Ângulo**”, mas isso se torna ligeiramente complicado por dois motivos: o primeiro é a necessidade de se ter mais um ponto para poder medir o ângulo entre o vetor e o eixo x e o segundo é o modo como o software mede os ângulos.

É indiscutível que tais construções dependem da experiência do aluno e de quão hábil será para mobilizar seus conhecimentos prévios para resolver a tarefa. No entanto, nosso foco é saber se o aluno perceberá que a relação existente entre um complexo e o seu conjugado é, graficamente, uma relação de simetria em relação ao eixo real.

O aluno é momentaneamente desequilibrado de seus conhecimentos algébricos no que diz respeito aos números complexos para, então, mobilizar seus conhecimentos geométricos e interpretar graficamente onde se localiza e quais propriedades devem manter entre si um número complexo e o seu conjugado.

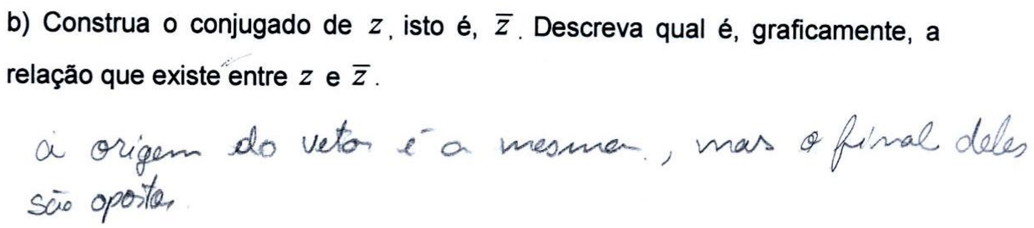
Análise a posteriori. a dupla Leandro e Laura teve muita dificuldade para representar graficamente o conjugado do complexo que eles tinham na tela. Houve necessidade de intervenção do pesquisador, que não explicou, nem mostrou a construção. Ao contrário, a intervenção foi por meio de perguntas: você conseguiria dar um exemplo de um número complexo e de seu conjugado? Então essa dupla respondeu de imediato “4 + 3i e 4 – 3i”. Então foram solicitados a apontar com o dedo, na tela, onde eles julgavam que se localizavam esses números. Uma vez entendido o proposto, restava então construir o conjugado.

Outra dupla, Mariana e Sálvio, também tiveram dificuldades. Percebemos pela fala de Sálvio que também tinham noção do que era, algebricamente, o conjugado de um número complexo: “o conjugado do complexo só troca o sinal do i (*sic*)”. Também para essa dupla, uma vez entendida a ideia de conjugado faltava, dado um complexo, construir o seu conjugado.

Com a terceira dupla, Alex e Natália, ocorreu algo diferente. Eles **sabiam** o que era conjugado, representaram vetorialmente um número complexo e **desenharam** o seu conjugado, o que será analisado no item c dessa atividade.

Ficou evidente que os alunos sabiam, algebricamente, a definição do conjugado de um número complexo. No entanto, dupla alguma realizou nenhuma das construções esperadas na análise a priori, pois não conseguiram fazer a conversão do registro algébrico, para o registro gráfico, embora tenhamos escolhido como variável didática, dar a definição de representação vetorial de um número complexo no enunciado da atividade. Talvez os alunos esperassem que houvesse uma ferramenta própria para construção do conjugado. Depois da intervenção do pesquisador os alunos representaram na tela do Geogebra o conjugado, mas não haviam ainda apreendido a relação de simetria existente entre um número complexo e o seu conjugado, uma vez que a representação não surgiu de uma construção, mas sim de cálculos algébricos, o que pode ser um obstáculo didático, fruto da escolha em só se apresentar a representação algébrica dos números complexos.

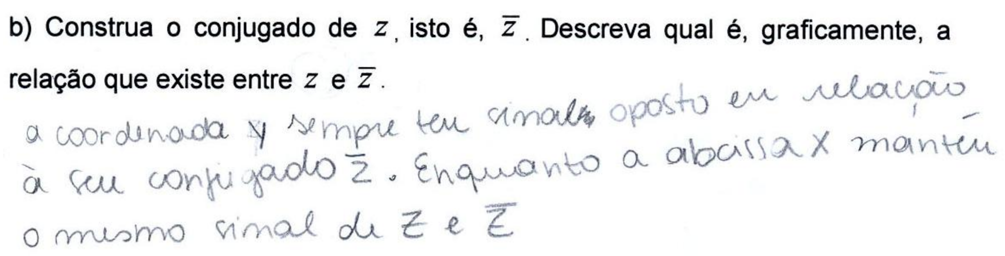
Todos perceberam a relação de simetria, embora o texto da resposta escrita não tenha tanta precisão, como pode ser visto nas Figuras 41, 42 e 43.


b) Construa o conjugado de z, isto é, $\overline{z}$. Descreva qual é, graficamente, a relação que existe entre z e $\overline{z}$.

a origem do vetor é a mesma, mas o final deles são opostos.

Figura 41. Resposta de Leandro.

Na resposta de Leandro pode-se perceber o registro apenas em língua natural; Leandro denomina extremidade do vetor por “final” e denomina de “opostos” o que seria “simétricos em relação ao eixo x”.


b) Construa o conjugado de z, isto é, $\overline{z}$. Descreva qual é, graficamente, a relação que existe entre z e $\overline{z}$.

a coordenada y sempre tem sinal oposto em relação à seu conjugado $\overline{z}$. Enquanto a abcissa x mantém o mesmo sinal de z e $\overline{z}$

Figura 42. Resposta de Mariana.

Percebe-se na resposta de Mariana algum traço de escrita simbólica, e algumas idéias relacionadas à representação dos números complexos como pares ordenados: quando menciona “sinal oposto em relação ao seu conjugado” e “

mesma abscissa”, talvez haja aí indícios de que ela estivesse pensando em algo como (a,b) e $(a,-b)$, o que é correto. No entanto fica patente a falta de interpretação gráfica, que é o que foi pedido para ser descrito.

b) Construa o conjugado de z, isto é, $\overline{z}$. Descreva qual é, graficamente, a relação que existe entre z e $\overline{z}$.

$\overline{z} = 1-2i$

A relação existente entre o número complexo z e seu conjugado ($\overline{z}$) é de simetria.

Figura 43. Resposta de Alex.

Na resposta de Alex, diferentemente das outras duas, aparece o registro algébrico, além da escrita simbólica. No entanto essa representação não tem vínculo com sua conclusão: “A relação existente entre o número complexo z e seu conjugado é de simetria”. Novamente constatamos as dificuldades dos alunos em interpretar geometricamente o que se vê no plano complexo, uma vez que, apesar de dizer que a relação existente é de simetria, não explicita se é uma simetria em relação a um ponto ou em relação a um eixo.

c) Movimente o ponto que representa a extremidade do vetor representante de z. O que você observa?

Análise a priori. O propósito desse item é fazer com que o aluno perceba que um número complexo guarda, com o seu conjugado, uma relação de simetria em relação à reta que contém o eixo real.

Espera-se que, realizando o que foi pedido, o estudante possa verificar a validade ou não da sua construção. É provável que, a princípio, os alunos apenas desenhem o conjugado do número complexo, sem se darem conta do invariante que é a relação de simetria entre o complexo e o seu conjugado. Porém, em geometria dinâmica, desenhar não é o mesmo que construir. É relevante que o pesquisador, nesse caso, esclareça e enfatize a distinção que há entre uma coisa e outra, uma vez que o dinamismo do software mantém as propriedades inerentes às figuras, apenas no caso em que elas forem construídas geometricamente, tal como feito em desenho geométrico, por exemplo. Tomemos como exemplo a situação de, na escola básica, se construir a mediatriz de um segmento. O aluno pode tentar, a princípio, realizar essa tarefa apenas “visualmente”, ajeitando o instrumento, no caso a régua, para que fique perpendicular ao segmento desenhado na folha, e depois fazendo o traço. No entanto, tal procedimento não garante que a reta desenhada terá as propriedades inerentes à mediatriz daquele segmento. O mesmo ocorre com o desenho realizado no software: é necessário que a construção seja realizada como se estivesse operando régua sem marcas e compasso, caso contrário, quando se proceder à movimentação das figuras, as propriedades geométricas não mais estarão vinculadas a elas.

Análise a posteriori. A experiência confirmou o que era esperado pela análise a priori: bastou o pesquisador movimentar o vetor que representava o número complexo para que a simetria entre este complexo e o seu conjugado, **desenhado** pelos alunos, se desfizesse. Foi feita intervenção no sentido de explicar aos alunos a diferença entre desenhar e construir e depois lembrá-los que a barra de ferramentas do software apresentava várias ferramentas e eles deveriam explorá-la. Os alunos pareceram mais interessados em realizar a construção. A dupla Alex e Natália conseguiu realizar tal tarefa. Outra intervenção do pesquisador foi feita, dessa vez para que as outras duplas que ainda não estavam conseguindo realizar a construção visse a construção de Alex e Natália “funcionando”. Entenderam que a construção estava correta e que os vetores que apareciam na tela guardavam entre si uma relação de simetria, *mesmo quando movimentados*. Os alunos tentaram durante mais um tempo. No entanto, não conseguiram realizar a construção e o pesquisador teve que institucionalizá-la, mostrando até duas opções possíveis, entre as apresentadas na análise a priori do item a, dessa atividade 1. Existiu por um lado, a dificuldade técnica, de saber onde estão e como funcionam as ferramentas do software e, por outro, a dificuldade em mobilizar os conhecimentos de geometria para efetuar as construções necessárias.

d) Construa $-z$.

Análise a priori. O objetivo é fazer o aluno realizar a conversão do registro algébrico, em que ele sabe que $-a-bi$ é o oposto de $z=a+bi$, para o registro gráfico. Descrevemos a seguir algumas soluções esperadas.

Embora o software não permita que se faça a reflexão do objeto vetor em relação a um ponto, é possível, como primeira solução, o uso da ferramenta “**Reflexão com relação a um ponto**”, como exibido na Figura 45, para refletir o ponto imagem de z em relação à origem e depois, com o uso da ferramenta “**Vetor definido por dois pontos**”, construir o vetor que representa $-z$.

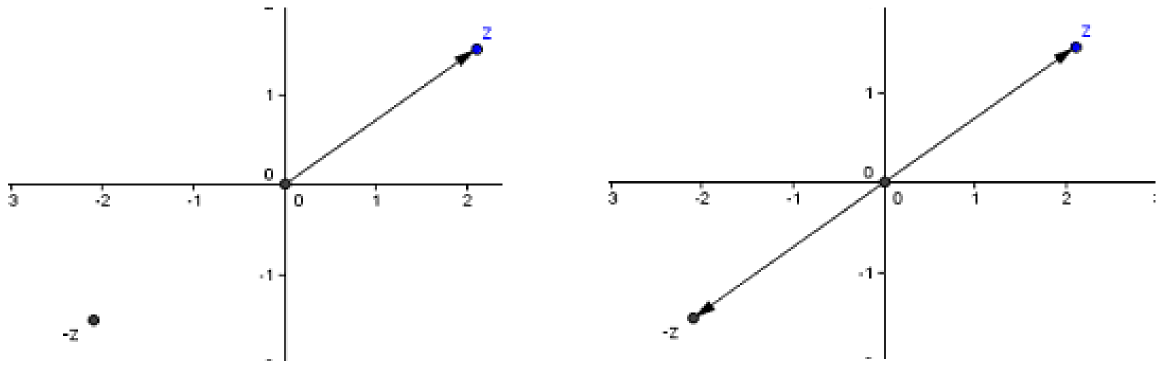


Figura 44. Visualização do oposto de um número complexo, no Geogebra.

Na segunda solução o aluno pode, como ilustra a Figura 46, utilizar a ferramenta “**Círculo definido pelo centro e um de seus pontos**” para construir a circunferência com centro na origem do plano complexo e passando pela imagem de z. Depois poderá utilizar a ferramenta “**Reta definida por dois pontos**”; para obter a reta suporte do vetor que representa z. A figura 47 mostra que, após acessar a ferramenta “**Interseção de dois objetos**”, para determinar o ponto simétrico de z com relação à origem, determina-se a imagem do oposto de z e, consequentemente, o vetor que representa $-z$.

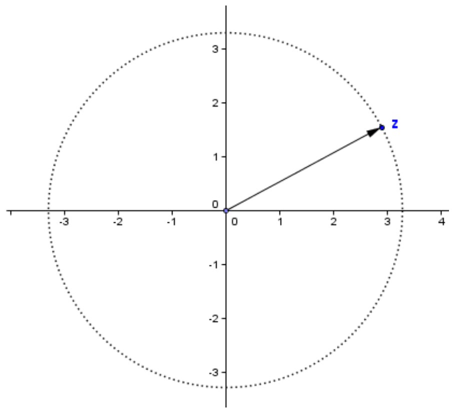


Figura 45. Círculo definido pelo centro e um de seus pontos.

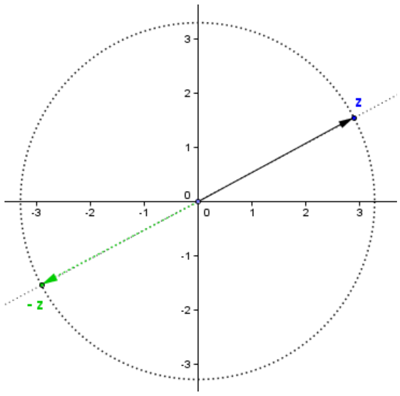


Figura 46. Construção do oposto de um complexo.

Acreditamos que outras soluções que demandem mais operações serão descartadas pelos alunos.

Análise a posteriori. O tempo investido nos itens a), b) e c) dessa atividade 1 revelaram-se úteis, pois os alunos conseguiram realizar a construção do oposto de um número complexo. No entanto, todos preferiram a construção com o uso da ferramenta "**Reflexão com relação a um ponto**", cremos que pela economia de operações necessárias. Porém acreditamos que, a essa altura, é mais importante visualizar a relação de simetria pontual do que preocuparem-se com a construção em si.

e) Mova z e descreva graficamente qual a relação existente entre z e $-z$.

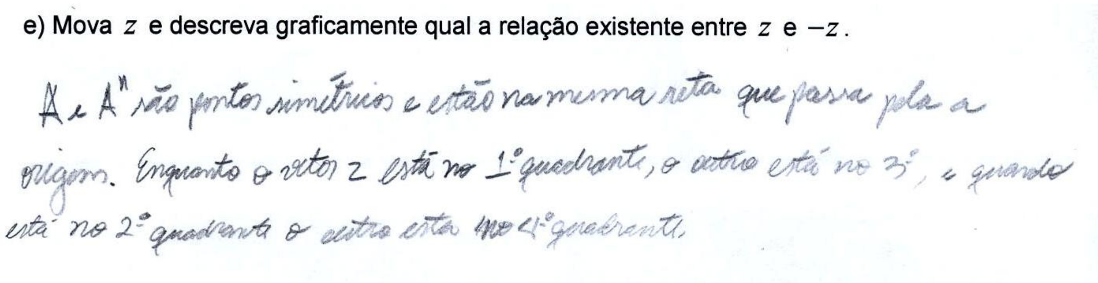
Análise a priori. A finalidade dessa atividade é fazer com que o aluno verifique a consistência ou não da sua construção. Espera-se, portanto, que ele já se aproprie do uso do software de geometria dinâmica como ferramenta que permite validar ou não suas construções, com base nas propriedades geométricas invariantes das figuras construídas. Espera-se que o aluno não mais faça confusão entre desenhar e construir. Caso isso ocorra, o pesquisador deve intervir novamente, orientando o aluno, mas sem realizar a construção para o mesmo.

Análise a posteriori. A experimentação coincidiu com a análise a priori para esse item: os alunos entenderam o que vinha a ser uma construção válida e ficaram satisfeitos de perceber que a relação de simetria pontual entre um número complexo era invariante, não importando a posição que o número complexo ocupasse no plano de Argand-Gauss. Importa-nos citar Duval (1999, p. 14), para quem

> A atividade matemática tem dois lados. O lado visível ou conclusivo é o do objeto matemático e processos válidos usados para resolver um dado problema. O lado escondido e crucial é o das operações cognitivas pelas quais qualquer um pode realizar os processos válidos e ganhar acesso ao objeto matemático. Registros de representação semiótica e sua coordenação estabelecem a arquitetura cognitiva pela qual qualquer um pode executar as operações subjacentes aos processos matemáticos. (DUVAL, 1999, p. 14, tradução nossa[17]).

A fala da estudante Laura reforça a nossa impressão: "gostei, porque agora dá pra visualizar o que geralmente você só faz com números!"

A resposta de Sálvio, mostrada na Figura 47, confirma que ele assimilou, graficamente, a noção de oposto de um número complexo.


e) Mova z e descreva graficamente qual a relação existente entre z e $-z$.

A e A'' são pontos simétricos e estão na mesma reta que passa pela a origem. Enquanto o vetor z está no 1º quadrante, o outro está no 3º, e quando está no 2º quadrante o outro está no 4º quadrante.

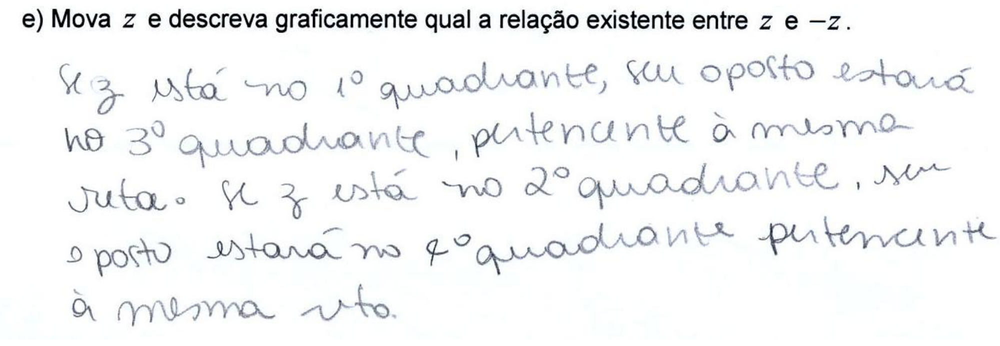
Figura 47. Resposta de Sálvio (oposto de número complexo).

Percebe-se nessa resposta que o estudante determina com precisão a localização dos pontos e explicita que pertencem à mesma reta que passa pela origem. Apesar de dizer que os pontos "são simétricos", pode-se notar que indiretamente compreende que os pontos são simétricos em relação à origem, pois "estão na mesma reta" e "quando o vetor (representante de) z está no primeiro quadrante, o outro (o que representa o oposto de z) está no terceiro".

Já a Figura 48 mostra a resposta de Mariana, imprecisa do ponto de vista do rigor, mas nela pode-se perceber também a assimilação da noção de simetria pontual entre um número complexo e o seu oposto.

---

[17] Mathematical activity has two sides. The visible or conclusive side is the one of mathematical objects and valid processes used to solve a given problem. The hidden and crucial side is the one of cognitive operations by which anyone can perform the valid processes and gain access to a mathematical object. Registers of semiotic representation and their coordination set up the cognitive architecture which anyone can perform the cognitive operations underlying mathematical processes.


e) Mova z e descreva graficamente qual a relação existente entre z e $-z$.

Se z está no 1º quadrante, seu oposto estará no 3º quadrante, pertencente à mesma reta. Se z está no 2º quadrante, seu oposto estará no 4º quadrante pertencente à mesma reta.

Figura 48. Resposta de Mariana (oposto de número complexo).

Faltou precisão nessa resposta de Mariana, para explicitar que “se z está no primeiro quadrante, seu oposto estará no terceiro quadrante”, *mantendo distância em relação à origem igual a que z mantém*. A conversão do registro gráfico para o registro na língua natural é uma conversão que nossa prática tem mostrado ser difícil para o estudante. Concluímos, assim, que são necessárias mais atividades exploratórias desse tipo de conversão, do registro gráfico para o registro na língua natural.

Atividade 2
a) Represente no Geogebra um número complexo qualquer $z = a + bi$. Em seguida represente outro complexo qualquer, $w = c + di$. Construa, graficamente, o vetor que representa a soma de z e w.

Análise a priori. O objetivo aqui é verificar se o estudante sabe somar vetores. É provável que o estudante lembre-se da regra do paralelogramo, vista principalmente nas aulas de Física, onde o conteúdo vetores é abordado. Espera-se que o estudante já tenha se apropriado da representação de um número complexo por um vetor, como foi visto na Atividade1. Analisamos a seguir algumas possíveis e esperadas soluções.

É possível que o aluno, em uma primeira tentativa, realize a adição dos pontos imagens dos complexos. Embora o aluno não tenha claro o significado de somar coordenadas cartesianas, poderá tentar utilizar o campo de entrada algébrica do software, digitando apenas “A+B”. Esse tipo de solução é questionável porque, embora forneça a soma dos dois vetores, não atende o enunciado da atividade, que pede para que o aluno construa **graficamente**, o vetor que representa a soma de z e w. Insistimos na construção geométrica, porque concordamos com Duval:

> A passagem de um sistema de representação a outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e frequentes na atividade matemática, não têm nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes. (DUVAL, 2009, p. 18).

Numa segunda tentativa de solução do problema, o aluno pode usar o fato de que os pontos que representam números complexos são extremidades de segmentos orientados com centro na origem do plano complexo e, desse modo, efetua a soma de forma vetorial, segundo a regra do paralelogramo.

Uma terceira e possível solução é a seguinte: o aluno descobre, como mostra a Figura 49, a ferramenta "**Vetor a partir de um ponto**".

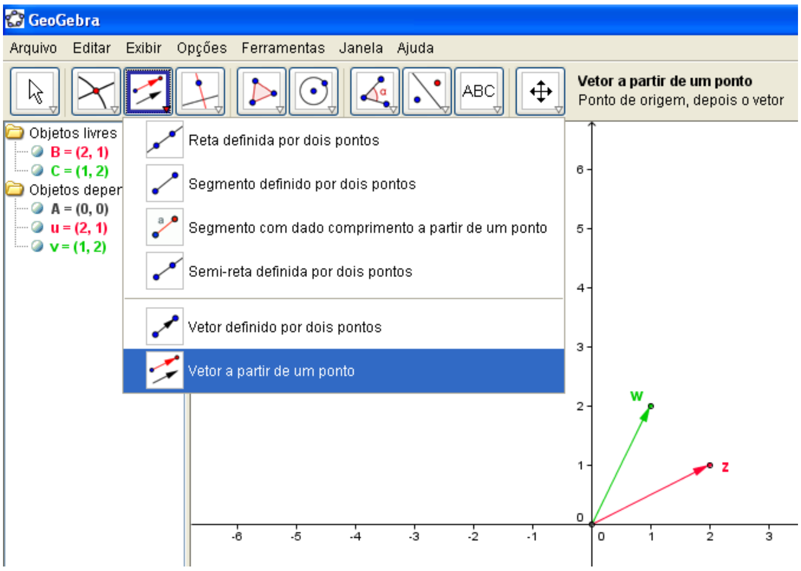


Figura 49. Ferramenta "Vetor a partir de um ponto".

Na ajuda do software, presente na tela, no alto à direita, o aluno lê "Ponto de origem, depois o vetor". Então o aluno clica na extremidade de w e depois clica no vetor que representa z. Isso tem o efeito, mostrado na Figura 50, de transladar o vetor que representa z, de modo que a sua origem coincida com a extremidade do vetor que representa w. O aluno está usando uma regra que é bem conhecida das aulas de Física: para somar dois vetores, translada-se um deles de tal modo que a sua origem coincida com a extremidade do outro. Então o vetor resultante da soma dos dois vetores é o vetor que tem origem na origem do primeiro vetor e extremidade na extremidade do outro vetor.

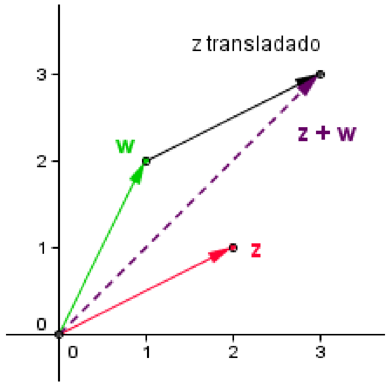


Figura 50. Construção do vetor soma de z e w.

Em uma quarta solução o aluno, conhecendo a regra do paralelogramo e sabendo que as diagonais de um quadrilátero se intersectam no ponto médio se, e somente se, ele é um paralelogramo, pode construir o simétrico da origem em relação ao ponto médio do segmento determinado por W e Z, imagens de w e z. Esse ponto, como mostra a Figura 51, representa a imagem do número complexo resultante da adição de w e z.

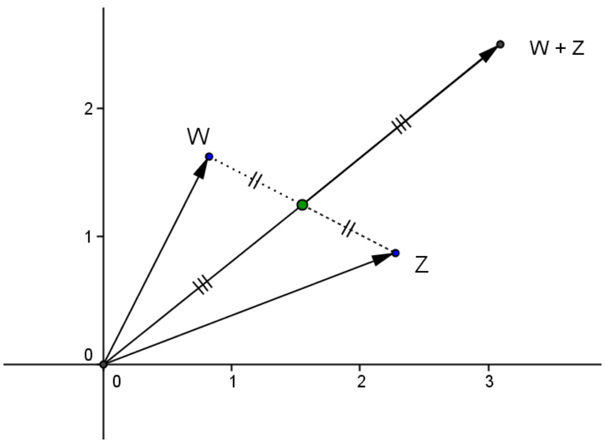


Figura 51. Construção de z + w, com propriedade do paralelogramo.

Análise a posteriori. Como esperado, os alunos já estavam familiarizados com a representação gráfica de um número complexo. No entanto observamos que duas duplas, na fase da Ação, ficaram procurando alguma ferramenta que realizasse a adição dos vetores, sem se darem conta de que precisariam fazer uma construção. Tal comportamento não fora previsto em nossa análise a priori.

A dupla Mariana e Sálvio representaram vetorialmente dois números complexos, na tela do Geogebra. No entanto, não estavam conseguindo realizar a adição desses vetores. Sálvio pensou em aplicar o teorema de Pitágoras, para calcular o módulo dos vetores e depois adicioná-los. O pesquisador teve que intervir, e reproduzimos aqui o diálogo:

> **Pesquisador**: Sálvio, quer dizer que para somar vetores basta somar os módulos?
>
> **Sálvio**: é.
>
> **Mariana**: não é. (*exemplifica, desenhando no papel, dois vetores numa reta, com módulos diferentes e sentidos contrários*): se um estiver para cá, e outro para lá então não soma, subtraem-se os módulos.
>
> **Pesquisador**: isso se eles estiverem contidos em uma mesma reta, né?
>
> **Mariana**: É.
>
> **Pesquisador**: e se um vetor estiver apontando para o nordeste e o outro apontando para o noroeste? (*faz o gesto com as mãos indicando a direção*).
>
> **Sálvio**: não posso calcular os módulos de cada um deles?
>
> **Pesquisador**: Pode. Mas quero perguntar: o que é que dá quando você adiciona vetores?
>
> **Sálvio**: dá um vetor.
>
> **Pesquisador**: então onde está o vetor que representa a soma desses vetores que estão na sua tela?
>
> **Sálvio**: Ah! Já sei, é aquela regra que emenda um no outro...
>
> **Mariana**: (*dando risada*): ou poligonal...
>
> **Pesquisador**: Então pensem mais um pouquinho, pois parece que vocês já sabem como se faz...

A dupla Laura e Leandro lembraram-se também da regra da poligonal, mas aplicaram-na de forma errada: na verdade construíram um vetor que representava a diferença dos dois primeiros vetores. A dupla Mariana e Sálvio também construíram o vetor que representava a diferença. A intervenção do pesquisador foi no sentido de questionar os alunos sobre em qual assunto – e como – eles adicionavam vetores. Mariana e Sálvio lembraram-se que usaram em Física, no estudo de movimento circular e que usavam a regra do paralelogramo. Entretanto, eles só se lembravam desse nome, pois Mariana disse que tinha que “prolongar” os vetores, e Sálvio disse que era uma fórmula. Com mais um pouco de entrevista descobrimos que Mariana usou um termo incorreto para expressar sua ideia, que seria de traçar as paralelas e Sálvio estava pensando na lei dos cossenos que, na verdade, é utilizada para calcular o módulo do vetor resultante.

Vemos, portanto, que não está completamente claro para esses estudantes como se adicionam vetores. Essa experimentação comprova que o conhecimento a respeito de vetores, para esses estudantes, não foi significativo, uma vez que eles não conseguiram reconhecer nessa proposta, o mesmo objeto que já foi visto em suas vidas acadêmicas, pelo menos quando do estudo de Física. Tais fatos parecem caracterizar um efeito de contrato didático, o deslize metacognitivo, que "ocorre quando o professor considera uma técnica, útil para resolver um problema, como objeto de estudo, e perde de vista o verdadeiro saber a desenvolver." (Almouloud, 2007, p.95). Porém, os enganos e a falta de conhecimento dos alunos a respeito de vetores é também reflexo do que ocorre na imensa maioria das escolas (e particularmente na escola dos sujeitos dessa pesquisa): o enfoque da Geometria Analítica é apenas algébrico, nunca vetorial. Tal falha é constatada nos livros didáticos, como apontado por Lima (2001, p.307).

A exceção ficou por conta da dupla Alex e Natália, que executaram rapidamente a tarefa. Eles utilizaram a regra do paralelogramo, uma das soluções apresentadas na análise a priori.

b) Selecione o menu **"Malha**", no menu "**Exibir".** Movimente os segmentos orientados que representam z e w, posicionando suas extremidades em pontos do plano que tenham coordenadas inteiras. O que se pode concluir a respeito das coordenadas das extremidades dos segmentos orientados que representam $z+w$, z e w? Como você chegou a essa conclusão?

c) Apague o vetor que representa $z+w$. Construa agora o representante de $z-w$. Novamente, movimente os segmentos orientados que representam z e w, posicionando suas extremidades em pontos do plano que tenham coordenadas inteiras. O que você se pode concluir a respeito das coordenadas das extremidades dos representantes de $z-w$, z e w? Como você chegou a essa conclusão?

Análise a priori dos itens b e c. Duval (2009, p. 63) afirma que "a conversão das representações é, para a aprendizagem, uma atividade tão fundamental quanto as atividades de formação ou de tratamento" embora, ainda segundo Duval (Ibidem, p.63), "a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos". É por isso que o objetivo subjacente desse item é fazer com que o aluno realize a conversão do registro algébrico para o registro gráfico. Dessa forma ele é levado a perceber que, na escrita algébrica, a adição de $z = a + bi$ com $w = c + di$, correspondente ao número complexo $a + c + (b + d)i$ e, no registro gráfico, corresponde a um vetor, cuja extremidade nada mais é do que a diagonal do paralelogramo que tem os segmentos orientados representantes de z e w como lados.

A escolha da variável didática usar o quadriculado (malha) do software teve o intuito de possibilitar ao aluno a efetiva visualização dos pontos do plano cujas coordenadas são dadas por números inteiros. Espera-se que, utilizando tais pontos e manipulando apropriadamente os vetores o estudante possa perceber que o complexo resultante da adição (subtração) de z e w tem como parte real a soma (diferença) das partes reais de z e w e, como parte imaginária a soma (diferença) das partes imaginárias de z e w, o que já foi aprendido algebricamente.

Interessa-nos também reconhecer como o aluno fez as suas conclusões, pois é possível que ele se baseie em um padrão numérico, visível nas coordenadas mostradas na janela de Álgebra ou, diferentemente, pode se apoiar em um padrão geométrico, contando o número de quadradinhos "deslocados" pela extremidade dos segmentos orientados para se obter a extremidade do vetor resultante da soma (diferença).

Análise a posteriori. O recurso da malha e a exibição da janela de Álgebra possibilitaram que os alunos tirassem as conclusões corretas tal como previsto em nossa análise a priori embora, novamente, com imprecisões na redação. As respostas obtidas foram similares a de Leandro, mostrada na Figura 52.

b) Selecione o menu **"Malha"**, no menu "**Exibir".** Movimente os segmentos orientados que representam z e w, posicionando suas extremidades em pontos do plano que tenham coordenadas inteiras. O que se pode concluir a respeito das coordenadas das extremidades dos segmentos orientados que representam $z+w$, z e w? Como você chegou a essa conclusão?

Z=(0,5)
W=(5,0)
Z+W=(5,5)

As coordenadas do vetor Z+W é sempre a soma das coordenadas dos vetores Z e W. Cheguei a essa conclusão movimentando os vetores e observando suas coordenadas.

Figura 52. Resposta de Leandro (adição de vetores).

A imprecisão na resposta de Leandro reside no fato de não explicitar **quais** coordenadas são somadas, embora tenha lançado mão do registro de representação por pares ordenados para exemplificar: z = (0, 5), w = (5, 0) e z + w = (5, 5).

Entretanto, na execução da atividade, ocorreram duas dificuldades não previstas com relação à subtração:

1ª) Dados dois vetores, representantes de dois números complexos, os alunos representaram a diferença simplesmente desenhando o vetor cuja origem e extremidade eram as extremidades dos dois vetores iniciais. Este vetor representa a diferença dos vetores iniciais, mas este vetor não representa a diferença entre os números complexos, uma vez que sua origem não coincide com a origem do plano complexo.

2ª) Os alunos questionaram o porquê da regra da poligonal.

Esperávamos que os estudantes efetuassem z – w adicionando z ao oposto de w. Embora *algebricamente* isso estivesse claro para eles, a operação gráfica correspondente de se construir o vetor oposto de w não foi realizada, embora tivesse sido vista e feita com facilidade na Atividade 1, no dia anterior. Foi necessária a intervenção do pesquisador para institucionalizar também esses conhecimentos. Uma vez realizada a construção, os alunos puderam concluir que as coordenadas do vetor que representava a diferença dos vetores eram as diferenças das coordenadas desses, tal como verificado anteriormente para a adição.

Atividade 3 Vamos criar, no Geogebra, uma ferramenta que, dado um número complexo z qualquer, construa o seu conjugado, isto é, $\overline{z}$. Para isso:
a) Represente no Geogebra um complexo $\overline{z}$ qualquer, utilizando a ferramenta "**Vetor definido por dois pontos**".
b) Construa o conjugado desse complexo.

Análise a priori dos itens a e b. O propósito das atividades desses itens é simplesmente retomar a representação gráfica de um número complexo e a respectiva construção do seu conjugado.

Análise a posteriori. Os estudantes não apresentaram dificuldades, pois se tratava de tarefa já executada nas Atividades 1 e 2.

c) No menu "**Ferramentas**", clique em "**Criar uma nova ferramenta...**". Surgirá uma janela, em que você deve especificar quais são os objetos de saída dessa nova ferramenta. Selecione, caso ainda não esteja selecionada, a guia "**Saída de Objetos**". Se essa janela estiver ocultando os objetos presentes no plano complexo, arraste-a para o lado e, em seguida, clique com o botão esquerdo do mouse na extremidade do vetor que representa o conjugado de z e depois no próprio vetor que representa o conjugado de z. Essa ação indica para o software que esses são os objetos de saída, quando a nova ferramenta for utilizada. Clique em "**Próximo >**".

d) Com a guia "**Entrada de Objetos**" selecionada, clique nos objetos de entrada, isto é, no ponto que é extremidade do vetor representante de z e no ponto que representa a origem do plano complexo. Clique em "**Próximo >**".

e) No campo "**Nome da ferramenta**", da guia "**Nome & Ícone**", digite "Conjugado". Depois cliquem em "**Concluído**". O software apresenta uma janela avisando que a nova ferramenta foi criada com sucesso. Clique em "**Ok**".

Análise a priori dos itens c, d, e. Aqui optamos por instruções fechadas, uma vez que a meta é o uso das ferramentas como instrumento para validar ou não propriedades relativas aos números complexos. Ou seja, a criação de ferramentas nesse software será vista aqui apenas como meio para que se possa apreender conhecimentos relativos aos números complexos. Em resumo, a criação de ferramenta no software compreende três passos: escolha dos objetos de saída, escolha dos objetos de entrada e, por último, a escolha do nome da futura ferramenta. Espera-se que os alunos percebam que é importante a ordem em que os objetos de entrada são escolhidos, porque é essa ordem que o software usará quando for aplicar a ferramenta em uma construção. Para o leitor interessado, o apêndice descreve passo a passo as criações das ferramentas para os números complexos.

Análise a posteriori. O objetivo principal desses itens era deixar uma ferramenta para construção de conjugado pronta para as tarefas dos próximos itens. Assim, julgamos conveniente mostrar um exemplo de criação de ferramenta para os estudantes, pois não queríamos que a criação de ferramentas fosse uma dificuldade técnica. Escolhemos fazer a construção da circunferência circunscrita a um triângulo e depois criar esta ferramenta no Geogebra. Os alunos sentiram-se seguros para fazer a construção da ferramenta "Conjugado".

f) Verifique a utilidade da ferramenta recém-criada: apague os objetos que ainda estejam no plano complexo, crie um novo representante de um complexo z qualquer e, com a nova ferramenta "Conjugado" (que está na barra de ferramentas, como último ícone à direita), crie o conjugado de z.

Análise a priori. O objetivo aqui é levar o aluno a perceber que a ferramenta criada no Geogebra elimina os passos intermediários da construção, apresentando tão somente o resultado desejado, economizando a repetição de uma mesma construção várias vezes. No entanto, o pesquisador deve certificar-se, nesse momento, se a ferramenta recém-criada está realizando a construção como esperado, pois a ordem como os objetos de entrada foram indicados na construção deve ser respeitada quando se aplica a ferramenta.

Análise a posteriori. Mesmo com a instrução que dizia "clique com o botão esquerdo do mouse na extremidade do vetor que representa o conjugado de z e depois no próprio vetor que representa o conjugado de z" para especificar os objetos de saída, os alunos não clicaram no vetor. Na fase de validação, em que os alunos foram verificar se a construção funcionava para outro complexo qualquer, viram que a ferramenta fornecia apenas a imagem do complexo, sem o vetor que o representava. Isso ocorreu com todas as duplas e, de certo modo foi útil, pois refizeram a criação da ferramenta, e passaram a tomar mais cuidado ao especificar os objetos de entrada e de saída. Além disso, aprenderam a apagar a ferramenta construída de forma inadequada. Embora o roteiro fosse específico nos passos que os alunos deveriam executar, a construção do vetor está subentendida, pois o enunciado do item c diz "crie o conjugado de z". A rigor, deveríamos mudar esse enunciado para "crie o vetor representante do conjugado de z". As duplas também se confundiram um pouco no momento de aplicar a ferramenta, pois não clicavam nos objetos de entrada na mesma ordem em que especificaram no momento de criação da ferramenta, o que resultava em vetor que não representava o conjugado do complexo. Nessa atividade as dificuldades pareceram ser de ordem técnica, referentes ao software, e não referentes ao conteúdo matemático.

g) Agora construa $-z$ e crie uma ferramenta para $-z$ e, quando for nomeá-la, chame-a de "Oposto de complexo".

h) Apague os objetos do plano complexo. Represente dois complexos quaisquer, z e w. Construa o representante da soma de z e w. Crie uma ferramenta para a soma de dois complexos. Chame-a de "Adição de Complexos".

Análise a priori dos itens g e h. A finalidade dessas atividades é apenas a construção de ferramentas para o conjugado e para o oposto de números complexos, que serão utilizadas como ferramentas de validação (ou não) das propriedades apresentadas no item seguinte. Novamente, o pesquisador deve verificar se o uso dessas ferramentas está condizente com o esperado. É importante que o pesquisador intervenha, representando dois complexos quaisquer, no computador que está sendo utilizado pelo aluno e peça que **o aluno** utilize as ferramentas criadas para construir opostos, conjugados e somas de complexos. Desse modo o pesquisador se assegura de que as condições para a próxima tarefa estejam garantidas.

Análise a posteriori. Não houve dificuldades nestas tarefas, g e h, uma vez que também consistiam em criar ferramentas para construções já vistas nas Atividades 1 e 2. Os erros e desequilíbrios que surgiram nos itens anteriores desta Atividade 3 fizeram com que os alunos não mais os cometessem durante a construção e verificação das ferramentas nestes itens g e h.

i) Verifique se as propriedades abaixo são verdadeiras ou falsas. No caso em que a propriedade for falsa, dê um contraexemplo.		
1) $\overline{\overline{z}} = z$ ( )	2) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ ( )	3) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$ ( )
4) $z+w = w+z$ ( )	5) $(z+w)+v = z+(w+v)$ ( )	6) $\overline{z+w} = -\overline{z} + \overline{(-w)}$
j) Feche o Geogebra, salvando o arquivo com o seu nome.		

Análise a priori. O objetivo final dessa atividade é verificar se o estudante consegue utilizar o software para validar ou não propriedades que envolvem adição e conjugado de números complexos, com uso do software de geometria dinâmica. Em particular, apenas a propriedade mostrada no item 6 é falsa. Esperamos desse modo, que o estudante utilize todas as ferramentas criadas e, mais do que isso, que possa investigar a validade ou não de propriedades relativas aos números complexos, baseado na visualização gráfica do comportamento dos vetores que representam tais números.

Análise a posteriori. Tal como esperado, os estudantes recorreram às ferramentas criadas para verificar se as propriedades eram verdadeiras ou falsas. Uma dificuldade surgiu. Para verificar a propriedade 2, por exemplo, os alunos ficavam com vários vetores na tela, representando dois números complexos, seus conjugados, sua soma e a soma dos conjugados. Isso fez com que eles se atrapalhassem no início; depois de algum tempo se acostumaram e conseguiram verificar corretamente quais propriedades eram verdadeiras e quais eram falsas.

Segundo Duval (1999, p. 8)

> O uso da visualização requer um treino específico para visualizar cada registro. Figuras geométricas ou gráficos cartesianos não são diretamente disponíveis como representações icônicas podem ser. E seu aprendizado não pode ser reduzido ao treino de construí-las.[...] visualização consiste em apreender diretamente toda a configuração das relações e em discriminar o que é relevante nela. (DUVAL, 1999, p. 8, tradução nossa[18])

Por isso ficamos satisfeitos quando a dupla Alex e Natália apontou que, para corrigir a propriedade 6, teria que se tomar o vetor oposto àquele que representava $\overline{z+w}$. Esse momento é mostrado na Figura 53. Isso equivale a, algebricamente, colocar um sinal de subtração antes de $\overline{z+w}$ na expressão do item 6 do enunciado da Atividade. Essa conclusão dos alunos mostrou que, nesse momento, eles estavam fazendo corretamente as conversões entre uma e outra representação.

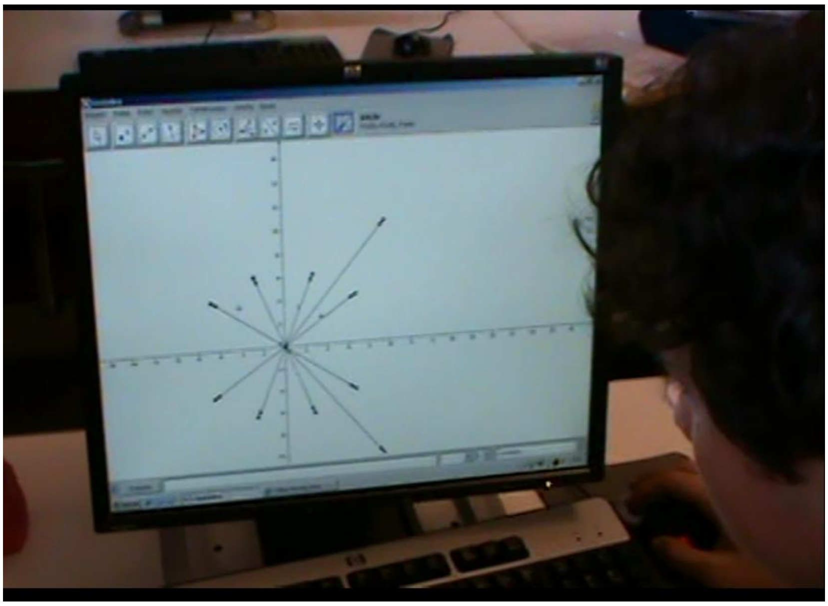


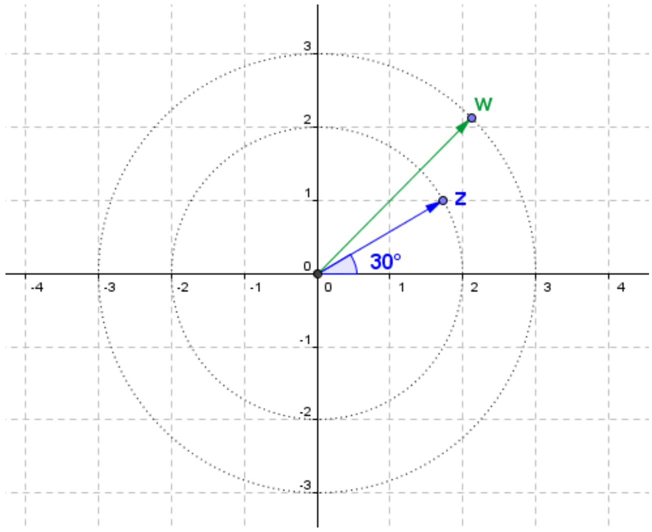
Figura 53. Aluno verificando validade de propriedade dos complexos.

---

[18] The use of visualization requires a specific training, specific to visualize each register. Geometrical figures or Cartesian graphs are not directly available as iconic representations can be. And their learning cannot be reduced to training to construct them. […] visualizations consists in grasping directly the whole configuration of relations and in discriminating what is relevant in it.

Atividade 4

a) As representações gráficas de dois complexos z e w no plano de Argand-Gauss são mostradas na figura a seguir. Escreva esses números na forma trigonométrica.



Análise a priori. Inicialmente essa atividade será feita com papel quadriculado. O objetivo é verificar se o aluno conhece a forma trigonométrica dos números complexos. Espera-se que ele reconheça, a partir da figura dada, os módulos e os argumentos de z e w. No caso de o aprendiz não ter visto a forma trigonométrica ou dela não se recordar, o pesquisador deverá institucionalizar esse conhecimento, recordando as definições de módulo e argumento de complexo.

Análise a posteriori. Embora a atividade estivesse prevista para começar a ser feita com lápis e papel, os alunos tentaram reproduzir o desenho, indicado na folha de atividade, na tela do Geogebra. A dupla Laura e Leandro consultou uma apostila que possuíam, para recordar a forma trigonométrica de um número complexo e a tentativa de Leandro de construir o registro trigonométrico é mostrada na Figura 54. A dupla Natália e Alex sabia fazer a conversão da forma gráfica para a forma trigonométrica. Depois de poucos minutos todas as duplas escreveram de forma correta os dois números dados na forma trigonométrica.

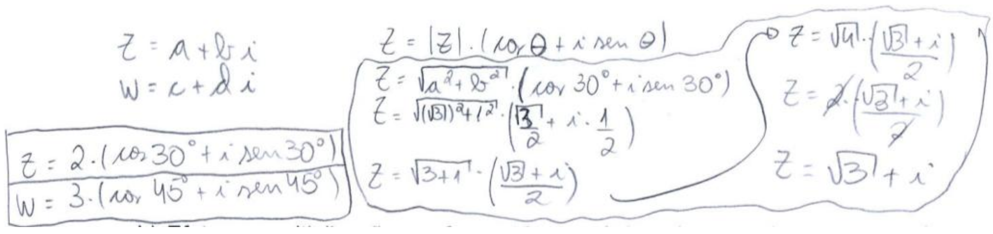


Figura 54. Tentativa de conversão do gráfico para trigonométrico.

Nesse registro parece que o aluno não apreendeu totalmente o que foi pedido na atividade. Embora a representação trigonométrica esteja correta, o aluno utilizou o registro algébrico, o que não era necessário nessa atividade.

b) Efetue a multiplicação, na forma trigonométrica, dos complexos z e w do item a. Localize no plano complexo representado no item a, o número complexo que é o produto de z e w.

Análise a priori. Também com lápis e papel, espera-se que o aluno efetue algebricamente o produto de z por w na forma trigonométrica, isto é:

$z \cdot w = |z|\left(cos30^o + isen30^o\right) \cdot |w|\left(cos45^o + isen45^o\right)$ou seja:

$$z \cdot w = |z||w|\left[cos30^o cos45^o + i\left(cos30^o sen45^o + sen30^o cos45^o\right) + i^2 sen30^o sen45^o\right]$$

ou ainda:

$$z \cdot w = |2||3|\left[\left(cos30^o cos45^o - sen30^o sen45^o\right) + i\left(cos30^o sen45^o + sen30^o cos45^o\right)\right]$$

e daí, $z \cdot w = 6\left[cos(30^o + 45^o) + isen(30^o + 45^o)\right]$.

O que se quer é que o aluno realize a conversão do registro gráfico para o registro trigonométrico. Diferentemente das abordagens verificadas por esses alunos no ensino médio, a conversão no sentido contrário, isto é do registro trigonométrico para o gráfico, ainda é necessária para responder a atividade, pois para localizar o complexo $z \cdot w$. Como menciona Duval:

> E quando uma mudança de registro deve ser introduzida na aprendizagem, geralmente escolhe-se uma direção e os casos em que são congruentes.[...] Há algo como um instinto para evitar

> situações de não congruência que levam às dificuldades reais. (DUVAL, 1999, p.6, tradução nossa[19]).

Espera-se que o aluno perceba que o argumento desse complexo é a soma dos argumentos de z e w. Assim, ele já tem a direção de $z \cdot w$: basta rotacionar o vetor que representa w mais 30^o, em torno da origem, no sentido anti-horário. Espera-se também que o aluno perceba que o módulo do vetor resultante do produto é dado pelo produto dos módulos dos fatores. O próximo item trata da generalização.

Análise a posteriori. A dupla Alex e Natália já sabiam multiplicar dois números complexos na forma trigonométrica: o módulo do produto é o produto dos módulos dos fatores e o argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores, porém fizeram as contas para se certificarem. A dupla Mariana e Sálvio teve dificuldades em lembrar como era a fórmula: lembravam-se que os módulos eram multiplicados, mas disseram que “somavam-se os cossenos” (*sic*). Houve intervenção do pesquisador, pedindo para que eles, efetivamente, fizessem a conta. Não entenderam e mostraram dificuldades em realizar os tratamentos dentro dos registros trigonométricos. Para essa dupla e para a outra, Leandro e Laura, o pesquisador teve que passar à fase de institucionalização.

c) Inicialize o software Geogebra e, em seguida, abra o arquivo que você salvou na Atividade 3. Represente no Geogebra dois complexos quaisquer. Nomeie um deles de z e o outro de w. Construa $z \cdot w$.

Análise a priori. Espera-se que, nesse momento, os alunos não mais confundam “desenhar” com “construir”. Entretanto, o pesquisador deverá verificar a validade ou não da construção. O objetivo é fazer com que o aluno generalize os resultados vistos nos itens a e b. Isto é, que pense em rotacionar o vetor que representa w, em torno da origem, por um ângulo igual ao argumento de z e que pense em multiplicar o módulo de w por um fator igual a $|z|$.

---

[19] And when a change of register must be introduced in the learning, one generally chooses one direction and the cases that are congruent. […] There is something like an instinct to avoid the non-congruence situations that lead to real difficulties.

Uma saída possível para construção e mostrada na Figura 55, faz uso da ferramenta "**Girar em Torno de um Ponto por um Ângulo**".

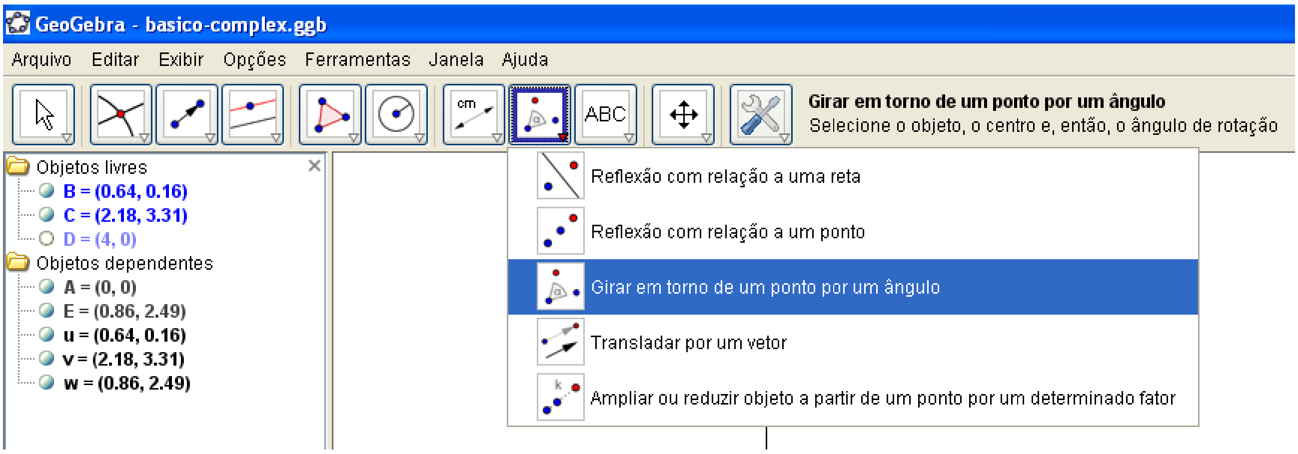


Figura 55. Ferramenta "Girar em torno de um ponto por um ângulo".

O uso desta ferramenta exige que o aluno compreenda que o giro é feito por um objeto em torno de um ponto, no sentido horário ou anti-horário, sendo essa possibilidade apresentada pelo software, no momento da operação, em uma janela separada. Uma vez que o aluno domine essa ferramenta, acreditamos que a tarefa será realizada a contento, mesmo que isso demande um pouco de experimentação e observação.

Para efetuar o produto do módulo de w pelo módulo de z, o aluno poderá utilizar homotetia, que no Geogebra é realizada com a ferramenta exibida na Figura 56: "**Ampliar ou reduzir objeto a partir de um ponto por um determinado fator**".

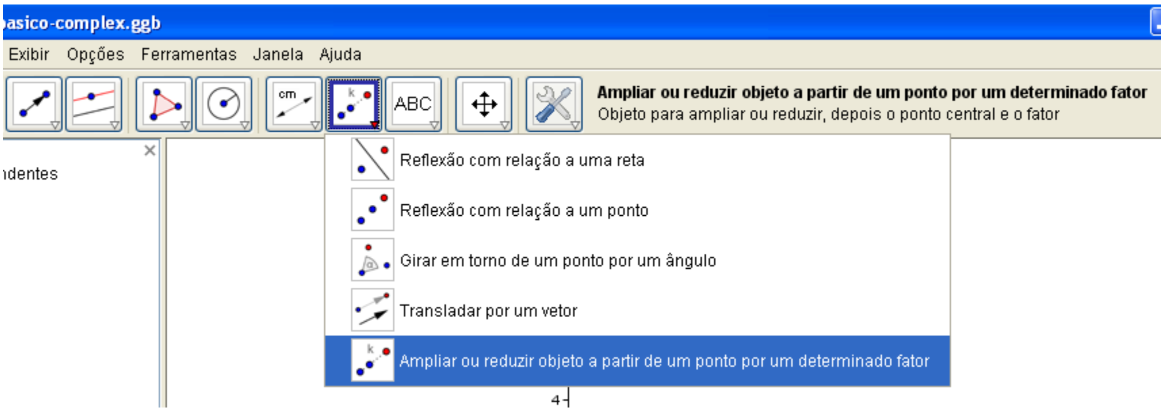


Figura 56. Ferramenta "Ampliar ou reduzir objeto...".

O fator da homotetia deverá ser o módulo de z; por isso o aluno deverá tomar previamente a distância entre a origem e a extremidade do vetor que representa z, o que é feito, de acordo com a Figura 57, com a ferramenta “**Distância ou comprimento**”.

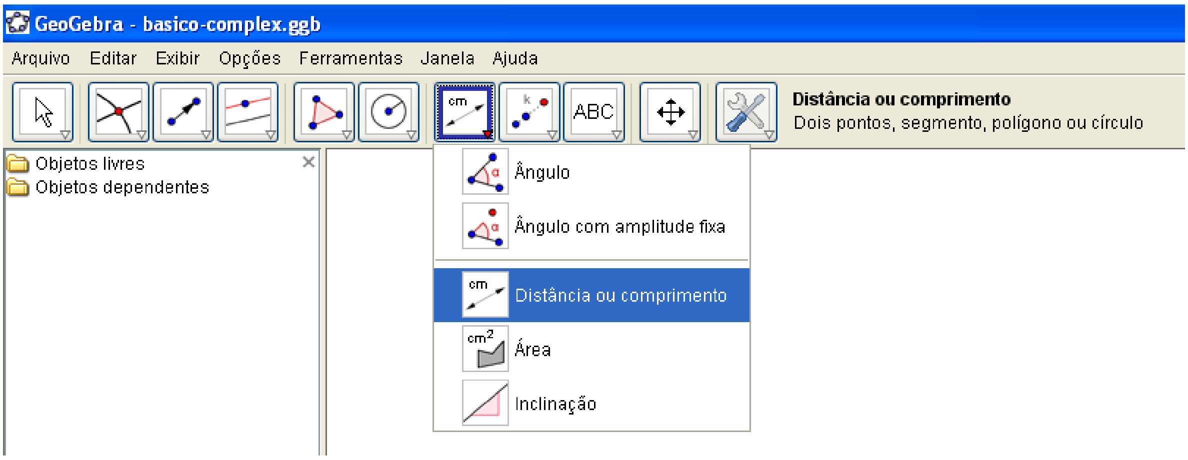


Figura 57. Ferramenta "Distância ou comprimento".

É possível também realizar a ampliação ou redução do módulo de w por um fator igual a $|z|$ utilizando-se o teorema de Tales.

Análise a posteriori. Essa atividade foi a mais difícil de ser executada, por vários motivos. Um deles é que os alunos não perceberam que era necessário resolver o problema no papel e que a resolução no Geogebra deveria ser uma generalização. Portanto, os alunos ainda estavam desenhando no software, em vez de construírem. Acreditamos, em vista disso, que deveríamos reformular a apresentação da Atividade 4, enfatizando que a tarefa a ser cumprida no Geogebra era a de se construir o produto de dois números complexos **quaisquer** e não os dois particulares que foram dados no início, para recordar a forma trigonométrica. Ademais, as ferramentas que o software possui para a rotação e para ampliação não são de compreensão tão imediata; a ordem para se clicar e selecionar os objetos é essencial para que a construção resulte no que se espera e, infelizmente, o Geogebra não tem um manual ou ajuda com exemplos. Nesse caso, os alunos já haviam entendido a parte matemática da tarefa, mas tiveram dificuldades na construção devido às particularidades de como efetuar os comandos no software. A fim de que os alunos superassem esse obstáculo, foi necessária a intervenção do pesquisador, não para explicar a matemática subjacente à tarefa, mas as particularidades do software que estava sendo utilizado.

d) Crie no Geogebra uma nova ferramenta para a multiplicação de dois números complexos.

e) Represente no Geogebra um número complexo que tenha módulo unitário. Represente outro número complexo qualquer, de módulo **não** unitário. Utilize a ferramenta que você construiu para multiplicar esses dois números. Movimente os números complexos iniciais. O que você observa?

Análise a priori. O propósito dessa atividade é levar o aluno a elaborar hipóteses para casos particulares de produto entre complexos e validá-las, por meio do software, que permite a mudança dinâmica das figuras, mantendo suas propriedades. Nesse caso, espera-se que o aluno perceba duas coisas. A primeira é que a extremidade de um vetor que representa um complexo de módulo unitário pertence a uma circunferência de centro na origem e raio 1. A segunda é que, utilizando a ferramenta recém-criada, o aluno note que, multiplicar um complexo qualquer por outro de módulo unitário tem como consequência o giro do primeiro em torno da origem, como mostrado na Figura 58, segundo um ângulo igual ao argumento do complexo unitário, sem alteração do seu módulo. É provável que o aluno responda que o vetor apenas rotacionou em torno da origem. No entanto, o pesquisador poderá intervir nesse momento, perguntando de quantos graus foi a rotação. O pesquisador não deve responder: o estudante deve procurar no software a ferramenta apropriada para medir o ângulo de rotação, no caso, a ferramenta "**Ângulo**".

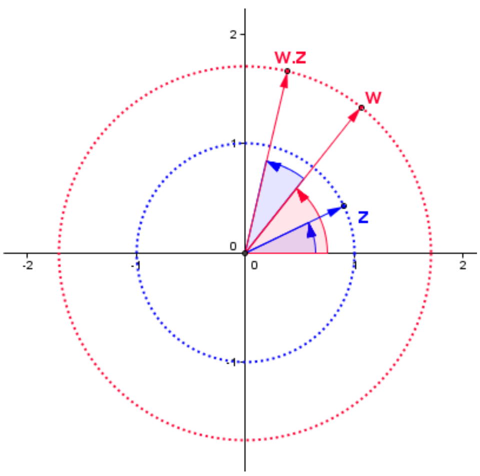


Figura 58. Multiplicação de um complexo por outro unitário.

Análise a posteriori. Antes, uma observação. O item **e** não foi aplicado no mesmo dia em que foram feitos os itens **a**, **b**, **c** e **d**.. Estes tomaram muito tempo e percebemos que essa Atividade 4 não estava bem dimensionada para o tempo de uma hora. Então achamos melhor retomar os itens, **e**, **f**, **g** em outro dia. Uma dificuldade surgiu, durante a criação da ferramenta para a multiplicação, isto é, na execução do item **d** da Atividade 4. Os alunos haviam feito a construção do produto, e mantiveram como módulo o valor igual a 6, que era o do exemplo. Na criação da ferramenta, mantiveram esse valor. Resultado: quando tentavam aplicar a ferramenta para outro par qualquer de números complexos, o vetor representante do produto sempre tinha módulo 6. Isso corrobora que a mudança no enunciado, enfatizando que a construção do produto é para **qualquer** par de números complexos deve ser feita. Depois de esclarecida a falha, pareceu-nos que por conta da ação, formulação e validação da Atividade 3 (criação de ferramentas) e pela intervenção do pesquisador no item anterior, a criação da ferramenta para multiplicação de dois números complexos foi bem executada e os alunos pareceram satisfeitos quando verificaram que a ferramenta estava funcionando bem, isto é, quando aplicada a dois números complexos, ela proporcionava o resultado esperado.

Com relação ao item **e**, pudemos observar que os alunos queriam tomar como representante de um complexo unitário o vetor com extremidade (1,0) e isso não era esperado, em virtude de termos apresentado a figura do item a, em que aparecem o representante de um número complexo de módulo 2 e o representante de um número complexo de módulo 3, com as respectivas circunferências de raios 2 e 3 e centro na origem. Transcrevemos o diálogo, entre o pesquisador e a dupla Mariana e Sálvio.

> **Pesquisador**: Quantos números complexos, de módulo igual a 1, existem?
>
> **Sálvio**: 1, -1, i e –i.
>
> **Pesquisador**: Só esses? Você me falou quatro que pertencem aos eixos. Não há outros?
>
> **Sálvio**: ...
>
> **Pesquisador**: Vou mudar a pergunta. Quantos números complexos, de módulo igual a 2, existem?
>
> **Sálvio**: 2, -2 (*pensa um pouco...*), 2i e -2i.

Pesquisador: Só esses?

Sálvio: Só.

Pesquisador: E aquele número complexo do item a? (*Pesquisador pega a folha de atividades e mostra para o Sálvio*).

Sálvio:Ah... o "z" tinha módulo 2...

Pesquisador: Pois é. E o "z" não está em nenhum dos eixos.

Mariana: (*muito surpresa*) Nossa... Então tem (*sic*) infinitos números complexos com módulo 2?

Pesquisador: Tem. E onde eles estão?

Mariana: Numa circunferência...

Sálvio: De raio 2.

Pesquisador: E centro na origem.

Pesquisador: Certo. E quantos números complexos, de módulo igual a 1, existem?

Sálvio: (*Muito surpreso*) Infinitos.

Pesquisador: E onde eles estão?

Mariana: Numa circunferência de raio 1 e centro na origem.

Sálvio: Interessante...

Mariana: Bem interessante...

Pesquisador: Essa circunferência corta os eixos coordenados, em quatro pontos, certo?

Mariana e Sálvio: Sim.

Pesquisador: Pois os valores que vocês me responderam foram apenas esses quatro: 1, -1, i e –i.

Sálvio: Porque são esses que a gente usa em Álgebra.

O diálogo mostra a existência do obstáculo didático causado, talvez, por escolhas feitas durante apresentação do assunto, como mostra a última frase de Sálvio, no diálogo transcrito[20]. Almouloud nos lembra que

> Os obstáculos desse tipo (*didático*) são, em sua maior parte, inevitáveis e inerentes à necessidade da transposição didática, embora seu reconhecimento permita ao professor rever a introdução escolhida para um determinado conceito para explicitar a dificuldade vivida pelo aluno. (ALMOULOUD, 2007, p. 142)

As dificuldades locais dessa tarefa foram superadas. Após a construção, os alunos pareciam fascinados quando movimentavam os vetores no software, o que Mariana expressou como "Legal! Isso é muito legal!"

---

[20] A transcrição é fiel, pois foi tomada das filmagens obtidas durante a aplicação da atividade.

As Figuras 59 e 60 mostram as respostas de Leandro e de Natália, que faziam dupla com Alex e Laura, respectivamente. Estas conclusões são corretas e acreditamos que houve apreensão da transformação geométrica. Para certas configurações que eram mostradas na tela do software, era mais fácil visualizar a congruência entre esses ângulos descritos por Natália do que o modo como descrevemos na análise a priori. É provável que isso tenha ocorrido devido à dificuldade existente em perceber ângulos consecutivos não adjacentes. A Figura 61 mostra os ângulos congruentes que foram percebidos pelos alunos (indicados com a letra θ).

e) Represente no Geogebra um número complexo que tenha módulo unitário. Represente outro número complexo qualquer. Utilize a ferramenta que você construiu para multiplicar esses dois números. Movimente os números complexos iniciais. O que você observa?

O módulo da multiplicação é sempre igual ao vetor qualquer (ao numero complexo qualquer). O argumento do complexo qualquer com o eixo e o argumento do vetor que representa a multiplicação com o vetor unitário são sempre os mesmos.

Figura 59. Resposta de Leandro (multiplicação de complexos).

A resposta de Leandro expressa corretamente as transformações que ocorrem no registro gráfico, nessa atividade. Faltou apenas a palavra “módulo” na primeira frase: “O módulo da multiplicação é sempre igual ao **módulo** do vetor qualquer...” Ficamos satisfeitos com essa resposta, reveladora de que o estudante está se apropriando do conhecimento em jogo.

e) Represente no Geogebra um número complexo que tenha módulo unitário. Represente outro número complexo qualquer. Utilize a ferramenta que você construiu para multiplicar esses dois números. Movimente os números complexos iniciais. O que você observa?

Podemos observar que ao multiplicarmos um nº complexo que tenha módulo unitário por um outro número complexo qualquer, o vetor resultante terá o mesmo módulo que o nº complexo qualquer e além disso, o ângulo formado entre o módulo resultante e o módulo unitário será o mesmo formado entre o número complexo qualquer e o eixo X

Figura 60. Resposta de Natália (multiplicação de complexos).

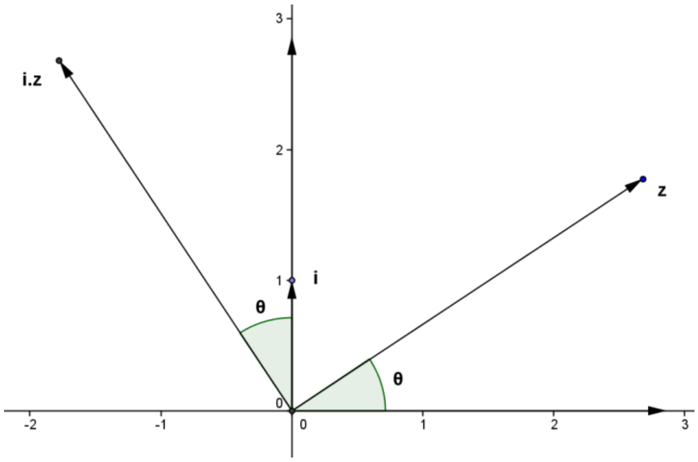


Figura 61. Ângulos congruentes notados pelos alunos.

O ângulo indicado por θ é mais facilmente percebido pelos estudantes do que o ângulo entre os vetores que representam z e i.z, que é um ângulo reto, que é o argumento de i. Ou seja, é mais fácil perceber a rotação de w segundo um ângulo igual ao argumento de z do que perceber a rotação de z segundo um ângulo igual ao argumento de w, como mostra a Figura 62.

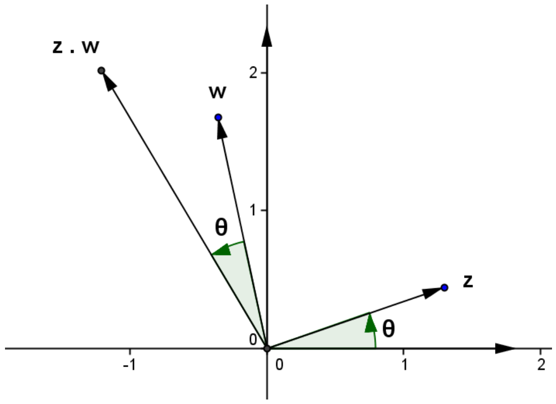


Figura 62. Ângulo de rotação, notado pelos alunos.

f) Descreva o que ocorre graficamente com o representante de um número complexo, quando este número é multiplicado por i (unidade imaginária). Descreva também o que acontece quando o número é multiplicado por $-i$.

Análise a priori. Esse é um caso particular do item anterior. O aluno deve perceber que se um complexo é multiplicado por i, então o vetor que o representa gira 90^o em torno da origem no sentido anti-horário, conforme exibido na Figura 63; se for multiplicado por $-i$, de acordo com a Figura 64, gira 90° em torno da origem, no sentido horário.

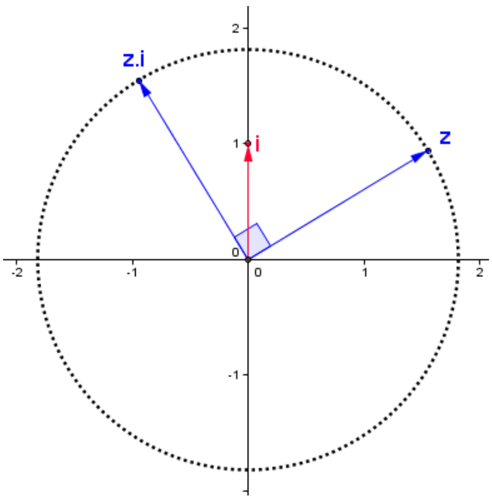


Figura 63. Multiplicação de um complexo por i.

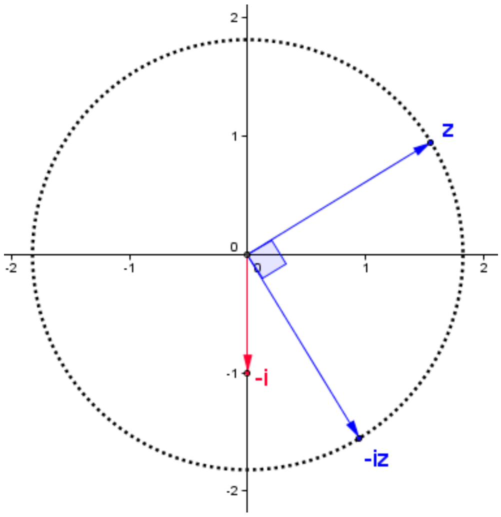


Figura 64. Multiplicação de um complexo por -i.

Análise a posteriori. Não houve dificuldades em visualizar as rotações decorrentes de se multiplicar um número complexo pela unidade imaginária. No entanto, constantemente os alunos nos perguntavam se estava certo, se era só isso, se podiam escrever que o módulo do número complexo se mantinha. A sensação de desequilíbrio surgiu quando o pesquisador perguntou “quanto” o vetor que representava o número complexo havia girado, pois nenhuma dupla mencionou essa rotação. Não esperávamos por isso porque nos pareceu, em nossa análise a priori, que o ângulo de 90° seria evidente. Não foi assim. Gostaríamos de, mais uma vez, citar Duval:

> A complexidade da visualização matemática não consiste em suas unidades visuais – elas são poucas e mais homogêneas do que para as imagens – mas na seleção implícita de quais valores de contrastes visuais dentro da configuração de unidades são relevantes e quais não são. Aqui está a barreira específica para aprender visualização em matemática. (DUVAL, 1999, p.10, tradução nossa[21]).

Por isso tivemos que, por meio de perguntas, sem induzir a resposta, fazer com que eles descobrissem que se tratava de um giro de 90°, porque seria essencial para responder o próximo item. A intervenção do pesquisador favoreceu a compreensão e as Figuras 65, 66, 67 e 68 mostram algumas das respostas produzidas.

[21] The intricacy of mathematical visualization does not Consist in its visual units – they are fewer and more homogeneous than for the images – but in the implicit selection of which visual contrast values within the configuration of units are relevant and which are not. Here is the representation barrier specific to learn visualization in mathematics.

f) Descreva o que ocorre graficamente com o representante de um número complexo, quando este número é multiplicado por i (unidade imaginária). Descreva também o que acontece quando o número é multiplicado por $-i$.

multiplicar por i é manter o tamanho e rotacionar 90° em sentido anti-horário, preservando o módulo.

Figura 65. Resposta de Mariana (multiplicação por i).

Na resposta de Mariana faltou a interpretação gráfica da multiplicação por –i, mas mencionou a invariância do módulo, o que os demais não fizeram.

f) Descreva o que ocorre graficamente com o representante de um número complexo, quando este número é multiplicado por i (unidade imaginária). 90 Descreva também o que acontece quando o número é multiplicado por $-i$. 270°

O ângulo entre o resultado e o complexo quando multiplicado por i é 90° graus.
E quando multiplicado por -i é 270°.

Figura 66. Resposta de Laura (multiplicação por i).

Notamos na resposta de Laura que um giro de 90° no sentido anti-horário equivale a um giro de 270° no sentido horário. Graficamente essa interpretação é correta.

f) Descreva o que ocorre graficamente com o representante de um número complexo, quando este número é multiplicado por i (unidade imaginária). Descreva também o que acontece quando o número é multiplicado por $-i$.

Ao multiplicar um nº complexo por i, o vetor resultante desloca 90° no sentido anti-horário em relação ao vetor inicial.
Já ao multiplicar por -i, ocorre o mesmo, mas o vetor se desloca no sentido horário.

Figura 67. Resposta de Natália (multiplicação por i).

A resposta de Natália é correta em relação à rotação. Fica subentendido que a rotação do vetor ocorre sem alteração do módulo.

f) Descreva o que ocorre graficamente com o representante de um número complexo, quando este número é multiplicado por i (unidade imaginária). Descreva também o que acontece quando o número é multiplicado por $-i$.

multiplicando por i, você irá somar 90° no vetor, preservando o módulo pois o i é 1. Rotacionar no sentido anti-horário
multiplicando por -i rotacionando no sentido horário

Figura 68. Resposta de Sálvio (multiplicação por i).

A resposta de Sálvio é confusa. É possível que ele tenha conseguido a visualização do que ocorre. No entanto, a conversão do registro gráfico do que ele observou para o registro em língua natural, escrita, não é satisfatório. Por exemplo, "somar 90° no vetor" e "o i é 1" devem evoluir para "girar o vetor segundo um ângulo de 90°" e "o módulo de i é igual a 1".

g) Efetue graficamente, no Geogebra, a multiplicação de um complexo z por i^2, sem usar o "Campo de Entrada". Descreva o que você observou.

Análise a priori. Essa atividade tem como finalidade verificar se o aluno, transitando entre as diferentes representações dos complexos apreende o significado da multiplicação entre eles. Lembramos Duval (2009, p. 19): "um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação [...] parece necessário para favorecer a coordenação entre as representações." Desse modo, esperamos que o aluno conclua que multiplicar um complexo z por i^2, isto é, $i \cdot i$, significa girar o vetor que o representa duas vezes de um ângulo de 90° em torno da origem, ou seja, equivale a rotacioná-lo de meia volta em relação à origem, obtendo-se assim o simétrico de z em relação à origem, que é o mesmo que se obteria multiplicando-se z por -1.

Acreditamos que o aluno possa expressar, ainda que de forma não totalmente precisa, que $i^2 = -1$ traduz o fato de que aplicar duas vezes uma rotação em torno da origem equivale a efetuar uma simetria em relação a origem.

Análise a posteriori. A atividade foi bem sucedida e os alunos compreenderam o que era esperado, embora as respostas escritas mostrem que nem sempre as ideias corretas são bem expressas, como se pode perceber pelo registro de Leandro: “O vetor resultante da multiplicação de z por i^2 anda (*sic*) 180° com relação ao vetor z”.

O registro de Natália e Alex: “Graficamente, ao multiplicar um número complexo por i^2, observa-se que o vetor resultante será o seu oposto. Isso ocorre, pois primeiro multiplicamos por i e o vetor deslocará 90°, ao multiplicar novamente por i, se deslocará mais 90°, ou seja, ao todo serão 180°, que é justamente seu oposto.”

Já Laura foi sintética: “O resultado é o oposto do complexo z”.

No entanto, nenhuma das respostas disse que a multiplicação por i^2 equivalia à multiplicação por -1. Isso confirma que, embora a atividade de conversão entre registros, na matemática, seja condição importante para o aprendizado da mesma, como menciona Duval:

> [...] a separação entre escritura algébrica de uma relação e sua representação gráfica, a escritura numérica de um relatório e sua representação geométrica sobre uma reta ou no plano, etc. [...] persiste mesmo após, no processo de ensino, tendo sido bastante utilizados esses diferentes sistemas semióticos de representação. (DUVAL, 2009, p. 18).

Atividade 5
a) Represente no Geogebra um número complexo z. Construa o representante de $\frac{1}{z}$ e crie uma ferramenta para $\frac{1}{z}$.

Análise a priori. O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno perceba que a reta que contém o vetor que representa $\frac{1}{z}$ e a reta que contém o representante de z são simétricas em relação ao eixo real.

Cremos que o aluno terá dificuldades para realizar essa atividade. Entre outros motivos apontamos para o fato de que, como as abordagens em sala de aula pouco enfatizam os aspectos gráficos dos números complexos, o aluno terá dificuldade em perceber que o argumento de $\frac{1}{z}$ é o simétrico do argumento de z. Outra possibilidade para a construção é o uso do teorema de Tales. Entretanto, consideramos pouco provável o aluno relacionar a construção do inverso com esse teorema.

O pesquisador poderá, numa primeira intervenção, sugerir a igualdade $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Nesta, vê-se que o inverso de z é obtido aplicando-se ao seu conjugado uma homotetia de razão igual ao quadrado do módulo de z.

Uma possível construção, utilizando o teorema de Tales, apresenta a vantagem de não se precisar de medida, como feito na homotetia. No entanto, será necessário pensar em argumento do complexo $\frac{1}{z}$. Devemos ressaltar que, caso o obstáculo didático aqui seja muito acentuado, o professor deve institucionalizar a construção, uma vez que o objetivo da atividade 5 é fazer com que o aluno apreenda os fatos geométricos relacionados com a divisão dos números complexos e não, pelo menos nesse momento, trabalhar com construções via régua e compasso do Geogebra.

Assim, dado um número complexo z, construímos a circunferência de centro O e raio $|z|$ e a circunferência de centro O e raio 1. Seja P o ponto de interseção do vetor que representa z com a circunferência de centro na origem e raio 1; sejam ainda Q o simétrico de P com relação ao eixo x e S a interseção da circunferência de centro na origem e raio $|z|$ com o eixo x. Traçamos a reta determinada por O e Q. Então a construção que permite obter o inverso multiplicativo de z é a seguinte: traça-se a reta determinada por S e Q e, pelo ponto (1,0), traça-se a paralela a esta reta. Esta paralela traçada intersecta a reta $\overleftrightarrow{OQ}$ no ponto T. O vetor que tem origem em O e extremidade em T é o representante do inverso de z para a multiplicação, isto é, $\frac{1}{z}$. Observe na Figura 69 que o teorema de Tales justifica esse resultado.

Além disso o resultado vale tanto para $|z|>1$ quanto para $|z|<1$.

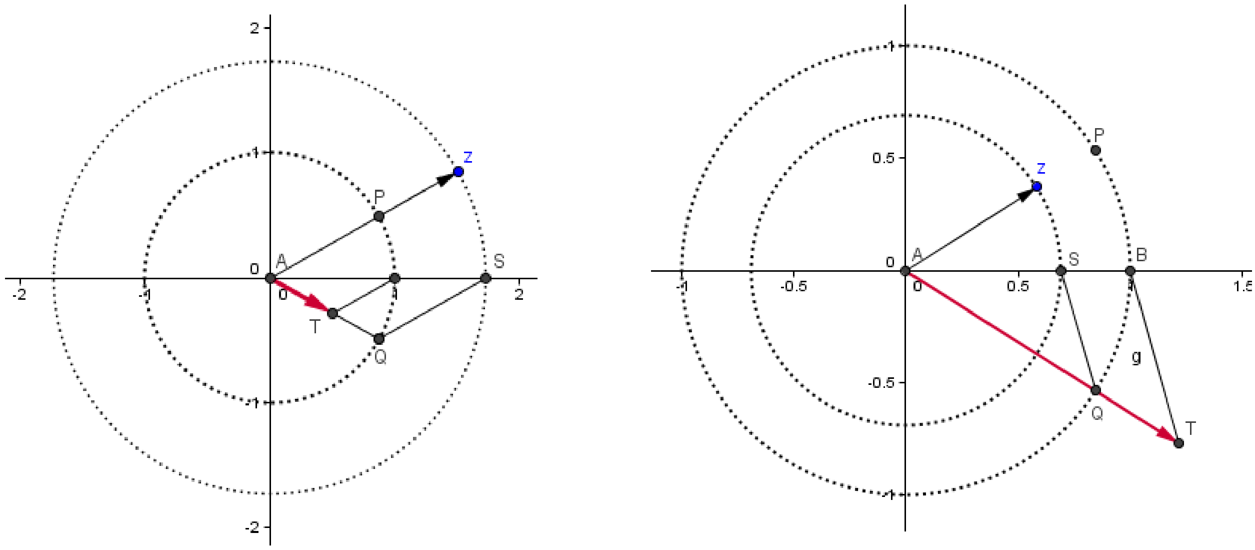


Figura 69. Construção do inverso de um número complexo.

No caso em que $|z|=1$, tem-se que $\frac{1}{z}=\overline{z}$.

Análise a posteriori. No dia dessa atividade, Sálvio estava ausente. Inicialmente a dupla Natália e Alex pensou em caso particular e fez contas com lápis e papel para ver se conseguiriam, posteriormente, generalizar a construção do inverso de um número complexo. Os alunos calcularam o inverso de alguns números complexos, mas não conseguiram fazer a conversão entre o registro algébrico $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{1}{|z|^2}\cdot\overline{z}$ e o respectivo registro gráfico, que consistiria em uma homotetia de fator igual a $\frac{1}{|z|^2}$. Também não utilizaram, como havíamos previsto, o fato de que o argumento de um número complexo e o argumento do seu inverso são simétricos. Sentimos que esse exercício causou desequilíbrio nos sujeitos e, apesar desses já terem visto ampliação na Atividade 4 (multiplicação de complexos), atribuímos esse desequilíbrio, mais uma vez, à falta de conversão entre os diferentes tipos de representação dos números complexos, durante o ensino e aprendizagem desses números. Em resumo, os alunos vivenciaram a fase da ação, mas não chegaram à fase da formulação, o que levou o pesquisador a institucionalizar, por meio de questionamentos direcionados aos sujeitos o conhecimento a respeito do inverso de um número complexo. Como apontado por Almouloud (2007, p. 47), um *milieu* antagonista é capaz de produzir retroações sobre os conhecimentos do sujeito, ao passo que, se o professor organizar um *milieu* aliado, visando evitar a confrontação, então teremos interações fictícias.

Uma observação: os estudantes ficaram intrigados ao digitarem a expressão 1/distânciaAB*distânciaAB, como fator da homotetia, e perceber que o vetor representante do conjugado de z não se alterasse. Explicamos que, a menos que se use parênteses, a hierarquia das operações segue a ordem da leitura. O que se desejava como fator de homotetia, na verdade, era 1/(distânciaAB*distânciaAB).

b) Limpe a tela do Geogebra. Represente um complexo z e outro w. Construa $\frac{z}{w}$. Crie uma ferramenta para $\frac{z}{w}$.

Análise a priori. A finalidade dessa atividade é verificar se o estudante associará a divisão de z por w como sendo o produto de z pelo inverso de w. Portanto, esperamos que o aluno represente os complexos z e w, mobilize os conhecimentos recém-adquiridos na Atividade 5a, resgatando a ferramenta criada para representar o inverso de um complexo e assim construa $\frac{1}{w}$.

Esperamos ainda que o aluno mobilize os conhecimentos adquiridos na Atividade 4, em que criou uma ferramenta para a multiplicação de dois números complexos e então que possa efetuar a multiplicação de z por $\frac{1}{w}$.

Nota-se aqui que o aluno é obrigado a transitar entre a escrita algébrica do enunciado e a representação gráfica proporcionada pelo software. Novamente, concordamos com Duval, para quem as representações semióticas permitem uma ‘visão do objeto’, através da percepção de estímulos (pontos, traços, caracteres, sons...), tendo valor de ‘significante’ (DUVAL, 2009, p. 44).

Análise a posteriori. Os alunos tiveram apenas um pouco de dificuldade em lembrar qual vetor representava qual número, pois o software nomeia, por definição, os vetores como u, v, w,... enquanto na atividade estávamos usando z e w. Como os alunos não se habituaram a renomear os vetores, ficou um pouco confuso, mas todos entenderam que bastava multiplicar z pelo inverso de w para se obter o quociente entre z e w. A intervenção do pesquisador, para cada aluno que pedia ajuda, foi no sentido de renomear os vetores e indicar a ordem das operações, o que os alunos entenderam e realizaram com sucesso.

c) O que se pode afirmar sobre o quociente do número complexo z pelo complexo w, quando w tem módulo igual a 1?

Análise a priori. A finalidade dessa questão é fazer com que o aluno perceba dois fatos. O primeiro é que os complexos de módulo igual a 1 determinam um lugar geométrico: a circunferência de centro na origem e raio 1. Notamos que é necessária uma reorganização da expressão dada no registro de partida, isto é, $|w| = 1$, para se chegar à representação no registro de chegada, ou seja, a representação da circunferência no plano complexo. Portanto, segundo Duval (2009, p. 19), é possível que haja dificuldade, porque essas duas representações não são congruentes. O segundo fato que o aluno deve perceber é que dividir um número complexo por outro de módulo igual a 1 não é o mesmo que dividir por 1. Nosso objetivo é verificar se tal dificuldade ocorrerá. Portanto, esperamos que o aluno verifique no software, que a divisão de um número complexo por outro de módulo unitário acarreta uma rotação do vetor que representa o primeiro de um ângulo igual ao argumento do segundo, em torno da origem. A Figura 70 mostra o que ocorre com z, no caso de o argumento de w ser positivo e também no caso de ser negativo.

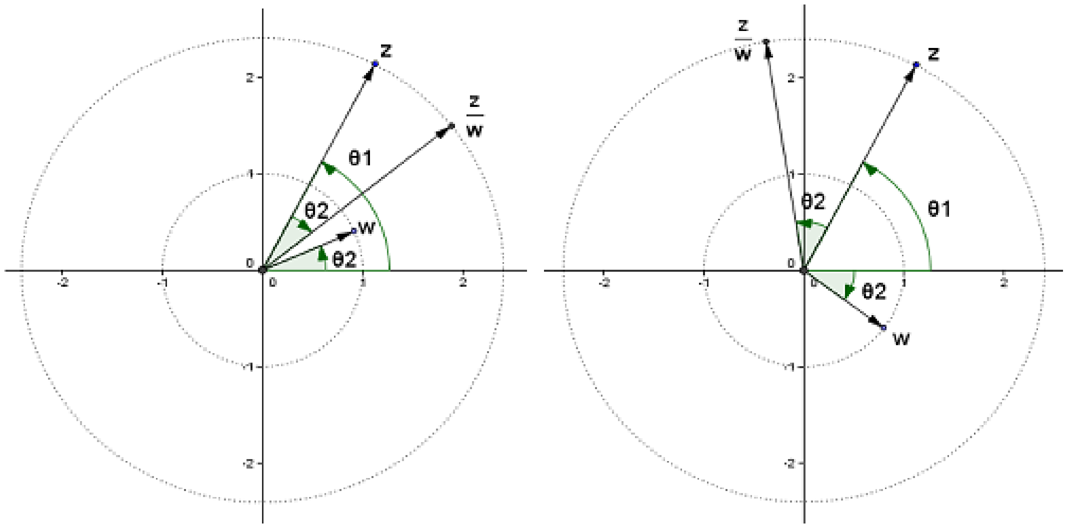
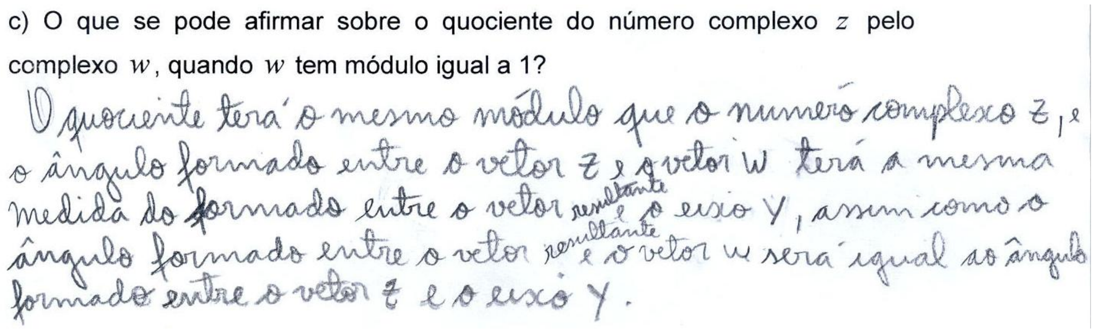


Figura 70. Divisão de z por um complexo de módulo unitário.

Análise a posteriori. Os sujeitos não apresentaram dificuldade em realizar a operação solicitada na atividade. No entanto, tiveram dificuldade para explicar o que ocorria graficamente, principalmente com relação ao deslocamento angular, como se pode notar nos registros mostrados na Figura 71 e na Figura 72.

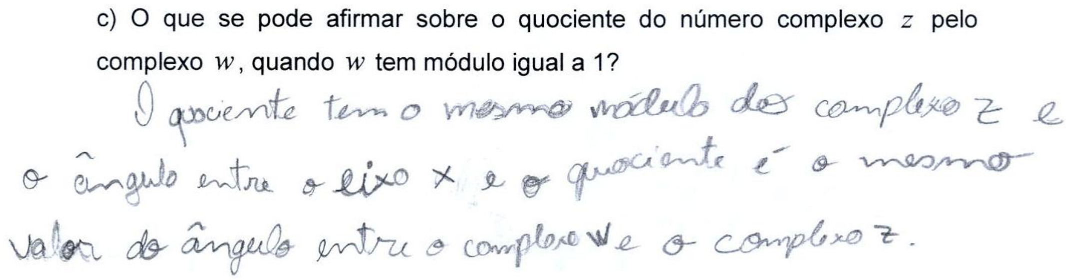


c) O que se pode afirmar sobre o quociente do número complexo z pelo complexo w, quando w tem módulo igual a 1?

O quociente terá o mesmo módulo que o número complexo z, e o ângulo formado entre o vetor z e o vetor w terá a mesma medida do formado entre o vetor resultante e o eixo Y, assim como o ângulo formado entre o vetor resultante e o vetor w será igual ao ângulo formado entre o vetor z e o eixo Y.

Figura 71. Resposta de Leandro (divisão por complexo unitário).

Nota-se aqui a dificuldade em expressar a rotação dos vetores. A resposta de Leandro, não está correta: basta comparar os ângulos por ele descritos com os casos mostrados na Figura 70. Para esse aluno ainda não está totalmente claro que, graficamente, a divisão entre números complexos produz exatamente transformações contrárias àquelas produzidas pela multiplicação.


c) O que se pode afirmar sobre o quociente do número complexo z pelo complexo w, quando w tem módulo igual a 1?

O quociente tem o mesmo módulo do complexo z e o ângulo entre o eixo x e o quociente é o mesmo valor do ângulo entre o complexo w e o complexo z.

Figura 72. Resposta de Laura (divisão por complexo unitário).

Diferentemente da resposta de Leandro, a resposta de Laura está matematicamente correta. Não há indícios de que essa estudante tenha percebido a divisão como inversa da multiplicação, mas o fato de ela perceber e registrar em língua natural, de modo correto, as transformações que ocorreram graficamente já é notável, posto que não é simples perceber e descrever a rotação, que pode ser no sentido horário ou anti-horário, relacionando-a com o argumento de w. Por isso ficamos satisfeitos, uma vez que a estudante dá mostras de que já se apropriou do conhecimento em jogo.

O pesquisador fez algumas intervenções, com objetivo de fazê-los expressar verbalmente o que estavam visualizando graficamente. Exemplo: a tela dos computadores em uso pelos alunos não mostrava a circunferência de centro na origem e que passava pela imagem do complexo qualquer não unitário. Assim, o pesquisador indagou: como podiam ter certeza de que o módulo de z dividido por w (|w|=1) resultaria em um vetor com módulo igual ao módulo de z? Surpreendentemente os alunos responderam girando o vetor que representava z e o fizeram coincidir com o vetor que representava w. Então o pesquisador insistiu: mas quando você não faz os vetores coincidirem, como você tem certeza de que o módulo de z / w continua igual, isto é, não aumentou ou diminuiu um pouquinho? A falta de resposta dos alunos não significa que eles não soubessem. O mesmo sucedeu com as outras duplas e foi preciso a intervenção do pesquisador, no sentido de orientá-los a medir os ângulos, com a ferramenta do software, a fim de que percebessem quais eram congruentes e assim se mantinham, quando os vetores eram movimentados. Após isso puderam concluir corretamente a atividade. Acreditamos que faltava ainda aos estudantes experiência com as conversões, como reforçado por Schoenfeld, citado por Duval (1999, p. 6, tradução nossa[22]): "estudantes podem virtualmente não fazer conexões entre domínios de referência e sistemas simbólicos que nós poderíamos esperar-lhes como sendo identicamente próximos... a interação ocorre muito mais raramente do que gostaríamos." Vale ainda lembrar Duval (1999, p. 8, tradução nossa): "visualização requer um longo treinamento [...]. Entretanto, o que a visualização apreende pode ser o início de uma série de transformações, o que faz o seu poder inventivo."

d) Limpe a tela do Geogebra. Represente um complexo z e o complexo i. Descreva o que ocorre graficamente com o representante de z, quando z é dividido por i (unidade imaginária). Descreva também o que ocorre quando o número for dividido por $-i$

Análise a priori. A finalidade é fazer o aluno perceber um fato gráfico associado com a divisão de um complexo pela unidade imaginária, a saber: a rotação desse número complexo, segundo um ângulo de 90°, em torno da origem, no sentido horário. Espera-se dessa forma, que o aluno, por meio da visualização, apreenda o vínculo existente entre a operação algébrica e a transformação geométrica existente.

Analogamente, esperamos que o aluno perceba, como mostra a Figura 72, que o vetor representante de z sofre uma rotação de 90^{o}, em torno da origem, no sentido anti-horário, quando z é dividido por por $-i$.

Esperamos poucas dúvidas por parte dos alunos, nesse item da atividade, uma vez que as ferramentas já estão construídas. Portanto, criar no Geogebra vetores para representar z, i e $-i$, não deveria apresentar mais dificuldades. Acreditamos que o trabalho maior do aluno será a interpretação dos resultados gráficos que o software lhe apresentará. A Figura 73 ilustra graficamente os resultados da divisão de z por i e $-i$.

---

[22] Students may make virtually no connections between reference domains and synmbols systems that we would expect them to think of as being nearly identical... the interplay occurs far more rarely than one would like.

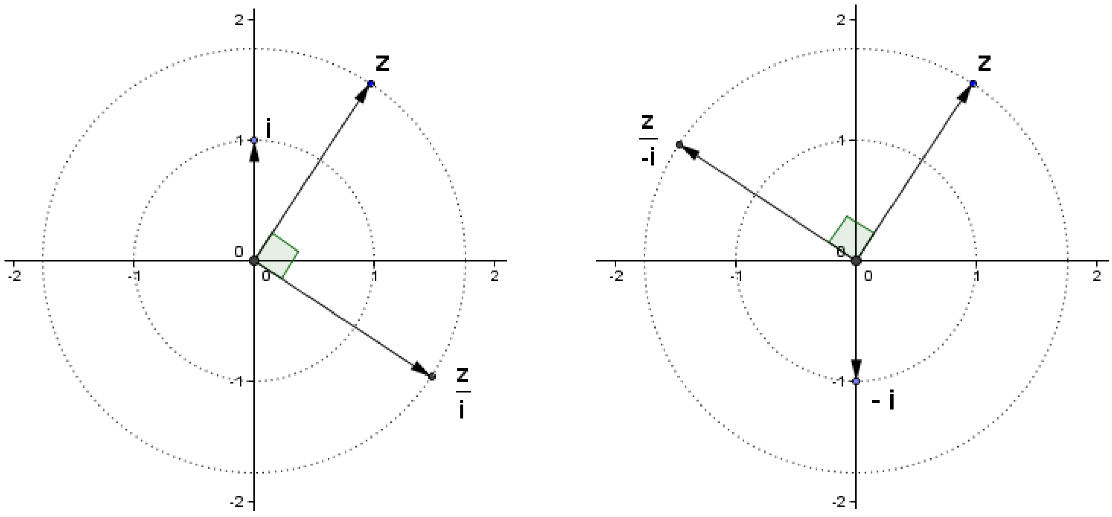


Figura 373}. Divisão de z por i e divisão de z por -i.

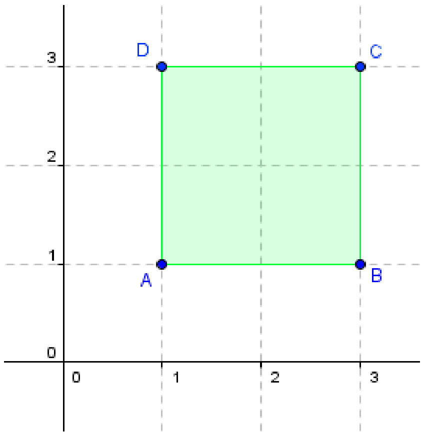
Análise a posteriori. A experimentação funcionou como previsto: essa pareceu ser para os alunos a tarefa mais fácil. Todos interpretaram corretamente o que representava graficamente a divisão de z por i e por –i, como pode ser visto no registro de Natália, mostrado na Figura 74. “*Quando z é dividido por i, o vetor resultante é o conjugado de z. Já ao dividirmos por –i, o vetor resultante será o oposto do conjugado de z*.” Uma propriedade simples, mas quase nunca explorada nos livros (LIMA, 2001, p.43, 307). Parece-nos que a visualização, nesse caso, mostra as relações entre os números complexos envolvidos na operação de modo mais imediato do que seria ficar analisando os sinais das partes real e imaginária deles. Mas, segundo Duval (1999, p.1), “visualização, a única modalidade cognitiva relevante em matemática, não pode ser usada como suporte imediato e óbvio para a compreensão”. O que nos leva a creditar essa conclusão simples e correta da aluna a todo o processo, desde a Atividade 1 até essa Atividade 5.

d) Limpe a tela do Geogebra. Represente um complexo z e o complexo i. Descreva o que ocorre graficamente com o representante de z, quando z é dividido por i (unidade imaginária). Descreva também o que ocorre quando o número for dividido por $-i$

Quando z é dividido por i, o vetor resultante é o conjugado de z. Já ao dividirmos por $-i$, o vetor resultante será o oposto do conjugado de z.

Figura 74. Resposta de Natália (divisão por i).

Atividade 6
Considere a região quadrangular R do plano complexo, determinada pelas desigualdades $1 \le \mathrm{Re}(z) \le 3$ e $1 \le \mathrm{Im}(z) \le 3$.



Cada ponto da região é a imagem de um complexo z e, sobre esse complexo será aplicada a função $f: R \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = z + (2+i)$.		
a) Obtenha no Geogebra a região resultante após a aplicação de f sobre os pontos de R.		
b) Crie uma pasta no computador, chamada arquivos_geogebra. Construa uma região qualquer do plano complexo e obtenha, no Geogebra, as regiões que resultam da aplicação das funções f, indicadas a seguir, sobre todos os pontos da região que você construiu. Para cada resposta que obtiver, salve o arquivo, dentro da pasta arquivos_geogebra, com o seu nome e a seguir o item que está respondendo (exemplo: Fulano_1, Fulano_2,..., Fulano_8)		
1) $f(z) = 2z + i$	2) $f(z) = i \cdot z$	3) $f(z) = i \cdot \overline{z}$
4) $f(z) = -z$	5) $f(z) = z + 1 - i$	6) $f(z) = z \cdot (1+i)$

Análise a priori. O objetivo dessa atividade é verificar se o estudante consegue mobilizar os conhecimentos adquiridos através da representação gráfica dos números complexos para resolver problemas. No caso, representar a imagem de uma região do plano sobre a qual foi aplicada uma determinada função. Espera-se, portanto, que, tendo lido o enunciado do problema, o aluno perceba que todas as ferramentas necessárias já foram construídas nas atividades de 1 a 5: adição, multiplicação, conjugado, oposto etc. Note-se que deixaremos bastante papel quadriculado à disposição dos sujeitos da pesquisa, para eventuais rascunhos e conjecturas que eles desejarem elaborar. Para isso, o aluno deverá mobilizar os conhecimentos vistos nas Atividades 1 a 5. Evidentemente, o aluno deverá elaborar uma estratégia que o permita visualizar o resultado sem ter que aplicar a função a inúmeros pontos da região que ele construiu. A região obtida pela aplicação da função pode ser mais facilmente visualizada tomando-se um único ponto sobre a fronteira da região original e utilizando-se a ferramenta "**Lugar geométrico**". Acreditamos que o aluno vá utilizar apenas alguns pontos estratégicos da figura que ele construiu e que vai tentar uni-los para obter a região resultante da aplicação da função.

Seja como for, também estamos propiciando possibilidade de o aluno verificar que as operações algébricas têm também correspondência com transformações no plano cartesiano. Cabe ressaltar que a rapidez para se construir as figuras e o fácil dinamismo proporcionado pela animação do software são atributos fundamentais no desenvolvimento das atividades que, de outra forma demandariam muitos esforços por parte do professor que dispusesse apenas de giz, lousa e apagador.

Análise a posteriori. O pesquisador avisou aos estudantes, logo no início dos trabalhos, que havia folha de papel quadriculado à disposição. Apesar disso, os estudantes preferiram ligar os computadores e iniciar o Geogebra, passando a construir um quadrado tal como estava na folha da Atividade. Porém, não entenderam o que estava proposto no item **a** da Atividade 6, e o pesquisador sugeriu que fizessem um esboço em papel quadriculado.Nesse momento os alunos conseguiram executar o item **a**, mas ficaram com dúvida sobre como realizar a mesma coisa no software. O pesquisador institucionalizou a construção e o que vinha a ser a ferramenta **Lugar Geométrico**, do software Geogebra. A função escolhida não constava na proposta, $f(z) = z + (2+i)$, porque não desejávamos antecipar resultados sobre oposto, conjugado, multiplicação por i, etc., que seriam verificados no decorrer da atividade. Essa institucionalização parece ter animado os estudantes, que ficaram interessados em verificar as transformações que poderiam obter. Observamos que Alex, no momento de obter o vetor que resultava da multiplicação de um vetor z por 2, não usou homotetia: interpretou o 2 como sendo o número complexo 2 + 0.i e o representou graficamente. Em seguida tomou um complexo qualquer da região que havia desenhado e, com a ferramenta para a multiplicação – que já havia criado no software – efetuou a multiplicação dos dois números. Vemos então que o aluno se apropriou das representações e, nesse caso, já vê o corpo dos números reais como um subconjunto do corpo dos números complexos. Podemos perceber também que os alunos já não utilizavam registros algébricos para fazer cálculos para casos particulares. De modo mais geral utilizavam corretamente as ferramentas para construção do oposto, conjugado, multiplicação etc.

Cremos que Duval poderia resumir o que se pretendeu até aqui:

> Os tipos de conexões operacionais que nós esperamos que sejam feitas na aprendizagem não é entre matemática dedutiva e empírica, provas e construções, nem entre estruturas matemáticas e estruturas simbólicas, mas entre os diferentes registros de representações semióticas. Essas conexões entre registros compõem a arquitetura cognitiva pela qual os estudantes podem reconhecer o mesmo objeto por meio de diferentes representações [...]. (DUVAL, 1999, p.6, tradução nossa[23]).

O entusiasmo dos alunos quando percebiam o dinamismo das figuras, correspondendo de modo correto às suas construções e expectativas, foi notável e inesquecível para nós. A Figura 75 ilustra a construção de Mariana para $f(z) = i \cdot \overline{z}$, aplicada à região poligonal sombreada. A Figura 76 mostra a construção de Alex e Natália para $f(z) = i \cdot (1 + i)$.

---

[23] [...] the kind of operative connections we expect to be made when learnin is not between deductive and empirical mathematics, proofs and constructions, nor between mathematical structures and symbol structures, but between the different registers of semiotic representation. These connections between registers make up the cognitive architecture by which the students can recognize the same object through different representations […]

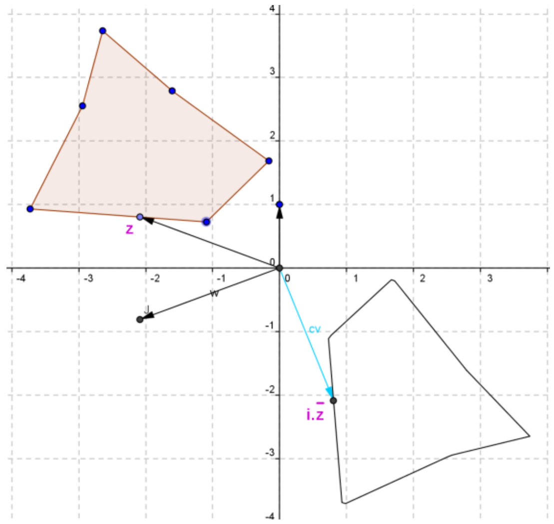


Figura 75. Construção de Mariana.

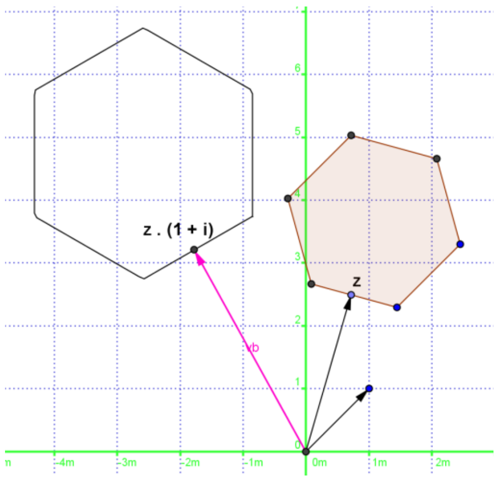


Figura 76. Construção de Alex e Natália.

Atividade 7 Os pontos do plano cartesiano A (1,1) e B (2,3) são vértices consecutivos de um quadrado. Determine os outros dois vértices.

Análise a priori. Apresentaremos duas resoluções para esse problema. A primeira, que pode ser visualizada graficamente na Figura 77, utilizaria números complexos: o vetor que representa o lado AB do quadrado em questão é $B-A=(2-1,3-1)=(1,2)$. Portanto, $B-A=1+2i$.

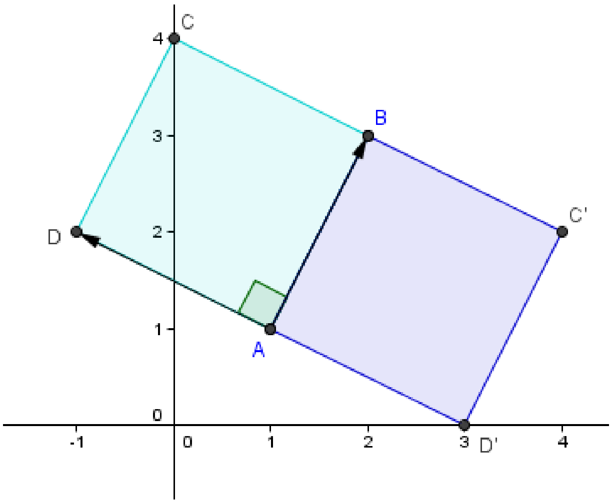


Figura 77. Figura do problema da Atividade 7.

O vetor que representa o lado AD, isto é, $D-A=(x_D-1, y_D-1)$, isto é, $(x_D-1)+(y_D-1)i$ é obtido pela multiplicação de $(B-A)$ por i. Portanto:

$$(x_D-1)+(y_D-1)i=(1+2i)\cdot i.$$

Daí:

$$(x_D-1)+(y_D-1)i=-2+i \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-1=-2 \Leftrightarrow x_D=-1 \\ y_D-1=1 \Leftrightarrow y_D=2 \end{cases}$$

Analogamente, o vetor $C-B$ é obtido rotacionando-se o vetor $A-B$ segundo um ângulo de 90° em torno do ponto B, no sentido anti-horário. Basta multiplicar $A-B$ por $-i$ e igualar a $C-B$, de onde temos $x_C=0$ e $y_C=4$. Notamos que o problema tem duas soluções. Para determinar as coordenadas de C´e D´ basta observar que A é ponto médio de DD´ e B é ponto médio de CC´.

Outra possível resolução usa números complexos e uma mudança no sistema de coordenadas: no caso de tomar-se como origem do plano complexo o ponto A (1,1) a mudança de eixos levará o ponto A (1,1) no ponto A´(0, 0) e, como mostra a Figura 78, levará o ponto B (2, 3) no ponto B´(1, 2), ou seja, se um ponto P tem coordenadas (x, y) no plano antigo, então suas coordenadas no novo sistema de eixos serão $(x-1, y-1)$.

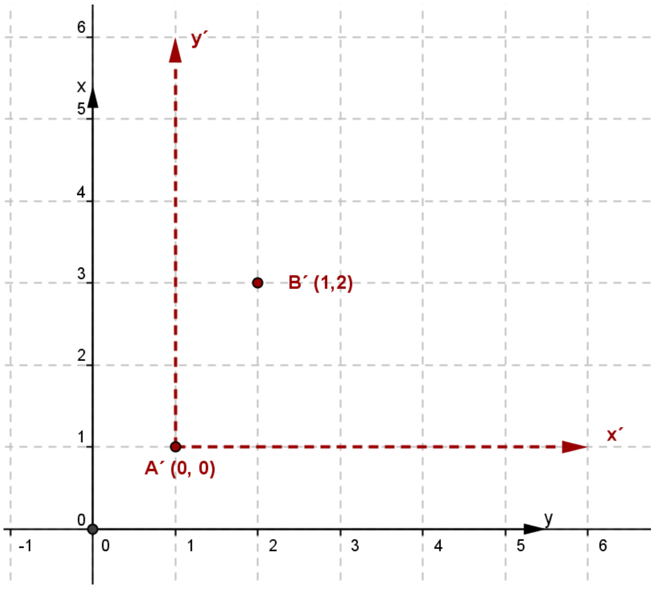


Figura 78. Mudança de eixos.

A multiplicação do vetor $\overrightarrow{A'B'}$ por i, como mostra a Figura 79, causa uma rotação de 90^{o} deste vetor em torno da origem A´, no sentido anti-horário, determinando o ponto D´, um dos vértices do quadrado procurado.

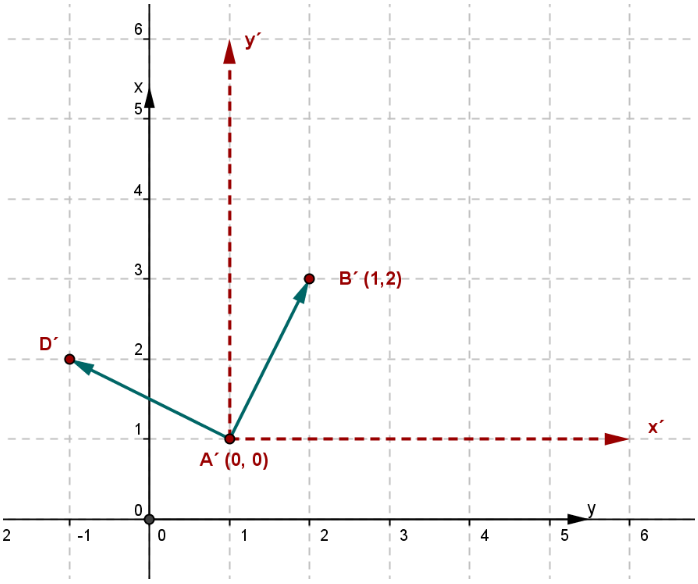


Figura 79. Obtenção de um dos vértices do quadrado.

Pode-se ver pela malha que as coordenadas do ponto D´ são (-2, 1), no sistema de eixos x´y´. Logo, as coordenadas do ponto D´, no sistema original, serão (-2 + 1, 1 + 1), ou seja, (-1, 2). Algebricamente, até esse momento, foi feita a multiplicação de $1+2i$ por i, o que resulta em $-2+i$.

É possível se obter as coordenadas do quarto vértice do quadrado procedendo a uma nova mudança de coordenadas, desta vez tomando como origem do novo sistema o ponto B, que passaria a ser B´´ (e A passaria a ser A´´). Bastaria multiplicar o vetor $\overrightarrow{B''A''}$ por $-i$, para se obter as coordenadas do ponto C´´. No entanto, observamos que o ponto procurado é a extremidade do vetor que representa a soma dos vetores $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'D'}$. Graficamente, como mostra a Figura 80 basta procedermos à adição desses vetores. Algebricamente temos: $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$, ou seja, $\overrightarrow{A'C'} = (-2+i)+(1+2i)$, portanto, $\overrightarrow{A'C'} = -1+3i$. As coordenadas do ponto C´ são (-1, 3). Isso nos leva a concluir que, no sistema original, teremos C = (-1 +1, 3 + 1), isto é, C = (0, 4).

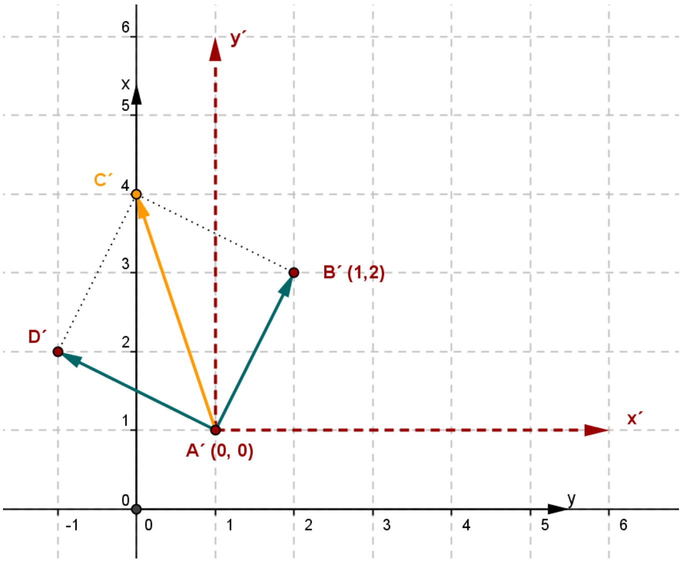


Figura 80. Determinação dos vértices do quadrado.

A segunda solução para o problema é obtida de forma completamente análoga.

Uma variável didática envolvida foi a escolha dos valores das coordenadas dos pontos A e B. Optamos por valores inteiros, pois o objetivo não era atrapalhar o aluno com os cálculos, mas sim fazê-lo perceber a situação geométrica envolvida no problema. Por isso consideramos provável que o aluno possa escolher o item "**Malha**" no menu "**Exibir**" para, a partir daí, construir o quadrado utilizando a ferramenta "**Polígono regular**" e assim visualizar as coordenadas inteiras dos demais vértices do quadrado, determinando a resposta sem fazer cálculo algum. O professor deve questioná-lo nesse ponto: e se as coordenadas não fossem números inteiros? Várias outras saídas com Geometria Analítica também são possíveis. No entanto, não esperamos que os alunos utilizem a saída via números complexos, pelo simples fato de que a Geometria Analítica Vetorial que apresentaria a representação de vetores como diferença de pontos, não faz parte do conteúdo dos livros didáticos e nem sequer consta no conteúdo de Matemática do ensino médio dos sujeitos da pesquisa. Esse ponto de vista é reforçado pelas soluções apresentadas por professores que foram submetidos à mesma questão. As resoluções dos professores encontram-se no Anexo.

Análise a posteriori. Mariana calculou a medida do lado do quadrado. Tal como esperado, Laura usou a malha quadriculada do software e desenhou corretamente um quadrado. Mariana, sem ver o trabalho de Laura, fez o mesmo. Laura desenhou a segunda solução. Mariana, além do quadrado, mostra na tela um lado do outro quadrado solução, paralelo ao lado AB. Então Mariana tentou uma generalização, que será compreendida se visualizada na Figura 81: como havia desenhado o triângulo ABP, para calcular a medida do lado do quadrado, via teorema de Pitágoras, observou que girando o triângulo ABC, em torno do vértice A, de modo que o cateto vertical e o horizontal passassem a se posicionar na horizontal e na vertical, respectivamente, ela conseguiria determinar um dos vértices do quadrado.

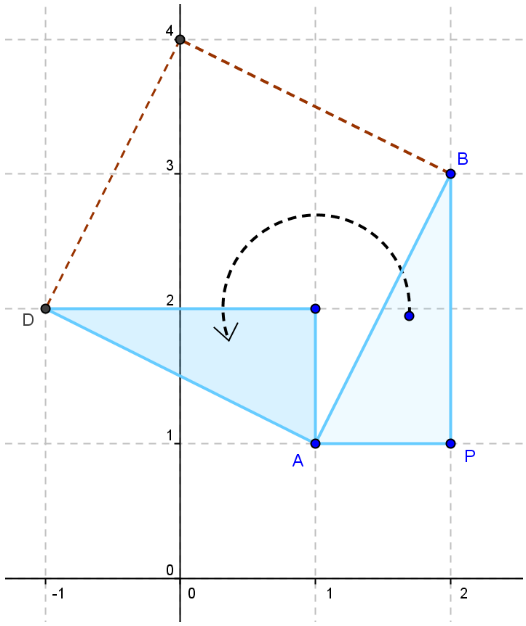


Figura 81. A solução de Mariana.

Perguntada como faria para calcular as coordenadas do ponto D, Mariana explicou corretamente que bastaria subtrair da abscissa de A o valor $y_B - y_A$. E a ordenada? Mariana também explicou, baseada no seu gráfico, que era obtida adicionando-se à ordenada de A o valor igual a $x_B - x_A$. Não imaginamos essa solução, em nossa análise a priori. Mariana fez esse esboço tanto na folha quadriculada quanto na tela do Geogebra. Tanto um quanto o outro a ajudou na conjectura e generalização da solução que também usou poucos cálculos. Os demais estudantes também chegaram às coordenadas corretas, porém sem usar cálculos, só elaborando o desenho. Consideramos que o uso de diferentes valores de coordenadas poderia estimular o surgimento de diferentes abordagens e, talvez, soluções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conteúdo matemático números complexos oferece dificuldades para os estudantes que o vê pela primeira vez, geralmente, no último ano do Ensino Médio. Em geral, os professores justificam a apresentação dessa matéria alegando que eles têm aplicações em eletricidade, em mecânica dos fluidos, enfim, em assuntos que só serão estudados em cursos superiores. Tal fato é corroborado na edição número 2131, de 23 de setembro de 2009 da revista Veja, que apresentava matéria sobre o ENEM, Exame Nacional do Ensino Médio. Nessa matéria, era possível ler, em destaque, sete “dicas valiosas”, preparadas por técnicos do INEP, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas, para os candidatos a uma vaga nas universidades brasileiras. A dica número quatro recomendava que os estudantes não deveriam perder tempo com disciplinas que foram excluídas do novo ENEM, pois haviam ficado de fora do exame, por exemplo, números complexos, matrizes e determinantes. O presente trabalho apresentou, entre outras coisas, a articulação entre números complexos e matrizes, demonstrando, por exemplo, o isomorfismo existente entre o conjunto dos números complexos escritos na forma algébrica, isto é, $a+bi$, em que a e b são números reais e o conjunto das matrizes quadradas reais de ordem 2, da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Isto é, essas matrizes poderiam ser úteis na resolução de um problema relativo aos números complexos e vice-versa. Porém, como se pode inferir pela leitura do artigo mencionado, existe a tendência de se eliminar do Ensino Médio o conteúdo relativo aos números complexos.

Os números complexos permitem vários registros de representações diferentes: ora podem ser representados por pares ordenados de números reais, ora podem ser representados por vetores no plano, ora podem ser as matrizes acima mencionadas, ou os números da forma $a+bi$, em que a e b são números reais, isso sem falarmos na forma trigonométrica. Porém, parece-nos que o ensino desse conteúdo falha no que diz respeito às conversões entre esses registros. Tais conversões permitiriam resolver, por exemplo, problemas de geometria plana com o uso de vetores representantes de números complexos, de forma mais econômica em termos de operações, do que seria com geometria analítica.

Analisando os livros didáticos pudemos perceber que as conversões são majoritariamente efetuadas entre os registros algébricos e trigonométricos. Falta a abordagem dos aspectos gráficos da adição e multiplicação entre esses números.

Assim, a nossa questão de pesquisa era investigar se a abordagem dos números complexos, com ênfase em seus aspectos gráficos, poderia tornar o seu aprendizado mais significativo. Assim, em questionário prévio, percebemos alguns problemas decorrentes dessas abordagens insuficientes. Os estudantes não sabiam, por exemplo, citar uma aplicação dos números complexos. Não conseguiam, dada a localização de um número complexo no plano de Argand-Gauss, determinar a localização de seu conjugado; e também não conseguiam assinalar, sem fazer contas, em qual quadrante se localizaria $i \cdot z$, caso z estivesse no primeiro quadrante.

Após isso, decidimos elaborar sequência didática, que fez uso do software de geometria dinâmica Geogebra, embora pudesse valer também do uso de papel quadriculado. Os sujeitos da pesquisa eram alunos que já haviam estudado números complexos no bimestre fevereiro-março de 2009. Nossa sequência foi aplicada em novembro-dezembro desse mesmo ano e o trabalho em duplas favoreceu muito o desenvolvimento das atividades, apesar dos obstáculos iniciais. Apresentamos então as conclusões desse trabalho.

A primeira conclusão é que logo de início os alunos têm dificuldade em efetuar conversões entre os registros algébricos e gráficos dos números complexos. Parece-lhes difícil associar uma mudança de sinal em $a+bi$ para $a-bi$ com uma simetria em relação ao eixo x. Em que pese ser a conversão uma atividade que demanda tempo para ser assimilada, acreditamos que esse fato corrobora nossa primeira hipótese de pesquisa: aspectos gráficos concernentes aos números complexos não são apresentados no ensino médio, durante o estudo desses números. No entanto, o uso do software Geogebra mostra-se atrativo para os estudantes, porque permite a visualização dinâmica entre os vetores que representam os números complexos e mantém as propriedades, no caso simetria, invariante entre eles. E a aceitação melhorou, na medida em que os alunos foram dominando as ferramentas do software.

Não obstante a ênfase em registros gráficos no Ensino Médio, quando do estudo desses números, percebemos que a conversão do registro gráfico para o registro trigonométrico também é deficiente e os tratamentos no registro trigonométrico para multiplicar dois números complexos resumiu-se à aplicação da fórmula de se multiplicar os módulos dos fatores e somar os respectivos argumentos. Evidentemente é mais rápido o uso da fórmula do que proceder-se aos devidos tratamentos. Todavia, somos levados a acreditar que tal aprendizado não foi significativo, uma vez que duas, das três duplas de sujeitos não lembravam da fórmula para multiplicar os números complexos, nem sabiam deduzi-la.

Porém falhamos quando propusemos a atividade 4, a respeito de multiplicação dos números complexos. Essa atividade ficou mal dimensionada para o tempo de uma hora, que era o que havia sido combinado para cada atividade. O tópico não era simples, porque demandava conversão de registro gráfico para trigonométrico e deste para o gráfico novamente, que deveria ser construído no Geogebra. Decidimos dividir a atividade em duas e continuar em outro dia, o que se mostrou correto, pois não sobrecarregou os estudantes e facilitou as observações.

Na quinta atividade, a dificuldade matemática de se representar o inverso de um número complexo, para depois efetuar a divisão só pôde ser superada com a intervenção do pesquisador. No entanto, vimos que os alunos estavam construindo e manipulando acertadamente os vetores que representavam os números complexos e tirando conclusões corretas a respeito de se dividir um complexo por outro de módulo unitário, ou de se dividir um complexo por i ou por $-i$. Ou seja, embora os protocolos mostrem que os alunos não escrevem com o rigor matemático necessário – e nem esperávamos isso deles, logo de primeira – suas conclusões mostraram-se acertadas, o que nos permite afirmar que eles se apropriaram dos aspectos gráficos em relação ao comportamento dos vetores que representavam os números complexos. Isso se revelou verdadeiro na sexta atividade, na qual os alunos foram solicitados a construir uma região do plano complexo, um polígono qualquer, por exemplo, e a construir a imagem dessa região, sob a aplicação de uma função f, que poderia ser $f(z) = i \cdot z$ ou $f(z) = z(1+i)$.

Ficamos muito satisfeitos em ver que os alunos, antes hesitantes em localizar o conjugado de um número complexo, já construíam as ferramentas no Geogebra e já conseguiam determinar imagens de regiões do plano sob funções mais difíceis.

Consideramos o sucesso obtido nessa atividade o coroamento de toda a sequência didática, o que pode, de certo modo, ser caracterizado pela fala de uma das estudantes: "**professor, parece que todas aquelas contas que a gente fazia em Álgebra ganham vida**."

Apesar disso, um ponto não nos deixou satisfeitos em nossa pesquisa. Foi com relação à última atividade, que propunha o problema de se determinar os vértices de um quadrado, sendo dadas as coordenadas de dois vértices consecutivos desse quadrado. Nenhum dos sujeitos resolveu o problema usando os conhecimentos de números complexos, vistos nas atividades. Atribuímos isso à nossa segunda hipótese: os professores não utilizam os conhecimentos acerca dos números complexos para resolver problemas de geometria.

Nossa questão de pesquisa foi, desse modo, parcialmente respondida. Em relação à visualização e apreensão dos aspectos gráficos dos números complexos, podemos afirmar que os alunos agora sabem o significado geométrico das operações entre os números complexos, embora não tenhamos abordado em nossa sequência didática a potenciação e a radiciação. Por outro lado, cremos que falhamos por não ter apresentado mais problemas de geometria que pudessem ser resolvidos, com economia de operações, por números complexos. O levantamento de questões desse tipo talvez possa se constituir em fonte de futuras investigações em Educação Matemática, uma vez que pode permitir diferentes abordagens e diferentes pontos de vista, no que diz respeito aos objetos matemáticos, além dos números complexos, que podem ser envolvidos: vetores, matrizes etc.

Finalmente, gostaríamos de apresentar duas questões, as quais nos interessam para estudos futuros. A primeira diz respeito a um problema que verificamos durante a aplicação das atividades. Percebemos que os alunos tiveram dificuldades em lembrar como se adicionavam vetores. Lembravam-se vagamente das regras aprendidas em aula de Física. Portanto, nossa questão é: por que o assunto vetores não é tratado nos livros didáticos de matemática? Ou: por que não se faz, pelo menos no programa curricular do estado de São Paulo uma abordagem vetorial da Geometria Analítica, no plano?

A segunda questão diz respeito a uma possível variação da sequência didática. Esta, devido a diversos fatores, foi aplicada a alunos que já haviam visto números complexos. A questão que naturalmente se apresenta é: quais seriam as possibilidades e conseqüências de se apresentar os números complexos, com enfoque em aspectos geométricos, a alunos que os veriam pela primeira vez? Como se estruturaria uma sequência didática com esse objetivo?

Acreditamos que abre-se, assim, uma frente para futuros estudos e, quem sabe, para um merecido resgate dos números complexos para o Ensino Médio, com as devidas articulações entre seus múltiplos registros de representação, suas interpretações geométricas no plano de Argand-Gauss e aplicações aos problemas de geometria plana. Em resumo, a pesquisa mostrou que há, sim, potencialidades a serem exploradas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Nilze Silveira de. **Uma experiência didática de formação matemática-epistemológica com professores do segundo grau**. 1992. 220 f. Dissertação (Mestrado: Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade do Paraná, 2007.

ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin. **Complex Numbers from A to... Z**. Boston: Birkhäuser, 2006.

ARAÚJO, Nanci Barbosa F.. **Números complexos: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio**. 2006. 111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

BONGIOVANNI, Vincenzo. Tópicos de Geometria. [S.l],[199?]

CADERNO DO PROFESSOR: matemática, ensino médio, 3ª série, 2º bimestre. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 2008.

CARNEIRO, José Paulo. A Ilha do tesouro, dois problemas e duas soluções In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 47. SBM, 3º quadrimestre de 2001.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos números complexos In**:** **Revista do Professor de Matemática**, n. 55. SBM, 3º quadrimestre de 2004.

DAMM, Regina F.. Registros de representação In: **Educação matemática uma introdução**, MACHADO, Silvia D. A. (org.), São Paulo: Educ, 2002.

DODGE, Clayton W.. **Euclidean Geometry and Transformations.** New York: Dover Publications Inc., 1972.

DOMINGUES, Hygino H. – **Fundamentos de Aritmética**. Santa Catarina: Editora da UFSC, 2009.

DREYFUS, Tommy. – Advanced Mathematical Thinking Processes In: **Advanced Mathematical Thinking**, edited by TALL, David, Netherlands: Kluwer Academic Publishers – 1991.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Representation, vision and visualizaton: cognitive functions in** mathematical **thinking**. Disponível em http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/1a/30/a7.pdf, acessado em 29/11/2009. 1999.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. Da Unicamp, 2005.

FABIANI, Flávia Sueli. **Números complexos via resolução de problemas**. 1998. 210f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – Rio Claro.

FERREIRA, Maria Sueli F.. **Uma análise dos questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos**. 2006. 92f. Dissertação (Mestrado em ciências) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

FREITAS, José Luiz M.. Situações didáticas In: **Educação matemática uma introdução**, MACHADO, Silvia D. A. (org.), São Paulo: Educ, 2002.

GARBI, Gilberto G.. **A Rainha das Ciências**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

HADAMARD, Jacques. **Psicologia da invenção na matemática**. Rio de Janeiro: Contraponto Editora Ltda., 2009.

HAHN, Liang-shin. **Complex Numbers & Geometry**.U.S.A: The Mathematical Association of America, 1994.

LAVILLE, Christian; Dionne, Jean. **A construção do Saber**. Porto Alegre: Editora UFMG, Artmed, 1999.

LIMA, Elon L. (Ed.) et. al. **A Matemática do Ensino Médio** – **vol. 3 – Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

LIMA, Elon L. et AL. **Exame de textos: análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MACHADO, Nílson J.. **Educação competência e qualidade**. São Paulo: Escrituras, 2009.

MACHADO, Nílson J.. **Lógica? É lógico! Coleção Vivendo a Matemática**. São Paulo: Scipione, 1989.

MACHADO, Silvia D. A. **Aprendizagem em matemática**. São Paulo: Papirus, 2003.

MARKUSHÉVICH, A. I. **Numeros Complejos y Representaciones Conformes** : Moscou: Editorial MIR,1977.

NAHIN, Paul J.. **An imaginary tale – The story of** $\sqrt{-1}$. New Jersey: Princeton University Press, 2007.

NEEDHAM, Tristan – **Visual Complex Analysis.** New York: Oxford University Press, 2001.

PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 244p.

ROGALSKI, Marc; ROBERT Aline; POUYANNE, Nicolas. **Carrefours entre analyse, algèbre, Géométrie**, Collection CAPES/Agrégation, Paris: Ellipses, 2001.

ROSA, Mario Servelli. **Números complexos, "Uma abordagem histórica para aquisição do** conceito**".** 1998. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SANTOS, Robson de Oliveira. **O uso pedagógico de uma sequência didática para a aquisição** de **algumas ideias relacionadas ao conceito de números complexos**. 2008. 134f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

SILVA, Benedito A.. Contrato Didático In: **Educação matemática uma introdução**, MACHADO, Silvia D. A. (org.), São Paulo: Educ, 2002.

SPINELLI, Walter – **Nem tudo é abstrato no reino dos complexos** – disponível em http://www.nilsonmachado.net/sema20091027.pdf, acessado em 19/12/2009.

STILWELL, John. Yearning **for the Impossible**. Massachusetts: A K Peters, 2006.

APÊNDICE. As ferramentas no software Geogebra

Neste apêndice detalharemos as construções das ferramentas no software Geogebra, que permitem, dado um vetor representante de um número complexo, visualizar os segmentos orientados que representam o seu conjugado, o seu unitário e o seu quadrado. No caso de serem dados os representantes de dois números complexos, criaremos as ferramentas que exibem automaticamente os segmentos orientados que representam o resultado das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre eles.

A.1 Conjugado

Dado um número complexo na sua forma algébrica $z = a + bi$, definimos como conjugado de z o número complexo $\overline{z} = a - bi$. Observamos que, conforme a Figura 82, no plano complexo z e $\overline{z}$ têm imagens simétricas em relação ao eixo real.

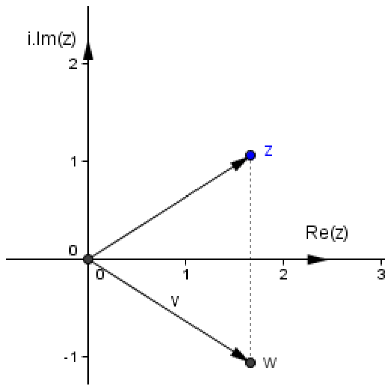


Figura 82. Número complexo e seu conjugado.

Para criarmos a ferramenta, primeiramente indicamos o vetor z, clicando no terceiro botão (da esquerda para a direita) e escolhemos, como mostrado na Figura 83, a ferramenta “Vetor definido por dois pontos”

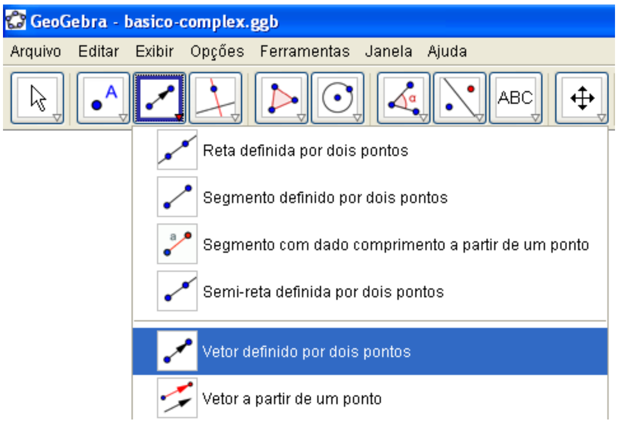


Figura 83. Ferramenta "Vetor definido por dois pontos".

Em seguida, clicamos na origem do sistema e depois em um ponto qualquer do plano, obtendo o vetor. Para nomeá-lo como “ z ”, faça o seguinte:

1. clique no ícone ,
2. aponte para a extremidade do vetor e clique com o botão direito do mouse,
3. escolha “Renomear”, no menu que surgiu;
4. Na janela “Renomear”, digite “ z ”, como novo nome para o ponto “B”.

A determinação do conjugado de z é feita do seguinte modo:

1. clique no oitavo botão (da esquerda para a direita) da barra de ferramentas e escolha “Reflexão com relação a uma reta;
2. note que na barra, ao lado das ferramentas, aparece uma pequena “ajuda”: “Objeto, depois a reta de reflexão”;
3. clique na extremidade do vetor e depois no eixo horizontal;
4. no terceiro botão da direita para a esquerda, clique no ícone , “Vetor definido por dois pontos”;
5. clique na origem do plano e depois no ponto obtido anteriormente, como simétrico da extremidade de z com relação à origem. Pronto. Esse último vetor é o representante do número complexo $\overline{z}$.

Todas essas operações podem ser automatizadas com a criação de uma nova ferramenta. Faça o seguinte:

1. no menu **Ferramentas** clique em **Criar uma nova ferramenta...**; a guia **Saída de objetos** se abrirá;
2. aponte para a extremidade do vetor que representa $\overline{z}$ e clique; aponte para este vetor (não para a origem e nem para a extremidade) e clique; clique em **Próximo**;
3. o ponto B já está assinado como objeto de entrada. Clique na origem do plano (que é a origem do vetor z) e clique em **Próximo**;
4. Em **Nome da ferramenta**, digite "**Conjugado**". O Geogebra apresentará uma janela dizendo que a nova ferramenta foi criada com sucesso.

Note que surgiu um novo ícone, a direita de todos os demais: 

Clicando neste ícone, você verá surgir o nome da ferramenta que você acabou de criar. Para utilizá-la, construa um vetor com origem na origem do plano complexo e extremidade qualquer. Em seguida, clique no ícone .  Clique em **Conjugado**, clique na extremidade do vetor que você acabou de construir e depois na origem deste vetor.

Experimente clicar no ícone  e manipular os vetores representantes dos números complexos iniciais para ver como se comportam os vetores representantes dos conjugados desses complexos.

A.2 Unitário

Dado um vetor não nulo $\vec{v}$, chama-se de unitário de $\vec{v}$, o vetor $\vec{u}$ que tem módulo 1 e mesma direção e sentido de $\vec{v}$.

Para construir a ferramenta que, dado um vetor $\vec{v}$, exibe o seu unitário:

1. construa um vetor $\vec{v}$ definido por dois pontos, sendo a origem do vetor a origem do plano e a extremidade qualquer outro ponto distinto da origem;
2. clique no sexto botão, da esquerda para a direita e escolha **Círculo dados centro e raio**; clique na origem do plano;
3. na janela que se abriu digite "1"; isso fará surgir no plano uma circunferência de centro na origem e raio 1;

4. clique no terceiro botão e escolha **Reta definida por dois pontos**; clique na origem do sistema e na extremidade do vetor, para construir a reta suporte deste vetor;

5. clique no segundo botão e escolha “Interseção de dois objetos”; aponte para a interseção entre a reta e a circunferência, de modo que o vetor que tem origem na origem do plano e extremidade neste ponto de interseção, tenha o mesmo sentido que o do vetor $\vec{v}$;

6. construa o vetor definido por dois pontos: a origem na origem do plano e a extremidade no ponto determinado no passo anterior. Esse é o vetor unitário do vetor $\vec{v}$.

7. No menu **Ferramentas**, clique em **Criar uma nova ferramenta...**;

8. na guia **Saída de objetos**, clique na extremidade do vetor unitário e em vetor $\vec{v}$; clique em **Próximo >**;

9. na guia **Entrada de objetos**, clique na extremidade do vetor inicial e depois na origem; clique em **Próximo >**;

10. na guia **Nome & Ícone**, digite “Unitário”. O Geogebra exibe aviso de que a nova ferramenta foi criada com sucesso.

A.3 Adição

A adição de dois vetores é feita, graficamente, pela regra do paralelogramo. Lembrando que estamos tomando vetores com origem na origem do plano complexo e que as diagonais de um paralelogramo intersectam-se no ponto médio, para determinarmos o vetor resultante da soma de outros dois vetores basta determinarmos o ponto médio entre as extremidades destes e depois o simétrico da origem em relação a este ponto médio.

1. Construa dois vetores determinados por dois pontos (as origens devem coincidir com a origem do sistema);

2. clique no segundo botão e clique em **Ponto médio ou centro**; clique na extremidade de um vetor e depois na extremidade do outro;

3. clique no oitavo botão e clique em **Reflexão com relação a um ponto**;

4. clique na origem do sistema e depois no ponto médio determinado no passo 2; o software mostra o ponto simétrico da origem em relação ao ponto médio;
5. construa o vetor definido por dois pontos: origem na origem do sistema e extremidade como sendo o último ponto construído. Esse é o vetor resultante da adição dos dois vetores iniciais.
6. No menu **Ferramentas**; clique em **Criar uma nova ferramenta...**;
7. Com a guia **Saída de objetos** aberta, clique na extremidade do vetor soma e depois clique neste vetor e depois clique em **Próximo >**;
8. a guia **Entrada de objetos** deve já estar com dois objetos iniciais, que são as extremidades dos vetores iniciais; clique então na origem do sistema e depois clique em **Próximo>**;
9. Digite o nome de "Soma" e finalize. A ferramenta para somar vetores está pronta.

A.4 O quadrado de um número complexo.

Esta ferramenta será útil na elaboração da ferramenta para multiplicar dois números complexos, uma vez que a sua construção torna dispensável a medição dos argumentos. A ideia da construção baseia-se na Figura 84.

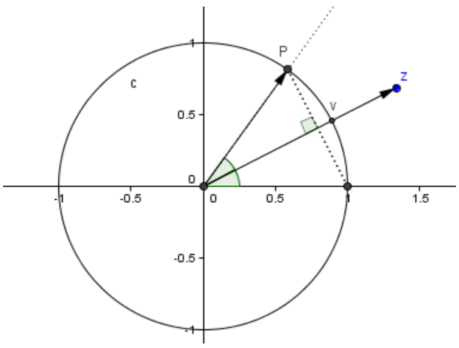


Figura 84. Construção do quadrado de um complexo.

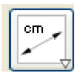
Consideramos o vetor representante do complexo z, a circunferência de centro na origem e raio unitário e o ponto P, simétrico de 1, em relação à reta suporte do vetor Oz. Nessas condições, $\vec{v}$ tem módulo unitário e, assim, $\overrightarrow{OP}$ é v^2.

Agora, podemos obter z^2 de dois modos: com uma homotetia de razão $|z|^2$ sobre v^2, ou com o uso do teorema de Tales. Vejamos como obter esse resultado.

Antes de iniciar, verifique se a **Janela de álgebra** está visível, no lado esquerdo da tela do Geogebra. Caso não esteja, clique em **Exibir – Janela de álgebra**.

1. Construa um vetor definido por dois pontos, sendo a origem do vetor a origem do plano complexo; construa a reta suporte deste vetor, utilizando a Reta definida por dois pontos, disponível no terceiro botão;
2. clique no sexto botão da esquerda para a direita e escolha **Círculo dados centro e raio**, clique na origem do plano complexo e, quando o software solicitar o raio, digite 1 e clique em **Aplicar**;
3. no segundo botão, escolha Interseção de dois objetos e clique no ponto 1, do eixo real, que representa a interseção da circunferência com este eixo;
4. no oitavo botão, clique em Reflexão com relação a uma reta, a seguir aponte para o ponto 1 e clique, aponte para a reta e clique; isso mostrará o ponto que seria extremidade do vetor v^2.
5. Construa o vetor Ov^2.

Agora há dois caminhos para a construção de z^2. O primeiro utiliza homotetia e, o segundo, o teorema de Tales.

6. No sétimo botão, clique no ícone 

Distância ou comprimento, clique na origem do sistema e na extremidade do vetor Oz. Aparecerá a medida do segmento $\overline{AB}$ e surgirá, na **Janela de álgebra** a seguinte indicação: **distânciaAB = 2.33**, por exemplo. Clique no ícone  e, em seguida, com o cursor posicionado sobre "**distânciaAB = 2.33**", clique o botão direito do mouse. Na janela que acabou de ser aberta, clique em **Renomear**; isto abrirá uma nova janela. Nesta nova janela, escolha α e clique em **Aplicar**. Na Janela de álgebra surgirá α = 2.33.
7. Agora vamos fazer uma homotetia, do ponto que representa v^2, com centro na origem e razão $k = |z|^2$. Para isso, clique no oitavo botão da

barra de ferramentas, escolha **Ampliar ou reduzir objeto a partir de um ponto por um determinado fator**. Clique na extremidade e depois na origem do vetor que representa v^2. O Geogebra deve abrir uma janela que na qual você deve entrar com um número, que é a razão da homotetia. Basta clicar sobre a letra **α**, que está do lado direito e depois * e **α novamente**, pois a razão de homotetia é $|z|^2$ = α·α. O software entende que esse α é o módulo de z.

8. Finalmente, construa o vetor cuja origem é a origem do plano complexo e cuja extremidade é o ponto obtido anteriormente. Esse vetor representa z^2.

Outra alternativa para a construção de z^2 é repetir as construções descritas nos itens 1 até 5 e depois usar o teorema de Tales, como indicado a seguir.

6´. Construa a reta suporte do vetor representante de v^2;

7´. no sexto botão, clique em **Círculo definido pelo centro e um de seus pontos**. Em seguida, clique na origem do plano e na extremidade do vetor que representa z.

8´. Clique em **Interseção de dois objetos**, disponível no segundo botão, e assinale a interseção da circunferência construída com a reta suporte do vetor v^2.

9. Construa o segmento definido pelas extremidades dos vetores v^2 e z.
10. Clique em reta paralela, no quarto botão. Aponte para o ponto criado no passo 8´e clique; aponte para o segmento construído em 9 e clique.
11. Use Interseção de dois objetos para assinalar a interseção entre a reta construída no passo anterior e a reta suporte do vetor que representa z. Suponha que este ponto de interseção seja W. Note que, pelo teorema de Tales, OW = $|z^2|$.
12. Usando **Círculo definido pelo centro e um de seus pontos**, construa a circunferência que tem como centro a origem do plano complexo e, como um de seus pontos, o ponto determinado no passo anterior.

13. A interseção desta circunferência com a reta suporte do vetor que representa v^2 é a extremidade do vetor que representa z^2. Construa-o.

    Para criar a respectiva ferramenta, siga as instruções:

14. No menu **Ferramentas**, clique em **Criar uma nova ferramenta...**;
15. O software abriu a janela de Criar uma nova ferramenta. A guia **Saída de Objetos** está selecionada. Clique na extremidade do vetor que representa z^2 e depois clique nesse vetor; clique em **Próximo >**;
16. Na guia Entrada de Objetos, o ponto que representa a extremidade do vetor z já deve constar, clique na origem do plano complexo e, logo depois, em **Próximo >;**
17. Agora nomeie sua nova ferramenta como “Quadrado de um complexo”.

A.5 Multiplicação.

A identidade $z \cdot w = \dfrac{(z+w)^2 - (z-w)^2}{4}$ nos permite construir uma ferramenta para a multiplicação de dois números complexos z e w, utilizando as ferramentas para soma, diferença e quadrado construídas anteriormente, além do fato de que o Geogebra dispõe de ferramenta para homotetia. Vale a pena a construção e a exploração da ferramenta para multiplicação de dois complexos, que deixamos a cargo do leitor.

A.6 Inverso

Já foi visto que, graficamente, o conjugado $\overline{z}$ de um número complexo z é o simétrico de z em relação ao eixo x. Assim, se z o argumento de z é θ, então o argumento de $\overline{z}$ é –θ. Além disso, $\overline{z}$ e z têm módulos iguais.

O complexo nulo (0,0) não tem inverso multiplicativo, uma vez que seu produto por qualquer complexo dá (0,0) e nunca (1,0). Seja z um complexo não nulo com argumento θ. Consideremos o complexo w, com módulo $\dfrac{1}{|z|}$ e argumento –θ.

Notemos que $z \cdot w$ tem módulo 1 e argumento nulo, isto é, $z \cdot w$= (1,0), o que nos permite concluir que w é o inverso multiplicativo de z. Definimos $w = \frac{1}{z}$. Como $z \cdot w$ tem módulo unitário, $|z|^2 \cdot w$ tem módulo igual a $|z|$ e argumento igual a –θ. Logo, $|z|^2 \cdot w$ é o conjugado de z. Ou seja:

$|z|^2 \cdot w = |z|^2 \cdot \frac{1}{z} = \overline{z}$. Daí, temos $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Esta igualdade nos mostra que, para construir o inverso de um número complexo z, podemos construir primeiramente o seu conjugado e depois realizar a homotetia desse conjugado, com centro na origem e razão $\frac{1}{|z|^2}$.

Outra opção para a construção do inverso para a multiplicação de um complexo é baseada no teorema de Tales. Nesta seção apresentaremos as duas construções.

1. Defina um vetor não nulo, com origem na origem do plano cartesiano e extremidade qualquer. Clique com o botão direito nesse vetor e o nomeie como z.

2. Utilize a ferramenta **Conjugado** e construa o vetor representante do conjugado de z.

3. No sétimo botão, clique no ícone que indica Distância ou comprimento; a seguir clique na origem e na extremidade do vetor que representa z.

4. Com o botão direito do mouse, clique sobre o item que mostra a distância entre os pontos A e B (origem e extremidade do vetor que representa z). Renomeie como α e clique em **Aplicar**.

5. Selecione **Ampliar ou reduzir objeto a partir de um ponto por um determinado fator,** no oitavo botão. Clique na extremidade do vetor que representa $\overline{z}$, clique na origem e, na janela que solicita o número (razão da homotetia), digite 1 / (α*α) e clique em **Aplicar**. O software mostrará um ponto sobre o vetor que representa $\overline{z}$. Esse ponto é a extremidade do vetor que

representa $\frac{1}{z}$. Defina esse vetor e crie a ferramenta que constrói o inverso multiplicativo de um número complexo. Nomeie como “Inverso de um complexo”.

A construção do inverso de um número complexo, utilizando o teorema de Tales, tem o a vantagem de não depender de medidas, como foi feito na descrição anterior. Passemos então para as justificativas geométricas.

Dado um número complexo z, construímos a circunferência de centro O e raio $|z|$ e a circunferência de centro O e raio 1. Seja P o ponto de interseção do vetor que representa z com a circunferência de centro na origem e raio 1; sejam ainda Q o simétrico de P com relação ao eixo x e S a interseção da circunferência de centro na origem e raio $|z|$ com o eixo x. Traçamos a reta determinada por O e Q. Então a construção que permite obter o inverso multiplicativo de z é a seguinte: traça-se a reta determinada por S e Q e, pelo ponto (1,0), traça-se a paralela a esta reta. Esta paralela traçada intersecta a reta $\overleftrightarrow{OQ}$ no ponto T. O vetor que tem origem em O e extremidade em T é o representante do inverso de z para a multiplicação, isto é, $\frac{1}{z}$. Observe na Figura 85 que o teorema de Tales justifica esse resultado, que vale tanto para $|z|>1$ quanto para $|z|<1$.

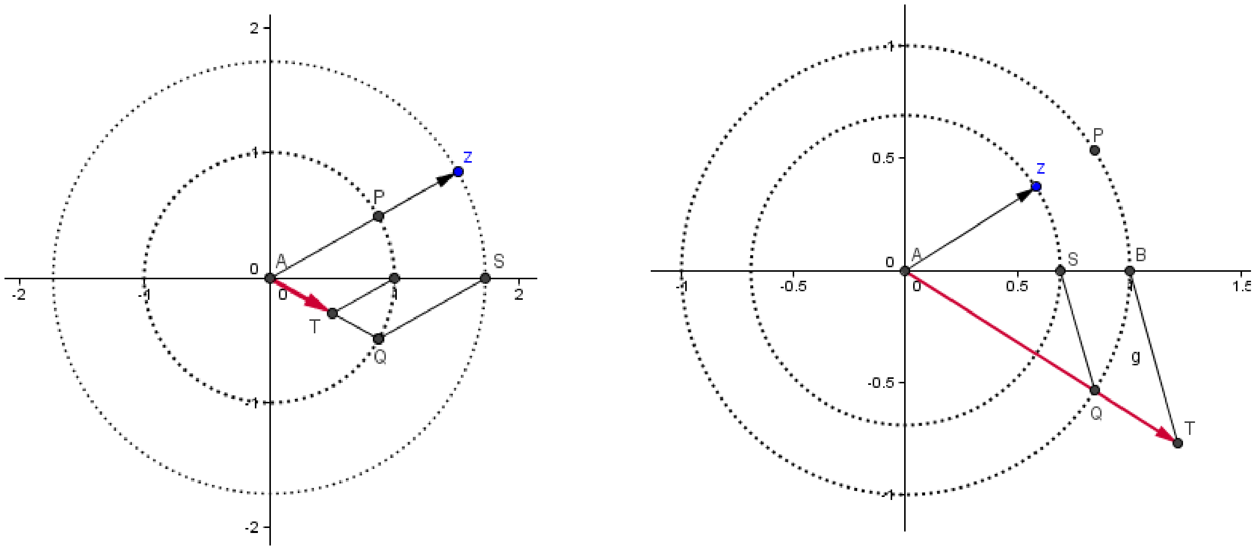


Figura 85. Construção do inverso de um número complexo.

A.7 Divisão

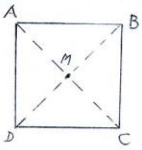
Dados dois complexos z e w, com $w \neq 0$, define-se o quociente $\frac{z}{w}$ como sendo o produto de z pelo inverso de w. Portanto, utilizando as ferramentas para produto e para inverso de um número complexo é possível criar uma ferramenta para a divisão de dois números complexos, como descrevemos a seguir.

1. Defina dois vetores não nulos, distintos, ambos com origem na origem do plano cartesiano e extremidade qualquer. Nomeie um como z e outro como w.
2. Utilize a ferramenta **Inverso de complexo** para construir o inverso de w.
3. Para efetuar o quociente $\frac{z}{w}$, utilize a ferramenta **Produto de complexos** para efetuar o produto de z pelo inverso de w.
4. Clique em **Criar uma nova ferramenta...**, no menu **Ferramentas** para criar a ferramenta “Divisão de complexos”.

ANEXO A. As soluções do professor M.

1º MODO · Usando distância entre dois pontos

PROF. M



Seja $C = (a,b)$

$$\begin{cases} d_{AB}^2 = d_{BC}^2 \Rightarrow (2-1)^2+(3-1)^2 = (a-2)^2+(b-3)^2 \\ d_{AC}^2 = d_{AB}^2 + d_{BC}^2 \Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 = (2-1)^2+(3-1)^2+(a-2)^2+(b-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+\cancel{4} = a^2-4a+\cancel{4}+b^2-6b+9 \\ -2a+\cancel{1}-2b+1 = \cancel{1}+4-4a+4-6b+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2-4a-6b = -8 \\ 2a+4b = 16 \Rightarrow a = 8-2b \end{cases}$$

Subst. na 1ª equação, vem:

$$(8-2b)^2+b^2-4(8-2b)-6b = -8 \Rightarrow 64-32b+4b^2+b^2-32+8b-6b+8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5b^2-30b+40 = 0 \Rightarrow b^2-6b+8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow a = 8-4 = 4 \\ \text{ou} \\ b = 4 \Rightarrow a = 8-8 = 0 \end{cases}$$

Assim, $C = (4,2)$ ou $C = (0,4)$

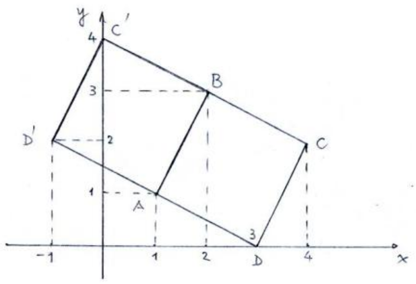
M ponto médio de AC é também ponto médio de BD.

Então,

$$\frac{x_A+x_C}{\cancel{2}} = \frac{x_B+x_D}{\cancel{2}} \quad e \quad y_A+y_C = y_B+y_D$$

(I) $C=(4,2)$	(II) $C'=(0,4)$
$1+4 = 2+x_D$	$1+0 = 2+x_{D'}$
$x_D = 3$	$x_{D'} = -1$
$1+2 = 3+y_D$	$1+4 = 3+y_{D'}$
$y_D = 0$	$y_{D'} = 2$
$D = (3,0)$	$D' = (-1,2)$

GRAFICAMENTE:



2º MODO - Por distâncias, achando M ponto de encontro das diagonais

$$\begin{cases} d_{MA} = d_{MB} \\ d_{AB}^2 = d_{AM}^2 + d_{BM}^2 \end{cases}$$ sai M

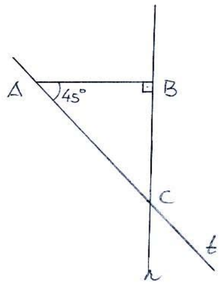
Depois, M é pto médio de AC

$x_M = \frac{x_A+x_C}{2}$ e $y_M = \frac{y_A+y_C}{2}$ sai C

M pto médio de BD → sai D.

Figura 86. Primeira e segunda soluções do professor M.

3º MODO Com retas



A reta AB tem coeficiente angular $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{2-1} = 2$

A reta r é perpendicular a AB.

Sua equação: $y = -\frac{1}{2}x + k$ $\quad (m_r \cdot m_{AB} = -1)$

$B \in r \Rightarrow 3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + k \Rightarrow k = 4$

$(r)\ y = -\frac{1}{2}x + 4$

PROF. M

A reta t forma 45° com a reta AB

$tg\, 45° = \left| \dfrac{m_{AB} - m_t}{1 + m_{AB} \cdot m_t} \right| \Rightarrow 1 = \left| \dfrac{2 - m_t}{1 + 2m_t} \right|$

1º CASO. $\dfrac{2 - m_t}{1 + 2m_t} = 1$

$2 - m_t = 1 + 2m_t$

$m_t = \frac{1}{3}$

t tem equação $y = \frac{1}{3}x + k$

$A \in t \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + k \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

$(t)\ y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

C é a intersecção entre t e r

$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}x + 4$

$2x + 4 = -3x + 24$

$5x = 20$

$x = 4 = x_C$

$y = \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} = 2 = y_C$

$C = (4,2)$

Obtém-se D por ponto médio (1º modo)

2º CASO $\dfrac{2 - m_t}{1 + 2m_t} = -1$

$2 - m_t = -1 - 2m_t$

$m_t = -3$

$(t')\ y = -3x + k$

$A \in t' \Rightarrow 1 = -3 \cdot 1 + k \Rightarrow k = 4$

$(t')\ y = -3x + 4$

$t' \cap r = \{C'\}$

$\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

$-3x + 4 = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow x = 0 = x_{C'}$

$y = -3 \cdot 0 + 4 = 4 = y_{C'}$

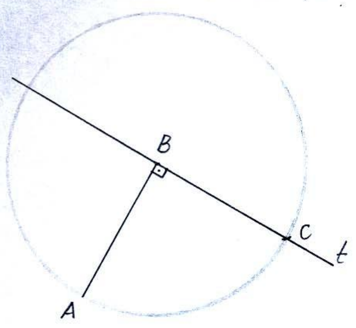
$C' = (0,4)$

D por ponto médio

Figura 87. Terceira solução do professor M.

4º MODO

Com circunferência



Seja $C = (a, b)$

$d_{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

A circunferência de centro B e raio $\sqrt{5}$ tem por equação

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$

Como C pertence a ela

$(a-2)^2 + (b-3)^2 = 5$ (I)

t é perpendicular a AB por B. Sua equação

$y = -\frac{1}{m_{AB}} x + k$

$y = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \cdot x + k$

$y = -\frac{1}{2} x + k$

$B \in t \Rightarrow 3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + k \Rightarrow k = 4$

Então, (t) $y = -\frac{1}{2} x + 4$

$C \in t \Rightarrow b = -\frac{1}{2} a + 4$

Subst. em (I) vem:

$(a-2)^2 + \left(-\frac{1}{2} a + 4 - 3\right)^2 = 5$

$a^2 - 4a + 4 + \frac{1}{4} a^2 - a + 1 = 5$

$\frac{5}{4} a^2 - 5a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ a = 4 \end{cases}$

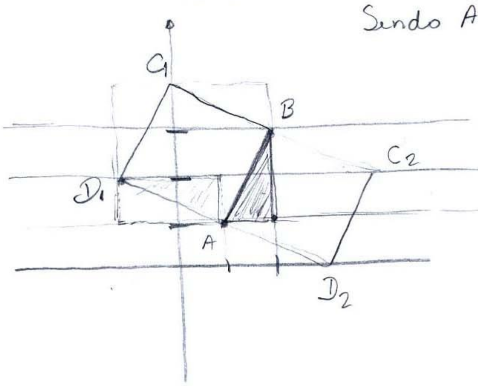
etc

Figura 88. Quarta solução do professor M.

ANEXO B. As soluções do professor R.

Os pontos A=(1,1) e B =(2, 3) são vértices consecutivos de um quadrado. Determine os outros vértices desse quadrado.

$\boxed{1^{\circ}\text{Modo}}$ Por rotação



Sendo ABCD o quadrado, temos:

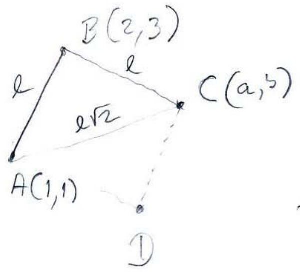
Rotação de 90° de $\overline{AB}$ em torno de A no sentido anti-horário $\Rightarrow D_1(-1,2)$

Rotação de 90° de $A\overline{B}$ em torno de B no sentido horário $\Rightarrow C_1(0,4)$

Da mesma forma (1º hor., 2º anti-hor.) obtemos:

$C_2(4,2)$ e $D_2(3,0)$

$\boxed{\text{Outro modo}}$ Sendo ABCD o quadrado



$$\ell = \sqrt{5} \Rightarrow \ell\sqrt{2} = \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} (a-2)^2 + (b-3)^2 = 5 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 4 + b^2 - 6b + 9 = 5 \\ a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = 10 \end{cases}$$

PROF. R

$$-2a + 3 - 4b + 8 = -5$$

$$-2a = +4b - 16$$

$$\boxed{a = 8 - 2b} \Rightarrow$$

$$(8 - 2b - 1)^2 + (b-1)^2 = 10$$

$$49 - 28b + 4b^2 + b^2 - 2b + 1 = 10$$

$$5b^2 - 30b + 40 = 0$$

$$b^2 - 6b + 8 = 0$$

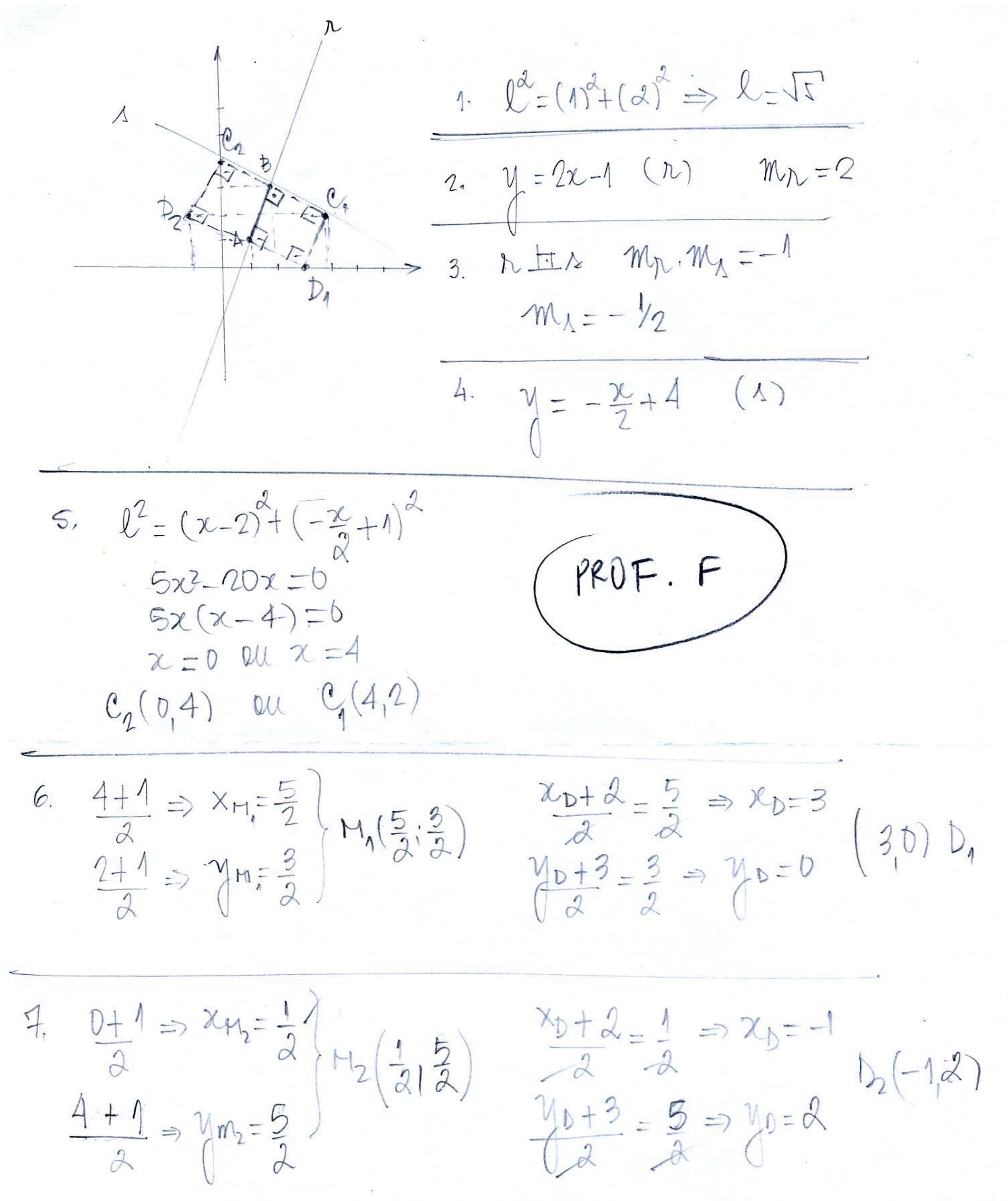
$$(b-2)(b-4) = 0$$

1º) $b = 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \boxed{C_2(4,2)} \stackrel{\text{ponto médio}}{\Rightarrow} \begin{cases} x_D + 2 = 4 + 1 \\ y_D + 3 = 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D_2(3,0)}$

2º) $b = 4 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \boxed{C_1(0,4)} \stackrel{\text{ptm.}}{\Rightarrow} \begin{cases} x_D + 2 = 0 + 1 \\ y_D + 3 = 1 + 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D_1(-1,2)}$

Figura 89. Soluções do professor R.

ANEXO C. A solução do professor F.



1. $\ell^2=(1)^2+(2)^2 \Rightarrow \ell=\sqrt{5}$

2. $y=2x-1$ (r) $\quad m_r=2$

3. $r \perp s \quad m_r \cdot m_s=-1$

$m_s=-1/2$

4. $y=-\frac{x}{2}+4$ (s)

5. $\ell^2=(x-2)^2+\left(-\frac{x}{2}+1\right)^2$

$5x^2-20x=0$

$5x(x-4)=0$

$x=0$ ou $x=4$

$C_2(0,4)$ ou $C_1(4,2)$

PROF. F

6. $\frac{4+1}{2} \Rightarrow x_{M_1}=\frac{5}{2}$; $\frac{2+1}{2} \Rightarrow y_{M_1}=\frac{3}{2}$ $\quad M_1\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

$\frac{x_D+2}{2}=\frac{5}{2} \Rightarrow x_D=3$

$\frac{y_D+3}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow y_D=0$ $\quad (3,0)\ D_1$

7. $\frac{0+1}{2} \Rightarrow x_{M_2}=\frac{1}{2}$; $\frac{4+1}{2} \Rightarrow y_{M_2}=\frac{5}{2}$ $\quad M_2\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

$\frac{x_D+2}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x_D=-1$

$\frac{y_D+3}{2}=\frac{5}{2} \Rightarrow y_D=2$ $\quad D_2(-1;2)$

Figura 90. Solução do professor F.

ANEXO D. A solução do professor A.

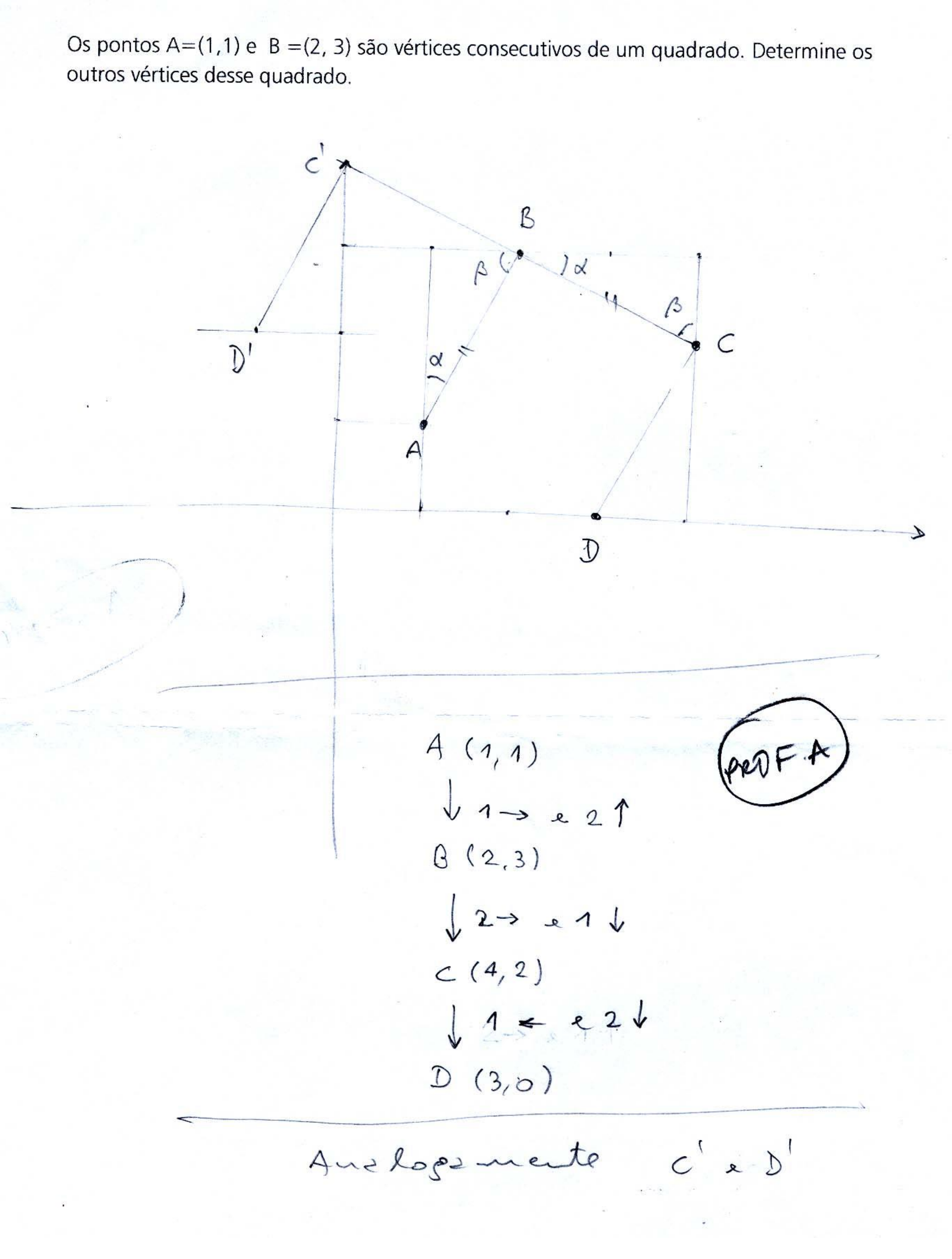


Figura 91. Solução do professor A