

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC-SP**

**CARLOS ROBERTO TEIXEIRA ALVES**

**TARSKI ANOTADO**

**estudo dos §2 e §3 do artigo *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas***

**MESTRADO EM FILOSOFIA**

**SÃO PAULO**

**2011**

Carlos Roberto Teixeira Alves

**TARSKI ANOTADO**

estudo dos §2 e §3 do artigo *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas*

MESTRADO EM FILOSOFIA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em FILOSOFIA sob a orientação do Prof. Doutor EDELICIO GONÇALVES DE SOUZA.

SÃO PAULO

2011

BANCA EXAMINADORA

---

---

---

*OBRIGADO GICÉLIA, MINHA esposa,  
pela paciência durante a longa redação deste trabalho,  
quando não havia saída senão esperar.  
Ler estas linhas testemunha que o tempo aparentemente perdido  
foi alimento da esperança de nós ambos, que ora se confirma.*

*AGRADEÇO AO PROFESSOR Lafayette de Moraes pela idéia inicial do projeto,  
pelas leituras parciais, recomendações, ajuda com a bibliografia rara  
e por ter me poupado de avisar logo no começo quão difícil era o trabalho de Tarski.  
Sem sua presença diligente, tudo teria se tornado mais difícil.*

*AGRADEÇO AO PROFESSOR Edelcio Gonçalves de Souza, meu orientador,  
pela idéia do formato do trabalho e por sua leitura cuidadosa,  
que permitiu um estudo tão minucioso do trabalho de Tarski  
e uma referência pouco evitável aos futuros estudos desse autor.*

*DEDICO ESTE TRABALHO ao meu filho Bernardo Luiz,  
que todos os dias mais de uma vez retirou-me de entre os livros  
para com ele construir pontes voadoras, navios-trem e a Cidade dos Carrinhos,  
cuja lógica só ele podia entender.*

*“Por que você fala usando enigmas? – perguntou o Pequeno Príncipe.*

*Eu resolvo todos – respondeu a serpente.”*

*O Pequeno Príncipe,*  
Antoine de Saint-Exupéry

## ÍNDICE

RESUMO.....	10
ABSTRACT.....	11
INTRODUÇÃO - A SOLUÇÃO SEMÂNTICA DE TARSKI.....	12
<i>A semântica científica de Tarski.....</i>	12
<i>‘Verdade’ como conceito semântico.....</i>	19
<i>O projeto extensional.....</i>	19
<i>Uma definição coloquial de ‘verdade’.....</i>	22
<i>Uma definição materialmente mais adequada.....</i>	25
<i>Os nomes de sentenças.....</i>	30
<i>Uma metalinguagem para as linguagens coloquiais.....</i>	31
<i>Forma geral da definição parcial de ‘verdade’: o T-ESQUEMA.....</i>	31
<i>Relação entre Linguagem e Metalinguagem.....</i>	34
<i>Definição de sentença verdadeira nas linguagens coloquiais.....</i>	36
<i>Construção da Antinomia: versão de Łukasiewicz.....</i>	39
<i>Análise dos ‘nomes de sentença’ e de sua denotação.....</i>	43
<i>Construção da Antinomia do Mentiroso: teste da generalização de ‘sentença verdadeira’ para linguagens coloquiais.....</i>	47
<i>Última tentativa de solução para as linguagens coloquiais.....</i>	49
CAPÍTULO 1 - CONSTRUÇÃO DA LINGUAGEM-OBJETO <i>L</i> .....	51
1. Ao que se refere à cláusula ( $\alpha$ ): estudo dos símbolos da linguagem-objeto.....	58
1.1. Os símbolos intuitivos ou constantes.....	58
1.2. Variáveis.....	62
2. Ao que se refere à cláusula ( $\beta$ ): estudo de expressões sentenciais.....	65
CAPÍTULO 2 - DESCRIÇÃO DA METALINGUAGEM.....	69
1. A metalinguagem.....	70
2. Metassintaxe.....	71
3. Expressões metalingüísticas TIPO I: expressões de um caráter lógico geral.....	74
4. Expressões metalingüísticas TIPO II: expressões de termos específicos da metalinguagem de um caráter descritivo-estrutural.....	83
CAPÍTULO 3 - A AXIOMÁTICA DA METALINGUAGEM.....	93

1. Axiomática geral (ou de Russell-Whitehead).....	93
2. Axiomática metalinguística.....	96
3. Comentário à axiomática metalinguística.....	104
4. Comentário de Tarski aos metaxiomas.....	104
4.1. Problema da intuitividade dos axiomas.....	104
4.2. Problema da categoricidade do sistema axiomático.....	108
4.3. Problema existencial.....	113
CAPÍTULO 4 - DEFINIÇÃO DE SENTENÇA.....	118
1. A inclusão ( $i, \sqsubset$ ).....	119
2. A negação ( $N, \neg$ ).....	121
3. A Soma Lógica ( $A, \sqcup$ ).....	122
4. Definição de <i>produto lógico</i> ( $\cdot, \sqcap$ ).....	125
5. A Quantificação Universal ( $\cap, \sqsupset$ ).....	126
6. A Quantificação Existencial ( $\sqcup, \sqsupset$ ).....	129
7. Definição de <i>função sentencial</i> .....	130
8. Definição de <i>variável livre</i> .....	134
9. Definição de <i>sentença significativa</i> .....	136
CAPÍTULO 5 - DESCRIÇÃO METALINGUÍSTICA DA AXIOMÁTICA DE $L$ .....	140
1. Primeiro tipo de sentença primitiva: baseado na negação e na adição lógica.....	141
2. Segundo tipo de sentença primitiva: baseado na inclusão.....	143
CAPÍTULO 6 - REGRAS DE INFERÊNCIA PARA A LINGUAGEM $L$ .....	152
1. Definição de <i>expressão obtida</i> .....	153
2. Relação entre <i>expressão obtida</i> e <i>consequência</i> .....	159
I) Substituição.....	160
II) Destacamento.....	161
III) Introdução do quantificador universal.....	162
IV) Eliminação do quantificador universal.....	162
CAPÍTULO 7 - A NOÇÃO DE CONSEQUÊNCIA.....	164
1. Definição de consequência de $n$ -ésimo grau.....	167

2. Definição geral de consequência.....	172
CAPÍTULO 8 - O QUE É TEOREMA.....	176
1. Definição de <i>sentença demonstrável</i> (ou <i>teorema</i> ).....	177
2. Discussão a respeito da natureza existencial dos axiomas metateóricos.....	181
3. Tratamento existencial da Definição 17: problema e solução.....	183
4. A noção de inferência.....	188
CAPÍTULO 9 - SISTEMA DEDUTIVO, CONSISTÊNCIA E COMPLETUDE.....	191
1. Definição de <i>sistema dedutivo</i> .....	192
2. Definição de <i>consistência</i> .....	193
3. Definição de <i>completude</i> .....	195
4. Definição de <i>sentença equivalente</i> .....	195
CAPÍTULO 10 - T-CONVENÇÃO.....	197
1. A Definição 17 não cumpre a tarefa de definir <i>sentença verdadeira</i> .....	200
2. Noções semânticas envolvidas em torno da idéia de <i>sentença verdadeira</i> .....	210
3. A T-CONVENÇÃO.....	213
CAPÍTULO 11 – SATISFATIBILIDADE.....	216
1. Limitação do método de exaustão no uso da T-CONVENÇÃO para definir <i>verdade</i> .....	217
2. Limitações iniciais do método recursivo no uso da T-CONVENÇÃO para definir <i>verdade</i> e solução dessa limitação.....	218
3. Satisfação de funções sentenciais: estudos de caso.....	222
3.1. Satisfação de uma função sentencial de única variável livre.....	222
3.2. Satisfação de uma função sentencial de duas variáveis livres.....	226
3.3 Satisfação de uma função sentencial de um número arbitrário de variáveis livres.....	228
4. Considerações prévias à definição geral de satisfação.....	237
5. Problemas de interpretação da satisfação da função sentencial onde opera o quantificador universal.....	237
6. Definição de satisfatibilidade.....	241
7. Exemplificação e conclusão.....	243
CAPÍTULO 12 - CONOTAÇÃO E DEFINIBILIDADE.....	245
1. Conceito de ‘denotação’.....	249

2. O conceito de ‘definibilidade’.....	250
CAPÍTULO 13 - DEFINIÇÃO DE SENTENÇA VERDADEIRA.....	255
1. Conceito de verdade.....	257
2. A definição de <i>sentença verdadeira</i> .....	260
3. A adequação material da Definição 23: prova restrita ao método empírico.....	264
3.1. Prova empírica: sentença $\bigcap_1 U_2 t_{1,2}$ .....	267
CAPÍTULO 14 - TEOREMAS DERIVADOS DA DEFINIÇÃO DE SENTENÇA VERDADEIRA.....	272
1. Teorema 1 e demonstração.....	272
2. Teorema 2, LEMAS A e B, e demonstrações.....	273
2.1. Demonstração do LEMA A.....	274
2.2. Demonstração do LEMA B.....	275
2.3. Demonstração do Teorema 2.....	275
3. Teorema 3, LEMA C e demonstrações.....	275
3.1. Demonstração do LEMA C.....	276
3.2. Demonstração do Teorema 3.....	276
4. Teorema 4, Teorema 5 e LEMA D.....	278
4.1. Teorema 4 e demonstração.....	278
4.2. Lema D e demonstração.....	279
4.3. Teorema 5 e demonstração.....	280
5. Teorema 6 e LEMA E.....	280
5.1. Demonstração do LEMA E.....	280
5.2. Demonstração do Teorema 6.....	281
CONCLUSÃO.....	283
BIBLIOGRAFIA.....	287

## RESUMO

Em 1929 Alfred Tarski escreveu o artigo *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formais* o qual apresenta a questão sobre a atribuição de ‘verdade’. Sua hipótese é que ‘verdade’ ou ‘falso’ não são predicados de coisas, mas atributos de expressões – mais precisamente de *sentenças*. Por isso Tarski constrói um modo de predicar esses atributos sem chegar a uma auto-referência contraditória em que a ‘verdade’, ou o ‘falso’, é e não é predicado ao mesmo tempo: o uso de uma linguagem formal e da metalinguagem para essa linguagem formal. O presente trabalho tem o objetivo de explicitar a Teoria Tarskiana de Verdade. Uma geral exposição prévia na introdução desta dissertação mostra a limitação da definição para as linguagens naturais. O corpo central deste trabalho é dedicado a uma análise cuidadosa, minuciosa e exaustiva do corpo principal do artigo *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas*, §2 e §3 (até o Teorema 7), esclarecendo os pontos principais, para situar-se com rigor diante do que era para Tarski o significado semântico da palavra ‘verdade’.

**PALAVRAS CHAVE:** Tarski, conceito tarskiano de verdade, definição de sentença verdadeira, verdade em linguagens formalizadas, metalinguagem.

**ABSTRACT**

In 1929 Alfred Tarski wrote the paper *The Concept of Truth for Formalized Languages* which presents the question to respect use concept of “truth”. His hypothesis is that ‘truth’ or ‘false’ are not predicates of things, but attribute for expressions – more precisely of sentences. So Tarski constructed a way to preach these attributes without reaching a self-reference contradictory in that the ‘truth’ or the ‘false’ are not predicated the same time: the use of a formal language and metalanguage for this formal language. This paper aims to explain the Tarskian Theory of Truth. A previous exposure in the general introduction of this paper shows the limitation of the definition for natural languages. The body of this paper is devoted careful analysis, thorough and comprehensive part of the article *The Concept of Truth in Formalized Languages*, §2 and §3 (Theorem 7), clarifying the main points to be located precisely at what for Tarski the semantic meaning of the word ‘truth’.

**KEY-WORDS:** Tarski, tarskian concept of truth, true sentence definition, truth in formalized languages, metalanguage.

## INTRODUÇÃO

### A SOLUÇÃO SEMÂNTICA DE TARSKI

---

Em *As Viagens de Gulliver*, de Jonathan Swift, quando Gulliver está no país de Liliput, o rei do país ordena a seus delegados que façam um inventário dos objetos que Gulliver carrega. Ao cumprirem as ordens, os delegados *descrevem* os objetos ao invés de *nomeá-los*. Isso porque não há na língua liliputiana palavras para “pistola” ou “relógio”, por exemplo. Eles descrevem assim a um *pente de cabelos*: “(...). Na algibeira direita, havia uma grande máquina chata, armada com dentes muito compridos que pareciam a paliçada que há em volta do palácio de Sua Majestade. (...)”<sup>1</sup>.

Por que para Gulliver o termo “pente de cabelos” servia bem, mas para os liliputianos o melhor era usar a expressão “máquina chata de dentes compridos como paliçada”? O mais interessante é que dificilmente alguém concordaria que dizer *pente de cabelos* é o mesmo que dizer *máquina chata de dentes compridos como paliçada*. Mas todos concordam que se referem ao mesmo objeto (se leram o livro). Assim, no caso do pente de Gulliver, o nome do objeto não remete à descrição feita dele, nem a descrição ao nome.

No universo da linguagem e da lógica por trás das relações lingüísticas esse é um problema de difícil solução: conciliar aquilo que é referido com a referência. Em outras palavras é dar à linguagem base epistemológica para conseguir inserir o sinal de igualdade (“=”) entre os termos “pente de cabelos” e “máquina chata de dentes compridos como paliçada”; além disso, dizer em que condições isso é possível, se não for impossível. Dá-se o nome ‘semântica’ a essa empresa.

#### A semântica científica de Tarski

Quando Tarski se propõem resolver o problema da definição de verdade, ele está ciente da maioria das tentativas anteriores às dele. Um resumo bastante prático de seu

---

<sup>1</sup> SWIFT, JONATHAN; *As Viagens de Gulliver*, Coleção Clássicos Jackson, Vol. XXXI, 1950.

projeto pode ser lido em *The establishment of Scientific Semantics*<sup>2</sup>, publicado pela primeira vez em 1936, do qual muitos pontos ele expande em outro artigo, o de 1944, intitulado *A Concepção Semântica da Verdade e os Fundamentos da Semântica*<sup>3</sup>, onde trata também dos mesmos temas que em *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas* de 1935, mas de modo mais simples e menos técnico (para facilitar o acesso a seu trabalho por pensadores que não tinham conhecimento de lógica e/ou da língua para lerem a versão em alemão). O primeiro passo de Tarski é dizer o que ele entende por *semântica* e dar sua posição quanto às causas que fizeram falhar os projetos semânticos anteriores.

Tarski (TARSKI, A.; [1983a], p.401) entende *semântica* como a totalidade das considerações a respeito dos conceitos que expressam conexões entre expressões da linguagem e os objetos e estados de coisas referidos pelas expressões. No seu artigo *Verdade e Demonstração*<sup>4</sup> de 1969 ele entende semântica como “aquela parte da lógica que, informalmente falando, discute as relações entre os objetos lingüísticos (tais como sentenças) e aquilo que é expresso por esses objetos” (TARSKI, A.; [2006] p.206.). Ele aponta (TARSKI, A.; [1983a], p.401) como exemplo de conceitos semânticos a *denotação*, *satisfação* e a *definição*. Como exemplo, dá as seguintes sentenças<sup>5</sup>:

(1) A expressão ‘o vencedor de Jena’ denota Napoleão;

---

<sup>2</sup> TARSKI, A.; [1983a], *The Establishment of Scientific Semantics*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.401-408. Este artigo é resumo da comunicação feita no Congresso Internacional de Filosofia Científica, em Paris, 1935. Artigo em polonês: “O ugruntowani naukowej semantyki”, em *Przegląd Filozoficzny*, v.39 (1936), p.50-7. Artigo em alemão: “Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik”, em *Actes Du Congrès International de Philosophie Scientifique*, v.3 (Actualités Scientifiques et Industrielles, v.390), Paris, 1936, p.1-8. Existe uma tradução para o português: *O Estabelecimento da Semântica Científica* in TARSKI, A. [2006]; *A Concepção Semântica da Verdade – Textos Clássicos de Tarski*; Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra, orgs., Editora UNESP, São Paulo, pp.149-156.

<sup>3</sup> Título original: *The Semantical Conception of Truth and the Formulations of Semantics* in *Philosophy and Phenomenological Research*, 4, 1944, p341-376. Neste trabalho usaremos a tradução portuguesa em TARSKI, A.; [1990].

<sup>4</sup> Esse artigo de Tarski foi publicado em 1969 na revista de divulgação científica norte-americana *Scientific American* para tornar de domínio comum algumas de suas considerações básicas sobre a semântica. Trata-se de um resumo bem pouco profundo de suas teses principais.

<sup>5</sup> Em TARSKI, A.; [1990], p.80-81, Tarski apresenta os seguintes exemplos para explicar as mesmas idéias:

- A expressão “o pai deste país” designa (denota) George Washington;
- a neve satisfaz a função proposicional (a condição) “x é branco”;
- a equação “ $2x = 1$ ” define (determina univocamente) o número  $\frac{1}{2}$ .

- (2) A neve satisfaz a condição ‘x é branco’;  
 (3) A equação ‘ $x^3 = 2$ ’ define (determina univocamente) a raiz cúbica do número 2.

Após apresenta o conceito de *verdade* também como um conceito semântico (TARSKI, A.; [1983a], p.401.): “O conceito de *verdade* também – e isto não é comumente reconhecido – deve ser incluído aqui, pelo menos em sua interpretação clássica, segundo a qual ‘verdadeiro’ significa o mesmo que ‘correspondente à realidade’”.

Apesar da importância que os conceitos semânticos sempre tiveram na filosofia, lógica e filologia, quando aplicados acabaram por revelar insustentáveis os projetos semânticos que se pretendiam. O resultado foi um ceticismo quanto à possibilidade da construção de uma semântica. Tal ceticismo se fundou no fato de que tenha falhado toda tentativa de caracterizar de modo mais preciso os conteúdos desses conceitos. Apesar de tais conteúdos serem claramente identificáveis na linguagem coloquial (todos sabemos apontar uma verdade, apontar uma denotação etc.), a consequência da noção vaga a respeito de que coisa exatamente é a verdade, a denotação, etc., levaram sempre a cair em antinomias e paradoxos as discussões onde esses conceitos apareciam. O mais famoso deles é o Paradoxo do Mentiroso, mas só para fugir um pouco do lugar comum, vejamos um problema de denotação muito curioso e divertido, o *Cachimbo de Magritte*, que não pode ser classificado como paradoxo, mas pode ser tomado como um *puzzle* visual:



**Figura 1** – *Isto não é um cachimbo*, René Magritte, 1928

Há livros escritos sobre esse quadro para querermos esgotar a discussão em breves linhas, mas vamos à charada. A ‘figura de cachimbo’ pode

**1** - denotar a si própria;

**2** - denotar o cachimbo real comprado nas tabacarias.

Por sua vez, *pipe* pode

**a** - denotar a si próprio;

**b** - denotar o cachimbo real comprado nas tabacarias.

Podemos reduzir a sentença *ceci n'est pas une pipe* à forma genérica

**x n'est pas y**

onde no lugar de **x** escrevemos ou **1** ou **2** e no lugar de **y** escrevemos ou **a** ou **b**. Assim teremos os seguintes casos:

I – **1 n'est pas a**

II – **1 n'est pas b**

III – **2 n'est pas a**

IV – **2 n'est pas b**

Ora, (I) é verdadeira, pois uma figura não é uma palavra; (II) é verdadeira, pois uma figura não é um cachimbo real; (III) é verdadeira, pois um cachimbo real não é uma palavra; (IV) é falsa, pois um cachimbo real é um cachimbo real. Notamos que a sentença é falsa unicamente quando algum de seus termos (ou ambos) não são auto-referentes, quando denotam objetos distintos de si próprios. No entanto, não se pode decidir, exceto se soubermos a intenção de Magritte. Assim, a sentença no quadro de Magritte não pode ser decidida entre verdadeira e falsa. Faltam informações que só a estrutura simples da língua e a denotação como intuitivamente a pensamos na linguagem coloquial não conseguem fornecer. Em outras palavras, *falta rigor*.

Tarski aponta a causa da dificuldade: os conceitos semânticos têm caráter relativo e devem sempre estar relacionados a uma linguagem particular. A linguagem *da qual* falamos não precisa ser aquela *na qual* falamos. O erro foi fazer a semântica da linguagem na própria linguagem, como se só existisse uma única linguagem. A análise das diversas antinomias, paradoxos e *puzzles* lingüísticos revelam que os conceitos semânti-

cos não podem estar na linguagem à qual eles se relacionam e, principalmente, que a linguagem que contém sua própria semântica é inconsistente (TARSKI, A.; [1983a], p.402).

Em vista disso, o projeto de Tarski para solucionar esse problema consiste em lançar os fundamentos de uma semântica científica. Isso só é possível caracterizando de maneira precisa os conceitos semânticos e estabelecendo um modo que não levante objeções lógicas e que seja materialmente adequado em utilizar tais conceitos. Para isso Tarski (TARSKI, A.; [1983a], p.402) reclamará o aparato lógico moderno, fortemente matematizado e por isso bastante prestativo para as formalizações das linguagens, e procurará atender aos processos metodológicos científicos atuais<sup>6</sup>. O desafio que se propõe é *definir verdade semanticamente*. Como solução, Tarski diz (TARSKI, A.; [1990], p.81):

“(...) a maneira mais simples e mais natural de obter uma definição exata de ‘verdade’ é uma que envolve o uso de outras noções semânticas, por exemplo, a noção de satisfatibilidade. É por estas razões que incluímos o conceito de verdade que é aqui discutido entre os conceitos da semântica, e o problema de definir ‘verdade’ revela-se como estando intimamente associado ao problema mais geral de estabelecer os fundamentos da semântica teórica.”

O projeto de Tarski desenvolver-se-á em duas partes. Ele descreve cada parte no formato de um roteiro conciso e prático de como o processo efetuar-se-á, como segue:

*Primeira Parte (preparação do terreno)*

1. Descrever a linguagem cuja semântica se quer construir;
2. Enumerar os termos primitivos dessa linguagem e dar as regras de definição que, obedecidas, permitem a introdução de novos termos não-primitivos;
3. Distinguir as expressões ditas sentenças, separar delas os axiomas, e formular as regras que derivam teoremas a partir dos axiomas.<sup>7</sup>

---

<sup>6</sup> Alfred Tarski era um *fisicalista*, o tipo de pensador que crê que a física é o modelo padrão de ciência e que toda nova ciência deve ser um símile dos processos usados pela física teórica e/ou prática. Essa idéia estava muito em voga no tempo em que Tarski estava sob orientação de Leśniewski, devido à influência dos pensadores do Círculo de Viena, de tendência fisicalista.

<sup>7</sup> Neste ponto Tarski avisa que só é exata e clara a linguagem puramente estrutural, i.e., se empregamos nela só os conceitos relacionados com a forma e o arranjo dos signos e expressões compostas da lingua-

4. Construir a linguagem da semântica: a *metalinguagem*<sup>8</sup>.
5. Determinar as condições que dariam um modo de uso desses conceitos semânticos de uma forma materialmente adequada e de acordo com seu uso ordinário;

*Segunda Parte (o problema principal: construir uma semântica científica)*

6. Definir os conceitos semânticos em termos de conceitos usuais da metalinguagem, reduzindo a conceitos puramente lógicos tanto os conceitos da linguagem original quanto os conceitos próprios da morfologia da linguagem.

Esse mesmo roteiro, de forma bem mais sucinta do que no artigo de 1936 (TARSKI, A.; [1983a]), aparece no artigo de 1944 (TARSKI, A.; [1983a], pp.82-83.):

“Existem certas condições debaixo das quais se considera a estrutura de uma linguagem como estando *especificada de um modo exato*. Assim, para especificar a estrutura de uma linguagem, temos que caracterizar de forma não-ambígua a classe daquelas palavras e expressões que queremos considerar como sendo dotadas de sentido. Em particular, temos que indicar todas as palavras que decidimos usar sem as definir, e que se chamam “*termos não-definidos* (ou *primitivos*)”; e temos que dar as chamadas *regras de definição* para introduzir novos termos ou *termos definidos*. Para além disso, temos que estabelecer critérios para distinguir, dentro da classe de expressões, aquelas a que chamamos “*frases*”. Finalmente, temos que formular as condições debaixo das quais uma frase da linguagem pode ser *afirmada*. Em particular, temos que indicar todos os *axiomas* (ou *frases primitivas*), i. e., aquelas frases que decidimos afirmar sem qualquer demonstração; e temos que proporcionar as chamadas *regras de inferência* (ou *regras de demonstração*), por meio das quais podemos deduzir novas frases previamente afirmadas a partir

---

gem. As únicas linguagens que atendem isso são as *formalizadas*. Como o grau de precisão de toda investigação semântica que se pretende em seguida depende da clareza e precisão dessa descrição, *só a semântica das linguagens formalizadas pode ser construída por métodos exatos*. Ver TARSKI, A.; [1983a], p.402.

<sup>8</sup> Quanto à metalinguagem, Tarski é cauteloso. Ele sabe que o problema será conferir à metalinguagem um vocabulário rico. A solução segue a natureza particular dos conceitos semânticos. De fato eles expressam relações entre objetos (estados de coisas) e expressões da linguagem que se referem àqueles objetos. Logo, os enunciados que expressem as propriedades dos conceitos semânticos devem conter tanto a designação dos termos para referir os objetos aos quais os conceitos se referem, como os termos usados para a descrição estrutural da linguagem (que pertencem ao domínio da chamada *morfologia da linguagem*, sendo designações de expressões individuais da linguagem, de propriedades estruturais das expressões, das relações estruturais entre as expressões, e assim por diante). Assim, a metalinguagem que deve dar a base das investigações semânticas da linguagem deve conter as expressões da linguagem original e as expressões da morfologia da linguagem. Além disso, a metalinguagem deve conter uma reserva maior ou menor de expressões lógicas. Ora, a questão é saber se a tal metalinguagem forma base suficiente para as investigações semânticas. Ver TARSKI, A.; [1983a], p.402.

de outras frases que foram previamente afirmadas. Os axiomas, tal como as frases deles deduzidas por meio das regras de inferência, são referidos como “*teoremas*” ou “*frases demonstráveis*”.

“Se ao especificarmos a estrutura de uma linguagem nos referimos exclusivamente à forma das expressões envolvidas, a linguagem diz-se ser *formalizada*. Em tal linguagem, os teoremas são as únicas frases que podem ser afirmadas.”

Executado esse roteiro Tarski conclui que “*é possível construir na metalinguagem definições metodologicamente corretas e materialmente adequadas de conceitos semânticos se e somente se a metalinguagem é equipada com variáveis de tipo lógico mais elevado do que todas as variáveis da linguagem que é investigada*” (TARSKI, A.; [1983a], p.406). E assim, “com isto o problema de estabelecer uma semântica de base científica está completamente resolvido” (TARSKI, A.; [1983a], p.407).

No entanto, em comparação com a longa história da semântica, com as anteriores pretensões e resultados da semântica, a teoria pretendida por Tarski impõem limites às atuais habilidades lógicas e filosóficas nesse assunto: como a metalinguagem só pode ser obtida para linguagens com estruturas específicas, infelizmente estas são ainda apenas as linguagens formalizadas, isto é, plenas de forte aspecto matemático e bastante artificiais se comparadas às linguagens cotidianas das relações humanas e na qual se discute filosofia. “Contudo” – aponta Tarski (TARSKI, A.; [1990], p.83) –, “o âmbito de aplicação de tais linguagens [formalizadas] é bastante compreensivo; somos, teoricamente, capazes de nelas desenvolver vários ramos da ciência, por exemplo a matemática e a física teórica.”<sup>9</sup> Assim, “*o problema da definição de ‘verdade’ obtém um sentido preciso e pode ser resolvido de um modo rigoroso somente para aquelas linguagens cuja estrutura foi especificada de um modo exato*” (TARSKI, A.; [1990], p.83).

Quanto às esperanças de se conseguir uma definição semântica de ‘verdade’ nas linguagens não-formalizadas, Tarski escreveu (TARSKI, A.; [1983a], p.407):

---

<sup>9</sup> Tarski acrescenta em seguida a essa passagem que podem ser imaginadas linguagens que tenham uma estrutura específica de um modo exato, semelhante às formais, mas não são formais (não têm o forte aparato matemático sustentando-as). Nessas linguagens, diz Tarski, asseverar frases pode não depender da forma da frase, mas de outros aspectos até mesmo não-linguísticos. Tal linguagem seria útil, segundo Tarski, para traduzir os eventos empíricos próprios de algumas ciências e, então, para substituir a linguagem comum no discurso científico.

“Só o futuro pode definitivamente dizer se investigações posteriores nesse campo darão frutos para a filosofia e para ciências especiais, e que a semântica terá lugar na totalidade do conhecimento. Mas parece que os resultados alcançados até aqui justificam um certo otimismo quanto a isso.”

### **‘Verdade’ como conceito semântico**

Em 1933 Alfred Tarski escreveria seu mais famoso artigo: *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas*<sup>10</sup>. Nesse longo artigo, em linhas gerais, Tarski mostra como nossa noção intuitiva de verdade é precária e como só pode ser concebida com rigor nas linguagens fortemente matematizadas, ou *formais*.

A noção de verdade é um critério que permite o desenvolvimento da cultura e do conhecimento humano, daí sua importância. No cotidiano e no debate filosófico ou científico, quando tomamos por verdade qualquer declaração (ou todas as declarações, ou premissas) de um argumento qualquer, não podemos mais abandonar essa condição durante todo o debate, caso contrário prejudicaríamos a coerência do discurso. Principalmente quando se pratica filosofia (e ciência em geral), não podemos ter dúvida de que aquilo que tomamos por verdadeiro continua verdadeiro durante a exposição. Estabelecer as condições da verdade é o “Santo Graal” da filosofia desde Parmênides, no século V a.C.

Na primeira parte do trabalho de 1933, Tarski faz uma longa análise das dificuldades de se conceituar ‘verdade’ na linguagem comum do dia-a-dia.

### **O projeto extensional**

Antes é melhor conhecer o que Tarski entende intuitivamente por ‘verdade’, que coisas, no entender dele, são verdadeiras.

O projeto de definição de verdade de Tarski é um projeto *extensional*. Tarski está imbuído dos fortes alicerces lançados por Gotlob Frege (1848 – 1925) e de sua lógica proposicional inaugurada no *Fundamentos da Aritmética* de 1884 (primeiro volume) e de 1903 (segundo volume). Em 1892 Frege publicou o artigo *Sobre o sentido e a refe-*

---

<sup>10</sup> Na versão polonesa: *Pojęcie Prawdy w Językach Nauk Dedukcyjnych*, publicado pela primeira vez em Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III matematyczno-fizycznych, No. 34, Warsaw, 1933. A tradução para o alemão apareceu como *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* in *Studia Philosophica* 1, 1935, pp. 261-405. Para tradução brasileira ver TARSKI, A. [2006].

rência<sup>11</sup> onde fica estabelecido que o significado de uma expressão tem pelo menos *sentido* e *referência* (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.17). A referência é chamada de *denotação* ou *extensão* da expressão. A extensão da expressão é o conjunto dos objetos apontados, indicados ou referidos por ela. Kirkham chama de *projeto extensional* a tentativa apontar o conjunto de objetos referidos pelo predicado “é verdadeiro”, isto é, dar a extensão de “é verdadeiro”.

Não é difícil compreender o conceito de extensão. Diferentes expressões podem ter a mesma extensão (são *extensionalmente equivalentes*). A extensão de “vertebrados com fígado” é a mesma de “vertebrados com coração” (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.18). Isso é útil para entender uma expressão em função de outra. Se soubermos a extensão de **A**, mas não soubermos a de **B**, mas tivermos que **A** e **B** são extensionalmente equivalentes, teremos uma compreensão do que seja **A**.

Visto assim, para o *projeto extensional* seria útil encontrar uma expressão extensionalmente equivalente a “é verdadeiro”. Mas isso é problemático.

Kirkham (KIRKHAM, R. L.; [2008], pp.19-22) faz notar quatro pontos importantes sobre as características das equivalências extensionais. (Conservando os exemplos dados por Kirkham):

- 1- Primeiro, duas expressões extensionalmente equivalentes não precisam ter a mesmo grau de complexidade sintática. Por exemplo, “Ser cidadão americano” é extensionalmente equivalente a “nascer em território americano e não ser naturalizado em nenhum outro país”.
- 2- Segundo, quando expressões *x* e *y* são extensionalmente equivalentes, *y* pode ser pensado como as condições necessárias e suficientes para algo ser *x*. Por exemplo, ser “vertebrado com fígado” é necessário e suficiente para ser “vertebrado com coração”. Mas “nascer em território americano e não ser naturalizado em nenhum outro país” é suficiente para “ser cidadão americano”, mas não necessário (porque alguém nascido noutra país pode naturalizar-se

---

<sup>11</sup> FREGE, GOTTLÖB; [1892], *On sense and Reference*, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 1000, p.25-50 (apud, KIRKHAM, RICHARD L.; [2008], *Teorias da Verdade – uma introdução crítica*, trad. Alessandro Zir, Editora Unisinos, São Leopoldo, RS, Brasil.)

norte-americano)<sup>12</sup>. Podemos dizer que o *projeto extensional* busca pelo conjunto das condições necessárias e suficientes para algo ser verdadeiro.

- 3- Terceiro, as expressões extensionalmente equivalentes podem ser mais do que apenas duas. “Vertebrado com fígado”, “vertebrado com coração” e “vertebrado com rim”, por exemplo. Assim, ao fixarmos a extensão de “é *x*” podemos descobrir vários equivalentes extensionais. A análise desses equivalentes os coloca em uma hierarquia que distingue o que é apenas suficiente do que é suficiente e necessário. Assim, por exemplo, não há coração funcionando sem rim plenamente funcionando, apesar de haver coração funcionando com fígado doente. Então ter rim é necessário e ter fígado é suficiente. Por isso, descrever a extensão de “vertebrado com coração” como sendo a dos “vertebrados com rim” é preferível a usar “vertebrados com fígado”.
- 4- Quarto, quando dois termos são extensionalmente equivalentes, as sentenças onde eles aparecem permitem certas construções lógicas interessantes. Assim, se “John tem coração” é verdade, então “John tem fígado” também é verdadeiro. Escrevemos:

a) John tem coração  $\square$  John tem fígado.

Isto é, “John tem coração” *implica materialmente* que “John tem fígado” (dizemos, “se John tem coração, então tem fígado”). Uma vez que o conjunto das coisas com coração é idêntico ao das coisas com fígado, então:

b) John tem fígado  $\square$  John tem coração.

Um princípio lógico diz que se duas coisas implicam-se materialmente mutuamente, então se equivalem:

---

<sup>12</sup> Uma boa diferença entre “necessário”, “suficiente” e “necessário e suficiente” é como segue: para o homem viver é *necessário* respirar, mas respirar não é suficiente, pois a pessoa precisa se alimentar também; para alguém ir ao trabalho é *suficiente* tomar um ônibus, mas ele não é *necessário*, pois se pode ir a pé; para o homem atarraxar um parafuso é *necessário* uma chave de fenda, e ela é *suficiente* para isso.

c) John tem fígado  $\equiv$  John tem coração.

onde “ $\equiv$ ” pode ser traduzido por “se e somente se”. Visto assim, o projeto extensional seria o de preencher a lacuna da seguinte afirmação:

d)  $x$  é verdadeiro  $\equiv$  \_\_\_\_\_.

O *projeto extensional* vai buscar um equivalente material à afirmação “ $x$  é verdadeiro” (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.22.). Mas esse equivalente não pode conter a palavra “verdadeiro” (pois resultara em ser uma análise circular improdutivo). Não pode conter um termo que exija que antes se saiba o que é verdadeiro (assim, a expressão “ $x$  não é falso” não servirá, pois para sabermos o que é falso precisamos saber o que é verdadeiro. Além disso, a lacuna deve ser *informativo* em relação ao programa mais amplo que motivou a busca pela análise extensional de “é verdadeiro”, isto é, deve trazer como arcabouço as concepções semânticas por trás das definições de verdade.

São essas dificuldades iniciais que Tarski pretende contornar com seu trabalho. O projeto pretendido por Tarski é extensional: ele quer apontar (pelo menos para o conjunto das linguagens formalizadas, como veremos) os objetos que podem ser chamados de verdadeiros (no caso, as sentenças das linguagens formalizadas).

### **Uma definição coloquial de ‘verdade’.**

Como vimos, Tarski aponta que construir a semântica da linguagem é o que dá condições de tornar a linguagem correta. Para isso é necessário eleger certos conceitos semânticos, conceitos que expliquem a linguagem, conceitos que prediquem a linguagem. Mas, no caso das linguagens comuns, coloquiais, o projeto de construção semântica falha.

Ele abre o artigo de 1944 (TARSKI, A.; [1990]) explicando que ‘verdade’ seria um conceito semântico aplicável a frases (expressões da língua), mais adequadamente (TARSKI, A.; [1990], p.76). Mais adiante no mesmo artigo (TARSKI, A.; [1990], p.81), ele volta nesse ponto, dizendo que ‘verdade’ seria um conceito semântico diferente da *denotação*, *satisfação* e *definição* (os três exemplificados respectivamente em (1), (2) e (3)), por não se referir a relações entre sentenças, mas por se referir às próprias senten-

ças. Em seguida (TARSKI, A.; [1990], p.76) Tarski comenta das “dificuldades muito sérias” quando se pretende dar um sentido (ou intenção) do conceito de verdade. Ele escolherá como uma boa (mas não perfeita) definição aquela que ele denomina *concepção aristotélica clássica de verdade* (TARSKI, A.; [1990], p.77):

(4) *dizer daquilo que é que não é, ou daquilo que não é que é, é falso, enquanto dizer daquilo que é que é, ou daquilo que não é que não é, é verdadeiro.*

Tarski concorda que essa definição tem forte ligação com a idéia de realidade e de como a linguagem expressa esse realidade. Por isso sugere (TARSKI, A.; [1990], p.77) que (4) possa ser escrita como:

(5) *a verdade de uma frase consiste na sua concordância com a realidade (ou correspondência com a realidade).*

A partir disso, Tarski considera que frases também podem ser “reais”, podem ser um modo de estado de coisas. Assim, a palavra *designar* poderia não só relacionar frases a realidade, mas frases a frases e a definição (5) se torna (TARSKI, A.; [1990], p.77.):

(6) *uma frase é verdadeira se designa um estado de coisas existente.*

Em seu artigo de 1969 (TARSKI, A.; [2006], pp.203-233) ele dirá que as definições (5) e (6) são substitutos dados pela “filosofia moderna” para a clássica versão de Aristóteles (TARSKI, A.; [2006], p.205). Essa tentativa de precisar uma definição comum dentro da linguagem coloquial é um desenvolvimento das idéias tratadas brevemente logo no início de seu artigo de 1935 (Tarski, A.; [1983b]). Ali Tarski inicia seu trabalho (TARSKI, A.; [1983b], pp. 154-165) expondo como se dá o mecanismo da falha, em especial a respeito do conceito semântico de ‘verdade’. Ele primeiro apontará o que a linguagem comum entende por ‘verdade’ (TARSKI, A.; [1983b], pp. 154-155) e, tendo em mente as idéias que só explicitaria no artigo de 1944 (TARSKI, A.; [1990]), ele escolhe como definição de ‘verdade’ nas linguagens coloquiais a que segue (TARSKI, A.; [1983b], p. 155):

(7) *uma sentença verdadeira é aquela que diz que o estado de coisas é tal e tal, e o estado de coisas é, de fato, tal e tal.*

Tarski afirma (TARSKI, A., [1983], p.155) que a definição (7) deixa muito a desejar em clareza, correção e não-ambiguidade<sup>13</sup>. De fato, citando a sentença problemática levantada por Gotlob Frege (bem antes do trabalho de Tarski):

---

<sup>13</sup> Apesar de que em *Truth and Proof*, p. 63, (*apud* CHATEAUBRIAND, O.; [2001], p.93, nota 1) Tarski tenha dito que “é minha impressão que as novas formulações, quando analisadas mais cuidadosamente, provam ser menos claras e inequívocas do que aquela nos transmitida por Aristóteles”, ele acrescenta adiante (*apud* CHATEAUBRIAND, O.; [2001], p.93, nota 1):

“O teor intuitivo da formulação de Aristóteles parece ser preferivelmente claro. Todavia, a formulação deixa muito a desejar do ponto de vista da precisão e da correção formal. Para algumas coisas, não é geral o bastante; refere-se só a sentenças que ‘falam’ sobre algo ‘que é’ ou ‘que não é’; na maioria dos casos dificilmente seria possível produzir uma sentença neste molde sem dar intenção ao sentido da sentença e forçar o espírito da linguagem.”

Chateaubriand (CHATEAUBRIAND, O.; [2001], p.93, nota 1), no entanto, acredita que Tarski tenha erguido tal objeção por puro mal-entendido: essa ‘formulação aristotélica’ vem da passagem onde Aristóteles trata de negar ou afirmar a predicação a um sujeito, em face da validade do Princípio do Terceiro Excluído (*Metafísica* 1011b.23). De fato, A preocupação de Aristóteles não é se o ser é e se o não-ser não é, mas se, ao se falar deles, as premissas da sentença traduzam o real. Aristóteles também deixa claro isso na *Metaphysica*, E, 4.027b:

“(…). O que faz do ser tal verdadeiro e do não-ser tal falso, consiste na reunião e na separação do atributo e do sujeito, em uma palavra, na afirmação ou na negação. O verdadeiro é a afirmação da conveniência do sujeito com o atributo; a negação a afirmação de sua não conveniência. (...) O falso e o verdadeiro não estão nas coisas, como por exemplo, se o bem fosse o verdadeiro e o mal fosse o falso. Só existem no pensamento; e as noções simples, a concepção das puras essências, tampouco produzem nada semelhante no pensamento<sup>13</sup>.”

Isto é, quando se diz ou se pensa ‘homem’ ou ‘cavalo’, por exemplo, não se está afirmando ou negando nada, por isso não se está dizendo ou pensando nada verdadeiro ou falso. Verdade e falsidade exigem que haja um sujeito e um atributo e que se negue ou afirme sua conveniência ou não conveniência. Depois dessa reflexão, Aristóteles vai fazer a correspondência que deve existir entre o discurso e a realidade das coisas. Ele escreve na *Metaphysica*, IX, 10:

“(…). A reunião ou separação, eis aqui o que constitui a verdade ou a falsidade das coisas. Por conseguinte, está na verdade o que crê que o que realmente está separado está separado, que o que está unido está unido. Mas está na falsidade o que pensa o contrário do que em circunstâncias dadas são ou não são as coisas. Portanto, tudo o que se diz é verdadeiro ou falso, porque é preciso que se reflita a respeito do que se diz. Não porque cremos que tu és branco que és de fato branco, mas porque és de fato branco que, ao dizermos que tu és branco, dizemos a verdade<sup>13</sup>.”

No *De Interpretatione* 9 Aristóteles vai tratar bem disso: não é o que se diz que faz a realidade, mas é a realidade que exige do discurso verdadeiro correspondência e do falso não-correspondência. Mas não vamos

(8) *a estrela da manhã é a estrela da tarde*

Temos que (8) é uma sentença completamente contraditória, que fere os princípios da lógica (Bivalência, Identidade, Terceiro-Excluído). Mas ela descreve um estado de coisas e o estado de coisas é tal e tal como ela descreve, pois ela fala de Vênus e Vênus durante seis meses é a Estrela da Manhã e durante os outros seis meses é da Tarde. Por causa de problemas desse tipo, um dos objetivos do trabalho de Tarski é dar precisão ao trabalho de Aristóteles. É necessário ‘fortalecer’ a definição (7).

### **Uma definição materialmente mais adequada**

Como se começa esse ‘fortalecimento’ da concepção semântica clássica de verdade? Para Tarski começa-se pela generalização da definição, de modo que ela possa caber de modo idêntico para todos os estados de coisas à qual se refira.

No seu artigo de 1936, *The establishment of Scientific Semantics* (TARSKI, A.; [1983a]), diz que é imprescindível determinar as condições que permitiriam usar os conceitos semânticos de uma forma *materialmente adequada* e de acordo com seu uso ordinário, seu uso comum na linguagem cotidiana. Tomando como modelo o que acontece com o conceito de verdade, Tarski (como já pudemos notar até aqui) considera que a definição comum de ‘verdade’ aplicada a uma sentença é ‘sua [da sentença] correspondência com a realidade’. Para exemplificar ele tomará as sentenças (TARSKI, A.; [1983a], p. 404):

(9) *a sentença ‘está nevando’ é verdadeira se e somente se está nevando;*

(10) *a sentença ‘a guerra mundial vai começar no ano de 1963’ é verdadeira se e somente se a guerra mundial vai começar em 1963.*

No artigo de 1944 Tarski expõem seu exemplo mais famoso:

---

nos estender mais neste ponto, a respeito das posições de Aristóteles, pois aqui não há espaço suficiente nem é este o tema deste trabalho.

(11) *a frase ‘a neve é branca’ é verdadeira se e somente se a neve é branca.*<sup>14</sup>

Nesses exemplos<sup>15</sup>, a sentença que se pretende ser verdadeira aparece no fim do enunciado. As aspas e a mesma sentença colocada entre elas indicam um *nome* da sentença. Sabemos, intuitivamente, a função dos nomes: denotar um estado de coisas. No caso (uma vez que frases também são ‘estados de coisas’ no entender de Tarski), temos que ‘está nevando’ é o nome de *está nevando*. No artigo de 1944 (TARSKI, A.; [1983a], pp.78-79) Tarski explica (a respeito do exemplo (11) acima):

“Saliente-se que a expressão “*A neve é branca*” ocorre com aspas no lado esquerdo desta equivalência, e no lado direito sem aspas. No lado direito temos a frase ela própria, e, no lado esquerdo, o nome da frase. Empregando a terminologia medieval, poderíamos igualmente dizer que, no lado direito, as palavras “*A neve é branca*” ocorrem em *suppositio formalis*, e no lado esquerdo, em *suppositio materialis*. É praticamente desnecessário explicar porque é que, no lado esquerdo da equivalência, temos que ter o nome da frase, e não a frase ela própria. Porque, em primeiro lugar, do ponto de vista da gramática da nossa linguagem, uma expressão da forma “*X é verdadeira*” não se torna numa frase dotada de sentido se nela substituirmos ‘X’ por uma frase ou por algo diferente de um nome; uma vez que o sujeito de uma frase apenas pode ser um substantivo ou uma expressão que funcione como substantivo. E, em segundo lugar, as convenções fundamentais relativas ao uso de qualquer linguagem exigem que, em qualquer elocução que façamos acerca de um objeto, seja o nome do objeto que tenha que ser empregue, e não o próprio objeto. Conseqüentemente, se quisermos dizer algo acerca de uma frase, por exemplo, que ela é verdadeira, então temos que usar o nome dessa frase, e não a própria frase.”

O que Tarski quer dizer vamos mostrar como segue, com um exemplo próprio. Vamos supor, por exemplo, que fosse possível colocar o objeto Planeta Terra real nesta página e ter o que se segue:

---

<sup>14</sup> Em seu artigo de 1969 (*Verdade e Demonstração* in TARSKI, A.; [2006], p.206) ele também apresenta o caso de uma sentença falsa: *‘a neve é branca’ é uma sentença falsa se e somente se a neve não é branca.*

<sup>15</sup> O exemplo (9) é o que aparece em seu trabalho de 1935, TARSKI, A.; [1983b].



Vamos esquecer no decorrer deste texto que a figura em (12) é simplesmente isso, uma figura, uma fotografia, e vamos encará-la como se fôssemos cosmonautas e (12) fosse o que veríamos pela escotilha da espaçonave. Poderíamos dizer muita coisa diante de tal visão. Vamos tomar então, como algo dito a respeito de (12) a sentença do cosmonauta soviético Iuri Gagarin quando viu o Planeta Terra real. Ele disse:

(13) A Terra é azul.

Temos (13) difere radicalmente de (12) porque é *linguagem*. Isto é, teríamos que (13) satisfaz a condição de atender à definição dada em (7). Aqui em (13) temos algo que se diz a respeito do real (12). É uma sentença, porque aquilo que se diz faz uso de diversos objetos lingüísticos que se arranjam sob normas gramaticais (morfológicas e sintáticas) adequadas a se possibilitar falar a respeito de (12) e, em especial, na propriedade que tem (12) de ser azul.

Ora, podemos dizer que (13) é um tipo satisfatório de associação de objetos lingüísticos que conseguem cumprir sua intenção na forma como se apresentam (naquela ordem, ocupando as adequadas funções lingüísticas, etc.). Assim, esses objetos lingüísticos constituem juntos um *nome de sentença*. Um nome de sentença conveniente de (13) é:

(14) ‘A Terra é azul’

Tendo a sentença e seu nome conveniente, podemos construir o modelo típico de definição parcial de verdade:

(15) ‘A Terra é azul’ é uma sentença verdadeira se e somente se a Terra é azul.

Note: ‘a Terra é azul’ é o nome da sentença (13) e não o objeto que naturalmente gira em torno do Sol visto por Gagarin. Do mesmo modo, *a Terra é azul*, que é a sentença que se lê em (13) não é o objeto que naturalmente gira em torno do sol visto por Gagarin. (14) é o nome da descrição lingüística dele em (13). Então (15) é uma discussão a respeito dessas duas coisas: a expressão *a Terra é azul* e o nome ‘a Terra é azul’. Essa discussão tem o seguinte formato:

$$(16) \underbrace{\text{‘A Terra é azul’ é uma sentença verdadeira se e somente se}}_{\text{definiendum}} \underbrace{\text{a Terra é azul}}_{\text{definiens}}.$$

As palavras *definiendum* e *definiens* aparecem no artigo de Tarski de 1969 (TARSKI, A.; [2006], p.207)<sup>16</sup> e são próprios de qualquer Teoria da Definição. *Definiendum* é aquilo que se quer definir, aquilo que se quer explicitar, que se quer tornar claro. *Definiens* são os termos (mais simples do que o *definiendum*) que são usados para definir o *definiendum*. No caso, quer-se definir ‘*A Terra é azul*’ é uma sentença verdadeira. O que isso significa? O que se quer dizer com o *definiendum* ‘*A Terra é azul*’ é uma sentença verdadeira? O *definiens* explicita que se quer dizer *a Terra é azul*. A expressão ‘se e somente se’ traduz uma *equivalência* ( $\equiv$ ) e por isso, o *definiendum* equivale ao

---

<sup>16</sup> Nesse artigo Tarski chama essa estrutura de sentença de *equivalência lógica* e explica assim:

“(...). Esta consiste de duas partes: os lados direito e esquerdo da equivalência combinados pelo conectivo ‘se e somente se’. O lado esquerdo é o *definiendum*, a frase cujo significado é explicado pela definição; o lado direito é o *definiens*, a frase que fornece a explicação. No caso, o *definiendum* é a seguinte expressão:

‘*a neve é branca*’ é verdadeira;

o *definiens* tem a forma:

*a neve é branca*

À primeira vista, pode parecer que ‘*a neve é branca*’ é verdadeira se e somente se *a neve é branca*, quando considerada como uma definição, exibe uma falha essencial bastante discutida na lógica tradicional com o nome de círculo vicioso. O motivo é que algumas palavras, ‘neve’ por exemplo, ocorrem tanto no *definiens* como no *definiendum*. Na realidade, entretanto, essas ocorrências têm caráter inteiramente distinto. A palavra ‘neve’ é uma parte sintática, ou orgânica, do *definiens*; na verdade, o *definiens* é uma sentença e a palavra ‘neve’ o seu sujeito. O *definiendum* é também uma sentença: expressa o fato de que o *definiens* é uma sentença verdadeira. Seu sujeito é o nome do *definiens*, o qual é formado colocando-se o *definiens* entre aspas. (...)”

*definiens*. Esse tipo de definição, onde o *definiendum* e o *definiens* equivalem, é chamado de *definição léxica* e é a mesma que os dicionários fazem.

No esquema visto em (16) temos um nome de sentença ('a Terra é azul') que se refere a uma sentença (a Terra é azul) que queremos dizer que é verdadeira, mas ela só será verdadeira se de fato a sentença que traduz adequadamente um estado de coisas existente for *a Terra é azul*. Isso mostra como o nome de sentença é importante: sua natureza é referir-se a uma sentença que descreve o mundo, se essa referência não ocorrer, é impossível definir a verdade parcial da sentença *a Terra é azul*. Por isso dizemos que o nome de sentença deve ser *conveniente*, isto é, deve impedir o *equivoco* que seria ter duas sentenças, por exemplo, *a Terra é azul* e *a Terra é redonda* que descrevem estados de coisas diferentes, nomeadas pelo mesmo nome de sentença 'a Terra é azul'. Isso parece obviamente claro, mas precisa ser determinado com rigidez para se evitar confusões futuras. O nome de sentença capaz de evitar tal possível equivoco é chamado por Tarski de 'nome descritivo-estrutural' (Tarski, [1983b], p. 156) e se constitui das palavras (no caso em alfabeto latino e em português numa ordem exigida pela gramática da língua portuguesa) que compõem a sentença.

Que natureza está por trás desse *nome descritivo-estrutural*? Voltando ao exemplo (9) proposto pelo próprio Tarski, é óbvio que 'está nevando' impede que se faça com as palavras entre aspas o mesmo que fazemos com *está nevando*. Neste último podemos identificar verbo, sujeito, estrutura sintática etc. Já em 'está nevando' não podemos por tratar-se de um 'bloco único', algo integral, sem partes. Fica óbvio que se as ferramentas da linguagem que destrincham *está nevando* não consegue fazer o mesmo com 'está nevando', é porque 'está nevando' não pertence à mesma linguagem de *está nevando*. Ela é diferente: 'está nevando' pertence a uma *metalinguagem*.

Como vimos pelos enunciados (9), (10) e (11), Tarski entende que as sentenças (não seus nomes) são verdadeiras (ou falsas) se equivalem (ou não) a um estado de coisas. A equivalência<sup>17</sup> é chave para se precisar os conceitos semânticos que vêm da linguagem comum. Vistos assim, os enunciados (9), (10) e (11) são definições parciais do

---

<sup>17</sup> Parece que a noção de equivalência é muito importante na teoria semântica de Tarski. Na verdade, é de sua tese de doutorado na Universidade de Varsóvia, em 1923, que ele vai retirar quase todo o material exposto em seu artigo *On the Primitive Term of Logistic* publicado no mesmo ano. Nesse trabalho (TARSKI, A; [1983c]) ele se propõe responde a seguinte pergunta: "é possível construir um sistema lógico no qual o sinal de equivalência é o único sinal primitivo?"

conceito de verdade. O desafio proposto por Tarski a partir dessa idéia é como segue: se conseguirmos introduzir o termo ‘verdadeiro’ na metalinguagem de modo que toda sentença que tenha estrutura semelhante à dos exemplos (9), (10) e (11) possa ser provada (com base nos axiomas e regras de inferência da metalinguagem), então o modo de utilizar o conceito de verdade assim estabelecido é *materialmente adequado*. Se tal introdução for por meio de uma definição, então tal definição é materialmente adequada.<sup>18</sup>

Mas não se pode fazer essa prova para todo enunciado na forma vista, pois podemos enunciar infinitos. Neste trabalho mesmo, criamos nosso próprio enunciado (15). O melhor a fazer será generalizar, obter um esquema geral desse formato de enunciado.

### Os nomes de sentenças

Antes de vermos como Tarski obtém o formato geral correspondente aos exemplos (9), (10) e (11), vamos reforçar a importância do *nome de sentença*.

Essa idéia foi introduzida por Tarski desde a primeira vez. Foi ele que percebeu que era possível dar um *nome* para as diversas frases da linguagem cotidiana e que tal nome não precisaria ser uma abreviação ou um símbolo especial. Poderia ser a própria frase colocada entre aspas. O nome de sentença é um átomo: não pode ser quebrado em partes analisáveis.

O que Tarski quer com a noção de *nome* é que ele indica uma sentença *e só ela*, impedindo que se confundam duas sentenças distintas. Assim, para cada sentença há um e só um nome. Tanto no artigo de 1935 (TARSKI, A.; [1983b], p.157) quanto no de 1944 (TARSKI, A.; [1990], p.79) Tarski fornece outro modelo de *nome de sentença* para mostrar como é possível dar um nome inequívoco para cada sentença.

Tomemos nossa sentença (13). Pode-se escrever (13) de maneira mais clara, de forma a não dar margem a nenhuma ambigüidade. Por exemplo, podemos escrevê-la na forma:

(17) Uma sentença que consiste de quatro palavras, das quais a primeira é composta da letra *a*, seguida da segunda palavra que é composta das letras *te*, *e*, *erre*,

---

<sup>18</sup> Tarski dirá (ver TARSKI, A.; [1983a], p.404) que se pode aplicar método análogo a todo conceito semântico. Para cada um formula-se um sistema de enunciados expressos como equivalências e que tenham o caráter de definições parciais.

*erre* e *a* (nesta ordem), seguida da terceira palavra que é composta da letra *e* sob a marca gráfica que indica acento agudo, seguida da última palavra que é composta das letras *a*, *zê*, *u* e *ele* (nesta ordem).

É impossível confundir (17) com outra sentença. Por isso ela é perfeitamente e inconfundivelmente designável pelo seguinte nome conveniente de sentença:

(18) ‘Uma sentença que consiste de quatro palavras, das quais a primeira é composta da letra *a*, seguida da segunda palavra que é composta das letras *te*, *e*, *erre*, *erre* e *a* (nesta ordem), seguida da terceira palavra que é composta da letra *e* sob a marca gráfica que indica acento agudo, seguida da última palavra que é composta das letras *a*, *zê*, *u* e *ele* (nesta ordem).’

Em (18) temos de maneira bem explícita aquilo que se pode chamar *nome descritivo-estrutural*. Desse modo, tanto o nome visto em (14) como o nome visto em (18) são *nomes descritivo-estruturais* e ambos satisfazem a noção de verdade que Tarski quis deixar claro em (7).

### **Uma metalinguagem para as linguagens coloquiais**

O que Tarski fez foi dar um ‘formato’ para o ‘labirinto da linguagem’. A linguagem se expressa por meio de muitas sentenças. Quando uma dessas sentenças é colocada no formato dado como em ‘*a neve é branca*’ é verdadeira se e somente se *a neve é branca*, é como se um dispositivo ‘fora da linguagem’ adequasse a sentença para lhe conferir o critério de verdade. Esse dispositivo fora da linguagem é como alguém fora do labirinto: consegue por em ordem a confusão. É o que faz a metalinguagem.

Mas ‘*a neve é branca*’ é verdadeira se e somente se *a neve é branca* é só um único arranjo. Há muitas sentenças na linguagem e não é possível ordenar todos os labirintos um por um. Algo deve ser feito de *mais geral*.

### **Forma geral da definição parcial de ‘verdade’: o T-ESQUEMA**

O que se fez até agora não serve como uma teoria da verdade, nem como eficiente projeto semântico. Tarski definiu *algumas* sentenças verdadeiras por meio de uma

estrutura sintática que parece ser padrão. Ele conseguiu uma *condição de adequação material* para algumas sentenças, isto é, ele mostrou que é possível fazer equivaler a verdade de uma sentença com sua extensão. Esquemáticamente (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.22.), ele conseguiu (para algumas frases) estabelecer o que colocar na lacuna de:

(19)  $x$  é verdadeiro  $\equiv$  \_\_\_\_\_.

No caso, por exemplo:

(20) ‘a neve é branca’ é verdadeira  $\equiv$  a neve é branca.

(21) ‘está nevando’ é verdadeira  $\equiv$  está nevando.

(22) ‘a Terra é azul’ é verdadeira  $\equiv$  a Terra é azul.

Mas se o que se busca é uma Teoria da Verdade do ponto de vista semântico, será necessário *generalizar* esse resultado, isto é, atender criteriosamente à *condição de adequação material* (já que o projeto é extensional). Essa *condição de adequação material* exige que a teoria semântica que Tarski deseja implique *todas*, absolutamente *todas*, as sentenças possíveis com a estrutura vista em (9), (10) e (11), ou em (20), (21) e (22) acima (que são equivalentes em estrutura). (Ver KIRKHAM, R. L.; [2008], p.206)

Estabelecido que uma definição semântica de verdade passa por ser uma equivalência, e verificado que a linguagem coloquial permite construir um número humanamente incontável de sentenças semelhantes em estrutura à (9) e às demais do mesmo tipo, seria interessante construir a forma geral dessa estrutura. A expressão (19) esquematizada dá um indício da aparência dessa estrutura geral.

Pois bem, o esquema geral apresentado por Tarski (conhecido como T-CONVENÇÃO ou T-ESQUEMA) é como segue:

(T)  $x$  é uma sentença verdadeira se e somente se  $p$ .

Onde  $x$  é uma variável e  $p$  é uma constante.

A rigidez que esse *T-ESQUEMA* estabelece é impressionante: uma teoria que consiga definir semanticamente ‘verdade’ deve conter todas as *T-sentenças* possíveis, isto é, uma teoria não compatível com *T-sentenças* é falsa (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.207)

É fácil ver como o *T-ESQUEMA* gera *T-sentenças*. No lugar de  $x$  podemos colocar qualquer nome de sentença. No lugar de  $p$  não podemos, porém, pôr qualquer coisa. Somos obrigados a atender à equivalência e no lugar de  $p$  colocar a sentença cujo nome foi colocado no lugar de  $x$ . Por exemplo, tomemos o nome de sentença visto em (14) e o coloquemos no lugar de  $x$ :

(23) ‘A Terra é azul’ é uma sentença verdadeira se e somente se  $p$ .

O que é  $p$  neste caso? É aquilo denotado pelo nome de sentença, no caso a sentença que descreve o mundo (conforme vimos em (12) e (13)). Assim, não podemos colocar uma sentença qualquer que descreva o mundo, pois a equivalência não aconteceria. Não há sentido na expressão ‘a Terra é azul’ é uma sentença verdadeira se e somente se amanhã for primeiro de abril. O que faz sentido segundo a equivalência, a partir de (23), é:

(24) ‘A Terra é azul’ é uma sentença verdadeira se e somente se a Terra é azul.

Em geral, os *nomes por aspas (quotation-mark names)*<sup>19</sup> – i.e. as sentenças que se tornaram nomes de sentenças ao serem colocadas entre aspas – é que substituem  $x$  no *T-ESQUEMA* (TARSKI, A.; [1983b], p.156), mas o nome descritivo estrutural como visto em (18) também serve (apesar de pouco prático):

(25) ‘Uma sentença que consiste de quatro palavras, das quais a primeira é composta da letra  $a$ , seguida da segunda palavra que é composta das letras  $te$ ,  $e$ ,  $erre$ ,  $erre$  e  $a$  (nesta ordem), seguida da terceira palavra que é composta da letra  $e$  sob a marca grá-

---

<sup>19</sup> Cezar A. Mortari e Luiz Henrique de A. Dutra in TARSKI, A.; [2006], p.23 traduzem *quotation-mark names* por ‘nomes por citação’.

fica que indica acento agudo, seguida da última palavra que é composta das letras *a*, *zê*, *u* e *ele* (nesta ordem) é uma sentença verdadeira se e somente se a Terra é azul.

### **Relação entre Linguagem e Metalinguagem**

Em vista do mecanismo de definição da verdade posto pelo T-ESQUEMA, cabe explicar o que está acontecendo a nível lingüístico. No T-ESQUEMA Tarski apresenta a noção geral *Linguagem L* (ou simplesmente *L*) e de *Metalinguagem L'* (ou simplesmente *L'*). A linguagem *L* é a linguagem-objeto, a linguagem onde estão as sentenças que descrevem o mundo. Por exemplo, a sentença vista em (13) está em uma linguagem *L*. A linguagem *L* é a linguagem investigada, a respeito da qual queremos construir uma semântica. Para construir tal semântica precisaremos *falar de L*, *escrever sentenças sobre L*, *'apontar' para L* e dizer o que está certo e o que está errado. Isso só é possível se tivermos outra linguagem 'acima' de *L*, uma linguagem *L'*, à qual Tarski chamou de *metalinguagem*.

A relação que há entre a linguagem e a metalinguagem é bastante complexa. Para *L* os objetos de quem fala são os objetos reais do mundo, os estados de coisas. Mas *L* se torna objeto de *L'* quando criamos *L'*. Os objetos da metalinguagem são as expressões de linguagem. Por exemplo, tomemos a expressão (13) *a Terra é azul*. Os objetos dessa expressão são os nomes *Terra* e *azul*: *Terra* para a Terra real que gira em torno do Sol e *azul* para o azul real, a cor, a luz em comprimento de onda azul. Uma sintaxe simples liga esses nomes. Para falarmos da linguagem usamos de uma metalinguagem cujos objetos são *as sentenças de L*. Por exemplo, se tivéssemos uma linguagem *L* cuja estrutura só permitisse escrever unicamente a sentença *a Terra é azul* a metalinguagem *L'* capaz de falar de *L* teria como objeto a sentença *a Terra é azul* na forma do nome de sentença 'A Terra é azul' visto em (14).

O que Tarski propõe é que para qualquer linguagem *L* é possível obter sempre uma metalinguagem *L'* onde existe o predicado 'é verdade' que se aplica a todas as sentenças verdadeiras de *L*. Isso nos permite dizer, na metalinguagem, muitas das coisas que precisamos dizer usando a noção intuitiva de verdade. Desse modo criamos uma sintaxe e assumimos uma noção de teoria de conjuntos envolvidos em nossa definição, de tal modo que nunca se é levado a um paradoxo.

Mais simplesmente, Tarski propõe uma linguagem que fale de outra como se as expressões dessa outra fossem (de algum modo que passa por tornarem-se *nomes*) um subconjunto de seus objetos lingüísticos. Assim, podemos dizer que  $L$  possui sentenças referidas pelo símbolo ‘ $p$ ’ da metalinguagem, de cada uma das quais dessas sentenças na linguagem podemos dizer (na metalinguagem) *é uma sentença verdadeira* se satisfizer uma condição  $p$ , que é a condição expressa por (7).

Através dos nomes próprios (substantivos) relacionados por meio de uma sintaxe apropriada, o *fato que  $p$*  é o objeto de  $L$  (isto é,  $L$  fala do estado de coisas) enquanto ‘ $p$ ’ é o objeto de  $L'$  (isto é,  $L'$  fala de  $L$ ). Ainda,  $L$  é a linguagem da qual se quer um semântica, e  $L'$ , a *metalinguagem*, a linguagem com a qual a semântica de  $L$  será construída. Em  $L'$  está o conceito semântico ‘verdade’ – representado por  $V$  – que pode ser atribuído a algum dos nomes pertencentes ao subconjunto  $x$  de  $L'$ .

A teoria semântica de Tarski tem um caráter obtuso hoje em dia porque ela considera a linguagem como algo fora da metalinguagem (só está dentro da metalinguagem o conjunto das sentenças da linguagem que viraram nomes, e como nomes elas não pertencem mais à linguagem). Atualmente as lógicas consideram a linguagem como subconjunto da metalinguagem.

Parece assim resolvido o problema de se definir semanticamente ‘verdade’ nas linguagens comuns respeitando aquela velha definição clássica aristotélica de verdade em (4) e em sua versão melhor posta em (7). Tarski aponta que as expressões do tipo visto em (9), (10) e (11) parecem ser claras e completas em concordar com o modo como (7) definiu ‘verdade’. Se as sentenças que se tornarão *nomes por aspas* estão claras quanto ao que dizem e corretas em como dizem, então essa clareza de seu conteúdo e essa correte de sua forma permanecem dentro do T-ESQUEMA (TARSKI, A.; [1983b], p.157). Assim, não haveria por ora nenhuma dúvida de que qualquer sentença deduzida a partir do T-ESQUEMA usando *nomes por aspas* e sentenças da linguagem coloquial referidas por aqueles *nomes por aspas* são uma definição adequada de verdade. A certeza só viria se tal definição de verdade fosse submetida a um bom teste. Esse teste, e como essa definição falha, só veremos mais adiante.

Por ora vamos “fazer de conta” que tudo tenha dado certo e o T-ESQUEMA funcione perfeitamente para definir ‘verdade’ nas linguagens comuns. Agora vamos ge-

neralizar o T-ESQUEMA e encontrar uma definição de ‘sentença verdadeira’ para as línguas cotidianas.

### **Definição de sentença verdadeira nas linguagens coloquiais**

O mecanismo de generalização parece fácil e Tarski diz exatamente isso (TARSKI, A.; [1983b], p.158). Como colocar uma sentença em um formato como o visto em (9), (10) e (11) permitiu definir ‘verdade’ para essas sentenças, podemos tomar uma delas como representante e pressupor que todo formato como aquele permite definir ‘verdade’ para as sentenças nesse formato. Por exemplo, vamos tomar (9) que diz ‘*está nevando*’ é uma sentença verdadeira se e somente se *está nevando*. Podemos dizer que para toda descrição do evento real ‘brancura da neve’, cabe (11):

(26) Para toda vez que se descreve *está nevando* para o evento *queda da neve* do estado de coisas, ‘*está nevando*’ é uma sentença verdadeira se e somente se *está nevando*.

Podemos simbolizar a expressão (26) como segue (TARSKI, A.; [1983b], p.159):

(27) Para todo **p**, ‘**p**’ é uma sentença verdadeira se e somente se **p**.

que pode se entender como sendo *para toda vez que p descreve*, [indicador-de-p] é uma sentença verdadeira se e somente se *p descreve*.

O que se fez com (9) pode ser feita com outras sentenças. É humanamente impossível fazer isso com todas, por isso (crendo que o formato funciona), temos que generalizar as substituições feitas em (26) e (27) para todas as sentenças desse tipo na linguagem. Mas algumas coisas têm de ser preservadas: primeiro, devemos deixar claro que **p** é uma descrição que confere com o estado de coisas que ela descreve; segundo, temos de deixar claro que aquilo que será substituído em **x** no T-ESQUEMA seja o nome de sentença, em outras palavras, (se a sentença for uma **p** qualquer) devemos ter sempre que **x** = ‘**p**’. Este último pode ser traduzido no esquema (TARSKI, A.; [1983b], p.159, *nota de rodapé 1*):

(28) Para todo  $x$ , se  $x$  é uma sentença verdadeira, então, para um certo  $p$ ,  $x$  é idêntico a ' $p$ '.

Que entendemos assim: para algo indefinido  $x$ , se esse indefinido  $x$  é uma sentença verdadeira, então, para uma certa descrição  $p$  de um estado de coisas, o indefinido  $x$  assume ser o *nome* da descrição  $p$ . Estabelecido isso, de (27) e (28) tiramos o seguinte esquema geral (TARSKI, A.; [1983b], p.159):

(29) para todo  $x$ ,  $x$  é uma sentença verdadeira se e somente se, para um certo  $p$ ,  $x$  é idêntico a ' $p$ ', e  $p$ .

Que podemos entender: para algo indefinido  $x$ , esse indefinido  $x$  é uma sentença verdadeira desde que, dada uma descrição  $p$  de um estado de coisas, temos que o indefinido  $x$  assume ser o *nome* ' $p$ ' da descrição, e a descrição  $p$  confere com o estado de coisas.

Assim, parece estar bem feito o trabalho para as linguagens coloquiais. Temos duas ferramentas poderosas para lidar com a semântica dessas linguagens

A primeira é o T-ESQUEMA. Ele dá a verdade de uma sentença qualquer, escolhida arbitrariamente. A segunda é o esquema geral (28) que define o que uma 'sentença verdadeira' para todos os casos. Para sabermos se funcionam, devemos então testá-los.

### **Testes: antinomia do mentiroso e análise dos *nomes***

O que se lê neste parágrafo é falso.

A sentença do parágrafo anterior é verdadeira ou falsa? Tentar responder a essa pergunta gastou bastante pergaminho e papel desde que Eubúlides de Mileto (384-322 a.C.) formulou a primeira versão das sentenças desse tipo na Grécia Clássica. Já logo quando surgiu Teofrasto (371- 287 a.C.) (sucessor de Aristóteles nos estudos da lógica e da botânica) chegou a escrever três rolos de papiro sobre o assunto, que também se perderam. O mesmo aconteceu com os seis rolos de papiro escritos sobre o mesmo tema por Crísipo, filósofo estóico.

O Paradoxo do Mentiroso proposto por Eubúlides tem o seguinte formato:

(30) Um homem diz que está mentindo. Ele diz a verdade ou mente?

que levou à sua formulação clássica:

(31) Eu estou mentindo agora

As versões modernas do Paradoxo são mais claras e tem a mesma resistência e serem respondidas:

(32) **A:** A é falsa.

Ou

(33) Esta sentença é falsa.

Não importa o formato, a paradoxalidade é gerada do mesmo modo: por auto-referência. Só para verificar, tomemos seu formato clássico ('eu estou mentindo agora'). O paradoxo gera o seguinte problema: se eu estou mentindo, então a proposição 'eu estou mentindo agora' é uma mentira e o que ela afirma é falso, isto é, então estou falando a verdade e nesse caso a proposição 'eu estou mentindo agora' é verdadeira e o que ela afirma é verdadeiro. Em outras palavras, se digo a verdade estou mentindo e, mentindo, estou dizendo a verdade. De modo que minto dizendo a verdade e digo a verdade mentindo.

Não há solução aparente. O trabalho de Tarski não é resolver o Paradoxo do Mentiroso, mas evitá-lo: definir conceitos semânticos de maneira suficientemente forte para que tais dificuldades não surjam em qualquer interpretação de sentença.

Tarski percebeu que a Antinomia<sup>20</sup> (ou Paradoxo) do Mentiroso era o teste padrão de toda semântica. Ele deve ter notado isso durante as palestras que S. Leśniewski apresentou na Universidade de Varsóvia entre 1919 e 1920, onde um dos temas foi a Antinomia do Mentiroso<sup>21</sup>. Inspirado pela idéia de que a definição semântica de ‘verdade’ fosse a causa da origem da antinomia, Tarski desenvolveu seu famoso trabalho sobre a Concepção Semântica de Verdade, objeto deste trabalho. Assim, o Paradoxo do Mentiroso nas mãos de Tarski se torna uma prova-de-fogo padrão para as definições semânticas de toda linguagem.

### Construção da Antinomia: versão de Łukasiewicz

---

<sup>20</sup> Na tentativa de explicar o que é uma antinomia, Tarski propõem em seu artigo de 1969 (*Verdade e Demonstração* in TARSKI, A.; [2006], p.213) o exemplo do *livro antinômico*, que é como segue. Suponha um livro de 100 páginas com uma única sentença escrita em cada página. A sentença da página 1 diz: *a sentença da página 2 é verdadeira*. Por sua vez, a sentença da página 2 diz: *a sentença da página 3 é verdadeira*. E assim por diante, exceto a página 100, cuja sentença diz: *a sentença da página 1 é falsa*. É fácil ver a consequência disso. Se a sentença da página 100 for verdadeira, então a sentença da página 1 não é verdadeira e sim falsa. Se ela for falsa, todas são falsas, inclusive a sentença da página 100. E se esta for falsa, significa que a sentença da página 1 é verdadeira, e assim por diante. Tarski enxerga aqui um problema preso em um círculo, sem solução.

Na verdade não é bem assim. É possível sair desse círculo. No formato que Tarski deu para a suposta antinomia, a centésima sentença diz que a primeira sentença é falsa, mas não diz *em que ela é falsa*. Ela pode ser falsa apenas quanto *ao sujeito da sentença*: ela seria falsa porque não é à página 2 que deveria se referir, mas a outra página (não importa qual, podendo ser até mesmo à centésima página). Se a causa da falsidade dita pela sentença 100 for o erro de nomeação da página pela sentença 1, então não existe antinomia. Como todas as sentenças (exceto a primeira) referem-se em cadeia sucessiva até a sentença 100, então a sentença 1 estaria dizendo que a sentença 100 é verdadeira. Teríamos algo assim:

**Sentença 1:** sentença 2 (erroneamente, pois deveria ser ‘sentença 100’) é verdadeira.

**Sentença 100:** sentença 1 é falsa (quanto ao sujeito, que não deveria ser ‘sentença 2’).

Se realmente a sentença 1 estiver errada quanto ao sujeito, ambas, ela e a sentença 100, serão verdadeiras, sem geração de antinomia.

<sup>21</sup> Fruto dos estudos de Leśniewski sobre as antinomias foram seus estudos semânticos. Segundo Woleński (ver WOLEŃSKI, JAN; [1994], p.393, nota de rodapé nº4), Leśniewski teria levantado uma lista de paradoxos semânticos e feito a tentativa de solucioná-los. Porém ele não publicou nenhum trabalho sobre paradoxos, mas preparou uma extensa monografia sobre esse assunto, manuscrita a lápis, cuja única cópia desapareceu durante a guerra em 1944. Interessante é saber (WOLEŃSKI, JAN; [1994], p.393) que Leśniewski e Łukasiewicz apontaram (antes de Tarski) o mesmo problema nos paradoxos: as linguagens “fechadas” (que contém sua própria metalinguagem) violam os princípios corretos de construção lógica das linguagens formais e por isso podem ser banidas do universo da lógica.

Tarski escolhe para teste a versão da Antinomia do Mentiroso proposta por Jan Łukasiewicz, à qual julga ser bastante simples<sup>22</sup>. Ele procede como segue (TARSKI, A.; [1983b], p.158).

Vamos usar o símbolo tipográfico **C** como abreviação da expressão ‘*a única sentença impressa nesta página escrita inteiramente com letras maiúsculas*’<sup>23</sup>. Considere agora a seguinte sentença:

(34) ‘**C** NÃO É UMA SENTENÇA VERDADEIRA.

Ora, considerando o estabelecido para o símbolo, temos que ‘**C**’ é um nome de sentença. Sabemos que um nome de sentença é a própria sentença entre aspas simples (apóstrofes) ou um símbolo que se refira a esse nome apostrofado. Assim, empiricamente se verifica que:

(35) ‘‘**C** NÃO É UMA SENTENÇA VERDADEIRA’ é idêntico a ‘**C**’.

---

<sup>22</sup> Tarski, A.; [1983b], p.157. Porém Tarski não dá a referência de onde viu essa versão de Łukasiewicz. Essa versão de Łukasiewicz aparece no artigo de 1915, intitulado *O nauce* (Sobre a Ciência), in *Poradnik dla samouków* (Um Guia para Autodidatas), Varsóvia, Heflich i Michalski, pp.15-39 (ver WOLEŃSKI, JAN; [1994], p.393). Na página 35 do artigo de 1915 se lê:

“Há construções mentais que parecem conter uma inevitável contradição. Por exemplo, a sentença: a linha 13 na página 35 deste livro contém uma sentença falsa, é uma construção desse tipo.

“Esta sentença contém uma contradição porque observando que essa sentença é ela própria a da linha 13 na página 35 deste livro, é fácil provar tanto que se ela for verdadeira então ela é falsa como se for falsa então é verdadeira.”

Łukasiewicz, nesse mesmo artigo, na mesma página.35, dá a sua solução do paradoxo (WOLEŃSKI, JAN; [1994], p.393):

“[...] todo princípio lógico contém variáveis.

“[...] Essas variáveis, como as variáveis na matemática, podem ter vários valores. Agora há uma lei lógica que diz que todos os princípios lógicos concernem só daqueles objetos que podem ter valores de variáveis. Isso mostra que a sentença acima contendo a contradição não pode ter valor de variável. Assim, princípios lógicos não podem ser aplicadas a essa sentença; essa construção está fora da lógica.”

<sup>23</sup> Essa modificação da versão original foi sugestão do professor Dr. Edalcio G. de Souza, da PUC de São Paulo, orientador do mestrado do autor deste trabalho, a fim de evitar confusões de leitura e de contagem de linhas. A versão original de Tarski faz ‘c’ ser abreviação de ‘a sentença impressa nesta página, linha 5 desde o alto da página’. Essa versão obriga o leitor a contar as linhas e ocorre que não há segurança a respeito do que é que o leitor entende por ser uma das linhas do texto, se deve incluir os títulos e subtítulos, ou mesmo qual seria a primeira linha da página. A versão do prof. Edalcio evita essa dificuldade.

A verificação é empírica porque só saberemos se realmente **C** é idêntico a ‘**C NÃO É UMA SENTENÇA VERDADEIRA**’ se seguirmos a descrição da expressão ‘*a única sentença impressa nesta página escrita inteiramente com letras maiúsculas*’ – expressão que dá a natureza ou sentido de **C** – e descobriremos a tal sentença ‘**C NÃO É UMA SENTENÇA VERDADEIRA**’. De fato, é o que acontece. Assim temos uma sentença e um nome de sentença, aquilo necessário para montarmos um T-ESQUEMA. O T-ESQUEMA nós sabemos, tem a seguinte forma: **x** é uma sentença verdadeira se, e somente se, **p**.

Atentando para o que já estudamos, temos:

1. Estado de coisas: a página deste livro em questão. Nela ocorreu um fato que deve ser capaz de ser descrito pela linguagem-objeto.
2. *Fato que p*: é o fato de estar impressa uma expressão inteiramente com letra maiúsculas na página em questão.
3. **p**: é a descrição inteligível na linguagem objeto do evento *fato que p*. No caso é a expressão: ‘*a única sentença impressa nesta página escrita inteiramente com letras maiúsculas*’. Como é uma sentença muito longa, vamos abreviá-lo como **C**. Assim um nome de sentença adequado para **C** é ‘**C**’.
4. **x**: no lugar da variável **x** do T-ESQUEMA é colocaremos ‘**C**’, que é um nome de sentença adequado para a sentença **C**. Verificamos além que ‘**C**’ é idêntico a ‘**C NÃO É UMA SENTENÇA VERDADEIRA**’.

Voltando ao T-ESQUEMA, no lugar de **p** escrevemos **C** e no lugar de **x** escrevemos ‘**C**’. Teremos:

(36) ‘**C**’ é uma sentença verdadeira se e somente se **C**.

Mas sabemos o que é ‘**C**’. Por causa de (20) sabemos que ela é ‘*a única sentença impressa nesta página escrita inteiramente com letras maiúsculas*’ e tal sentença é a vista em (34). Substituindo:

(37) ‘C’ NÃO É UMA SENTENÇA VERDADEIRA’ é uma sentença verdadeira se e somente se C.

Por sua vez, sabemos de que C é abreviação: de ‘a única sentença impressa nesta página escrita inteiramente com letras maiúsculas’, que não é outra coisa senão (34). Substituindo:

(38) ‘‘C’ NÃO É UMA SENTENÇA VERDADEIRA’ é uma sentença verdadeira se e somente se ‘C’ NÃO É UMA SENTENÇA VERDADEIRA.

Novamente, por causa de (20) e substituindo, temos a seguinte sentença contraditória:

(39) ‘C’ é uma sentença verdadeira se e somente se ‘C’ NÃO É UMA SENTENÇA VERDADEIRA.

Que é a velha Antinomia do Mentiroso que se queria evitar. O fato de uma cuidadosa substituição ao lado de uma definição semântica de verdade que respeita a noção intuitiva clássica aristotélica ter ainda assim levado à Antinomia do Mentiroso, diagnostica uma falha nessa semântica. Tarski explica que o motivo do problema é que em (38) substituímos **p** por uma sentença C que já possuía em si própria a expressão ‘é verdadeira’. Como foi definida a ‘verdade’, segundo o modo clássico, ‘é verdadeira’ em C e ‘é verdadeira’ no T-ESQUEMA tem a mesma definição semântica e por isso predicam da mesma maneira. Daí a antinomia.<sup>24</sup>

---

<sup>24</sup> Tarski apresenta o mesmo tipo de construção da antinomia, mas com formato distinto, em seu artigo de 1969 (*Verdade e Demonstração* in TARSKI, A.: [2006], pp.211-212). Vamos apresentá-lo como no original:

“Considere a seguinte sentença:

(6) *A sentença impressa em vermelho na página 65 do número de junho de 1969 do Scientific American é falsa.*

Concordemos em usar ‘s’ como abreviação dessa sentença. Olhando para a data desta revista e para o número desta página, podemos facilmente verificar que ‘s’ é justamente a única sentença impressa em vermelho à página 65 do número de junho de 1969 do *Scientific American*. Então segue, em particular, que:

A solução será, então, saber como predicar adequadamente o conceito semântico ‘é verdade’ para evitar dupla referência (ou auto-referência)

### **Análise dos ‘nomes de sentença’ e de sua denotação**

Falta testar o esquema geral (29) para saber se ele realmente consegue definir ‘sentença verdadeira’. Quando vemos sua construção dele desde (27), notamos que o ponto mais importante é nome de sentença que deve ocupar o lugar **x**. Seria uma boa definição de sentença verdadeira se não tivesse sérios agravantes de interpretação.

Primeiro, os nomes de sentença são átomos (como já dito antes) e isso inclui as aspas quando um nome de sentença é um *nome por aspas*. Por exemplo, vamos tomar a seguinte sentença:

(40) está nevando.

Seu nome de sentença por aspas é:

(41) ‘está nevando’.

(7) *‘s’ é falsa se e somente se a sentença impressa em vermelho à página 65 do número de junho de 1969 do Scientific American é falsa.*

Por outro lado, ‘s’ é, indubitavelmente, uma sentença em português. Assim, supondo que nosso uso do termo ‘verdadeiro’ seja adequado, podemos asseverar a equivalência [‘*p*’ é verdadeira se e somente se *s*] na qual ‘s’ entra em substituição a ‘*p*’. Podemos, assim afirmar:

(8) *‘s’ é verdadeira se e somente se s.*

Lembremos agora que ‘s’ representa a sentença (6). Dessa forma, podemos substituir ‘s’ por (6) no lado direito de (8), obtendo:

(9) *‘s’ é verdadeira se e somente se a sentença impressa em vermelho à página 65 do número de junho de 1969 do Scientific American é falsa.*

Comparando agora (8) e (9), concluímos:

(10) *‘s’ é falsa se e somente se ‘s’ é verdadeira.*

Isso leva a uma contradição óbvia: ‘s’ mostra-se tanto verdadeira como falsa. Somos, então, confrontados com uma antinomia. A formulação da antinomia do mentiroso dada acima é devida ao lógico polonês Jan Łukasiewicz.”

Podemos, em (40) mudar alguma parte da sentença e escrever, por exemplo:

(42) não está nevando.

Mas não se pode alterar (41) para fazê-lo virar:

(43) ‘não está nevando’.

Isso porque (41) é o nome de (40) e o nome não pode ser alterado. Se pudéssemos colocar um ‘não’ dentro do nome ‘está nevando’, poderíamos fazer qualquer coisa com o nome, inverter as sílabas, colocar um ‘sim’ e um ‘não’ juntos, acrescentar a palavra ‘elefante’, jogar as aspas para o fim do nome e inverter as sílabas. Teríamos um nome com a aparência:

(44) táes dovanne sim não elefante“

Qualquer pessoa concorda que se pudéssemos mudar o nome ‘está nevando’ até ele se tornar táes dovanne sim não elefante“, ficaria difícil a comunicação. Os nomes de sentenças são átomos e não podem ser alterados porque não têm partes. Assim, (43) é o nome de (42) escrito *originalmente* e não por transformação de (41) (que não pode ser transformado, por ser atômico).

Pois bem, o que lemos em (26)? A seguinte expressão:

- a) Para toda vez que se descreve *está nevando* para o evento *queda da neve* do estado de coisas, ‘está nevando’ é uma sentença verdadeira se e somente se a está nevando.

Ela é usada para criar a generalização (27), que é:

- b) Para todo **p**, ‘**p**’ é uma sentença verdadeira se e somente se **p**.

Isto é, o nome de sentença ‘está nevando’ em (a) virou ‘**p**’ em (b), mas isso não podia ser, pois sendo ‘está nevando’ um átomo, não poderia substituir o *esta nevando* entre as aspas por uma letra **p**. ‘Está nevando’ é um nome por aspas e isso inclui as aspas no nome. De modo que não se pode usar as expressões de estrutura como as vistas em (9), (10) e (11) para generalizar, pois isso só pode se feito de modo errôneo ‘partindo átomos’.

Para piorar, em (b) o nome ‘**p**’ então não é nada mais do que o nome da letra *pê* do alfabeto, a décima quinta letra do alfabeto oficial do português do Brasil. Se insistíssemos em usar esse nome ‘**p**’ a única versão correta não seria a que se obteve de (26) para (27), mas:

(45) Para toda vez que se descreva *está nevando*, ‘**p**’ é uma sentença verdadeira se e somente se está nevando.

Que de modo algum é uma fórmula geral, mas é uma expressão totalmente sem sentido, que diz que a letra *pê* é uma sentença.

Para ficar pior ainda, vamos tomar a sentença (42) e construir a seguinte definição parcial de verdade dela:

(46) ‘não está nevando’ é uma sentença verdadeira se e somente se não está nevando’

Se insistirmos e usarmos o nome ‘**p**’ no lugar do nome ‘não está nevando’, teremos a seguinte expressão (como em (45)):

(47) Para todo vez que se descreva *não está nevando*, ‘**p**’ é uma sentença verdadeira se e somente se não está nevando.

Agora temos que ‘**p**’ é uma sentença verdadeira quer neve ou não. Isso é contraditório, pois ele deveria estar no lugar da descrição do evento, no entanto ele é a mesma letra *pê* tanto em (45) e (47): *não há sentido em dar o mesmo nome para sentenças contraditórias*.

A solução óbvia é essa: não há átomos. Os nomes de sentenças não podem ser átomos, mas sim compostos e as aspas entrariam nessa composição como instrumentos semânticos que ajudariam na confecção de nomes de sentença. Vamos chamar a esse novo caráter das aspas de *aspas-funcionais*<sup>25</sup> (que tornam os nomes de sentença uma função lingüística). É como se as aspas tivessem indicassem a ação de um *algoritmo semântico* que fazia a operação de tornar as sentenças em nomes. Nesse caso, as aspas não pertenceriam aos nomes, nem as sentenças entre as aspas seriam nomes, mas *nome* seria a *operação de fazer agir o algoritmo semântico (indicado pelas aspas) sobre a sentença que aparece entre as aspas*. Sendo isso, substituir ‘está nevando’ por ‘**p**’ não causa dificuldades, porque não existe mais a rigidez anterior, agora ‘**p**’ é um símbolo que representa a algoritmização semântico-niominal de *está nevando*.

Ou seja, sob a condição acima, as aspas se tornam algo como ‘palavras independentes’ que pertencem ao domínio semântico da linguagem, e traduzem algum tipo de conexão lingüística. Elas se tornam algo que podemos chamar de *funcionais*, ou *promotores de função*. Os *funcionais* são argumentos que traduzem relações entre outras palavras *não-funcionais*. Por exemplo, na expressão ‘**x** lê’ (TARSKI, A.; [1983b], p.162, nota 1), a palavra ‘lê’ é um *funcional formador de sentença* que tem como argumento um nome individual (**x**). Na sentença ‘**x** vê **y**’, ‘vê’ é um funcional formador de sentença que tem como argumento dois nomes. As próprias *aspas* possuem função lingüística, nesse caso. Por exemplo, em ‘a neve é branca’ as aspas são *funcionais formadores de nomes de sentença* argumentando com a sentença a neve é branca.<sup>26</sup>

Tarski tomou essa teoria e esses nomes das teses de T. Kotarbiński e de K. Ajdukiewicz (TARSKI, A.; [1983b], p.162, nota 1). Porém não é muito clara como se dá essa ação funcional das *aspas-funcionais*. Não sabemos qual o mecanismo semântico interno à linguagem que, por meio de aspas, faz uma palavra ou sentença se tornar um ob-

---

<sup>25</sup> No original, ‘quotation-functions’ (TARSKI, A.; [1983b], p.161). Cezar A. Mortari e Luiz Henrique de A. Dutra in TARSKI, A.; [2006], p.29 traduzem como ‘função de citação’.

<sup>26</sup> Tarski (TARSKI, A.; [1983b], p.162) tomou o nome *funcionais* (‘functors’ no texto original em inglês de Tarski; Cezar A. Mortari e Luiz Henrique de A. Dutra in TARSKI, A.; [2006], p.29 traduzem como ‘funtores’) de T. Kotarbiński em *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nau*, Lvov, 1929 (*apud* TARSKI, A.[1983b], p. 458) e os nomes ‘funcional formador de sentença’ (‘sentence-forming functor’ no texto original em inglês de Tarski) e ‘funcional formador de nome de sentença’ (‘name-forming functor’ no texto original em inglês de Tarski) de K. Ajdukiewicz em *Glówne zasady metodologii nauk i logiki formalnej*, Varsóvia, 1928, (*apud* TARSKI, A.[1983b], p. 456)

jeto lingüístico *funcional*. Tarski é da opinião que, numa análise profunda da questão, é impossível dar um sentido claro para os *promotores de função*.

No entanto, como parece ser a única solução viável para a formação de nomes de sentenças, vamos admiti-los como eficientes e ver5 o que acontece quando submetidos à prova da Antinomia do Mentiroso.

### **Construção da Antinomia do Mentiroso: teste da generalização de ‘sentença verdadeira’ para linguagens coloquiais**

Um dos maiores perigos de se aceitar os *promotores de função* se dá na interpretação das antinomias, em especial a do ‘Mentiroso’.

É possível construir o ‘Mentiroso’ sem usar a expressão ‘sentença verdadeira’. Vamos tomar o mesmo modo de construção que envolveu de (34) até (39). Se aceitarmos como válida a generalização (29), então podemos ter o símbolo ‘C’ como uma abreviação tipográfica da expressão ‘a única sentença impressa nesta página escrita inteiramente com letras maiúsculas’. Agora vamos considerar a sentença que segue:

**(C) PARA TODO ‘P’, SE ‘C’ É IDÊNTICO À SENTENÇA ‘P’, ENTÃO NÃO-‘P’.**

Empiricamente é fácil estabelecer que:

(48) A sentença ‘PARA TODO ‘P’, SE ‘C’ É IDÊNTICO À SENTENÇA ‘P’, ENTÃO NÃO-‘P’’ é idêntica a ‘c’.

A essa sentença acrescenta-se a seguinte suposição que rege o modo como as *aspas-funcionais* procedem:

(49) Para todo ‘p’ e ‘q’, se a sentença “p” é idêntica à sentença “q”, então ‘p’ se e somente se ‘q’.

Em (49) podemos colocar qualquer coisa no lugar de ‘q’. Podemos colocar ‘C’. Mas aí termos em (49) a afirmação (...), *se a sentença “p” é idêntica à sentença “C”, (...)*. Ora,

essa afirmação esta em (C), e resulta dela **NÃO-‘P’**. Respeitando essas interpretações, de (48) e (49) temos a seguinte contraditória:

(50) para todo ‘p’ e ‘C’, se “C” é idêntico a “p”, então **NÃO-‘P’** e ‘p’

Portanto, mesmo suprimindo a predicação ‘verdadeira’ para as sentenças envolvidas, ainda assim sempre é possível encontrar um modo de relação entre elas que gere a Antinomia do Mentiroso.

### Última tentativa de solução para as linguagens coloquiais: definição estrutural

As conclusões tiradas dos estudos vistos nos dois últimos dois subtítulos levaram Tarski a concluir que “a tentativa de construir uma definição semântica correta da expressão ‘sentença verdadeira’ choca-se contra dificuldades severas” (TARSKI, A.[1983b], p.162). E acrescenta (TARSKI, A.[1983b], pp. 162-163): “Não sabemos de qualquer método que nos permita definir o significado de uma expressão concreta arbitrária do tipo ‘x é uma sentença verdadeira’, onde no lugar de ‘x’ tenhamos um nome de alguma sentença.”

Abandonando a tentativa de esclarecer o modo como as *aspas* funcionam na linguagem natural, Tarski procura atacar noutra frente e sugere que a solução passa por traduzir ‘sentença verdadeira’ como um sentido exato para o que se entende por sentença estruturalmente definida. Assim Tarski define desse modo ‘sentença verdadeira’:

(51) Uma sentença verdadeira é uma sentença que possui tais e tais propriedades estruturais ou que podem ser obtidas a partir de tais e tais expressões estruturalmente descritas por meio do significado de tais e tais transformações estruturais.

Com ‘tais e tais’ Tarski quer dizer aquela definição estrutural que se vê em (17). Por exemplo, expressões que traduzem os processos de inferência lógica considerados ‘válidos’ porque em algum momento, considera-se que envolve o atributo ‘verdadeiro’ (seja no aspecto de *verdade material* ou de *verdade lógica*), essas expressões podem sofrer uma definição estrutural que caracterize o valor de verdade. Tarski propõe o exemplo (TARSKI, A.[1983b], p.163):

(52) toda expressão consistindo de quatro partes das quais a primeira é a palavra ‘se’, a terceira é a palavra ‘então’, e a segunda e a quarta são a mesma sentença, é uma sentença verdadeira.

(53) se uma sentença verdadeira consiste de quatro partes, das quais a primeira é a palavra ‘se’, a segunda uma sentença verdadeira, a terceira a palavra ‘então’, então a quarta parte é uma sentença verdadeira.

Apesar desse tipo de descrição estrutural ser muito útil para traduzir as leis da lógica, no entanto, no que cabe à linguagem natural, só esse tipo de descrição não serve. As linguagens naturais ‘crescem’ continuamente em expressões e sentenças. Não há ferramentas que possam especificar estruturalmente todas essas expressões, nem dizer quais são as verdadeiras e quais as falsas. Tarski (TARSKI, A.[1983b], p.164) conclui que “a tentativa de ajustar uma definição estrutural do termo ‘sentença verdadeira’ – aplicável à linguagem coloquial – choca-se contra dificuldades insuperáveis.” Tarski escreve (TARSKI, A.[1983b], pp.164-165):

“A falência de todas as tentativas anteriores força-nos a supor que não há um modo satisfatório de solucionar nosso problema. Importantes argumentos de natureza geral podem de fato ser invocados em apoio desta suposição, como indicarei brevemente agora.

“Um aspecto característico da linguagem coloquial (em contraste às várias linguagens científicas) é a universalidade. Não estaria em harmonia com o espírito dessa linguagem se em alguma outra linguagem ocorresse uma palavra que não pudesse ser traduzida nela; pode-se declarar que ‘se podemos falar magnificamente sobre qualquer coisa, podemos também falar sobre essa coisa na linguagem coloquial’. Se mantivermos essa universalidade da linguagem cotidiana em conexão com as investigações semânticas, deveremos, para se ter consistência, admitir dentro da linguagem, em acréscimo a suas sentenças e outras expressões, também os nomes dessas sentenças e expressões, e sentenças contendo esses nomes, bem como tais expressões semânticas como ‘sentença verdadeira’, ‘nome’, ‘denota’, etc. Mas é presumivelmente certo que essa universalidade da linguagem cotidiana que é a fonte primária de todas as antinomias semânticas, como a antinomia do mentiroso ou das palavras heterológicas. Estas antinomias parecem fornecer a prova de que toda linguagem que é universal no sentido acima, e pelas quais as

leis normais da lógica vigoram, deve ser inconsistente. Isto aplica-se especialmente à Antinomia do Mentiroso que dei nas páginas<sup>27</sup> 157 e 158, que não contém aspas-funcionais com variável de argumento. Se analisarmos essa antinomia na formulação acima, alcançaremos a convicção de que nenhuma linguagem consistente pode existir através da qual as leis da lógica vigorem e que ao mesmo tempo satisfaça as seguintes condições: (I) por qualquer sentença que ocorra na linguagem, um nome definido dessa sentença também pertence à linguagem; (II) toda expressão formada a partir de ‘ $x$  é um sentença verdadeira se e somente se ‘ $p$ ’ por substituição do símbolo ‘ $p$ ’ por qualquer sentença da linguagem e do símbolo  $x$  pelo nome dessa sentença, considera-se como uma sentença verdadeira dessa linguagem; (III) na linguagem em questão uma premissa empiricamente estabelecida que tenha o mesmo significado de  $(\alpha)$ <sup>28</sup> pode ser formulada e aceita como uma sentença verdadeira.<sup>29</sup>

“Se essas observações estiverem corretas, então *a real possibilidade de um uso consistente da expressão ‘sentença verdadeira’ que esteja em harmonia com as leis da lógica e o espírito da linguagem cotidiana parece ser bastante questionável, e conseqüentemente a mesma dúvida atinge a possibilidade de construção de uma definição correta dessa expressão*”

A conseqüência disso é que Tarski vai abandonar a tentativa de definir a expressão ‘sentença verdadeira’ para a linguagem natural e vai tentar fazê-lo numa linguagem formal, cuja construção é assunto deste trabalho.

---

<sup>27</sup> Páginas no trabalho original em Tarski, A.[1983]. Aqui é o que se viu em (34) até (39).

<sup>28</sup> Neste trabalho, (35).

<sup>29</sup> Neste ponto, Tarski coloca a seguinte nota de rodapé: “A antinomia das palavras heterológicas (...) é simplesmente a do mentiroso na medida em que uma premissa não empírica análoga a  $(\alpha)$  aparece nessa formulação; então se é levado à correspondente forte conseqüência: não pode haver linguagem consistente que contenha as leis ordinárias da lógica e satisfaça duas condições que são análogas a (I) e (II), mas difere delas em que elas não tratam de sentenças mas de nomes, e não da verdade de sentenças mas de relações de denotação. (...)”.

## CAPÍTULO 1

### CONSTRUÇÃO DA LINGUAGEM-OBJETO *L*

A segunda parte do trabalho de Tarski começa no parágrafo 2 de seu *Concept of truth in formalized languages* de 1935 (TARSKI, A.; [1983b], p.165), onde em uma longa introdução prévia (TARSKI, A.; [1983b], p.165-168) expõem sua esperança de que as linguagens formalizadas possam, de modo muito preciso (em considerável vantagem frente à linguagem natural), definir o conceito de *sentença verdadeira*.

[pp.165-166]

#### §2. LINGUAGENS FORMALIZADAS, ESPECIALMENTE A LINGUAGEM DO CÁLCULO DE CLASSES

Pelas razões dadas na seção precedente abandono agora a tentativa de solucionar nosso problema para a linguagem da vida cotidiana e me restringirei daqui em diante inteiramente às linguagens formalizadas.<sup>2</sup> Estas podem ser aproximadamente caracterizadas como linguagens artificialmente construídas onde o sentido de cada expressão é univocamente determinado por sua forma.

<sup>2</sup> Os resultados obtidos para a linguagem formalizada também tem uma certa validade para a linguagem coloquial, e isto é devido à sua universalidade: se traduzirmos para a linguagem coloquial qualquer definição de uma sentença verdadeira que tenha sido construída por alguma linguagem formalizada, obteremos uma definição fragmentária de verdade que abarca uma categoria de sentenças mais ampla ou mais restrita.

Apesar de na seção anterior Tarski ter mostrado os problemas de definir *sentença verdadeira* nas linguagens naturais, na *nota de rodapé 2* ele aponta que é possível, através da definição de sentença verdadeira para as linguagens formalizadas, obter a definição de sentença verdadeira para um grupo grande ou pequeno (depende do resultado formal) de sentenças da linguagem coloquial.<sup>30</sup> Tarski aponta duas condições fundamentais de uma linguagem formalizada:

<sup>30</sup> Karl Popper será um dos principais seguidores dessa ‘proposta’ feita nessa nota de rodapé por Tarski. Só para deixar exemplificado esse ponto, o próprio Popper afirma em sua autobiografia intelectual *Unended Quest* (POPPER, KARL R.; [1993], p.112):

“Quando em 1935 Tarski explicou-me (no *Volksgarten* em Vienna) a idéia de sua definição de verdade, eu notei o quão importante ela era, e que ele tinha finalmente reabilitado a tão

1. As linguagens formalizadas são artificialmente construídas (isto é, seus elementos básicos – letras, palavras, símbolos – são convencionalmente estabelecidos);
2. Nas linguagens formalizadas o sentido de cada expressão depende unicamente da forma em que foi escrita.

Mas essas duas condições não caracterizam o suficiente uma linguagem formalizada. Por isso:

[p.166]-1

Sem determo-nos

em uma descrição completamente exaustiva e precisa, que é matéria de considerável dificuldade, darei atenção aqui a algumas propriedades essenciais que todas as linguagens formalizadas possuem: ( $\alpha$ ) para qualquer dessas linguagens, uma lista ou descrição é dada em termos estruturais de todos os *sinais com os quais as expressões da linguagem são formadas*;

Realmente, é uma tarefa hercúlea descrever todas as características de uma linguagem antes de apresentar as suas cláusulas de construção. Tarski passa a enumerar algumas propriedades comuns a todos os modelos de formalização de linguagem. Serão quatro propriedades, a primeira é essa chamada ( $\alpha$ ), que diz, em outras palavras, que para uma linguagem formalizada, cada símbolo (*senal*) dentro da linguagem tem uma função clara e específica, não ambígua. Sabemos que não é ambígua pela própria noção que

difamada teoria da correspondência da verdade a qual, eu sugeri, é e sempre tem sido o senso comum a respeito da idéia de verdade.

“Meus pensamento posteriores sobre isso foram em larga medida uma tentativa de tornar claro para mim mesmo o que Tarski tinha feito. Não que ele realmente tenha *definido* verdade. Para ser exato, ele tinha definido verdade para uma linguagem formalizada singular, e tinha ensaiado métodos de definição para uma classe de outras linguagens formalizadas. Desse modo, ele tinha também deixado claro que havia outros meios essencialmente equivalentes de introduzir verdade: não por definição, mas axiomáticamente; então a questão de a verdade ser melhor introduzida ou axiomáticamente ou por definição não podia mais ser fundamental. Além disso, todos os métodos precisos restringiram-se às linguagens formalizadas, e não poderiam, como Tarski mostrara, ser aplicadas às linguagens ordinárias (com seu caráter ‘universalístico’). Entretanto ficou claro que podemos aprender da análise de Tarski como usar, com um pequeno cuidado, a noção de verdade em um discurso ordinário, e usá-la, além disso, em seu sentido ordinário, como correspondente aos fatos. Eu decidi por fim que o que Tarski tinha feito fora mostrar que uma vez que tenhamos entendido a distinção entre um objeto lingüístico e um (semanticamente) metalingüístico – uma linguagem em que podemos falar sobre proposições e sobre fatos – não haveria grande dificuldade em entender como uma proposição pode corresponder a um fato.”

Apesar da importância da interpretação popperiana do trabalho de Tarski, aqui não é o espaço para estendermos mais o comentário a respeito.

Tarski tem de *descrição estrutural*. Anteriormente, na primeira parte deste seu trabalho (TARSKI, A.; [1983b], p. 156), Tarski já havia apontado as vantagens de uma descrição estrutural, principalmente em permitir evitar a ambigüidade.

[p.166]-2

( $\beta$ ) dentre todas as possíveis expressões que podem ser formadas com esses símbolos, aquelas chamadas *sentenças* são distinguidas por meio de suas propriedades puramente estruturais.

Em outras palavras, a *sentença* é entendida como tal a partir do *modo como os símbolos se associam na sentença*. Há regras que determinam como os sinais devem se associar para gerar sentenças (apesar de que nada impeça a associação não regulada de sinais que resultam, fatalmente, em expressões sem sentido).

[p.166]-3

Agora, linguagens formalizadas tem sido até agora construídas exclusivamente com a proposta de estudar *ciências dedutivas* formalizadas com base de tais linguagens. A linguagem e a ciência constituem um único conjunto, tanto que falamos da linguagem de uma ciência dedutiva formalizada em particular, ao invés desta ou daquela linguagem formalizada. Por esta razão algumas propriedades características das linguagens formalizadas aparecem em conexão com o modo segundo o qual as ciências dedutivas são construídas;

Sobre o modo como as linguagens formalizadas e as ciências dedutivas estão ligadas, Tarski já havia escrito em 1930 em seu artigo *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences* (TARSKI, A.; [1983d], p. 60):

“As disciplinas dedutivas constituem assunto da *metodologia das ciências dedutivas*, que hoje, graças a Hilbert, é usualmente chamada *metamatemática*, do mesmo modo como entidades especiais são assunto da geometria e animais da zoologia. Naturalmente nem todas as ciências dedutivas são apresentadas em uma forma adequada para a investigação científica. As que, por exemplo, não se apresentam de modo adequado é porque não repousam sobre uma base lógica definida, não tendo regras precisas de inferência, e seus teoremas são formulados usualmente em termos ambíguos e inexatos da linguagem coloquial – em uma palavra, em termos não-formais. As investigações metamatemáticas, conseqüentemente, ficam restritas às disciplinas dedutivas formalizadas.

“Estritamente falando, a metamatemática não é considerada uma teoria particular. Para a proposta de investigação de cada disciplina dedutiva, uma metadisciplina especial deve ser construída.”

Percebe-se aqui que aquilo que Tarski entende por *linguagem formalizada* é o tipo de linguagem capaz de sustentar os teoremas das ciências que sofrem de forte matematização, em especial a física. Porém, a preocupação que motivou o trabalho de

Tarski sobre a definição de verdade não foi a preocupação com as linguagens para as ciências dedutivas. O lógico R. L. Vaught, que trabalhou junto a Tarski longamente nos Estados Unidos, apontou que Tarski não sofreu influência nenhuma do ‘fiscalismo’ dos teóricos do Círculo de Viena antes de seu trabalho sobre a definição de verdade (mas parece já ter sofrido essa influência quando escreveu seu artigo de 1944, *The Establishment of Scientific Semantics*, neste trabalho citado TARSKI, A.; [1983a]). Segundo Vaught, Tarski se motivara na herança de uma discussão antiga que vinha da Escola de Lvov-Varsóvia onde havia uma preocupação em se obter os critérios de formalização rígidas da linguagem. Vaught (VAUGHT, R. L.; [1974], p. 161) ainda acrescentou:

“(...) A ‘motivação’ esboçada acima para o trabalho de Tarski sobre a verdade foi dada inteiramente do ponto de vista da matemática e da lógica matemática. Historicamente falando, isso foi somente uma parte da motivação de Tarski, já que ele estava muito mais de acordo com as posições e atitudes sobre a noção de verdade dita por vários filósofos (tais como Wittgenstein, só para citar um nome).”

Mais especialmente, Tarski já havia avisado no próprio *Concept of Truth in Formalized Languages* (TARSKI, A.; [1983b], p.153) que a linguagem que construiria para nela definir *verdade* (esta linguagem *L* deste *parágrafo 2*) seria uma linguagem formalizada das ciências dedutivas.

[p.166]-4

( $\gamma$ ) uma lista, ou descrição estrutural, é dada das sentenças chamadas *axiomas* ou *declarações primitivas*; ( $\delta$ ) em regras especiais, chamadas *regras de inferência*, certas operações de um tipo estrutural são incorporadas, o que permite a transformação de sentenças em outras sentenças. As sentenças que podem ser obtidas de dadas sentenças por uma ou mais aplicações dessas operações são chamadas de *consequências* dessas sentenças dadas. Em particular, as consequências de axiomas são chamadas de *sentenças demonstráveis* ou *asseveradas*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> A formalização de uma ciência usualmente admite a possibilidade de introduzir novos símbolos dentro daquela ciência os quais não foram explicitamente dados antes. Esses símbolos – chamados de *símbolos definidos* (em contraste aos *símbolos primitivos*) – aparecem na ciência em primeira instância em expressões de uma estrutura especial chamadas *definições*, que são construídas de acordo com regras especiais – as *regras de definição*. Definições são algumas vezes tomadas como sentenças demonstráveis de uma ciência. Este aspecto da formalização das linguagens não será considerado no que segue.

As cláusulas ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ) evidenciam a idéia de que se fala de linguagens formais para *ciências dedutivas*, ou seja, derivação de sentenças a partir de sentenças dadas (axiomas, cláusula ( $\gamma$ )) por meio de regras (cláusula ( $\delta$ )).

[p.166]-5

Resta talvez acrescentar que não estamos aqui interessados em linguagens e ciências ‘formais’ em um sentido especial da palavra ‘formal’ - a saber, as ciências dos signos e expressões aos quais nenhum significado é atribuído. Para tais ciências, o problema aqui discutido não tem relevância, nem mesmo significativa.

Este trabalho não precisa de uma teoria da construção dos signos, de uma história das raízes das palavras, ou da fixação dos símbolos das linguagens, nem de uma ciência que dê os motivos do uso de cada símbolo em especial. Não é o *design* do símbolo que importa, mas o significado que ele carrega. Este trabalho (o *Concept of truth in formalized languages*) é completamente inútil para uma ciência lexográfica.

[p.167]-1

Iremos sempre atribuir significados bem concretos e, para nós, inteligíveis, aos sinais que ocorrem nas linguagens que iremos considerar.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Estritamente falando, isso se aplica apenas aos símbolos chamados constantes. Variáveis e sinais técnicos (tais como parênteses, pontos etc.) não possuem nenhum significado independente, mas exercem uma influência essencial no significado das expressões das quais fazem parte.

A linguagem que será construída terá *sentido*. Na *nota de rodapé 1* Tarski adianta os limites da significação dos símbolos de uma linguagem formalizada: nelas só as constantes não-lógicas têm significados (por isso são constantes, pois o significado de cada constante é um e um único). Os símbolos como parênteses, ponto, dois pontos, hífen etc., não significam nada além de seu próprio *design*. As variáveis estão no lugar do espaço vago deixado livre para ser ocupado por um indivíduo ou classe de indivíduos quando for exigido.

[p.167]-2

As expressões que chamamos sentenças ainda permanecem sentenças depois que os signos que ocorrem nelas foram traduzidos para a linguagem coloquial. As sentenças que são distinguidas como axiomas parecem-nos ser materialmente verdadeiras, e, ao escolher regras de inferência, somos sempre guiados pelo princípio de que, quando tais regras são aplicadas a sentenças verdadeiras, as sentenças obtidas por seu uso deveriam ser também verdadeiras.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Finalmente, as definições são construídas de tal forma que elucidam ou determinam o significado dos sinais que são introduzidos na linguagem por meio de sinais primitivos ou sinais previamente definidos (cf. p.166, nota 1).

Sobre o fato das sentenças formais permanecerem como tais quando traduzidas para a linguagem coloquial, não poderíamos esperar por outra coisa, afinal as linguagens formalizadas se apóiam sobre a noção matemática de *conjunto*. Ora, os elementos de um conjunto qualquer podem ser objetos do mundo real, assunto das sentenças coloquiais. Quanto aos axiomas, intuitivamente o tomamos como verdadeiros, pois é próprio da natureza do axioma não ser resultado de uma prova. Que sentenças verdadeiras são inferidas de sentenças verdadeiras é uma crença arraigada naquilo que entendemos ser a *validade* de um argumento: se por acaso cogitássemos a liberdade de sentenças falsas serem inferidas de sentenças verdadeiras, não teríamos segurança em nenhuma ciência. Na *nota de rodapé 2* Tarski afirma o caráter recursivo da definição: uma definição só pode se fazer por meio de símbolos previamente nomeados e definidos na linguagem.

[p.167]-3

Ao contrário das linguagens naturais, as linguagens formalizadas não têm a universalidade que foi discutida no final da seção precedente. Em particular, a maioria dessas linguagens não possui termos pertencentes à teoria da linguagem, isto é, nenhuma expressão que denote símbolos e expressões da mesma ou de outra linguagem ou que descreva as conexões estruturais entre elas (tais expressões eu chamo – por falta de termo melhor – *descritiva-estruturais*). Por essa razão, quando investigamos a linguagem de uma ciência dedutiva formalizada, sempre podemos distinguir claramente entre a linguagem *sobre* a qual falamos e a linguagem *na* qual falamos, bem como entre a ciência que é o objeto de nossa investigação e a ciência na qual a investigação é efetuada. Os nomes das expressões da primeira linguagem, e das relações entre elas, pertencem à segunda linguagem, chamada metalinguagem (que deve conter a primeira como uma parte). A descrição dessas expressões, a definição dos conceitos complexos, especialmente daqueles ligados à construção de uma teoria dedutiva (como o conceito de consequência, de sentença demonstrável, possivelmente, de sentença verdadeira), a determinação das propriedades desses conceitos, e a tarefa da segunda teoria, que chamaremos *metateoria*.

A seção anterior referida por Tarski é o §1 de seu trabalho, comentado na INTRODUÇÃO nesta dissertação. Naquela seção Tarski mostrou a facilidade com que as linguagens naturais têm de gerar paradoxos como o Paradoxo do Mentiroso, uma vez que elas podem falar delas próprias (auto-referência). Para Tarski essa não é a condição das linguagens formalizadas. Uma vantagem interessante neste ponto do estudo é indicada por Tarski: as linguagens formalizadas não têm símbolos que caracterizem a auto-referência, o que permitiria a essas linguagens falarem delas próprias; por isso fica muito fácil distinguir a linguagem formalizada primeira – na qual as definições são feitas – e a linguagem formalizada segunda – *metalinguagem*: onde se fala das definições da

primeira linguagem e como se relacionam. Para a segunda linguagem falar da primeira deve citar a primeira linguagem, por isso toda linguagem faz parte de sua metalinguagem (a linguagem é o objeto da metalinguagem). Assim como uma teoria da linguagem permitiu construir uma linguagem formalizada, a metalinguagem é construída por uma metateoria (idêntica estruturalmente a uma teoria).

[pp.167-168]

Para um extenso grupo de linguagens formalizadas, é possível dar um método pelo qual uma correta definição de verdade pode ser construída para cada uma delas. A descrição resumidamente geral desse método, e das linguagens às quais ele é aplicável, seria problemática e não de todo clara. Prefiro, portanto, introduzir o leitor nesse método de outro modo. Construirei uma definição desse tipo ligada a uma linguagem concreta particular e mostrarei algumas de suas mais importantes consequências. As indicações que apresentarei no §4 deste artigo serão, espero, suficientes para mostrar como o método ilustrado por esse exemplo pode ser aplicado a outras linguagens de construção lógica similar.

O que Tarski entende por “correta definição” é a definição que é introduzida a partir de regras lógicas pré-estabelecidas. Fazer uma ‘Teoria da Construção da Definição da Verdade para as Linguagens Formalizadas’ é um trabalho que ergueria tantos problemas de formalização que o resultado seria algo no qual não se veria a funcionalidade (que seria definir a verdade para as linguagens formalizadas). O processo que Tarski vai preferir é tomar uma linguagem formalizada simples e de conhecimento comum para ele definir a verdade, para que o leitor tenha *in loco* o modo como essa definição é introduzida na linguagem. Depois, no § 4 (que não será assunto desta dissertação), regras generalizarão esse processo para outras linguagens formalizadas similares à linguagem tomada como modelo.

Isso deixa aberto que a problemática da definição da verdade é ligada à construção lógica da linguagem adotada.

[p.168]-1

Escolho, como objeto de minhas considerações, a linguagem de uma ciência dedutiva de bastante simplicidade, que certamente será bem conhecida do leitor – aquela do *cálculo de classes*. O cálculo de classes é um fragmento da lógica matemática e pode ser tomada como uma das interpretações da ciência formal que é comumente chamada de *Álgebra Booleana* ou a *álgebra da lógica*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Cf. Schroder, E. (62) vol. 1 (especialmente p.160-3) e Whitehead, A. N.; e Russell, B. A. W (90), vol, 1, p.205-12.

Tarski escolhe o modelo mais simples de linguagem, o *cálculo proposicional*, ou *de classes*, ou *sentencial*, ou *de predicados*. Conhecido como álgebra booleana, consiste em constantes e variáveis e de um número discreto (apenas quatro) de conexões entre esses termos. A simplicidade se dá pelo número pequeno de axiomas (apenas cinco), pelo número pequeno de regras simples de formação de símbolos (apenas duas) e por ter apenas uma *regra de inferência* (*Modus Ponens*). Não vamos entrar em detalhes maiores sobre essa linguagem porque ela será construída passo a passo para que seja possível a partir dela construir metateoricamente uma definição de sentença verdadeira.

Na *nota de rodapé 1* Tarski cita a literatura de base para essa linguagem simples escolhida. Os números entre parênteses referem-se à numeração da bibliografia no fim da coletânea das obras de Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*<sup>31</sup>.

Nos parágrafos que se seguem no texto de Tarski, este irá apresentar gradativamente os elementos principais da linguagem que ele escolheu segundo o que ele disse em cada uma das cláusulas ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ). Vamos entender agora essa apresentação.

### **1. Ao que se refere à cláusula ( $\alpha$ ): estudo dos símbolos da linguagem-objeto.**

Tarski inicia agora a construção de uma linguagem formal a partir da qual seja possível metateoricamente definir ‘sentença verdadeira’. Começará pela idéia de *constantes* e depois de *variáveis*.

#### **1.1 Os símbolos intuitivos ou constantes**

Tarski escolhe uma linguagem simples que pode dizer tudo por meio de quatro relações intuitivas básicas: *negar*, *distinguir*, *universalizar*, *incluir*. Para traduzir em linguagem essas relações, Tarski vai escolher um conjunto de quatro símbolos. São *constantes* ou *símbolos intuitivos*<sup>32</sup>. Intuitivos porque sabemos qual seu papel na linguagem, mas *não conseguimos provar* que têm esse papel porque eles só aparecem quando estamos diante daquilo que fazem; é impossível, por exemplo, fazer um argumento ca-

---

<sup>31</sup> Estamos usando neste trabalho a segunda edição, 1983, Hackett Publishing Company, EUA. Nessa edição, (62): E. SCHRÖDER, *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)* (Leipzig; i, 1890; ii, part 1, 1891; ii, part 2, 1905; iii, part 1, 1895); (90): A. N. WHITEHEAD AND B. A. W. RUSSELL, *Principia Mathematica* 2nd ed., i-iii (Cambridge, 1925-7).

<sup>32</sup> Esta expressão, *símbolo intuitivo*, é nossa.

paz de dar as razões anteriores que esses símbolos traduzem, porque o que eles representam já é o que há de mais anterior na linguagem. Assim a prova seria circular: para provar seriam usados eles mesmos. Tarski começa distinguindo os dois tipos de símbolos:

[p.168]-2

Entre os símbolos que compreendem as expressões dessa linguagem, distinguirei dois tipos, *constantes* e *variáveis*.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Fazendo uso de uma idéia de Łukasiewicz, evitarei introduzir quaisquer símbolos técnicos (como parênteses, pontos etc.) na linguagem, principalmente devido a que sempre escreverei o *funcional* antes dos argumentos em toda expressão significativa; cf Łukasiewicz, J. (51), em especial pp. v e 40.

*Constantes*, na interpretação de Tarski, são os símbolos que não tem nenhuma outra função senão significar eles próprios. São também chamados usualmente de ‘símbolos não-lógicos’. Na sentença seguinte ele vai apresentar as quatro constantes escolhidas. As variáveis não têm essa condição: elas significam as coisas possíveis dentre os elementos de um conjunto arbitrário que contém os significados delas. Na *nota de rodapé 2*, Tarski opta pela *notação polonesa* de Łukasiewicz, em que uma expressão se escreve primeiro dizendo o que se fará com os termos e depois citando os termos na ordem em que sofrem a ação. Neste trabalho vamos ‘traduzir’ para a notação moderna (usando parênteses) a notação polonesa usada por Tarski. Os *funcionais* (no original *functors*), são ao *promotores de função* citados na primeira parte deste trabalho de comentário à obra de Tarski. O número entre parênteses refere-se à numeração da bibliografia no fim da coletânea das obras de Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*<sup>33</sup>.

É interessante notar que Tarski está construindo a linguagem segundo um roteiro que ele já fizera dois anos antes deste artigo, em *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, de 1933. Semelhantemente a que faz aqui em [p.168]-2, Tarski escreve nesse artigo (TARSKI, A.; [1983e], p.280): “em nossa linguagem ocorrem dois tipos de símbolos: constantes e variáveis”.

Agora é necessário apontar quais são os símbolos de constantes:

<sup>33</sup> Ver nota 31. Nessa edição, (51): J. ŁUKASIEWICZ, *Elementy logiki matematycznej* (Elements of mathematical logic) (1929).

[pp.168-169]

Vou introduzir apenas quatro constantes: o símbolo de *negação* ' $N$ ', o símbolo de *soma lógica (disjunção)* ' $A$ ', o *quantificador universal* ' $\Pi$ ', e finalmente o signo de *inclusão* ' $I$ '.<sup>3</sup> Considero esses símbolos equivalentes em significado, respectivamente, às expressões 'não', 'ou', 'para todo' (no sentido no qual essa expressão foi usada no enunciado (6) do § 1, por exemplo) e 'esta contido em'.

<sup>3</sup> Usualmente muitas outras constantes ocorrem no cálculo de classes, por exemplo, o símbolo de existência, o símbolo de implicação, de produto lógico (conjunção), de equivalência, de identidade, bem como os de complemento, a soma e o produto de classes (ver página 168, nota 1). Por essa razão, apenas um fragmento do cálculo de classes pode – falando formalmente – ser construído na linguagem sob consideração. Contudo, é notável que todas as constantes do cálculo de classes podem ser introduzidas nessa linguagem como termos definidos, se completarmos sua formalização pela introdução, possível por meio de definições, de novos símbolos (ver p. 166, nota 1). Devido a esse fato, nossa linguagem fragmentaria já é suficiente para a expressão de toda idéia que possa ser formulada na linguagem completa dessa ciência. Eu ainda aponto que mesmo o símbolo de inclusão ' $I$ ' pode ser eliminado de nossa linguagem, pela interpretação de expressões do tipo ' $xy$ ' (em que quaisquer variáveis ocorrem em lugar de ' $x$ ' e ' $y$ ') da mesma maneira em que, na sequência, interpretaremos a expressão ' $Ixy$ '.

Os símbolos escolhidos<sup>34</sup> por Tarski são:

1. O símbolo ' $N$ ' de *negação*, que quer dizer 'não'. Um símbolo moderno para indicar a negação é ' $\square$ '; esse sinal permite que se diga que determinada propriedade não está presente. Se  $M$  for uma propriedade,  $\neg M$  é a ausência dessa propriedade. Por exemplo, em "o níquel é magnético e o cobre é não-magnético", se representarmos o termo 'magnético' por  $M$  então, o níquel é  $M$  e o cobre é  $\neg M$ .

2. O símbolo ' $A$ ' de *disjunção* (ou *soma lógica*), que quer dizer 'ou'. Um símbolo moderno para indicar a disjunção é ' $\square$ '; entre dois conjuntos disjuntos quaisquer, esse sinal determina que um elemento qualquer pertença ou a um conjunto ou a outro ou a ambos.

3. O quantificador *universal* ' $\Pi$ ', que quer dizer 'para todo'; um símbolo moderno para indicar a operação universal é ' $\square$ '. Esse símbolo permite que consideremos a totalidade dos objetos que discutimos, assim não poderemos dizer que 'há exceções'. Por exemplo, se considerarmos que dado objeto do mundo feito de ouro é valioso e não

<sup>34</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.280, Tarski prefere apenas três constantes: "Três constantes bastam: o símbolo de negação ' $N$ ', o símbolo de implicação ' $C$ ' e o quantificador universal ' $\Pi$ '." Em nota de rodapé a esta passagem, Tarski ainda afirma que o símbolo de negação é dispensável e que só serve para simplificar a discussão.

queremos que alguém suponha que há objetos de ouro sem valor, diremos “para todo objeto do mundo, se é feito de ouro, há para ele um valor que lhe cabe”. E se o objeto for um coelho? Se ele for de ouro, tem valor. E se for a cenoura do coelho? Se ela for de ouro, tem valor. E se for o Papai Noel? Se ele for de ouro, tem valor. A lista pode ser infinita se o interlocutor for inconveniente. Então, para silenciá-lo escrevemos: “ $\square x: x$  de ouro, então  $x$  tem valor”, onde  $x$  pode ser substituído por qualquer objeto do mundo. Além do mais, aqui é o lugar de falarmos do *símbolo de quantificação*, e não de uma teoria a respeito da quantificação, que envolve uma discussão muito mais acurada sobre variáveis livres e ligadas, assunto que ainda veremos.

4. O sinal de *inclusão* ‘ $T$ ’, que quer dizer está incluso em’. Um símbolo moderno para inclusão é ‘ $\square$ ’, mas Tarski, mais à frente, usará ‘ $\square$ ’ como símbolo metalingüístico. Como temos a intenção de traduzir para uma linguagem mais usual as expressões da linguagem formal em notação polonesa de Tarski, vamos fazer o símbolo ‘ $\square$ ’ ficar no lugar de ‘ $T$ ’ na nossa tradução e propor um símbolo adequado para a ‘inclusão’ na metalingüagem (o leitor verá que escolheremos o símbolo ‘ $\square$ ’ no lugar de ‘ $\square$ ’). O símbolo ‘ $\square$ ’ permite que incluamos objetos (ou conjuntos), entre outros objetos (ou em outros conjuntos). Por exemplo, é fácil perceber que todo animal de pêlos é mamífero, mas que baleias não têm pêlo. Então o conjunto dos mamíferos é maior do que o de animais de pêlo. Assim, se  $P$  representa ‘animais de pêlos’ e  $M$  representa ‘mamíferos’, diremos  $P \square M$ .

Na *nota de rodapé 3*, Tarski lembra que há outros símbolos para outras constantes, mas que elas podem ser introduzidas na linguagem à medida que forem sendo exigidas segundo regras claras de definição de novos símbolos. Assim, a linguagem escolhida só com quatro constantes, ainda que fragmentária, é suficiente para nela se atingir o objetivo pretendido. Até mesmo tem símbolos demais: Tarski diz que o símbolo de inclusão pode ser omitido, escrevendo  $xy$  no lugar de  $Ixy$ .<sup>35</sup>

As constantes sozinhas são expressões, porém são expressões sem sentido. As expressões só são escritas com sentido associando-se variáveis por meio de constantes,

---

<sup>35</sup> Mais adiante ficará explicado o que a expressão  $Ixy$  quer dizer.

segundo regras que introduzam sentido na expressão<sup>36</sup>. Fica agora sendo necessário explicar a idéia de *variável*.

## 1.2. Variáveis

As variáveis são símbolos que se associam entre si por meio dos *símbolos intuitivos*<sup>37</sup>. Com essa associação se formam *expressões*. Assim, nessas expressões as variáveis podem ser substituídas por qualquer objeto de um conjunto (ou de conjuntos) de objetos. Por exemplo, a expressão “*x é branco*”, a variável *x* pode ser substituída por um objeto. Talvez pelo objeto *n*, por exemplo, que podemos fazer significar *neve*. Teríamos, então: *neve é branca*. Devemos deixar claro que esse objeto *n* é constante, isto é, não muda, porque não queremos que signifique outra coisa, mas sua natureza é distinta daquela dos quatro símbolos (constantes não-lógicas) descritos no [pp.168-169], aos quais Tarski chamou identicamente de constantes (pois nunca significam outra coisa que aquilo que são). Variáveis, então, são quaisquer símbolos que possamos substituir por outros que não são, por sua vez, substituíveis. Mas Tarski se preocupará com o modo de se escrever os símbolos de variáveis para se evitar confusão. Assim:

[p.169]-1  
Em princípio, quaisquer símbolos arbitrários podem ser usados como variáveis, desde que seu número não seja limitado e que eles sejam distintos, pela forma, das constantes. Mas, para o decurso futuro de nosso trabalho, é tecnicamente importante especificar exatamente a forma destes símbolos, e de tal modo que eles possam facilmente ser ordenados em uma sequência.

As variáveis devem ser símbolos tirados de um número infinito de símbolos próprios para serem variáveis, com uma forma que impeça qualquer variável de ser confundida com qualquer das quatro constantes iniciais propostas por Tarski<sup>38</sup>. Outra condição é que esses símbolos de variáveis tenham um tipo de escrita que permita ordená-los infinitamente.

---

<sup>36</sup> As expressões com sentido são as *sentenças*.

<sup>37</sup> Ver nota 32.

<sup>38</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.280, Tarski escreveu: “por outro lado, operaremos com infinitamente mais variáveis.”

[p.169]-2

Usarei, portanto, como variáveis apenas símbolos como ‘x,’ , ‘x,,’ , ‘x,,,’ e símbolos análogos, que consistem no símbolo ‘x’ e em um número de pequenos traços, adicionados abaixo. O símbolo que tem um número  $k$  de tais traços pequenos (sendo  $k$  algum número natural distinto de 0) será chamado a  $k$ -ésima variável.

Escolher um símbolo fixo (como ‘x’) seguido do acréscimo continuado e subsequente de um símbolo auxiliar (como ‘,’) permite obter a idéia de sequência<sup>39</sup>. Assim,  $k$  símbolos ‘,’ acrescido ao símbolo ‘x’ cria o  $k$ -ésimo símbolo para a  $k$ -ésima variável e Tarski entende que a  $(k-1)$ -ésima variável vem antes da  $k$ -ésima variável em uma expressão.

Neste trabalho vamos modificar a notação de Tarski e no lugar do símbolo ‘,’ que se acresce ao símbolo ‘x’, indicaremos por numerais o acréscimo sofrido. Assim, neste comentário faremos ‘x,’ , ‘x,,’ , ‘x,,,’ ficar ‘x<sub>1</sub>’, ‘x<sub>2</sub>’, ‘x<sub>3</sub>’ e manteremos que o símbolo ‘x’ que tem um número  $k$  como índice (sendo  $k$  algum número natural distinto de zero) será chamado a  $k$ -ésima variável.

[p.169]-3

Na interpretação intuitiva da linguagem, que sempre terei em mente aqui, as variáveis representam nomes de classes de indivíduos.

O que Tarski quer dizer é que não ocorre que cada indivíduo (objeto) de um conjunto tenha a sua variável correspondente. Se fosse assim, não existiriam variáveis, mas apenas indivíduos e seria impossível a generalização de qualquer conceito. Cada variável corresponde a um único indivíduo do conjunto, mas esse indivíduo pode ser qualquer um. Por exemplo,  $x_1$  pode ser substituído por ‘neve’ por que no lugar de  $x_1$  podemos escrever qualquer coisa que seja *integralmente de cor branca*. Poderemos escrever ‘cavalo’ no lugar de  $x_1$ ? Sim, desde que ‘cavalo’ seja algo *integralmente de cor branca*. Podemos escrever ‘Torre Eiffel’? Sim, desde que atenda ao critério. ‘Sol’? ‘Mar Vermelho’? ‘Nuvem’? ‘Carbono’? Sim, para todos, desde que atendam ao critério<sup>40</sup>. Assim,

<sup>39</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.280, Tarski escreveu: “como variáveis usaremos os símbolos ‘x □ □’, ‘x □ □ □’, ‘x □ □ □ □’, etc., i.e. símbolos compostos do símbolo ‘x’ e de uma série arbitrária de pequenos traços acima e abaixo.”

<sup>40</sup> Não é trabalho para a lógica verificar, por exemplo, se a ‘Torre Eiffel’ é um objeto integralmente branco. Se esse objeto é citado sob esse critério dentro de um sistema, ele é tomado como tal. Não que a lógi-

‘*integralmente de cor branca*’ é um nome de classe, que pode ser abreviado por ‘*x*’ (para Tarski, e ‘*x*’ – isto é, sem *itálico* – para nós em nossa linguagem mais usual).

Obviamente, o símbolo ‘*x*’ não será o único para representar variáveis. Se “as variáveis representam nomes de classes de indivíduos”, então fica implícito que há várias classes de indivíduos. Se para uma classe cabe os símbolos de variável  $x_1, x_2, x_3$  etc., existindo outra classe de indivíduos será necessário relacionar a ela outros símbolos de variáveis que não se confundam com  $x_1, x_2, x_3$  etc. Por isso, além do ‘*x*’ Serão usadas, conforme a exigência para evitar confusões, sempre *as últimas letras do alfabeto latino*. Então, algumas vezes o símbolo ‘*y*’, ou o ‘*z*’, aparecerão em nossa linguagem como variáveis. Isso porque, muitas vezes, para facilitar a compreensão, estaremos falando de certas variáveis do tipo  $x$  às quais cabem certas propriedades diferentes das que cabem para as variáveis do tipo  $y$ . Porém, não vamos falar coisas como *variável tipo x* ou *variável tipo y*. Vamos diferenciar os tipos de variáveis por *classes*. Para Tarski, o símbolo ‘*x*’ sem índice (feito por traços, em seu caso) representa a classe  $x$  que contém os ‘*x*,’, ‘*x*,,’’, ‘*x*,,,’, etc. Para nós, aqui neste comentário ao trabalho de Tarski, usaremos  $X$  no lugar de  $x$ , por exemplo. Assim  $X$  é classe das variáveis  $x$ ;  $Y$  é a classe das variáveis  $y$  etc. Assim, na classe  $X$  teremos variáveis  $x_1, x_2, x_3$  etc. Ou, além dessas, na classe  $Y$  teremos estas outras  $y_1, y_2, y_3$  etc. Os símbolos, sejam para qual classe forem, são em número infinito. Mas por enquanto não sabemos se vamos usar uma quantidade apenas ‘muito grande’ desses símbolos ou uma quantidade ‘infinita’ deles, pois não sabemos se usaremos algumas ou infinitas variáveis de cada classe. Por isso é conveniente dizermos que vamos usar  $k$  variáveis, que pode ser uma ou muitas. Assim teremos  $x_1, x_2, \dots, x_k$  variáveis, por exemplo. Isso caracteriza que o número de variáveis usadas é *grande o suficiente, mas não infinito*.

Aqui acaba o comentário à cláusula ( $\alpha$ ). Variáveis mais constantes permitirão a escrita de *sentenças*, assunto da cláusula ( $\beta$ ).

## 2. Ao que se refere à cláusula ( $\beta$ ): estudo de expressões sentenciais

ca é ignorante e aceita tudo, é que ela preserva o cuidado de lidar apenas com as estruturas do raciocínio e da linguagem e não com o conteúdo. Já existem religiosos, políticos, cientistas e filósofos em número suficiente, lidando com os conteúdos.

Parcialmente, vimos exemplos de expressões no [pp.168-169]. A rigor *expressão* pode ser apenas um amontoado de símbolos enfileirados sem ordem nem sentido, enquanto *sentença* seria uma expressão ordenada e com sentido. A respeito disso, Tarski escreveu em seu artigo de 1969 (TARSKI, A.; [2006], p.204):

“(...). Sentenças são aqui tratadas como objetos linguísticos, como certas sequências de sons e de signos escritos. (Obviamente, nem toda sequência desse tipo é uma sentença.) Além disso, quando falarmos de sentenças, deveremos ter sempre em mente aquilo que, em gramática, são chamadas sentenças declarativas, e não sentenças interrogativas ou imperativas.”

É importante ressaltar isso para não carregarmos para dentro de uma linguagem formal a ‘liberdade poética’ comum da linguagem natural, onde há muitas expressões problemáticas. Por exemplo, a seguinte expressão é possível na linguagem cotidiana, mas não podemos dizer que tenha a função de descrever um estado de coisas:

(1). Bons dias aqui e olá, adeus e benção acolá!

Trata-se de uma trova, ou verso, ou brincadeira de palavras, sem função. A gramática normal das línguas taxa essas expressões de *frase*, isto é, uma expressão sem função porque é desprovida de verbo e se torna apenas um jogo interessante de palavras, musicalidade sonora, sem outra função além de produzir um som agradável de ouvir.

Uma linguagem formal pode e deve se proteger desse tipo de construção. Assim, frases como (1) são *expressões* dentro das linguagens, mas não são *sentenças*. Analogamente, na linguagem formal (a partir dos símbolos tidos até aqui), o que segue é por exemplo uma *expressão*:

(2)  $\Box \neg x_1 \Box x_1 y_2$

Porém (2) não é *sentença* porque é desprovida de sentido lógico (ao menos dentro desta linguagem formalizada que está sendo construída por Tarski, como veremos). Ao menos

sabemos que dentro da linguagem formal uma *expressão* é uma sequência finita de símbolos<sup>41</sup>:

[p.169]-4

Como *expressões* da linguagem temos ou constantes e variáveis isoladas, ou composições de tais símbolos seguindo-se uns aos outros, por exemplo: ‘ $x, Nx,$ ’, ‘ $Nx,x,$ ’, ‘ $AIx,x,Ix,x,$ ’, ‘ $\prod x,$ ’, ‘ $Ix,x,,$ ’, e assim por diante.

Ainda não conhecemos as regras de ordenação dos símbolos para formar sentenças, mas Tarski escolhe para exemplificar *expressão* algumas sequências de símbolos que ora estão ordenados segundo regras que as tornam sentenças, ora não (apesar de Tarski não o dizer aqui, porque ele ainda não introduziu a noção de *sentença*). Assim, convertidas para a nomenclatura mais usual:

notação polonesa	notação usual	leitura
$x, Nx,$	$x_1 \square x_2$	“ $x_1$ não $x_2$ ” (não faz sentido)
$Nx,x,$	$\square(x_1 \square x_2)$	“não ocorre que $x_1$ esteja incluso em $x_2$ ”
$AIx,x,Ix,x,$	$(x_1 \square x_2) \square (x_2 \square x_1)$	“ $x_1$ está incluso em $x_2$ ou $x_2$ está incluso em $x_1$ ”
$\prod x,$	$\square x_1$	“Para todo $x_1$ ” (não faz sentido)
$Ix,,x,,$	$x_2 \square x_3$	“ $x_2$ está contido em $x_3$ ”

As regras de ordenação dos símbolos para formar expressões são bem mais simples na *notação polonesa* de Łukasiewicz do que na usual. Na notação polonesa:

- a constante deve anteceder as variáveis que vão sofrer a relação;
- as diversas relações aparecem na ordem inversa: a constante referente à última relação aparece primeiro e as constantes referentes às primeiras relações aparecem por último na expressão.

A notação usual é mais complicada de se reduzir a regras simples: ela é floreada para facilitar a leitura e isso implica em uma complexidade de escrita. As regras mais básicas que auxiliam escrever em nomenclatura usual são (chamando as constantes de *conectivos* e as relações entre variáveis feitas por constantes de *conexões*):

- os conectivos são escritos entre variáveis e/ou entre conexões;

<sup>41</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.280, Tarski escreveu: “As constantes e variáveis são as expressões mais simples da linguagem.”

- as conexões que serão conectadas entre si ficam entre parênteses
- a negação só é colocada antes de conexões entre parênteses;
- negações podem ser conectadas a outras conexões;
- quantificadores antecedem variáveis;
- quantificações podem ser conectadas.

Essas regras, porém ficam mais claras com exemplos e exercícios de escrita, o que não faremos por ora ainda. Tarski exemplificará a leitura que espera que seja feita das sentenças que surgirem em sua linguagem como segue:

[p.169]-5

Expressões do tipo ' $Np$ ', ' $Apq$ ', ' $\lceil xp \rceil$ ' e ' $Ixy$ ', em que, no lugar de ' $p$ ' e ' $q$ ', aparecem quaisquer sentenças ou funções sentenciais (esse termo será explicado abaixo) e, em lugar de ' $x$ ' e ' $y$ ', aparecem quaisquer variáveis, são lidas: ' $\text{não } p$ ' (ou ' $\text{não e verdade que } p$ '),<sup>1</sup> ' $p$  ou  $q$ ', ' $\text{para todas as classes } x \text{ temos } p$ ', e ' $\text{a classe } x \text{ esta contida na classe } y$ ', respectivamente.

---

<sup>1</sup> Por razões de estilo, usamos algumas vezes a expressão ' $\text{não é verdade que}$ ' em vez da palavra ' $\text{não}$ ', considerando a expressão inteira como uma palavra única, ou seja, não sendo dado nenhum significado independente às partes separadas, e em particular à palavra ' $\text{verdade}$ ', que ocorrem nela.

Temos que os símbolos ' $p$ ' e ' $q$ ' estão no lugar de sentenças (cuja natureza o próprio Tarski informa que ainda será explicada) e ' $x$ ' está no lugar do nome ' $x$ ' do conjunto de sentenças que podemos por no lugar de possíveis  $x_1, x_2, x_3$  etc. (que não apareceram na expressão, mas podem vir a aparecer – e virão – em uma expressão futura). O mesmo para ' $y$ '. Esses ' $\text{conjuntos de sentenças}$ ' são as classes que já vimos:  $X$  e  $Y$ .<sup>42</sup> Traduzindo os exemplos de Tarski para a notação usual, temos:

notação polonesa	notação usual	leitura
$Np$	$\lceil p \rceil$	"não p"
$Apq$	$p \sqcup q$	"p ou q"

---

<sup>42</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.280, Tarski escreveu: "As constantes tem sua interpretação usual: expressões da forma ' $Np$ ', ' $Cpq$ ' e ' $\lceil xp \rceil$ ', em que, no lugar de ' $p$ ' e ' $q$ ' quaisquer sentenças e ao invés de ' $x$ ' quaisquer variáveis, ocorrem, são lidos: ' $\text{não } p$ ', ' $\text{se } p \text{ então } q$ ' e ' $\text{para todo } x, p$ ' respectivamente. Variáveis com um traço acima são tratados como nomes de indivíduos (objetos de 1ª ordem), aqueles com dois traços como nomeando classes de indivíduos (objetos de 2ª ordem) e assim por diante. O uso de traços abaixo com variáveis serve ao mesmo propósito como o costumeiro uso de letras de diversas formas no papel de variáveis. Uma expressão da forma ' $xy$ ', onde ao invés de ' $x$ ' qualquer variável ocorre e ao invés de ' $y$ ' uma variável com um ou mais traços em cima, é lido: ' $x$  é um elemento da classe  $y$ ' ou ' $x$  tem a propriedade  $y$ '.

$\prod x p$	$\square x_i (p \square X)$	“Para todo $x_i$ , $p$ pertence a $X$ ”
$Ixy$	$X \square Y$	“ $X$ está incluído em $Y$ ”

As expressões podem se unir em expressões compostas (e essas expressões compostas não constituem um símbolo, mas são feitas de expressões simples simbólicas). Tarski fala da composição de expressões:

[p.169]

Com respeito às expressões compostas, isto é, aquelas que não são símbolos, podemos dizer que elas consistem em duas ou mais outras expressões mais simples. Assim, a expressão ‘ $NIx,x,$ ’ é composta das duas expressões sucessivas ‘ $N$ ’ e ‘ $Ix,x,$ ’, ou das expressões ‘ $NI$ ’ e ‘ $x,x,$ ’ ou, finalmente, das expressões ‘ $NIx,$ ’ e ‘ $x,$ ’.

Qualquer expressão composta pode ser reduzida a duas ou mais expressões simples, isto é, qualquer sequência de símbolos idêntica a uma das partes da expressão composta é um componente da expressão composta. Note que a expressão ‘ $NIx,x,$ ’ (usualmente,  $\square(x_1 \square x_2)$ ) pode ser considerada composta de no máximo quatro expressões: as expressões ‘ $N$ ’, ‘ $I$ ’, ‘ $x,$ ’ e ‘ $x,$ ’.<sup>43</sup>

Aqui Tarski pára o comentário à cláusula ( $\beta$ ). As cláusulas ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ) demandarão mais capítulos e subtítulos do que a que se dedicou até aqui ao estudo (relativamente simples) das cláusulas ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ).

---

<sup>43</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.280, Tarski escreveu: “Ao escrever esses símbolos um após outro e em qualquer número ou arranjo, obtemos expressões mais complicadas. Toda expressão composta, i.e. aquela contendo mais de um símbolo, pode evidentemente ser tomada como o resultado de colocar duas (ou mais) expressões sucessivas. Por exemplo: ‘ $\prod x \square \square x \square \square x \square \square \square$ ’ consiste de ‘ $\prod$ ’ e ‘ $x \square \square x \square \square \square$ ’ ou de ‘ $\prod x \square \square$ ’ e ‘ $x \square \square x \square \square \square$ ’ ou também de ‘ $\prod x \square \square x \square \square$ ’ e ‘ $x \square \square \square$ ’. Uma categoria especialmente importante de expressões seria distinguida acima, nomeadamente aquela das sentenças (significativas).”

## CAPÍTULO 2

### DESCRIÇÃO DA METALINGUAGEM

Tarski vai iniciar o trabalho de construção da linguagem que ele citou nas cláusulas ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ) (TARSKI, A.; [1983b], p.166). Ele próprio dirá que será necessário trabalhar em nível de *metalingüístico*.

[p.169]

Mas o domínio apropriado das considerações que se seguem não é o cálculo de classes propriamente dito, mas sua correspondente metalinguagem.

Começa neste ponto do texto de Tarski, e segue pelos próximos capítulos, o trabalho que tornou Tarski famoso: a definição de ‘verdade’ para as linguagens formalizadas. Ele usará de um recurso inédito: a metalinguagem. Antes de Tarski, era comum se confundir ‘linguagem’ e a ‘linguagem que fala da linguagem’. Exemplo clássico é a obra *Meditações* de Descartes. Sua declaração mais famosa (*penso, logo existo*) é uma reflexão a respeito da reflexão.

Falar do que se fala, pensar sobre o que se pensa, sempre foi uma prática comum dentro da filosofia. A falta de rigor que se pode apontar hoje é, porém, injusta: seria um ato de violência sem sentido querer apontar *erros* de interpretação a respeito dos termos da linguagem quando este ou aquele filósofo reflete sobre suas reflexões (ou fala daquilo que fala), porque mesmo as modernas teses metalingüísticas são apenas *um ponto de vista* e não um *ponto final* na questão.

Assim, a metalinguagem de Tarski e toda a esperança de uma metalinguagem para as linguagens coloquiais é também um *ponto de vista*.

Apesar de que ao longo da história da filosofia muitos pensadores falaram daquilo que falavam e perceberam um grau elevado de definições vagas e ambigüidades nessas discussões, ainda assim foi só por causa dessa percepção que nasceu a idéia de uma *linguagem da linguagem*. O trabalho de Tarski foi mostrar que havia um tipo específico de *linguagem da linguagem*, a metalinguagem para as linguagens formais, que conseguia evitar a ambigüidade e interpretações vagas em suas noções básicas.

A preocupação de Tarski, então, é conseguir criar uma metalinguagem que possa tornar claro a definição de verdade ao menos para proteger as ciências positivas (que

usam um discurso fortemente apoiada em uma linguagem matemática) das condições vagas geradas por uma definição intuitiva de ‘verdade’ (aquela intuição aristotélica). Assim, já que as linguagens formais são o tipo de linguagem das ciências dedutivas, é necessário distinguir certas nuances de referências entre os elementos lingüísticos no tratamento que um tipo de ciência dessas dá aos termos e expressões que usa. Em outras palavras, torna-se necessário distinguir a ‘linguagem *a respeito da qual se fala*’ da ‘linguagem *na qual se fala*’.

Chamaremos assim de simplesmente *linguagem* ao ambiente de manipulação lingüística em que se fala e usaremos o prefixo ‘meta’ ante todo elemento do ambiente de manipulação lingüística onde é possível *falar a respeito da linguagem*.

Mas o que é *metalinguagem*, afinal de contas? E como seria sua *metassintaxe*? Neste capítulo vamos buscar esclarecer a noção de *matalinguagem* para no próximo capítulo lidar com a *metassintaxe*.

### 1. A metalinguagem

Caracteriza-se *metalinguagem* pela lista de sinais e expressões que nos permite referir-nos à linguagem. Por exemplo, se na linguagem encontramos a sentença ‘a Terra é azul’, na metalinguagem encontramos a sentença ‘a Terra é azul’ tem quatro palavras’. A expressão *tem quatro palavras* é uma expressão metalingüística, pois toma ‘a Terra é azul’ como um de seus objetos lingüísticos unitários.

As idéias que inspiraram a de metalinguagem, tão forte na teoria tarskiana, não foram *insights* de Tarski. Já era uma tendência dentro da Escola de *Lvov-Varsóvia*, que foi fundada no século XIX em Lvov, Polônia, por Kazimierz Twardowski (1866-1938). Seu período de ouro foi entre 1918 e 1939. A guerra – e o comunismo após a guerra – forçaram a dispersão do grupo, fazendo a Escola desaparecer.

Entre 1918 e 1929 ocorreram a série de estudos e conferências de dois dos maiores lógicos poloneses, Leśniewski e Łukasiewicz. Seus estudos dentro do campo da lógica e da lógica da matemática influenciariam gerações de jovens lógicos no século XX, dentro e fora da Polônia. Eles começaram com os primeiros conceitos de *metalógica*: *uma lógica para falar da lógica*. Essa idéia levantava questões sobre, por exemplo, a *consistência*, a *completude*, a *decidibilidade* dos sistemas formais clássicos herdados desde Frege e melhorados por Russell e Whitehead. Em volta dos dois configurou-se o

que se entendeu chamar de *Lógica Polonesa*. As idéias metalógicas da lógica polonesa exigiam de um sistema formal que ele fosse consistente, completo tanto sintaticamente quanto semanticamente e baseado em um conjunto de termos primitivos e axiomas. A estrutura que recomendavam para um sistema formal atendia o que segue (WOLEŃSKI, JAN; [2003]):

- (a) É melhor um sistema com poucos conceitos primitivos;
- (b) É melhor um sistema com poucos axiomas;
- (c) Se definirmos o comprimento de um sistema axiomático como o número de símbolos que ocorrem na totalidade de seus axiomas, então o sistema axiomático mais curto é o melhor;
- (d) É melhor um sistema com poucos símbolos diferentes;
- (e) Se definirmos um teorema orgânico como aquele que não tem nenhum outro abaixo dele, então axiomas orgânicos são melhores que os não-orgânicos. Assim, o sistema axiomático ideal é aquele provado consistente e dos axiomas orgânicos mais curtos possíveis.
- (f) O sistema axiomático ideal faz todos esses critérios anteriores serem bem aplicáveis no cálculo proposicional.

Esse ambiente, onde se sai fora da lógica para elencar regras metalógicas capaz de justificar a lógica, foi propício para Tarski formular seus conceitos metalingüísticos.

A idéia de uma metalinguagem é a de uma linguagem que contenha seus próprios símbolos (e conseqüentemente sua própria sintaxe) seus próprios axiomas e suas próprias regras de inferência e possua ainda, entre seus objetos, a linguagem que lhe está abaixo. A linguagem  $L$  vai participar de uma metalinguagem  $L'$  na forma de expressões-objetos: as expressões da linguagem  $L$  que *são feitas de partes* torna-se *um objeto único e sem partes*. Nesse formato novo, torna-se objeto da metalinguagem.

## 2. Metassintaxe

Essa palavra – *metassintaxe* – jamais foi usada por Tarski e, até onde foram nossas leituras, é a primeira vez que ela aparece em um tratado sobre semântica. Entende-se *sintaxe* por uma relação formal entre as expressões de uma linguagem, isto é, o modo

como elas se *constituem* e como são constituídas as relações entre elas dentro da linguagem. Isso envolve o alfabeto usado, as regras de formação das sentenças, os axiomas e as regras de inferência. No caso da *metassintaxe*, são todas as mesmas ferramentas típicas da sintaxe da linguagem-objeto, mas com condições de permitir à metalinguagem *falar inclusive da sintaxe da linguagem, quando necessário*. O objeto de estudo da metalinguagem é a linguagem. A coisa que uma metalinguagem mais deseja evitar é a ambiguidade, que pode cair em auto-referência. Por isso, a metalinguagem não pode usar as mesmas palavras ou símbolos da linguagem. Ela deve saber reconhecer o alfabeto e o modo de falar da linguagem, mas tem de usar um alfabeto e um modo de falar distinto.

Tarski não pode continuar lidando com a linguagem (cláusulas ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ )), sem estruturar a metalinguagem (que será usada para falar da linguagem durante sua construção). Continua-se lendo no texto de Tarski:

[p.169]  
Nossas inves-  
tigações pertencem ao metacálculo de classes desenvolvido nessa metalinguagem.

Por ‘nossas investigações’ Tarski quer dizer o trabalho de montar uma metalinguagem para a linguagem. As expressões metalingüísticas como ‘*a neve é branca*’ é *uma sentença verdadeira se e somente se a neve é branca* ou ‘*a Terra é azul*’ é *uma sentença de quatro palavras* tem a mesma natureza das constantes que entram no lugar das variáveis proposicionais na linguagem *L*. Isso quer dizer que a metalinguagem tem suas próprias variáveis proposicionais, o que significa que tem seus próprios símbolos primitivos, suas próprias constantes, suas próprias regras de composição, etc.

[pp.169-170]  
Disso  
brota a necessidade de dar ao leitor alguma explicação - ainda que muito breve - da estrutura da metalinguagem e da metateoria. Vou me restringir aos dois pontos mais importantes:

Não há como fazer aqui uma construção de uma metalinguagem do mesmo modo como se quer fazer com a linguagem, caso contrário seria necessário ter uma *meta-*

*metalinguagem* que exigiria sua *meta-meta-metalinguagem*, e assim indefinidamente<sup>44</sup>. Por isso Tarski vai apenas ‘situar’ o leitor nos elementos básicos da metalinguagem (os dois pontos referidos). A estrutura complexa que envolve a construção de uma metalinguagem não será exposta e essa estrutura metalinguística será introduzida – sem provas – à medida que a construção da linguagem exigir. Os dois pontos são:

[p.170]-1

(1) a enumeração de todos os símbolos e expressões que serão usados na metalinguagem, sem explicar em detalhes a importância deles no decurso da investigação, e (2) a criação de um sistema de axiomas que seja suficiente para o estabelecimento da metateoria ou, pelo menos, que forme o fundamento para os resultados obtidos neste artigo. Esses dois pontos estão definitivamente conectados com nosso problema fundamental; negligenciemo-los e não seremos capazes de asseverar que tenhamos tido sucesso em definir corretamente qualquer conceito com base na metalinguagem, ou que a definição construída possua quaisquer consequências particulares.

A respeito do ponto (1), a metalinguagem necessita de símbolos que se refiram a expressões, relações e inferências da linguagem, mas Tarski não pretende definir os símbolos metalinguísticos com o rigor que está querendo para os símbolos linguísticos. Na verdade a definição dos símbolos metalinguísticos é ‘emprestada’ dos símbolos linguísticos aos quais correspondem, como aprenderemos ao longo do processo de construção da linguagem.

A respeito do ponto (2), Tarski precisara de um conjunto de meta-axiomas para poder definir de que modo a metalinguagem é capaz de se referir à linguagem. Isso é necessário porque é metalinguisticamente falando que se fazem as definições da linguagem. A falta de cuidado em se fornecer à metalinguagem ‘regras de como fazer referência’ impedirá que se possa saber se as definições na linguagem estão corretas, inclusive a definição de verdade e a definição de *sentença verdadeira*. Porém não se trata, como já comentamos antes, de construir a metalinguagem com o rigor de construção pretendido para a linguagem:

---

<sup>44</sup> Já em TARSKI, A.; [1983e], pp.280-281, Tarski escreveu a respeito da formalização da metalinguagem: “Para evitar uma complicação desnecessária não empreenderemos uma exata formalização da metalinguagem.”

[p.170]-2

Mas não tentarei dar à metateoria o caráter de uma ciência dedutiva estritamente formalizada. Contentar-me-ei em dizer que - exceto os dois pontos mencionados - o processo de formalizar a metateoria não mostra nenhuma peculiaridade específica. Em particular, as regras de inferência e de definição não diferem de modo algum das regras usadas na construção de outras ciências dedutivas formalizadas.

Tarski quer dizer que – apesar da metalinguagem ser, em última instância, a linguagem de uma ciência dedutiva – não vai expô-la com o rigor da construção que quer para a linguagem (álgebra booleana). Isso porque não é preciso saber como construir rigorosamente uma metalinguagem, mas apenas saber – rigorosamente – como usá-la, isto é, é *necessário saber falar* da linguagem. Dizemos então, que ao se falar da linguagem, que há *modos de se exprimir* dentro da metalinguagem. Tarski (TARSKI, A.;[1983b], pp.170-173) aponta dois modos de expressão: *expressões metalingüísticas de um caráter lógico geral* e *expressões metalingüísticas de termos específicos da metalinguagem de um caráter descritivo-estrutural*.

A descrição, com algum detalhe – nada exaustivo – de cada um desses pontos (1) e (2) citados passará pela explicação de dois tipos de expressões metalingüísticas, falados na sequência, no texto de Tarski.

### **3. Expressões metalingüísticas TIPO I: expressões de um caráter lógico geral.**

O primeiro tipo de expressões metalingüísticas é introduzido como segue:

[p.170]-3

Entre as expressões da metalinguagem, podemos distinguir dois tipos. Ao primeiro, pertencem expressões de caráter lógico geral, tomadas de qualquer sistema de lógica matemática suficientemente desenvolvido.<sup>1</sup> Elas podem ser divididas em expressões primitivas e expressões definidas, mas isso seria fora de propósito no presente caso.

<sup>1</sup> Por exemplo, do trabalho de Whitehead, A. N.; Russell, B. A. W. (90). (Mas não pretendo usar aqui qualquer simbolismo lógico especial. A não ser pelas exceções que mencionarei explicitamente, usarei expressões da linguagem coloquial.) Para o significado das expressões lógicas gerais dadas na sequência, ver Carnap, R. (8).

Uma expressão de caráter lógico geral significa um tipo de símbolo (ou sequência deles) que traduza conceitos lógicos amplos o suficiente para serem comuns em diversas linguagens lógicas<sup>45</sup>. Como veremos, os símbolos traduzem idéias que são comuns a todo princípio de formalização de uma linguagem. Tarski preferiu a linguagem do trabalho de Whitehead e Russell, como se vê na *nota de rodapé 1*<sup>46</sup>. Uma expressão é *primitiva* quando aparece na construção da linguagem desde o início. Uma expressão é *definida* quando é introduzida, sem referência anterior, quando a linguagem já está construída.

[p.170]-4  
Pri

meiro, temos uma serie de expressões que possuem o mesmo significado que as constantes da ciência em consideração; assim, ‘*não*’ ou ‘*não é verdade que*’,<sup>2</sup> ‘*ou*’, ‘*para todo*’, e ‘*está incluso em*’ – em símbolos, ‘ $\square$ ’. Graças a essa circunstância, somos capazes de traduzir qualquer expressão da linguagem na metalinguagem. Por exemplo, o enunciado ‘para toda *a* (ou para todas as classes *a*)  $a \square a$ ’ é a tradução da expressão ‘ $\square x, Ix, x,$ ’.

---

<sup>2</sup> Veja p.169, nota 1.

As expressões ‘*não*’, ‘*ou*’, ‘*para todo*’, e ‘*está incluso em*’ são expressões metalinguísticas usadas para falar de seus correspondentes lingüísticos ‘*N*’, ‘*A*’, ‘ $\square$ ’ e ‘*I*’ (na notação polonesa de Tarski – na notação usual atual: ‘ $\square$ ’, ‘ $\square$ ’, ‘ $\square$ ’ e ‘ $\square$ ’). O cuidado que teremos aqui é quanto à expressão ‘*está incluso em*’ para a qual Tarski escolhe o símbolo ‘ $\square$ ’. Mas existe um uso clássico do símbolo ‘ $\square$ ’ nas linguagens formalizadas e queremos conservar esse uso clássico. Por isso vamos deixar ‘ $\square$ ’ como símbolo lingüístico e façamos ‘ $\square$ ’ ser o símbolo metalinguístico para abreviar a referência ‘*está incluso*

<sup>45</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.281, Tarski escreveu a esse respeito, como aqui, que há na metalinguagem duas categorias de conceitos. A respeito da primeira disse consistir de “conceitos de uma natureza lógica geral, pertencente a um arbitrário, mas suficientemente desenvolvido, sistema de lógica matemática (e.g. o *Principia Mathematica*), e em particular aqueles do domínio do cálculo de classes, e a aritmética de números naturais; (...)”.

<sup>46</sup> Nesta *nota de rodapé 1* desta passagem, Tarski preocupou-se em deixar de lado qualquer simbologia especial além daquelas de uso comum, em especial na lógica matemática que serve de base ao *Principia* de Russell e Whitehead. Em TARSKI, A.; [1983e], p.281, nota de rodapé 1, Tarski escreveu: “Farei uso livre de vários símbolos que estão em uso comum nos trabalhos sobre teoria dos conjuntos. Por exemplo, fórmulas da forma ‘ $x, y, \dots \square \square$ ’ e ‘ $x, y, \dots \square \square \square$ ’ expressa o fato de que  $x, y, \dots$  pertencem ou não pertencem ao conjunto  $\square$  respectivamente. ‘0’ denota o conjunto vazio e ‘ $\{x, y, \dots, z\}$ ’ o conjunto que contém unicamente  $x, y, \dots, z$  como elementos. Através do símbolo ‘*Nt*’ denotarei o conjunto de todos os números naturais.  $Nt - \{0\}$  é o conjunto de todos os números naturais distintos de 0.” A respeito da citação do trabalho de Rudolf Carnap, trata-se do (Ver nota 31) (8): *Abriss der Logik* de 1929.

*em*’, sem prejuízos. Outro ponto interessante é que as variáveis na linguagem são substituídas por *metavariáveis* na metalinguagem, no caso a variável lingüística *x*, é referida na metalinguagem pela variável metalingüística *a*. Isso adianta uma regra: as variáveis lingüísticas – que são sempre as *últimas letras do alfabeto latino* – serão referidas pelas *primeiras letras do alfabeto latino* na metalinguagem. A *nota de rodapé 2* remete ao comentário feito sobre o uso estilístico da palavra ‘verdade’.

Nesta passagem Tarski traduziu para a metalinguagem as constantes da linguagem. Porém uma metalinguagem *inclui* a linguagem como objeto e isso resulta em que a metalinguagem é mais ampla em símbolos do que a linguagem. Por isso Tarski trata de relacionar outros símbolos e expressões metalingüísticos que se farão necessários para se definir termos dentro da linguagem.

[pp.170-171]  
À mesma

categoria pertence uma serie de expressões análogas do domínio do cálculo sentencial, do cálculo funcional de primeira ordem e do cálculo de classes, por exemplo, ‘*se..., então*’, ‘*se e somente se*’, ‘*para algum x*’ (ou ‘*há um x tal que...*’), ‘*não está incluso em*’ – em símbolos ‘ $\square$ ’, ‘*é idêntico a*’ – em símbolos, ‘ $=$ ’, ‘*é distinto de*’ – em símbolos, ‘ $\neq$ ’, ‘*é um elemento de*’ – em símbolos, ‘ $\square$ ’, ‘*não é um elemento de*’ – em símbolos ‘ $\square$ ’, ‘*indivíduo*’, ‘*classe*’, ‘*classe nula*’, ‘*classe de todo x tal que*’, e assim por diante.

Essas novas expressões metalingüísticas permitem que se explique de que maneira ocorrem relações entre conjuntos (classes) de indivíduos, entre indivíduos e entre essas classes e indivíduos. Lembrando que um indivíduo em uma classe é algo que pode ser posto no lugar de uma variável lingüística. Fazemos um glossário metalingüístico:

1. ‘**se..., então**’: é o modo de se referir à *implicação material*, que está presente na regra *Modus Ponens*, que será a única regra de inferência da linguagem.
2. ‘**se e somente se**’: é o modo de se referir à *equivalência*, que diz que o antecedente implica materialmente o conseqüente (implicação material ‘da esquerda para a direita’) simultaneamente a que o conseqüente implica materialmente o antecedente (implicação material ‘da direita para a esquerda’).
3. ‘**para algum x**’ ou ‘**há algum x tal que**’: é o modo de se referir à condição em que em uma classe há pelo menos um indivíduo do qual se pode dizer algo.
4. ‘**não está incluso em**’: é o modo de se referir à condição de uma classe ou indivíduo não estar entre os indivíduos de outra classe. Tarski escolhe o símbolo

‘□’ como abreviação metalingüística de ‘*não está incluso em*’. Mas por causa do uso clássico que se faz desse símbolo na linguagem usual, vamos traduzir o símbolo metalingüístico ‘□’ de Tarski pelo símbolo metalingüístico ‘□’, sem prejuízo da referência.

5. **‘é idêntico a’**: é o modo de se referir à condição de dois indivíduos (ou a explicação, ou definição, de um e de outro indivíduo) serem o mesmo, ou duas classes (ou a explicação, ou definição, de uma e de outra classe) serem a mesma. O sinal metalingüístico escolhido por Tarski para abreviar essa condição é o usual ‘=’. Como queremos aqui preservar o símbolo ‘=’ para uso na tradução da linguagem da notação polonesa para a usual atual, vamos substituir o símbolo metalingüístico ‘=’ de Tarski pelo símbolo metalingüístico ‘≈’, sem prejuízo de referência.

6. **‘é distinto de’**: é o modo de se referir ao oposto da condição vista em (5). Para abreviar essa referência, Tarski escolheu o símbolo ‘≠’. Pelas razões já aventadas vamos substituir esse símbolo por ‘□’.

7. **‘é um elemento de’**: é o modo de se referir à condição de um elemento (indivíduo) vir (ter origem, inicialmente estar entre os membros) de uma classe específica. Dizemos que o elemento em questão *pertence à classe*, como se carregasse consigo uma característica que permitisse dizer de onde veio. Tarski abrevia isso com o símbolo ‘□’, que substituiremos por ‘C’.

8. **‘não é um elemento de’**: é o modo de se referir à condição oposta descrita em (7). Tarski escolhe para abreviação ‘□’. Nós usaremos ‘C□’.

9. **‘indivíduo’**: é o modo de se referir a um elemento dentro de uma classe. Por exemplo, ‘Torre Eiffel’ é o indivíduo da ‘classe dos monumentos que identificam a França’ (pode ou não ser o único indivíduo na classe).

10. **‘classe’**: é o modo de se referir à condição de certa característica comum reunir indivíduos. Por exemplo, ‘Torre Eiffel’, ‘Arco do Triunfo’, ‘Notre-Dame’, ‘Louvre’ têm características comuns que permitem reuni-los na ‘classe dos monumentos que identificam a França’, enquanto ‘moais’, ‘zigurates’, ‘Golden Gate’ não permite reuni-los segundo o *critério discriminatório* da classe. Em geral, o *critério discriminatório* é o nome da classe (por exemplo, ‘classe dos humanos’, ‘classe dos números naturais’, ‘classe dos primos’ etc.).

11. **‘classe nula’**: é o modo de se referir ao *conjunto vazio*, isto é, à reunião dos indivíduos ausentes (por exemplo, é nula a ‘classe de todos os livros que Tarski escreveu originalmente em grego’).

12. **‘classe de todo  $x$  tal que’**: é o modo de se referir a uma classe de onde vem a característica que discrimina um indivíduo. Por exemplo, ‘classe de todo  $x$  tal que  $x$  tenha mais de 50 anos de idade’.

É bom falarmos que, tecnicamente, existe *metaclassa* (que seria a classe das expressões metalinguísticas que falam das expressões linguísticas), existe *meta-indivíduo* (que seria a expressão metalinguística que fala da expressão linguística correspondente) etc., porém esses conceitos seriam não só inúteis como também incômodos e só importantes se pretendêssemos construir *a rigor* uma metalinguagem como estamos fazendo com a linguagem.

A metalinguagem de Tarski exigirá também símbolos para falar da equivalência entre classes da linguagem:

[p.171]-1

Também encontramos aqui algumas expressões do domínio da teoria das equivalências de classes e da aritmética dos números cardinais, por exemplo ‘*classe finita*’, ‘*classe infinita*’, ‘*potência de uma classe*’, ‘*numero cardinal*’, ‘*número natural*’ (ou ‘*número cardinal finito*’), ‘*número cardinal infinito*’, ‘0’, ‘1’, ‘2’, ‘<’, ‘>’, ‘<’, ‘>’, ‘+’, ‘-’, ...

Por equivalência de classes entendemos a regra ‘se a classe A é equivalente à classe B, e a classe B é equivalente a classe C, então A é equivalente a classe C’. Uma classe ser equivalente a outra é terem os mesmos indivíduos sob condições discriminatórias diversas. Por exemplo, a ‘classe dos monumentos que identificam a França’ é equivalente à ‘classe dos monumentos que identificam Paris’ se ambas as classe contém unicamente os indivíduos ‘Torre Eiffel’, ‘Notre-Dame’, ‘Arco do Triunfo’ e ‘Louvre’.

Por aritmética dos números cardinais entendemos os axiomas que permite conceituar ‘soma’ e ‘produto’ aritméticos e cujo axioma fundamental é o *Axioma da Escolha*.

Prosseguindo com o glossário anterior:

13. **‘classe finita’**: é o modo de se referir a uma classe que possui um número limitado de elementos. Por exemplo, a ‘classe das letras do alfabeto latino que permite escrever o nome TARSKI’.

14. **‘classe infinita’**: é o modo de se referir à classe que possui um número ilimitado de indivíduos. Por exemplo, a ‘classe dos números pares divisíveis por 4’.
15. **‘potência de uma classe’**: é o modo de se referir à reunião de todos os subconjuntos de elementos de uma classe. A potência de uma classe é dada por  $2^n$ , onde  $n$  é o número de elementos da classe.
16. **‘número cardinal’**: é o modo de se referir ao número que indica a quantidade dos elementos de uma classe. Por exemplo, **3** é o cardinal da classe **A**:{**1, 2, 3**}, pois **A** tem três indivíduos (os indivíduos **1, 2** e **3**).
17. **‘número natural’** ou **‘número cardinal finito’**: é o modo de se referir ao número que representa o cardinal de uma classe finita. Por exemplo, o número natural **3** é o cardinal de uma classe limitada a três elementos.
18. **‘número cardinal infinito’**: analogamente como no (17), é o modo de se referir ao cardinal de uma classe de quantidade ilimitada de indivíduos.
19. **‘0’, ‘1’, ‘2’**: modos de se referir aos cardinais das classes.
20. **‘<’, ‘>’, ‘≤’, ‘≥’, ‘+’, ‘-’**: modos de abreviar as referências (respectivamente) *‘o antecedente é menor que’*, *‘o antecedente é maior que’*, *‘o antecedente é menor ou igual a’*, *‘o antecedente é maior ou igual a’*, *‘o antecedente reuni-se a’*, *‘o antecedente disjunta-se de’*

[p.171]-2

Finalmente, vou precisar de alguns termos da lógica das relações. A classe de todos os objetos  $x$  para cada um dos quais corresponde pelo menos um objeto  $y$  tal que  $xRy$  (isto é,  $x$  está na relação  $R$  com  $y$ ) será chamada *o domínio da relação binária ou de dois termos  $R$* . Analogamente, *o contradomínio da relação  $R$*  é o conjunto de todos os objetos  $y$  para os quais há pelo menos *um* objeto  $x$  tal que  $xRy$ . No caso de relações multi-termo, não falamos de domínio e contradomínio, mas do  $1^{\circ}$ ,  $2^{\circ}$ ,  $3^{\circ}$ , ...,  $n$ -ésimo *domínio da relação*. Uma relação tendo somente um elemento  $x$  em seu domínio e somente um elemento  $y$  em seu contradomínio (uma relação que vale somente entre  $x$  e  $y$  e entre nenhuns outros dois objetos) é chamada de *par ordenado, em que  $x$  é o primeiro e  $y$  o segundo membro*. Analogamente, usando relações multi-termos, nós definimos *triplos ordenadas, quádruplas* e, em geral,  *$n$ -uplas ordenadas*. Se, para cada objeto  $y$  pertencente ao contradomínio de uma relação binária  $R$ , há *somente um* objeto  $x$  tal que  $xRy$ , então a relação é chamada *uni-multi*.

A metalinguagem deve explicar como os indivíduos das classes da linguagem se relacionam entre si e entre as classes. Para isso, torna-se necessário o uso de uma *lógica de relações*: *domínio da relação binária* (ou *de dois termos*)  $R$  (classe de todos os objetos  $x$  que tem correspondência com um único objeto  $y$ , tal que  $xRy$  – isto é,  $x$  está na re-

lação  $R$  com  $y$ ); *contradomínio da relação  $R$*  (conjunto de todos os objetos  $y$  para os quais existe um e um só objeto  $x$  tal que  $xRy$ ). Tarski precisa dessa noção básica da Teoria dos Conjuntos, porque em seus teoremas as classes de nomes de sentença, sequência de classes, classes de expressões funcionam como domínios e contradomínios, são conjuntos. Usar de domínios e contradomínios exige a seguinte teoria:

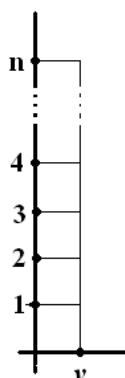
- A) No caso de relações multi-termo (onde  $x$  tem correspondente mais de um  $y$  ou um  $y$  é correspondência de mais de um  $x$ ), não se fala de domínio ou contradomínio, mas de  $1^{\circ}$ ,  $2^{\circ}$ ,  $3^{\circ}$ ,... ...,  $n^{\circ}$ . *domínio da relação*.
- B) A relação que tem só um elemento  $x$  no domínio e só um elemento  $y$  no contradomínio (uma relação que só se faz entre  $x$  e  $y$  e entre nenhuns outros dois objetos) é chamada *par ordenado*, onde  $x$  é o primeiro e  $y$  é o segundo membro. Se a relação for multi-termo, temos *triplas ordenadas*, *quádruplas ordenadas*, *n-uplas ordenadas*, e assim por diante.
- C) Se para cada objeto  $y$  pertencente ao contradomínio de uma relação  $R$  duplo, triplo, quádruplo,... *n-uplo*-termo há *somente um* objeto  $x$  tal que  $xRy$ , então a relação  $R$  é chamada *uni-multi* (isto é, de um no domínio para mais de um no contradomínio).

As interpretações metalinguísticas envolvendo a teoria das relações entre *domínio* e *contradomínio* permitiram introduzir a noção de *ordem* que é usada na noção de *sequência*. Primeiro Tarski vai apontar a noção metalinguística de *sequência infinita*.

[p.171]-3

O conceito de *sequência* participará em grande parte do que segue. Uma *sequência infinita* é uma relação uni-multi cujo contradomínio é a classe de todos os números naturais com exceção do zero.

Entende-se por sequência um número finito ou infinito de símbolos postos lado-a-lado. Por exemplo, @#\$&§ é um sequência finita de símbolos. Outra sequência seria ffffffffffffff. Poderíamos ter uma quantidade muito grande (poderia ser até mesmo infinita) de sequências. A característica que queremos destacar de sequências assim é que são *símbolos postos lado a lado*. Seria incômodo falar dessa característica e citar todas as sequências possíveis, por isso é mais cômodo explicar como os símbolos são postos lado a lado. Uma sequência é uma função onde temos um símbolo de variável, por exemplo  $v$ , no domínio e os números naturais (1, 2, 3,... ... n) no contradomínio:



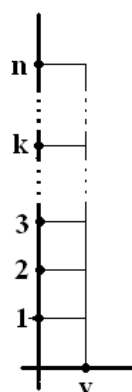
Desse modo temos o produto cartesiano  $v \times \mathbb{N} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n, \dots\}$ . Com isso dizemos que uma sequência é uma ordenação onde há um primeiro símbolo seguido de um segundo símbolo seguido de um terceiro símbolo... e assim por diante, isto é, uma sequência é  $v_1 v_2 v_3 v_4 \dots v_n \dots$ . Em outras palavras *existe um 'sentido' para a leitura de uma sequência de símbolos (de um primeiro símbolo para símbolos subsequentemente posteriores)*, pois é possível identificar o primeiro elemento do conjunto dos números naturais e o símbolo  $v_i$  onde  $i = 1$  pode ser reconhecido – graças a essa ordenação do conjunto  $\mathbb{N}$  – como o primeiro símbolo da sequência. Uma vez que  $\mathbb{N}$  é infinito, a sequência é infinita. Entende-se por que  $i \neq 0$ : porque 'zero' indica ausência de índice, isto é, ausência de símbolo.

Essa idéia permite entender o conceito de *sequência finita*:

[pp.171-172]  
Da mesma

maneira, o termo '*sequência finita de n termos*' denota toda relação uni-multi em que o contradomínio consiste em todos os números naturais  $k$  tal que  $1 \leq k \leq n$  (em que  $n$  e qualquer número natural distinto de zero). O único  $x$  que satisfaz a fórmula  $xRk$  (para uma dada sequência  $R$  e um dado número natural  $k$ ) é chamado *o k-ésimo termo da sequência R*, ou *o termo da sequência R com índice k*, e é denotado por ' $R_k$ '.

No caso de uma sequência finita, ela também é uma função, mas com contradomínio finito, cujos elementos são os  $k$  primeiros números naturais. Assim é possível construir uma sequência finita  $v_1 v_2 v_3 v_4 \dots v_k$ . Temos no gráfico cartesiano:



O único  $x$  que satisfaz a fórmula  $xRk$  é o único símbolo da sequência que está na posição  $v_k$  a partir do primeiro símbolo (a posição  $v_k$  vem do par ordenado  $(v, k)$  visualizado no gráfico, por isso  $x$  pode ser representado por  $R_k$ , que é o mesmo que dar a  $k$ -ésima relação entre  $v$  e  $\square$ , isto é, dar o par ordenado  $(v, k)$ ).

[p.172]-1

Dizemos que *as sequências  $R$  e  $S$  diferem no máximo na  $k$ -ésima posição*, se quaisquer dois termos correspondentes  $R_l$  e  $S_l$  dessas sequências são idênticos, com exceção dos  $k$ -ésimos termos  $R_k$  e  $S_k$ , que devem ser distintos.

Para duas sequência serem distintas, basta terem ao menos um símbolo distinto. Dizemos qual é a diferença entre as duas sequências identificando posição da sequência onde os símbolos são diferentes em ambas. Se sabemos que duas sequências são idênticas até certa posição, dizemos que seus símbolos são respectivamente e posicionalmente os mesmos até essa posição máxima, onde diferem. Por exemplo:

Sequência geral:  $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9\dots$

Sequência R: 123456&89...

Sequência S: 123456789...

$R$  e  $S$  são idênticas em qualquer posição  $l < 7$  e diferem na *sétima posição* (não importando se o restante – isto é,  $l > 7$  – é idêntico em símbolos e posição). Neste exemplo, então as sequências diferem em  $R_7$  e  $S_7$ . Note que sabemos que elas diferem na *sétima posição* porque a *sequência geral* permite-nos ordenar os símbolos de qualquer sequência  $R$  ou  $S$  e nos dar a posição de cada símbolo. Cada símbolo da sequência é chamado de *termo*.

[p.172]-2

Nas páginas seguintes, vamos tratar de seqüências de classes e de números naturais, isto é, com seqüências cujos termos são todos ou classes de indivíduos ou números naturais.

Durante a construção da linguagem formalizada, Tarski construirá seqüências que são classes de indivíduos (classe  $x$  – que neste comentário chamamos **X**, por exemplo; classe  $y$  – que neste comentário chamamos **Y**; etc.), ou seqüências que são os  $k$  primeiros números de  $\mathbb{N}$ .

[p.172]-3

Em particular, uma seqüência cujos termos todos são classes que estão incluídas em uma dada classe  $a$  será chamada uma *seqüência de subclasses da classe a*.

Uma seqüência pode ter no lugar de cada termo um *subconjunto* (subclasse) de uma classe determinada. Isso já deixa implícito que é possível ordenar (determinar qual é a primeira subclasse) os subconjuntos de uma classe. A ordenação dos subconjuntos de um conjunto passa pela teoria da *potência de um conjunto*.

Com este estudo das seqüências encerra-se o estudo das expressões metalingüísticas de um caráter lógico geral. Passemos ao segundo tipo de expressões.

#### **4. Expressões metalingüísticas TIPO II: expressões de termos específicos da metalinguagem de um caráter descritivo-estrutural**

O segundo tipo de expressões dentro da metalinguagem é descrito por Tarski como segue:

[p.172]-4

Em contraste ao primeiro tipo de expressão, as do segundo tipo são *termos específicos da metalinguagem de caráter descritivo-estrutural*, e, assim, nomes de símbolos ou expressões concretos da linguagem do cálculo de classes.

Tarski está apontando que assim como um nome descritivo-estrutural impede a ambigüidade a respeito de um termo na linguagem, a descrição-estrutural faz o mesmo na metalinguagem. Só para retornar a um exemplo antigo, a palavra ‘NEVE’ pode ser estruturalmente descrita como ‘*letra ene, seguida da letra e, seguida da letra ve, seguida da letra e*’. Esse tipo de descrição permite que o símbolo ou expressão da linguagem sejam referidos pela metalinguagem sem risco de ambigüidade.

[p.172]-5

Entre estes estão, em primeiro lugar, os termos ‘o símbolo de negação’, ‘o símbolo de soma lógica’, ‘o símbolo do quantificador universal’, ‘o símbolo de inclusão’, ‘a  $k$ -ésima variável’, ‘a expressão que consiste em duas expressões sucessivas  $x$  e  $y$ ’ e ‘expressão’. Como abreviações dos primeiros seis termos, usarei os símbolos ‘ $ng$ ’, ‘ $sm$ ’, ‘ $un$ ’, ‘ $in$ ’, ‘ $v_k$ ’, e ‘ $x \sqcap y$ ’ (o símbolo ‘ $v$ ’, então, denota a sequência cujos termos são as sucessivas variáveis  $v_1, v_2, v_3, \dots$ ).

Esse segundo tipo de expressão são os nomes de sinais concretos ou de expressões da linguagem de cálculo de classes (linguagem formal). São os nomes que nos vêm à mente quando vemos as constantes vistas em [pp.168-169] escritas nas fórmulas da linguagem formalizada (linguagem-objeto da metalinguagem). Podemos dizer que são ‘traduções metalinguísticas’ do símbolo lingüístico.<sup>47</sup> Tais nomes são:

- A) nome ‘o sinal de negação’, que se abrevia ‘ $ng$ ’; é a tradução do símbolo lingüístico ‘ $N$ ’ na notação polonesa e ‘ $\neg$ ’ na mais usual.
- B) nome ‘o sinal lógico de soma lógica’, que se abrevia ‘ $sm$ ’; é a tradução do símbolo lingüístico ‘ $A$ ’ na notação polonesa e ‘ $\sqcup$ ’ na mais usual.
- C) nome ‘o sinal de quantificador universal’, que se abrevia ‘ $un$ ’; é a tradução do símbolo lingüístico ‘ $\Pi$ ’ na notação polonesa e ‘ $\forall$ ’ na mais usual.
- D) nome ‘o sinal de inclusão’, que se abrevia ‘ $in$ ’; é a tradução do símbolo lingüístico ‘ $I$ ’ na notação polonesa e ‘ $\sqsubset$ ’ na mais usual.
- E) nome ‘a  $k$ -ésima variável’, que se abrevia ‘ $v_k$ ’; é a tradução do símbolo lingüístico  $x_k$  (lembrando que na notação de Tarski o  $k$  está no lugar de traços, mas que na nossa notação mais usual o índice  $k$  assume valor numérico). Já vimos anteriormente como, na metalinguagem, o sinal ‘ $v$ ’

<sup>47</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.281, Tarski escreveu a respeito deste segundo tipo de expressão metalingüística (que ele chamou de ‘categoria’ no trabalho de 1933 de onde retiramos a passagem que se segue): que são “conceitos específicos de um caráter descritivo-estrutural que designa as expressões da linguagem original, suas propriedades estruturais, e suas relações estruturais mútuas. Os seguintes termos são tomados como conceitos primitivos da metalinguagem: ‘expressão’ ou antes ‘a classe de todas as expressões’, em símbolos ‘ $A$ ’; ‘símbolo de negação’ – ‘ $v$ ’; ‘símbolo de implicação’ – ‘ $\iota$ ’; ‘quantificador universal’ – ‘ $\pi$ ’; ‘variável com  $k$  traços abaixo e  $l$  traços acima’ (ou ‘a  $k$ -ésima variável de  $l$ -ésima ordem’) – ‘ $\phi_k$ ’; finalmente ‘expressões que consistem de duas expressões sucessivas  $\zeta$  e  $\eta$ ’ simbolicamente ‘ $\zeta \sqcap \eta$ ’.” Aqui vem uma nota de rodapé 2 que diz: “Este último conceito primitivo pode ser substituído pelo conceito ‘o  $n$ -ésimo símbolo da parte inicial da expressão  $\zeta$ ’. O símbolo ‘ $A$ ’ pode ser definido pelo significado dos conceitos indefinidos restantes.”

denota uma sequência de símbolos desde um primeiro símbolo até um último símbolo em uma expressão. Conservando a idéia de sequência, vamos restringir essa idéia agora apenas às variáveis de linguagem e assim, de ora em diante, o símbolo  $v$  não representará mais um sequência de símbolos linguísticos, mas uma sequência – finita ou infinita – de *variáveis linguísticas*. Desse modo, as variáveis metalinguísticas sucessivas  $v_1, v_2, v_3, \dots$ <sup>48</sup> estão falando das variáveis linguísticas sucessivas  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ; isto significa que os termos iniciais de uma expressão linguística (que são termos constantes) não serão mais, por hora em diante, referidos pelos  $v_i$ . Os  $v_i$  ficarão apenas para a parte da sequência da expressão linguística que possui variáveis ( $x_1, x_2, x_3, \dots$  ou  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , dependendo da classe, se **X**, se **Y**); Os primeiros símbolos da sequência da expressão linguística – que são símbolos de constantes na notação polonesa – receberam símbolos metalinguísticos especiais (cláusulas (A), (B), (C), (D), que já vimos acima).

Atenção: existem muitas expressões (infinitamente até), e podemos unir duas ou mais expressões simples para obter outra mais complexa. Na linguagem existe, por exemplo uma expressão  $x$  (então ela é a classe, ou *subclasse* – não podemos dizer agora –, de símbolos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ ) e existe uma expressão  $y$  (então ela é a classe, ou *subclasse* – não podemos dizer agora –, de símbolos  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$ ) distinta de  $x$  (distinta já na primeira ou na  $k$ -ésima variável, isso não é importante agora). Podemos formar uma expressão complexa fazendo  $y$  seguir a  $x$  na linguagem e a metalinguagem deve falar disso, dessa sucessão de expressões. Dai o nome seguinte na cláusula (F):

F) nome ‘a expressão que consiste de duas expressões sucessivas  $x$  e  $y$ ’, que se abrevia ‘ $x \square y$ ’.

---

<sup>48</sup> A rigor, temos uma *classe metalinguística*  $v$  cujos indivíduos metalinguísticos são  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, \dots, v_n$ , onde para qualquer  $v_i$ , temos  $i \square \square$ .

[p.172]-6

Esses

termos já foram usados ao introduzir o leitor na linguagem do cálculo de classes. Espero que, graças às explicações já dadas, nenhuma dúvida reste concernente ao significado desses termos.

Tarski apenas lembra que os nomes metalingüísticos dados até agora são de símbolos cuja função na linguagem-objeto conhecemos, por isso dispensa maiores explicações (explicações essa que acreditamos terem sido dadas por nós em volume bastante expressivo).

[p.172]-7

Com a ajuda desses termos (e possivelmente de termos lógicos gerais), todos os outros conceitos de tipo descritivo-estrutural da metalinguagem podem ser

As expressões vistas em (A), (B), (C), (D), (E) e (F) (que são do TIPO II dentro da metalinguagem) sozinhas ou em associação com as expressões metalingüísticas de um caráter lógico geral (TIPO I) conseguem definir qualquer outro conceito metalingüístico que venha a ser necessário para se definir algum termo da linguagem.

[p.172]-8

É fácil ver que toda expressão simples ou composta da linguagem sob investigação tem um nome individual na metalinguagem similar aos nomes descritivo-estruturais da linguagem coloquial (cf. pp.156 e 157). Por exemplo, a expressão simbólica  $((ng \square in) \square v_1) \square v_2$  pode servir como um nome da expressão  $'Nix,x,.'$

As páginas 156 e 157 citadas por Tarski são de seu trabalho<sup>49</sup>, onde aprendemos que toda expressão tem um nome que pode ser a própria expressão entre aspas (no caso das linguagens coloquiais) ou símbolos metalingüísticos que se coloquem como referência à expressão (solução própria para as linguagens formalizadas). Assim, já vimos, *I* tem o nome *senal de negação* e este nome metalingüístico pode ser simbolizado por *ng* para não escrevermos o longo e incômodo símbolo *'senal de negação'*<sup>50</sup>. Como exem-

<sup>49</sup> Essa é a paginação vista de TARSKI, A.; [1983b].

<sup>50</sup> Note que *'senal de negação'* não é uma expressão nem na linguagem-objeto (que Tarski escolheu ser o cálculo de predicados, ou álgebra booleana), nem na metalinguagem preparada por Tarski para falar da linguagem-objeto. Porque nem na linguagem nem na metalinguagem apresentamos símbolos como *'s'* ou *'l'* (que aparece em *senal*) ou *'d'* ou *'e'* (que aparece em *de*) ou *'g'* (que aparece em *negação*), por exemplo. E mesmo que alguém dissesse que esses (e as outras letras) poderiam ter sido introduzidas como definições, ainda haveria o problema de dizer de que modo a sequência das letras e sinais gráficos

plo, Tarski toma a expressão ‘ $NIx,x,$ ’. Um nome adequado para ‘ $NIx,x,$ ’ seria ‘ $((ng \square in) \square v_1) \square v_2$ ’, onde o símbolo ‘ $\square$ ’ denota a sucessão dos símbolos na linguagem<sup>51</sup>. Os parênteses que aparecem no nome descritivo-estrutural ‘ $((ng \square in) \square v_1) \square v_2$ ’ não têm outra função senão dizer quais conjuntos de símbolos antecedem quais outros – não têm outra função especial: não estão ali para dar margem a interpretações de relações semânticas entre os símbolos metalingüísticos. Apenas indicam o modo como expressões sucessivas ocorrem dentro de uma expressão complexa, apontando que a leitura descritivo-estrutural de ‘ $((ng \square in) \square v_1) \square v_2$ ’ é: *a expressão ‘negação’ antecede o expressão ‘inclusão’, e ambas essas expressões (conservando sua ordem de sucessão) antecedem a expressão correspondente à primeira variável da sequência de variáveis da expressão complexa total, e ambas as expressões primeiras e esta última expressão correspondente à primeira variável (conservando a ordem de sucessão) antecedem a expressão correspondente à segunda variável da sequência de variáveis da expressão complexa total.*

Porque não podemos ler de modo mais simples: *símbolo de negação antecede o símbolo de inclusão que antecede o símbolo de primeira variável que antecede o símbolo de segunda variável?* Porque, por exemplo, não é só o símbolo de primeira variável que vem antes do símbolo de segunda variável, mas todos os outros símbolos *em ordem*<sup>52</sup>. Tarski já havia falado disso, no início deste parágrafo 2 de seu artigo que vimos comentando até aqui: “Assim, a expressão ‘ $NIx,x,$ ’ é composta das duas expressões sucessivas ‘ $N$ ’ e ‘ $Ix,x,$ ’, ou das expressões ‘ $NI$ ’ e ‘ $x,x,$ ’ ou, finalmente, das expressões ‘ $NIx,$ ’ e ‘ $x,$ ’.”<sup>53</sup> Entendemos, portanto, que a metalinguagem faz a descrição estrutural descreve também a forma das expressões simples da qual consiste a expressão complexa final, guardando a ordem de sucessão dos símbolos dentre de cada expressão simples até a composição final:

*s,i,n,a,l,d,e,n,e,g,a,ç,ã,o* formaria uma expressiva. Assim, para evitar um sem número de dificuldades, ‘*signal de negação*’ não é uma expressão, mas um símbolo *sem partes*.

<sup>51</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.281, Tarski escreveu: “Por exemplo, a expressão ‘ $\square x \square \square x \square \square x \square \square \square$ ’ é denotada pelo nome individual ‘ $\pi \square \phi_1^1 \square \phi_1^1 \square \phi_1^2$ ’.”

<sup>52</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.281, Tarski escreveu na *nota de rodapé 3*: “Em referência à lei associativa que a operação  $\zeta \square \eta$  cumpre (veja abaixo, Ax. 4) que a omissão de parênteses em expressões da forma ‘ $(\zeta \square \eta) \square \delta$ ’, ‘ $((\zeta \square \eta) \square \delta) \square \xi$ ’ não pode dar-se sem alguma confusão”.

<sup>53</sup> TARSKI, A.; [1983b], p.169.

QUADRO I	
linguagem	Descrição estrutural metalinguística
$N$	$ng$
$NI$	$ng \square in$
$NIx,$	$(ng \square in) \square v_1$
$NIx,x,,$	$((ng \square in) \square v_1) \square v_2$

Pois bem, como queremos traduzir a notação polonesa usada por Tarski para uma notação mais usual, traduzimos  $NIx,x,,$  como  $\square(x_1 \square x_2)$ . Precisaremos de um nome metalinguístico para os símbolos ‘)’ e ‘(’, que são desnecessários na linguagem-objeto de Tarski<sup>54</sup>. Usaremos os nomes metalinguísticos ‘parênteses direito’ e ‘parênteses esquerdo’, respectivamente para ‘)’ e ‘(’, e usaremos como abreviação, respectivamente, o símbolo ‘pd’ e ‘pe’. Obviamente, os símbolos lingüísticos, ‘□’, ‘□’, ‘x<sub>1</sub>’ e ‘x<sub>2</sub>’ continuam simbolizados para nós como Tarski quis para os seus (além de usarmos o símbolo ‘□’ com a mesma função dada por Tarski): ‘ng’, ‘in’, ‘v<sub>1</sub>’ e ‘v<sub>2</sub>’, respectivamente. Assim:

QUADRO II	
Linguagem usual	Descrição estrutural metalinguística <sup>55</sup>
$\square(x_1 \square x_2)$	$[[[ng \square pe] \square v_1] \square in] \square v_2] \square pd$

Fica óbvio que a intenção de Tarski com seus nomes metalinguísticos estruturais não sofre prejuízos se escolhermos trabalhar com uma notação mais usual.

[p.172]-9

O fato de que a metalinguagem contenha ambos um nome individual e uma tradução de toda expressão (e em particular de toda sentença) da linguagem estudada participará decisivamente na construção da definição de verdade, como o leitor verá na próxima seção.

<sup>54</sup> Mas ele não usou parênteses em  $((ng \square in) \square v_1) \square v_2$ ? Já explicamos qual foi a exigência que os reclamou e, além disso, Tarski os usou na metalinguagem, onde ele introduz símbolos à medida que necessita, sem defini-los, apenas aceitando seu sentido intuitivo (também já explicamos todas as dificuldades que resultariam de construir uma metalinguagem com o rigor com que se está pretendo construir a linguagem).

<sup>55</sup> Usamos os símbolos ‘]’ e ‘[’ porque ficaria bastante fora de sentido usar ‘)’ e ‘(’ e suas abreviações metalinguísticas ‘pe’ e ‘pd’. Faremos, neste trabalho, ‘]’ e ‘[’ terem na metalinguagem para as nossas traduções em linguagem usual da notação polonesa a mesma função que Tarski quis para ‘)’ e ‘(’ em sua metalinguagem.

O ‘nome individual’ é cada um dos nomes vistos nas cláusulas (A), (B), (C), (D), (E) e (F) que permitem escrever nomes adequados como o do exemplo  $((ng \square in) \square v_1) \square v_2$  (ou no nosso caso  $[[[ng \square pe] \square v_1] \square in] \square v_2] \square pd$ ). As traduções para a metalinguagem são a referência ao que ocorre na linguagem, como quando dizemos ‘*não é verdade que  $a \square b$* ’ quando Tarski escreve  $NIx,x,$ , ou para nós – como queremos escrever mais usualmente  $\square(x_1 \square x_2)$  no lugar de  $NIx,x,$ , – ‘*não é verdade que  $a \square b$* ’.<sup>56</sup>

### 5. As variáveis metalingüísticas

As variáveis metalingüísticas são aquelas que podem ser substituídas por quaisquer constantes que possam representar as cinco relações internas da metalinguagem. Em outras palavras, elas não existem para se referir às variáveis da linguagem (para isso já existe o símbolo  $v_i, i \square \square$ <sup>57</sup>). Elas são *variáveis dentro da metalinguagem e da metalingüagem*. Elas estão no lugar de indivíduos e de classes de indivíduos metalingüísticos.

[p.173]-1

Como variáveis na metalinguagem, vou usar os símbolos: (1) ‘*a*’, ‘*b*’; (2) ‘*f*’, ‘*g*’, ‘*h*’; (3) ‘*k*’, ‘*l*’, ‘*m*’, ‘*n*’, ‘*p*’; (4) ‘*t*’, ‘*u*’, ‘*w*’, ‘*x*’, ‘*y*’, ‘*z*’; e (5) ‘*X*’, ‘*Y*’. Nessa ordem eles representam os nomes de: (1) classes de indivíduos de caráter arbitrário,<sup>1</sup> (2) sequências de tais classes, (3) números naturais e sequências de números naturais, (4) expressões e sequências de expressões, e (5) classes de expressões.

<sup>1</sup> Apesar de que nos caso (1) e (4) eu use variáveis distintas, aqui trato expressões como classes especiais de indivíduos, nominalmente como classes de séries concretas de símbolos impressos (cf. p.156, nota 1).

Temos descrito aqui as seguintes cinco relações metalingüísticas:

(1) *Classes de indivíduos de caráter arbitrário*. Símbolos: ‘*a*’, ‘*b*’. Tarski anteriormente<sup>58</sup> já deixou entrever que o símbolo ‘*a*’ seria usado na metalinguagem para falar das classes da linguagem.

<sup>56</sup> Para saber a relação entre ‘ $\square$ ’ e ‘ $\square$ ’ para nosso trabalho, ver o que ficou estabelecido no comentário ao [pp. 169-179].

<sup>57</sup> Ver cláusula (E) em [p.172]-5.

<sup>58</sup> Ver [p.170]-4.

(2) *Sequências de classes de indivíduos de caráter arbitrário*. Símbolos: ‘*f*’, ‘*g*’, ‘*h*’. Trata-se das sucessões de classes que cabem, cada uma segundo sua vez, no lugar das variáveis da linguagem. Por exemplo, há uma primeira classe que contém os indivíduos lingüísticos que cabem na variável  $x_1$  da linguagem, seguida da segunda classe para a variável  $x_2$  da linguagem, seguida da terceira classe para a variável  $x_3$  da linguagem, e assim por diante. Pode haver mais seqüências, para as variáveis  $y$  da linguagem, para as  $z$  etc. Por ora, consideremos que encontraremos apenas três seqüências e façamos ser ‘*f*’, ‘*g*’, ‘*h*’ os nomes dessas seqüências de classes;

(3) *Números naturais e seqüências de números naturais*. Símbolos: ‘*k*’, ‘*l*’, ‘*m*’, ‘*n*’, ‘*p*’. Já que existem seqüências e ordem dentro das seqüências, é necessário dizer quem vem antes e quem vem depois, isto é: a *sucessão* de símbolos dentro da metalinguagem. Se um símbolo indica algo que antecede outra coisa em uma seqüência, esse símbolo receberá um *índice* que ora será um número (em geral ou 1 ou 2) ou uma letra do alfabeto latino, de modo que aquilo que vem antes recebe o *índice*  $k$  e o que sucede recebe o *índice*  $l$ . Se for um número amplo de símbolos, indicaremos o grupo com *índices de ordem menor* por  $m$  e o de *índices de ordem maior* por  $n$ . O *índice*  $p$  indicará um grupo de seqüência arbitrário (isto é, que não diremos se seus *índices* são de ordem maior ou menor do que outro). Isso ocorre porque é preciso apontar a *posição de um termo lingüístico segundo a ordem dos números naturais na seqüência onde esse símbolo aparece*. Assim ‘*k*’, ‘*l*’, ‘*m*’, ‘*n*’, ‘*p*’ são nomes de números naturais e seqüências de números naturais.

(4) *Expressões e seqüências de expressões*. Símbolos: ‘*t*’, ‘*u*’, ‘*w*’, ‘*x*’, ‘*y*’, ‘*z*’. Essa simbologia é necessária porque as expressões lingüísticas são longas e podem ser abreviadas por nomes de símbolos unitários. Nada impede, porém, que nos comentários ao texto do artigo de Tarski – que vimos fazendo – aproveitemos tais símbolos acrescentando-lhes índices para discriminar variáveis dentro das expressões. Assim, por exemplo, eventualmente falaremos de certa variável  $w_k$  dentro da expressão  $w$ , etc.

(5) *Classes de expressões*. Símbolos: ‘*X*’, ‘*Y*’. Tarski designa uma classe lingüística por  $x$  ou  $y$ . Nós designamos uma classe lingüística em nossa notação usual pelas maiúsculas negritadas **X** e **Y**. Quando a metalinguagem pretende falar de uma classe de *expressões impressas* (expressões de fato, expressões concretas, expressões conhecidas), Tarski prefere usar  $a$  ou  $b$  (cláusula (1)). Para falar da classe de *expressões*

*conhecíveis* (passíveis de serem impressas, de se tornarem concretas, mas que não são por serem em número infinito ou muito grande), Tarski prefere usar as maiúsculas itálicas *X* e *Y*. Nós, em uma linguagem mais usual Façamos ser ‘**X**’, ‘**Y**’ os nomes dessas classes de expressões.

#### **4. Resumo da metassintaxe**

Será de grande utilidade para consultas uma tabela que mostre o tipo de raciocínio que relaciona os símbolos da linguagem e os símbolos da metalinguagem. O quadro seguinte pretende ser útil para essas consultas.

<b>QUADRO III</b>					
(n.e. = 'não existe', ...: símbolo, v: variável, s: sentença)					
natureza	Notação Polonesa	Notação mais usual	Símbolo metalinguístico	Nome metalinguístico	Interpretação metalinguística
constante	$N$	$\square$	$.\square.\square.\square$	$ng$	<i>não</i> ou <i>não é verdade que</i>
“	$A$	$\square$	$+$	$sm$	<i>ou</i>
“	$\Pi$	$\square$	$\bigcap_v^s$	$un$	<i>para todo</i>
“	$I$	$\square$	$\square$	$in$	<i>está incluso em</i>
“	$AN... \dots$ $(NAx,x,)$	$.\square.\square.\square \square \dots$ $(x \square_1 \square \square x_2)$	$.\square.\square.\square + \dots$ $(v \square_1 \square + v_2)$	n.e.	<i>se..., então</i>
“	$NNAN... \dots NAN... \dots$ $NNANx,x,,NANx,,x,$	$\neg(\neg(\neg... \square ...) \square \neg(\neg... \square ...))$ $\neg(\neg(\neg x_1 \square x_2) \square \neg(\neg x_2 \square x_1))$	$\overline{\dots + \dots + \dots + \dots}$ $\overline{v_1 + v_2 + v_2 + v_1}$	n.e.	<i>se e somente se</i>
“	$NAN...N... \dots$ $(NANx,Nx,,)$	$\neg(\neg... \square \neg...)$ $\neg(\neg x_1 \square \neg x_2)$	$\overline{\dots + \dots}$	n.e.	<i>e</i>
“	IM	$\square(x)$	$\bigcup_v^s$	n.e.	<i>para algum x</i> ou <i>há um x tal que...</i>
“	IM	$\square$	$\square$	n.e.	<i>não está incluso em</i>
“	IM	$=$	$\approx$	n.e.	<i>é idêntico a</i>
“	IM	$\neq$	$\square$	n.e.	<i>é distinto de</i>
“	IM	$\square$	$\in$	n.e.	<i>é um elemento de</i> ou <i>pertence</i>
“	IM	$\square$	$\in \square$	n.e.	<i>não é um elemento de</i> ou <i>não pertence</i>
variável	$x, x,, x,,, \dots$	$x_1 x_2 x_3 \dots$	$v_1 v_2 v_3 \dots$	n.e.	<i>indivíduo</i>
-	$X Y Z$	$X Y Z$	$X Y Z$	n.e.	<i>classe</i>
					<i>classe nula</i>
					<i>classe de todo x tal que</i>

## CAPÍTULO 3

### A AXIOMÁTICA DA METALINGUAGEM

Toda linguagem deve *obrigatoriamente* ter regras para formar expressões que sejam inteligíveis. É uma série de ‘leis internas’ que dizem como as línguas devem ser escritas. Quando lemos um romance, essas leis não estão explicitadas, mas estão presentes. Quando queremos escrever nosso próprio romance, precisamos aprender a gramática e a sintaxe da língua em que queremos ver impressa a estória.

Do mesmo modo para a linguagem formal. Recebe o nome de *metateoria* o conjunto dos axiomas específicos da metalinguagem e que vão permitir a nós *escrevê-la*. Na verdade, a metateoria inclui o *metacálculo de classes*, mas vamos deixar o metacálculo para o próximo capítulo. Entendamos, então, que a metateoria inclui este e os próximos capítulos, mas na falta de um nome melhor, daremos o nome de *metaaxiomática* para nosso presente estudo, neste capítulo (advertindo que *metaxiomática* é uma palavra não usada por Tarski, pois foi inventada por nós). Tarski anuncia do que tratará como segue:

[p.173]-2

Voltemo-nos agora para o sistema axiomático da metalinguagem.

Assim, trataremos neste capítulo dos *axiomas* metalinguísticos que dizem como a metalinguagem pode e deve ser escrita.

#### 1. Axiomática geral (ou de Russell-Whitehead)

Tarski começa dividindo as duas naturezas de axiomas que regem a metalinguagem:

[p.173]-3

Primeiro,  
deve ficar anotado que - correspondendo aos dois tipos de expressão na metalinguagem - esse sistema contém dois tipos inteiramente distintos de sentenças: os *axiomas lógicos gerais*, que bastam para um sistema suficientemente compreensivo de lógica matemática, e os *axiomas específicos da metalinguagem*, que descrevem certas propriedades elementares, dos conceitos descritivo-estruturais acima, consistentes com nossas intuições.

Em outras palavras, há um sistema axiomático que permitirá à metalinguagem manipular seus símbolos metalingüísticos que se referem aos símbolos e relações lingüísticas e um sistema axiomático que permitirá à metalinguagem manipular os ‘nomes de sentença’, seja na forma descritivo-estrutural, seja na forma de abreviações desses nomes descritivo-estruturais<sup>59</sup>. A respeito da primeira axiomática, Tarski escreve em seguida:

[p.173]-4  
É

desnecessário introduzir explicitamente os tão conhecidos axiomas do primeiro tipo.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Eles podem ser retirados, novamente, de Whitehead, A. N.; Russell, B. A. W (90), cf. p. 156, nota 1.

Na *nota de rodapé 2* Tarski dá a fonte do sistema axiomático que escolheu: o sistema Russell-Whitehead<sup>60</sup>. Consiste de cinco axiomas, mas Tarski fará uso só dos quatro primeiros axiomas<sup>61</sup>. Suas constantes primitivas são unicamente  $\neg$  e  $\square$ . Os cinco axiomas são:

- (1)  $\neg(\alpha \square \alpha) \square \alpha$
- (2)  $\neg\alpha \square (\alpha \square \beta)$
- (3)  $\neg(\alpha \square \beta) \square (\beta \square \alpha)$
- (4)  $\neg(\neg\alpha \square \beta) \square (\neg(\gamma \square \alpha) \square (\gamma \square \beta))$

A única regra de inferência é o *Modus Ponens*. Essa regra é entendida como segue<sup>62</sup>:

$$\frac{\alpha, \neg\alpha \square \beta}{\beta}$$


---

<sup>59</sup>Em TARSKI, A.; [1983e], p.281, Tarski escreveu: “Correspondendo às duas categorias de conceitos da metalinguagem, o sistema de declarações que bastam para o estabelecimento da metadisciplina consiste de dois tipos de proposições: (1) os *axiomas da lógica matemática*, e (2) os *axiomas que estabelecem algumas propriedades básicas dos conceitos primitivos da metalinguagem*.” Por *metadisciplina* Tarski entende serem as regras mais básicas que sustentam a lógica da metalinguagem (ver TARSKI, A.; [1983e], p.280).

<sup>60</sup> A respeito da numeração (90) na citação na *nota de rodapé 2* neste [p.173]-4, Ver nota 31 neste trabalho.

<sup>61</sup> O quinto axioma proposto por Russell e Whitehead seria  $\neg(\alpha \square (\beta \square \gamma)) \square (\beta \square (\alpha \square \gamma))$ , mas Paul Bernays, em 1926, mostrou que este quinto axioma era redundante (podia ser obtido a partir dos outros quatro anteriores).

<sup>62</sup> Ver [p.166]-5.

A interpretação desse *Modus Ponens* é: “ocorre  $\alpha$ ; ou ocorre  $\neg\alpha$ , ou ocorre  $\beta$ ; (como  $\alpha$  ocorreu fica impossível  $\neg\alpha$  ocorrer), então ocorre  $\beta$ ”. No lugar de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  podemos escrever quaisquer sentenças da linguagem (no caso, *sentenças da metalinguagem*, porque Tarski vai usar estes axiomas na metalinguagem)<sup>63</sup>. Esses axiomas e essa regra de inferência permitem escrever quaisquer sentenças dentro da metalinguagem e com elas construir quaisquer argumentos válidos, por mais complexos que sejam.

Apesar de termos descrito os axiomas e a regra de inferência da axiomática de Russell-Whitehead, não nos deteremos em descrever todas as conseqüências próprias do cálculo de classes proposto por Russell e Whitehead. Só lembrando que a metalinguagem que está sendo construída por Tarski no trabalho de 1935<sup>64</sup> serve como exemplo de um cálculo de classe que envolve essa axiomática.

---

<sup>63</sup> A respeito da intuitividade presente na regra *modus ponens*, lemos em ANAND, BHUPINDER. S., [2007], p.6-7, a respeito dessa regra (e também da regra de generalização) na base da PA - axiomática (axiomática da Aritmética de Peano).

“**Meta-teorema:** Se uma fórmula, e.g.  $[R(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ , é um teorema de primeira ordem de uma Aritmética de Peano, então há uma máquina de Turing, T, tal que, dado *qualquer* conjunto de números naturais  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  como entrada, T computará a proposição aritmética  $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$  como VERDADE em um número finito de passos.

“(…), as seguintes regras de Inferência em PA preservam a Turing-computabilidade:

**Modus Ponens:**  $[B]$  segue de  $[A]$  e  $[A \rightarrow B]$ ;

**Generalização:**  $[(\Box x)A]$  segue de  $[A]$ .

“Em outras palavras, se assumimos sob a interpretação padrão que:

Quando as PA-fórmulas  $[A]$  e  $[(A \rightarrow B)]$  interpretam como verdade-tarskiana, então a PA-fórmula  $[B]$  interpreta como verdade-tarskiana;

“então:

$[B]$  interpreta *sempre* como VERDADE Turing-computável se  $[A]$  e  $[(A \rightarrow B)]$  interpretam sempre como VERDADE Turing-computável.

“Similarmente, se assumimos sob a interpretação padrão que:

Se a PA-fórmula  $[A]$  interpreta como verdade-tarskiana, então o mesmo faz a PA-fórmula  $[(\Box x)A]$ ;

“então temos a tautologia:

$[A]$  interpreta *sempre* como VERDADE Turing-computável se  $[A]$  interpreta *sempre* como VERDADE Turing-computável.

“A característica marcante dessa interpretação é que se ‘ $[(\Box x)R(x)]$ ’ – formalmente definido como ‘ $[\neg(\Box x)\neg R(x)]$ ’ – é PA-provável, nós não podemos concluir que deva existir um número natural  $n$  tal que a proposição aritmética  $R(n)$  seja verdadeira. Nós podemos apenas concluir que  $R(n)$  não é sempre Turing-computável como FALSA.

<sup>64</sup> TARSKI, A.; [1983b].

## 2. Axiomática metalinguística

Tarski inicia a sistematização axiomática para os nomes de sentenças. Na verdade, entre os metaxiomas devem estar o axiomas da linguagem-objeto. Isso porque a metalinguagem deve ser capaz de construir a linguagem a respeito da qual deve falar, em especial porque as traduções metalinguísticas das constantes da linguagem-objeto<sup>65</sup> se relacionam entre si do mesmo modo que as constantes que representam fazem na linguagem-objeto. Tarski escreveu em seu artigo de 1944<sup>66</sup>:

“(...). O ponto mais importante (...) é o problema de conferir à metalinguagem um vocabulário suficientemente rico. Mas a solução desse problema segue a natureza particular dos conceitos semânticos. De fato, eles expressam certas relações entre objetos (e estados de coisas) referidos pela linguagem que se referem àqueles objetos. Logo, os enunciados que estabelecem as propriedades essenciais dos conceitos semânticos devem conter tanto a designação dos objetos referidos (assim, as expressões da própria linguagem) quanto os termos que são utilizados na descrição estrutural da linguagem. Estes últimos pertencem ao domínio da chamada *morfologia da linguagem*, e são as designações de expressões individuais da linguagem, de propriedades estruturais das expressões, das relações estruturais entre as expressões, e assim por diante. A metalinguagem que deve formar a base das investigações semânticas deve, assim, conter os dois tipos de expressão: as expressões da linguagem original e as expressões da morfologia da linguagem. Além disso, a metalinguagem, assim como toda outra linguagem, deve conter uma reserva maior ou menor de expressões puramente lógicas. (...)”

Mas a passagem interessante está na *nota de rodapé 3*:

[p.173]-5

Como axiomas do segundo tipo, adotamos os seguintes enunciados:<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Tanto quanto eu saiba, a metateoria nunca antes foi dada na forma de um sistema axiomatizado.

De fato, apesar de já na lógica proposicional desde Frege começar os ecos das vozes daqueles que apontavam a necessidade de uma metateoria, ninguém antes Tarski procurou axiomatizar essa metateoria. Os estudos mais poderosos antes de Tarski foram

<sup>65</sup> Ver [p.172]-5.

<sup>66</sup> *O Estabelecimento da Semântica Científica* in TARSKI, A. [2006], pp. 151-152.

os de Emil L. Post, que em 1921 publicou o artigo *Introduction to a general theory of elementary propositions*<sup>67</sup>. Foi Post quem pela primeira vez estabeleceu com clareza a diferença entre os resultados de um sistema e os resultados *a respeito* de um sistema.

Convencido de ser o primeiro a axiomatizar a metateoria, Tarski segue enunciando os *metaxiomas* (atenção: Tarski nunca usou a palavra *metaxioma*).

[p.173]-6

AXIOMA 1. *ng, sm, un e in são expressões, não havendo duas delas que sejam idênticas.*

Isso é patente<sup>68</sup>. Na verdade, seria melhor dizer que *ng, sm, un e in* são *abreviações de expressões* claramente distintas e inconfundíveis<sup>69</sup>. Basta ver de quem são abreviações (ver [p.172]-5.). Essas abreviações são dos nomes que nos vêm à mente quando interpretamos os símbolos da linguagem. Quando vemos, por exemplo, o

<sup>67</sup> Publicado no *American Journal of Mathematics* 43, pp.163–185 e reimpresso por Jean van Heijenoort em seu trabalho *Logic as calculus and logic as language*, in *Boston Studies in the Philosophy of Science* 3, 1967, pp. 264–283.

<sup>68</sup> Garantir-se pela obviedade é próprio de todo axioma. Porém, em TARSKI, A.; [1983e], p.282 lê-se na nota de rodapé n° 2:

“A obviedade intuitiva não é incontestável. Certas objeções podem ser levantadas em conexão com as declarações existenciais que estão implícitas nos AXS.2 e 3 (na base dessas declarações pode ser provado, entre outras coisas, que o conjunto  $A$  tem o número cardinal  $\aleph_0$ , e é então infinito). Sem penetrar a análise dessas difíceis questões, direi somente que as objeções mencionadas são significativamente mitigadas se assumido: (i) considerar como expressões da linguagem não expressões concretas, mas classes inteiras de inscrições desse tipo, e correspondentemente modificar o sentido intuitivo do remanescente conceito primitivo de metalinguagem; (ii) interpretar o conceito de inscrição tão amplamente quanto possível, para incluir não só inscrições manuscritas, mas também todo corpo material (ou figuras geométricas) de forma definida. Eu discuto este ponto em maiores detalhes em meu artigo VIII no conceito de verdade, onde eu dei a sistema axiomático acima pela primeira vez. Deve ser mencionado que outras metaciências podem, *mutatis mutandis*, ser axiomatizadas seguindo o padrão deste sistema axiomático.”

Onde  $A$  é a classe de todas as expressões da linguagem. Deve-se esclarecer que essa *nota de rodapé n°2* em TARSKI, A.; [1983e], p.282 foi escrita para a coletânea *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, 1983. Nessa coletânea o artigo *Concept of truth in formalized languages* de Tarski é o 8° artigo (numerado como VIII), antes, portanto do *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, que é o 10° artigo (numerado como X), mas é anterior ao *Concept of truth in formalized languages*. Por isso Tarski diz nessa *nota de rodapé n° 2* que o sistema axiomático em questão foi dado primeiro no *Concept of truth in formalized languages*, de 1935, porque o *Concept* aparece primeiro na ordem dos artigos do *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, apesar do *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness* ser anterior em publicação (é de 1933).

<sup>69</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.282, o Axioma 1 tinha o seguinte formato: “ $\forall \iota, \pi \square A$ , e  $\forall \iota \neq \iota$ ,  $\forall \iota \neq \pi$ , e  $\iota \neq \pi$ .” Para o significado dos símbolos ver nota 47 neste trabalho.

símbolo linguístico ‘ $\neg$ ’, metalingüisticamente nossa mente traduz por ‘não’ (em português), ou ‘no’ (em inglês), ou ‘niet’ (em russo transliterado), etc. Universalmente falando, todas essas traduções querem dizer a mesma coisa: *senal de negação*, cuja abreviação suficiente neste trabalho (e no de Tarski) é *ng*.

A razão para apontar que *ng*, *sm*, *un* e *in* sejam expressões é que essas expressões metalingüísticas são usadas para se falar das constantes respectivas na linguagem ( $\neg$ ,  $\square$ ,  $\square$ ,  $\square$ , em notação usual). São *expressões metalingüísticas* e não linguísticas.

Outra característica importante é o fato de serem absolutamente distintas: são as expressões mais simples da metalingüagem (seus ‘átomos’) e a prova disso é que é *impossível* que qualquer delas possa ser substituída por outra ou por uma combinação das outras.

Atenção:  $v_i$ ,  $i \square \square$  (isto é, qualquer  $v$  de qualquer índice) não é *variável metalingüística*. As variáveis metalingüísticas usam outra simbologia (ver [p.173]-1).

[p.173]-7

AXIOMA 2.  $v_k$  é uma expressão se e somente se  $k$  é um número natural distinto de 0;  $v_k$  é distinto de *ng*, *sm*, *un*, *in* e também de  $v_l$  se  $k \neq l$ .

O Axioma 2 introduz a natureza dos símbolos que tem condições de falar das variáveis da linguagem<sup>70</sup>. O símbolo metalingüístico  $v_k$  denota as variáveis da linguagem e por isso, por ser uma referência à linguagem é uma *expressão metalingüística* (pois só é possível falar da linguagem usando expressões e  $v_k$  está falando das variáveis linguísticas). Ainda:  $k$  é distinto de zero porque é necessário identificar a primeira variável de uma sequência linguística e a noção cardinal ‘primeiro’ é dado pelo ordinal ‘1’ dentre os números naturais (isto é, os índices  $k$  são os *cardinais* – 0, 1, 2, 3... – para permitirem a *ordinalidade* – primeiro, segundo, terceiro...

<sup>70</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.282, o Axioma 2 tinha o seguinte formato: “Se  $k, l \square Nt - \{0\}$  então  $\phi_k^l \square A$ , e  $\phi_k^l \neq v$ ,  $\phi_k^l \neq \iota$ , e  $\phi_k^l \neq \pi$ ; se, entretanto,  $k_1, l_1 \square Nt - \{0\}$  e  $k \neq k_1$  ou  $l \neq l_1$ , então  $\phi_k^l \neq \phi_{k_1}^{l_1}$ ” Para o significado dos símbolos ver nota 47 neste trabalho.

–, mas são denotados por numerais – porque não existe como fazer diferente<sup>71</sup>). Além disso  $v_k$  é distinto de *ng*, *sm*, *un*, *in* porque esses símbolos já abreviam o modo de se referir às constantes da linguagem a que correspondem, não precisamos dar um  $v_k$  para corresponder.

Vimos em [p.172]-1 o modo de entender  $v_k$  e vimos em [p.172]-5 como essa interpretação passa a valer apenas para a referência às variáveis da linguagem. Por exemplo,  $v_7$  indica a parte da expressão que se refere a variáveis deste  $v_1$  até  $v_7$ .<sup>72</sup> Assim,  $v_k$  é o símbolo da sequência  $v_1v_2v_3\dots v_k$ . Assim, fica óbvio por que  $v_k$  é distinto de  $v_l$ .

[p.173]-8

AXIOMA 3.  $x \square y$  é uma expressão se e somente se  $x$  e  $y$  são expressões;  $x \square y$  é distinto de *ng*, *sm*, *un*, *in* e de cada uma das expressões  $v_k$ .

O axioma 3 garante que é possível construir expressões mais complexas a partir de outras mais simples segundo uma regra de simples concatenação das expressões simples.<sup>73</sup> De fato, a seqüência de expressões sucessivas é também uma expressão; Assim se a metalinguagem junta duas expressões metalinguísticas, constitui uma terceira distinta das duas primeiras. O sinal gráfico ‘ $\square$ ’ indica uma ordem na sucessão, e não somente *simples sucessão*. Daí tiramos que basta inverter a ordem (i.e.,  $y \square x$ ) para termos uma quarta expressão diferente de  $x$ ,  $y$  ou  $x \square y$ . Atenção: nem toda *inversão* desse tipo gera sentenças.

Por quê  $x \square y$  deve ser distinto de qualquer um dos *ng*, *sm*, *un*, *in*? Porque *ng*, *sm*, *un*, *in* são ‘atômicas’, são absolutamente simples, não são composições (ao passo que

<sup>71</sup> Pois seria muito incômodo trabalharmos com uma simbologia como  $v_{primeiro}$ ,  $v_{segundo}$ ,  $v_{terceiro}$ ... etc. E se fosse necessário se referir à variável na 34561ª posição, porque nela é que por hipótese ocorre a distinção para outra expressão? Para quem acha que isso seria uma hipótese bastante improvável, há desafios (com ou sem prêmios) para a equipe de matemáticos que disser em que posição ocorre, por exemplo, a sequência 12345678987654321 na dízima do número  $\pi$  (e para o número  $e$  também). Como essa equipe poderia falar sobre a posição dos algarismos em uma sequência numérica atendendo tal e tal regra de posição, se fosse obrigada a escrever  $v_{primeiro}$ ,  $v_{segundo}$ ,  $v_{terceiro}$ ...?

<sup>72</sup> Na notação polonesa essa parte de sequência de variáveis é a parte final da expressão (tanto linguística quanto metalinguística). Já na notação usual essa característica fica mais difícil de ser reconhecida.

<sup>73</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.282, o Axioma 3 tinha o seguinte formato: “Se  $\zeta, \eta \square A$ , então  $\zeta \square \eta \square A$  e  $\zeta \square \eta \neq v$ ,  $\zeta \square \eta \neq u$ ,  $\zeta \square \eta \neq \pi$  e  $\zeta \square \eta \neq \phi^l_k$  para quaisquer  $k, l \square Nt - \{0\}$ .” Para o significado dos símbolos ver nota 47 neste trabalho.

$x \sqsupset y$  é complexa, constituída a partir de expressões  $x$  e  $y$  mais simples). E por quê  $x \sqsupset y$  deve ser distinto de  $v_k$ ? Apesar de que pudéssemos fazer seguir-se, uma da outra, duas sequências de variáveis linguísticas  $v_m$  e  $v_n$ , de modo a ter  $v_m \sqsupset v_n$  igual a uma sequência  $v_k$ , se isso valê-se como regra, então teríamos o símbolo  $v_k$  para denotar  $v_m \sqsupset v_n$ . Se aceitássemos que poderíamos escrever algo como  $v_m \sqsupset v_n \equiv v_k$  então deveríamos aceitar que o modo correto de designar uma sequência de  $v_k$  de variáveis seria escrever cada variável  $v_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , de todo  $v_k$ ,  $1 \leq i \leq k$ , intercaladas pelo sinal gráfico ‘ $\sqsupset$ ’, e deveríamos escrever esse formato toda vez que fossemos tratar de cada símbolo de cada variável linguística de toda sequência  $v_k$  mesmo quando não estivéssemos tratando de nomes descritivo-estruturais (onde já se é obrigado a colocar ‘ $\sqsupset$ ’ entre cada variável da sequência  $v_k$ ).

Só para sermos mais claros:  $x \sqsupset y$  também é um nome descritivo-estrutural. Então  $x$  denota, por exemplo,  $ng$  e  $y$  denota, por exemplo,  $(in \sqsupset v_1) \sqsupset v_2$ . Desse modo,  $x \sqsupset y$  denota  $ng \sqsupset ((in \sqsupset v_1) \sqsupset v_2)$ , que pode ser escrito  $((ng \sqsupset in) \sqsupset v_1) \sqsupset v_2$  porque ambos conseguem dizer a mesma coisa – sem prejuízo de uma para a outra – a respeito das variáveis linguísticas denotadas por  $v_1$  e  $v_2$ .

[p.173]-9

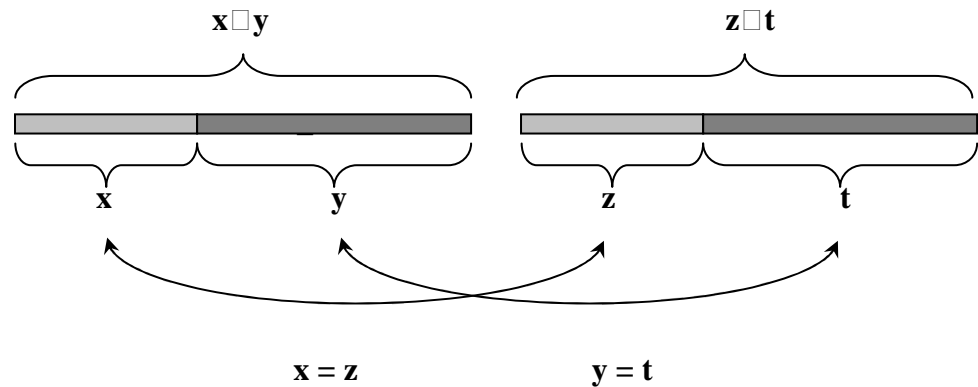
AXIOMA 4. Se  $x, y, z$ , e  $t$  são expressões, então temos  $x \sqsupset y = z \sqsupset t$  se e somente se uma das seguintes condições for satisfeita: ( $\alpha$ )  $x = z$  e  $y = t$ ; ( $\beta$ ) há uma expressão  $u$  tal que  $x = z \sqsupset u$  e  $t = u \sqsupset y$ ; ( $\gamma$ ) há uma expressão  $u$  tal que  $z = x \sqsupset u$  e  $y = u \sqsupset t$ .

O Axioma 4 lida com algo chamado *complexidade da expressão*<sup>74</sup>. A *complexidade* é o número de símbolos que um expressão carrega. Quanto mais símbolos, mais complexa (e por consequência mais comprida) é a expressão. Só existe

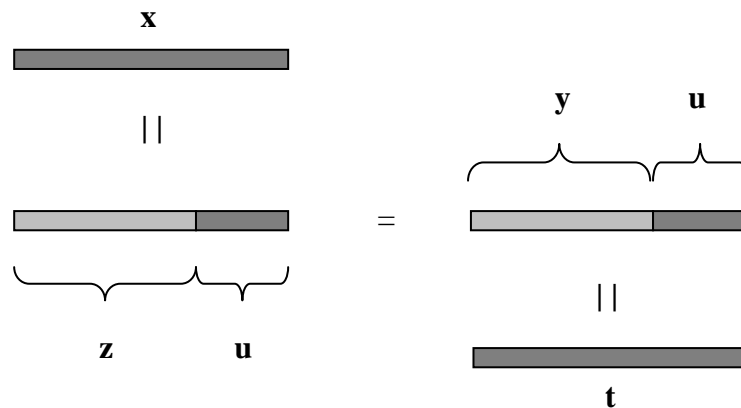
<sup>74</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.282, o Axioma 4 tinha o seguinte formato: “Se  $\zeta, \eta, \delta$ , e  $\xi \in A$ , então a cabe a fórmula:  $\zeta \sqsupset \eta = \delta \sqsupset \xi$  se e somente ou  $\zeta = \delta$  e  $\eta = \xi$ , ou se há um  $\tau \in A$  tal que  $\zeta = \delta \sqsupset \tau$  e  $\xi = \tau \sqsupset \eta$ , ou finalmente se há um  $\tau \in A$  tal que  $\delta = \zeta \sqsupset \tau$  e  $\eta = \tau \sqsupset \xi$ .” Para o significado dos símbolos ver nota 47 neste trabalho.

um modo de escrever cada expressão e isso as torna distintas. Três regras determinam o modo de se escrever as sequências de expressões, dadas pelas cláusulas ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ):

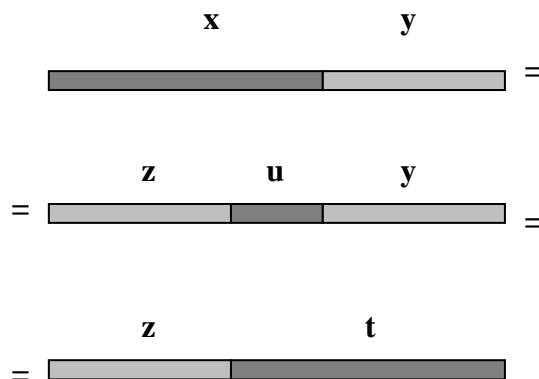
**Cláusula ( $\alpha$ ).** Se duas expressões são iguais, acontece que *são a mesma, escrita do mesmo modo, usando os mesmos símbolos e na mesma sequência*. Vamos representar a complexidade de uma expressão como uma barra de comprimento fixo, só para facilitar a visualização. Esta cláusula ( $\alpha$ ) do axioma 4 diz:



**Cláusula (β).** O explicado na cláusula (α) cabe aqui. Neste caso,  $x$  tem complexidade maior do que  $z$ , mas se seguirmos  $z$  de uma expressão  $u$  que tenha determinada complexidade, a soma das complexidades de  $z$  e  $u$  darão a complexidade de  $x$ . Como só existe um modo de escrever uma expressão, se as complexidades forem as mesmas, as expressões serão as mesmas. Do mesmo modo para  $y$  que tem complexidade menor que  $t$ : se o mesmo  $u$  bastar para fazer iguais as complexidades, então estaremos lidando com as mesmas expressões. Em diagrama, podemos representar assim:



De fato, então temos, por substituição,  $x \square y = z \square u \square y = z \square t$ . No diagrama:



**Cláusula ( $\gamma$ ).** Do mesmo modo como explicamos na cláusula ( $\beta$ ). O leitor poderá verificar, substituindo adequadamente as expressões *no mesmo tipo* de diagrama que  $x \sqcap y = x \sqcap u \sqcap t = z \sqcap t$ .

No comentário ao Axioma 3 escrevemos que  $ng \sqcap ((in \sqcap v_1) \sqcap v_2)$  é o mesmo que  $((ng \sqcap in) \sqcap v_1) \sqcap v_2$ . Isso parece ferir a regra de que só há um modo de escrever uma expressão? Não, de modo algum: os parênteses e suas posições são objetos auxiliares que não pertencem à metalinguagem e estão aí de modo a situar uma leitura. A ordem de sucessão dos símbolos (que é o que importa) permanece a mesma seja em  $ng \sqcap ((in \sqcap v_1) \sqcap v_2)$  ou  $((ng \sqcap in) \sqcap v_1) \sqcap v_2$  (se o leitor retirar os parênteses verificará a ordem idêntica de sucessão dos símbolos nas duas expressões; a utilidade dos parênteses é só dizer quais partes da expressão antecedem quais partes).

[pp.173-174]

**AXIOMA 5.** (Princípio de indução). *Seja  $X$  uma classe que satisfaça as seguintes condições: ( $\alpha$ )  $ng \in X$ ,  $sm \in X$ ,  $un \in X$  e  $in \in X$ ; ( $\beta$ ) se  $k$  é um número natural distinto de 0, então  $v_k \in X$ ; ( $\gamma$ ) se  $x \in X$  e  $y \in X$ , então  $x \sqcap y \in X$ . Então toda expressão pertence à classe  $X$ .*

Fica óbvio que  $X$  é a classe das expressões metalinguísticas (ou das expressões em condições de falar a respeito de expressões linguísticas). Trata-se do princípio de indução<sup>75</sup> porque qualquer expressão metalinguística é construída usando sequências de todos ou de alguns dos símbolos  $ng$ ,  $sm$ ,  $un$ ,  $in$  e  $v_k$ , ou são formas complexas a partir de expressões simples  $x$  e  $y$  formadas por sequências de todas ou de alguns dos símbolos  $ng$ ,  $sm$ ,  $un$ ,  $in$  e  $v_k$ . Sendo assim, fica óbvio que também essas sequências são expressões da metalinguagem.

### 3. Comentário à axiomática metalinguística

<sup>75</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.282, o Axioma 5 tinha o seguinte formato: “Seja  $X$  qualquer conjunto que satisfaça as seguintes condições: (1)  $v, \iota, \pi \in X$ ; (2) se  $k, l \in N - \{0\}$  então  $\phi_k^l \in X$ ; (3)  $\zeta, \eta \in X$ , então  $\zeta \sqcap \eta \in X$ . Então  $A \in X$ .” Para o significado dos símbolos ver nota 47 neste trabalho.

Os cinco axiomas metalinguísticos não constituem nada mais que as regras de formação de qualquer tipo de linguagem, não necessariamente só metalinguísticas. Qualquer estudante de um bom curso de lógica já teve acesso, por exemplo, a um manual como *Introduction to mathematical logic* de Elliot Mendelson, sabe que a construção de uma linguagem formal qualquer pode começar com as seguintes três cláusulas (onde apontamos a a relação com os axiomas anteriormente vistos):

- 1)  $\neg, \square, \square, \square$  são símbolos primitivos da linguagem (Axioma 1).
- 2)  $\alpha$  e  $\beta$  são fórmulas (Axioma 2 e 5)
- 3) Se  $\alpha$  e  $\beta$  são fórmulas, então  $\neg\alpha, \alpha \square \beta, \alpha \square \beta, \square\alpha$  são fórmulas (Axioma 3 e 5)

Assim, os axiomas metalinguísticos dão o modo básico de construção formal da metalinguagem.

#### 4. Comentário de Tarski aos metaxiomas

Tarski iniciará um pequeno comentário a esses metaxiomas, para elucidar algumas questões que os envolvem. Apesar da brevidade, esses comentários carregam na base problemas sérios que antecedem a formalização de qualquer linguagem (não só da metalinguagem). São três os tipos de problemas por trás dos axiomas (problemas aos quais Tarski achou melhor não se estender e tomá-los como não influenciáveis nos resultados que pretende daqui em diante no seu trabalho): *problema da intuitividade dos axiomas, problema da categoricidade do sistema axiomático e problema existencial*.

##### 4.1. Problema da intuitividade dos axiomas

Tarski inicia comentando o caráter intuitivo dos quatro primeiros axiomas e o não intuitivo do quinto axioma:

[p.174]-1

O sentido intuitivo dos AXS. 1-4 não requer elucidação a mais. O AX. 5 garante uma formulação precisa do fato de que toda expressão consiste em um número finito de signos.

O próprio Tarski dá os problemas de uma crença absoluta na obviedade dos axiomas de 1-4 como vimos na nota de rodapé 60 neste trabalho. Um interessante artigo de autoria do professor Bhupinder Singh Anand, intitulado *A constructive definition of the intuitive truth of the Axioms and Rules of Inference of Peano Arithmetic* (ANAND, B. S., [2007]), procura resolver exatamente este ponto do trabalho de Tarski. O artigo é *curtíssimo* (apenas uma página e meia) e não é fora de sentido citar-lhe longos trechos que somados e exponham aqui na íntegra. A respeito de axiomas da Aritmética de Peano (que equivalem aos axiomas 1-4 vistos anteriormente na exposição de Tarski), Bhupinder Anand escreve (ANAND, B. S., [2007], p.6):

“Há uma notável, embora despercebida, conseqüência do artigo original de Turing de 1936 (‘On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem’ (...)). Ele admite uma definição construtiva do *que* se entende *intuitivamente* pela afirmação de que os axiomas e regras de inferência de primeira ordem da Aritmética de Peano são *intuitivamente* verdadeiros sob a interpretação padrão, no sentido de Tarski (1936 (...)).<sup>76</sup>

Especificamente:

**Meta-teorema:** Se uma fórmula, e.g.  $[R(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ , é um teorema de primeira ordem de uma Aritmética de Peano, então há uma máquina de Turing, T, tal que, dado *qualquer* conjunto de números naturais  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  como entrada, T computará a proposição aritmética  $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$  como VERDADE em um número finito de passos.

**Prova:** Considere os PA-axiomas<sup>77</sup>:

**A1:**  $[(x_1 = x_2) \rightarrow ((x_1 = x_3) \rightarrow (x_2 = x_3))]$ ;

**A2:**  $[(x_1 = x_2) \rightarrow (x'_1 = x'_2)]$ ;

**A3:**  $[0 \neq x'_1]$ ;

**A4:**  $[(x'_1 = x'_2) \rightarrow (x_1 = x_2)]$ ;

**A5:**  $[(x_1 + 0 = x_1)]$ ;

**A6:**  $[(x_1 + x'_2) = (x_1 + x_2)']$ ;

**A7:**  $[(x_1 * 0 = x_1)']$ ;

**A8:**  $[(x_1 * x'_2) = ((x_1 * x_2) + x_1)]$ ;

**A9:** Para qualquer fórmula bem formada  $[F(x)]$  de PA:  $[(F(0) \rightarrow (\Box x)(F(x)) \rightarrow (F(x')))] \rightarrow (\Box x)F(x)$ .

Agora, cada um dos PA-axiomas pode intuitivamente vir a ser Turing-computado *sempre* como VERDADE no seguinte, definicional, sentido:

**D1:** Uma relação totalmente número-teorética,  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , quando tratada como uma função Booleana, é Turing-computável se, e somente se, há uma máquina de Turing T tal que, para qualquer sequência dada de números naturais,  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  como ou VERDADE, ou como FALSO.

**D2:** Se  $[R]$  é uma fórmula atômica  $[R(a_1, a_2, \dots, a_n)]$  de PA, então  $[R]$  é Turing-computável como VERDADEIRO/FALSO para o número natural de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  se, e

<sup>76</sup> Trata-se do artigo TARSKI, A.; [1983b], que vimos estudando neste livro.

<sup>77</sup> PA abrevia “Aritmética de Peano”.

somente se, a relação aritmética  $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é Turing-computável como VERDADEIRO/FALSO nos números de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**D3:** A PA-fórmula  $[\neg R]$  é Turing-computável como VERDADEIRO para os números naturais de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  se, e somente se,  $[R]$  é Turing-computável como FALSO para os números naturais de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**D4:** A PA-fórmula  $[R \rightarrow S]$  é Turing-computável como VERDADE para os números naturais de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  se, e somente se, ou  $[R]$  é Turing-computável como FALSO para os números naturais de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , ou  $[S]$  é Turing-computável como VERDADEIRO para os números naturais de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**D5:** A PA-fórmula  $[R]$  é Turing-computável *sempre* como VERDEIRA se, e somente se,  $[R]$  é Turing-computável como VERDADEIRO para *quaisquer* dados números naturais de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**D6:** A PA fórmula  $[\neg R]$  é Turing-computável *sempre* como VERDADEIRA se, e somente se,  $[R]$  é Turing-computável como FALSO para quaisquer dados números naturais de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**D7:** A PA-fórmula  $[(\Box x_i)R]$  é Turing-computável como VERDADEIRO se, e somente se,  $[R]$  é Turing-computável como VERDADEIRO para *quaisquer* dados números naturais de entrada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**D8:** A PA-fórmula  $[\neg(\Box x_i)R]$  é Turing-computável como VERDADEIRA se, e somente se  $[(\Box x_i)R]$  não é Turing-computável como VERDADEIRA.

Então se assumimos, por exemplo, que o axioma **A1** é intuitivamente verdadeiro no sentido Tarskiano – i.e. que a PA-fórmula,  $[(x_1 = x_2) \rightarrow ((x_1 = x_3) \rightarrow (x_2 = x_3))]$ , interpretada como uma relação aritmética,  $(x_1 = x_2) \rightarrow ((x_1 = x_3) \rightarrow (x_2 = x_3))$ , que vale para qualquer substituição por números naturais nas variáveis nela contidas – então segue-se que **A1** interpretada como uma relação aritmética é Turing-computável *sempre* como VERDADEIRA.

Similar argumento vale para os axiomas de **A2** até **A8**.

Essa discussão de Bhupinder Anand a respeito da PA-axiomática esclarece bastante como devemos olhar a “obviedade” dos axiomas devido ao seu caráter intuitivo e, em especial, satisfaz uma excelente consideração a respeito do caráter intuitivo dos axioma 1-4 de Tarski. O axioma 5 ainda carrega, porém, alguma problemática.

O Axioma 5 é a garantia de que as expressões metalingüísticas têm complexidade (comprimento) finita e que também as expressões proveniente de junção (concatenação) de duas ou mais expressões também são finitas. De fato, os itens A, B, C, D, E e F vistas em [p.172]-5 caracterizam, e só eles caracterizam, expressões metalingüísticas. Se só existem na metalinguagem expressões com tais características e se elas pertencem a dada classe de expressões, qualquer expressão metalingüística pertence a essa classe. Esse axioma é importante para estabelecer mais tarde os conceitos de sentença axiomática (ou primitiva), consequência e sentença demonstrável.

Em Tarski, A.; [1983b] essa passagem merece a seguinte nota de rodapé feita pelos editores:

“O conjunto axiomático formulado aqui foi publicado pela primeira vez em 1933, no original polonês do presente artigo. No mesmo ano também apareceu no original alemão do artigo IX (ver p.282).<sup>78</sup> A teoria baseada neste conjunto axiomático é usualmente referida como a *teoria das sequências* ou *teoria da concatenação*. De um ponto de vista matemático ela é simplesmente a *teoria dos semigrupos livres* (com um número fixo, finito ou infinito, de geradores). Para maiores informações e referências bibliográficas a respeito da axiomatização desta teoria veja Corcoran-Frank-Maloney (14†)<sup>79</sup>”

O leitor atento deve ter percebido que o axioma **A9** da Aritmética de Peano citado por Bhupinder Anand corresponde ao Axioma 5 de Tarski: tratam-se ambos do Princípio de Indução. O que Bhupinder Anand escreveu para o **A9** vale para o Axioma 5 de Tarski (ANAND, B. S., [2007], p.6-7):

“Prosseguindo, se nós assumirmos que o Axioma da Indução, **A9**, é intuitivamente verdadeiro no sentido Tarskiano, então, novamente, teremos que a relação aritmética expressada por:

$$(F(0) \rightarrow (\Box x)(F(x) \rightarrow (F(x')))) \rightarrow (\Box x)F(x)$$

é Turing-computável sempre como VERDADEIRO, desde que:

- (a) Se  $F(0)$  é intuitivamente verdadeiro tarskianamente, então  $F(0)$  é Turing computável *sempre* como VERDADEIRO;
- (b) Se a relação aritmética,  $(\Box x)(F(x) \rightarrow (F(x')))$ , é intuitivamente verdadeira tarskianamente – i.e.,  $(F(x) \rightarrow F(x'))$  vale para qualquer dado número natural  $x$  – então  $(F(x) \rightarrow F(x'))$  é Turing-computável *sempre* como VERDADEIRO;
- (c) Se  $F(0)$  é Turing-computável *sempre* como VERDADEIRO, e  $(F(x) \rightarrow (F(x')))$  é Turing computável *sempre* como VERDADEIRO, então  $F(x)$  é Turing-computável *sempre* como VERDADEIRO.

É claro que todo sistema axiomático exige uma regra de inferência. Mesmo no caso dos axiomas 1-5 (que são *metaxiomas*, por seu uso pela metalinguagem), a regra de inferência será aquela do sistema Russell-Whitehead, vista em [p.173]-9. O que poderí-

---

<sup>78</sup> Essa numeração de página é a de *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA e se refere ao artigo *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, onde esses cinco axiomas aparecem também.

<sup>79</sup> A referência (14†) é do mesmo *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA. (14†): J. Corcoran, W. Frank, and M. Maloney, ‘String Theory’, *J. Symbolic Logic*, 39, (1974), 625-37.

amos dizer aqui sobre a face intuitiva da regra *modus ponens* já foi dito na nota de rodapé 55 deste livro.

#### 4.2. Problema da categoricidade do sistema axiomático

Para estruturar corretamente a metalinguagem a partir dos axiomas 1-5, Tarski vê a necessidade de que componham, juntos, um *sistema axiomático categórico*. Ele assume que de fato os axiomas 1-5 componham um sistema dessa natureza:

[p.174]-2

É possível provar que o sistema axiomático acima é categórico. Este fato garante em certo grau que ele providenciará uma base suficiente para a construção da metalinguagem.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Eu uso o termo 'categórico' no sentido dado em Veblen, O. (86). Não proponho explicar em maiores detalhes porque vejo na categoricidade de um sistema axiomático uma garantia objetiva de que o sistema basta para o estabelecimento da correspondente ciência dedutiva; uma série de notas sobre essa questão pode ser encontrada em Fraenkel, A. (16).

Porém Tarski não prova a categoricidade do sistema de axiomas 1-5. Na *nota de rodapé I* Tarski mostra entender 'categoricidade' no sentido visto no artigo de Oswald Veblen, *A System of Axioms for Geometry*, de 1904<sup>80</sup>. Tarski, em seu artigo *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness* de 1933 (TARSKI, A.; [1983e], p.282), escreveu logo em seguida aos mesmos cinco axiomas metalingüísticos vistos acima: “Não é difícil provar que o sistema axiomático acima é categórico<sup>i</sup>, tem uma interpretação na axiomática dos números naturais e consiste de declarações mutuamente independentes.<sup>ii</sup>”

As duas notas de rodapé assinaladas por *i* e por *ii* nesta passagem são muito importantes, mas vamos nos deter apenas na nota *i*<sup>81</sup>. A nota de rodapé *i* corresponde no original à nota nº 1 à página 282 (TARSKI, A.; [1983e], p.282). Ela diz: “Originalmente no sentido como em Veblen, O. (86)<sup>82</sup>. Para uma definição precisa, ver X, pp.309-310.”

<sup>80</sup> *A system of axioms for geometry*, Trans. Amer. Math. Soc., v (1904), 343-81.

<sup>81</sup> A *nota de rodapé ii* já foi estudada na nota 39 desta dissertação.

<sup>82</sup> Isto é, também no sentido visto no artigo de Oswald Veblen, *A system of axioms for geometry*, de 1904.

A indicação (86) corresponde à da bibliografia ao fim do *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, coletânea de 1983<sup>83</sup>. Também o mesmo se diz da numeração de página “ver X, pp.309-310”. Com “ver X, pp.309-310”, Tarski está se referindo ao seu artigo de 1934, *Some Methodological Investigations on the Definability of Concepts* (TARSKI, A.; [1983f], pp.296-319), trabalho resultante dos estudos que Tarski fazia a esse respeito desde 1926 (Cf. TARSKI, A.; [1983f], p.297, nota de rodapé 1). Nas páginas 309-310 desse artigo Tarski dá a idéia principal por trás do método da prova da categoricidade de um sistema axiomático. Ele escreve (TARSKI, A.; [1983f], pp.309): “Como é bem conhecido, um conjunto de sentenças é chamado categórico se quaisquer duas interpretações (realizações) desse conjunto são isomórficas.”

E aqui ele insere a notade rodapé 2 da página 309 onde diz: “cf. por exemplo Veblen, O. (86)”. Por *isomorfia* entende-se uma relação de *equivalência*. Assim as interpretações isomórficas são equivalentes entre si e uma vale identicamente no lugar da outra. Continua em seguida (TARSKI, A.; [1983f], pp.309-310):

“Na intenção de formular isto mais exatamente, vamos supor que expressões simbólicas da forma ‘ $x \square \tilde{R} x \square \square$ ’ (em palavras: ‘a relação  $R$  coloca  $x \square$  para  $x \square \square$ ’) foi introduzido no interior do sistema lógico. A variável ‘ $R$ ’ sempre denota uma relação bi-termos entre indivíduos, ‘ $x \square$ ’ e ‘ $x \square \square$ ’ podem ser de qualquer tipo lógico, desde que sejam ambos do mesmo tipo. O sentido preciso da expressão ‘ $x \square \tilde{R} x \square \square$ ’ dependerá do tipo lógico das variáveis ‘ $x \square$ ’ e ‘ $x \square \square$ ’. Explicaremos isso para uns poucos casos. Por exemplo, se ‘ $x \square$ ’ e ‘ $x \square \square$ ’ são indivíduos, então ‘ $x \square \tilde{R} x \square \square$ ’ tem o mesmo significado que ‘ $x \square R x \square \square$ ’ (i.e., ‘ $x \square$  situa-se na relação  $R$  para  $x \square \square$ ’). Se ‘ $x \square$ ’ e ‘ $x \square \square$ ’ denotam classes de indivíduos, então a expressão tem o mesmo sentido que a função sentencial

$$(u \square) : u \square \square x \square . \square . (\square u \square \square) . u \square \square \square x \square \square . u \square \tilde{R} u \square \square \therefore (u \square \square) : u \square \square \square x \square \square . \square . (\square u \square) . u \square \square x \square . u \square \tilde{R} u \square \square .$$

(isto não envolve circularidade uma vez que ‘ $u \square$ ’ e ‘ $u \square \square$ ’ são variáveis individuais, tal que o sentido da expressão ‘ $u \square \tilde{R} u \square \square$ ’ já foi bem determinado). De um modo exatamente análogo a expressão ‘ $x \square \tilde{R} x \square \square$ ’ pode ser definida para a classe de termos de tipo mais elevado. Considere novamente o caso onde ‘ $x \square$ ’ e ‘ $x \square \square$ ’ são predicados bi-termos com variáveis individuais como

---

<sup>83</sup> *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, 1983.

argumentos (desse modo denotando relações binárias entre indivíduos); então a fórmula ' $x \tilde{R} x$ ' tem o mesmo significado que

$$(u, v) : x(u, v) \cdot \cdot (\exists u, v) \cdot x(u, v) \cdot u \tilde{R} u \cdot v \tilde{R} v \\ \cdot (u, v) : x(u, v) \cdot \cdot (\exists u, v) \cdot x(u, v) \cdot u \tilde{R} u \cdot v \tilde{R} v$$

Os exemplos acima serão provavelmente suficientes para explicar o sentido a ser dado à expressão discutida com respeito às variáveis de tipo lógico arbitrário.

Para esclarecer a simbologia, a expressão  $(u) : u \cdot x \cdot \cdot (\exists u) \cdot u \cdot x$  é lida: *para o indivíduo  $u$ : se o indivíduo  $u$  pertence à classe de indivíduos  $x$ , então existe o indivíduo  $u$  tal que  $u$  pertence à classe de indivíduos  $x$  e a relação  $R$  coloca  $u$  para  $u$ ; e para o indivíduo  $u$ : se o indivíduo  $u$  pertence à classe de indivíduos  $x$ , então existe o indivíduo  $u$  tal que  $u$  pertence à classe de indivíduos  $x$  e a relação  $R$  coloca  $u$  para  $u$* . No caso da expressão:  $x(u, v) \cdot \cdot (\exists u, v) \cdot x(u, v) \cdot u \tilde{R} u \cdot v \tilde{R} v$  é lida: *para o indivíduo  $u$  e  $v$ : se o par de indivíduos  $u$  e  $v$  pertence à classe de pares de indivíduos  $x$ , então existe o par de indivíduos  $u$  e  $v$  que pertence à classe de pares de indivíduos  $x$  e a relação  $R$  coloca  $u$  para  $u$  e  $v$  para  $v$* . O mesmo para  $x(u, v)$ , por exemplo, é lido *par  $u$  e  $v$  que pertence à classe de indivíduos  $x$* . O mesmo para  $x(u, v)$ .

Em geral, fica definido, então, que um sistema axiomático é categórico quando permite escrever expressões equivalentes. O trabalho de Veblen, que é citado nos três artigos de Tarski (TARSKI, A.; [1983b], TARSKI, A.; [1983e] e TARSKI, A.; [1983f]) para o problema que estamos tratando aqui (o problema da *categoricidade*), merece ser discutido. O excelente artigo de Steve Awodey e Erich H. Reck, *Completeness and Categoricity. Part I: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic* (AWODEY, S. E RECK, E. H.; [2002a])<sup>84</sup>, resume de modo prático o entendimento de Oswald Veblen tem de *categoricidade*. Awodey e Reck (AWODEY, S. E RECK, E. H.; [2002a], p.23) transcrevem os seguintes trechos de Veblen:<sup>85</sup>

<sup>84</sup> Awodey e Reck publicaram no mesmo ano a continuação AWODEY, S. E RECK, E. H.; [2002b]

<sup>85</sup> Veblen estava discutindo os vinte axiomas de Hilbert usados na formalização do espaço euclidiano.

“É parte de nossa proposta mostrar que há *essencialmente uma única* classe onde os vinte axiomas são válidos. (...) Consequentemente qualquer proposição que pode ser feita em termos de pontos e arranjo<sup>86</sup> ou está em contradição com nossos axiomas ou é igualmente verdadeiro a todas as classes que verificam os axiomas. A validade de qualquer declaração nesses termos é por consequência completamente determinada pelos axiomas; e assim qualquer axioma adicional terá de ser considerado redundante. (...) Um sistema de axiomas tal como temos descrito é chamado *categorico*, enquanto aquele onde seja possível adicionar axiomas independentes (e onde conseqüentemente dá-se mais de uma dessas possibilidades) é chamado *disjuntivo*.<sup>87</sup> (...) Será provavelmente melhor reservar a palavra *definição* para a substituição de um símbolo por outro, e dizer que um sistema de axiomas é categorico se ele é suficiente para a completa *determinação* de uma classe de objetos ou elementos.”

Segundo Awodey e Reck, o modo como Veblen introduz o conceito de *categoricidade* no seu artigo de 1904 parece bastante vago, mas escreverá em 1906 o artigo *The foundations of geometry: A historical sketch and a simple exemple* onde ele toma mais critério para tratar da *categoricidade*. Lemos de Awodey e Reck (AWODEY, S. E RECK, E. H.; [2002a], p.23):

“Em 1906 Veblen publicou outro artigo sobre o mesmo tópico geral, chamado “The foundations of geometry: a historical sketch and a simple example”. Este artigo foi escrito para a revista *Popular Science Monthly*, como um artigo resumido para um público mais amplo. Ele continha algumas passagens que iluminavam o ponto de vista de Veblen. Em conexão com a noção de categoria ele agora apontava:

Se antes temos um sistema categorico de axiomas, toda proposição que pode ser iniciada em termos de nossos (indefinidos) símbolos fundamentais é ou não é verdade de um sistema de objetos que satisfazem os axiomas. Neste sentido ou é consequência dos axiomas ou é contraditório com eles.

---

<sup>86</sup> Isto é, ordem de símbolos.

<sup>87</sup> Awodey e Reck (AWODEY, S. E RECK, E. H.; [2002a], p.23) apontam que em notas de rodapé à página 346, Veblen avisa que os nomes *categorico* e *disjuntivo* para o comportamento dos sistemas axiomáticos foi idéia do filósofo pragmatista John Dewey.

“Vamos supor que Veblen quis dizer que “toda proposição ou é ou não é verdade de *todo* sistema de objetos que satisfazem os axiomas (uma vez que, como ele tinha enfatizado anteriormente, um sistema categorial de axiomas tinha “essencialmente apenas um” modelo). Então nós podemos dizer que ele está se movendo sem hesitação da categoricidade para a completude semântica nesta passagem, (...) nós assumindo entender a frase “consequência dos axiomas” e “contraditório” no sentido semântico.”

Neste ponto Awodey e Reck (AWODEY, S. E RECK, E. H.; [2002a], p.25.) explicam para Veblen um sistema categórico então é semanticamente completo e em tal sistema qualquer novo axioma é redundante e não pode ser dedutível dos axiomas por um número finito de silogismos. Então, para Veblen, a consequência semântica é distinta da consequência dedutiva, porque um potencial novo axioma pode, sem ser uma consequência dedutiva, ser consequência semanticamente dos velhos axiomas (por redefinições dos termos dos velhos axiomas, o que é aceitável e possível, já que os axiomas lidam com os mesmos símbolos fundamentais e se referem em algum ponto da exposição do axioma, permitindo assim que os axiomas se associem para de forma complexa descrever um axioma mais simples; por isso esse novo axioma é redundante: pode ser reduzido aos anteriores mais simples).

É sob a consideração desses limites da consequência dedutiva – que não pode gerar novos axiomas – que Tarski considera a categoricidade de um sistema como suficiente para sustentar a lógica da metalinguagem, como ele escreveu (ver [p.174]-2, nota de rodapé 1): “(...) vejo na categoricidade de um sistema axiomático uma garantia objetiva de que o sistema basta para o estabelecimento da correspondente ciência dedutiva”.

### 4.3. Problema existencial

Tarski reconhece uma terceira complicação no sistema axiomático precedente:

[p.174]-3

Alguns dos axiomas acima têm um pronunciado caráter existencial e envolvem consequências adicionais da mesma espécie.

Na base do problema existencial detonado pelos axiomas está o princípio matemático denominado Axioma da Escolha. Sem nos determos muito nisso, o Axioma da Escolha consiste em dizer que é possível criar um conjunto – o *conjunto de escolha* – que contenha um objeto de cada conjunto, e apenas um objeto de cada conjunto, de uma coleção infinita deles disjuntos dois-a-dois, sem estabelecer uma regra para a escolha desse objeto (a escolha é arbitrária).

Por exemplo, o Axioma 1 de Tarski é um *conjunto de escolha*: as expressões *ng*, *sm*, *un* e *in* foram escolhidas arbitrariamente e no entanto são distintas entre si. Onde está garantida essa distinção? Do fato de que antes eram objetos pertencentes, cada um, a conjuntos disjuntos dois-a-dois. O problema está em estabelecer, primeiro, a existência desses conjuntos disjuntos anteriores ao Axioma 1 e verificar que o conjunto  $\{ng, sm, un, in\}$  não está entre eles (pois foi arbitrariamente – e não dedutivamente – obtido). Fraenkel, Bar-Hillel e Lévy (FRAENKEL, A., BAR-HILLEL, Y. E LÉVY, A.; [1973], pp. 67-68) discutem assim esse problema:

“(...) a maioria dos ataques ao axioma da escolha deriva da insuficiente apreciação de seu *caráter puramente existencial*. De fato, o axioma não garante a possibilidade (com os recursos científicos atuais ou em qualquer futuro) de *construir* um conjunto de escolha; quer dizer, de providenciar uma regra pela qual em cada membro  $s$  de  $t$  um certo membro de  $s$  pode ser nomeado. Pelo contrário, providenciar tal regra significaria obter o respectivo subconjunto  $\square t$  pelo axioma dos subconjuntos, sem envolver o axioma da escolha. Este último garante a *existência* de um conjunto de escolha, i.e. a não-vacuidade [impossibilidade de ser vazio] do exterior do produto  $\pi t$  [conjunto potência de  $t$ , que é o conjunto de todos os subconjuntos de  $t$ ] (cuja existência [do produto  $\pi t$ ] é garantida sem nosso axioma [da escolha]). Em outras palavras, o axioma garante que, (...), não está ausente entre os subconjuntos de  $\square t$  aqueles subconjuntos que contêm um membro comum a todo membro de  $t$ . Pouquíssima atenção foi devida a este ponto fundamental durante as primeiras décadas do presente século [século XX] e por isso causou-se muitas discussões estérteis.”

A consequência problemática que Tarski prefere usar como exemplo é a que segue:

[p.174]-4

Notável entre essas consequências é a asserção de que a classe de todas as expressões é infinita (para ser mais exato, enumerável). Do ponto de vista intuitivo isso pode parecer duvidoso e dificilmente evidente, e nessas condições o sistema axiomático inteiro pode estar sujeito a ser seriamente criticado.

Tarski se refere à *classe infinita* em [p.171]-1 para dizer que há uma classe com um número infinito de expressões. De fato, os axiomas permitem construir uma quantidade infinita de proposições e, lembrando das propriedades de concatenação de expressões simples em complexas, sempre enumerável mesmo no nível dos símbolos componentes da expressão. A respeito da natureza daquilo que denominamos *enumerabilidade* nada há de especial que se discutir<sup>88</sup>.

Que não é intuitivo que o número de expressões seja infinito, isso parece bem claro. Por exemplo, entre as infinitas expressões deveriam constar a soma lógica de todas as infinitas expressões e a negação dessa soma lógica, o que fica difícil de conceber, pois se tem contraintuitivamente estabelecido já qual seria a última expressão (a negação da soma lógica de todas as infinitas expressões) de infinitas expressões. Mas sendo essa negação também uma expressão, ela deve ser *menor* em comprimento do que ela própria, o que é paradoxal.

A crítica principal seria que não há razão para se assumir que as expressões sejam em número infinito, apesar de que nada impede que sejam, ficando assim indefinido se a classe de todas as expressões é ou não infinita, apesar de enumerável. A situação é que se as expressões sentenciais existem para se referir a outros objetos, só existiriam expressões infinitas se as expressões fossem objetos delas próprias (o que permitiria paradoxos como expressões menores que elas próprias) e não apenas os objetos do univer-

---

<sup>88</sup> Um conjunto não vazio se diz enumerável se for possível designá-lo por meio de uma sequência infinita  $x_0, x_1, x_2, \dots$  (isto é, um conjunto não vazio é imagem sobrejetiva do conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais); todo conjunto *finito* também é enumerável; a união de dois conjuntos enumeráveis também é enumerável; se  $X$  é um conjunto enumerável e  $f$  é uma função sobrejetiva tal que  $f: X \rightarrow Y$ , então  $Y$  é enumerável; o conjunto-união de todos os conjuntos enumeráveis também é enumerável (daí que a união de *apenas alguns* conjuntos enumeráveis é, obviamente, enumerável); o produto cartesiano de enumeráveis é enumerável.

so físico. Mas isso ocorreria em situação de não se trabalhar com a metalinguagem e termos a auto-referência como natureza indefectível da linguagem.

Essa “infinitude” que parece acompanhar a formalização da linguagem parece ser culpa dos axiomas 2 e 3, segundo Tarski:

[p.174]-5

Uma

análise mais próxima restringiria as críticas inteiramente aos Axiomas 2 e 3 como as fontes essenciais desse caráter infinito da metateoria.

Em [p.174]-3 vimos os problemas por trás do Axioma 1, envolvendo o Axioma da Escolha. Já o Axioma 2 deixa bem claro a natureza infinitária da classe das expressões metalingüísticas:  $v_k$  é uma expressão só se  $k \neq 0$  e  $k \neq l$ , permitindo existir um  $v_l$  distinto de qualquer  $v_k$ . Assim sempre existirá uma expressão distinta de qualquer outra já existente, fornecendo caráter infinitário à classe de expressões metalingüísticas. Que fazer a esse respeito? Tarski desiste de continuar a discussão, pois ela não se encerraria sem desviar totalmente o objetivo do trabalho pretendido:

[p.174]-6

Não persistirei nesse difícil problema além daqui.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Por exemplo, os seguintes pontos verdadeiramente sutis são levantados. Normalmente, as expressões são consideradas como produtos da atividade humana (ou como classes de tais produtos). Desse ponto de vista, a suposição de que há infinitamente muitas expressões parece ser obviamente sem sentido. Mas uma outra interpretação possível do termo ‘expressão’ se apresenta: poderíamos considerar todos os corpos físicos de uma forma e um tamanho particulares como expressões. O cerne do problema seria então transferido para o domínio da física. A asserção de infinidade do número de expressões então não mais parece absurda, embora ela possa não se conformar às teorias físicas e cosmológicas modernas.

O que Tarski faz aqui na *nota de rodapé 2* é apenas metaforicamente dar outra natureza para o conceito de ‘expressão’, mostrando como uma solução envolvendo outra ciência dedutiva (que não a lógica) permite soluções e problemas novos. De fato, podemos dizer que cada forma e cada dimensão distinta de cada entidade física do universo é uma expressão distinta. Nesse caso haveria infinitas expressões, pois sempre é possível – dados os conceitos próprios da topologia – mudar a forma e tamanho de

qualquer ser. Não é mais absurda, pois teríamos *um número finito de entidades que têm infinitas formas e tamanhos*. Isso é concebível, apesar de se chocar destrutivamente contra as teorias físicas modernas a respeito da natureza do tempo, do espaço e da matéria.

No caso da lógica, porém, segundo Tarski, a solução passaria por restringir o componente existencial dos axiomas:

[pp.174-175]

As conseqüências mencionadas poderiam ser naturalmente evitadas se os axiomas fossem libertados em um grau suficiente de suas suposições existenciais.

Isto é, se permitíssemos aos axiomas apenas valer para um número finito de expressões, evitar-se-ia supor as infinidades causadoras dos problemas descritos. Tarski encerra como segue a problemática existencial a respeito dos axiomas metalingüísticos 1-5.

[p.175]-1  
M

as um fato que deve ser tomado em consideração é que a eliminação ou enfraquecimento desses axiomas, que garantem a existência de todas as expressões possíveis, consideravelmente aumentaria as dificuldades de construção da metateoria, faria impossível uma série das mais úteis conseqüências e, assim, introduziria mais complicações na formulação das definições e teoremas. Como veremos mais tarde, isso virá a se tornar claro mesmo nas presentes investigações. Por essas razões, parece desejável, ao menos provisoriamente, basear nosso trabalho no sistema axiomático dado acima em sua não-enfraquecida forma inicial.

Todos esses axiomas (os axiomas da linguagem e os axiomas da metalinguagem) permitirão à metalinguagem estabelecer o modo como a linguagem deve ser escrita e o modo como ela deve ser interpretada (o modo como se fala dela) para se evitar o equívoco de saber como escrever a linguagem, mas falar de outra linguagem que não a que se sabe escrever.

O trabalho seguinte a isto, agora, é definir as expressões da linguagem, determiná-las, estabelecê-las, para podermos apontar quais sentenças da linguagem são verdadeiras. Mas a linguagem não pode se autodefinir. As definições são tarefa da metalinguagem, que começaremos a ver no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 4

### DEFINIÇÃO DE SENTENÇA

Será necessário agora estabelecer um *modo de dizer* para as linguagens formais. Estabelecer-se-ão regras que ensinam como devemos falar das linguagens formais, qual o modo correto de descrevê-las. O processo é algo analogamente próximo do processo de alfabetização que todos tivemos: uma professora ensinou-nos as letras do alfabeto, ensinou-nos a ordená-las umas após outras para formar sílabas, depois ensinou-nos a ordenar as sílabas para formar palavras e ensinou-nos a ordenar as palavras para formarmos sentenças. Nesse processo a professora incluía as regras daquilo que não poderíamos fazer. Tarski vai estabelecer definições que vão *nos ensinar a escrever a linguagem*, pois a linguagem não escreve a si própria: a linguagem descreve o mundo, mas a habilidade de escrevê-la corretamente pertence à metalinguagem. É a metalinguagem que diz coisas como ‘*a neve é branca é uma sentença de quatro palavras*’, (para a linguagem isso seria impossível sem causar paradoxalidade).

O trabalho de Tarski agora será *alfabetizar na metalinguagem* a fim de futuramente poder fazer a definição que é o objetivo final: definir *sentença verdadeira* para linguagens formalizadas. Ele expõe assim seu projeto de conceitualizações prévias que deverão anteceder a definição de *sentença verdadeira*:

[p.175]-2

Fazendo uso das expressões e dos símbolos da metalinguagem que foram até agora enumerados, definirei aqueles conceitos que estabelecem o cálculo de classes como uma ciência dedutiva formalizada. São os conceitos de *sentença*, *axioma* (*sentença primitiva*), *conseqüência* e *sentença provável*.

O primeiro passo será a definição de sentença. Isso ocorrerá na Definição 12. Em seguida a definição de *sentença primitiva*, ou *axioma*. Isso ocorrerá na Definição 13. A definição de *conseqüência* ocorrerá na Definição 15 e a de *sentença provável* na definição 17. Até a definição 17, outras definições auxiliares (Definições 14 e 16) serão apresentadas, para facilitar essas quatro definições importantes (Definições 1 a 13, e as

15 e 17). A própria definição de *sentença verdadeira* só ocorrerá na Definição 23, exigindo mais definições auxiliares. Por isso ele avisa:

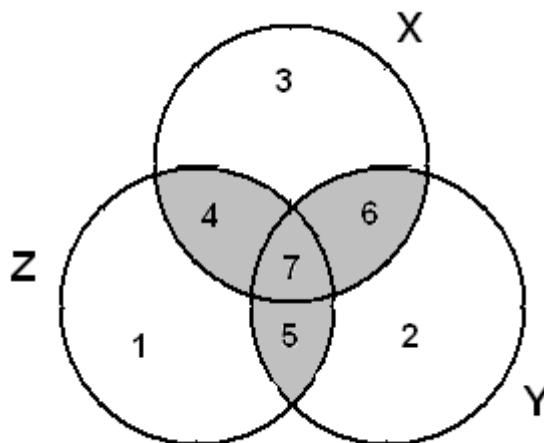
[p.175]-3

Mas introduzirei primeiro uma série de símbolos auxiliares que vão denotar vários tipos simples de expressão e facilitar grandemente as construções posteriores.

Seguindo esse projeto de Tarski, então, a primeira parte do trabalho até a definição de *sentença verdadeira* é o conjunto de definições auxiliares até a definição de *sentença*. Notemos que a função das definições do metacálculo não é estabelecer a *natureza* das relações descritas, mas apenas estabelecer o *modo correto de escrever* essas relações. A natureza delas, se funcionam ou não, é problema da *linguagem objeto* e não da *metalinguagem*.

### 1. A inclusão ( $\supset$ , $\sqsubset$ )

O que se entende por *inclusão* é o estado de relação que há entre duas classes onde os nomes de uma classe situam-se entre os nomes de outra, sem confundirmos as classes. Visualmente, são os campos 4, 5, 6 e 7 do *Diagrama de Venn* seguinte:



1 - Diagrama de Venn: inclusão

Por exemplo, como vimos em [p.170]-4, na linguagem escrevemos, em notação polonesa, ' $\supset x, Ix, x,$ ', que corresponde a  $\supset X(X \supset X)$  em nossa notação moderna usual e

que seria traduzido ‘para toda  $a$  (ou para todas as classes  $a$ )  $a \sqsubseteq a$ ’ na metalinguagem. Aprendemos desde [p.172]-8 que essa expressão metalingüística tem a seguinte forma descritivo-estrutural:  $((un \sqsubseteq v_1) \sqsubseteq in) \sqsubseteq v_2) \sqsubseteq v_3$ , que traduz descritivo-estruturalmente a notação polonesa ‘ $[x, Ix, x, ’$ , e  $[[[[un \sqsubseteq v_1] \sqsubseteq pe] \sqsubseteq v_2] \sqsubseteq in] \sqsubseteq v_3] \sqsubseteq pd$  que traduz a notação mais usual moderna ‘ $\sqsubseteq \mathbf{X}(\mathbf{X} \sqsubseteq \mathbf{X})$ ’.<sup>89</sup>

Pois bem, é preciso *saber escrever* a relação de inclusão (indiferentemente do que ela seja ou não seja):

[p.175]-4

DEFINIÇÃO 1.  $x$  é a inclusão com  $v_k$  como primeiro e  $v_l$  como segundo termo – em símbolos  $x = i_{k,l}$  – se e somente se  $x = (in \sqsubseteq v_k) \sqsubseteq v_l$ .

Aqui em [p.175]-4 o símbolo  $x$  é uma abreviação *dentro da metalinguagem* para uma sentença da linguagem onde uma inclusão está sendo descrita. É como se alguém, vendo que um indivíduo  $z$  está incluído em uma classe  $Z$ , ou noutro elemento  $y$  (que pode ser subconjunto de uma classe  $Y$ ), ou no próprio  $z$ , dissesse “Atenção! Está havendo  $x$ ”, onde  $x$  significa  $z \sqsubseteq Z$ , ou  $z \sqsubseteq y$ , ou  $z \sqsubseteq z$  etc. Tarski está usando  $x$  como uma abreviação metalingüística para o fato de estar ocorrendo uma relação de inclusão. Quais são os elementos envolvidos na inclusão? Será  $Z$ ,  $z$ ,  $y$  etc.? Não dá para saber do ponto de vista da metalinguagem do tipo descritivo-estrutural, pois nesse nível a metalinguagem não os distingue. Apenas diz que está havendo a *inclusão* descrita como  $i_{k,l}$ , envolvendo os elementos de índice  $k$  e  $l$ . Como esses elementos podem ser indivíduos (sentenças) ou classes de indivíduos (classes de sentenças), na metalinguagem isso fica representado por  $v$  (variável metalingüística do tipo descritivo-estrutural que deixa claro que na linguagem podem estar, envolvidos na inclusão, indivíduos ou classes de indivíduos, aquilo que melhor couber no lugar de  $v_k$  ou  $v_l$ ).<sup>90</sup>

---

<sup>89</sup> Por que  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ? Não se trata da mesma é única variável  $x$  na linguagem? É que a forma descritivo-estrutural dá um número de índice para cada nova posição de variável, mesmo que na linguagem objeto se trate da mesma variável.

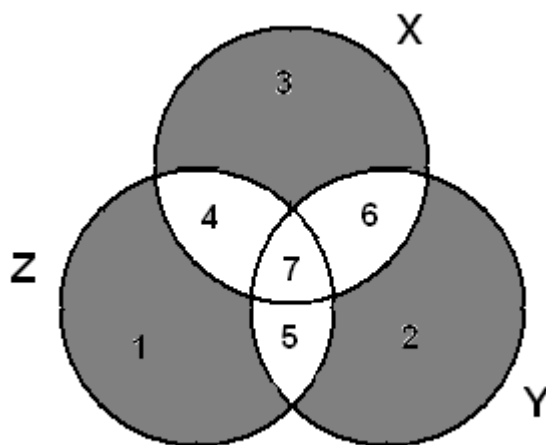
<sup>90</sup> Em TARSKI, A.; [1983e], p.283, a definição metalingüística de inclusão é dada assim (para o significado dos símbolos ver nota 47 neste trabalho) :

DEFINIÇÃO 1.

(a)  $\zeta \sqsubseteq V$  ( $\zeta$  é uma variável) se há  $k, l \sqsubseteq Nt - \{0\}$  tal que  $\zeta = \phi_k^l$ ;

## 2. A negação ( $N$ , $\neg$ )

Entende-se por negação a condição onde fica estabelecida que certa expressão – por exemplo, uma expressão linguística  $y$  qualquer – não ocorre<sup>91</sup>. Como ficou exemplificado para a definição anterior de inclusão, também podemos localizar a negação no Diagrama de Venn: a negação corresponderia aos campos 1, 2 e 3 onde 1, por exemplo, *não é X e não é Y* (e do mesmo modo podemos ler a condição dos campos 2 e 3 para X, Y e Z).



2 - Diagrama de Venn: negação

Como já foi dito no caso da inclusão, torna-se necessário estabelecer como escrever a negação. Vamos tomar uma negação qualquer – por exemplo, a negação da expressão  $y$  (para Tarski,  $y$ ) – e mostrar na linguagem e na metalinguagem suas várias leituras:

Linguagem (notação polonesa):  $Ny$ .

Linguagem (notação mais usual):  $\neg y$

Metalinguagem: ‘não ocorre  $y$ ’

(b)  $\zeta = \eta_0 \square \dots \square \eta_n$  ( $\zeta$  é uma expressão que consiste de sucessivas expressões  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ ), se  $n \square Nt, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n \square A$  e ou  $n = 0, \zeta = \eta_0$  ou  $n > 0, \zeta = (\eta_0 \square \dots \square \eta_{n-1}) \square \eta_n$ .

<sup>91</sup> Ao menos não ocorrem entre as expressões que se estiver estudando no momento.

Metalinguagem descritivo-estrutural:  $ng \sqsupset y$

A negação é definida a partir do modo como descritivo-estruturalmente ela é escrita na metalinguagem. Assim, Tarski define a negação a nível metalinguístico descritivo-estrutural como segue:

[p.175]-5

DEFINIÇÃO 2.  $x$  é a *negação* da expressão  $y$  – em símbolos  $x = y \sqsupset$  – se e somente se  $x = ng \sqsupset y$ .

Sendo uma expressão,  $y$  é tomada como um elemento unitário quando negado (mesmo quando  $y$  é composto de outras expressões). O símbolo  $x$  está dizendo que está ocorrendo a negação denominada  $y \sqsupset$ . Qual a diferença entre  $Ny$  e  $y \sqsupset$ ? É que em  $Ny$  (linguagem-objeto) a expressão  $y$  está sendo negada pelo sinal de negação  $N$  (em notação polonesa) e em  $y \sqsupset$  o que está se dizendo é que ‘está ocorrendo a negação de  $y$ ’ (metalinguagem). Como ocorre a negação de  $y$ ? Assim:  $ng \sqsupset y$ .

Passemos ao problema de definir *soma lógica*.

### 3. A Soma Lógica ( $A, \sqcup$ )

A *soma lógica* e a condição que possuem as expressões da linguagem de, sendo membros de uma ‘lista’ de expressões (uma lista é apenas a disposição lado-a-lado de elementos, sem conexão entre si, isto é, uma disposição lado-a-lado de distintos que permanecem distintos), tornam-se uma ‘sequência’ de duas ou mais expressões. A regra que determina essa possibilidade é a Regra de Adição:  $a \rightarrow (a \vee b)$ .

Em outras palavras, à uma expressão  $y$  qualquer da linguagem foi adicionada outra expressão  $z$  como alternativa à ela. A soma lógica (ou disjunção) tem as seguintes leituras na linguagem e metalinguagem:

Linguagem (notação polonesa):  $Ayz$ .

Linguagem (notação mais usual):  $y \sqcup z$

Metalinguagem: ‘ou  $y$  ou  $z$ ’

Metalinguagem descritivo-estrutural:  $(sm \sqsupset y) \sqcup z$  (para a notação polonesa),  $[y \sqcup sm] \sqcup z$  (para a notação moderna mais usual).

Como para os anteriores, é preciso definir como escrever corretamente a *soma* lógica. Tarski define a *soma lógica* descritivo-estruturalmente na metalinguagem como segue:

[p.175]-6

DEFINIÇÃO 3.  $x$  é a *soma lógica* (*disjunção*) das expressões  $y$  e  $z$  – em símbolos  $x = y + z$  – se e somente se  $x = (sm \square y) \square z$ .

A disjunção é entendida aqui como duas expressões ( $y$  e  $x$ ) distintas que permanecem distintas, mas que não estão apenas ‘lado a lado’, como em uma lista, porém formam uma sequência dita  $y + z$ , abreviada por  $x$ .

É claro que tal soma pode pôr em sequência  $n$  expressões (e não só duas). Daí a necessidade de estender a Definição 3 para  $n$  expressões. Considerando que na linguagem objeto há uma quantidade indefinida (mas finita) de expressões, Tarski define como segue, descritivo-estruturalmente na metalinguagem, o que é uma soma lógica de  $n$  expressões:

[p.175]-7

DEFINIÇÃO 4.  $x$  é a *soma lógica* das expressões  $t_1, t_2, \dots, t_n$  (ou uma soma lógica de uma sequência de  $n$  termos de expressões  $t$ ) – em símbolos  $x = \sum_t^n t_k$  – se e somente se  $t$  é uma seqüência finita de  $n$  termos de expressões que satisfaça uma das seguintes condições: ( $\alpha$ )  $n = 1$  e  $x = t_1$ ; ( $\beta$ )  $n > 1$  e  $x = \sum_k^{n-1} t_k + t_n$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Como veremos, a Definição 4 é uma definição recursiva que, como tal, suscita certos receios metodológicos. Contudo, é bem conhecido que, com a ajuda de um método geral, cuja idéia devemos a G. Frege e R. Dedekind, toda definição recursiva pode ser transformada em uma definição normal equivalente (cf. Dedekind, R. (15), p.33-40, e Whitehead, A. N., e Russell, B. A. W. (90), v.I, p.550-7, e v.3, p.244). Isso, contudo, não é prático, na medida em que as formulações assim obtidas têm uma estrutura lógica mais complicada, são menos claras com respeito a seu conteúdo, e são menos adequadas a derivações adicionais. Por tais razões eu não proponho evitar definições recursivas no que segue.

O sinal ‘ $\Sigma$ ’ aqui tem a mesma natureza matemática do sinal ‘+’ visto em [p.175]-6. A situação é a da construção da sequência  $t_1 \square t_2 \square \dots \square t_n$  a partir da lista  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Há duas cláusulas importantes a considerar:

Cláusula ( $\alpha$ ): sendo uma sequência infinita, ela deve ter pelo menos um elemento e pode ter apenas esse único elemento. Assim, tem-se a disjunção  $x$ , composta de uma única expressão  $t$ .

Cláusula ( $\beta$ ): sendo  $y$  uma expressão complexa qualquer, composta da disjunção de várias expressões  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , tal que  $k < n$ , sempre é possível fazer  $y + t_n$  (Definição

3) e obter a expressão mais complexa  $x = \sum_k^{n-1} t_k + t_n$ . Em outras palavras, a Cláusula ( $\beta$ )

diz que sempre é possível adicionar uma nova expressão a outras adicionadas anteriormente.

Na *nota de rodapé 1* Tarski faz uma discussão a respeito da natureza recursiva<sup>92</sup> da Definição 4. Os receios metodológicos que Tarski aponta serem suscitados são os problemas que acompanham a indução finita em matemática. Tarski cita os trabalhos de Frege e Dedekind<sup>93</sup> para dizer que toda definição recursiva pode ser reduzida até uma definição normal (que não pode ser mais reduzida). Porém, lidar com definições normais diminui largamente as derivações possíveis – e úteis – necessárias à caracterização das sentenças das linguagens de primeira ordem, segundo o projeto pretendido por Tarski. Por isso ele próprio aconselha continuar lidando com as definições em suas formas recursivas.

#### 4. Definição de *produto lógico* ( $\cdot$ , $\square$ )

Um *produto lógico* é a conjunção de duas expressões da linguagem. É preciso que a metalinguagem defina o modo correto de escrever o *produto lógico*:

---

<sup>92</sup> Não precisamos nos deter em uma definição criteriosa de recursividade (assim, é recursivo o problema resolvido como se resolve suas partes). Só para esclarecer, a recursividade segue o seguinte esquema, dado qualquer problema:

- 1) Se for uma instância pequena, procura-se resolvê-lo diretamente (mesmo envolvendo “força bruta”);
- 2) Se for uma instância muito grande, deve-se reduzi-lo à menor instância resolvida pelo método (1) e depois resolvê-lo.

<sup>93</sup> A respeito da numeração bibliográfica citada por Tarski e sobre a obra de Russell e Whitehead ver nota de rodapé 31. O trabalho de Dedekind é (15): R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?* 5<sup>th</sup>. Ed. (Braunschweig, 1923).

[p.176]-1

DEFINIÇÃO 5.  $x$  é o *produto lógico (conjunção)* das expressões  $y$  e  $z$  – em símbolos  $x = y \cdot z$  – se e somente se  $x = \overline{y + z}$ .

A conjunção considera que as duas expressões,  $y$  e  $z$ , ocorrem sem que a presença de uma delas exija a exclusão da outra. Só é possível haver a conjunção de duas expressões se for impossível adicionar as negações delas, por exemplo, ser impossível ocorrer  $\neg(\neg y \sqcup \neg z)$  – em notação moderna mais usual  $\neg$ , ou  $NANyNz$  (em notação polonesa). Ao traduzir o símbolo ‘ $\cdot$ ’ da notação de Tarski para uma moderna mais usual, usaremos o símbolo ‘ $\sqcup$ ’. É fácil ver que a Definição 5 é a Lei de De Morgan:  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \leftrightarrow \neg(\neg \mathbf{a} \vee \neg \mathbf{b})$ .

Tarski classificou as Definições 2, 3, 4 e 5, vistas aqui, todas como a Definição 2 em seu trabalho *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, de 1933, onde lemos (TARSKI, A.; [1983e], p.283):<sup>94</sup>

“DEFINIÇÃO 2.

(a)  $\zeta = \eta \sqcup$  ( $\zeta$  é a negação de  $\eta$ ), se  $\eta \sqcup A$ ,  $\eta = \vee \sqcup \eta$ ;

(b)  $\zeta = \eta \rightarrow \delta$  ( $\zeta$  é a implicação com  $\eta$  como antecedente e  $\delta$  como conseqüente), se  $\eta, \delta \sqcup A$ ,  $\zeta = \sqcup \eta \sqcup \delta$ ;

(c)  $\zeta = \eta \sqcup \delta$  ( $\zeta$  é a soma lógica ou disjunção de  $\eta$  e  $\delta$ ), se  $\eta, \delta \sqcup A$ ,  $\zeta = \eta \sqcup \rightarrow \delta$ ;

(d)  $\zeta = \eta \sqcup \dots \sqcup \eta_n$  ( $\zeta$  é a soma lógica de  $\eta_0 \sqcup \eta_1 \dots \sqcup \eta_n$ ), se  $n \sqcup Nt$ ,  $\eta_0 \sqcup \eta_1 \dots \sqcup \eta_n \sqcup A$  e ou  $n = 0$ ,  $\zeta = \eta_0$  ou  $n > 0$ , e  $\zeta = ((\sqcup \eta_0) \sqcup \dots (\sqcup \eta_{n-1})) \sqcup \eta_n$ ;

(e)  $\zeta = \eta \sqcup \delta$  ( $\zeta$  é o produto lógico ou conjunção de  $\eta$  e  $\delta$ ), se  $\eta, \delta \sqcup A$ ,  $\zeta = \overline{\eta \vee \delta}$ ;

(f)  $\zeta = \overline{\eta \sqcup \dots \sqcup \eta_n}$  ( $\zeta$  é o produto lógico de  $\eta_0 \sqcup \eta_1 \dots \sqcup \eta_n$ ), se  $n \sqcup Nt$ ,  $\eta_0 \sqcup \eta_1 \dots \sqcup \eta_n \sqcup A$  e  $\zeta = \eta_0 \vee \dots \vee \eta_n$ ;

(g)  $\zeta = \eta \sqcup \delta$  ( $\zeta$  é a equivalência lógica de  $\eta$  e  $\delta$ ), se  $\eta, \delta \sqcup A$ ,  $\zeta = (\eta \rightarrow \delta) \sqcup (\delta \rightarrow \eta)$ ;

## 5. A Quantificação Universal ( $\sqcap$ , $\sqcup$ )

Se em uma expressão há variáveis, é possível dizer que uma (ou todas) denota um indivíduo qualquer que pertença a uma classe, de modo que todo indivíduo dessa classe cabe no lugar da variável (quando ocorre uma substituição). Não vamos entrar em detalhes a esse respeito, pois um mínimo de conhecimento a respeito de lógica de

<sup>94</sup> Para o significado dos símbolos, ver nota 47

primeira ordem permite interpretar, por exemplo, a fórmula  $x = \forall y(Ay)$ , que quer dizer, ‘ $x$  é a expressão: *para todo  $y$ ,  $y$  tem a característica  $A$  (ou é expressão da classe  $A$ )*’.

Tarski aponta a necessidade de se explicitar como escrever adequadamente a *quantificação universal*, e para isso define essa escrita a nível metalingüístico descritivo-estruturalmente como segue:

[p.176]-2

DEFINIÇÃO 6.  $x$  é a *quantificação universal* da expressão  $y$  sob a variável  $v_k$  – em símbolos  $\forall_{v_k} y$  – se e somente se  $x = (un \forall v_k) \forall y$ .

No caso,  $y$  é uma expressão com uma variável que está universalmente quantificada. Por exemplo, podemos ter (em notação polonesa) a seguinte expressão:  $\forall z, I_z, z$ , (isto é, ‘para todo  $z$ ,  $z$ , está incluso em  $z$ ,’). Podemos fazer  $y = I_z, z$ , e teremos:  $\forall z, y$ , onde  $z$ , é a variável que ocorre em  $y$ . Um estudo de traduções segue-se:

Linguagem (notação polonesa):  $\forall z, y$ .

Linguagem (notação mais usual):  $\forall z_1(y)$

Metalinguagem: ‘para todo  $a$ ,  $a$  está incluso em  $y$ ’

Metalinguagem descritivo-estrutural:  $(un \forall v_1) \forall y$  (para a notação polonesa),  $[un \forall v_1] \forall pe \forall y \forall pd$  (para a notação moderna mais usual).

Portanto, se existe uma expressão  $x$  da linguagem objeto que é a quantificação universal da variável de  $y$ , dizemos que  $x$  é a *quantificação universal* expressa por  $\forall_{v_k} y$ , onde  $k$  é o índice da variável de  $y$  que foi universalmente quantificada. Pode ser o caso que  $y$  tenha uma única variável universalmente quantificada, ou muitas variáveis (mas em número finito), todas universalmente quantificadas. Por isso torna-se necessário a definição seguinte:

[p.176]-3

DEFINIÇÃO 7.  $x$  é a *quantificação universal* da expressão  $y$  referida sob as variáveis  $v_{p_1}, v_{p_2}, \dots, v_{p_n}$  – em símbolos  $x = \bigcap_{p_k}^{k \leq n} y$  – se e somente se  $p$  é uma seqüência finita de  $n$ -termos de números naturais que satisfaz uma das seguintes condições: ( $\alpha$ )  $n = 1$  e  $x = \bigcap_{p_1} y$ , ( $\beta$ )  $n > 1$  e  $x = \bigcap_{p_k}^{k \leq n-1} \bigcap_{p_n} y$ .

Neste caso, está se considerando a possibilidade de  $y$  ter uma única (Cláusula ( $\alpha$ )) ou muitas, mas finitas, variáveis (Cláusula ( $\beta$ )). Se  $y$  contém uma quantidade finita  $v_{p1}, v_{p2}, \dots, v_{pn}$  de variáveis e  $x$  é a quantificação universal de  $y$ , dizemos que  $x$  é a quantificação expressa por  $x = \bigcap_{p_k}^{k \leq n} y$ . Se o  $y$  contém apenas uma variável  $v_{p1}$ , cabe a Cláusula ( $\alpha$ ), que nada mais é que a própria Definição 6 onde no lugar de  $k$  está o índice  $p_1$ . Se  $y$  contém mais que uma única variável, então cabe a Cláusula ( $\beta$ ). A Cláusula ( $\beta$ ) quer dizer que deve ser feita a quantificação universal de cada variável.

Por exemplo, vamos supor a expressão (em notação moderna mais usual)  $\square z(y)$ , se  $y$  está no lugar de  $z \square Z$  (isto é, uma expressão nos diz “para todo  $z$ ,  $z$  é sentença da classe  $Z$ ”), então temos uma expressão onde o escopo da quantificação é a única variável  $z$  e cabe a Cláusula ( $\alpha$ ), e a expressão é uma quantificação do tipo  $x = \bigcap_{p_1} y$ . Se no lugar de  $y$  tivermos  $((z \square Z) \cdot (w \square W) \cdot (t \square T) \cdot (u \square U))$ , a quantificação adequada deve ser  $\square z \square w \square t \square u ((z \square Z) \cdot (w \square W) \cdot (t \square T) \cdot (u \square U))$  (isto é, uma expressão nos diz “para todo  $z$ , para todo  $w$ , para todo  $t$ , para todo  $u$ ,  $z$  é sentença da classe  $Z$ ,  $w$  é sentença da classe  $W$ ,  $t$  é sentença da classe  $T$ ,  $u$  é sentença da classe  $U$ ”), então temos uma expressão onde os escopos de cada quantificação é cada variável da expressão, e cabe a Cláusula ( $\beta$ ), e a quantificação é do tipo  $x = \bigcap_{p_k}^{k \leq n-1} \bigcap_{p_n} y$  (isto é,  $z, w$  e  $t$  – se quiséssemos substituir esses símbolos por letras ‘ $p$ ’ de índice  $i$  – são as variáveis que cabem a  $\bigcap_{p_k}^{k \leq n-1}$ , e  $u$  é a última variável da expressão, variável última essa que cabe a  $\bigcap_{p_n} y$ ).

Assim, fica estabelecido que se  $y$  é constituída de várias expressões (termos),  $y$  só estará quantificada universalmente se todos os termos até o último estiverem tomados universalmente. Essa quantificação universal pode ser feita quantificando-se universalmente cada termo, um por um, até o último termo (isto é, cada termo é escopo de um seu e só seu quantificador).

Fica faltando só deixar claro em que condições há uma quantificação universal:

[p.176]-4

DEFINIÇÃO 8.  $x$  é uma *quantificação universal* da expressão  $y$  se e somente se ou  $x = y$  ou há uma seqüência finita  $p$  de  $n$ -termos de números naturais tais que  $x = \bigcap_{k \leq n} y$ .

Em outras palavras,  $x$  é uma quantificação universal se for igual a  $y$  e  $y$  for uma quantificação universal. Ou se  $x$  for igual a  $y$  e  $y$  for quantificável universalmente (todas as suas variáveis forem escopo de um quantificador, como é explicado por “há uma seqüência finita  $p$  de  $n$ -termos de números naturais tais que  $x = \bigcap_{p_k}^{k \leq n} y$ ”.

### 6. A Quantificação Existencial ( $\exists$ , $\forall$ )

A característica própria da quantificação existencial é – dado uma variável numa expressão qualquer – definir que existe um indivíduo que satisfaz essa variável, isto é, que se a variável denota as sentenças de determinada classe, fica definido que tal classe não é vazia, que ela tem pelo menos um indivíduo que possa ser colocado no lugar da variável.

Na verdade, a quantificação existencial é uma generalização do produto lógico visto em [p.176]-1. Tarski definiu assim o modo correto de escrever metalinguisticamente descritivo-estruturalmente a quantificação existencial:

[p.176]-5

DEFINIÇÃO 9.  $x$  é a *quantificação existencial* da expressão  $y$  sob a variável  $v_k$  – em símbolos  $x = \bigcup_k y$  – se e somente se  $x = \overline{\bigcap_k \overline{y}}$ .

Em outras palavras, a classe de  $x$  constituída quantificação de  $y$  não é vazia se e somente se for impossível construir a disjunção de todas as negações de todos os termos de  $y$ . Fica assim garantida que existe pelo menos uma quantificação de  $y$  tal que  $x = y$ .

Tarski classificou as Definições 6, 7, 8 e 9, vistas aqui, todas como a Definição 3 em seu trabalho *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, de 1933, onde lemos (TARSKI, A.; [1983e], p.283):<sup>95</sup>

“DEFINIÇÃO 3.

(a)  $\zeta = \prod_k^l \eta$  ( $\zeta$  é a quantificação universal de  $\eta$  com respeito à variável  $\phi_k^l$ ), se  $k, l \in Nt - \{0\}$ ,  $\eta \in A$  e  $\zeta = \pi \phi_k^l \eta$ ;

<sup>95</sup> Para o significado dos símbolos, ver nota 47

- (b)  $\zeta = \prod_{k_0}^{l_0} \dots \prod_{k_n}^{l_n} \eta$  ( $\zeta$  é a quantificação universal de  $\eta$  com respeito às variáveis  $\phi_{k_0}^{l_0}, \phi_{k_1}^{l_1}, \dots, \phi_{k_n}^{l_n}$ ), se  $\eta \in A$  e  $n, k_0, l_0, k_1, l_1, \dots, k_n, l_n \in Nt - \{0\}$  e  $\zeta = ((\pi \phi_{k_0}^{l_0}) \dots (\pi \phi_{k_n}^{l_n})) \square \eta$ ;
- (c)  $\zeta = \prod_{k_0}^{l_0} \eta$  ( $\zeta$  é a quantificação existencial de  $\eta$  com respeito à variável  $\phi_{k_0}^{l_0}$ ), se  $k_0, l_0 \in Nt - \{0\}$ ,  $\eta \in A$  e  $\zeta = \overline{\prod_{k_0}^{l_0} \eta}$ ;
- (d)  $\zeta = \prod_{k_0}^{l_0} \dots \prod_{k_n}^{l_n} \eta$  ( $\zeta$  é a quantificação existencial de  $\eta$  com respeito às variáveis  $\phi_{k_0}^{l_0}, \phi_{k_1}^{l_1}, \dots, \phi_{k_n}^{l_n}$ ), se  $\eta \in A$  e  $n, k_0, l_0, k_1, l_1, \dots, k_n, l_n \in Nt - \{0\}$  e  $\zeta = \overline{\prod_{k_0}^{l_0} \dots \prod_{k_n}^{l_n} \eta}$ .

Com a Definição 9, Tarski encerra as condições preparatórias para definir *função sentença* e *sentença significativa*.

Essas nove definições vistas, se usadas em combinação diversas vezes, permitirão as diversas expressões da linguagem objeto. Em outras palavras elas são o modo mais simples de se escrever. A combinação desses ‘modos simples de escrita’ permitirão obter as expressões complexas.

Tarski faz essa introduz essa idéia no texto que antecede as definições referentes à expressões complexas da linguagem objeto:

[p.176]-6

Assim introduzimos três operações fundamentais por meio das quais expressões compostas são formadas dessas simples: negação, adição lógica e quantificação universal. (Adição lógica é, naturalmente, a operação que consiste em formar as somas lógicas de dadas expressões. Os termos ‘negação’ e ‘quantificação universal’ são ambos usados para se referirem tanto a certas operações sobre expressões como a expressões resultantes dessas operações.)

Em suma, a linguagem de primeira ordem escolhida por Tarski para objeto de estudo tem como conectivos lógicos a negação (conectivo unário) e a disjunção (conectivo binário para adição lógica). A quantificação universal (como a negação) é uma operação sobre uma expressão e também o nome dado ao produto dessa operação.

Sabendo que na base de toda sentença da linguagem estão as relações existentes entre as operações fundamentais, Tarski pode iniciar a caracterização da natureza das sentenças.

## 7. Definição de *função sentencial*

Será necessário aprender a escrever uma *função sentencial*. Tarski aponta que as *funções sentenciais* resultam das múltiplas operações feitas com as operações definidas nas nove definições vistas no capítulo anterior. Assim:

[p.176]-7

Se, começando com as inclusões  $i_{k,l}$ , executarmos as operações acima qualquer número de vezes, chegaremos a uma extensa classe de expressões que são chamadas funções sentenciais. Obtemos o conceito de *sentença* como um caso especial dessa noção.

Fica explicitado que uma função sentencial (e por consequência uma *sentença*) resultam do conjunto de operações fundamentais executadas um número indefinido de vezes, repetindo ou não ao menos uma das operações fundamentais. Entendido isso, Tarski passa à definição de *função sentencial*, para mostrar qual é o modo correto de escrever uma *função sentencial*:

[p.177]-1

DEFINIÇÃO 10.  $x$  é uma *função sentencial* se e somente se  $x$  é uma expressão que satisfaz uma das quatro condições seguintes: ( $\alpha$ ) há números naturais  $k$  e  $l$  tais que  $x = i_{k,l}$ ; ( $\beta$ ) há uma função sentencial  $y$  tal que  $x = y \square$ ; ( $\gamma$ ) há as funções sentenciais  $y$  e  $z$  tais que  $x = y + z$ ; ( $\delta$ ) há um número natural  $k$  e uma função sentencial  $y$  tal que  $x = \bigcap_k y$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> A Def. 10 é uma definição recursiva de um tipo diferente daquele da Def. 4, uma vez que a usual ‘transição de  $n-1$  a  $n$ ’ esta faltando nela. Para reduzir isso a uma definição indutiva ordinária, devemos primeiro definir indutivamente as expressões ‘ $x$  é uma função sentencial de  $n$ -ésimo grau’ (as inclusões  $i_{k,l}$  serão então funções de 0 grau, as negações e somas lógicas dessas inclusões, bem como sua quantificação universal sob qualquer variável, funções de 1º grau, e assim por diante), e então simplesmente estipular que ‘ $x$  é uma função sentencial’ significa o mesmo que ‘há um número natural  $n$  tal que  $x$  é uma função sentencial de  $n$ -ésimo grau’. A Def. 10 pode também ser transformada em uma definição normal equivalente do seguinte modo:

“ $x$  é uma função sentencial se e somente se a fórmula  $x \square X$  vale para toda classe  $X$  que satisfaça as seguintes quatro condições: ( $\alpha$ ) se  $k$  e  $l$  são números naturais diferentes de 0, então  $i_{k,l} \square X$ ; ( $\beta$ ) se  $y \square X$ , então  $y \square \square X$ ; ( $\gamma$ ) se  $y \square X$  e  $z \square X$ , então  $y + z \square X$ ; ( $\delta$ ) se  $k$  é um número natural distinto de 0 e  $y \square x$ , então  $\bigcap_k y \square X$ .”

Deveria ser enfatizado que definições recursivas do tipo da Def. 10 estão abertas a objeções metodológicas muito mais serias do que as definições indutivas usuais, desde que em contraste com a última, enunciados desse tipo nem sempre admitem uma transformação em definições normais equivalentes (ver p.175, nota 1). O fato de que tal transformação é possível no caso presente deve-se a natureza especial dos conceitos que ocorrem na definição (nominalmente, ao fato de que toda expressão tem um comprimento finito e também que as operações dadas nas condições ( $\beta$ )-( $\delta$ ) sempre levam de expressões curtas até as longas). Se, no entanto, algumas vezes eu dou definições desse tipo no presente artigo em lugar das definições normais equivalentes (Def. 10, 11, 14, 22, e 24), eu o faço porque tais definições têm vantagens importantes de outra espécie: elas expõem o conteúdo do conceito definido mais claramente do que fazem as definições normais, e – em contraste com as definições recursivas usuais – elas não requerem nenhuma introdução prévia de conceitos auxiliares que não são usados em outro lugar (e.g. o conceito auxiliar de uma função sentencial de  $n$ -ésimo grau).

Assim, é *função sentencial*<sup>96</sup> a expressão escrita na linguagem objeto que, sendo complexa, pode ser reduzida a:

<sup>96</sup> Em seu trabalho *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, de 1933, (ver TARSKI, A.; [1983e], p.284), Tarski trata as *funções sentenciais* como *sentenças atômicas*, na Definição 4, que lemos como segue (para o significado dos símbolos, ver nota 47):

“DEFINIÇÃO 4.

(a)  $\zeta = \varepsilon_{k,l}^m$  ( $\zeta$  é a sentença atômica com os termos  $\phi_k^m$  e  $\phi_l^{m+1}$ ), se  $k, l, m \in Nt - \{0\}$ ,  $\zeta = \phi_k^m \square \phi_l^{m+1}$ ;

(b)  $\zeta = \tau_{k,l}^m$  ( $\zeta$  é a identidade entre  $\phi_k^m$  e  $\phi_l^m$ ), se  $k, l, m \in Nt - \{0\}$  e  $\zeta = \bigcap_{l=1}^{m+1} (\varepsilon_{k,l}^m \rightarrow \varepsilon_{l,k}^m)$ .”

Cláusula ( $\alpha$ ): uma inclusão (a inclusão é uma *promotor da função sentencial x*).

Cláusula ( $\beta$ ): uma negação (a negação é uma *promotor da função sentencial x*).

Cláusula ( $\gamma$ ): uma adição lógica (a adição lógica é um *promotor da função sentencial x*).

Cláusula ( $\delta$ ): uma quantificação universal (a quantificação universal é uma *promotor da função sentencial x*).

As questões apontadas na *nota de rodapé 1* neste trecho são:

1º) sobre a recursividade da Definição 10. Para torná-la recursiva do mesmo modo como se entende a Definição 4, basta introduzir que '*x é uma função sentencial*' significa o mesmo que '*há um número natural n tal que x é uma função sentencial de n-ésimo grau*'. Estabelecido isso, fica definido que uma função sentencial de *n-ésimo grau* pode ser reduzida (e expostas suas partes mais simples de graus menores) a um grau menor para ser resolvida.

2º) sobre a definição normal equivalente. A Definição 10 é uma forma complexa de definição que tem uma versão mais simples: uma definição normal, onde as partes mais simples da definição estão explícitas.

3º) sobre a impossibilidade de algumas definições não terem uma definição normal equivalente. Esse problema ele já tratou na *nota de rodapé 1* em [p.175]-7.

4º) sobre a vantagem de se preferir uma definição mais complexa a uma normal. Também já foi visto em [p.175]-7.

Afim de esclarecer, Tarski dá alguns exemplos para a Definição 10:

[p.177]-2

As seguintes expressões servirão como exemplos de funções sentenciais, de acordo com a Def. 10: '*I<sub>x,x,,</sub>*', '*NI<sub>x,x,,</sub>*', '*AI<sub>x,x,,I<sub>x,x,</sub></sub>*', '*Π<sub>x,NI<sub>x,x,,</sub></sub>*', e assim por diante. Por outro lado, as expressões '*I*', '*I<sub>x</sub>*', '*AI<sub>x,x,,</sub>*', '*Π<sub>I<sub>x,x,</sub></sub>*' etc., não são funções sentenciais.

'*I<sub>x,x,,</sub>*' é uma inclusão (cláusula ( $\alpha$ )) escrita na linguagem objeto (em notação moderna mais usual seria  $\mathbf{x}_1 \sqsubseteq \mathbf{x}_2$ ); '*NI<sub>x,x,,</sub>*' é uma negação (cláusula ( $\beta$ )) escrita na linguagem objeto (em notação moderna mais usual seria  $\neg(\mathbf{x}_1 \sqsubseteq \mathbf{x}_2)$ ); '*AI<sub>x,x,,I<sub>x,x,</sub></sub>*' é uma soma lógica (cláusula ( $\gamma$ )) escrita na linguagem objeto (em notação moderna mais usual seria  $(\mathbf{x}_1 \sqsubseteq \mathbf{x}_2) \sqcup (\mathbf{x}_2 \sqsubseteq \mathbf{x}_1)$ ); '*Π<sub>x,NI<sub>x,x,,</sub></sub>*' é uma quantificação universal (cláusula ( $\delta$ )) es-

crita na linguagem objeto (em notação moderna mais usual seria  $\Box x(\neg(x_1 \Box x_2))$ ). Todas são funções sentenciais. Os exemplos de expressões que não são funções sentenciais mostram o seguinte impedimento para serem funções sentenciais: em ‘ $I$ ’, a expressão não fornece indivíduos de índice  $k$  e  $l$  (metalinguisticamente falando) para se efetivar uma inclusão; em ‘ $Ix$ ’ ocorre o mesmo; em ‘ $AIx,x,,$ ’ a soma lógica não está efetivada; em ‘ $\Pi Ix,x,,$ ’ falta a variável sob a qual se faz a quantificação universal.

Tarski explica que toda função sentencial pode ser traduzida metalinguisticamente:

[p.177-178]

Facilmente se vê que para toda função sentencial na linguagem podemos automaticamente construir um nome descritivo-estrutural dessa função na metalinguagem, fazendo uso exclusivamente de símbolos que foram introduzidos nas Defs. 1, 2, 3, e 6. Por exemplo, as seguintes expressões simbólicas servem como nomes dos exemplos de funções sentenciais acima: ‘ $I_{1,2}$ ’, ‘ $\overline{I_{1,2}}$ ’, ‘ $I_{1,2} + I_{2,1}$ ’, ‘ $\bigcap_1 \overline{I_{1,2}}$ ’.

A tradução fica melhor explícita no quadro seguinte:

TRADUÇÃO LINGUAGEM-METALINGUAGEM			
Notação polonesa	Notação moderna mais usual	Nome metalinguístico	Nome metalinguístico descritivo-estrutural.
$Ix,x,,$	$x_1 \Box x_2$	‘a está incluído em b’ ou ‘ $a \Box b$ ’ <sup>97</sup>	$I_{1,2}$
$NIx,x,,$	$\neg(x_1 \Box x_2)$	‘não ocorre que a está incluído em b’ ou ‘ $a \Box b$ ’	$\overline{I_{1,2}}$
$AIx,x,,Ix,x,,$	$(x_1 \Box x_2) \Box (x_2 \Box x_1)$	‘ou a está incluído em b’ ou ‘b está incluído em a’ ou ‘ $(a \Box b) \Box (b \Box a)$ ’	$I_{1,2} + I_{2,1}$
$\Pi Ix,NIx,x,,$	$\Box x(\neg(x_1 \Box x_2))$	‘para todo x, não ocorre que a está incluído em b’ ou ‘para todo x, $a \Box b$ ’	$\bigcap_1 \overline{I_{1,2}}$

<sup>97</sup> Para saber por que neste trabalho estamos usando o símbolo ‘ $\Box$ ’, ver os comentários ao trecho [pp.168-169] deste artigo de Tarski. Lembrando também que  $a$  e  $b$  são variáveis metalinguísticas já segundo a simbologia escolhida pelo próprio Tarski (ver [p.173]-1).

Aprendemos assim como uma *função sentencial* é facilmente traduzida para a metalinguagem. Só para reforçar a idéia, metalinguisticamente falando, a expressão em linguagem formal ‘ $Ix,x,,$ ’ se escreve ‘ $i_{1,2}$ ’ (Definição 1); ‘ $NIx,x,,$ ’ se escreve ‘ $\overline{i_{1,3}}$ ’ (Definição 2); ‘ $AIx,x,,Ix,x,$ ’ se escreve ‘ $i_{1,3} + i_{3,1}$ ’ (Definição 3) e ‘ $\Pi x,x,,$ ’ se escreve ‘ $\prod_1 \overline{i_{1,2}}$ ’ (Definição 6).

### 8. Definição de *variável livre*

Sabendo como escrever adequadamente na linguagem objeto uma sentença significativa, fica notável o fato de nela existirem certos símbolos – as variáveis livres – que podem denotar quaisquer nomes (nomes de sentença, como aprendemos na discussão a respeito da primeira parte deste artigo de Tarski que vimos comentando). É necessário agora aprender a escrever adequadamente as variáveis na linguagem objeto. Passa Tarski à definição de *variável livre*.

[p.178]-1

DEFINIÇÃO 11.  $v_k$  é uma *variável livre* da função sentencial  $x$  se e somente se  $k$  é um número natural diferente de 0, e  $x$  é uma função sentencial que satisfaz uma das quatro condições seguintes: ( $\alpha$ ) há um número natural  $l$  tal que  $x = i_{k,l}$  ou  $x = \overline{i_{l,k}}$ ; ( $\beta$ ) há uma função sentencial  $y$  tal que  $v_k$  é uma variável livre de  $y$  e  $x = \overline{y}$ ; ( $\gamma$ ) há funções sentenciais  $y$  e  $z$  tais que  $v_k$  é uma variável livre de  $y$  e  $x = y + z$  ou  $x = z + y$ . ( $\delta$ ) há um número natural  $l$  diferente de  $k$  e uma função sentencial  $y$  tais que  $v_k$  é uma variável livre de  $y$  e  $x = \prod_l y$ .

Uma *variável livre* é um símbolo que está no lugar de qualquer nome de sentença de qualquer classe de nomes. É dita *livre* porque não fica claro se a classe (ou classes) cujos nomes ela denota só tem um nome que satisfaz a variável sob as condições colocadas na expressão onde a variável aparece, ou se vários ou todos os nomes da classe (ou classes) satisfazem. Quem tira a variável da condição de ser livre para a condição de ser *ligada* é a *quantificação universal*: se a quantificação universal tiver a variável sob escopo, então essa variável passa a ser *ligada*; se não tiver, ela continua *variável livre*. Em linhas gerais, a Definição 11 aponta só quatro condições onde uma variável  $v_k$  é dita *livre*:

Cláusula ( $\alpha$ ): as variáveis das inclusões são livres. De fato, inclusões são fórmulas atômicas e nas fórmulas atômicas não há quantificadores;

Cláusula ( $\beta$ ): a negação não liga as variáveis livres da função sentencial negada;

Cláusula ( $\gamma$ ): as variáveis das somas lógicas são livres se ao menos uma das expressões somadas não for uma quantificação universal ou se for, estiver na condição da cláusula ( $\delta$ ). De fato, em uma disjunção as variáveis livres são as mesmas de um (ou de ambos) os disjuntos;

Cláusula ( $\delta$ ): nas quantificações universais, as variáveis que não fazem parte do escopo da quantificação universal são livres (no caso, a quantificação universal tem por escopo todas as variáveis da expressão até aquela de índice  $l$ , deixando livre a de índice  $k$ ).

A respeito da natureza das variáveis na função sentencial sobra apenas nomear as variáveis não-livres:

[p.178]-2

Variáveis que ocorrem em uma função sentencial, mas não são variáveis livres nessa função, são usualmente chamadas *variáveis (aparentes) ligadas*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Cf. Hilbert, D., e Ackermann, W. (30), pp. 52-54.

O número entre parênteses na *nota de rodapé 1* se refere à numeração da bibliografia no fim da coletânea das obras de Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*<sup>98</sup>.

### 9. Definição de *sentença significativa*

De posse de todas as definições até aqui, em especial a Definição 10 e a distinção clara que a Definição 11 deixa a respeito da *variável livre*, é possível dar o primeiro passo concreto na direção da definição de *sentença verdadeira*: a Definição 12, que vai definir *sentença significativa*.<sup>99</sup>

<sup>98</sup> Ver nota 31 neste trabalho. A obra citada por Tarski nesta *nota de rodapé 1* é (30): D. HILBERT and W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928).

<sup>99</sup> Em seu trabalho de 1933, *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, Tarski preferiu que a definição de variável livre ficasse depois da definição de sentença significativa, e não antes como aqui. Lemos nesse artigo (ver TARSKI, A.; [1983e], p.284; para o significado dos símbolos, ver nota 47):

“DEFINIÇÃO 6.

[p.178]-3

DEFINIÇÃO 12.  $x$  é uma sentença (ou uma sentença significativa) – em símbolos,  $x \in S$  – se e somente se  $x$  é uma função sentencial e nenhuma variável  $v_k$  é uma variável livre da função  $x$ .

Dar sentido a uma função sentencial, de fato, é ligar todas as suas variáveis. Não há como ser significativa a função sentencial em que há uma ou mais variáveis livres. Por exemplo, na função sentencial “ $\forall x(\neg(x_1 \sqcup x_2) \sqcup y_1)$ ” a variável  $y_1$  é livre e, se fossemos dar um exemplo em linguagem natural, poderíamos escrever “Qualquer que seja o jogo de tabuleiro, ou não ocorre que seja damas e xadrez, ou a lua é redonda”. A sentença não tem sentido porque  $y_1 =$  “a lua é redonda” soa gratuito. Ligando essa variável, a função sentencial assume significado. Por exemplo, “ $\forall x \forall y(\neg(x_1 \sqcup x_2) \sqcup y_1)$ ”, que pode ser algo como “qualquer que seja o jogo de tabuleiro, qualquer que seja o satélite natural da Terra, ou não ocorre que seja damas e xadrez, ou a lua é redonda”.

Em seu trabalho de 1933, *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, Tarski (TARSKI, A.; [1983e], p.284) apresenta essa definição 12 na forma seguinte:<sup>100</sup>

“DEFINIÇÃO 5:  $\zeta \in S$  ( $\zeta$  é uma sentença significativa), se  $\zeta$  pertence a todo conjunto  $X$  que satisfaça as seguintes condições: (1)  $\forall k, l, m \in Nt - \{0\}$ ; (2) se  $\eta \in X$ , então  $\eta \sqcup \eta \in X$ ; (3) se  $\eta, \delta \in X$ , então  $\eta \rightarrow \delta \in X$ ; (4) se  $k, l \in Nt - \{0\}$  e  $\eta \in X$  então  $\bigvee_k \eta \in X$ .”

Em uma nota de rodapé nesta passagem do *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, Tarski reserva a palavra ‘sentença’ para as funções sentenciais sem variáveis livres. No artigo que estamos trabalhando – *Concept of truth in formalized languages* – Tarski dá na sequência da definição 12 os seguintes exemplos:

(a)  $\zeta \in \mathbb{F}_m \eta$  ( $\zeta$  ocorre no  $m$ -ésimo lugar em  $\eta$  como uma variável livre), se  $m \in Nt$ ,  $\zeta \in V$  e se  $\eta$  pode ser representado na forma:  $\eta = \delta_0 \sqcup \dots \sqcup \delta_n$ , onde  $n \in Nt$ ,  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n \in \{v, \iota, \pi\} + V$ ,  $m \leq n$ ,  $\delta_m = \zeta$  e não há números  $k, l \in Nt$  tal que  $k \leq m \leq k+l \leq n$ ,  $\delta_k = \pi$ ,  $\delta_{k+l} = \zeta$  e  $\delta_k \sqcup \dots \sqcup \delta_{k+l} \in S$ .”

<sup>100</sup>Para o significado dos símbolos ver nota 47 neste trabalho.

[p.178]-4

Então as expressões  $\forall_1 t_{1,1}$ ,  $\forall_1 \forall_2 t_{1,2}$ ,  $\forall_1 U_2 t_{1,2}$  e  $\forall_1 (t_{1,1} + \forall_1 U_2 t_{1,2})$  são sentenças, mas as funções:  $t_{1,1}$ ,  $\forall_2 t_{1,2}$ ,  $U_2 t_{1,2}$  e  $t_{1,1} + \forall_1 U_2 t_{1,2}$  não são sentenças porque elas contêm a variável livre  $v_1$ .

Na metalinguagem as regras para se escrever uma sentença significativa na linguagem objeto ficam bem explícitas: todas as variáveis de uma sentença significativa estão no escopo de um quantificador. Por exemplo, as sentenças  $\forall_1 t_{1,1}$ ,  $\forall_1 \forall_2 t_{1,2}$ ,  $\forall_1 U_2 t_{1,2}$  e  $\forall_1 (t_{1,1} + \forall_1 U_2 t_{1,2})$  são significativas porque tanto  $v_1$  como  $v_2$  estão quantificados, o que não ocorre com as expressões  $t_{1,1}$ ,  $\forall_2 t_{1,2}$ ,  $U_2 t_{1,2}$  e  $t_{1,1} + \forall_1 U_2 t_{1,2}$  onde só  $v_2$  está quantificado.

Só a título de tradução, no modo como vimos fazendo até aqui, segue o quadro abaixo:

TRADUÇÃO LINGUAGEM-METALINGUAGEM			
Notação polonesa	Notação moderna mais usual	Nome metalinguístico	Nome metalinguístico descritivo-estrutural.
$\forall x/x, x$	$\forall x(x \supset x)$	'para todo a, a está incluído em a' ou ' $\forall a(a \supset a)$ ' <sup>101</sup>	$\forall_1 t_{1,1}$
$\forall x, \forall x, /x, x,$	$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \supset x_2)$	'para todo a, para todo b, a está incluído em b' ou ' $\forall a \forall b (a \supset b)$ '	$\forall_1 \forall_2 t_{1,2}$
$\forall x, \exists x, /x, x,$	$\forall x_1 \exists x_2 (x_1 \supset x_2)$	para todo a, existe pelo menos um b, a está incluído em b' ou ' $\forall a \exists b (a \supset b)$ '	$\forall_1 U_2 t_{1,2}$
$\forall x, /x, x, \exists x, \exists x, /x, x,$	$\forall x_1 ((x_1 \supset x_1) \supset (\exists x_2 \forall x_1 (x_2 \supset x_1)))$	"para todo a, ou 'a está incluído em a' ou 'para todo a, existe pelo menos um b, tal que b está incluído em a' ou ' $\forall a ((a \supset a) \supset (\exists b \forall a (b \supset a)))$ '	$\forall_1 (t_{1,1} + \forall_1 U_2 t_{1,2})$

Tarski, por fim, estabelece a *classe das sentenças significativas*:<sup>102</sup>

<sup>101</sup> Para saber por que neste trabalho estamos usando o símbolo ' $\supset$ ', ver os comentários ao trecho [pp.168-169] deste artigo de Tarski. Lembrando também que  $a$  e  $b$  são variáveis metalinguísticas já segundo a simbologia escolhida pelo próprio Tarski (ver [p.173]-1).

<sup>102</sup> A denominação *sentença significativa* foi proposta por S. Lesniewski (ver TARSKI, A.; [1983i], p.30; ver também, neste trabalho, o trecho onde essa informação aparece, no comentário que antecede [p.182]-1).

[p.178]-5

Em virtude da definição acima o símbolo  
'S' denota a classe de todas as sentenças significativas.

Com isso temos uma visão geral da hierarquia entre as expressões da linguagem e as expressões da metalinguagem. Sabemos que a linguagem objeto  $L$  tem os símbolos de constantes  $N, A, I, II$ , e de variáveis  $x, x, x, \dots$ . Na metalinguagem construímos expressões que denotam as sequências finitas de símbolos de  $L$ . A figura abaixo representa o olhar que a metalinguagem tem a respeito das mais diversas sequências finitas de símbolos de  $L$ .

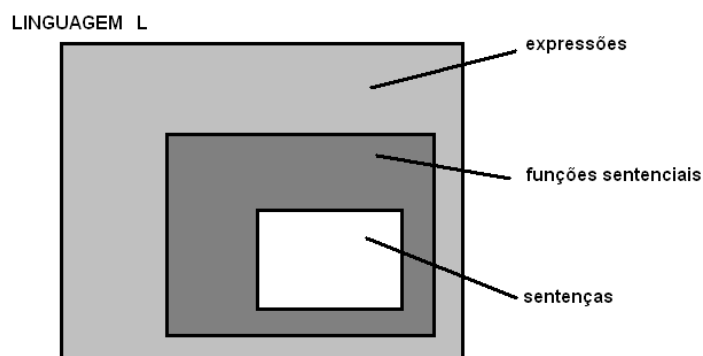


Figura 11.1 – ‘visão’ que a metalinguagem tem da linguagem objeto  $L$ .

Comentando a figura 11.1, A classe das expressões foi definida pelos axiomas 1 a 5 (exemplo de expressão:  $Ix, \dots$ ); as funções sentencias foram definidas na Definição 10 (exemplo de função sentencial:  $Ix, \dots, x, \dots$ ) e as sentenças na Definição 12 (exemplo de sentença:  $\Pi x, Ix, x, \dots$ ).

No capítulo seguinte, veremos como se faz necessário saber escrever na metalinguagem as noções de sentença e de consequência.

## CAPÍTULO 5

### DESCRIÇÃO METALINGUÍSTICA DA AXIOMÁTICA DE $L$

A idéia de Tarski é, após o que se estabeleceu até a Definição 12, obter um sistema de sentenças primitivas significativas que permitirão a construção do cálculo sentencial, isto é, conseguir saber como escrever metalinguisticamente as expressões básicas da linguagem formal. A idéia é ter como base do cálculo sentencial da linguagem formal um conjunto simples, apoiado sobre poucos símbolos e manipulando apenas algumas operações básicas de relações lógicas entre as expressões. Para isso ele precisa de um conjunto de definições apropriadas (axioma, consequência, consistência, completude) que não serão usadas propriamente para a definição de *sentença verdadeira*, mas que serão úteis mais tarde, quando a forma definitiva da definição de sentença verdadeira for imprescindível para a continuação da discussão a respeito da linguagem de primeira ordem onde se conseguiu definir sentença verdadeira. Por isso Tarski inicia essa fase de seu projeto preocupado em definir as sentenças significativas mais simples de  $L$ , isto é, a *definir axiomática* de  $L$ .

[p.178]-6

O sistema de sentenças primitivas do cálculo de classes conterà dois tipos de sentenças.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Conceitos que discutirei neste decurso além do §2 não ocorrem na definição própria de sentença verdadeira. Contudo, farei uso deles nas discussões preparatórias no início do §3, que estabelecerão a forma definitiva da definição. Também vou usá-las na formulação de certas consequências dessa definição (Teorems. 3-6 do §3) que expressam característica e materialmente propriedades importantes das sentenças verdadeiras.

O que fica estabelecido aqui, então, é que a linguagem de primeira ordem é feita de duas espécies de sentença: veremos que uma é composta dos axiomas do cálculo sentencial e a outra são axiomas específicos. A *nota de rodapé nº 2* nesta passagem [p.178]-6 não se estende além do comentário prévio que já fizemos a essa própria passagem. O estudo de Tarski, então segue para definir os dois tipos de sentenças, antes das demais definições necessárias aos teoremas da terceira parte de seu trabalho *Concept of truth in formalized languages*.

### 1. Primeiro tipo de sentença primitiva: baseado na negação e na adição lógica.

O primeiro tipo de sentenças primitivas é facilmente obtido escolhendo-se um sistema axiomático qualquer suficientemente simples. A escolha é arbitrária. Tarski vai fazer uma modificação dos axiomas que se encontram no *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead e obter um conjunto de quatro axiomas onde se usem apenas os símbolos de *negação*  $N$  e de *soma lógica*  $A$  como únicas constantes.

[p.178]-7

As sentenças do primeiro tipo são obtidas tomando-se qualquer sistema axiomático que seja suficiente como base para o cálculo sentencial e contenha os símbolos de negação e soma lógica como as únicas constantes – por exemplo, o sistema axiomático que consiste nos seguintes quatro axiomas:

‘ $ANAppp$ ’, ‘ $ANpApq$ ’, ‘ $ANApqAqp$ ’ e ‘ $ANANpqANArpArq$ ’.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Este sistema axiomático é o resultado de uma modificação e simplificação do sistema axiomático que se encontra em Whitehead, A. N.; Russell, B. A. W. (90), vol. 1, p.96-97; cf. Hilbert, D.; and Ackermann, W (30), p.22.

O sistema axiomático de Whitehead e Russell<sup>103</sup> citado por Tarski é aquele visto em [p.173]-4, reduzido a quatro axiomas. São esses quatro:

1. ‘ $ANAppp$ ’ que, em notação moderna mais usual, quer dizer  $\neg(p \vee p) \vee p$ , que pode ser interpretado como  $(p \square p) \rightarrow p$ , que é o Princípio de Tautologia.

2. ‘ $ANpApq$ ’ que, em notação moderna mais usual, quer dizer  $\neg p \vee (p \vee q)$ , que pode ser interpretado como  $p \rightarrow (p \square q)$ , que é o Princípio de Adição.

3. ‘ $ANApqAqp$ ’ que, em notação moderna mais usual, quer dizer  $(\neg(p \vee q) \vee (q \vee p))$ , que pode ser interpretado como  $(p \square q) \rightarrow (q \square p)$ , que é o Princípio de Permutação.

4. ‘ $ANANpqANArpArq$ ’ que, em notação moderna mais usual, quer dizer  $\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(r \vee p) \vee (r \vee q))$ , que pode ser interpretado como  $(p \square q) \rightarrow ((r \square p) \rightarrow (r \square q))$ <sup>104</sup>.

<sup>103</sup> A respeito da numeração (90) e (32) na citação de Tarski neste [p.178]-7 à *nota de rodapé n°3*, Ver nota 31 neste trabalho.

A partir desses axiomas é possível construir as sentenças significativas da linguagem objeto, como explica Tarski:

[p.179]-1

Nesses axiomas substituímos as variáveis sentenciais ‘ $p$ ’, ‘ $q$ ’ e ‘ $r$ ’ por qualquer função sentencial, e então às expressões assim obtidas, se elas já não forem sentenças, nós aplicamos a operação de quantificação universal um número suficiente de vezes até que todas as variáveis livres tenham desaparecido. O que segue serve como exemplo:

‘ $ANA\Pi x, Ix, x, \Pi x, Ix, x, \Pi x, Ix, x,$ ’, ‘ $\Pi x, \Pi x,, ANIx, x,, AIx, x,, Ix,, x,$ ’ etc.

O próximo passo bem descrito por Tarski é substituir, em cada axioma, as variáveis  $p$ ,  $q$  e  $r$  por *funções sentenciais* e aplicar o operador de quantificação universal quantas vezes forem necessárias até se obter sentenças. Tarski propôs que se fizesse como segue:

- a.  $p$  pela *função sentencial* ‘ $Ix, x,$ ’ no 1º. axioma
- b.  $p$  por ‘ $Ix, x,,$ ’ e  $q$  por ‘ $Ix,, x,$ ’ no 2º. e 3º. axiomas.
- c.  $p$  por ‘ $Ix, x,,$ ’,  $q$  por ‘ $Ix, x,$ ’ e  $r$  por ‘ $Ix,, x,$ ’ no 4º. axioma.

Assim, verificamos que:

1. ‘ $ANAppp$ ’ se torna ‘ $ANAIx, x, Ix, x, Ix, x,$ ’
2. ‘ $ANpApq$ ’ se torna ‘ $ANIx, x, AIx, x,, Ix, x,$ ’
3. ‘ $ANApqAqp$ ’ se torna ‘ $ANAIx, x,, Ix, x, AIx, x, Ix, x,,$ ’
4. ‘ $ANANpqANArpArq$ ’ se torna ‘ $ANANIx, x, Ix, x, ANAIx, x,, Ix, x,, AIx, x,, Ix, x,$ ’

Em todas essas versões com *funções sentenciais*, as variáveis metalinguisticamente traduzidas como  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  estão livres. O passo seguinte, agora, é aplicar operadores de quantificação universal um número suficiente de vezes até que se tornem *variáveis ligadas* as *variáveis livres*. Assim:

---

<sup>104</sup> No *Principia Mathematica* (WHITEHEAD, A. N. & RUSSELL, B. A. W.; *Principia Mathematica*, 2.ed., vols. I-III, Cambridge, 1925-1927, vol I), seria  $(p \sqsupset q) \sqsupset r \rightarrow p \sqsupset (q \sqsupset r)$ , que também se vê em D. HILBERT and W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin, 1928, p.27.

1. ‘ $ANAIx,x,Ix,x,Ix,x,$ ’, quantificado fica ‘ $\Pi x,ANAIx,x,Ix,x,Ix,x,$ ’
2. ‘ $ANIx,x,AIx,x,Ix,x,$ ’, quantificado fica ‘ $\Pi x,\Pi x,ANIx,x,AIx,x,Ix,x,$ ’
3. ‘ $ANAIx,x,Ix,x,AIx,x,Ix,x,$ ’, quantificado fica  

$$‘\Pi x,\Pi x,ANAIx,x,Ix,x,AIx,x,Ix,x,’$$
4. ‘ $ANANIx,x, Ix,x,ANAIx,x,Ix,x,AIx,x,Ix,x,$ ’, quantificado fica  

$$‘\Pi x,\Pi x,\Pi x,ANANIx,x, Ix,x,ANAIx,x,Ix,x,AIx,x,Ix,x,’$$

Concluído isso, temos agora quatro sentenças significativas padrão que são a forma mais simples de sentenças significativas e que, a partir delas, por repetição e combinação, será possível construir qualquer sentença significativa posterior.

## 2. Segundo tipo de sentença primitiva: baseado na inclusão

O segundo tipo de sentença primitiva é construído a partir de um sistema axiomático não-formalizado que, quando formalizado, tem como propriedade possuir o símbolo  $I$  de *inclusão* como único símbolo não definido.

[p.179]-2

A fim de obter as sentenças do segundo tipo tomaremos como ponto de partida algum sistema axiomático do cálculo de classes ainda não formalizado que contenha o símbolo de inclusão como o único símbolo indefinido,<sup>1</sup> e então traduziremos os axiomas desse sistema na linguagem do presente artigo.

<sup>1</sup> Escolhi aqui o sistema de postulados que é dado em Huntington, E. V. (32), p.297 (esse sistema, contudo, foi simplificado, em particular pela eliminação de certas suposições de uma natureza existencial).

Tarski escolhe os axiomas apresentados por Huntington em *Sets of independent postulates for the algebra of logic*<sup>105</sup> de 1904, e que serão apresentados na Definição 13, mais adiante. Tarski faz uma redução do número de axiomas. Na verdade a combinação dos axiomas do sistema Russell-Whitehead e do sistema Huntington eram comuns na

<sup>105</sup> A citação (32) na *nota de rodapé nº1* neste [p.179]-2 refere-se à E. V. Huntington, *Sets of independent postulates for the algebra of logic*, Trans. Amer. Math. Soc., v (1904), 288-309. Ver nota 31 neste trabalho.

década de 1900-1910. Tarski tinha à mão diversas reduções. Exemplos bons são as reduções de Sheffer<sup>106</sup> e Bernstein<sup>107</sup> e a de Diamond<sup>108</sup> que é bastante didática.

O projeto de Tarski aqui, com esses dois tipos de sentença, é obter um modo correto de escrever, na metalinguagem, os axiomas da linguagem objeto apresentados em [p.173]-4. Para isso, Tarski precisa mostrar que é possível estabelecer um sistema axiomático na linguagem objeto que se escreva apenas usando inclusão mais soma lógica mais negação mais quantificação universal. Lembremos que Tarski só estabeleceu esses símbolos como constantes, até agora nunca dissera que eles seriam suficientes para escrever os axiomas da linguagem. Para conseguir escrever axiomas da linguagem objeto usando apenas essas constantes (negação, inclusão, soma lógica e quantificação universal) precisou combinar o sistema Russell-Whitehead com o de Huntington. Por isso prossegue descrevendo o modo de aliar os dois tipos de sentença, para “limpar” o sistema axiomático e reduzi-lo à inclusão mais soma lógica mais quantificação universal:

[p.179]-3

Naturalmente, devemos primeiro eliminar todas as constantes que são definidas por meio do símbolo de inclusão, bem como todos os termos pertencentes ao cálculo sentencial e ao cálculo funcional que diferem em significado do quantificador universal, do símbolo de negação e do símbolo de adição lógica. Como exemplos de sentenças dessa segunda espécie, temos

‘ $\Pi x, Ix, x,$ ’ e ‘ $\Pi x, \Pi x,, \Pi x,, ANIx, x,, ANIx,, x,, Ix, x,,$ ’.

Ora, ‘ $\Pi x, Ix, x,$ ’ e ‘ $\Pi x, \Pi x,, \Pi x,, ANIx, x,, ANIx,, x,, Ix, x,,$ ’ são as duas relações extremas envolvendo classes de sentenças. ‘ $\Pi x, Ix, x,$ ’ quer dizer que as classes são idênticas a si próprias e ‘ $\Pi x, \Pi x,, \Pi x,, ANIx, x,, ANIx,, x,, Ix, x,,$ ’ que as classes são distintas entre si. Entre essas duas descrições situam-se os outros axiomas da linguagem (é fácil verificar, depois de conhecermos a Definição 13, que

---

<sup>106</sup> SHEFFER, H. M.; *A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with Application to Logical Constants*, in *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 14, No. 4 (Oct., 1913), pp. 481-488.

<sup>107</sup> BERNSTEIN, B. A., *A simplification of the Whitehead-Huntington set of postulates for boolean algebras*, in *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 22, Number 9 (1916), 458-459.

<sup>108</sup> DIAMOND, A. H.; *Simplification of the Whitehead-Huntington set of postulates for the algebra of logic*, in *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 40, Number 8 (1934), 599-601.

‘ $\Pi x, Ix, x,$ ’ corresponde ao primeiro axioma e o ‘ $\Pi x, \Pi x,, \Pi x,,, ANIx, x,, ANIx,, x,,, Ix, x,,,$ ’ corresponde ao segundo axioma, obviamente descrito metalinguisticamente na Definição 13). Uma tradução moderna mais usual desses exemplos dados por Tarski são as sentenças

$$\Box \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1 \Box \mathbf{x}_1)$$

e

$$\Box \mathbf{x}_1 \Box \mathbf{x}_2 \Box \mathbf{x}_3(\Box(\mathbf{x}_1 \Box \mathbf{x}_2) \Box \Box(\mathbf{x}_2 \Box \mathbf{x}_3) \Box (\mathbf{x}_1 \Box \mathbf{x}_3)),$$

respectivamente.

Agora sabendo que é possível escrever os axiomas da linguagem objeto usando apenas as quatro constantes já citadas, Tarski pode definir, metalinguisticamente, o modo correto de descrever os axiomas da linguagem objeto:

[p.179]-4

DEFINIÇÃO 13.  $x$  é um *axioma (sentença primitiva)* se e somente se  $x$  satisfaz uma das duas condições seguintes: ( $\alpha$ )  $x \in S$  e há funções sentenciais  $y, z$  e  $u$  tais que  $x$  é uma quantificação universal de uma das quatro seguintes funções:  $\overline{y + y + y}$ ,  $\overline{y + (y + z)}$ ,  $\overline{y + z + (z + y)}$  e  $\overline{y + z + (u + y + (u + z))}$ ; ( $\beta$ )  $x$  é idêntico a uma das cinco seguintes sentenças:

$$\begin{aligned} & \bigcap_1 t_{1,1}, \quad \bigcap_1 \bigcap_2 \bigcap_3 (\overline{t_{1,2} + t_{2,3} + t_{1,3}}), \quad \bigcap_1 \bigcap_2 \bigcup_3 (t_{1,3} \cdot t_{2,3} \cdot \bigcap_4 (\overline{t_{1,4} + t_{2,4} + t_{3,4}})), \\ & \bigcap_1 \bigcap_2 \bigcup_3 (t_{3,1} \cdot t_{3,2} \cdot \bigcap_4 (\overline{t_{4,1} + t_{4,2} + t_{4,3}})), \text{ e} \\ & \bigcap_1 \bigcup_2 \left( \bigcap_3 \bigcap_4 \left( (\overline{t_{3,1} + t_{3,2} + t_{3,4}}) \cdot (\overline{t_{1,3} + t_{2,3} + t_{4,3}}) \cdot \bigcap_5 (t_{5,1} + \bigcup_6 (t_{6,2} \cdot \overline{t_{6,1} \cdot t_{6,3}})) \right) \right). \end{aligned}$$

A Cláusula ( $\alpha$ ) são os quatro axiomas do sistema Whitehead-Russell que vimos em [p.173]-4 com um axioma existencial inicial:  $x \Box S$ . Em outras palavras o conjunto  $S$  das sentenças significativas não é vazio. Não precisamos comentar o já bastante tratado sistema Whitehead-Russell<sup>109</sup>. Já a Cláusula ( $\beta$ ) são os axiomas de Huntington reduzidos a apenas cinco, todos quantificações universais:

1.  $\bigcap_1 t_{1,1}$ . Trata-se do modo correto – do ponto de vista metalinguístico – de escrever o axioma ‘ $\Pi x, Ix, x,$ ’ (ou de  $\Box \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1 \Box \mathbf{x}_1)$ , em uma linguagem moderna

<sup>109</sup> Só a título de esclarecimento, os primeiros três axiomas ( $\overline{y + y + y}$ ,  $\overline{y + (y + z)}$ ,  $\overline{y + z + (z + y)}$ ) estão no *Principia Mathematica* de Whitehead e Russell, enquanto todos os quatro axiomas (os anteriores e mais o  $\overline{y + z + (u + y + (u + z))}$ ) estão no *Grundzüge der theoretischen Logik* de Hilbert e Ackermann.

mais usual) de  $L$  (a linguagem objeto do trabalho de Tarski). A tradução metalinguística do axioma linguístico seria “para todo  $a, a \sqsubseteq a$ ”<sup>110</sup> e a tradução metalinguística descritivo-estrutural seria ‘((( $un \sqsubseteq v_1$ )  $\sqsubseteq in$ )  $\sqsubseteq v_2$ )  $\sqsubseteq v_3$ ’. Esse axioma é tão somente a propriedade de reflexividade da indução.

2.  $\bigcap_1 \bigcap_2 \bigcap_3 (\overline{t_{1,2}} + \overline{t_{2,3}} + t_{1,3})$ . Como o anterior, é o modo correto de se escrever ‘ $\Pi x, \Pi x,, \Pi x,,, ANIx, x,, ANIx,,, Ix, x,,,$ ’ (ou de  $\square x_1 \square x_2 \square x_3 (\square (x_1 \sqsubseteq x_2) \square \square (x_2 \sqsubseteq x_3) \square (x_1 \sqsubseteq x_3))$ ), em uma linguagem moderna mais usual). Traduções metalinguísticas: ‘para todo  $a, b$  e  $c$ , ocorre que ou  $a \sqsubseteq b$  ou  $b \sqsubseteq c$  ou  $a \sqsubseteq c$ ’ e ‘((((((((((((((((((( $un \sqsubseteq v_1$ )  $\sqsubseteq un$ )  $\sqsubseteq v_2$ )  $\sqsubseteq un$ )  $\sqsubseteq v_3$ )  $\sqsubseteq sm$ )  $\sqsubseteq ng$ )  $\sqsubseteq in$ )  $\sqsubseteq v_4$ )  $\sqsubseteq v_5$ )  $\sqsubseteq sm$ )  $\sqsubseteq ng$ )  $\sqsubseteq in$ )  $\sqsubseteq v_6$ )  $\sqsubseteq v_7$ )  $\sqsubseteq in$ )  $\sqsubseteq v_8$ )  $\sqsubseteq v_9$ ’. Trata-se da propriedade de transitividade da inclusão<sup>111</sup>: se uma primeira classe está contida noutra segunda, então – se a segunda classe estiver contida em uma terceira – a primeira estará necessariamente contida na terceira. Em diagramas de Venn:

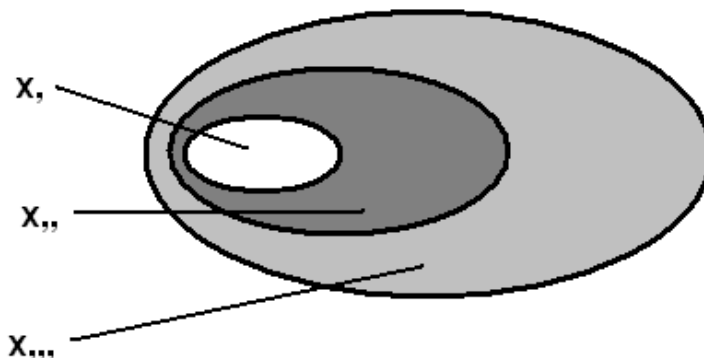


Figura 12.1 – transitividade da inclusão

3.  $\bigcap_1 \bigcap_2 \bigcup_3 (t_{1,3} \cdot t_{2,3} \cdot \bigcap_4 (\overline{t_{1,4}} + \overline{t_{2,4}} + t_{3,4}))$ . Como os anteriores, é o modo de escrever ‘ $\Pi x, \Pi x,, N\Pi x,,, NANNANIx, x,,, Ix, x,,, N\Pi x,,,, NAIx, x,,,, Nax, x,,,, Aix, x,,,,,$ ’ (ou  $\square x_1 \square x_2 \square x_3 ((x_1 \sqsubseteq x_3) \square (x_2 \sqsubseteq x_3) \square \square x_4 (\neg(x_1 \sqsubseteq x_4) \square \neg(x_2 \sqsubseteq x_4) \square (x_3 \sqsubseteq x_4)))$ ),

<sup>110</sup> Sobre o uso do símbolo ‘ $\sqsubseteq$ ’ aqui e nos próximos comentários a este [p.179]-4 (e também ‘ $\square$ ’), ver o comentário a [pp.168-169] neste trabalho.

<sup>111</sup> Essa propriedade é mais conhecida usualmente por meio do símbolo de implicação material na forma:  $\square x_1 \square x_2 \square x_3 ((x_1 \sqsubseteq x_2) \rightarrow ((x_2 \sqsubseteq x_3) \rightarrow (x_1 \sqsubseteq x_3)))$ .

em uma linguagem moderna mais usual). A tradução metalingüística seria ‘para todo  $a, b$  e para ao menos um  $c$ , ocorre que  $a \sqsubseteq c$  e  $b \sqsubseteq c$  e para todo  $d$  ocorre que ou  $a \sqsubseteq d$  ou  $b \sqsubseteq d$  ou  $c \sqsubseteq d$ ’ (omitiremos a tradução descritivo-estrutural)<sup>112</sup>. Ora É fácil ver que  $\sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 ((x_1 \sqsubseteq x_3) \sqsubseteq (x_2 \sqsubseteq x_3) \sqsubseteq \sqsubseteq x_4 (\neg(x_1 \sqsubseteq x_4) \sqsubseteq \neg(x_2 \sqsubseteq x_4) \sqsubseteq (x_3 \sqsubseteq x_4)))$  equivale a  $\sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 ((x_1 \sqsubseteq x_3) \sqsubseteq (x_2 \sqsubseteq x_3) \sqsubseteq \sqsubseteq x_4 ((x_1 \sqsubseteq x_4) \rightarrow ((x_2 \sqsubseteq x_4) \rightarrow (x_3 \sqsubseteq x_4)))$  (ver nota 119). Prendendo-nos à parte final da sentença significativa que estamos estudando e sacando de uma regra que expõe que  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \sqsubseteq B) \rightarrow C$ , então teremos  $\sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 ((x_1 \sqsubseteq x_3) \sqsubseteq (x_2 \sqsubseteq x_3) \sqsubseteq \sqsubseteq x_4 ((x_1 \sqsubseteq x_4) \sqsubseteq (x_2 \sqsubseteq x_4)) \rightarrow (x_3 \sqsubseteq x_4))$ . Chamamos isso de *cláusula minimal*, isto é,  $x_3$  é o menor conjunto que possui  $x_1$  e  $x_2$  como subconjuntos. Em resumo, este axioma é o *axioma da união*, que podemos representar pelos diagramas de Venn:

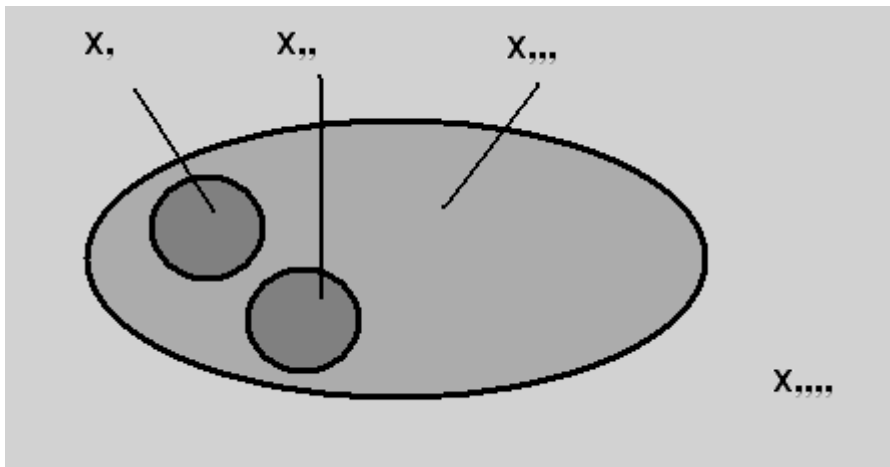


Figura 12.2 – Axioma da União ( $x,,,,$  é o complemento de  $x,,,$  em relação ao conjunto Universo). Os conjuntos  $x,$  e  $x,,$  não precisam ser necessariamente disjuntos (podem compor uma intersecção entre si).

<sup>112</sup> Porque não faz sentido traduzirmos descritivo-estruturalmente todas as sentenças significativas da linguagem só para confirmarmos que é possível tal tradução. Ademais, a extensão da tradução faz dela pouquíssima prática para o estudo. Basta, portanto, sabermos que a tradução é possível. Mas só por curiosidade, vamos fazer aqui a tradução descritivo estrutural do axioma na notação moderna mais usual para o leitor ter idéia de como tão pouco prático se tornam as traduções muito grandes ( $ex$  = ‘quantificação existencial’ e  $pl$  = produto lógico):

$((((((((un \sqsubseteq v_1) \sqsubseteq un) \sqsubseteq v_2) \sqsubseteq ex) \sqsubseteq v_3) \sqsubseteq pe) \sqsubseteq pe) \sqsubseteq v_4) \sqsubseteq in) \sqsubseteq v_5) \sqsubseteq pd) \sqsubseteq pl) \sqsubseteq pe) \sqsubseteq v_6) \sqsubseteq in) \sqsubseteq v_7) \sqsubseteq pd) \sqsubseteq pl) \sqsubseteq un) \sqsubseteq v_7) \sqsubseteq pe) \sqsubseteq ng) \sqsubseteq pe) \sqsubseteq v_8) \sqsubseteq in) \sqsubseteq v_9) \sqsubseteq sm) \sqsubseteq ng) \sqsubseteq pe) \sqsubseteq v_{10}) \sqsubseteq in) \sqsubseteq v_{11}) \sqsubseteq pd) \sqsubseteq sm) \sqsubseteq pe) \sqsubseteq v_{12}) \sqsubseteq in) \sqsubseteq v_{13}) \sqsubseteq pd) \sqsubseteq pd) \sqsubseteq pd.$

4.  $\bigcap_1 \bigcap_2 \bigcup_3 (\iota_{3,1} \cdot \iota_{3,2} \cdot \bigcap_4 (\overline{\iota_{4,1}} + \overline{\iota_{4,2}} + \iota_{4,3}))$ . É o modo correto de se escrever ‘ $\prod x, \prod x,, \prod x,,, \text{NANNAN}Ix,,,x, Ix,,,x,, \prod x,,,, \text{NA}Ix,,,,x, \text{Nax,,,,x,,} \text{Aix,,,,x,,}$ ,’ (ou  $\square x_1 \square x_2 \square x_3 ((x_3 \square x_1) \square (x_3 \square x_2) \square \square x_4 (\neg(x_4 \square x_1) \square \neg(x_4 \square x_2) \square (x_4 \square x_3)))$ ), em uma linguagem moderna mais usual). As leituras e traduções seguem os modelos vistos anteriormente. Aqui, como para o anterior, temos que  $\square x_1 \square x_2 \square x_3 ((x_3 \square x_1) \square (x_3 \square x_2) \square \square x_4 (\neg(x_4 \square x_1) \square \neg(x_4 \square x_2) \square (x_4 \square x_3)))$  equivale a  $\square x_1 \square x_2 \square x_3 ((x_3 \square x_1) \square (x_3 \square x_2) \square \square x_4 (((x_4 \square x_1) \square (x_4 \square x_2)) \rightarrow (x_4 \square x_3)))$ . Chamamos isso de *cláusula maximal*, isto é,  $x_3$  é o maior conjunto que é subconjunto tanto de  $x_1$  quanto de  $x_2$ . Em resumo, este axioma é o *axioma da intersecção*, que podemos representar pelos diagramas de Venn:

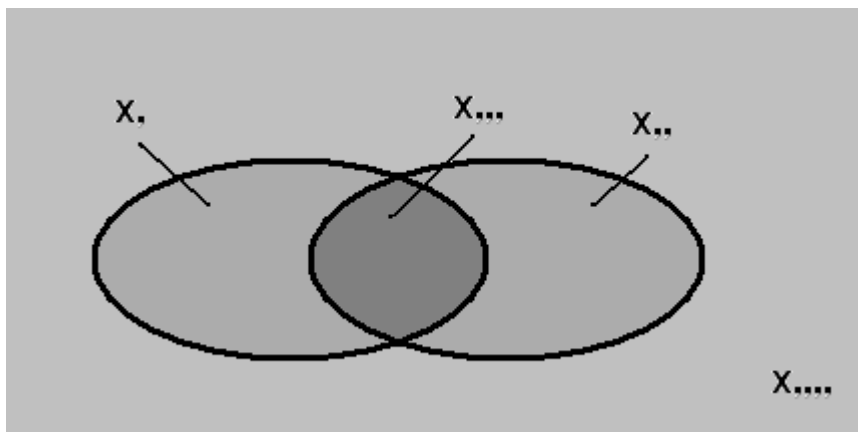


Figura 12.3 – Axioma da Intersecção ( $x_{3,}$  é o complemento de  $x_3$ , unido a  $x_{1,}$  em relação ao conjunto Universo)

5.  $\bigcap_1 \bigcup_2 (\bigcap_3 \bigcap_4 ((\overline{\iota_{3,1}} + \overline{\iota_{3,2}} + \iota_{3,4}) \cdot (\overline{\iota_{1,3}} + \overline{\iota_{2,3}} + \iota_{4,3})) \cdot \bigcap_5 (\iota_{5,1} + \bigcup_6 (\iota_{6,2} \cdot \overline{\iota_{6,1}} \cdot \iota_{6,5})))$ . Como os anteriores, é o modo correto de se escrever (em linguagem moderna mais usual) a sentença:  $\square x_1 \square x_2 (\square x_3 \square x_4 ((\neg(x_3 \square x_1) \square \neg(x_3 \square x_2) \square (x_3 \square x_4)) \square (\neg(x_1 \square x_3) \square \neg(x_2 \square x_3) \square (x_4 \square x_3))) \square \square x_5 ((x_5 \square x_1) \square \square x_6 ((x_6 \square x_2) \square \neg(x_6 \square x_1) \square (x_6 \square x_5))))$ ). Pelo que vimos anteriormente (ver nota 119 neste trabalho), podemos escrever a primeira parte desse axioma na forma  $\square x_1 \square x_2 \square x_3 \square x_4 (((x_3 \square x_1) \square (x_3 \square x_2)) \rightarrow (x_3 \square x_4)) \square (((x_1 \square x_3) \square (x_2 \square x_3)) \rightarrow (x_4 \square x_3))$ . Interpretando esse novo formato, temos duas informações importantes:

A)  $((x_3 \square x_1) \square (x_3 \square x_2)) \rightarrow (x_3 \square x_4)$ . Isto é, se  $x_3$  for subconjunto de  $x_1$  e de  $x_2$ , então é subconjunto de qualquer conjunto ( $x_3$ , então, só pode ser o conjunto vazio). Daí que  $x_1$  e  $x_2$  têm intersecção: o elemento comum  $x_3 = \square$ .

B)  $((x_1 \sqsubset x_3) \sqcup (x_2 \sqsubset x_3)) \rightarrow (x_4 \sqsubset x_3)$ . Isto é, se  $x_1$  e  $x_2$  são subconjuntos de  $x_3$ , então todos os conjuntos são subconjuntos de  $x_3$  (em síntese,  $x_3$  é o conjunto universo  $U$  e é a união de  $x_1$  e  $x_2$ ; também: o universo  $U$  é o único conjunto que possui  $x_1$  e  $x_2$  como subconjuntos – isto é,  $x_1 \sqcup x_2 = U$ ).

Falta agora diferenciar os dois conjuntos  $x_1$  e  $x_2$ , descrevendo a natureza de cada um. Esse é o papel da segunda parte do axioma. Pelo modo como tratamos a primeira parte, podemos escrever a segunda parte do axioma na forma  $\sqcup x_5(x_5 \sqsubset x_1 \sqcup \sqcup x_6((x_6 \sqsubset x_2) \sqcup (x_6 \sqsubset x_1) \sqcup (x_6 \sqsubset x_5)))$ . Também aqui há duas leituras importantes (sabendo que  $x_1$  e  $x_2$  são disjuntos):

C)  $\sqcup x_5(x_5 \sqsubset x_1)$ . Isto é, existe um subconjunto  $x_5$  que pode estar contido em  $x_1$ . Caso não esteja contido, então  $x_5$  faz intersecção com  $x_1$  ou é disjunto em relação a  $x_1$ . Neste caso, passa-se ao restante do axioma (como manda a soma lógica):

D)  $\sqcup x_6((x_6 \sqsubset x_2) \sqcup (x_6 \sqsubset x_1) \sqcup (x_6 \sqsubset x_5))$ . Isto é, há um subconjunto  $x_6$ , comum a  $x_2$  e a  $x_5$ , que não está contido em  $x_1$  (porém pode fazer intersecção com  $x_1$ ). A situação descrita em (C) e (D) pode ser visualizada nos diagramas de Venn seguintes:

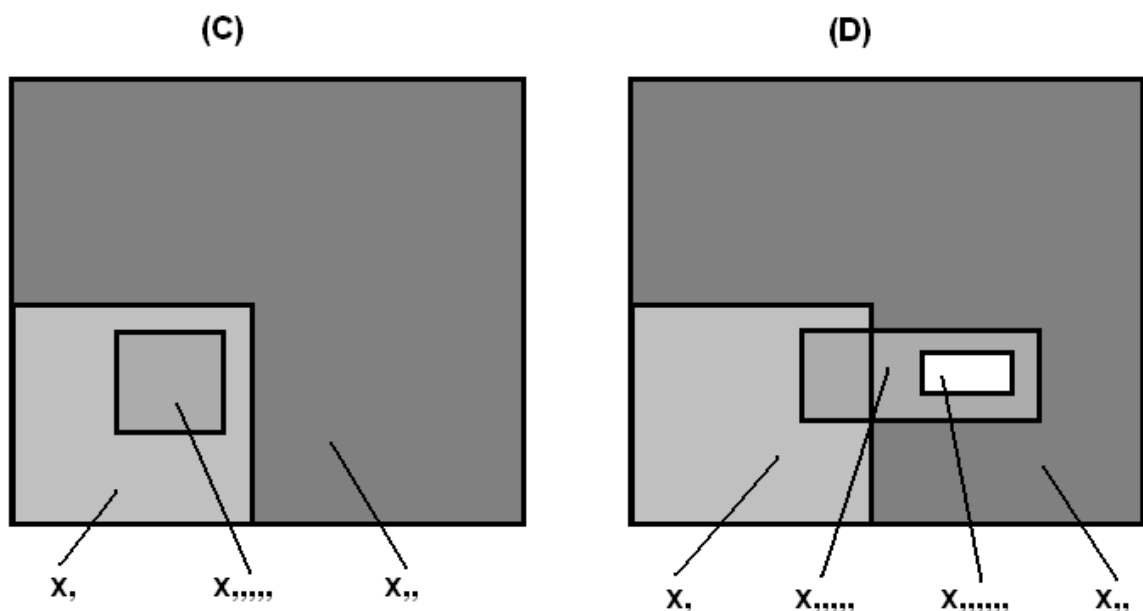


Figura 12.4 – Os diagramas (C) e (D) correspondem aos dois membros (respectivamente, *disjunto anterior* e *disjunto posterior*) da soma lógica dada pela segunda parte do axioma. Vê-se que  $x_{,,}$  é o complementar de  $x$ , - lembrando que  $x_1 \sqcup x_2 = U$  - e que há três possibilidades para um subconjunto dentro do universo  $U$ : ou está contido em  $x$ , (caso de  $x_{,,,,}$ , em (C)) ou está contido em  $x_{,,}$ , (caso de  $x_{,,,,}$ , em (D)) ou não está contido em nenhum dos dois (caso de  $x_{,,,,}$ , em (D)).

O axioma completo determina a existência do complementar de um conjunto em relação ao universo  $U$ . Mais amplamente, o axioma afirma que dado um conjunto qualquer, em relação ao universo  $U$  existe o complementar e a diferença desse conjunto. Assim, por exemplo, a diferença  $x_2 - x_1$  corresponde à intersecção entre  $x_2$  e o complementar de  $x_1$ .

A tabela abaixo resume a Cláusula ( $\beta$ ) da Definição 13<sup>113</sup>:

ESTRUTURA GERAL DA CLÁUSULA ( $\beta$ ) DA DEFINIÇÃO 13				
Definição 13	Axioma 1	reflexividade	reticulado distributivo	lei distributiva: $A \square (B \square C) = (A \square B) \square (A \square C)$
	Axioma 2	transitividade		
	Axioma 3	união		
	Axioma 4	intersecção		
	Axioma 5	complemento	complementado	Existe conjunto universo $U$ e conjunto vazio $\square$
<b>Conclusão:</b> Uma álgebra de Boole é um reticulado distributivo complementado.				

Isto encerra os estudos sobre a descrição que a metalinguagem faz da axiomática de  $L$ . O passo seguinte é definir a natureza das sentenças significativas de  $L$  que são mais complexa que esses axiomas e que derivam deles segundo regras de consequência, assunto do próximo capítulo.

<sup>113</sup> A Definição 13 equivale à Definição 7 em TARSKI, A.; [1983e], p.284-285 (para o significado dos símbolos, ver nota 47):

“DEFINIÇÃO 7:  $\zeta \square L$  ( $\zeta$  é um *axioma lógico*), se uma das seguintes condições é satisfeita: (1) existem sentenças  $\eta, \delta, \xi \square S$  tais que ou  $\zeta = (\eta \rightarrow \delta) \rightarrow ((\delta \rightarrow \xi) \rightarrow (\eta \rightarrow \xi))$  ou  $\zeta = (\eta \square \rightarrow \eta) \rightarrow \eta$  ou  $\zeta = \eta \rightarrow (\eta \square \rightarrow \xi)$ ; (2) há um número  $k \square Nt - \{0\}$  e uma sentença  $\eta \square S$  tal que  $\zeta = U_1^{k+1} \cap_1^k (\epsilon_{1,1}^k \Leftrightarrow \eta)$ , onde  $\phi_1^{k+1} \square \square Fr(\eta)$ ; (3) há um número  $k \square Nt - \{0\}$  tal que  $\zeta = (U_1^{k+1} \cap_1^k (\epsilon_{1,1}^k \Leftrightarrow \epsilon_{1,2}^k)) \rightarrow \tau_{1,2}^{k+1}$ .

“As sentenças que satisfazem a condição (1) na definição acima são os *axiomas do cálculo sentencial* de Łukasiewicz (ou posteriores substituições desses axiomas); as sentenças sob (2), claramente descrito como axioma da redutibilidade do *Principia Mathematica*, pode se chamado *pseudefinições* de acordo com a proposta de S. Lesniewski; finalmente reconhecemos as sentenças sob (3) como as conhecidas *leis de extensionalidade*.”

## CAPÍTULO 6

### REGRAS DE INFERÊNCIA PARA A LINGUAGEM $L$

Para se chegar a uma definição correta de *prova*, ou *demonstração*, Tarski precisara estabelecer o modo correto de escrever as noção de *consequência*. Ainda para a noção de *consequência*, precisará antes definir o modo correto de escrever uma *expressão obtida*. Esta será a tarefa da Definição 14.

[p.180]-1

Na formulação da definição do conceito de consequência usarei, entre outros, da seguinte expressão: ‘ $u$  é uma expressão obtida de uma função sentencial  $w$  pela substituição da variável  $v_k$  pela variável  $v_l$ ’.

Isto é, quando a variável livre  $v_k$  de  $w$  é substituída pela variável livre qualquer  $v_l$ , obtemos a expressão  $u$  que deve ser distinta de  $w$  ao menos nessa  $k$ -ésima variável. Todas as outras variáveis permanecem idênticas tanto em  $w$  quanto em  $u$  (se outras mudam, mudam uma por vez obtidas após  $u$ , isto é, teremos as expressões  $u'$  obtidas de  $u$  e  $u''$  obtida de  $u'$  e assim sucessivamente, uma variável por vez). O seguinte diagrama ilustra o que ocorre (o símbolo ‘C’ indica a constante):

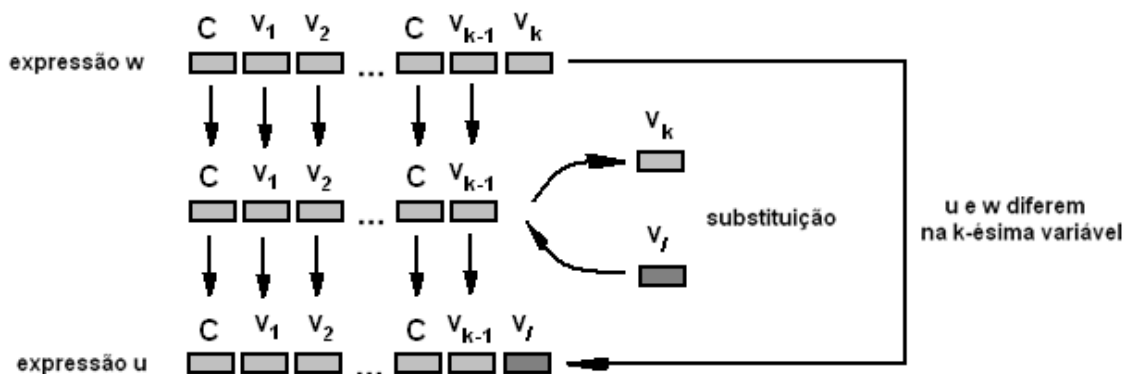


Figura 13.1 – substituição de  $k$ -ésima variável de uma expressão com  $k$  variáveis (indicada abreviadamente por  $v_k$ ) por uma variável  $v_l$  tal que  $v_k \neq v_l$ . Como resultado, tem-se a expressão obtida  $u$  que possui idênticamente  $k$  variáveis, mas é distinta de  $w$  nessa  $k$ -ésima variável.

Em outras palavras *uma expressão é obtida de outra pela troca de variáveis livres (e só das livres) desta outra e não pela troca das suas constantes.*

Tarski sabe que essa noção é intuitiva. Ele próprio acrescenta:

[p.180]-2

O significado intuitivo dessa expressão é claro e simples,

De fato, só como exemplo, podemos mostrar como essa noção é tratada de modo simples por Shoenfield (SHOENFIELD, J.R.; [1967], p.16):<sup>114</sup>

“Usamos para designar a expressão obtida de **b** pela substituição de cada ocorrência de **x** por **a**; e usamos  $A_x[a]$  para designar a expressão obtida de **A** pela substituição de cada ocorrência livre de **x** por **a**. Usando a indução sobre o comprimento de **b** e **A**, facilmente provamos que  $b_x[a]$  é um termo [*é atômica*] e que  $A_x[a]$  é uma fórmula [*molecular*].”

Tarski, porém, não vai deixar essa informação no estágio de *noção intuitiva*, quererá formalizá-la. O problema enfrentado é que a definição de algo tão óbvio passa por formatos complicados de formalização. A definição 14 trata dessa formalização.

### 1. Definição de *expressão obtida*

Tarski introduz a definição de *expressão obtida* como segue:

---

<sup>114</sup> O itálico entre colchetes é nosso.

[p.180]-3

mas apesar disso a definição possui uma forma algo complicada:

DEFINIÇÃO 14.  $x$  é uma expressão obtida da função sentencial  $y$  pela substituição da variável (livre)  $v_l$  pela variável (livre)  $v_k$  se e somente se  $k$  e  $l$  são números naturais diferentes de 0 e  $x$  e  $y$  são funções sentenciais que satisfazem uma das seis condições seguintes: ( $\alpha$ )  $x = t_{k,k}$  e  $y = t_{l,l}$ ; ( $\beta$ ) há um número natural  $m$  diferente de  $l$ , tal que  $x = t_{k,m}$  e  $y = t_{l,m}$  ou  $x = t_{m,k}$  e  $y = t_{m,l}$ ; ( $\gamma$ )  $v_l$  não é uma variável livre da função  $y$  e  $x = y$ ; ( $\delta$ ) há funções sentenciais  $z$  e  $t$  tais que  $x = z$ ,  $y = t$  e  $z$  é uma expressão obtida de  $t$  pela substituição da variável  $v_l$  pela variável  $v_k$ ; ( $\epsilon$ ) há funções sentenciais  $z$ ,  $t$ ,  $u$  e  $w$  tais que  $x = z + u$ ,  $y = t + w$ , em que  $z$  e  $u$  são obtidas de  $t$  e  $w$ , respectivamente, pela substituição da variável  $v_k$  pela variável  $v_l$ ; ( $\zeta$ ) há funções sentenciais  $z$ ,  $t$  e um número natural  $m$  diferente de  $k$  e  $l$  tais que  $x = \bigcap_m z$ ,  $y = \bigcap_m t$  e  $z$  é obtida de  $t$  pela substituição da variável  $v_l$  pela variável  $v_k$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> A seguinte é uma definição normal equivalente à definição recursiva citada (cf. p.177, nota 1):

$x$  é uma expressão obtida da função sentencial  $y$  pela substituição da variável  $v_k$  pela variável  $v_l$  se e somente se  $k$  e  $l$  são números naturais distintos de 0 e se a fórmula  $xRy$  vale para toda relação  $R$  que satisfaça as seguintes seis condições: ( $\alpha$ )  $t_{k,k}Rt_{l,l}$ ; ( $\beta$ ) se  $m$  é um número natural distinto de 0 e  $l$ , então  $t_{k,m}Rt_{l,m}$  e  $t_{m,k}Rt_{m,l}$ ; ( $\gamma$ ) se  $z$  é uma função sentencial e  $v_l$  não é uma variável livre de  $z$ , então  $zRz$ ; ( $\delta$ ) se  $zRt$ , então  $z \square Rt \square$ ; ( $\epsilon$ ) se  $zRt$  e  $uRw$ , então  $z + uRt + w$ ; ( $\zeta$ ) se  $m$  é um número natural distinto de 0,  $k$  e  $l$ , e  $zRt$ , então  $\bigcap_m zR \bigcap_m t$ .

As definições de substituição em Lesniewski, S. (46), p.73 (T.E. XLVIII), e (47), p.20 (T.E. XLVII<sup>o</sup>) dependem de uma ideia totalmente diferente.

Cláusula ( $\alpha$ ):  $x = t_{k,k}$  e  $y = t_{l,l}$ . Esta cláusula trata de expressões ‘atômicas’, isto é, que tenham apenas uma constante (seriam complexas se tivessem mais de uma constante envolvida) e, além disso, é o caso especial da inclusão de uma variável nela mesma (de fato, toda variável está incluída nela mesma). Assim, tomemos a expressão  $y = v_l \square v_l$ . Se  $x$  é uma expressão hipotética tal que  $x = v_k \square v_k$ , então se dizemos que  $x$  é obtida de  $y$  pela simples substituição de  $v_l$  por  $v_k$ . A respeito desta cláusula a *nota de rodapé 1* neste trecho no ( $\alpha$ ) dá a definição normal  $t_{k,k}Rt_{l,l}$ , para dizer que há a relação  $R$  de substituição de  $x_k$  em  $v_k \square v_k$  por  $x_l$  de  $v_l \square v_l$ . Trata-se da relação vista na figura 13.1, mas envolvendo uma única constante (no caso, o símbolo  $I$  de inclusão, em nota-

ção polonesa)<sup>115</sup>. O diagrama na figura 13.2 mostra o que se propõe (é óbvio que  $v_k = v_k$  e  $v_l = v_l$ , e que substituir  $v_k$  por  $v_l$  em uma fórmula significa substituir *todas as ocorrências de  $v_k$  por tantas outras  $v_l$* ):

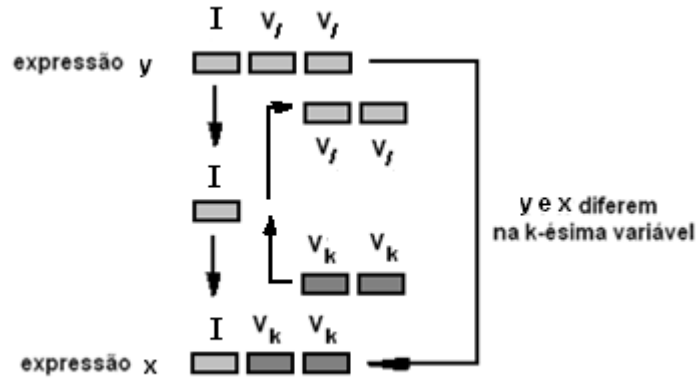


Figura 13.2 – Substituição de  $l$ -ésima variável de uma expressão  $y$  atômica (esta indicada abreviadamente por  $v_k$ ), cuja única constante é a inclusão  $I$ , por uma variável  $v_l$  tal que  $v_k \neq v_l$ . Como resultado, tem-se a expressão (identicamente atômica) obtida  $x$  que possui as mesmas constantes de  $y$  (no caso, a inclusão  $I$ ), mas é distinta de  $y$  na  $k$ -ésima variável substituída.

Cláusula ( $\beta$ ). Também é o caso de expressões atômicas, de mesma natureza que a anterior, com a diferença de lidar com variáveis que são distintas. Novamente, trata da relação de inclusão. Esta cláusula apresenta duas situações:

**Situação A:**  $\square m, m \neq l, x = i_{k,m}$  e  $y = i_{l,m}$ . Dado uma expressão  $y = v_l \square v_m$  e uma expressão  $x = v_k \square v_m$ , dizemos que  $x$  é obtida de  $y$  pela substituição da variável  $v_l$  em  $y$  por  $v_k$ . De fato, se a expressão  $y$  diz que a variável de índice  $l$  está contida na variável de índice  $m$ , e se existe uma expressão  $x$  que diz que a variável de índice  $k$  também está incluída na variável de índice  $m$ , dizemos que  $x$  deriva de  $y$  por substituímos sua  $l$ -ésima variável pela  $k$ -ésima variável de  $x$ . O diagrama da figura 13.2 dá idéia do que ocorre:

<sup>115</sup> Tarski escolheu a *inclusão* não por arbitrariedade, mas porque a variável de uma negação em uma fórmula atômica não pode ser trocada, nem cabe à soma lógica propor a alternativa entre uma variável ela própria (dizendo “ou  $x$ , ou  $x$ ”, isto é  $Ax$ , em notação polonesa).

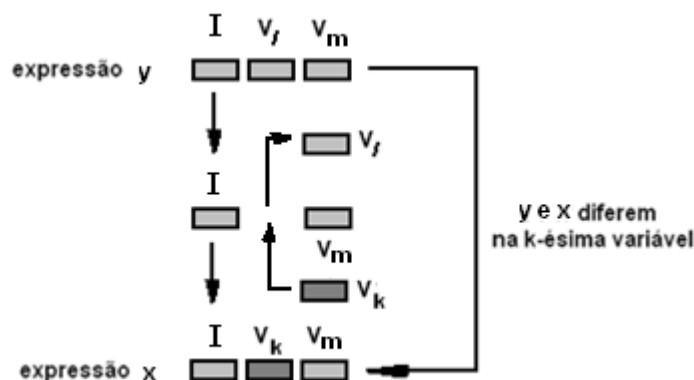


Figura 13.3 – substituição de  $l$ -ésima variável de uma expressão com  $m$  variáveis (indicada abreviadamente por  $v_m$ ) por uma variável  $v_k$  tal que  $v_k \neq v_l$ . Como resultado, tem-se a expressão obtida  $x$  que possui identicamente  $m$  variáveis, mas é distinta de  $y$  nessa  $k$ -ésima variável.

**Situação B:**  $\square m, m \neq l, x = i_{m,k}$  e  $y = i_{m,l}$ . Como na **situação A**, para  $y = x_m \square x_l$  e  $x = x_m \square x_k$ , mas ocorre aqui que  $v_m$  está inclusa tanto em  $v_k$  quanto em  $v_l$ . O diagrama da figura 13.4 mostra isso:

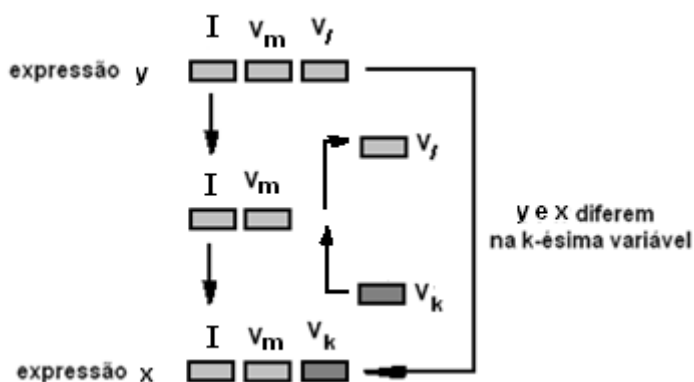


Figura 13.4 – substituição de  $l$ -ésima variável de uma expressão atômica por uma variável  $v_k$  tal que  $v_k \neq v_l$ . Como resultado, tem-se a expressão obtida  $x$  atômica, mas que é distinta de  $y$  nessa  $k$ -ésima variável.

A respeito desta cláusula ( $\beta$ ) a *nota de rodapé 1* neste trecho, no ( $\beta$ ), dá a definição normal  $l_{k,m}Rl_{l,m}$  e  $l_{m,k}Rl_{m,l}$ , para deixar evidência a relação  $R$  de substituição.

Cláusula ( $\gamma$ ). É o caso especial de uma expressão atômica (ou complexa, não importa) onde todas as variáveis estão ligadas. Essa condição impossibilita qualquer substituição. Entende-se, então, que se na expressão  $x$  as variáveis  $v_1, v_2, \dots, v_k$  estão ligadas e se  $x$  foi obtida de  $y$ , então é porque  $y = x$  e as variáveis de  $y$  são as mesmas  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . O caso vale para uma única variável ligada: se  $x$  é obtida de  $y$  por causa de

uma substituição, mas em  $x$  a variável  $v_k$  está ligada, é porque em  $y$  há a mesma variável  $v_k$  ligada (isto é,  $v_k$  não foi substituída entre  $y$  e  $x$ ) e  $x$  só foi obtida pela substituição de certa variável  $v_l$  livre em  $y$  por outra livre  $v_m$ . Em resumo, substituições só são possíveis para variáveis livres. A respeito desta cláusula ( $\gamma$ ) a *nota de rodapé 1* neste trecho, no ( $\gamma$ ), dá a definição normal  $zRz$  para indicar que, na ausência de variáveis livres, a expressão  $z$  só pode ser substituída por ela própria.

Cláusula ( $\delta$ ). Trata das expressões que são negações de outras expressões. De fato se  $x$  for uma negação  $z\Box$  e  $x$  foi obtida de  $y$ , que por sua vez é uma negação  $t\Box$ , então ocorre que a variável livre  $v_l$  de  $z$  foi substituída por  $v_k$ , gerando a expressão  $t$  obtida de  $z$ . Fica estabelecido que  $z$  pode ser qualquer expressão daquelas descritas em ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ), ( $\epsilon$ ) ou ( $\zeta$ ), ou uma negação (pois negações também podem ser negadas – *dupla negação*). Assim, os diagramas das figuras que auxiliaram no entendimento de cada cláusula valem para esta cláusula. Em outras palavras, se uma expressão é obtida de outra por substituição de variáveis livres, a negação da segunda é obtida da negação da primeira do mesmo modo. Isto é  $(\neg\alpha) v_l/v_k \equiv \neg(\alpha v_l/v_k)$ . A respeito desta cláusula ( $\delta$ ) a *nota de rodapé 1* neste trecho, no ( $\delta$ ), dá a definição normal “se  $zRt$ , então  $z\Box Rt\Box$ ”, para dizer que a relação de substituição que permitiu  $t$  ser obtida de  $z$  é a mesma que faz a negação de  $t$  ser obtida da negação de  $z$ .

Cláusula ( $\epsilon$ ). É a obtenção de expressões moleculares, somadas logicamente (constante  $A$  em notação polonesa), isto é, para as disjunções. Ora, toda disjunção é a soma lógica de negações de expressões atômicas, sejam estas inclusões ou negações, ou de expressões moleculares (disjunções de disjunções). Assim, se  $x$  for obtida de  $y$  por substituição de variáveis livres, e tivermos  $x = z + u$  e  $y = t + w$ , então  $z$  foi obtida de  $t$  por substituição de variáveis e do mesmo modo  $z$  de  $w$ . Isto é  $(\alpha \Box \beta) v_l/v_k \equiv (\alpha v_l/v_k) \Box (\beta v_l/v_k)$ . A respeito desta cláusula ( $\epsilon$ ) a *nota de rodapé 1* neste trecho, no ( $\epsilon$ ), dá a definição normal “se  $zRt$  e  $uRw$ , então  $z + uRt + w$ ”, indicando que se  $t$  é obtida de  $z$  e  $w$  de  $u$ , então ou temos  $z$  ou temos  $w$  ou temos que  $t$  é obtida de  $u$ .

Cláusula ( $\zeta$ ). Explicita as expressões quantificadas obtidas. Obviamente uma expressão quantificada só pode ser obtida de outra quantificada. Como sabemos que a quantificação liga uma variável, então fica óbvio também que a expressão obtida vem

da substituição das variáveis não quantificadas na expressão de origem. Assim  $x$  é obtida de  $y$  e  $x = \prod_m z$  e  $y = \prod_m t$ , vem que  $z$  é obtida de  $t$  pela substituição de  $v_l$  em  $t$  por  $v_k$ , de modo que  $v_m$  seja diferente de  $v_l$  e de  $v_k$  (pois  $v_m$  está ligada). Isto é,  $(\prod v_m \alpha)_{v_l/v_k} \equiv \prod v_m (\alpha_{v_l/v_k})$ . A respeito desta cláusula ( $\zeta$ ) a *nota de rodapé 1* neste trecho, no ( $\zeta$ ), dá a definição normal que explicita que uma expressão obtida de uma quantificada é conseguida pela substituição das variáveis não quantificadas.

Encerrando a discussão da Definição 14, Tarski dá primeiro o exemplo de expressões obtidas por substituição de variáveis livres:

[p.180]-4

Por exemplo, segue-se dessa definição que as expressões  $t_{1,1}$ ,  $\prod_3 (t_{3,1} + t_{1,3})$ , e  $t_{1,3} + \prod_2 t_{2,3}$  são obtidas das funções:  $t_{2,2}$ ,  $\prod_3 (t_{3,2} + t_{2,3})$ , e  $t_{2,3} + \prod_2 t_{2,3}$ , respectivamente, substituindo  $v_2$  por  $v_1$ . Mas a expressão  $\prod_1 t_{1,3}$  não pode ser obtida dessa maneira da função  $\prod_2 t_{2,3}$  nem a expressão  $\prod_1 t_{1,1}$  da função  $\prod_2 t_{2,1}$ .

No entanto, variáveis ligadas não podem ser substituídas e expressões de estrutura semelhante que poderíamos julgar em um primeiro momento terem sido obtidas de outras por substituição de variáveis não são de fato expressões obtidas daquelas porque naquelas as variáveis que se pretenderiam substituíveis estão na verdade ligadas (impossibilitando a aplicação de qualquer cláusula da Definição 14):

[p.180]-5

Mas a expressão  $\prod_1 t_{1,3}$  não pode ser obtida dessa maneira da função  $\prod_2 t_{2,3}$  nem a expressão  $\prod_1 t_{1,1}$  da função  $\prod_2 t_{2,1}$ .

Notemos que a variável  $v_2$  de [p.180]-5 está ligada.

Por fim, a título de comparação, em TARSKI, A.; [1983e], p.285, a Definição 8 trata também das *expressões obtidas*:<sup>116</sup>

“DEFINIÇÃO 8.  $\zeta \text{SE}_{k,l,m}^m \eta$  ( $\zeta$  pode ser obtida de  $\eta$  pela substituição das variáveis livres  $\phi_k^m$  pela variável livre  $\phi_l^m$ ), se

$$k, l, m \in Nt - \{0\},$$

e se  $\zeta$  e  $\eta$  pode ser representada na forma

<sup>116</sup> Para o significado dos símbolos ver nota 47 neste trabalho.

$\zeta = \delta_0 \square \dots \square \delta_n, \quad \eta = \xi_0 \square \dots \square \xi_n,$   
 onde (1)  $n \square Nt$ , e  $\delta_0, \xi_0, \delta_1, \xi_1, \dots, \delta_n, \xi_n \square \{v, \iota, \pi\} + V$ ; (2) se  $\phi_i^m \vDash \eta$ , então  $\phi_i^m \vDash \zeta$ ; (3) se  $i \square Nt, i \leq n$  e a fórmula  $\phi_i^m \vDash \eta$  não vale, então  $\delta_i = \xi_i$ .”

## 2. Relação entre *expressão obtida* e *consequência*

A definição de consequência será dada por Tarski nas Definições 15 e 16. Antes disso, ele inicia uma breve introdução para mostrar as relações existentes entre as noções de *expressão obtida* e a de *consequência*. Intuitivamente ele está assumindo que sendo uma *sentença* uma *expressão* e havendo *expressões obtidas*, as *sentenças* podem ser *obtidas* também. Assim estamos já lidando com a noção de *sentença obtida*, base para a noção de *sentença como consequência*. Primeiro Tarski esclarece que as sentenças de uma classe são consequências dessa classe:

[p.181]-1

Entre as consequências de uma dada classe de sentenças incluímos, primeiro, todas as sentenças pertencentes a essa classe,

O que é obvio. É fácil ver que se  $\Gamma$  for uma classe de sentenças e tivermos  $\phi_i \square \Gamma$ , então  $\phi_i$  é consequência de  $\Gamma$ . Demonstramos isso desse modo:

1.  $\phi_i$  ..... Hipótese (é uma das sentenças de  $\Gamma$ ).
2.  $\square v_m (\phi_i \rightarrow \phi_i)$  ..... Axioma proposicional.<sup>117</sup>
3.  $\square v_m (\phi_i \rightarrow \phi_i) \rightarrow (\phi_i \rightarrow \square v_m \phi_i)$  ..... Forma do Axioma  $\square v_m (\phi_i \rightarrow \phi_i) \rightarrow (\phi_i \rightarrow \square v_m \phi_i)$ <sup>118</sup>
4.  $(\phi_i \rightarrow \square v_m \phi_i)$  ..... Modus Ponens 2,3
5.  $\square v_m \phi_i$  ..... Modus Ponens 1,4.

De outra forma, podemos entender que se pode substituir toda variável livre por outra qualquer, inclusive por uma idêntica. Assim, se há variáveis livres  $v_l$  em uma expressão  $y$ , nada nos impede de substituirmos  $v_l$  por  $v_k$  para  $l = k$ . Nesse caso, não teremos nenhuma expressão obtida  $x$ , mas apenas  $y = y$ . Na Definição 14 aprendemos que uma *expressão obtida* é conseguida desde que haja variáveis livres e que  $k \neq l$ .

Além das próprias sentenças da classe, entre as consequências da classe estão as expressões obtidas a partir das sentenças das classes:

<sup>117</sup>  $v_m$  é uma variável não livre de  $\phi_i$ .

<sup>118</sup> Isto é toda, variável ligada permanece ligada na sentença obtida.

[p.181]-2

e todas as sentenças que podem ser obtidas destas pela aplicação, um número arbitrário de vezes, das quatro operações de *substituição*, *destacamento*, e *inserção* e *eliminação do quantificador universal*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Cf. Łukasiewicz, J. (51), pp. 159-63; IV, p.56.

São quatro os processos que levam a sentenças obtidas. Neste [p.181]-2, a *nota de rodapé* está se referindo ao trabalho de Łukasiewicz, *Elements of mathematical logic* de 1929. Por erro talvez tipográfico, há outro indicador *número 1* de nota de rodapé à mesma página 181, que se refere à parte “IV, p.56” (ver [p.181]-6, mais à frente).

Tarski vai explicar cada operação a partir da idéia de *função sentencial* (e não só de *sentença*, como entendida na Definição 12):

### I) Substituição:

[p.181]-3

Se tivéssemos desejado aplicar estas operações não só a sentenças, mas a funções sentenciais arbitrárias, obtendo assim funções sentenciais como resultados, então o significado da operação de substituição seria completamente determinado pela Definição 14,

Isto é, bastaria o que se tratou por substituição como descrito na Definição 14.

### II) Destacamento:

[p.181]-4

a operação de destacamento correlacionaria a função  $z$  com as funções  $y$  e  $y \square + z$ ,

Trata-se da regra *Modus Ponens*, também chamada de *eliminação da implicação* (mas aqui trabalharemos com o formato  $\alpha \rightarrow \beta \square \neg\alpha \square \beta$ , como também quer Tarski). Uma sentença pode ser obtida por destacamento por causa do que segue. Seja a classe  $\Gamma = \{\phi,$

$\neg\phi_i \sqsupset \phi_i\}$ ,  $\phi_i \neq \phi_i$  e seja  $x$  uma sentença tal que  $\Gamma \sqsupset x$ . Por hipótese,  $x = \phi_i$ . Então  $\phi_i, \neg\phi_i \sqsupset \phi_i \sqsupset \phi_i$  e  $\phi_i \sqsupset \neg(\neg\phi_i \sqsupset \phi_i) \sqsupset \phi_i$  (pelo Teorema da Dedução)<sup>119</sup>, o que é absurdo. Por hipótese,  $x = \neg\phi_i \sqsupset \phi_i$ , então  $\phi_i, \neg\phi_i \sqsupset \phi_i \sqsupset \neg\phi_i \sqsupset \phi_i$  e  $\phi_i \sqsupset \neg(\neg\phi_i \sqsupset \phi_i) \sqsupset (\neg\phi_i \sqsupset \phi_i)$  (pelo Teorema da Dedução), o que é absurdo. Resulta que  $x = \phi_i$  e  $\phi_i, \neg\phi_i \sqsupset \phi_i \sqsupset \phi_i$ .

### III) Introdução do quantificador universal:

[p.181]-5

a operação de introdução do quantificador universal consistiria em formar a função  $y + \prod_{v_k} z$ , a partir da função  $y + z$  (desde que  $v_k$  não seja uma variável livre da função  $y$ ),

Trata-se de uma regra sutil. Por exemplo, sejam as sentenças  $\prod_1 \prod_3 \iota_{3,1}$  e  $\prod_1 \prod_3 (\overline{\iota_{3,1}} + \iota_{1,3})$ . Podemos colocar no lugar das variáveis  $v_1$  e  $v_3$  os indivíduos **a** e **b** e teremos **b**  $\sqsupset$  **a** e  $\neg(\mathbf{b} \sqsupset \mathbf{a}) \sqsupset (\mathbf{a} \sqsupset \mathbf{b})$ . Por *modus ponens* então, temos **a**  $\sqsupset$  **b**, que pode ser generalizado para  $\prod_1 \prod_3 \iota_{1,3}$ , por inserção do quantificador universal. A regra é: o que vale para cada um dos indivíduos que cabe à variável, vale para todos os indivíduos que cabem à variável.

### IV) Eliminação do quantificador universal:

[p.181]-6

a operação de remoção do quantificador universal procederia na direção oposta - da função  $y + \prod_{v_k} z$  para a função  $y + z$ .<sup>1</sup>

É como o anterior, porém indo até a substituição das variáveis pelos indivíduos. Se por exemplo temos  $\prod_1 \prod_3 \iota_{3,1}$ , então podemos substituir as variáveis  $v_1$  e  $v_3$  pelos indivíduos **a** e **b** (e obviamente desaparecem as variáveis) e teremos **a**  $\sqsupset$  **b**.

Aqui no [p.181]-6 aparece o indicador de nota de rodapé *número 1*. Está se referindo à mesma nota que vimos no [p.181]-2, porém só à segunda parte dela (“IV, p.56”). Essa segunda parte está remetendo à página 56 do artigo IV da coletânea dos trabalhos de

<sup>119</sup> O Teorema da Dedução diz que se a sequência  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n, x \sqsupset \psi$  é demonstrável, então  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n, \sqsupset \neg x \sqsupset \psi$  também é demonstrável.

Tarski (a mesma a que também pertence este TARSKI, A.; [1983b] que estamos comentando, objeto deste nosso trabalho), onde lemos (TARSKI, A.; [1983g], p.56):

“DEFINIÇÃO 9: O conjunto  $Cn^X(X)$  de conseqüências do conjunto  $X$  de sentenças (no sentido do cálculo sentencial estendido) é a intersecção de todos aqueles conjuntos que incluem o dado conjunto  $X \subseteq S^X$  e são fechados sob as operações de substituição e destacamento, bem como as de inserção e eliminação de quantificadores.”

onde  $S^X$  é o conjunto das sentenças obtidas e  $X \subseteq Cn^X(X) \subseteq S^X$ . Ou seja, (como estamos lendo nestes [p.181]-1-6) o conjunto das sentenças obtidas de uma classe inclui todas as sentenças dessa classe<sup>120</sup> e as obtidas por *substituição, destacamento e inserção e eliminação de quantificadores universais*.

Tarski, porém, não pode trabalhar com modelos como aqueles dos exemplos dados por ele próprio em p.181-4-6, e sim com sentenças (pois o objetivo de seu trabalho é definir *sentença verdadeira* e não *função sentencial verdadeira* (coisa que não tem sentido). Assim:

[p.181]-7

Aqui, contudo, queremos nos restringir exclusivamente a sentenças (no sentido da Def. 12), e assim modificamos as quatro operações acima para referi-las, não às funções sentenciais envolvidas, mas sim às sentenças que são quantificações universais destas funções.

Essa noção de conseqüência aplicada a *sentenças* (no sentido da Definição 12) será feita na Definição 16. Antes Tarski fará as modificações necessárias ao conceito de conseqüência na Definição 15, assunto do nosso próximo capítulo.

---

<sup>120</sup> Por isso nessa “definição 9” de TARSKI, A.; [1983g], p.56, lemos  $X \subseteq S^X$ .

## CAPÍTULO 7

### A NOÇÃO DE CONSEQUÊNCIA

Tarski introduz seu trabalho de definição de *sentença como consequência* estruturando a noção de consequência. Podemos ler no artigo de Jan Wolenski (WOLEŃSKI, JAN; [1994], pp. 394-395) um apanhado geral das raízes que fundamentaram a noção que Tarski tinha de *consequência*:

“A comunicação de Łukasiewicz de 1915 também contém uma definição de consequência lógica no sentido semântico:

Dizemos que uma sentença  $b$  segue-se de uma sentença ou um grupo de sentenças  $a$  se  $b$  for verdadeira quando  $a$  for verdadeira. [Łukasiewicz 1915, XXI-I]<sup>121</sup>.

Até onde eu sei, é uma das primeiras (talvez a primeira) definição correta de consequência lógica na moderna lógica desde Bolzano. Na Polônia foi redescoberta por Ajdukiewicz em 1923 e generalizada por Tarski em 1936. Segundo Ajdukiewicz [1923, 161]<sup>122</sup>:

Uma fórmula  $f(x)$  formalmente implica uma fórmula  $\phi(\pi)$ , se para alguma possível substituição de  $x$ , ou  $f(x)$  é falso ou  $\phi(\pi)$  é verdadeira.

Desta definição segue-se que, se  $A$  formalmente (logicamente) implica  $B$ , então  $B$  não pode ser falso, uma vez que  $B$  é verdadeiro. Segundo Tarski [1936; q.v. 1956, 417]<sup>123</sup>:

A sentença  $X$  segue-se logicamente das sentenças da classe  $K$  se e somente se cada modelo da classe  $K$  é também um modelo da sentença  $X$ .

A formulação de Tarski é comumente tomada como uma moderna versão da idéia de consequência lógica de Bolzano. Contudo o ponto essencial desta importante idéia foi antecipado, ao menos na Polônia, por Łukasiewicz.”

<sup>121</sup> ŁUKASIEWICZ, JAN, 1915. *O nauce* (On science), in *Poradnik dla samouków* (A Guide for Autodidacts) (Warszawa, Heflich i Michalski), XV-XXXIX.

<sup>122</sup> AJDUKIEWICZ, KAZIMIERZ 1923. *Głowne kierunki filozofii we fragmentach ich klasycznych przedstawicieli* (The Main Currents of Philosophy in Fragments of Their Classical Representatives), Lwów, K.S. Jakubowski.

<sup>123</sup> TARSKI, ALFRED. 1936. *O Pojeciu wynikania logicznego* (On the concept of logical consequence), *Przegląd filozoficzny* 39, 58-68. English translation in [Tarski 1956], 408-420. Neste nosso trabalho também citaremos esta comunicação de Tarski usando a edição TARSKI, A.; [1983h].

A formulação de Tarski veremos novamente mais adiante. Antes da Definição 15, Tarski começa dizendo seu passo inicial no tratamento da *consequência lógica*:

[p.181]-8

No sentido de simplificar a construção, primeiro definirei o conceito auxiliar de *consequência de n-ésimo grau*.

Aquilo que Tarski entende por *consequência* é aquilo que poderíamos chamar de *satisfação em termos de modelos*. Não vamos nos deter extensivamente neste assunto, mas Tarski trabalhou seu conceito de consequência lógica em seu trabalho *On the Concept Of Logical Consequence*, de 1936<sup>124</sup>. Assim, o critério de consequência lógica passa pela idéia de *satisfatibilidade* e de *modelo*. O que Tarski entende por *satisfatibilidade* ele mesmo aponta (TARSKI, A.; [1983h], p.416, nota de rodapé 2) estar bem estruturado nos artigos VII e XV da coletânea *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*.<sup>125</sup> No *On the Concept Of Logical Consequence* (TARSKI, A.; [1983h], p.416) ele fala da satisfatibilidade de modo intuitivo como segue:

“(...). Entre os conceitos semânticos fundamentais nós temos o conceito de *satisfação de uma função sentencial* para um único objeto ou para uma sequência de objetos. Seria supérfluo dar aqui uma explanação precisa do conteúdo desse conceito. O significado intuitivo de tais frases como: *John e Peter satisfazem a condição ‘X e Y são irmãos’*, ou *a tripla de números 2, 3 e 5 satisfaz a equação ‘x + y = z’*, não dão margem a dúvidas. O conceito de satisfação – como outros conceitos semânticos – pode sempre ser relativizado para alguma linguagem particular. Os detalhes dessa definição precisa dependem da estrutura dessa linguagem. Entretanto, um método geral pode ser

---

<sup>124</sup> Este artigo está na coletânea *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, 1983, como o artigo XVI, pp.409-420. A nota bibliográfica à p.409 informa: “Esta é um sumário de uma comunicação dada no Congresso Internacional de Filosofia Científica em Paris, 1935. O artigo apareceu impresso pela primeira vez em polonês sob o título ‘O pojeiu wynikania logicznego’ em *Przeegląd Filozoficzny*, vol. 39 (1936), pp. 58-68, e então em alemão sob o título ‘Über den Begriff der logischen Folgerung’, *Actes Du Congrès International de Philosophie Scientifique*, vol. 7 (Actualités Scientifiques ET Industrielles, vol. 394), Paris, 1936, PP. 1-11.”

<sup>125</sup> *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, 1983, como o artigo XVI, pp.409-420. O artigo VIII é o próprio TARSKI, A.; [1983b] que vimos trabalhando. O artigo XV é o TARSKI, A.; [1983a].

desenvolvido que habilite-nos construir definições para uma compreensiva classe de linguagens formalizadas. (...).

Assim, o que Tarski entende por *satisfatibilidade* é a condição de um predicado caber adequadamente ao objeto que descreve, se a propriedade descrita pelo predicado se aplica ao objeto. Em uma classe de sentenças, se uma sentença cumpre essa condição, então ela é *modelo* dessa classe. O conceito de *modelo* é entendido por Tarski (TARSKI, A.; [1983h], pp.416-417) como segue:

“Um dos conceitos que podem ser definidos em termos de conceito de satisfação é o conceito de *modelo*. Vamos assumir que na linguagem estamos considerando que certas variáveis correspondem a cada constante extra-lógica, e de tal forma que cada sentença se torne uma função sentencial se as constantes forem trocadas por variáveis correspondentes. Seja  $L$  qualquer classe de sentenças. Nós trocaremos toda constante extra-lógica que ocorra nas sentenças pertencente a  $L$  por correspondentes variáveis, assim constantes sendo trocadas por correspondentes variáveis, o contrário também. Desse modo obteremos a classe  $L'$  de funções sentenciais. Uma sequência arbitrária de objetos que satisfaçam cada função sentencial da classe  $L'$  será chamado um *modelo* ou *realização da classe  $L$  de sentenças* (é neste sentido que usualmente falamos de modelos de um sistema axiomático de uma teoria dedutiva). Se, em particular, a classe  $L$  consiste de uma sentença singular  $X$ , faremos referência a um modelo da classe  $L$  como um *modelo da sentença  $X$* .”

Estabelecidas essas duas noções (satisfatibilidade e modelo). Tarski (TARSKI, A.; [1983h], p.417) dá uma definição de consequência lógica:<sup>126</sup>

“Em termos desses conceitos podemos definir o conceito de consequência lógica como segue:

---

<sup>126</sup> No final da definição em itálico que aparece nesta passagem, há uma nota de rodapé de caráter informativo histórico, que diz: “Após o original dessa comunicação ter aparecido impresso, H. Scholz no seu artigo ‘Die Wissenschaftslehre Bolzanos, Eine Jahrhundert-Betrachtung’, *Abhandlungen der Fries’schen Schule*, new series, vol. 6, PP.399-472 (veja em particular p.472, nota de rodapé 58) aponta uma analogia distante entre esta definição de consequência e a sugerida por B. Bolzano cerca de uma centena de anos antes.”

*A sentença X segue-se logicamente das sentenças da classe K se e somente se cada modelo da classe K também é um modelo da sentença X.*

“Parece a mim que todo aquele que entende o conceito da definição acima deve admitir que ela está muito de acordo como o uso comum. Isto vem ainda a esclarecer várias de suas conseqüências. Em particular, pode ser provado, com base nessa definição, que toda conseqüência de sentenças verdadeiras deve ser verdadeira, e também que a relação de conseqüência que há entre dadas sentenças é completamente independente do sentido das constantes extra-lógicas que ocorrem nessas sentenças. Em breve, pode ser mostrado que a condição (*F*) formulada acima é necessária se a sentença *X* é a que segue da sentença de classe *K*. Por outro lado, esta condição não é em geral suficiente, uma vez que o conceito de conseqüência aqui definido (de acordo com o ponto de vista que tomamos) é independente da riqueza de conceitos da linguagem que é investigada.

Não vamos nos estender mais nessa questão do modo como Tarski entende conseqüência lógica, só vamos finalizar dizendo que há críticas sérias a essa concepção de Tarski. Etchemendy (ETCHEMENDY, J. [1999]) mostrou dois problemas intrínsecos à definição de Tarski, que ele chamou de *inadequação conceitual* e *inadequação material*, que não destrincharemos aqui por não convir no tema deste capítulo. Passemos à Definição 15 presente no trabalho de Tarski.

### **1. Definição de conseqüência de n-ésimo grau**

Sabemos já que uma conseqüência lógica tem caráter de ser o processo onde certas sentenças são obtidas a partir de outras segundo certas circunstâncias adequadas. É um modo bastante específico de se ligar sentenças obtidas a sentenças originais de forma lógica. Assim, uma conseqüência pode gerar uma sentença obtida de forma imediata ou a sentença obtida pode estar mediada até a original por *n* outras sentenças obtidas de um ou de outro modo, segundo as regras descritas na Definição 14. A Definição 15 é apresentada por Tarski como segue:

[p.181-182]

DEFINIÇÃO 15.  $x$  é uma *consequência de  $n$ -ésimo grau* da classe  $X$  de sentenças se e somente se  $x \in S$ ,  $X \subseteq S$ ,  $n$  é um número natural e ou ( $\alpha$ )  $n = 0$  e  $x \in X$ , ou  $n > 0$  e uma das cinco condições seguintes é satisfeita: ( $\beta$ )  $x$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$ ; ( $\gamma$ ) há funções sentenciais  $u$  e  $w$ , uma sentença  $y$  e números naturais  $k$  e  $l$  tais que  $x$  é a quantificação universal da função  $u$ ,  $y$  é a quantificação universal da função  $w$ ,  $u$  pode ser obtida da função  $w$  pela substituição da variável  $v_l$  pela variável  $v_k$ , e  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$ ; ( $\delta$ ) há funções sentenciais  $u$  e  $w$  bem como sentenças  $y$  e  $z$  tais que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são quantificações universais das funções  $u$ ,  $w \square + u$  e  $w$ , respectivamente, e  $y$  e  $z$  são consequências de grau  $n-1$  da classe  $X$ ; ( $\epsilon$ ) há funções sentenciais  $u$  e  $w$ , uma sentença  $y$  e um número natural  $k$  tais que  $x$  é uma quantificação universal da função  $u + \bigcap_k w$ ,  $y$  é uma quantificação universal da função  $u + w$ ,  $v_k$  não é uma variável livre de  $u$ , e  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$ ; ( $\zeta$ ) há funções sentenciais  $u$  e  $w$ , uma sentença  $y$  e um número natural  $k$ , tais que  $x$  é uma quantificação universal da função  $u + w$ ,  $y$  é uma quantificação universal da função  $u + \bigcap_k w$ , e  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$ .

O primeiro ponto de importância é que só existe consequência se  $x$  pertencer ao conjunto das sentenças ( $x \in S$ ),  $X$  for uma classe de sentenças ( $X \subseteq S$ , isto é: os elementos de  $X$  são sentenças) e  $x$  for consequência de  $X$ . Nestas condições há dois casos: se  $x \in X$  e se  $x \notin X$ . O caso  $x \in X$  é o cláusula ( $\alpha$ ) e o caso  $x \notin X$  é o das demais cláusulas.

**I. Cláusula ( $\alpha$ ).** Temos  $n = 0$  e  $x \in X$ . Trata-se de uma *consequência trivial*, onde a sentença obtida é idêntica a uma daquelas (ou àquela única) de onde foi obtida. É o clássico *petitio principii*<sup>127</sup>. Esta cláusula corresponde ao que lemos em [p.181]-1.

Este é o caso  $x \in X$ . Se  $n > 0$ , temos o caso  $x \notin X$  e valem as demais cláusulas:

**II. Cláusula ( $\beta$ ).** Temos que  $x$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$ . Isso quer dizer que o conjunto das consequências de  $X$  cresce acumulativamente (isto é, ‘herda’ todas as consequências de  $X$  anteriores a  $n$ ) com respeito a  $n$ . Significa ainda que uma consequência de  $X$  arbitrariamente escolhida nunca é a de máximo grau (apesar de

<sup>127</sup> O *petitio principii* é sempre conhecido como uma falácia, mas não se pode generalizar. Há argumentos desse tipo que são legítimos. Por exemplo:

**Argumento:** É possível ler esta frase, então é possível ler esta frase.

**Exposição:**      **Premissa:** É possível ler esta frase

**Conclusão:** é possível ler esta frase.

**Explicação:** de fato, a frase foi lida, e a conclusão verdadeira foi obtida de uma premissa verdadeira.

poder ser a de maior grau até o momento da escolha), isso porque sempre é possível obter uma consequência de grau superior. Neste caso, a nova consequência de grau mais elevado inclui a de grau inferior no processo de obtenção. Temos que levar em conta que a consequência é a *última sentença de um processo de aplicação de operações feitas sobre as sentenças de X, processo este que gera e faz uso de sentenças que não pertence a X e que seriam as últimas (e consequências regidas de seus grau em função do último passo dentre vários sucessivos de operações repetitivas próprias do processo) caso o processo parasse*. Ou seja, sendo o processo de obtenção de uma consequência devido a um número que pode vir a ser infinito (mas nunca zero) de passos sucessivos e repetitivos de aplicação das operações que lemos em [p.181]-2, então qualquer consequência nunca será a última.

**III. Cláusula ( $\gamma$ ).** Diz: “há funções sentenciais  $u$  e  $w$ , uma sentença  $y$  e números naturais  $k$  e  $l$  tais que  $x$  é a quantificação universal da função  $u$ ,  $y$  é a quantificação universal da função  $w$ ,  $u$  pode ser obtida da função  $w$  pela substituição da variável  $v_l$  pela variável  $v_k$ , e  $y$  é uma consequência de grau  $n-l$  da classe  $X$ ”. Esta cláusula corresponde a quantificações universais para o que foi definido no [p.181]-3. Trata-se da regra de substituição de variáveis e, portanto, lida com as cláusulas da Definição 14. Em linhas gerais, quando a função sentencial  $u$  é quantificada, então se torna a sentença  $x$  que pertence a uma classe  $X$  de sentenças. Ora, existe uma função sentencial  $w$  que, quantificada, dá a sentença  $y$ . Se  $u$  é obtida de  $w$  segundo a regra de substituição dada pela Definição 14 (que dá inclusive as restrições para as substituições de variáveis), então fica claro que  $x$  é uma consequência de  $y$ . E é uma consequência de grau  $n$ . Vamos criar uma notação especial que facilitará a compreensão do que a cláusula ( $\gamma$ ) quer dizer:

$u = w^{v_k/v_l}$  é uma abreviação para  *$u$  é uma função sentencial obtida da função sentencial  $w$  pela substituição de  $v_l$  por  $v_k$ .*

$Q[w]$  é uma abreviação para *quantificação universal da função sentencial  $w$ .*

Com essas duas abreviações podemos escrever algo no esquema:

$$\frac{P_1 P_2 P_3 \dots P_{n-1}}{C} \rightarrow \frac{\text{(premissas)}}{\text{(conclusão)}}$$

Onde  $C$  seria uma consequência de grau  $n$ . seguindo esse esquema, a cláusula ( $\gamma$ ) pode ser escrita:

$$\frac{Q[w]}{Q[w^{v_k/v_l}]} \rightarrow \frac{Q[w]}{Q[u]} \rightarrow \frac{y}{x}$$

**IV. Cláusula ( $\delta$ ).** Diz: “há funções sentenciais  $u$  e  $w$  bem como sentenças  $y$  e  $z$  tais que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são quantificações universais das funções  $u$ ,  $w \square + u$  e  $w$ , respectivamente, e  $y$  e  $z$  são consequências de grau  $n-1$  da classe  $X$ ”. Esta cláusula refere-se à operação de destacamento (*modus ponens*) e corresponde ao que lemos no [p.181]-4. Em linhas gerais, existe a função sentencial  $u$  obtida das funções sentenciais  $w$  e  $w \square + u$  por destacamento. Se estas duas últimas forem quantificadas, se tornarão respectivamente as sentenças  $z$  e  $y$ . Claramente, existe a quantificação de  $u$  que dá a sentença  $x$ . Assim, se  $u$  é obtida, a quantificação de  $u$  resulta na consequência  $x$  (assim como a quantificação de  $w$  resulta na consequência  $z$ ). Para melhor visualizarmos, podemos escrever esta cláusula ( $\delta$ ) como segue:

$$\frac{y}{z} \rightarrow \frac{Q[\bar{w}+u]}{Q[w]} \rightarrow \frac{Q[w \rightarrow u]}{Q[u]} \rightarrow \frac{x}{x}$$

onde  $Q[w \rightarrow u]$  é  $y$ ,  $Q[w]$  é  $z$  e  $Q[u]$  é  $x$ .

**V. Cláusula ( $\epsilon$ ).** Diz: “há funções sentenciais  $u$  e  $w$ , uma sentença  $y$  e um número natural  $k$  tais que  $x$  é uma quantificação universal da função  $u + \prod_k w$ ,  $y$  é uma quantificação universal da função  $u + w$ ,  $v_k$  não é uma variável livre de  $u$ , e  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$ ”. Trata-se do discutido no [p.181]-5 e é a regra de introdução do quantificador universal. Quer dizer que existem duas funções sentenciais,  $u$  e  $w$ , que são associadas pela soma lógica para formar a função sentencial  $u + w$ . Tenhamos em mente que  $u$  tem variáveis livres, assim como  $w$ . Tomemos apenas a variável livre  $v_k$  de  $w$  e vamos ligá-la (poderíamos fazer o mesmo com  $u$  – e faremos para obter a consequência  $x$  – mas não faremos agora porque estamos seguindo os passos de um

processo que resultará em uma sentença como consequência). Por causa dessa variável livre  $v_k$  em  $w$  conseguimos a expressão obtida  $u + \bigcap_k w$ , que ainda é função sentencial porque há variáveis livres em  $u$ . Agora temos duas funções sentenciais interessantes:  $u + w$  e  $u + \bigcap_k w$  ( $u$  e  $w$  são funções sentenciais, mas não nos interessam nesta cláusula ( $\epsilon$ ) sem estarem associadas, pois o estudo de funções sentenciais simples – simples porque não estão logicamente somadas, isto é, são não-disjuntas – já vimos nas cláusulas anteriores).

Ora, existe a quantificação de  $u + w$ , que dá a sentença  $y$ . Como  $u + \bigcap_k w$  foi obtida de  $u + w$ , então a quantificação de  $u + \bigcap_k w$  dá a sentença  $x$  que é uma consequência de grau  $n$ . E  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  porque está um grau (um passo) atrás de  $x$  e porque toda sentença de  $X$  é consequência de  $X$ . Podemos, enfim, escrever esta cláusula ( $\epsilon$ ) como segue:

$$\frac{Q[u+w]}{Q[u+\bigcap_k w]} \rightarrow \frac{y}{x}$$

**VI. Cláusula ( $\zeta$ ).** Diz: “há funções sentenciais  $u$  e  $w$ , uma sentença  $y$  e um número natural  $k$ , tais que  $x$  é uma quantificação universal da função  $u + w$ ,  $y$  é uma quantificação universal da função  $u + \bigcap_k w$ , e  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$ ”. Na sequência do anterior, refere-se à eliminação do quantificador universal. Como o anterior, temos duas funções sentenciais,  $u$  e  $w$ . Temos ainda que  $u$  tem variáveis livres, assim como  $w$ . Tomemos apenas a variável livre  $v_k$  de  $w$  e vamos ligá-la. Teremos então a função sentencial  $\bigcap_k w$ . Agora vamos associar  $u$  e  $\bigcap_k w$  por soma lógica para formar a função sentencial  $u + \bigcap_k w$ . Ora, existe uma operação de eliminação do quantificador universal que obtém  $u + w$  de  $u + \bigcap_k w$ . Assim temos agora duas funções sentenciais interessantes:  $u + \bigcap_k w$  e a obtida  $u + w$ .

Ora, existe a quantificação de  $u + \bigcap_k w$ , que dá a sentença  $y$ . Como  $u + w$  foi obtida de  $u + \bigcap_k w$ , então a quantificação de  $u + w$  dá a sentença  $x$  que é uma

consequência de grau  $n$ . E  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  porque está um grau (um passo) atrás de  $x$ . Podemos, enfim, escrever esta cláusula ( $\epsilon$ ) como segue:

$$\frac{Q[u + \bigcap_k w]}{Q[u + w]} \rightarrow \frac{y}{x}$$

Estabelecida as condições de consequência, pode-se agora definir o conceito geral de consequência, papel da Definição 16.

## 2. Definição geral de consequência

Em seu artigo *On Some fundamental Concepts of Metamathematics*, de 1928, Tarski escreveu:<sup>128</sup>

“Disciplinas dedutivas formalizadas formam o campo da pesquisa da metamatemática rigorosamente no mesmo sentido que entidades espaciais formam o campo de pesquisa da geometria. Essas disciplinas são consideradas, do ponto de vista da metamatemática, como conjuntos de *sentenças*. Aquelas sentenças que (segundo a sugestão de S. Lesniewski) são também chamadas *sentenças significativas*, são elas próprias consideradas como certas inscrições de forma bem definida. O conjunto de todas as sentenças é aqui denotado pelo símbolo ‘ $S$ ’. Das sentenças de qualquer conjunto  $X$  certas outras sentenças podem ser obtidas segundo certas operações chamadas *regras de inferência*. Essas sentenças são chamadas as *consequências do conjunto*  $X$ . O conjunto de todas as consequências é denotado pelo símbolo ‘ $Cn(X)$ ’.”<sup>129</sup>

A Definição 16 formaliza o modo intuitivo de se entender consequência:

---

<sup>128</sup> TARSKI, A.; [1983i]. Há uma nota bibliográfica na abertura desse TARSKI, A.; [1983i], p.30, que diz: “As principais idéias deste artigo foram resumidas pelo autor em uma palestra para a Sociedade polonesa de Matemática, Seção Varsóvia, em 1828. Para um sumário desta palestra ver Tarski, A. (72) [trata-se do artigo *Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques*, publicada nos *Ann. Soc. Polon. Math.*, vii (1929) 270-11]. A comunicação foi apresentada (por J Łukasiewicz) para a Sociedade Científica de Varsóvia em 27 de Março de 1930; foi publicada sob o título ‘Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik’ em *Comptes Rendus des sciences de La Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, vol. 23, 1930, cl. iii, pp.22-29.”

<sup>129</sup> Exatamente neste ponto também há neste TARSKI, A.; [1983i], p.30 uma nota de rodapé indicada por ‡ que informa a respeito do símbolo ‘ $Cn(X)$ ’: “Mais frequentemente eles serão agora referidos para as sentenças derivadas do conjunto  $X$ , enquanto o termo *consequência* é reservado para consequências semânticas. Ver XVI (onde o termo ‘consequência lógica’ é usado no lugar de ‘consequência semântica’).” O ‘XVI’ é o TARSKI, A.; [1983h].

[p.182]-1

DEFINIÇÃO 16.  $x$  é uma *conseqüência* da classe  $X$  de sentenças – simbolicamente,  $x \in Cn(X)$  – se e somente se há um número natural  $n$  tal que  $x$  é uma *conseqüência* de grau  $n$  da classe  $X$ .<sup>1</sup>

Dizer que “... há um número natural  $n$  tal que...” quer dizer que se trata de um grau enumerável, que o número de operações que resultou na consequência é finito e enumerável. Em outras palavras, a Definição 16 explica que  $x$  é uma consequência de  $X$  se obtida por uma quantidade enumerável de aplicações repetitivas de uma, de algumas ou de todas as quatro operações (*substituição, destacamento e introdução e eliminação de quantificador universal*).

Há neste [p.182]-1 uma *nota de rodapé 1* (como indica o indicador de nota nº 1 no fim da definição) bastante extensa, que merece comentário particularizado, como segue:

[p.182]-1 – *nota de rodapé 1*

<sup>1</sup> O conceito de consequência pode ser também introduzido diretamente (i.e. sem a ajuda de consequência de  $n$ -ésimo grau) do seguinte modo:

$x \in Cn(X)$  se e somente se  $X \subseteq S$  e se a fórmula  $x \in Y$  vale para toda classe  $Y$  que satisfaça as seguintes condições: (α)  $X \subseteq Y$ ; (β) se  $y \in S$  e é uma quantificação universal da função  $u$ ,  $z$  é uma quantificação universal da função  $w$ ,  $u$  é obtida da função  $w$  pela substituição da variável  $v_k$  pela variável  $v_l$  e  $z \in Y$ , então  $y \in Y$ ; (γ) se  $y \in S$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$  são quantificações universais das funções  $u$ ,  $w \sqcup + u$  e  $w$ , respectivamente, e  $z \in Y$  e  $t \in Y$ , então  $y \in Y$ ; (δ) se  $y \in S$ ,  $u$  e  $w$  são funções sentenciais,  $y$  é uma quantificação universal da função  $u + \prod_k w$ ,  $z$  é uma quantificação universal da função  $u + w$ ,  $v_k$  não é uma variável livre da função  $u$  e  $z \in Y$ , então  $y \in Y$ ; (ε) se  $y \in S$ ,  $u$  e  $w$  são funções sentenciais,  $y$  é uma quantificação universal da função  $u + w$ ,  $z$  uma quantificação universal da função  $u + \prod_k w$ ,  $z \in Y$ , então  $y \in Y$ .

Deve-se notar, contudo, que pela transformação da definição que foi justamente dada em uma sentença recursiva do tipo da Def. 10 obtemos uma sentença que não é equivalente nem com a definição acima nem a qualquer outra definição normal (cf. p.177, nota 1).

Essa *nota de rodapé 1* neste [p.182]-1 explica como é possível introduzir a idéia de consequência sem necessitar da Definição 15 anterior. Para isso, a chave é instaurar um conjunto  $Y$  de todas as consequências de grau 0 até grau  $n-1$ . Se  $Cn(X)$  é o conjunto das consequências de  $X$ , se  $S$  é o conjunto das sentenças e  $x$  é uma consequência de grau

$n-1$  de  $X$ , fica óbvio pela definição que  $x \sqsubset Cn(X)$  e que  $X \sqsubset Cn(X) \sqsubset Y \sqsubset S$ .<sup>130</sup> Vamos estudar cada cláusula da *nota de rodapé 1* deste [p.182]-1:

**i. Cláusula ( $\alpha$ ).** (Regra da inclusão)  $X \sqsubset Y$ . Toda sentença de  $X$  é consequência de grau zero e  $X \sqsubset Cn(X) \sqsubset Y$ .

**ii. Cláusula ( $\beta$ ).** (Axioma da substituição). Se  $u$  é obtida de  $w$  por substituição de variáveis livres e se a quantificação universal de  $w$  gera  $z \sqsubset S$ , e a quantificação universal de  $u$  gera a sentença  $y$ , então  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  e, portanto,  $y \sqsubset Cn(X) \sqsubset Y$ .

**iii. Cláusula ( $\gamma$ ).** (*Modus Ponens* ou destacamento). Por *modus ponens*  $u$  é obtida de  $w \sqsubset + u$  e  $w$ . Se a quantificação de  $w$  resulta na sentença  $z$  e a quantificação de  $w \sqsubset + u$  resulta na sentença  $t$ , então existe a quantificação universal de  $u$  que faz a sentença  $y$ . Portanto  $y \sqsubset Cn(X) \sqsubset Y$ .

**iv. Cláusula ( $\delta$ ).** (Introdução do quantificador universal). Obtemos  $u + \prod_k w$  de  $u + w$  ligando a variável livre  $v_k$  de  $w$ . Se a quantificação de  $u + w$  resultar na sentença  $z$  e a quantificação de  $u + \prod_k w$  resultar na sentença  $y$ , então  $z \sqsubset Y$  (cláusula ( $\alpha$ )) e  $y$  é consequência de grau  $n-1$ . Daí  $y \sqsubset Cn(X) \sqsubset Y$ .

**v. Cláusula ( $\epsilon$ ).** (Eliminação do quantificador universal). Obtemos  $u + w$  de  $u + \prod_k w$  eliminando o quantificador universal. Se a quantificação de  $u + \prod_k w$  resultar na sentença  $z$  e a quantificação de  $u + w$  resultar na sentença  $y$ , então  $z \sqsubset Y$  (cláusula ( $\alpha$ )) e  $y$  é consequência de grau  $n-1$ . Daí  $y \sqsubset Cn(X) \sqsubset Y$ .

Encerramos aqui a discussão a respeito das definições que instauram o que é uma consequência lógica. Sendo a consequência lógica a natureza que liga dois tipos de sentenças significativas, uma original e outra obtida a partir dessa, esse conjunto de sentença original, sentença obtida e natureza de consequência entre uma é o que sustenta a forma de um *teorema*. Teorema é portanto, a sentença muito mais complexa

---

<sup>130</sup> O símbolo ' $Cn(X)$ ' recebe em lógica o nome de *operador de consequência de Tarski* e tem resultados importantes no campo das estruturas das lógicas de primeira ordem (ver os estudos de DE SOUZA, EDELICIO G. e VELASCO, PATRÍCIA D. N.; [2001], VELASCO, PATRÍCIA D. N.; [2004] e NASCIMENTO, M. C. e FEITOSA, H. A.; [2005].).

que se constrói em várias passagens sucessivas a partir das sentenças primitivas. As discussões e definições do que tange ao teoremas será o tema seguinte.

## CAPÍTULO 8

### O QUE É TEOREMA

Em seu livro *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences* (TARSKI, A.; [1994], p.146) Tarski explica o roteiro técnico que leva uma linguagem desde seu nível básico e não-lógico até a superestrutura lógica que permite derivações dentro da própria linguagem, o nível dos teoremas:

Por um compromisso entre o ideal inatingível e as possibilidades de realização, surgiram certos princípios em relação à construção de disciplinas matemáticas que podem ser descritos como segue.

Quando partimos para a construção de uma determinada disciplina, podemos distinguir, em primeiro lugar, um certo pequeno grupo de expressões desta disciplina que nos parece ser imediatamente compreensível; chamamos as expressões desse grupo de TERMOS PRIMITIVOS ou TERMOS INDEFINIDOS, e nós empregá-mo-los sem explicar seus significados. Ao mesmo tempo, adotamos o princípio: não utilizar qualquer outra expressão da disciplina em questão, a menos que o seu significado tenha sido previamente determinado, com a ajuda de termos primitivos e daquelas expressões da disciplina cujos significados foram explicados anteriormente. As sentenças que determinam os significados dos termos dessa maneira são chamados de DEFINIÇÕES, e as expressões próprias, cujos significados são, portanto, determinados de acordo, são conhecidas como TERMOS DEFINIDOS.

Procederemos de modo similar com respeito às afirmadas declarações da disciplina em questão. Algumas dessas declarações, quando sua verdade aparece evidente para nós, são chamadas de DECLARAÇÕES PRIMITIVAS ou AXIOMAS (também conhecidos como POSTULADOS, mas não vamos usar o último termo em sentido técnico aqui), nós aceitá-mo-las como verdade, sem estabelecê-las de qualquer maneira. Por outro lado, estamos de acordo em aceitar qualquer outra declaração como verdadeira apenas se tem estabelecida a sua validade e não utilizamos para esse propósito nada além dos axiomas, das definições, e das declarações da disciplina, que foram estabelecidos anteriormente. Como é sabido, as declarações que são justificadas dessa forma são chamados DECLARAÇÕES PROVADAS ou TEOREMAS e os processos de justificá-las são chamados de PROVAS. Mais geralmente, se dentro da lógica ou matemática, estabelecermos uma declaração a partir de outras, nós nos referimos a este processo

como uma DERIVAÇÃO ou DEDUÇÃO, e da declaração em questão é dito ser DERIVADA ou DEDUZIDA a partir das outras, ou, CONSEQUÊNCIA delas.

É a partir dessas noções básicas e das definições criteriosas anteriores que Tarski define um *teorema*.

### 1. Definição de *sentença demonstrável* (ou *teorema*)

A definição que Tarski dá de teorema é a que se segue:

[p.182]-2

DEFINIÇÃO 17.  $x$  é uma *sentença demonstrável* (aceita) ou *teorema* – em símbolos  $x \in Pr$  – se e somente se  $x$  for uma consequência do conjunto de todos os

De fato, se tomarmos os axiomas como sentenças originais a partir das quais, por meio dos processos de obtenção de sentenças vistos na Definição 14, se obtém sentenças com caráter de consequência lógica, é possível demonstrar que as sentenças obtidas provêm dos axiomas ao se verificar que são teoremas. Isto é, as sentenças obtidas e com caráter de consequência dependem integralmente dos axiomas: são deduzidas a partir delas.

Um esclarecimento prévio da natureza de uma sentença demonstrável pode ser lido em *On the Concept of Logical Consequence* (TARSKI, A.; [1983h], p. 419, nota de rodapé 1):<sup>131</sup>

“Talvez será instrutivo justapor os três conceitos: ‘derivabilidade’ (...), ‘consequência formal’, e ‘consequência material’, para o caso especial quando a classe  $K$  de sentenças, da qual a dada sentença  $X$  se segue, consiste unicamente de um número finito de sentenças:  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Vamos denotar pelo símbolo ‘ $Z$ ’, a sentença condicional (a implicação) cujo antecedente é a conjunção das sentenças  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  e cujo consequente é a sentença  $X$ . As seguintes equivalências podem ser estabelecidas:

---

<sup>131</sup> A respeito das referências apontadas por Tarski neste trecho, o ‘XII’ é artigo *Foundations of the Calculus of Systems* (TARSKI, A.; [1983j]), o (2) e o (4) são, respectivamente, os artigos *From the methodology of the deductive sciences* (Z metodologii nauk dedukcyjnych, Lwow, 1921) e *The logical foundations of teaching* (Logiczne podstawy nauczania, Encyclopidja Wychowania, ii, Warszawa, 1934).

*A sentença X é (logicamente) derivável das sentenças da classe K se e somente se a sentença Z é logicamente demonstrável (isto é, derivável dos axiomas da lógica);*

*A sentença X segue-se formalmente das sentenças da classe K se e somente se a sentença Z é analítica;*

*A sentença X segue-se materialmente das sentenças da classe K se e somente se a sentença Z é verdadeira.*

Das três equivalências unicamente a primeira pode estar sujeita a certas objeções; cf. o artigo XII, pp. 342-64, especialmente 346. Em conexão com estas equivalências cf. também Ajdukiewicz, K. (2), p. 19, e (4), pp. 14 e 42.

Em vista da analogia indicada entre as muitas variantes do conceito de consequência, apresenta-se a questão de se não seria útil introduzir, em adição aos conceitos especiais, um conceito geral de um caráter relativo, e de fato o conceito de *consequência com respeito à classe L de sentenças*. Se fizermos novamente uso da notação prévia (limitando-nos ao caso em que a classe K é finita) podemos definir este conceito como se segue:

*A sentença X segue-se das sentenças da classe K, com respeito à classe L de sentenças se, e somente se, a sentença Z pertence à classe L.*

Com base nesta definição, a derivabilidade iria coincidir com a consequência com respeito às classes de todas as sentenças logicamente demonstráveis, a consequência formal seria consequência com respeito à classe de todas as sentenças analíticas, e as consequências materiais aquelas com respeito a todas as sentenças verdadeiras.”

Fica assim estabelecido o sentido de *sentença demonstrável* para Tarski. As sentenças demonstráveis formam um conjunto *Pr* de sentenças. Quem são todos os membros desse conjunto? Aponta Tarski:

[p.182]-3

Dessa definição, é fácil ver que temos, entre as sentenças demonstráveis, não só todas as sentenças que possam ser obtidas dos teoremas do cálculo sentencial do mesmo modo como os axiomas do primeiro tipo (isto é, aqueles que satisfazem a condição ( $\alpha$ ) da Definição 13) foram obtidos dos axiomas do cálculo sentencial, mas também todos os teoremas conhecidos do cálculo de classes não-formalizado, desde que eles sejam primeiro traduzidos para a linguagem sob investigação.

Isto é, pertencem a *Pr* todas as sentenças que forem obtidas dos axiomas da cláusula ( $\alpha$ ) da Definição 13 e mais todos os teoremas de qualquer linguagem, desde que esses teoremas sejam traduzidos para a linguagem objeto *L* (tradução essa que todas

estas definições desde a 1 até esta 17, ensinam metalinguisticamente, como funciona). Podemos ler o ( $\alpha$ ) da Definição 13 no [p.179]-4. No QUADRO A seguinte temos os axiomas de  $L$  e sua tradução metalinguística<sup>132</sup> de primeiro tipo (segundo a cláusula ( $\alpha$ ) da Definição 13) e no QUADRO B temos a tradução metalinguística de segundo tipo (segundo cláusula ( $\beta$ ) da Definição 13):

QUADRO A - Axiomas de $L$ , traduzidos metalinguisticamente na Definição 13	
Axiomas de $L$ (notação polonesa e moderna mais usual)	Tradução metalinguística (Cláusula ( $\alpha$ ))
$\Pi x, Ix, x,$ $\square x_1(x_1 \square x_1)$	$y \square S$
$\Pi x, \Pi x,, \Pi x,, ANIx, x,, ANIx,, x,, Ix, x,,$ $\square x_1 \square x_2 \square x_3 (\square (x_1 \square x_2) \square \square (x_2 \square x_3) \square (x_1 \square x_3))$	$\overline{y + \overline{y}} + y$
$\Pi x, \Pi x,, \Pi x,, NANNANIx, x,, Ix, x,, \Pi x,, NAIx, x,, Nax, x,, Aix, x,,$ $\square x_1 \square x_2 \square x_3 ((x_1 \square x_3) \square (x_2 \square x_3) \square \square x_4 (\neg(x_1 \square x_4) \square \neg(x_2 \square x_4) \square (x_3 \square x_4)))$	$\overline{y} + (y + z)$
$\Pi x, \Pi x,, \Pi x,, NANNANIx, x, Ix, x,, \Pi x,, NAIx, x,, Nax, x,, Aix, x,,$ $\square x_1 \square x_2 \square x_3 ((x_3 \square x_1) \square (x_3 \square x_2) \square \square x_4 (\neg(x_4 \square x_1) \square \neg(x_4 \square x_2) \square (x_4 \square x_3)))$	$\overline{y + \overline{z}} + (z + y)$
$\square x_1 \square x_2 (\square x_3 \square x_4 ((\neg(x_3 \square x_1) \square \neg(x_3 \square x_2) \square (x_3 \square x_4)) \square (\neg(x_1 \square x_3) \square \neg(x_2 \square x_3) \square (x_4 \square x_3))) \square \square x_5 ((x_5 \square x_1) \square \square x_6 ((x_6 \square x_2) \square \neg(x_6 \square x_1) \square (x_6 \square x_5))))$	$\overline{\overline{y + \overline{z}}} + (\overline{u + \overline{y}} + (u + z))$

QUADRO B – comparação de traduções metalinguísticas.	
Cláusula ( $\alpha$ )	Cláusula (b)
$y \square S$	$\prod_1 t_{1,1}$
$\overline{y + \overline{y}} + y$	$\prod_1 \prod_2 \prod_3 (t_{1,2} + t_{2,3} + t_{1,3})$
$\overline{y} + (y + z)$	$\prod_1 \prod_2 \prod_3 (t_{1,3} \cdot t_{2,3} \cdot \prod_4 (t_{1,4} + t_{2,4} + t_{3,4}))$
$\overline{y + \overline{z}} + (z + y)$	$\prod_1 \prod_2 \prod_3 (t_{3,1} \cdot t_{3,2} \cdot \prod_4 (t_{4,1} + t_{4,2} + t_{4,3}))$
$\overline{\overline{y + \overline{z}}} + (\overline{u + \overline{y}} + (u + z))$	$\prod_1 \prod_2 (\prod_3 \prod_4 ((t_{3,1} + t_{3,2} + t_{3,4}) \cdot (t_{1,3} + t_{2,3} + t_{4,3})) \cdot \prod_5 (t_{5,1} + \prod_6 (t_{6,1} + t_{6,2} + t_{6,3})))$

Com esses axiomas é possível, aplicando *substituição*, *destacamento* e *introdução e eliminação de quantificador universal*, obter novas sentenças, estas pertencentes a  $Pr$  (isto é, *sentenças demonstráveis*). A verificação desse fato é vista na metalinguagem, pois é ela que descreve os ‘movimentos lógicos’ que obtêm dos axiomas as sentenças demonstráveis:

<sup>132</sup> Para uma tradução *descritivo-estrutural*, ver [p.179]-4 neste trabalho.

[p.182]-5

A fim de nos convenceremos disto, imitamos na metateoria, em cada caso particular, a prova correspondente do domínio do cálculo sentencial ou do cálculo de classes.

Isto é, tomamos uma prova feita na linguagem objeto  $L$  envolvendo termos e sentenças, ou as classes das sentenças, e traduzimos essa prova para a metalinguagem, segundo os quadros A e B que vimos acima em [p182]-4. Essa tradução nos fornece uma estrutura metalinguística que, se estiver correta, mostra como adequadamente se fez a prova na linguagem objeto  $L$  (trata-se de uma explicação metalinguística da prova ocorrida em  $L$ ). Tarski fornece o seguinte exemplo:

[pp.182-183]

Por exemplo, é possível obter dessa maneira a sentença  $\bigcap_1(\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})$  do bem conhecido teorema 'ANpp' do cálculo sentencial. Traduzindo a prova desse teorema,<sup>1</sup> mostramos sucessivamente, pela Definição 13, que

$$\bigcap_1(\overline{t_{1,1} + t_{1,1}} + t_{1,1}), \bigcap_1(\overline{t_{1,1}} + (t_{1,1} + t_{1,1})),$$

e

$$\bigcap_1\left(\overline{t_{1,1} + t_{1,1} + t_{1,1}} + \left(\overline{t_{1,1} + (t_{1,1} + t_{1,1})} + (\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})\right)\right)$$

são axiomas; consequentemente pela Def. 15

$$\bigcap_1\left(\overline{t_{1,1} + (t_{1,1} + t_{1,1})} + (\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})\right)$$

É uma consequência de 1º. grau e  $\bigcap_1(\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})$  é uma consequência de segundo grau da classe de todos os axiomas. Assim, pelas Defs. 16 e 17,  $\bigcap_1(\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})$  é uma sentença demonstrável.

A referência (90) da *nota de rodapé 1* deste [pp.182-183] indica a literatura já explicada na nota 16 neste trabalho. O teorema 'ANpp' é lido em linguagem moderna mais usual como  $\neg p \square p$ . Podemos interpretar esse exemplo de Tarski como segue (compare com quadros A e B de [p.182]-4, lembrando que neste exemplo de Tarski só há uma única variável nas expressões que compõem as sentenças, de modo que  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6$ ):

Sabendo que

Axioma 2:  $\overline{y + y} + y$

Axioma 3:  $\bar{y} + (y + z)$

Axioma 5:  $\bar{y} + z + (\bar{u} + y + (u + z))$

temos

1.  $\cap_1(\overline{t_{1,1} + t_{1,1}} + t_{1,1})$ ..... Axioma 2
2.  $\cap_1(\overline{t_{1,1}} + (t_{1,1} + t_{1,1}))$ ..... Axioma 3
3.  $\cap_1\left(\overline{\overline{t_{1,1} + t_{1,1} + t_{1,1}} + (\overline{t_{1,1} + (t_{1,1} + t_{1,1})} + (\overline{t_{1,1}} + t_{1,1}))}\right)$ ..... Axioma 5
4.  $\cap_1(\overline{\overline{t_{1,1}} + (t_{1,1} + t_{1,1})} + (\overline{t_{1,1}} + t_{1,1}))$ .....1,3, Modus Ponens

---

Conclusão:  $\cap_1(\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})$ .....2,4, Modus Ponens

As linhas 1, 2 e 3 são conseqüências de grau 0. A linha 4 é conseqüência de *grau 1* (após uma operação, no caso *modus ponens*) e a linha 5 é conseqüência de *grau 2* (após duas operações, no caso dois *modus ponens*). Como a linha 5 é conseqüência de axiomas, então é teorema.

## 2. Discussão a respeito da natureza existencial dos axiomas metateóricos

Tarski conclui do exemplo dado por ele próprio, a importância as suposições de natureza existencial:

[p.183]-1

Por meio de exemplos de tais inferências, pode-se imaginar as dificuldades que imediatamente surgiriam se desejássemos eliminar, dos axiomas da metateoria, as suposições que são de natureza existencial.

Tais suposição são aquelas que permite dizer, como no exemplo dado por Tarski, que existe a sentença feita de expressões de uma única variável. O caráter existencial presente nos axiomas está claro nas expressões do tipo ‘existe uma sentença etc.’, ou ‘existe uma variável etc.’, ou existe a classe de sentenças etc.’ Assumimos certas existências postulares básicas, isto é, sem prová-las. E isso é importante para se garantir a existência de sentenças mais complexas. Tarski aponta duas dificuldades que

surgiriam da eliminação do caráter existencial desses axiomas. O primeiro (que ele não considera de grande importância) é que os axiomas não garantiriam, por exemplo, que a *sentença verdadeira* (objeto do trabalho de Tarski que vimos comentando) exista.

[p.183]-2

O fato de que os axiomas não mais garantiriam a existência de algumas sentenças particulares, cuja demonstrabilidade desejamos estabelecer, não é muito relevante.

Mais importante Tarski considera esta segunda dificuldade:

[p.183]-3

Muito mais importante é o fato de que, mesmo supondo a existência de alguma sentença concreta, poderíamos ser incapazes de estabelecer sua demonstrabilidade; uma vez que, na prova, poderia ser necessário fazer referência à existência de outras sentenças, em regra mais complicadas, (como se depreende da prova do teorema  $\bigcap_1 (\overline{t_{1,1}} + t_{1,1}) \square Pr$  que foi esboçada acima).

Ou seja, se não ocorresse nos axiomas certa natureza existencial postular, seria impossível estabelecer a demonstração de uma sentença demonstrável que sabíamos existir (porque sua existência deveria ser também demonstrável a partir de noções existenciais postulares nos axiomas, mas que foram suprimidas). Isso é feito por meio de cadeias de sentenças mais complexas que os axiomas e que a sentença demonstrável. Não havendo caráter existencial nos axiomas, não seria justificável um existência gratuita das sentenças mais complexas que antecedem a sentença demonstrável durante a prova. Para procedermos a uma prova adequada, será necessário em algum momento fornecer existência às sentenças usadas nos passos da prova:

[p.183]-4

Enquanto estamos lidando com teoremas especiais do tipo ' $x \square Pr$ ', podemos tomar medidas para fornecer a essas declarações premissas que garantam a existência das sentenças necessárias à prova.

A generalização da existência seria muito dificultada, do mesmo modo, se fossem eliminadas a natureza existencial dos axiomas. Ao generalizar, fazemos com que o caráter que se tinha devido a cada indivíduo seja dito ser válido para todos os indivíduos pertencentes à classe daqueles indivíduos. A natureza existencial se dilata de

uma noção de indivíduos para uma noção da existência de um conjunto desses indivíduos. As dificuldades seriam imensas:

[p.183]-5

As dificuldades seriam incrementadas significativamente se passássemos a declarações de caráter geral, que afirmam que todas as sentenças de certo tipo são demonstráveis – ou, ainda mais geralmente, são consequências de uma dada classe de sentenças. Seria então frequentemente necessário incluir entre as premissas suposições existenciais gerais que não seriam mais fracas que aquelas que, por razões intuitivas, tínhamos eliminado dos axiomas.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Isto é facilmente notado a partir dos exemplos dos Teoremas 11, 12, 24 e 28 no § 3.

Isto é, eliminadas as suposições existenciais protocolares na base axiomática, seríamos obrigadas a reintroduzi-las, durante a prova, nas sentenças mais complexas que os axiomas, de modo contraintuitivo: se a simplicidade dos axiomas não justificariam o caráter existencial, a complexidade das sentenças posteriores não poderia de modo algum aceitá-lo.

A nota de rodapé 2 neste trecho [p.183]-5 cita como exemplo os teoremas que serão trabalhados mais adiante, na parte terceira deste trabalho de Tarski.

### 3. Tratamento existencial da Definição 17: problema e solução

Tarski aplica a discussão a respeito da eliminação da natureza existencial nos axiomas sobre a teoria envolvida na definição 17. Ele diz:

[p.184]-1

Por essas razões o ponto de vista que se pode tomar é o de que a Def. 17, no caso de as suposições existenciais sejam rejeitadas, não mais abarcaria todas as propriedades que conferimos ao conceito de *teorema*. O problema de uma ‘correção’ adequada da definição acima então se levanta. Mais precisamente expresso, seria a questão de construir uma definição de *teorema* que seria equivalente à Def. 17 sob a suposição existencial e que – independentemente dessas suposições – tivesse como consequências todos os teoremas do tipo ‘*se a sentença x existe, então  $x \sqsubseteq Pr$* ’, desde que o teorema correspondente ‘ *$x \sqsubseteq Pr$* ’ pudesse ser provado com o auxílio das suposições existenciais. Vou apresentar aqui um breve esboço de uma tentativa de resolver tal problema.

Assim, eliminadas as suposições existenciais já nos axiomas o problema se resume a este: como construir uma definição de *teorema* (semelhante à definição 17) e durante a construção ir introduzindo suposições existenciais à medida que forem necessárias e, no fim, tal definição ter por consequência todos os teoremas que determinam que uma sentença, se existe, é demonstrável (desde que a demonstrabilidade da sentença use das suposições existenciais introduzidas ao longo da construção da definição de *teorema*)? Tarski proporá uma solução a esse problema.

O primeiro passo tomado por Tarski é fazer notar a relação que há entre a metateoria e a aritmética dos números naturais:

[p.184]-2

Pode-se mostrar facilmente que o sistema axiomático adotado na metateoria possui uma interpretação na aritmética dos números naturais.

Isto é, o sistema axiomático de  $L$  pode ser equiparado estruturalmente à aritmética dos naturais<sup>133</sup>. Como Tarski irá explicar em seguida, números naturais correspondem a expressões em  $L$ , operações nos naturais correspondem a operações em  $L$ . Isso permitirá construir o conceito de *axioma* relacionado a uma aritmética dos naturais.

---

<sup>133</sup> Uma aritmética dos naturais tem as seguintes características (que poderíamos dizer ser uma *linguagem de primeira ordem para a aritmética*):

- Fórmulas: acerca dos números naturais e de + e X (soma e produto)
- Vocabulário:
  - Nomes: 0 e 1
  - Símbolos de relação: =, < (binários)
  - Símbolos de função: + e X (binários)
- Notação: infixa para funções e para predicados
- Número de indivíduos (de números) é infinito:
  - 0, 1, (1+1), ((1+1) +1), (((1+1) +1) +1) ...
- Definição indutiva dos números
  - (1) 0 e 1 são números
  - (2) Se  $t_1$  e  $t_2$  são números,  $(t_1 + t_2)$  e  $(t_1 \times t_2)$  são números
  - (3) Não há outros números para além dos construídos com (1) e (2)
- Fórmulas atômicas: com predicados < e =
  - $(1 \times 1) < (1+1)$

[p.184]-3

Pode-se estabelecer uma correspondência um a um entre expressões e números naturais na qual as operações sobre os números com as mesmas propriedades formais são correlacionadas com as operações sobre expressões. Se considerarmos essa correspondência, podemos escolher, da classe de todos os números, aqueles que são correlacionados com sentenças; entre estes estarão os números 'primitivos'.

Obviamente, se a cada número natural existente podemos relacionar uma expressão em  $L$ , alguns desses números naturais serão relacionados a sentenças (pois sentenças são expressões). Os critérios que separam as sentenças das expressões correspondem a operações dentro da aritmética que separam os números naturais correspondentes a sentenças dos outros números naturais (que só correspondem a expressões não-sentenciais). Claro que, assim como entre as sentenças encontram-se os axiomas – que são as mais primitivas sentenças – haverá entre esses números separados dos outros os 'números primitivos', relacionados aos axiomas de  $L$ .

Tendo idéia de como obter axiomas, pode-se conceituar relacionalmente (como se está fazendo entre  $L$  e os naturais) a característica de uma *consequência*.

[p.184]-4

Podemos introduzir o conceito de uma 'consequência' de uma dada classe de números, e, finalmente, definir os números 'aceitos' como 'consequências' da classe de todos os números 'primitivos'.

Assim, se podemos tomar outro natural e dizer dele – segundo operações aritméticas – que ele é 'aceito' como resultado de outros números naturais (em especial dos números 'primitivos'), uma vez que esse número 'aceito' corresponde a uma sentença, essa sentença é consequência das sentenças que corresponde aos 'primitivos' do qual o número 'aceito' é resultado das operações aritméticas – isto é, esses 'primitivos' são axiomas. Obviamente as operações aritméticas também correspondem às operações que permitam obter a consequência correspondente ao número 'aceito' a partir daquelas sentenças primitivas que cabem aos números 'primitivos'.

[p.184]-5

Se eliminarmos agora dos axiomas as suposições existenciais, a cor-relação um a um desaparece: a toda expressão corresponde ainda um número natural, mas não a todo número uma expressão.

De fato, antes de eliminarmos as suposições existenciais, se escolhêssemos aleatoriamente um número natural nessa correspondência uma a um, fatalmente existiria uma expressão correspondendo àquele número (por que o número ou seria ‘primitivo’ ou seria ‘aceito’ e poderíamos dizer para este número  $a$  existe uma expressão  $x$ ). Mas eliminada essa suposição existencial, não podemos mais dizer – dado um número natural arbitrário qualquer escolhido ao acaso dentre os naturais, se esse dado número é do tipo ‘aceito’ – que existe uma sentença que é consequência e que corresponde àquele número natural ‘aceito’ arbitrariamente escolhido.

Há solução para essa dificuldade, porém, ao menos para se garantir a existência de teoremas:

[p.184]-6

Porém, podemos ainda preservar o conceito previamente estabelecido de número ‘aceito’ e definir os teoremas como aqueles que são correlacionados com números ‘aceitos’.

Assim, apesar de não haver garantia de que para qualquer número haja uma expressão, ou para qualquer operação entre os números há uma operação em  $L$  correspondente, ainda assim podemos dizer que existem números para cada expressão e, por conseguinte, se as sentenças forem consequências, então os números correspondentes serão ‘aceitos’. Tarski explica:

[p.184]-7

Se tentarmos, com base nessa nova definição, provar que uma sentença concreta é um teorema, não mais seremos compelidos – como se pode facilmente verificar – a fazer referência à existência de quaisquer outras sentenças.

Isto acontece porque se tivermos uma sentença e quisermos saber se ela é teorema, basta procurarmos pelo seu número natural correspondente e observarmos se ele é ‘primitivo’ ou ‘aceito’. Se for ‘aceito’, as operações que fizeram do número natural um ‘aceito’ correspondem às operações em  $L$  que fazem da sentença uma consequência a partir de axiomas.

Isso, porém, não livra a nova definição de todos os problemas:

[p.184]-8

Não obstante, a prova vai requerer ainda - e isso deve ser enfatizado - uma hipótese existencial: a suposição de que existem suficientemente muitos números naturais ou – o que resulta no mesmo – suficientemente muitos indivíduos distintos.

Ocorre uma inversão de características do conjunto. Antes, quando se aceitava nos axiomas suposições existenciais, uma relação um a um com o conjunto dos números naturais queria dizer que *existia uma expressão para cada número natural*. Quando essas suposições foram – hipoteticamente – suprimidas, não havia mais garantias de que todo número natural corresponderia a uma expressão, porém agora se tem que *existe um número natural para cada expressão*. Uma vez que dois números naturais quaisquer são distintos, serão também distintas quaisquer duas expressões.

Bem, sabemos que há infinitos números naturais. Porém na situação em que sabemos que não há como garantir que haja uma expressão para cada número natural, mas que há um número natural para cada expressão, o que ocorre se em uma linguagem o número de expressões for infinito? Tarski cogita essa possibilidade e avisa:

[p.184-185]

Assim, para derivar da nova definição todas as conclusões desejadas, seria necessário incluir na metateoria o axioma do infinito, isto é, a suposição de que a classe de todos os indivíduos é infinita.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Cf. Whitehead, A. N., e Russell, B. A. W. (90), vol. 2, p. 203.

Como o próprio Tarski citou em nota de rodapé neste trecho (*nota de rodapé nº 1*)<sup>134</sup>, essa foi a solução de Russell e Whitehead para construir a sua linguagem de primeira ordem. Mas lidar com teorias infinitárias sob essa perspectiva é difícil tarefa:

[p.185]-1

Não conheço nenhum método, seja ele ainda menos natural e mais complicado do que o que vimos discutindo, que leve a uma solução satisfatória do nosso problema e que seja independente do axioma acima.

<sup>134</sup> A respeito da referência feita por Tarski a Russell e Whitehead, Ver nota 31 neste trabalho.

Neste ponto Tarski encerra a discussão a respeito da importância da suposição existencial nos axiomas de um sistema como *L*.

#### 4. A noção de inferência.

Tarski, como se procedesse a um parênteses, trata da questão – muito brevemente – da *inferência* como parte intrínseca aos processos de construção dos teoremas. Ele diz:

[p.185]-2

Em conexão com os conceitos de consequência e de teorema, mencionei as regras de inferência.

Cabe aqui um comentário geral à noção de inferência. Dizemos que ocorre uma *inferência* quando uma proposição é alcançada (ou obtida) por causa de certas operações feitas sobre outras. É comum dizer que atingiu-se um *valor* a partir de um *argumento*. No caso, *valor* é a proposição atingida e *argumento* as proposições sobre as quais as operações trabalharam para se chegar ao *valor*. Assim podemos entender que o *argumento* são as premissas (proposições dadas) e o *valor* é a conclusão (proposição obtida, atingida). É óbvio que se temos uma conclusão a partir de um conjunto vazio de premissas, então temos um axioma. Espera-se sempre que uma regra de inferência seja efetiva, isto é, seja capaz de extrair uma conclusão de um conjunto dado de premissas (em outras palavras, seja capaz de extrair uma sentença de um conjunto dado de sentenças, ou uma consequência de um conjunto de sentenças).

Tarski, sabendo dessa natureza das inferências, expõe o que cabe sobre inferências em seu trabalho como segue:

[p.185]-3

Quando temos em mente a construção da própria ciência dedutiva, e não a investigação de tal ciência baseada na metateoria, damos, em lugar da Def. 17, uma regra pela qual podemos adicionar à ciência, como teorema, toda consequência dos axiomas.

Em outras palavras, toda consequência passa a formar a estrutura da ciência dedutiva e pode ser usado em provas futuras. Tarski aponta qual o mecanismo que faz uma consequência ser um teorema: trata-se da inferência. O diagrama seguinte explica o que ocorre:

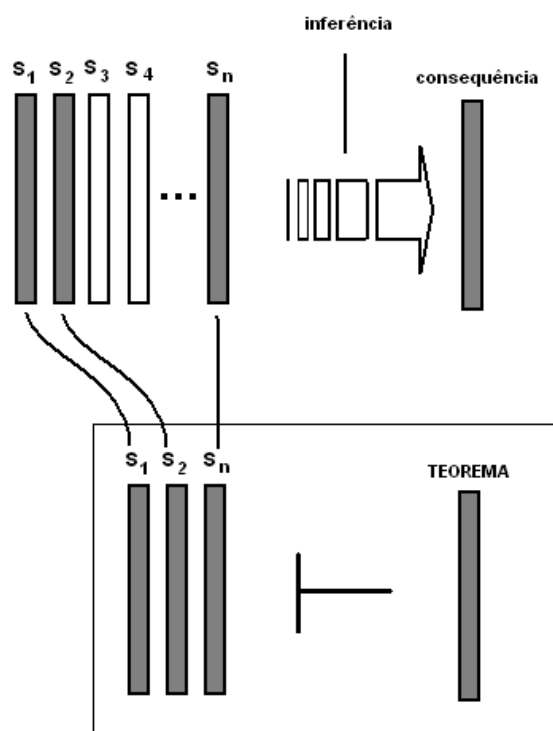


Figura 15.1 – o conjunto de uma inferência a partir de sentenças resultando em uma consequência é um teorema. De modo resumido, a consequência passa a ser chamada *teorema*, indicando que foi obtida a partir de algumas (ou todas) as sentenças da classe.

As regras de inferência que dão origem aos teoremas foram divididos por Tarski em quatro operações:

[p.185]-4

Em nosso caso, essa regra pode ser dividida em quatro regras – correspondendo às quatro operações que usamos na construção de consequências.

Essas quatro operações são as que vimos: substituição, destacamento (*modus ponens*), introdução e eliminação de quantificador.

Com este último comentário a respeito das regras de inferência, Tarski pode construir conceitos mais complexos, necessários à definição de sentença verdadeira, os conceitos de *sistema dedutivo*, *consistência* e *completude*.

## CAPÍTULO 9

### SISTEMA DEDUTIVO, CONSISTÊNCIA E COMPLETUDE

Até aqui – estabelecidas as definições desde a Definição 1 até a 17 – existem agora elementos suficientes para três definições que são importantes para tornar eficiente a descrição que a metalinguagem pode fazer ao mostrar como é escrita a linguagem de primeira ordem (linguagem objeto  $L$ ): sistema dedutivo, consistência e completude. Tarski escreve:

[p.185]-5

Por meio dos conceitos de sentença e de consequência, todos os conceitos metodológicos mais importantes podem ser introduzidos na metateoria, em particular, os conceitos de sistema dedutivo, de consistência e de completude.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Cf. pp. 70, 90, e 93 do presente volume

Daqui em diante será fornecida à metateoria um ferramental lógico amplo o suficiente para dar conta de definições importantes dentro da linguagem  $L$ , até o objetivo final, que é a da definição de *sentença verdadeira*.

Como diz a *nota redopé 2*, Tarski considera suficiente como teoria introdutória dessas definições o que se lê nas páginas 70, 90 e 93 do artigo *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences* (TARSKI, A.; [1983d]), presente na coletânea *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*. Nesse artigo Tarski (TARSKI, A.; [1983d], p.69) escreve semelhantemente a este [p.185]-5:

“Com auxílio de dois conceitos da seção anterior [seção §1 – *sentenças significativas; consequência de conjuntos de sentenças* (TARSKI, A.; [1983d], pp.62-69)], aqueles de sentença e consequência, quase todos os conceitos básicos da metateoria podem ser definidos; na base do sistema axiomático dado, várias propriedades fundamentais desses conceitos podem ser estabelecidas.”

Passemos, então, segundo o sugerido por Tarski, a estudar esses pontos introdutórios segundo esse artigo *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences*, de 1930.

### 1. Definição de sistema dedutivo

Em seu artigo *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences*, de 1930, Tarski (TARSKI, A.; [1983d], pp.69-70) explica sobre os sistemas dedutivos:

“Em primeiro lugar uma categoria de conjuntos de sentenças particularmente importante será destacada, nominalmente os *sistemas dedutivos*. Todo conjunto de sentenças que contenha todas as suas conseqüências é chamado de um *sistema dedutivo*, ou possivelmente um *sistema fechado*, ou simplesmente um *sistema*.

“Sistemas dedutivos são, por assim dizer, unidades orgânicas que formam o assunto das investigações metamatemáticas. Várias importantes noções, como consistência, completude, e axiomatibilidade, que encontraremos na sequência, são teoricamente aplicáveis a quaisquer conjuntos de sentenças, mas na prática são aplicadas principalmente aos sistemas.”

Fica estabelecido assim que o que se entende por *sistema dedutivo* é um sistema fechado constituído de sentenças e de conseqüências dessas sentenças, por isso é uma *unidade orgânica*. A consistência, a completude e a axiomatibilidade são especialmente aplicados a esses sistemas fechados.

Tarski (TARSKI, A.; [1983d], p.70) dá uma definição de classe de todos os sistemas (sistemas dedutivos) e um símbolo para significar essa classe:

“A classe de todos os sistemas é denotada pelo símbolo ‘G’

DEFINIÇÃO 1.  $G = \{X \mid Cn(X) \subseteq X \subseteq S\}$

Temos que ‘G’ é o conjunto *E* de todas as classes *X* de sentenças em condições de atender a exigência  $Cn(X) \subseteq X \subseteq S$ . Lembrando que ‘*Cn(X)*’ denota *conseqüências de X*, ‘*X*’ denota uma *classe qualquer de sentenças* e ‘*S*’ a *classe de todas as sentenças*.

Essa definição fica bem visualizada quando queremos dar as características de uma classe  $A$  qualquer de sentenças que é candidata a pertencer a ‘ $G$ ’ (TARSKI, A.; [1983d], p.70):<sup>135</sup>

“TEOREMA 7. Em vista de que  $A \sqsubseteq G$ , é necessário e suficiente que  $Cn(A) = A \sqsubseteq S$ . [Def. 1, Ax. 2]”

Em vista disso, passemos à Definição 18 do *Concept of truth in formalized languages*, artigo que motiva os comentários deste nosso trabalho, que é a definição de *sistema dedutivo*:

[p.185]-6

DEFINIÇÃO 18.  $X$  é um *sistema dedutivo* se e somente se  $Cn(X) \subseteq X \subseteq S$ .

Um sistema dedutivo, então é caracterizado como o conjunto das sentenças que contenha suas próprias conseqüências. É óbvio, como vimos na Definição 15 (*definição de conseqüência de  $n$ -ésimo grau*, ver [pp.181-182]) que  $X$  é um conjunto que cresce continuamente, mas sempre é finito. Demais comentários a esta Definição 18 seriam redundantes aqueles que fizemos para a definição de ‘ $G$ ’ vista acima.

## 2. Definição de consistência

Na *nota de rodapé 2* que vimos em [p.185]-5, Tarski considera como suficiente para introdução do tema as idéias básicas sobre a noção de consistência do *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences* (TARSKI, A.; [1983d], p.90):

“Um conjunto de sentenças é chamado consistente se não é equivalente ao conjunto de todas as sentenças significativas (ou, em outras palavras, se o conjunto dessas conseqüências não contém como elementos todas as sentenças significativas).”<sup>136</sup>

---

<sup>135</sup> Não daremos a prova do teorema aqui, apesar de Tarski indicar os passos para a prova (como se lê entre colchetes na transcrição deste *TEOREMA 7*). A partir dessa definição de ‘ $G$ ’, dos axiomas e teoremas prévios apresentados no mesmo *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences*, de 1930, Tarski tira um grupo importante de teoremas a respeito da relação entre  $Cn$  e  $S$ , que não exporemos aqui por não ser o objeto deste nosso trabalho.

<sup>136</sup> A esta exposição prévia, Tarski acrescenta (TARSKI, A.; [1983d], p.90):

Tarski define (TARSKI, A.; [1983d], p.91), em linguagem formal, a noção de *consistência*, como segue:

“Denotando a classe de todos os conjuntos consistentes por ‘W’ nós obtemos

DEFINIÇÃO 6.  $W = B(S) - Uq(S)$ .

Onde  $B(S)$  é o conjunto independente que é equivalente ao conjunto  $S$  (e por isso é chamado de base de  $S$ ) e  $Uq(S)$  indica o conjunto de sentenças equivalente a  $S$ . A definição 6 acima aponta que é consistente o conjunto de sentenças cujo complementar seja um conjunto de sentenças equivalentes a ele.

Tarski (TARSKI, A.; [1983d], p.91) propõe um teorema que expõe melhor as características dessa definição:<sup>137</sup>

“TEOREMA 45. Para que  $A \in W$ , é necessário e suficiente que  $A \in S$  e  $Cn(A) \neq S$ .

[Def. 6, Teors 10, 18a].”

Isto é, é consistente o conjunto que não tem consequências.

A partir destas noções introdutórias, passemos à Definição 19 vista no *Concept of Truth in Formalized Languages*:

[p.185]-7

DEFINIÇÃO 19.  $X$  é uma classe de sentenças *consistente* se e somente se  $X \in S$  e se, para toda sentença  $x$ , ou  $x \notin Cn(X)$  ou  $x \in Cn(X)$ .

---

“De acordo com a definição usual, um conjunto de sentenças é chamado consistente se não há sentenças que junto com suas negações pertençam às consequências desse conjunto. Nossa definição então diverge da usual, e de fato tem um caráter muito mais geral uma vez que o conhecimento do conceito de negação não é pressuposto; conseqüentemente esta definição pode ser aplicada a todas aquelas disciplinas dedutivas em que o conceito de negação é ou inteiramente suprimida ou pelo menos não são exibidas as propriedades usualmente atribuídas a ele. Entretanto, as duas definições de consistência provam ser equivalentes para todas aquelas disciplinas que são baseadas sobre o sistema ordinário de cálculo sentencial.”

<sup>137</sup> Não daremos a prova do teorema aqui, apesar de Tarski indicar os passos para a prova (como se lê entre colchetes na transcrição deste *TEOREMA 45*).

Esta definição claramente informa que é consistente o sistema dedutivo que não tem contradições entre suas conseqüências.

### 3. Definição de *completude*.

Como o anterior, também na *nota de rodapé 2* que vimos em [p.185]-5, Tarski considera como suficiente para introdução do que se entende por *completude* o que se lê no *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences* (TARSKI, A.; [1983d], p.93):

“Por *domínio de decisão* do conjunto  $A$  de sentenças nós entendemos ser o conjunto de todas as sentenças que são ou conseqüências de  $A$  ou que, quando adicionadas a  $A$ , compõe um conjunto inconsistente de sentenças. Um conjunto de sentenças é dito ser *completo* ou *absolutamente completo* se seu domínio de decisão contém todas as sentenças significativas.”

Isso é suficiente para entender a base da noção de *completude* que a Definição 20 no *Concept of Truth in Formalized Languages* quer explicitar:

[p.185]-8

DEFINIÇÃO 20.  $X$  é uma classe de sentenças *completa* se e somente se  $X \sqsubseteq S$  e se, para toda sentença  $x$ , ou  $x \sqsubseteq Cn(X)$  ou  $x \sqsubseteq \neg Cn(X)$ .

Ou seja, é completa a classe que possua *todas* as suas conseqüências e nenhuma negação delas.

### 4. Definição de *sentença equivalente*.

A última definição dada por Tarski nesta parte do artigo é a de *sentença equivalente*. Ele não indica um texto prévio para introduzir a noção de equivalência sentencial, mas a definição segue raciocínio bastante intuitivo:

[p.185]-9

Na seqüência temos outro conceito que se provará útil:  
DEFINIÇÃO 21. As sentenças  $x$  e  $y$  são *equivalentes* com respeito à classe  $X$  de sentenças se e somente se  $x \sqsubseteq S$ ,  $y \sqsubseteq S$ ,  $X \sqsubseteq S$  e tanto  $x \sqsubseteq + y \sqsubseteq Cn(X)$  quanto  $y \sqsubseteq + x \sqsubseteq Cn(X)$ .

Dentro da classe  $X$  de sentenças há duas,  $x$  e  $y$ , equivalentes (isto é, permutáveis), se ou uma ou a negação da outra pertence ao conjunto das conseqüências de  $X$ ; em outras palavras, não pode ocorrer que a negação de uma e a outra apareça junto entre as conseqüências: isso seria uma contradição que fere o determinado pela Definição 19. Tarski acrescenta, a título de encerramento das problemáticas discutidas:

[p.185]-10  
Uma análise mais detalhada dos conceitos introduzidos nesta seção excederia os limites do presente trabalho.

Assim Tarski encerra a seção segunda de seu artigo *Concept os Truth in Formalized Languages*, passando, na seção terceira, para o objetivo central de seu artigo: a definição de *sentença verdadeira*.

## CAPÍTULO 10

### T-CONVENÇÃO

O título que Tarski escolhe para introduzir a terceira parte de seu artigo de 1933, *Concept of truth sentence in formalized languages* (objeto de nosso trabalho) é como segue:

[p.186]-1

§3. O CONCEITO DE SENTENÇA VERDADEIRA NA LINGUAGEM  
DO CÁLCULO DE CLASSES

Revela que ele situa nesta terceira parte a definição mais importante, a de *sentença verdadeira*. Ele buscará construir as ferramentas metalinguísticas capazes de dizer de uma sentença do cálculo de primeira ordem de uma linguagem  $L$  que ela é *verdadeira*.

O projeto de Tarski da construção de uma linguagem formal e de uma metalinguagem capaz de traduzi-la é processo, como vimos, meticoloso que pode ser resumido no seguinte roteiro:

- 1º) Escolha e estabelecimento de um conjunto de símbolos necessários para se construir uma linguagem. Construimos então uma linguagem objeto  $L$  fornecendo a ela constantes ( $A, I, N, \Pi$ ) e variáveis ( $x, x_1, x_2, \dots$ ), um sistema axiomático (os cinco axiomas do sistema Russell-Whitehead) e uma regra de inferência (*Modus Ponens*, ou destacamento).
- 2º) Estabelecimento de sinais e símbolos metalinguísticos que poderão representar as relações entre os símbolos da linguagem. Em outras palavras, para a linguagem objeto  $L$  construimos uma *metalinguagem*  $L'$  que é capaz de dizer qual o modo correto de escrever cada sentença de  $L$  e de descrever como as sentenças de  $L$  se relacionam.
- 3º) Para isso a metalinguagem tem traduções das constantes e variáveis de  $L$  (ver QUADRO III no fim do Capítulo 2), e por isso tem suas próprias expressões, seus axiomas e suas regras de inferência (a fim de traduzir e ensinar a escrever adequadamente a linguagem objeto  $L$ ). Os cinco axiomas metalinguísticos foram

dados no [p173]-6 até [pp.173-174]. As quatro regras de inferência da metalinguagem foram dadas no [p.180]-3 até [p.181]-6. Conhecidos esses axiomas e regras de inferência, estabelece-se quais relações serão traduzidas para a metalinguagem, isto é:

- Estabelecimento de certas operações no conjunto das expressões: *inclusão, negação, soma lógica, produto lógico, quantificação universal e quantificação existencial* (definições 1 a 9)
- Ficou estabelecido como a metalinguagem descreve a estrutura das sentenças da linguagem, por meio dos nomes *descritivo-estruturais*, que usou de simbologia especial (símbolos de constantes *ng, in, sm, un*, e os símbolos de sucessão ‘□’ colocados entre os símbolos de variáveis  $v_k - k$  □ □ – ou de variáveis e constantes, desde que sucessivas).
- As transformações enunciadas em (a) conservam a estrutura descritiva das expressões, mas são feitas por acréscimo daqueles símbolos que denotam as operações. O símbolo acrescido aos símbolos das expressões cria uma relação nova que se chama *função sentencial* (definição 10).
- Em seguida, definiu-se o que é *sentença* (definição 12) a partir do que se estabeleceu como *função sentencial* (definição 11). Agora podemos estabelecer a seguinte relação segundo essa teoria linguística de Tarski;

QUADRO 1 - Relação Linguagem/Metalinguagem			
Linguagem L		Metalinguagem L'	
expressões (significativas ou não) <sup>138</sup>	Exemplo: $\Pi x, Ax, x$	$\Pi x_1 x_2 + x_3$ $(un \square v_1 \square sm) \square v_2 \square v_3$	nomes descritivo-estruturais
		para todo $x_1, x_2$ ou $x_1$	tradução/interpretação (só para expressões significativas, denominadas <i>sentenças</i> ) <sup>139</sup>

<sup>138</sup> Expressões não-significativas podem ter seus nomes descritivo-estruturais, obviamente nomes sem sentido.

<sup>139</sup> Expressões não-significativas não têm tradução – nem interpretação, obviamente.

- e. As sentenças têm caráter especial conforme seu lugar no discurso. O primeiro caso de sentença especial que é necessário especificar (identificar) é o de *axioma* (definição 13).
- f. A partir dos axiomas, aplicando-se as regras de inferência, serão obtidas novas sentenças. Por isso definiu-se o que é *sentença obtida* (definição 14).
- g. As sentenças obtidas a partir dos axiomas têm com os axiomas certas relações em um processo onde transformações sucessivas dos axiomas e aplicações das transformadas, novamente, com os axiomas, dão origem a uma cadeia lógica que leva dos axiomas às sentenças obtidas. A isso chama-se *conseqüência* (definições 15 e 16).
- h. A conseqüência, sendo derivada de uma cadeia que liga os axiomas às sentenças obtidas a partir deles, faz dessas sentenças obtidas *sentenças demonstráveis*, isto é, *teoremas* (definição 17).
- i. Por fim, o conjunto dessas sentenças – axiomas mais sentenças demonstráveis – constrói o que denotamos *sistema dedutivo* (definição 18) que é, em si, a teoria a respeito daquilo que a linguagem descreve.

Esse ‘roteiro breve’ aponta o caminho seguido por um processo necessário para a definição do que é uma sentença verdadeira nas linguagens formalizadas. Assim Tarski abre as discussões:

[p.186]-2

Passo agora ao problema principal deste artigo – a construção da definição de *sentença verdadeira*, a linguagem do cálculo de classes ainda sendo o objeto de investigação.

Este resumo, então, serve de apanhado introdutório para nos situarmos ante a problemática dentro do cálculo de classes que motiva a primeira discussão de Tarski logo no início da seção terceira: porque a Definição 17 não serve como definição de sentença verdadeira?

### 1. A Definição 17 não cumpre a tarefa de definir *sentença verdadeira*

Tarski reconhece que uma leitura muito rápida das definições que permitem o metacálculo – vistas nos últimos capítulos – levariam a tomar a DEFINIÇÃO 17 como uma definição adequada de sentença verdadeira:

[p.186]-3

Pode parecer, à primeira vista, que até o presente estágio de nossa discussão, o problema possa ser resolvido sem adicionais dificuldades, que ‘sentença verdadeira’ com respeito à linguagem de uma ciência dedutiva formalizada signifique nada além de ‘teorema demonstrável’, e que, conseqüentemente, a Def. 17 já é uma definição de verdade e, além disso, uma definição puramente estrutural.

O que atrai na Definição 17 é justamente seu *caráter estrutural*: a sentença verdadeira seria aquela que fosse consequência do conjunto de *todos os axiomas*, isto é, seria estruturalmente composta pelas expressões axiomáticas e só por elas. Como os axiomas não necessitam de provas (são triviais) não poderiam dar consequências falsas. O resultado seria uma consequência verdadeira.

Além disso, mesmo trabalhando apenas com linguagens formais e suas metalinguagens (que é o caso do trabalho de Tarski), não se pode admitir que são verdadeiras *apenas as sentenças demonstráveis*. As sentenças simples, axiomáticas, são admitidas verdadeiras sem provas. Assim, os axiomas são sentenças verdadeiras cuja demonstração é trivial, isto é, não há demonstração para os axiomas, que são sentenças verdadeiras.

Em seu artigo *Verdade e Demonstração* para a revista *Scientific American*, de 1969, Tarski dá uma teoria básica que impede reduzir as sentenças verdadeiras às sentenças demonstráveis (TARSKI, A.; [2006], p.230):

“A simplicidade intrínseca às noções de demonstração formal e de demonstrabilidade formal terá aqui um papel básico. Vimos, (...), que o significado dessas noções é explicado essencialmente em termos de certas relações simples entre sentenças prescritas por umas poucas regras de demonstração: o leitor pode lembrar-se aqui da regra de *modus ponens*. As relações correspondentes entre números e sentenças são igualmente simples; na verdade, elas podem ser caracterizadas pelas mais elementares operações e relações aritméticas como adição, multiplicação e igualdade – portanto, em termos que ocorrem em nossa teoria aritmética. Como consequência, o

conjunto dos números demonstráveis pode também ser caracterizado nesses termos. Pode-se descrever sucintamente o que foi traduzida da metalinguagem para a linguagem-objeto.

Por outro lado, a discussão da noção de verdade em linguagens comuns sugere fortemente a conjectura de que, para a definição de verdade, tal tradução não pode ser obtida; caso contrário, a linguagem-objeto mostrar-se-ia, num certo sentido, semanticamente universal e o reaparecimento da antinomia do mentiroso seria iminente. Confirmamos essa conjectura mostrando que se o conjunto dos números verdadeiros pudesse ser definido na linguagem da aritmética, a antinomia do mentiroso poderia ser realmente reconstruída nessa linguagem. Uma vez, entretanto, que estamos agora lidando com uma linguagem formalizada restrita, a antinomia assumiria uma forma mais complexa e sofisticada. Em particular, nenhuma expressão possuidora de conteúdo empírico, tal como ‘a sentença impressa em tal lugar’, que tomou parte essencial na formulação inicial da antinomia, apareceria na nova formulação. Não entraremos aqui em maiores detalhes.”

O lógico Leon Henkin, em seu artigo *Verdade e Demonstrabilidade*, aponta de forma bastante didática esse ponto (HENKIN, L. [1979] pp.63-64):

As linguagens artificiais inventadas pelos lógicos matemáticos a fim de servirem de suporte para as suas teorias dedutivas formais foram, justamente, as que interessaram a Tarski, quando desenvolveu a sua definição de verdade. Empregando a definição e aplicando-a àquelas linguagens que foram criadas com olhos voltados para as teorias matemáticas, é fácil evidenciar que todo axioma é uma sentença verdadeira e, além disso, que é verdadeira a sentença que se deduz, por meio das regras formais de inferência, de sentenças verdadeiras. Segue-se, de imediato, que todo teorema de um desses sistemas dedutivos formais, isto é, toda sentença demonstrável, é verdadeira.

O que não é claro, via de regra, é o problema inverso: toda sentença verdadeira é um teorema? Em outras palavras: existe uma demonstração para cada sentença verdadeira? Esse é o chamado problema da *completude* da teoria dedutiva. Trata-se de uma das mais interessantes áreas de investigação da lógica matemática (...). Cabe, entretanto, para finalizar (...), mencionar, ainda que ligeiramente, um resultado que estas investigações permitiram.

É fácil admitir que *algumas* teorias *não* sejam completas. Isso acontece, geralmente, para exemplificar, nos casos em que se seleciona apenas reduzido número de axiomas e de regras de inferência ou nos casos em que se parte de um sistema completo,

abandonando, a seguir, alguns dos axiomas ou regras. O resultado inesperado, todavia, foi o de que, empregando linguagem adequada para tratar de certos domínios, é impossível obter sistemas dedutivos completos!

Para perceber melhor as razões desse fenômeno, (...) [consideremos] os paradoxos. A possibilidade de formular os paradoxos em linguagens naturais — que se deve ao fato de o conceito de *sentença verdadeira* poder ser expresso na própria linguagem — parecia sustentar a idéia de que nenhuma definição satisfatória de verdade seria cabível para a totalidade das sentenças de uma dessas linguagens. Pondo a questão em outros termos, se uma definição satisfatória de verdade *pode* ser dada em certa linguagem, deve ser impossível exprimir, com os recursos de que ela dispõe, o conceito de *sentença verdadeira*.

De outra parte, acontece que dentre as linguagens em que é possível dar uma definição satisfatória de verdade, uma pode ser selecionada, com a seguinte característica: não importando como sejam escolhidos os axiomas e regras de inferência para obtenção de uma teoria dedutiva formal dessa linguagem, a noção de *sentença demonstrável*, que daí advém, pode ser expressa *na própria linguagem*. Essa possibilidade existe porque os axiomas e regras de inferência são suficientemente simples para permitir um meio mecânico de verificação das demonstrações.

“Segue-se daí que a noção de *sentença demonstrável*, seja qual for a teoria dedutiva formal selecionada para a linguagem, difere da noção de *sentença verdadeira* — pois a primeira noção pode ser expressa na própria linguagem e a segunda não. Todas essas teorias, portanto, são incompletas.”

Só para facilitar situarmo-nos sem problemas, entendamos (em linhas bem gerais) que *completude* se dá quando toda sentença verdadeira é demonstrável e que *corretude* se dá quando toda sentença demonstrável é verdadeira. Ora, a partir disso podemos já dizer que o conjunto *Pr* — o conjunto das sentenças demonstráveis (ver Definição 17) — não é um sistema *completo*, apesar de *correto*.

Mas Tarski aponta uma característica que julga mais importante para caracterizar o por quê de a Definição 17 não ser adequada para definir *sentença verdadeira*:

[p.186]-4

Uma atenta reflexão, porém, mostra que essa posição deve ser rejeitada pela seguinte razão: nenhuma definição de sentença verdadeira que esteja de acordo com o uso ordinário da linguagem deve ter quaisquer consequências que contradigam o princípio do terceiro excluído.

O princípio do terceiro excluído é aquele que garante que seja verdadeira uma sentença ou sua negação, nunca ambas (que seria uma terceira hipótese, excluída). A linguagem natural (que é um uso ordinário da linguagem) tem esse caráter: quando o terceiro entre o verdadeiro e sua negação aparece, surgem os paradoxos como o Paradoxo do Mentiroso, visto na sessão primeira deste artigo de Tarski que vimos comentando. A definição 17 dá margem a interpretações paradoxais, como comenta Tarski:

[p.186]-5

Este princípio, entretanto, não é válido no domínio das sentenças demonstráveis.

Ou seja, o conjunto das sentenças demonstráveis permitem um terceiro valor de verdade entre o verdadeiro e o falso; em outras palavras, a Definição 17 não garante que não haja contradições entre as consequências do conjunto de todos os axiomas.

De fato, aprendemos no comentário ao trecho [p.186]-3 que o conjunto *Pr* das sentenças demonstráveis não é *completo*. Se ele não possui todas as sentenças verdadeiras, então a ele não pertencem sentenças verdadeiras que se negam mutuamente. É nessa linha que vai o exemplo escolhido por Tarski:

[p.186]-6

Um simples exemplo de duas sentenças mutuamente contraditórias (isto é, tais que uma é a negação da outra), nenhuma das quais é demonstrável, é fornecido pelo Lema E abaixo.

O exemplo escolhido por Tarski é o Lema E que se vê na página 199 do *Concept of Truth in Formalized Language* (TARSKI, A.; [1983b], p.199.), que vimos comentando. Esse lema afirma que tanto a sentença ‘para todo  $x_1$  e  $x_2$ ,  $x_1$  está incluso em  $x_2$ ’ não é demonstrável quanto também ‘não ocorre que para todo  $x_1$  e  $x_2$ ,  $x_1$  está incluso em  $x_2$ ’ não é demonstrável. E no entanto o Lema E é uma sentença verdadeira que, estruturalmente falando, contém em si uma contradição. Em símbolos:  $\bigwedge_1 \bigwedge_2 \neg \iota_{1,2} \square Pr$

e  $\overline{N_1 \cap N_2} \neq \overline{N_1} \cap \overline{N_2}$  □ *Pr.* Isto é, *Pr* não é completo, então não vale a regra de terceiro excluído.

A diferença entre *o que é verdadeiro* e *o que é demonstrável* começa a ficar patente:

[p.186]-7
A extensão dos dois conceitos
não é, assim, idêntica.

Os dois conceitos em questão são os conceitos de *sentença verdadeira* e *sentença demonstrável*. Esta passagem [p.186]-7 é a resposta a uma pergunta que o próprio Tarski faria muitos anos mais tarde, em 1969, em seu artigo *Verdade e Demonstração* na revista *Scientific American* (TARSKI, A.; [2006], p.229):

“(…). em particular, podemos considerar os números das sentenças demonstráveis e os números das sentenças verdadeiras, aos quais chamaremos abreviadamente, números demonstráveis e números verdadeiros. Nosso problema fica, então, reduzido à seguinte questão: são idênticos os conjuntos dos números demonstráveis e dos números verdadeiros?”

Como lemos no [p.186]-7, a resposta é não: a extensão de cada conceito, aquilo que é domínio de cada um - o domínio das sentenças verdadeiras e o domínio das sentenças demonstráveis, – tais domínios possuem extensões desiguais, isto é, quantidades distintas de indivíduos. Tarski escreveria em *Verdade e Demonstração* (TARSKI, A.; [2006], pp.230-231):

“Assim, o conjunto dos números demonstráveis não coincide com o conjunto dos números verdadeiros, já que o primeiro é definível na linguagem aritmética, enquanto o segundo não o é. Consequentemente, também não coincidem o conjunto das sentenças demonstráveis e o das sentenças verdadeiras. (...) Dessa forma, nossa conclusão final é: existem sentenças formuladas na linguagem da aritmética que são verdadeiras mas não podem ser demonstradas com base nos axiomas e nas regras de demonstração aceitos na aritmética.”

E Tarski insiste nesse ponto da verdade das sentenças demonstráveis:

[p.186]-8

De um ponto de vista intuitivo toda sentença demonstrável é sem dúvida sentença verdadeira (as defs. 13-17 do §2 foram formuladas tendo isso em mente).

De fato, em *Verdade e Demonstração*, Tarski (TARSKI, A.; [2006], p.231) escreveu:

“(...). Por outro lado, usando a definição de verdade, facilmente demonstramos que todos os axiomas da aritmética são verdadeiros e que todas as regras de demonstração são infalíveis. Logo, todas as sentenças demonstráveis são verdadeiras e, por conseqüente, a conversa não pode valer. (...)”

A conversa, obviamente, é que sentenças verdadeiras são demonstráveis. É patente que axiomas, por exemplo, são idemonstráveis. Assim, aponta-se ao menos a certeza a respeito de um grupo de sentenças: é intuitivo o conhecimento de que toda sentença demonstrável é verdadeira. Um belo, didático e eficiente comentário a respeito dessa noção intuitiva se lê no artigo de Leon Henkin (HENKIN, L. [1979] pp.59-60):

“(...) uma definição recursiva de verdade precisa levar em conta outras noções semânticas — como a de denotação, por exemplo.

Considere-se mais um exemplo. Seja a sentença: “Para todo inteiro  $x$  existe um inteiro  $y$  tal que “ $y x$ ”, onde as letras “ $x$ ” e “ $y$ ” são variáveis que se referem a inteiros arbitrariamente escolhidos. É fácil ver que a sentença dada é verdadeira. Não obstante, se tentarmos determinar a sua estrutura gramatical, veremos que uma das partes constituintes é a fórmula “ $y x$ ”. A fórmula assemelha-se a certas sentenças, como “3 2” e “5 7”, mas *não é* uma sentença, de vez que não é verdadeira ou falsa. Fórmulas desse tipo, contendo variáveis, chamam-se *fórmulas sentenciais*. Uma vez que as fórmulas sentenciais precisam ser levadas em conta numa definição recursiva de sentença verdadeira; Tarski introduziu uma noção semântica apropriada para essas fórmulas. Trata-se da noção de uma seqüência de objetos (no nosso exemplo: seqüência de números inteiros) que *satisfazem* uma fórmula. O tratamento dado por Tarski às expressões contendo variáveis é considerado como a idéia-chave para a definição de verdade, que elaborou.

Deve-se ressaltar que a definição, embora forneça, para cada sentença **S** uma especificação das *condições* sob as quais **S** é verdadeira, essa definição *não* fornece informes a respeito de **S** ser, *de fato*, verdadeira. Assim, da definição se pode concluir que

a sentença “A grama é vermelha” será verdadeira se e somente se a grama for vermelha. A definição, porém, não nos presta informações a propósito da cor da grama. Para saber se a sentença é, de fato, verdadeira, será preciso combinar a definição e a investigação empírica.

Determinar a verdade ou falsidade de uma dada sentença empírica, usando o método direto da verificação de sua condição de verdade, pode ser tarefa árdua, e, às vezes, impraticável. A situação é ainda pior quando se trata de sentenças da Matemática. Se a sentença atribui, digamos, uma propriedade a cada um dos números 0, 1, 2, 3, etc., de que há uma infinidade, não se admite, nem mesmo em tese, a possibilidade de chegar ao fim, num processo de verificação direta.

Felizmente, entretanto, há outro meio de estabelecer a verdade de uma sentença **S** — bem diverso do processo de verificação direta. Nós podemos, por exemplo, *inferir* a verdade de **S** a partir do conhecimento que se tenha da verdade de outras sentenças, digamos **T**, **U** e **V**. Nesse caso, apresentamos uma série de outras sentenças, que nos levam de **T**, **U** e **V** para **S**. Uma cadeia de sentenças desse tipo constitui uma *dedução*; as sentenças originais, **T**, **U** e **V**, são as *premissas* ou *hipóteses*, da dedução; a sentença final, **S**, é a *conclusão* da dedução. Cada sentença da cadeia dedutiva deve ter a sua presença na cadeia autorizada por uma das “leis da lógica”. Essas leis são de aplicação bastante simples e devem gozar da propriedade de que nunca permitam a passagem de sentenças verdadeiras para sentenças falsas.

Nós tentamos, algumas vezes, organizar o conhecimento que temos de um domínio **D** procurando deduzir de um conjunto fixado de hipóteses, todas as sentenças verdadeiras que digam respeito a **D**. Ao fazê-lo, criamos uma *teoria* do domínio **D**; as hipóteses prefixadas são, nesse caso, os *axiomas* da teoria; as deduções que principiam com os axiomas são chamadas, então, *demonstrações*; as conclusões, enfim chamam-se *teoremas*.”

Tarski já havia ressaltado esse processo na própria construção das definições até aquela de *sentença demonstrável* (Definição 17), como ele mesmo lembra isso quando escreve “as defs. 13-17 do §2 foram formuladas tendo isso em mente” no [p186]-8.

Uma vez que *sentença verdadeira* e *sentença demonstrável* têm distintas extensões de domínio, Tarski propõe que o domínio das sentenças verdadeiras seja o mais extenso:

[p.186]-9

Então a definição de sentença verdadeira que estamos buscando pode também incluir sentenças que não são demonstráveis.<sup>1</sup>

O trabalho agora reside em identificar o princípio de natureza que faz a sentença verdadeira ser distinta da sentença demonstrável, permitindo àquela um domínio mais amplo. Mais do que isso, é óbvio que se toda sentença demonstrável é verdadeira (corretude) e que o conjunto das sentenças verdadeiras possui sentenças não demonstráveis, então as sentenças demonstráveis constituem um subconjunto (subclasse) das sentenças verdadeiras. Tarski – veremos adiante – irá propor o símbolo  $Tr$  para designar o conjunto de *todas* as sentenças verdadeiras. Adiantando essa simbologia, podemos escrever que  $Tr \neq Pr$  e  $Pr \sqsubset Tr$ .

Tarski coloca aqui – na intenção de esclarecer a natureza distinta das sentenças demonstráveis (ou *teoremas*) – uma *nota de rodapé nº1* que é ampla o bastante de informações para merecer ser estudada por partes:

[p.186-187]- *nota de rodapé 1 (a)*

<sup>1</sup> O fato que deve também ser tomado em consideração é que – ao contrário do conceito de sentença verdadeira – o conceito de sentença demonstrável tem um caráter puramente acidental quando aplicado a algumas ciências dedutivas, o que está relacionado principalmente com o desenvolvimento histórico da ciência.

A problemática de se estabelecer regras de demonstração e de que era necessário determinar com rigor o que é uma demonstração só foi notado ao longo do desenvolvimento das ciências e, mais precisamente, quando as ciências passaram a fazer uso da linguagem matemática como critério de clareza e distinção necessários para se fundarem as afirmações dessas mesmas ciências em seus mais diversos ramos. Lemos no artigo de Leon Henkin (HENKIN, L. [1979] pp.61-62):

Não é difícil notar que o protótipo das teorias axiomáticas dessa espécie pode ser encontrado nos trabalhos de Euclides, a respeito da Geometria. Partes da Física também já haviam sido axiomatizadas ao tempo de Newton. E, nos últimos cem anos, o processo de axiomatização foi minuciosamente estudado e estendido a praticamente todos os setores da matemática pura e aplicada.

É curioso constatar que, nos muitos séculos durante os quais os matemáticos prepararam demonstrações, as leis da Lógica utilizada para efetuar as passagens de um

para outro passo da demonstração nunca chegaram a ser explicitamente formuladas descontados os casos simples investigados por Aristóteles. Os matemáticos, no entanto, especialmente depois dos trabalhos de George Boole, que viveu na Inglaterra, por volta de 1850, passaram a dar considerável atenção aos problemas da Lógica. Ache-garam-se ao tema à maneira aristotélica, reconhecendo que as leis da Lógica deviam ser expressas em termos formais — isto é, que as leis deviam relacionar a forma estrutural da conclusão às correspondentes formas das hipóteses. Perceberam, porém, que as formas que aparecem nas demonstrações matemáticas eram muito mais complicadas que aquelas consideradas por Aristóteles.

Com o fito de tratar matematicamente as complexas formas sentenciais que necessariamente comparecem nas demonstrações, os lógicos matemáticos foram levados a elaborar linguagens ideais. Estas linguagens tomavam como ponto de apoio um formalismo constituído por uma lista explícita de símbolos, distribuídos em várias classes, e uma lista de regras formais que ditavam quais os modos por que os símbolos se combi-nariam para construir as sentenças. Qualquer linguagem desse tipo só pode exprimir uma limitada porção das idéias que são formuladas nas linguagens naturais; não obstan-te, algumas dessas linguagens mostraram-se capazes de abarcar porções substanciais (se não o todo) de certos ramos da Ciência e da Matemática.

Tarski mostrará, como exemplo, a ciência do cálculo de classes:

[p.186-187]- *nota de rodapé 1 (b)*

É, algumas vezes, difícil dar razões objetivas para o estreitamento ou alargamento da extensão desse conceito em uma direção particular. Por exemplo, quando estamos lidando com o cálculo de classes, a sentença  $\overline{\Pi_1 \Pi_2 t_{1,2}}$ , que estipula a existência de pelo menos duas classes distintas, não é aceita com base nas definições do §2 – como será expresso no Lema E.

No cálculo de classes, por exemplo, algumas sentenças demonstráveis – como o Lema E – são obtidas apesar de exigirem definições que ainda não se fizeram dentro do cálculo de classes. No caso exemplificado, o Lema E vai exigir critérios (a noção de classes distintas, uma sendo subclasse da outra) que só ficam estabelecidos na Definição 25 (lembrando que o Lema E aparece antes da Definição 24). Por isso o Lema E não pode ser justificado com base nas definições da seção segunda do artigo de Tarski (que ele denomina “§2”), pois tal seção vai até a definição 21 apenas. Porém não vamos adiantar toda a discussão a respeito do Lema E aqui.

Há mais problemáticas carregando a sentença  $\overline{\Pi_1 \Pi_2 t_{1,2}}$ :



adequada de sentença verdadeira. Isso exigirá um ferramental de base semântica muito poderoso que começa a ser construído com a idéia inicial chamada ‘T-CONVENÇÃO’.

## 2. Noções semânticas envolvidas em torno da idéia de *sentença verdadeira*

O projeto de Tarski, agora, será construir um outro tipo de definição muito mais amplo que a DEFINIÇÃO 17, e que parta de uma conceituação semântica para a noção de sentença verdadeira. O roteiro seguido por Tarski será primeiro *definir o que é ‘verdade’* (T-CONVENÇÃO), em seguida *definir quando uma variável livre é substituída de modo a satisfazer uma função sentencial* (Definição 22) e por fim *definir o que é uma sentença verdadeira* (Definição 23), objeto do seu trabalho. Por isso, o primeiro ponto colocado com ênfase por Tarski é que se faz necessário um retorno às noções semânticas estudadas na primeira parte do artigo:

[p.187]-1

Vamos abordar o problema sob um ângulo bem diferente e retornemos à idéia de uma definição semântica com no § 1.

Não vamos tentar resumir toda a abordagem semântica da primeira parte do artigo que vimos estudando, mas apenas lembremos que uma definição semântica envolve o conceito de referência e de que há nomes que se referem a objetos. No caso, os objetos são sentenças da linguagem objeto *L* e tais sentenças têm um ‘nome’. Tarski faz ele próprio um resumo muitíssimo sintético da teoria semânticas tratada no § 2:

[p.187]-2

Como sabemos desde o § 2, para cada sentença da linguagem do cálculo de classes corresponde na metalinguagem não só um nome dessa sentença de um tipo descritivo-estrutural, mas também uma sentença tendo o mesmo significado.

As relações existentes entre linguagem e metalinguagem segue aquilo que vimos no QUADRO 1, neste capítulo, no comentário ao [p.186]-1.

O exemplo dado por Tarski é o que segue:

[p.187]-3

Por exemplo, correspondendo à sentença ' $\Pi x, \Pi x, A/x, x, I/x, x$ ,' temos o nome ' $\Pi_1 \Pi_2 (t_{1,2} + t_{2,1})$ ' e a sentença 'para quaisquer classes  $a$  e  $b$ , temos  $a \sqsubseteq b$  e  $b \sqsubseteq a$ '.

Fazendo uso da estrutura do QUADRO 1, podemos interpretar o exemplo dado por Tarski como segue:

Sentença na linguagem $L$	$Px, Px, A/x, x, I/x, x$	$\Pi_1 \Pi_2 (t_{1,2} + t_{2,1})$	Nome metalinguístico
		Para toda classe $a$ e para toda classe $b$ , $a \sqsubseteq b$ ou $b \sqsubseteq a$	Tradução ou interpretação metalinguística

Com base nessa relação Linguagem/Metalinguagem, Tarski vai fazer uso do proceso semântico que ele usou na parte primeira (§ 1) de seu artigo, baseado no T-ESQUEMA:

[p.187]-4

Para tornar claro o conteúdo do conceito de verdade em conexão com alguma outra sentença concreta da linguagem com a qual estamos lidando, podemos aplicar o mesmo método que foi usado no § 1 na formulação das sentenças (3) e (4) (cf. p.156). Tomamos o esquema (2) e substituímos o símbolo ' $x$ ' nele pelo nome da sentença dada, e ' $p$ ' por sua tradução na metalinguagem. Todas as sentenças obtidas dessa maneira, e.g. ' $\Pi_1 \Pi_2 (t_{1,2} + t_{2,1})$  é um sentença verdadeira se e somente se para qualquer classe  $a$  e  $b$  temos  $a \sqsubseteq b$  e  $b \sqsubseteq a$ ', naturalmente pertencendo à metalinguagem e explicando de modo preciso, de acordo com o uso lingüístico, o significado de frases na forma ' $x$  é uma sentença verdadeira' que ocorre nela.

Em resumo, Tarski reclama usar o T-ESQUEMA:

**T:**  $x$  é uma sentença verdadeira se e somente se  $p$ .

Lembrando que  $x$  está no lugar do nome da sentença e  $p$  está no lugar da sentença. Lembrando ainda que  $p$  não é a sentença, mas a interpretação ou tradução da sentença.

Assim, se a sentença é ' $\Pi x, \Pi x, A!x, x, !x, x, '$ ', seu nome é ' $\Pi_1 \Pi_2 (t_{1,2} + t_{2,1})$ ' e sua tradução (ou interpretação – que é entendido como outra sentença equivalente à original) é 'para quaisquer classes  $a$  e  $b$ , temos  $a \sqsubseteq b$  e  $b \sqsubseteq a$ ', então, substituindo no T-ESQUEMA, temos (o negrito está indicando as partes substituídas):

**T:** ' $\Pi_1 \Pi_2 (t_{1,2} + t_{2,1})$  é uma sentença verdadeira se e somente se **para quaisquer classes  $a$  e  $b$ , temos  $a \sqsubseteq b$  e  $b \sqsubseteq a$** '.

No capítulo 2 deste livro discutimos bastante a estrutura de referência, denotação e substituição (de modo não formal) dentro do T-ESQUEMA e não vamos dedicar mais linhas a um comentário mais denso.

A parte problemática (e isso será resolvido nas definições posteriores) seria o significado da frase ' $x$  é uma sentença verdadeira' dentro do T-ESQUEMA. Tarski já aponta que tal significado só pode ser estabelecido na metalinguagem.

É curioso observar que este T-ESQUEMA possui intrinsecamente o conceito de 'ser tradução de'. Se usarmos um tipo especial de aspas (usemos os sinais  $\sqsubseteq$  e  $\sqsupseteq$  com essa intenção) temos uma sentença  $s$  que tem um nome  $\sqsubseteq s \sqsupseteq$  que equivale à tradução ' $s$ '. Em símbolos:  $\sqsubseteq s \sqsupseteq \sqsubseteq 's'$ . Apesar de Tarski não fazer isso, pode-se tornar preciso o conceito de 'ser tradução':

**DEFINIÇÃO DE TRADUÇÃO.**  $t$  é tradução (ou interpretação) de  $x$ ,  $x \sqsubseteq Tr$ , se e somente se existir um único nome  $n$  tal que  $n(x) = n(t)$ .

Obviamente, uma vez que se assumiu que se pode escrever as sentenças da linguagem dentro da metalinguagem, esta é uma definição irrelevante.

Tarski espera, então, que esse método semântico seja o caminho para se definir sentença verdadeira:

[p.187]-4

Em princípio, não mais é exigido de uma definição geral de sentença verdadeira do que aquilo que satisfaça as condições usuais de corretude metodológica e inclua todas as definições parciais deste tipo como casos especiais; que seria ela, por assim dizer, o produto lógico delas.

A definição parcial aqui apontada como ‘caso especial’ é a conjunção (produto lógico) de todas as definições parciais de sentenças verdadeiras. Falta comentar brevemente a necessidade que as variáveis do T-ESQUEMA sejam substituídas por sentenças e não por quaisquer expressões:

[p.187]-5  
N

o máximo, podemos exigir que só sentenças devam pertencer à extensão do conceito definido, tal que, na base da definição construída, todas as sentenças do tipo ‘*x não é um sentença verdadeira*’, em que no lugar de ‘*x*’ tenhamos o nome de uma expressão arbitrária (ou de qualquer outro objeto) que não seja sentença, possa ser demonstrado.

Assim, a metalinguagem deve ter condições não só de definir o que é uma sentença verdadeira como de definir o que *não é* uma sentença verdadeira.

### 3. A T-CONVENÇÃO

De posse dessas noções semânticas ligadas a referências mútuas entre linguagem e metalinguagem, Tarski propõe a T-CONVENÇÃO:<sup>141</sup>

---

<sup>141</sup> Como o leitor mesmo lerá, Tarski escreve ‘Convenção T’, mas – a exemplo do que fizemos com a tradução ‘T-ESQUEMA’ – traduziremos por T-CONVENÇÃO.

[pp.187-188]

Usando o símbolo 'Tr' para denotar a classe de todas as sentenças verdadeiras, o postulado acima pode ser expresso na seguinte convenção:

**CONVENÇÃO T.** *Uma definição formalmente correta do símbolo 'Tr', formulada na metalinguagem, é chamada uma definição adequada de verdade se tiver as seguintes conseqüências:*

( $\alpha$ ) *todas as sentenças que são obtidas da expressão ' $x \sqsubset Tr$  se e somente se  $p$ ' pela substituição do símbolo ' $x$ ' por um nome descritivo-estrutural de qualquer sentença da linguagem em questão e do símbolo ' $p$ ' pela expressão que forma a tradução dessa sentença dentro da metalinguagem;*

( $\beta$ ) *a sentença 'para qualquer  $x$ , se  $x \sqsubset Tr$  então  $x \sqsubset S$ ' (em outras palavras ' $Tr \sqsubset S$ ').<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Se desejarmos submeter a metalinguagem e a metateoria expressa a um processo de formalização, então a exata especificação do significado de várias expressões que ocorrem na convenção T não apresentaria nenhuma grande dificuldade, e.g. as expressões '*formalmente correta definição do símbolo dado*', '*nome descritivo-estrutural de uma sentença da linguagem estudada*', '*a tradução de uma sentença dada (da linguagem estudada) na metalinguagem*'. Após uma importante modificação dessa formulação a própria convenção torna-se uma definição normal pertencente à metateoria.

Assim, 'Tr' é uma definição adequada de verdade se cumprir as cláusulas ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ):

**Cláusula ( $\alpha$ ).** Trata da descrição formal daquilo que vimos ser feito no [p.187]-

4. Podemos indicar isso por símbolos e escrever:

$$(x \sqsubset Tr) \sqsubset p$$

([nome descritivo-estrutural da sentença de L]  $\sqsubset Tr$ )  $\sqsubset$  [tradução da sentença de L]

**Cláusula ( $\beta$ ).** Afirma que se  $x \sqsubset Tr$ , então  $x \sqsubset S$ . Se  $x$  é verdade, então é sentença. A nota de rodapé 1 neste trecho [pp.187-188] apenas sugere que se a metalinguagem fosse rigorosamente formalizada, as expressões exigidas pela T-CONVENÇÃO para situar uma definição adequada de verdade seriam mais facilmente aceitas. Na forma como estão, são intuitivamente aceitas. Mas adiante, ainda na seção § 3 deste artigo de Tarski essa T-CONVENÇÃO assumirá uma escrita formal que impedirá discussões sobre possíveis ambigüidades em sua formulação.

Tarski se preocupa em mostrar que a Cláusula ( $\beta$ ) é dispensável:

[p.188]-1

Nota-se que a segunda parte da convenção acima não é essencial; assim como a metalinguagem já tem um símbolo '*Tr*' que satisfaz a condição ( $\alpha$ ), é fácil definir um novo símbolo '*Tr*' que também satisfaz a condição ( $\beta$ ). É suficiente aceitar que *Tr*' é a parte comum das classes *Tr* e *S*.

Como não se pretende (por questões de praticidade na exposição da teoria) formalizar rigidamente a metalinguagem, então poder-se-ia dizer que a natureza de *Tr* na cláusula ( $\alpha$ ) e de *Tr* na cláusula ( $\beta$ ) é diferente. Por isso poderíamos dizer que temos um *Tr* só para ( $\alpha$ ) e um *Tr*' só para ( $\beta$ ). Mas (sem provas) Tarski aconselha por ora aceitar que  $Tr' = Tr \cap S$ , como podemos visualizar pelo diagrama seguinte (figura 16.1):

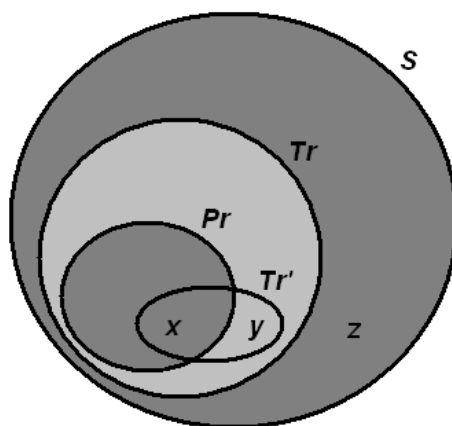


Figura 16.1 – Diagramas de Venn indicando a relação  $Pr \sqsubset Tr \sqsubset S$  e  $Tr' = Tr \cap S$ . Sentenças  $x$ ,  $y$  e  $z$  arbitrárias por hipótese são tais que se  $x$  é demonstrável então é sentença verdadeira, se  $y$  é verdadeira, pode não ser demonstrável, mas é sentença, e existem sentenças, como  $z$ , que são não-verdadeiras e não-demonstráveis.

Com isso ficam estabelecidos de modo bastante útil os limites e aplicabilidade da T-CONVENÇÃO. Mas como ela não é ainda a definição de sentença verdadeira, precisaremos construir o ferramental teórico que permita dar às sentenças a propriedades de serem verdadeiras. Isso será alcançado por estabelecer uma noção de suma importância para definitivamente conseguirmos a definição de sentença verdadeira: a noção de satisfatibilidade.

## CAPÍTULO 11

### SATISFATIBILIDADE

Assim como a Definição 17 não possuía teoria o bastante para também definir sentença verdadeira, a T-CONVENÇÃO também carece de teoria que possa torná-la uma definição de sentença verdadeira. Uma noção que será bem explicada por Tarski é a de *satisfatibilidade*. Só a título de introdução, expliquemos que o desejo é de atribuir a verdade como uma propriedade das sentenças da linguagem objeto. Vamos tomar uma sentença qualquer, por exemplo,  $\forall x(x \sqsubseteq x)$ , que se lê ‘qualquer que seja a, a  $\sqsubseteq$  a’. Dizemos que  $\forall x(x \sqsubseteq x)$  é verdadeira se  $x \sqsubseteq x$  for verdadeira para todo indivíduo do domínio em questão (no caso a classe cujos indivíduos podem ser colocados no lugar de  $x$ ). Os problemas aqui podem ser resumidos a dois:

Primeiro, não estamos dizendo que uma sentença é verdadeira. Estamos dizendo que a fórmula  $\forall x(x \sqsubseteq x)$  é verdadeira e ela é feita de duas partes: quantificador ‘ $\forall x$ ’ e expressão ‘ $x \sqsubseteq x$ ’. Nem um nem outro são sentenças – pois o segundo tem variáveis livres e, veremos mais tarde, sentenças com variáveis livres não podem ser ditas verdadeiras. Como precisamos de uma nomenclatura, temos *esperança* de que a junção dos dois (quantificador ‘ $\forall x$ ’ e expressão ‘ $x \sqsubseteq x$ ’) possa ficar no lugar de uma sentença.

Segundo, é impraticável dizer que ‘ $x \sqsubseteq x$ ’ é verdade para todo indivíduo da classe. E se a classe tiver uma quantidade humanamente imensurável de indivíduos, ou mecanicamente exaustiva?

O único jeito de resolver esse impasse é fazendo, primeiro, que haja ao menos um indivíduo em condições de substituir a variável na fórmula e, segundo, que um modelo (onde um indivíduo é colocado no lugar da variável) satisfaça essa fórmula com essa variável.

Satisfação, então, é conseguir realizar tal substituição onde a variável desaparece e é no lugar fica um indivíduo, validando um modelo: para todos os outros indivíduos da classe, o mesmo se dará na mesma fórmula.

Essa é uma noção bastante comum, mas refere-se a sentenças. Tarski pretenderá estabelecer como uma *função sentencial* tem condições de se tornar sentença. A função

sentencial também é *satisfeita*, a seu modo, e isso a torna uma sentença. Uma função sentencial só se torna sentença se suas variáveis livres ou forem substituídas por indivíduos (dizemos que foram substituídos por ‘constantes’ porque objetos ou indivíduos não variam)<sup>142</sup> ou se forem ligadas por quantificadores. O estudo de Tarski nesta parte será a satisfação das funções sentenciais para torná-las sentenças.

### 1. Limitação do método de exaustão no uso da T-CONVENÇÃO para definir verdade

Não é verdade que a T-CONVENÇÃO não pode definir o que é *verdade*. Porém ela só pode fazer isso se a linguagem objeto tiver um número finito de sentenças:

[p.188]-2

Se a linguagem investigada só contém um número finito de sentenças fixado desde o início, e se podemos enumerar todas estas sentenças, então o problema de construção de uma definição correta de verdade apresentar-se-ia sem dificuldades.

Enumerar seria dar um número natural para cada sentença desse número fixo e finito de sentenças. O esquema de como a linguagem finitária e fixa no número de sentenças permite a definição da verdade pela T-CONVENÇÃO é como segue:

[p.188]-3

Para isto proponho ser suficiente completar o seguinte esquema:  $x \sqsubset Tr$  se e só ou  $x = x_1$  e  $p_1$ , ou  $x = x_2$  e  $p_2, \dots$  ou  $x = x_n$  e  $p_n$ , os símbolos ‘ $x_1$ ’, ‘ $x_2$ ’, ..., ‘ $x_n$ ’ sendo substituído por nomes descritivo-estruturais de todas as sentenças da linguagem investigada e ‘ $p_1$ ’, ‘ $p_2$ ’, ..., ‘ $p_n$ ’ pela correspondente tradução dessas sentenças dentro da metalinguagem.

Em outras palavras, para as linguagens finitárias basta-nos construir um mecanismo que substitua no T-ESQUEMA todo ‘x’ por cada um dos ‘nomes de sentença’ – cada um por sua vez - e todo ‘p’ pelas traduções correspondentes, dentro da metalinguagem, de cada sentença cujos nomes foram postos no lugar de ‘x’ – cada tradução por sua vez – respeitando o par {nome de  $x$ , tradução de  $x$ }. Mesmo que seja uma quantidade enumerável, mas humanamente impraticável, não será mecanicamente exaustiva jus-

---

<sup>142</sup> Não precisamos repetir que em uma sentença os indivíduos físicos são denotados por seus nomes (e esses nomes não são coisas do tipo ‘nomes de sentença’ etc.). Ver capítulo 2 deste trabalho.

tamente por ser finitária (e softwares e hardwares de grande processamento depois de algum tempo dariam conta de esgotar os pares  $\{x, p\}$ ). Porém Tarski avisa:

[p.188-189]

Mas a situação não é essa. Sempre que uma linguagem contenha infinitamente muitas sentenças, a definição construída automaticamente de acordo como esquema acima teria de consistir de infinitamente muitas palavras, e tais sentenças não podem ser formuladas ou na metalinguagem ou em qualquer outra linguagem. Nossa tarefa fica grandemente complicada.

Ocorre que em condições de linguagens infinitárias, a quantidade de palavras exigidas pela linguagem e pela metalinguagem para escrever os T-ESQUEMA ficariam cada vez maiores, ao ponto de se tornar impraticável listar todos os T-ESQUEMAS, seguindo o método do trecho [p.188]-3, impossível mesmo por métodos mecânicos exaustivos, quiçá humanos!

O jeito é procurar outro tipo de método, um método que não utilize do processo de exaustão.

## **2. Limitações iniciais do método recursivo no uso da T-CONVENÇÃO para definir *verdade* e solução dessa limitação**

Tarski reconhece que tentar os métodos exaustivos gera tantas dificuldades que de modo imediato, por si só, a solução aparece para substituir o método de exaustão:

[p.189]-1

A idéia de usar o método recursivo é sugerida por si própria.

Não vamos nos dedicar aqui a desenrolar toda uma teoria da recursão. Basta-nos o que já lemos na nota 100. A idéia de aplicar a recursão neste caso vem do próprio modo como a verdade pode depender da estrutura de construção das sentenças dentro da linguagem:

[p.189]-2

Entre as sentenças da linguagem encontramos expressões dos mais variados tipos do ponto de vista da estrutura, algumas bastante elementares, outras mais ou menos complicadas. A questão seria então primeiro dar todas as operações pelas quais as sentenças simples são combinadas nas compostas e então determinar o modo como a verdade ou falsidade das sentenças compostas dependem da verdade ou falsidade das simples que elas contêm.

Toda linguagem é obtida criando-se sentenças compostas a partir das simples. Tarski propõe como primeiro trabalho *listar todas as operações que combinam as sentenças simples para construir sentenças compostas*. Estudando essas operações sabemos se a natureza verdadeira ou falsa das sentenças simples permanece a mesma durante o processo de combinação e como essas naturezas individuais se relacionam para dar a natureza final – verdadeira ou falsa – da sentença composta.

[p.189]-3

Além disso, certas sentenças elementares podem ser selecionadas, das quais, com a ajuda das operações mencionadas, todas as sentenças da linguagem podem ser construídas; essas sentenças selecionadas podem ser explicitamente divididas em verdadeiras e falsas, no sentido, por exemplo, de definições parciais do tipo descrito acima.

Esse grupo elementar de sentenças não são as sentenças axiomáticas. Depois de selecionadas as sentenças elementares que dão origem a todas as sentenças da linguagem (verdadeiras e falsas), dividindo essas elementares entre verdadeiras e falsas podemos – mais tarde – localizar dentre as elementares verdadeiras um grupo que pode constituir os axiomas. Os axiomas são verdadeiros, mas parcialmente definidos como verdadeiros: isso é assim para que seja possível, a partir deles, construir definições absolutas (e não parciais) de verdade.

Por exemplo, a sentença ‘ $x$ : a inclusão é uma operação que torna uma classe ser subclasse de outra’ deve ser aceita como verdadeira por definição parcial, quando dizemos que ‘ $x$  é verdadeira’.

Porém, a linguagem construída por Tarski não atende esses critérios, pois as construções das sentenças compostas não são feitas a partir de outras sentenças:

[p.189]-4

Na tentativa de realizar essa idéia, porém, confronta-mo-nos com um sério obstáculo. Uma análise superficial das Defs. 10-12 do § 2 mostra que em geral sentenças compostas de nenhum modo vêm de *sentenças* simples. Funções sentenciais têm de fato origem desse modo de funções elementares, i.e. de inclusões; sentenças pelo contrário são certos casos especiais de funções sentenciais. Em vista deste fato, nenhum método pode ser dado que nos habilite definir o requerido conceito diretamente por meio de um sentido recursivo.

Segundo as definições citadas, as sentenças têm origem em *funções sentenciais* e só essas funções sentenciais que são compostas a partir de funções sentenciais mais

simples. Não há como aplicar recursividade sobre as sentenças da linguagem, porque não há estruturas simples dentro das sentenças: cada sentença é um todo indivisivo. Kirkham (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.218) entende que dentro de cada sentença há ‘pedaços’ feitos de funções sentenciais, que não são sentenças, por isso não se pode dizer que sentenças são feitas de sentenças mais simples:<sup>143</sup>

“Assim, há um número infinito de sentenças quantificadas, cujas partes não são, nenhuma delas, uma sentença. (...). Já que as sentenças abertas que são as partes dessas sentenças quantificadas não têm valor de verdade, *não podemos definir recursivamente a verdade de tais sentenças em termos dos valores de verdade de suas partes*. E, mais uma vez, já que há um número infinito de tais sentenças, não podemos dar a cada uma delas uma cláusula particular na definição de verdade. Nisso reside o dilema resolvido por Tarski.”

Em outras palavras, o modo que Tarski escolheu para construir sua noção de sentença limitou o uso da recursividade como ferramenta.

Mas a recursividade pode ser aplicada às funções sentenciais, já que nelas encontramos funções sentenciais compostas constituídas de funções simples. Daí que a solução seja aplicar recursividade sobre as funções sentenciais e depois migrar os resultados para as sentenças cujas origens estão nessas funções sentenciais:

[p.189]-5

A possibilidade sugerida por si mesma, entretanto, de introduzir um conceito mais geral que é aplicável a qualquer sentença, leva-nos diretamente ao conceito de verdade. Esses requisitos são obtidos pela noção de *satisfação de uma dada função sentencial por dados objetos*, e no presente caso por dadas classes individuais.

A solução, então, apresenta-se por si própria: trata-se de aproveitar a relação intrínseca que tira sentenças de funções sentenciais e construir uma noção de satisfatibilidade sobre as funções sentenciais, de modo recursivo. As propriedades resultantes serão

---

<sup>143</sup> Kirkham chama as funções sentenciais de *sentenças abertas*, por terem variáveis livres (só é sentença a expressão cujas variáveis são todas ligadas).

transferidas posteriormente às sentenças. Kirkham (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.218) explica assim:<sup>144</sup>

“O grande *insight* de Tarski foi o seguinte: como a propriedade da verdade não é possuída por sentenças abertas, devemos descobrir uma *outra* propriedade com as seguintes características:

- Ela pode ser possuída tanto por sentenças abertas quanto por sentenças genuínas.
- A posse ou não dessa propriedade por uma dada sentença quantificada é determinada completamente pelos operadores de funções de verdade na sentença e pela posse ou não da propriedade pelas cláusulas abertas não compostas contidas dentro de toda a sentença.
- É possível definir a verdade em termos da posse ou não da propriedade pelas sentenças genuínas, de modo que a definição de verdade resultante implique todas as sentenças-T.

As duas primeiras características asseguram que podemos definir a propriedade em questão recursivamente e, assim, que podemos aplicar nossa definição a linguagens com um número infinito de sentenças. A terceira característica assegura que a definição de verdade vai atender à condição de adequação material (Tarski, 1933, 189).

“Satisfação” é o nome que Tarski dá à propriedade que ele descobriu ter todas as características exigidas. (...)”

De fato Kirkham aponta que a satisfação é algo a ser feito tanto nas funções sentenciais quanto nas sentenças. Que essa propriedade está ligada às operações de quantificação universal feitas pelas ‘partes’ da função sentencial dada, se essas operações cumprem uma satisfação ou não. A satisfação ou não dessas parcelas é que diz, na composição final, se a função sentencial ‘composta’, que foi dada, pode ser origem de uma sentença verdadeira ou falsa. Por última característica, é a posse ou não dessa propriedade pela função sentencial que define a sentença verdadeira (quem possui) e aponta a falsa (quem não possui).

---

<sup>144</sup> Lembrando que Kirkham chama as funções sentencias de *sentenças abertas*, sentenças de *sentenças genuínas* e o T-ESQUEMA de *sentença-T*. Kirkham cita o mesmo texto de Tarski na edição que vimos trabalhando, isto é, (Tarski, 1933, 189) é o TARSKI, A.; [1983b], p.189.

Ou seja, o processo passa pela idéia de que a uma função *sentencial satisfeita* dá origem à *sentença verdadeira*. Desse modo, entendendo o processo pela qual uma função sentencial é satisfeita, será possível entender o modo como uma sentença recebe a característica de ‘ser verdadeira’.

### 3. Satisfação de funções sentenciais: estudos de caso

O modo como ocorre a satisfação pode ser entendido observando-se alguns exemplos, como diz Tarski:

[p.189]-6

Vamos primeiro esclarecer por meio de alguns exemplos o sentido usual dessa noção no uso lingüístico costumeiro. O modo como faremos isto representa uma generalização do método que nós usamos anteriormente para o conceito de verdade.

Para facilitar o estudo, Tarski vai escolher sentenças da linguagem natural, para que fique fácil – de modo intuitivo – perceber como uma função sentencial pode ser satisfeita. Ele usará o processo descrito na T-CONVENÇÃO. Sua exposição será bastante didática, começando com uma função sentencial que tenha só uma variável livre, depois passando para o caso de duas variáveis livres e por fim para o caso de um número arbitrário e indefinível de variáveis livres.

#### 3.1. Satisfação de uma função sentencial de única variável livre.

Tarski apresenta o exemplo como segue:

[pp.189-190]

O mais simples e claro caso é aquele no qual a dada função sentencial contém *uma única* variável livre. Podemos então dizer de todo objeto singular que ele satisfaz ou não a dada função<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Provisoriamente eu ignoro problemas ligados a categorias semânticas (ou tipos lógicos); estes problemas serão discutidos no § 4.

Se uma função sentencial tem uma única variável livre, ela se tornará sentença quando essa variável livre puder ser ligada. Para isso, basta existir um único objeto em condições de fazer isso. Em outras palavras, interessa apenas toda e qualquer classe que

contenha ao menos um indivíduo.<sup>145</sup> A quantificação universal vai poder ligar a variável em função da classe que se preste a preencher as exigências da função sentencial.

Na verdade, como faz lembrar a *nota de rodapé 1*, as exigências da função sentencial vão ditar a escolha da classe. Deverá haver classes que contenham ao menos um indivíduo e que, por razões semânticas que a Teoria dos Tipos daria, não satisfariam a função sentencial permitindo ligar a variável livre. Mas esses motivos – avisa Tarski – só serão discutidos no § 4. Por ora, Tarski explicita mais seu exemplo:

[p.190]-1

Visando explicar o sentido desta frase, consideremos o seguinte esquema:

*para todo a, a satisfaz a função sentencial x se e somente se p*

e substituamos no esquema ‘p’ pela dada função sentencial (após primeiro trocarmos a variável livre que ocorre nela por ‘a’) e ‘x’ por algum nome individual dessa função. Na linguagem coloquial podemos deste modo obter, por exemplo, a seguinte formulação:

*para todo a, a satisfaz a função sentencial ‘x é branco’ se e somente se a é branco*

A satisfação de uma função sentencial de uma única variável livre é conseguida por um esquema que é modificado do T-ESQUEMA. Esse esquema vamos chamar de T-SATISFAÇÃO, com o seguinte formato:

T-SATISFAÇÃO: *para todo a, a satisfaz a função sentencial x se e somente se p*

Para usar o T-SATISFAÇÃO, precisamos de uma função sentencial – no caso, uma função sentencial com uma única variável livre – e de pelo menos uma classe que tenha ao menos um indivíduo em condições de substituir a variável livre da função sentencial. Note que a T-SATISFAÇÃO não liga a variável livre, apenas estabelece que ela é ligável e, portanto, a função sentencial pode vir a se tornar sentença pela quantificação

---

<sup>145</sup> O ‘vazio’ ( $\square$ ) é um objeto, em sentido lógico: é o objeto que satisfaz a função sentencial, por exemplo, “x é o primeiro romance escrito na Lua antes de 20 de julho de 1969”.

universal dessa variável livre (coisa que só será feita depois). Por exemplo, temos que a função sentencial  $p$  diz algo como ' $x$  é branca'. Podemos escrever isso  $p: x$  é branco.

Temos então uma classe de indivíduos – a 'classe das coisas brancas' – que deve ter pelo menos um indivíduo  $a$ . Se existir esse indivíduo, isto é, se a classe em questão não for vazia, podemos usar o esquema T-SATISFAÇÃO, pois a primeira parte do T-SATISFAÇÃO exige assim '*para todo  $a$ ,  $a$  satisfaz... etc.*'.

Agora, finalmente, usamos o esquema T-SATISFAÇÃO (pois temos um indivíduo  $a$ , pelo menos *um indivíduo  $a$ , que é branco*, por exemplo: *neve*), fazendo as substituições que cabem:

1º) substituir ' $x$ ' por ' $a$ ' na função sentencial ' $p$ ': ' $x$  é branco' se torna ' $a$  é branco';

2º) Substituir no T-SATISFAÇÃO ' $x$ ' por ' $a$ ' e ' $p$ ' pela frase ' $a$  é branco'.

O resultado será:

T-SATISFAÇÃO: *para todo  $a$ ,  $a$  satisfaz a função sentencial  $x$  se e somente se  $p$*   
 SITUAÇÃO SATISFATÍVEL (substituições): *para todo  $a$ ,  $a$  satisfaz a função sentencial ' $x$  é branco' se e somente se  $a$  é branco.*

Como ' $a$ ' está no lugar dos indivíduos brancos, o leitor pode fazer a experiência de substituir ' $a$ ' por '*neve*' e dar mais caráter coloquial à SITUAÇÃO SATISFATÍVEL indicada acima. Esse processo, que aparentemente envolve certa sofisticação, é aprendido em circunstâncias simples em nossa vida cotidiana. Quando estudamos matemática elementar, por exemplo, (o que demonstra o nosso domínio intuitivo da idéia de *satisfação*):

[p.190]-2  
Seria

familiar ao leitor uma construção similar vinda da álgebra da escola, onde funções sentenciais de um tipo especial, chamadas *equações*, são consideradas ao lado de números que satisfaçam essas funções, as então chamadas *raízes* das equações (e.g. 1 é a única raiz da equação ' $x + 2 = 3$ ').

Só para tornar sofisticado esse exemplo escolar, façamos as substituições:

FUNÇÃO SENTENCIAL  $p$ : 'x + 2 = 3'

CLASSE X: 'raíz de 'x + 2 = 3''

INDIVÍDUO  $a \in X$ : 1

T-SATISFAÇÃO: *para todo a, a satisfaz a função sentencial x se e somente se p*

SITUAÇÃO SATISFATÍVEL: *para todo a, a satisfaz a função sentencial 'x + 2 = 3' se e somente se 1 é raíz de 'x + 2 = 3''*

É claro que o estudo feito partiu de um exemplo que pertence à linguagem coloquial (em especial o caso de 'x é branco' e a substituição de 'x' por 'a' onde  $a = neve$ ). O interesse do artigo de Tarski é a Linguagem do Cálculo de Classe. Por isso ele vai modificar e transpor o exemplo para o ambiente de estudos de linguagem e metalinguagem:

[p.190]-3

Quando, em particular, a função pertence à linguagem do cálculo de classes, e a correspondente explanação da expressão 'a satisfaz a dada função sentencial' é formulada totalmente em termos de metalinguagem, então no esquema acima inserimos no lugar de ' $p$ ' não a própria função sentencial, mas a expressão da metalinguagem que tem o mesmo significado, e substituímos ' $x$ ' por um nome individual dessa função que também pertence à metalinguagem. Por exemplo, esse método dá a seguinte formulação ligada à função ' $\Pi x, Ix, x,$ ':

*para todo a, a satisfaz a função sentencial  $\Pi x, Ix, x,$  se e somente se para toda classe b nós temos  $a \in b$ .*

(de onde se segue que só há uma única classe que satisfaz a função ' $\Pi x, Ix, x,$ ' é a classe nula).

Esse exemplo envolvendo cálculo de classes e linguagem/metalinguagem permite que montemos uma generalização do T-SATISFAÇÃO:

T-SATISFAÇÃO GERAL: *para todo [indivíduo pertencente a uma classe], [indivíduo pertencente a uma classe] satisfaz a função sentencial [nome metalinguístico da função sentencial em L] se e somente se [tradução ou interpretação metalinguística da função sentencial em L].*

Esse esquema geral vale para todos os casos de satisfação de função sentencial.

### 3.2. Satisfação de uma função sentencial de duas variáveis livres.

Não existe dificuldade em levar o exemplo anterior para o caso de duas variáveis livres:

[pp.190-191]

No caso em que a função sentencial tem duas variáveis livres distintas procedemos de uma maneira exatamente análoga. A única diferença é que o conceito de satisfação agora se refere não a objetos singulares, mas a pares (mais exatamente a pares ordenados) de objetos. Deste modo obtemos as seguintes formulações:

*para todo  $a$  e  $b$ ,  $a$  e  $b$  satisfaz a função sentencial ' $x$  vê  $y$ ' se e somente se  $a$  vê  $b$ ; para todo  $a$  e  $b$ ,  $a$  e  $b$  satisfaz a função sentencial  $t_{2,3}$  (i.e. ' $Ix,,x,,$ ') se e somente se  $a \sqsubset b$ .*

Fica claro que só o par de indivíduos e aquele par de indivíduos em questão (e não outro) que satisfaz a função sentencial. Tarski deu dois exemplos de FUNÇÃO SATISFATÍVEL, um essencialmente coloquial (da linguagem natural), fazendo referência ao sentido orgânico (biológico, próprio de muitos animais e dos seres humanos) da visão<sup>146</sup>:

*para todo  $a$  e  $b$ ,  $a$  e  $b$  satisfaz a função sentencial ' $x$  vê  $y$ ' se e somente se  $a$  vê  $b$ ;*

e outro do cálculo de classes (para a função sentencial ' $Ix,,x,,$ ' em  $L$ ):

*para todo  $a$  e  $b$ ,  $a$  e  $b$  satisfaz a função sentencial  $t_{2,3}$  se e somente se  $a \sqsubset b$ .*

Esses dois casos – para uma única variável livre e para duas variáveis livres – não corregam dificuldades de entendimento. A noção de par ordenado começa a indicar que há uma condição especial nos indivíduos que satisfaçam as funções sentenciais: eles devem ser 'retirados' da classe de origem *primeiro um, depois o outro*, seguindo uma *ordem*, mantendo uma *ordem*. Lemos em Kirkham (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.220):<sup>147</sup>

<sup>146</sup> Então existe a classe dos homens cegos, por exemplo, cujos indivíduos não podem satisfazer essa função sentencial. A nota 125 adiante se refere a um estudo de Kirkham onde ele substitui "ver" por "amar", para explicar os problemas de uma relação diádica quantificada.

<sup>147</sup> Kirkham está preferindo substituir as variáveis por objetos reais do mundo, mas podemos tranquilamente continuar a entender que se trata de substituir variáveis por classes de objetos – que podem ser re-

“E quanto à sentença aberta “x ama y”? Devemos dizer que a mesa satisfaz essa sentença quando ela ama a si mesma? Ou, ao contrário, devemos dizer que somente um conjunto com dois objetos pode satisfazer uma sentença aberta com duas variáveis? E se mantivermos essa última afirmação, sob que circunstâncias a mesa e a cadeira vão satisfazer “x ama y”. Devem ambas amar uma a outra, ou é necessário apenas que uma delas ame a outra, e, se for assim, qual deve amar qual? Foi esse tipo de questão que levou Tarski a recorrer a sequências de objetos (1933, 191).”

Essa idéia que pareceu tão visível no caso de satisfação de uma função sentencial de duas variáveis livres é a chave para se entender a idéia de satisfatibilidade de um modo geral: trata-se da ferramenta teórica de uma *sequência em condição de satisfazer*, uma *sequência satisfatora*, que aprenderemos no caso seguinte.

### 3.3 Satisfação de uma função sentencial de um número arbitrário de variáveis livres

Tarski abre o caso geral assim:

[p.191]-1

Finalmente passemos ao caso geral, onde a dada função sentencial contenha um número arbitrário de variáveis livres. Para fixar um modo uniforme de expressão a partir de agora não diremos que dados objetos, mas que *uma dada sequência infinita de objetos satisfaz uma dada função sentencial*.

Essa exigência no modo de escrever (de *dizer*) fixa fortemente que não são os dados objetos que satisfazem a função sentencial em questão, mas sim que são *esses objetos colocados em certa ordem*.<sup>148</sup> A esses objetos ordenados Tarski chama *sequência*. Daí que quem satisfará a função sentencial não serão os indivíduos de uma classe, mas a *sequência* que contém esses indivíduos. Já aprendemos isso no comentário ao trecho [p.171]-3, e podemos acrescentar – para melhorar a compreensão – o que Kirkham (KIRKHAM, R. L.; [2008], pp.220-221) exemplifica:

---

ais, – no caso a classe que contém mesas e a classe que contém cadeiras (sejam uma única de cada, algumas ou infinitas mesas e cadeiras). Lembrando, novamente, que Kirkham designa função sentencial por *sentença aberta*.

<sup>148</sup> A estrutura de escrita de uma sequência já foi apresentada por Tarski nos trechos [p.171]-2 a [p.172]-3.

“Quando mudamos a ordem dos objetos numa sequência, mudamos a sequência. Note-se que sequências, assim como conjuntos, podem ser infinitas em tamanho (p. ex., a sequência dos números naturais) e podem ter objetos abstratos como elementos. Note-se também que um objeto pode aparecer mais de uma vez em uma sequência. Assim, também podemos ter as seguintes sequências:

□ mesa, cadeira, democracia, mesa, Bulgária,... □

□ mesa, mesa, mesa, mesa,... □

Quando Tarski fala de *todas* as sequências infinitas, ele quer aí incluir essas sentenças de aparência engraçada também. Finalmente, não há limites para a ordem em que os objetos podem aparecer. Assim, para todos os objetos no mundo, e cada possível ordenamento deles, existe alguma sequência que tem exatamente *aquele* ordenamento.”

Começamos a perceber a força que essa ferramenta teórica começa a mostrar.

[p.191]-1

Se restringirmo-nos às funções do cálculo de classes, então o estabelecimento de uma explanação não-ambígua dessa expressão é facilitado pelo fato de que todas as variáveis que ocorrem na linguagem dessa ciência estão ordenadas (enumeradas) em uma sequência.

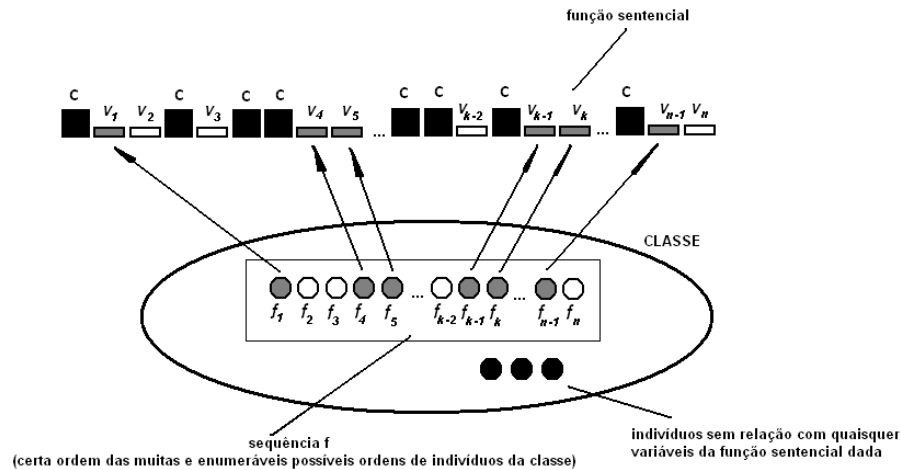
Que as variáveis estão em uma sequência dentro da função sentencial aprendemos em [pp.171-172]. Então, o exemplo mais forte de sequência pode ser conseguida da classe das variáveis da linguagem  $L$ . Elas já estão ordenadas pela sequência dos números naturais. O modo de entendermos a correspondência Tarski explica como segue:

[p.191]-2

Em consideração à questão de quais sequências satisfazem uma dada função sentencial, sempre teremos em mente uma correspondência *uni-multi* de certos termos de uma sequência  $f$  com as variáveis livres de função sentencial, onde a cada variável corresponde o termo da sequência com o mesmo índice (i.e o termo  $f_k$  corresponderá à variável  $v_k$ ).

O que Tarski entende como relação *uni-multi* (um-para-muitos) é o que se estudou em [p.171]-3 e [pp.171-172]: é o modo de relacionar o conjunto dos números naturais e um símbolo (que pode ser de variável – como ficou mais fixado nesses trechos [p.171]-3 e [pp.171-172] – ou daquilo que vier a substituir a variável, como os indivíduos ou classes nas sequências que vierem a satisfazer a função sentencial dada).

Ele está querendo dizer que é possível enumerar os termos de uma sequência. Podemos visualizar o que Tarski está querendo dizer com essa *satisfação* no diagrama da figura 17.1:



**Figura 17.1:** satisfação de uma função sentencial pelos indivíduos correspondentes colocados em sequência. No diagrama, os retângulos brancos correspondem a variáveis ligadas e os quadrados negros a constantes (símbolos não-lógicos).

No diagrama vemos que os indivíduos da classe desses indivíduos (os indivíduos podem ser subclasses dessa classe – seria uma ‘classe de classes’ –, isto é, podem denotar classes de vários indivíduos ou de outras subclasses) foram organizados na sequência  $f$ , conforme o número de variáveis da função sentencial em questão (arbitrariamente dada, no caso). Há uma quantidade enumerável de sequências possíveis dos mesmos indivíduos da classe, mas só interessa a sequência  $f$  onde os indivíduos *estejam em uma ordem que considere a ordem das variáveis livres da função sentencial em questão*. Na sequência, o 1º termo satisfaz a variável  $v_1$  da função sentencial; o mesmo para a próxima variável livre na sequência de variáveis dentro da função sentencial dada, no caso:  $v_4$  – o 4º termo satisfaz essa variável – e assim por diante. Sempre existe uma ordem dos indivíduos da classe que dá uma sequência em que um termo corresponde à variável livre de mesmo índice. Lembremos que os termos distinguem-se pelos índices, mas o indivíduo pode ser o mesmo e o indivíduo denotado por  $f_4$ , por exemplo, pode ser o mesmo denotado por  $f_k$  (pois a sequência admite que termos distintos denotem o mesmo indivíduo). As variáveis ligadas na função sentencial (retângulos brancos no diagrama da figura 17.1) não têm correspondência com a qualquer termos da sequência, pois a se-

quência foi construída para satisfação de *variáveis livres*<sup>149</sup>. Nem as constantes são levadas em conta (não correspondem a termos da sequência): a única coisa que importa é a sucessão – respeitando a ordem – das variáveis tendo correspondência apenas para as livres (pois há variáveis livres e ligadas intercaladas, e precisamos manter a ordem de todas as variáveis, apesar de só haver correspondência para as livres).

Insistentemente, *sempre existe uma sequência dos indivíduos da classe onde um termo corresponde a uma variável livre de mesmo índice*. Obviamente, há uma quantidade muito grande, enumerável e infinita de sequências possíveis a partir dos mesmos indivíduos de uma classe (lembrando que esses indivíduos podem ser subclasses).

Os casos das variáveis ligadas e das constantes presentes na função sentencial poderiam dar margem à discussão de existirem símbolos na linguagem (a linguagem de fato pode ser entendida como *a classe dos símbolos capazes de constituir funções sentenciais*) que satisfaçam as condições exigidas pelas funções não-lógicas das constantes e lógicas das variáveis ligadas. Porém, na linha de interpretação seguida por Tarski, entender as coisas assim não seria conveniente e por isso Tarski não pretende discutir o assunto:

[p.191]-3

Nenhuma consideração será dada a respeito dos termos que não tem correlação com qualquer variável.<sup>1</sup>

O índice 1 nesta página do trecho [p.191]-3 é indicador de uma *nota de rodapé 1* onde Tarski faz um brevíssimo comentário a respeito do problema dos termos da linguagem que não podem ser postos em sequência segundo os critérios que vem sendo estudados:

---

<sup>149</sup> No ‘histórico’ de construção da função sentencial, quando as variáveis ora ligadas ainda não o eram, (seguindo o raciocínio colocado por Tarski) havia sequências para elas, da mesma ou de outra classe distinta desta que é hipoteticamente considerada nesta discussão.

[p.191]-3- nota de rodapé 1

<sup>1</sup> Esta é uma simplificação de natureza puramente técnica. Ainda que não pudéssemos ordenar em uma sequência todas as variáveis de uma dada linguagem (e.g. por causa do uso como variáveis de símbolos de forma arbitrária), poderíamos ainda numerar todos os símbolos, e então numerar todas as variáveis, de toda expressão dada, e.g. na base da ordem natural em que elas se seguem uma à outra na expressão: o símbolo colocado na extrema esquerda pode ser chamado de primeiro, o próximo de segundo, e assim por diante. Desse modo poderemos novamente fixar uma correlação entre as variáveis livres de uma dada função e os termos da sequência. Esta correlação (em contraste àquela descrita no texto) obviamente varia com a forma da função em questão; isso acarretaria complicações muito sérias na formulação da Def. 22 dada abaixo e especialmente das condições ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ).

Se uma linguagem escolhe símbolos arbitrários para representar as variáveis em uma expressão (por exemplo, letras minúsculas do alfabeto), não fica claro a ordem dessas variáveis. A saída seria numerar cada símbolo da linguagem – variáveis e símbolos não-lógicos – como as constantes) e uma sequência  $f$  dos símbolos da linguagem que satisfaria uma função sentencial dada qualquer seria a sequência com a própria forma da função sentencial em questão. O diagrama da figura 17.2 procura traduzir essa descrição:

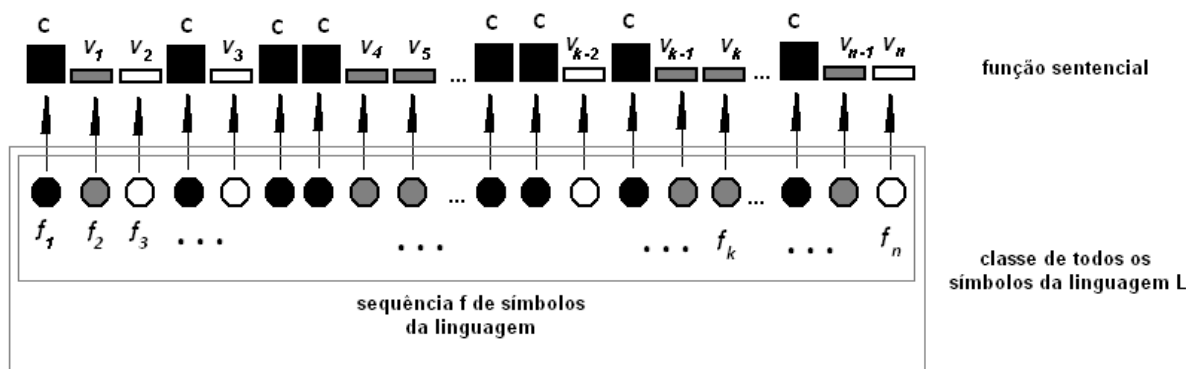


Figura 17.2 – satisfatibilidade de uma função sentencial para quem há correlação de todos os indivíduos (termos) da classe. No caso de exemplo, a classe é a *classe de todos os símbolos da linguagem L*.

No diagrama vemos que na classe enumerável é possível por em ordem (ordem dos números naturais) todos os símbolos da linguagem (ou obter qualquer sequência de qualquer comprimento finito). Dada uma função sentencial da linguagem  $L$ , ela é satisfeita por uma sequência  $f$  que tem a forma idêntica à da função sentencial em questão

(lembrando que os símbolos podem se repetir na sequência, como se repetem na função sentencial, por exemplo,  $f_2$  é o mesmo símbolo  $f_k$  etc.). Essa é uma solução interessante mas pouco prática, porque a sequência varia de forma toda vez que mudamos a função sentencial para outra forma equivalente (porque na nova forma equivalente as ordens das constantes mudam e novas repetições de símbolos se intercalam). Isso dificulta a definição de *sentença verdadeira*, tão querida por Tarski neste artigo que vimos comentando. Daí que Tarski escolhe um processo onde as constantes não são inclusas no processo de correlação.

Retornando ao corpo principal do texto (e encerrando o comentário deste [p.191]-3- *nota de rodapé 1*), vemos que Tarski procura dar um exemplo prático desse processo de satisfatibilidade de uma função sentencial:

[pp.191-192]

É possível explicar melhor o processo por meio de exemplos concretos. Considere a função  $\bigcap_2 \iota_{1,2}$  já mencionada. Esta função contém só uma variável livre  $v_1$ , de modo que consideraremos só os primeiros termos das sequências. Dizemos que a *sequência  $f$  infinita de classe satisfaz a função sentencial  $\bigcap_2 \iota_{1,2}$  se e somente se a classe  $f_1$  satisfaz esta função no sentido anterior, i.e. se para toda classe  $b$ , temos  $f_1 \sqsubseteq b$* . De modo análogo a *sequência  $f$  infinita de classe satisfaz a função sentencial  $\iota_{2,3}$  se e somente se as classes  $f_2$  e  $f_3$  satisfazem esta função no sentido visto, i.e. se  $f_2 \sqsubseteq f_3$* .

Tarski optou por dar um exemplo prático dos dois primeiros casos por ele já apresentados (isto é, *satisfatibilidade de uma função sentencial com uma única variável livre e satisfatibilidade de uma função sentencial com duas variáveis livres*).

**CASO 1.** É o caso da função sentencial  $\bigcap_2 \iota_{1,2}$ . Ela diz que ‘algo’ denotado por  $v_1$  sempre está incluso em toda classe  $b$  (denotada por  $v_2$  universalmente quantificada). Que algo é esse? Sendo uma variável livre, existe uma sequência  $f$  infinita cujo primeiro termo (termo  $f_1$ ) corresponde à variável livre  $v_1$ . Na sequência  $f$  temos que o termo  $f_1$  é uma classe (só classes podem estar inclusas umas nas outras) que está inclusa na classe  $b$ . Por isso “a *sequência  $f$  infinita de classe satisfaz a função sentencial  $\bigcap_2 \iota_{1,2}$  se e somente se a classe  $f_1$  satisfaz esta função (...), i.e. se para toda classe  $b$ , temos  $f_1 \sqsubseteq b$* ” (figura 17.3).

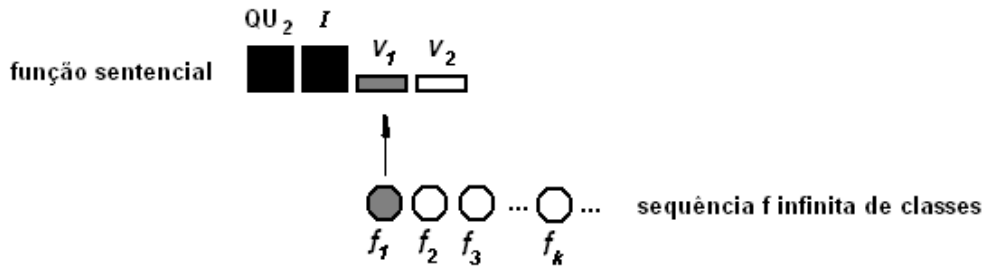


Figura 17.3 – satisfação da função sentencial  $\forall v_2 (I \rightarrow f_1)$ . A classe  $f_1$  (que é o primeiro termo da sequência infinita de classes em condição de satisfazer as variáveis livres da função sentencial) corresponde à variável livre  $v_1$ , e por isso dizemos que  $f_1$  satisfaz  $\forall v_2 (I \rightarrow f_1)$ . O símbolo ‘ $\forall$ ’ indica a quantificação universal da variável  $v_2$ , fazendo-a *variável ligada*, e o símbolo ‘ $I$ ’ indica a constante não-lógica *inclusão*.

**CASO 2.** É o caso da função sentencial  $I \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$ . Do mesmo modo, ‘algo’ (denotado pela variável livre  $v_2$ ) está incluso em outro ‘algo’ distinto (denotado pela variável livre  $v_3$ ). O que são? São as classes  $f_2$  e  $f_3$  de uma sequência  $f$  infinita de classes que satisfaz a função sentencial. Por isso, “a *sequência f infinita de classe satisfaz a função sentencial  $I \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$  se e somente se as classes  $f_2$  e  $f_3$  satisfazem esta função (...), i.e. se  $f_2 \subseteq f_3$ ” (figura 17.4).*

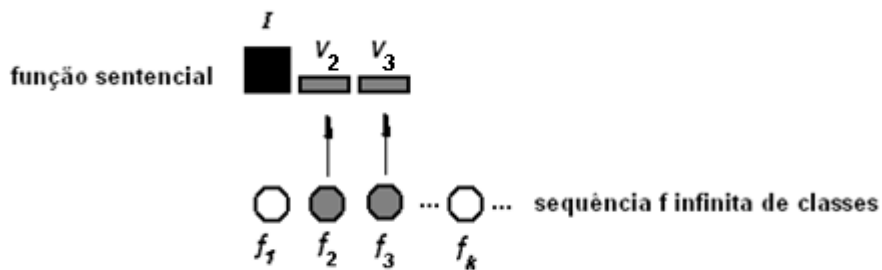


Figura 17.4 – satisfação da função sentencial  $I \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$ . Como no diagrama anterior (figura 17.3), aqui as classes  $f_2$  e  $f_3$  correspondem respectivamente às variáveis livres  $v_2$  e  $v_3$ , e por isso dizemos que  $f_2$  e  $f_3$  satisfazem  $I \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$ .

O modo como esse [pp.191-192] deve ser interpretado é explicado por Tarski como segue:

[p.192]-1

Este processo pode ser descrito em termos gerais como segue.

Consideremos o seguinte esquema:

*f* satisfaz a função sentencial *x* se e somente se *f* é uma sequência infinita de classes, e *p*.

Dada qualquer função sentencial, digamos *s*, do cálculo de classes, substituímos no esquema acima o símbolo ‘*x*’ por um nome (descritivo-estrutural) de *s* construído na metalinguagem; ao mesmo tempo, substituímos todas as variáveis livres  $v_k$ ,  $v_l$ , etc. que ocorrem em *s* pelos correspondentes símbolos ‘ $f_k$ ’, ‘ $f_l$ ’, etc. e substituímos ‘*p*’ no esquema pela expressão assim obtida de *s* (ou por sua tradução na metalinguagem).

A satisfação da função sentencial segue o que vimos na interpretação de [p.190]-1, ocorrendo aqui, porém, uma modificação daquilo que em [p.190]-1 denominamos ‘esquema T-SATISFAÇÃO’. A modificação é a introdução da idéia de uma *sequência f* em condições de satisfazer a função sentencial. Vamos chamar esse esquema modificado de T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL. Seu formato é:

T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL: *f* satisfaz a função sentencial *x* se e somente se *f* é uma sequência infinita de classes, e *p*.

Para usarmos o T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL, precisamos de uma função sentencial *s* e de infinitas classes em condições de substituir a variável livre da função sentencial. Por exemplo, temos a função sentencial *s* que diz algo como ‘*x* é branca’. Podemos escrever isso *s*: *x* é branca. Essa função sentencial quer dizer que toda classe de coisas brancas inclui ‘algo’ e o mesmo ‘algo’, denotado por *x*.

O primeiro passo é escrever *s* no formato de cálculo de classe. Temos algo como  $s: \square x_1(x_k \square x_l)$ , em notação moderna mais usual (em notação polonesa seria  $s: \Pi x_l I x_k x_l$ ), que quer dizer que ‘algo’ (denotado pela variável livre  $v_k$ ) está incluso em todas as classes de coisas brancas (denotado pela variável ligada  $v_l$ ). O passo seguinte é traduzir essa sentença para a metalinguagem e interpretar a tradução. Teremos a tradução ‘ $\prod_l \iota_{k,i}$ ’ e a interpretação *p* tal que *p*: para todo *b*,  $x_k \square b$  (em notação polonesa, a interpretação é *p*: para todo *b*,  $x_k \square b$ ).

Agora precisamos de uma lista infinita de classes. Isso é fácil, pois o universo possui uma quantidade infinita de objetos e uma quantidade infinita de arranjos desses objetos, as mais inusitadas (por exemplo, a ‘classe dos monumentos que indentificam a

França’ ou a classe ‘dos manuscritos da língua glagolítica tombados na Biblioteca Nacional de Viena’). Em especial, temos entre essas infinitas classes uma quantidade enumerável de classes que são todas as classes ‘das coisas brancas’ (essa quantidade enumerável fica estabelecida na função sentencial  $s$  pela variável ligada  $v_l$ ) e temos uma classe de objetos hipotéticos que sempre está inclusa em toda ‘classe de coisas brancas’ (que está estabelecido na sentença  $s$  pela variável livre  $v_k$ ). Ela pode ser uma classe vazia ou não, isso não importa agora.

Em seguida devemos colocar todas essas classes em uma sequência  $f$ . Ora, uma dessas classes, em número infinito delas, é a classe  $f_k$  de objetos hipotéticos que sempre está inclusa em toda ‘classe de coisas brancas’. Por isso, por causa desse  $f_k$  em  $f$ , temos uma sequência  $f$  em condições de satisfazer a função sentencial  $s$ .

Feito isso, podemos usar o esquema T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL, pois a primeira parte do T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL exige assim: ‘ $f$  satisfaz... etc.’, e tal satisfação é possível. Usamos o esquema T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL fazendo as substituições que cabem:

1º) substituir ‘ $x$ ’ por um nome metalingüístico de ‘ $s$ ’: ‘ $x$ ’ se torna ‘ $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_{k,i}$ ’;

2º) substituir ‘ $p$ ’ pela interpretação ‘para todo  $b$ ,  $x_k \square b$ ’.

3º) substituir a variável livre  $v_k$  na interpretação pela classe  $f_k$  que é o  $k$ -ésimo termo da sequência  $f$  infinita de classes;

O resultado final será:

T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL:  $f$  satisfaz a função sentencial  $x$  se e somente se  $f$  é uma sequência infinita de classes, e  $p$ .

SITUAÇÃO SEQUENCIAL-SATISFATÍVEL (substituições):  $f$  satisfaz a função sentencial  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_{k,i}$  se e somente se  $f$  é uma sequência infinita de classes, e para todo  $b$ ,  $f_k \square b$ .

O modo como explicamos aqui esgota as dúvidas de como algoritmicamente proceder para definir a satisfatibilidade de uma função sentencial. Tarski, então passará a definição de satisfatibilidade.

#### 4. Considerações prévias à definição geral de satisfação.

O processo descrito para os casos anteriores são introdutórios para estabelecer uma definição definitiva de satisfatibilidade de funções sentenciais:

[p.192]-2

Usaremos em seguida um método recursivo para formular uma definição geral de satisfação de uma função sentencial por uma sequência de classes, que incluirá como casos especiais todas as definições parciais dessa noção que foram obtidas dos esquemas dados no modo descrito acima.

Essa definição geral será a Definição 22. As definições parciais de satisfação de funções sentenciais são o T-SATISFAÇÃO (ver [p.190]-1) e o T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL (ver [p.192]-1).

[p.192]-3

Para esse propósito será suficiente, tendo em mente a definição de função sentencial, indicar quais sequências satisfazem as inclusões  $I_{k,l}$  e então especificar como as noções que estamos definindo comportam-se quando as três operações fundamentais de negação, disjunção, e quantificação universal estão agindo nas funções sentenciais.

O roteiro estabelecido por Tarski, então, é o de definir satisfação:

- para uma função sentencial onde opera uma inclusão;
- para uma função sentencial onde opera uma negação;
- para uma função sentencial onde opera uma soma lógica (disjunção);
- para uma função sentencial onde opera uma quantificação universal;

Tarski considera que isso basta para esgotar a definição de satisfação de uma função sentencial.

#### 5. Problemas de interpretação da satisfação da função sentencial onde opera o quantificador universal

Tarski assinala que a operação de quantificação universal é a mais problemática para ser interpretada:

[p.192]-4

A operação de quantificação universal reclama uma consideração especial. Seja  $x$  qualquer função sentencial, e assumamos que já sabemos quais sequências satisfazem a função  $x$ . Considerando o significado da operação de quantificação universal, diremos que a sequência  $f$  satisfaz a função  $\bigcap_k x$  (onde  $k$  é um número natural particular) só se essa sequência ela mesma satisfizer a função  $x$  e não cessar de satisfazê-la ainda que o  $k$ -ésimo termo dessa sequência varie de alguma maneira;

No caso,  $x$  pode ser a inclusão  $t_{1,2}$  (como será visto mais adiante no próprio exemplo dado por Tarski). Ocorre aqui que para  $x$  qualquer sequência  $f$  que tenha em si ao menos tantos termos quanto variáveis em  $x$  satisfaz essa função sentencial  $x$  (pois em todas as variáveis de  $x$  estão livres). Já no que se refere a  $\bigcap_k x$ , a variável  $v_k$  de  $x$  está ligada pela quantificação. A sequência  $f$  que satisfizer  $\bigcap_k x$  terá um termo de índice  $k$  que não terá nenhuma correspondência com a variável  $v_k$  de  $x$ . Por isso, esse termo  $f_k$  pode ser qualquer classe de qualquer coisa (coisas comuns, coisas raras, coisas bizarras, coisas abstratas, coisas impossíveis etc.), pois é indiferente para  $v_k$ . É óbvio, assim, que  $f$  é uma sequência que poderia satisfazer  $x$  (pois em  $x$  temos  $v_k$  livre) quando o  $f_k$  fosse uma classe que correspondesse a  $v_k$ . Nesse caso,  $f = f'$  e obrigatoriamente  $f_k = f'_k$ . Mas quando se tem  $\bigcap_k x$ , ocorre que  $f_k$  varia (ou entre alguns indivíduos ou classes, ou entre infinitos indivíduos ou classes), pois isso é indiferente para a  $v_k$  ligada e só em uma dessas variações encontramos  $f = f'$ . Por isso Tarski entende que “ $f$  satisfaz a função  $\bigcap_k x$  (onde  $k$  é um número natural particular) só se essa sequência ela mesma satisfizer a função  $x$  e não cessar de satisfazê-la ainda que o  $k$ -ésimo termo dessa sequência varie de alguma maneira”.

Podemos entender isso como um estudo de *função sentencial ‘primeira’* e *função sentencial ‘segunda’*, por exemplo, em um estudo a respeito do ‘histórico’ de construção de uma função sentencial como, por exemplo,  $\bigcap_2 t_{1,2}$ . O diagrama da figura 17.5 mostra como, antes da função sentencial  $\bigcap_2 t_{1,2}$  ligar a variável  $v_2$ , essa variável era livre, isto é, tínhamos a função sentencial  $t_{1,2}$ . A quantificação universal de  $v_2$  ligou-a e por isso na sequência ‘segunda’, em condições de satisfazer  $\bigcap_2 t_{1,2}$ , o termo de *índice 2* pode variar indefinidamente e indiferentemente para  $v_2$  ora ligada. Pode-se visualizar isso pelo diagrama da figura 17.5:

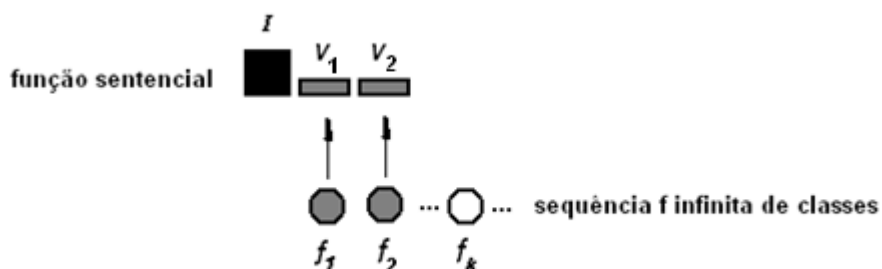


Figura 17.5 – Originalmente, antes de qualquer variável livre da função sentencial sofrer quantificação, os primeiros termos da sequência  $f$  correspondiam, cada um por sua vez, a cada uma das variáveis de função sentencial  $v_{1,2}$

No diagrama vemos como a sequência  $f$  satisfaz a função  $I_{1,2}$ . Se uma dessas variáveis livres for quantificada (por exemplo,  $v_2$ ), uma sequência  $f$  nova que satisfaça função sentencial quantificada para  $v_2$  poderá diferir da sequência  $f$  antiga no segundo termo de maneira indefinida. Isso pode ser visualizado no diagrama da figura 17.6:

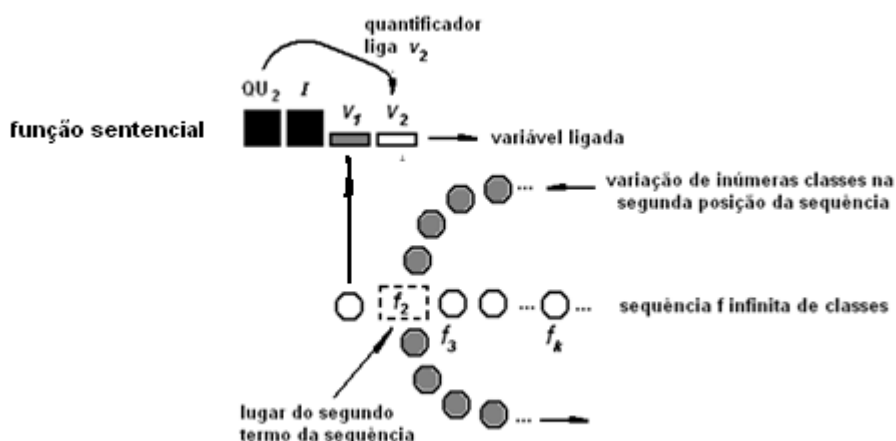


Figura 17.6 – Existe uma sequência  $f$  infinita de classes onde o primeiro termo corresponde a  $v_1$  na função sentencial 'primeira', mas esse primeiro termo varia. Como o anterior, será ligada (e então se tornará sentença) por uma quantificação universal.

Entendamos que a sequência  $f$ , então, satisfaz a função sentencial proposta (que chamamos de 'primeira'), em metalinguagem  $\bigcap_2 I_{1,2}$ , mesmo quando  $f_2$  varie de alguma maneira (figura 17.6).

[p.192]-5  
em outras palavras, se toda sequência que difira da sequência dada no máximo na  $k$ -ésima posição também satisfaça a função.

Isto é, a sequência  $f$  satisfaz a função  $\prod_k x$  se toda sequência que difira da sequência  $f$  dada no máximo na  $k$ -ésima posição também satisfaça a função.

Isso inaugura outra idéia nova, motivada pela quantificação universal: uma quantidade enumerável de sequências  $f$ , distintas na  $k$ -ésima posição, satisfaz a função sentencial se pelo menos uma delas satisfizer. É como se cada nova classe introduzida pelo ‘carrossel’ esquematizado na figura 17.5 criasse uma nova sequência – em associação com os outros termos já existentes – em condição também de satisfazer a função sentencial. Podemos substituir o ‘carrossel’ no diagrama e imaginar a quantidade enumerável de sequências (figura 17.7):

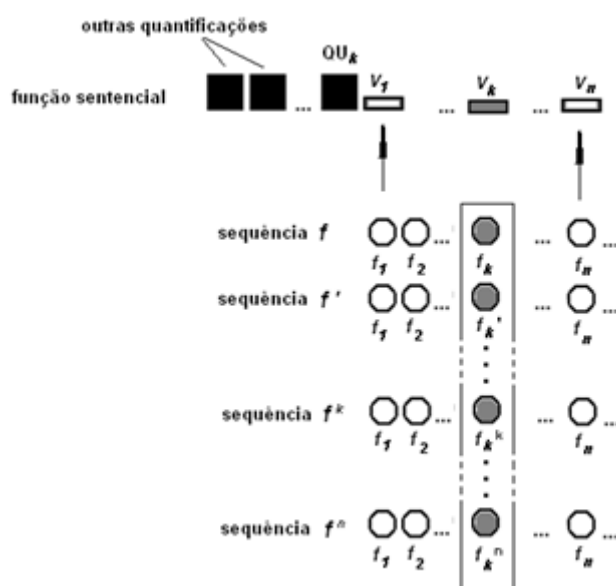


Figura 17.7 – As sequências  $f$  são todas idênticas, exceto na  $k$ -ésima posição, e todas satisfazem a função sentencial.

Fica entendido, então, que para satisfação da função sentencial  $\prod_k x$  há enumeráveis sequências  $f$  distintas na  $k$ -ésima posição, Kirkham (KIRKHAM, R. L.; [2008], pp.222-223.) resume assim o que discutimos no [p.192]-4 e [p.192]-5:

“(…). Como, então, uma sequência satisfaz uma sentença quantificada? (...) Tarski... [estabelece] ... duas condições que devem ser atendidas para que uma sequência, digamos, a sequência  $S$ , satisfaça uma sentença universalmente quantificada como  $(x_4)$  ( $x_4$  é redondo):

1.  $S$  deve satisfazer a sentença aberta que seria criada ao se suprimir o quantificador. Assim, nesse caso, ela deve satisfazer “ $x_4$  é redondo”. (Assim, seja qual for o objeto que  $S$  tiver na quarta posição, ele deve ser redondo.)
2. Essa mesma sentença aberta deve também ser satisfeita por *toda* sequência que é exatamente como  $S$ , exceto pelo fato de que tem um objeto diferente na quarta posição.”

Tarski exemplifica como segue:

[p.192-193]  
Por

exemplo, a função  $\bigcap_2 t_{1,2}$  é satisfeita por aquelas, e só aquelas, sequências  $f$  para as quais  $f_1 \sqsubseteq f_2$  vale sem considerar o modo como o segundo termo daquela sequência varie (como se vê facilmente, isto só é possível quando o primeiro termo é a classe nula).

Existem inúmeras sequências  $f$  infinitas que satisfazem  $\bigcap_2 t_{1,2}$ , mas em todas o primeiro termo  $f_1$  é o mesmo: a classe vazia (classe nula). Já  $f_2$  pode assumir a forma de uma classe diferente em cada uma das sequências que satisfazem  $\bigcap_2 t_{1,2}$ , conforme aprendemos dos diagramas das figuras deste capítulo.

No caso do exemplo escolhido por Tarski, só a classe nula (conjunto vazio) cumpre essa tarefa de estar inclusa em todas as outras classes. Tarski encerra esses comentários a respeito da satisfação de funções sentenciais onde operam quantificações universais dizendo ser o bastante para se ter um entendimento da definição de satisfatibilidade:

[p.193]-1

Após estas explanações o entendimento da definição seguinte não será difícil.

Então Tarski passa finalmente à definição de satisfatibilidade.

## 6. Definição de satisfatibilidade.

Uma definição geral de *satisfatibilidade* é a que segue:

[p.193]-2

DEFINIÇÃO 22. A seqüência  $f$  satisfaz a função sentencial  $x$  se e somente se  $f$  é uma seqüência infinita de classes e  $x$  é uma função sentencial e se  $f$  e  $x$  são tais que ou ( $\alpha$ ) há números naturais  $k$  e  $l$  tais que  $x = \iota_{k,l}$  e  $f_k \subseteq f_l$ ; ( $\beta$ ) há uma função sentencial  $y$  tal que  $x = y \square$  e  $f$  não satisfaz a função  $y$ ; ( $\gamma$ ) há funções sentenciais  $y$  e  $z$  tais que  $x = y + z$  e  $f$  ou satisfaz a  $y$  ou satisfaz a  $z$ ; ou, finalmente, ( $\delta$ ) há um número natural  $k$  e uma função sentencial  $y$  tal que  $x = \bigcap_k y$  e toda seqüência infinita de classes que difere de  $f$  no máximo na  $k$ -ésima posição satisfaz a função  $y$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> A definição normal, que é equivalente à recursiva acima, é como segue (cf. pp. 177, 180, e 182);

*A seqüência  $f$  satisfaz a função sentencial  $x$  se e somente se temos  $fRx$  para toda relação  $R$  que satisfaça a seguinte condição:*

*Para qualquer  $g$  e  $y$ , para que  $gRy$  é necessário e suficiente que  $g$  seja uma seqüência infinita de classes,  $y$  seja uma função sentencial e ou ( $\alpha$ ) há números naturais  $k$  e  $l$  tais que  $y = \iota_{k,l}$  e  $g_k \square g_l$  ou ( $\beta$ ) há uma função sentencial  $z$  tal que  $y = z \square$  e a fórmula  $gRz$  não vale; ou ( $\gamma$ ) há funções sentenciais  $z$  e  $t$  tais que  $y = z + t$  e  $gRz$  ou  $gRt$ ; ou finalmente ( $\delta$ ) há um número natural  $k$  e uma função sentencial  $z$  tais que  $y = \bigcap_k z$  e  $hRz$  para toda seqüência infinita de classes que é distinta de  $g$  no máximo na  $k$ -ésima posição.*

A Definição 22 é uma generalização do esquema T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL (ver [p.192]-1), onde as cláusulas ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ) são as interpretações que substituem  $p$  no T-SATISFAÇÃO SEQUENCIAL. Por isso passemos aos comentários às cláusulas (antes: a *nota de rodapé 1* a este trecho [p.193]-1 dá a definição normal de satisfatibilidade, denotando a satisfação da função sentencial por uma relação  $R$  da seqüência  $g$  para a função sentencial  $x$  – em símbolos,  $gRx$  – e para todas as cláusulas a natureza da definição é a mesma, exceto pela simbologia):

**Cláusula ( $\alpha$ ).** Operação de inclusão. Se  $f_k \subseteq f_l$  então há uma seqüência  $f$  que satisfaz a função sentencial  $\iota_{k,l}$ .

SITUAÇÃO SEQUENCIAL-SATISFATÍVEL (para cláusula ( $\alpha$ )):  *$f$  satisfaz a função sentencial  $\iota_{k,l}$  se e somente se  $f$  é uma seqüência infinita de classes, e para qualquer  $v_1$  e  $v_2$ ,  $f_k \square f_l$ .*

**Cláusula ( $\beta$ ).** Operação de negação. A seqüência que satisfaz uma função sentencial  $x$  não pode satisfazer a negação de  $x$ .

ANTI-SITUAÇÃO SEQUENCIAL-SATISFATÍVEL (para cláusula (b)): *f não satisfaz a função sentencial y se e somente se f é uma seqüência infinita de classes, e f satisfaz x e  $x = y$* □.

**Cláusula ( $\gamma$ ).** Operação de soma lógica (disjunção). Uma vez que uma função sentencial composta pode ser obtida a partir de funções sentenciais simples, se *f* satisfaz *x* e *x* for composta das simples *y* e *z* por soma lógica, então ou *f* satisfaz *y* ou satisfaz *z*.

SITUAÇÃO SEQUENCIAL-SATISFATÍVEL (para cláusula ( $\gamma$ )): *f satisfaz a função sentencial x se e somente se f é uma seqüência infinita de classes, e  $x = y+z$  e f satisfaz ou y ou z* (se satisfazer ambas, está se recaindo no caso universal que é assunto da cláusula ( $\delta$ ))

**Cláusula ( $\delta$ ).** Operação de quantificação universal. Não precisamos nos estender nesta cláusula além do que já foi vastamente comentado anteriormente para os trechos [p.192]-4 até [pp.192-193].

SITUAÇÃO SEQUENCIAL-SATISFATÍVEL (para cláusula ( $\delta$ )): *f satisfaz a função sentencial x se e somente se f é uma seqüência infinita de classes, e  $x = \bigcap_k y$  e toda seqüência infinita de classes que difere de f no máximo na k-ésima posição satisfaz a função y.*

## 7. Exemplificação e conclusão

Os exemplos que Tarski oferece para tornar mais clara a Definição 22 veremos nos comentários que se seguem. Primeiro, a satisfação de uma inclusão:

[p.193]-4

O que segue são exemplos da aplicação da definição acima a funções sentenciais concretas: a seqüência infinita *f* satisfaz a inclusão  $t_{1,2}$  se e somente se  $f_1$  □  $f_2$ ,

Aplica-se a cláusula ( $\alpha$ ). Trata-se do mesmo caso estudado no [pp.191-192] para  $t_{2,3}$ , e dispensam-se então aqui demais comentários.

[p.193]-5

e a função  $\overline{t_{2,3}} + \overline{t_{3,2}}$  se e somente se  $f_2 \neq f_3$ ;

Aplicam-se as cláusulas ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ). O exemplo quer dizer que somente se  $f_2 \neq f_3$  é que se pode dizer que se a *classe b* está inclusa na *classe c*, então a *classe c* não está inclusa na *classe c* (em linguagem moderna mais usual,  $\neg(v_2 \sqsupset v_3) \sqsupset \neg(v_3 \sqsupset v_2)$  que, utilizando-se o símbolo de implicação material – conhecido mas não definido aqui neste trabalho, mas útil para aumentar nossa compreensão, – pode ser escrito na forma  $(v_2 \sqsupset v_3) \rightarrow \neg(v_3 \sqsupset v_2)$ ).

[p.193]-6

as funções  $\bigcap_2 t_{1,2}$  e  $\bigcap_2 t_{2,3}$  são satisfeitas por aquelas, e só por elas, seqüências  $f$  nas quais  $f_1$  é a classe nula e  $f_3$  a classe universal (i.e. a classe de todos os indivíduos) respectivamente;

Aplicam-se as cláusulas ( $\delta$ ) e ( $\alpha$ ). A variável ligada  $v_2$  corresponde a todas as classes que contenham ao menos um indivíduo, mas não a totalidade dos indivíduos, pois se encontra entre  $v_1$  que corresponde ao conjunto vazio e  $v_3$  que corresponde ao conjunto-universo.

[p.193]-7

finalmente,

toda seqüência infinita de classes satisfaz a função  $t_{1,1}$

Aplica-se a cláusula ( $\alpha$ ). De fato, toda classe inclui a si própria (todo conjunto é subconjunto de si próprio).

[p.193]-8

e nenhuma seqüência é tal que satisfaça a função  $t_{1,2} + \overline{t_{1,2}}$ .

Isto é, a contradição não pertence ao cálculo de primeira ordem. Veja o comentário ao trecho [p.186]-4, apesar do que se lê nos trechos [p.186]-5 e [p.186]-6.

Tarski encerra a discussão sobre a satisfatibilidade. O seu uso permitirá alcançar o ponto de chegada do trabalho de Tarski, objeto de estudo deste artigo que vimos comentando: a definição de sentença verdadeira, assunto dos próximos capítulos.

## CAPÍTULO 12

### CONOTAÇÃO E DEFINIBILIDADE

Chegamos na parte central do trabalho de Tarski. Agora ele atinge seu objetivo inicial, que era uma definição de sentença verdadeira. Chegar aqui, no entanto, exigiu a tarefa de localizar grandes áreas dentro dos estudos da linguagem, a área das linguagens naturais e a área das linguagens formalizadas. Tarski desistiu de fazer qualquer definição de sentença verdadeira dentro das linguagens naturais, pois por mais que cercasse de cuidados a linguagem natural, seus nomes, os significados dos nomes, etc, ainda assim era possível recair dentro de situações como o Paradoxo do Mentiroso. A outra área poderia ser promissora, então.

Na área das linguagens formalizadas, Tarski inaugura o conceito de metalinguagem: a linguagem objeto deve ser descrita por uma metalinguagem. A partir daí, de definições a respeito da linguagem construídas dentro da metalinguagem *talvez* fosse possível definir uma sentença verdadeira da linguagem.

Este capítulo e o próximo tratam deste objetivo alcançado.

O grande projeto de Tarski não foi criar a metalinguagem, ou a definição de verdade para as linguagens de primeira ordem, ou a desqualificação por ora das linguagens naturais, mas sim captar com maior clareza e distinção aquela noção aristotélica de verdade. O próprio Tarski insistirá nesse ponto<sup>150</sup>. Podemos dizer que Tarski parte da idéia de que as sentenças são verdadeiras se equivalem ao que de fato é descrito por essas sentenças. Assim, conjugando a definição de Aristóteles com a interpretação de Tarski, temos:

Sentenças (denotadas por seus nomes) verdadeiras  $\square$  fatos

---

<sup>150</sup> Além do próprio artigo *Concept of truth in formalized languages* (TARSKI, A.; [1983b]) que parte do ponto de vista aristotélico, também em *A Concepção Semântica da Verdade e os Fundamentos da Semântica* (TARSKI, A.; [1990]), que é um resumo do primeiro artigo, também o ponto de vista aristotélico é citado como motivador.

‘A é B’ (‘A é B’ é o nome da sentença *A é B*)<sup>151</sup> é verdadeira  $\square$  A é B

‘A não é B’ é verdadeira  $\square$  A não é B

‘A é B’ é falsa  $\square$  A não é B

‘A não é B’ é falsa  $\square$  A é B.

Apesar de Tarski fazer uma ligação de equivalência entre os fatos e o que se diz dos fatos, há muitas questões filosóficas envolvidas para se garantir que tal equivalência seja de fato. Não vamos aqui construir toda uma teoria a respeito das relações entre as idéias de Aristóteles e as de Tarski a respeito das sentenças e do que elas descrevem. Um instrutivo trabalho a esse respeito é o artigo *Nota sobre o Conceito Aristotélico de Verdade*, do prof. Balthazar Barbosa Filho, do qual destaco o seguinte interessante trecho para situar a relação problemática entre as interpretações de Tarski e Aristóteles (FILHO, B. B.; [2003], 234-236):

“É conveniente começar por uma lembrança sumária da noção aristotélica de verdade. Em termos estritos, não se trata de uma definição nem de uma teoria, mas, antes, de um critério de adequação material que qualquer definição ou teoria deve satisfazer como condição inicial de plausibilidade. No capítulo 7 do livro Gama da *Metafísica*, Aristóteles caracteriza a verdade assim: “Dizer do que é que ele não é e do que não é que ele é, é o falso; dizer do que é que ele é e do que não é que ele não é, é o verdadeiro” (1011b26-27). Essa apresentação é retomada no capítulo 10 do livro Teta, no capítulo 12 das *Categorias* e no capítulo 9 do *Da Interpretação*. Convém citar o texto das *Categorias*, que parece o mais explícito e o mais completo para os propósitos deste estudo:

Se, com efeito, o homem existe, a proposição pela qual nós dizemos que o homem existe é verdadeira; e, reciprocamente, se a proposição pela qual nós dizemos que o homem existe é verdadeira, o homem existe. Contudo, a proposição verdadeira não é de modo algum causa da existência da coisa; ao contrário, é a coisa que parece ser, de algum modo, a causa da verdade da proposição, pois é da existência da coisa ou da sua não existência que dependem a verdade ou a falsidade da proposição. (14b16-23)

---

<sup>151</sup> Porque usar o nome da sentença aqui? Porque não podemos predicar a verdade à sentença, o que seria o mesmo que predicar a verdade dentro da linguagem *L*. Só podemos predicar a verdade na metalinguagem *L'* e na metalinguagem não existe a sentença, mas os nomes dela (seja descritivo-estrutural, seja uma tradução em símbolos metalingüísticos).

“Esse texto apresenta duas teses. Primeiro, a convertibilidade ou a reciprocidade do ser e do verdadeiro, isto é, tudo que podemos dizer das coisas podemos dizê-lo igualmente falando das proposições verdadeiras correspondentes. *A voce ad rem*: se um enunciado é verdadeiro, a coisa é; e *a re ad vocem*: se a coisa enunciada é, o enunciado é verdadeiro. Poder-se-ia daí concluir, precipitadamente, a equivalência do verdadeiro e do ser. Teríamos então a fórmula de Tarski: a proposição “a neve é branca” é verdadeira se e somente se a neve é branca. Mas seria um erro, pois há, justamente, uma segunda tese no texto citado, a saber, a prioridade do ser sobre o verdadeiro. Não é a verdade do enunciado que é causa da realidade; é, ao contrário, a realidade que é causa da verdade do enunciado. Essas duas teses podem ser expressas em termos escolásticos: a primeira torna-se *ens et verum convertuntur* e a segunda, *veritas sequitur esse rerum*.

“Na expressão simplificada e informal de seu artigo célebre de 1933 (“A concepção semântica da verdade”), Tarski menciona Aristóteles muitas vezes, dizendo que seu conceito de verdade não é mais do que uma versão rigorosa e formal da concepção aristotélica. Em linhas gerais, pode-se dizer que o conceito tarskiano formaliza, com os recursos da lógica de Frege, a primeira característica da noção aristotélica de verdade. Ela pode ser expressa em duas etapas: (1) Se a proposição que diz que está chovendo é verdadeira, então está chovendo (passamos do lógico ao real). (2) Se está chovendo, então a proposição que diz que está chovendo é verdadeira (passamos do real ao lógico). Dadas as duas transições, segue-se a equivalência do ser e da verdade ou, em termos tarskianos: a proposição “p” é verdadeira se e somente se p.”

Não vamos decidir agora se essa equivalência é ou não é de fato, porém fica citada a questão e o aviso de que até nenhum comentário pôs uma pedra basilar sobre o assunto. Susan Haack (HAACK, S.; [1978], p.156) informa que:

“A teoria de Tarski tem a distinção de ter sido criticada tanto por dizer muito pouco:

a neutralidade de Tarski com respeito às teorias filosóficas da verdade competidoras é suficiente para demonstrar sua falta de relevância filosófica. (Black, 1948, p.260)

quanto por dizer demais:

a teoria de Tarski... pertence à análise factual, em vez da conceitual... A teoria de Tarski possui muito conteúdo, enquanto que uma análise conceitual correta da verdade tem muito pouco. (Mackie, 1973, p.40)

“A questão da importância filosófica da Teoria de Tarski é, evidentemente, uma questão difícil”

Muitos foram os pensadores que se puseram em linha para dar uma solução ao problema de posicionar Aristóteles e Tarski. Donald Davidson, Karl Popper, Wilfred Sellars, Mark Platts, Hartry Field, A. J. Ayer (estes dois últimos parcialmente) querem pô-los em acordo, enquanto Mackie, Herbert Keuth, Gerald Vision (este último parcialmente) querem opô-los (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.242). Susan Haack mesma pretende resolver o problema opondo-os (HAACK, S.; [1978], p.156), mas Kirkham (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.243) critica sua solução e quer concordá-los.

Há muito a respeito disso e acreditamos que a introdução feita neste livro já aponta com bastante fartura de teses e contra-teses as teorias a respeito da situação da Teoria da Verdade de Tarski. O que nos importa agora é o roteiro seguido por Tarski para construir sua definição de sentença verdadeira, e a ferramenta mais importante é sua noção de satisfação, aprendida no capítulo anterior. Tarski confia que:

[pp.193-194]

O  
conceito já definido é de grande importância para investigações no interior da semântica da linguagem. Com sua ajuda o sentido de uma completa série de conceitos neste campo pode ser facilmente definida, e.g. os conceitos de denotação, definibilidade,<sup>1</sup>

Considerações prévias à definição de sentença verdadeira ainda deverão, então, ser feitas: *denotação*, *definibilidade*<sup>152</sup> e *verdade*. Com esperança de que o ferramental teórico aventado pela definição rigorosa de satisfação possa facilitar definições necessárias à noção de sentença verdadeira, Tarski começara a preparar o terreno da definição de sentença verdadeira definindo antes esses conceitos necessários. Mas o conceito de *verdade* ficará para o próximo capítulo. Vamos nos estender aqui sobre os conceitos de *denotação* e *definibilidade*.

### 1. Conceito de ‘denotação’

---

<sup>152</sup> A nota de rodapé 1 indicada para o conceito de *definibilidade* em [pp.193-194] é longa o bastante para merecer um estudo à parte.

*Denotação* é uma palavra que já vem sendo usada de modo intuitivo tanto por Tarski em seu artigo de 1933 que vimos estudando quanto nos comentários que estamos tecendo a esses artigos.

A maior influência sofrida por Tarski foram as posições de Frege e Russell a respeito da relação entre *denotação* e *referência*. A idéia que cerca a concepção tarskiana de denotação pode ser entendida a partir do seguinte comentário de Susan Haack (HAACK, S.; [1978], p.97):

“Embora a distinção seja originalmente introduzida especificamente para os nomes, ela é estendida para se aplicar aos predicados, e então às sentenças, sob o princípio de que o sentido (referência) de uma expressão composta deve depender do sentido (referência) de suas partes. Assim:

<i>expressão</i>	<i>sentido</i>	<i>referência</i>
nome	próprio	significado do nome objeto
predicado	significado da expressão predicativa	conceito
sentença	proposição	valor de verdade

“A referência de uma sentença deve estar em seu valor de verdade, argumenta Frege, uma vez que se algum componente de uma sentença for substituído por um outro com um sentido diferente, mas com a mesma referência (como ‘A Estrela Matutina é um planeta’/‘A Estrela Vespertina é um planeta’), é o valor de verdade que permanece inalterado. Sempre fortemente anti-psicologista, Frege enfatiza que o sentido, ou significado, de uma expressão deve ser distinguido da idéia que pode acontecer estar associada a essa expressão. Assim, quando ele diz que o sentido de uma sentença é o pensamento (*Gedanke*) que ela expressa, ele quer dizer ‘proposição’, em vez de ‘idéia’. Em contextos ‘oblíquos’ (i.e., contextos intencionais, por exemplo, o discurso indireto), Frege acrescenta que as sentenças possuem não sua referência costumeira, mas uma referência ‘indireta’, sendo a referência direta o sentido costumeiro, i.e., a proposição expressa. Assim, em ‘Tom disse que Mary viria’, a referência ‘Mary viria’ não é seu valor de verdade, mas a proposição de que Mary viria.”

Podemos dizer que Tarski entende a denotação como um símbolo idêntico a um ‘subsímbolo’ do símbolo denotado. Por exemplo, como se fizéssemos o símbolo ‘Z’ de-

notar o símbolo ‘S(Z)’ que pode ser lido ‘sentença que carrega o valor de verdade Z’ (seja lá qual for esse valor de verdade).

## 2. O conceito de ‘definibilidade’

A *definibilidade* foi preocupação de Tarski em seu *On Definable of Real Numbers* (TARSKI, A.; [1983k]), de 1931. Nesse artigo ele entende que os “matemáticos, em geral, não gostam de lidar com a noção de definibilidade”, tratam-na com reserva e desconfiança, mesmo que “as razões para essa aversão seja pouco clara e conhecida” (TARSKI, A.; [1983k], p.110). Então Tarski se propõe um tratamento estritamente matemático da noção de definibilidade, a fim de evitar numerosas contradições, exemplificadas pelo Paradoxo de Richard<sup>153</sup>.

Tarski trabalhara sob modelos estritamente matemáticos e passara da definibilidade para conjuntos de ordem 1 (conjuntos de sentenças onde só haja uma única variável livre) para a definibilidade para conjuntos de ordem  $n$ . Ele consegue essa generalidade na Definição 10 do *On Definable Sets of real Numbers* (TARSKI, A.; [1983k], p.128). Assim, para Tarski, *definibilidade* é condição onde uma função sentencial pode ser satisfeita, isto é, ter condições de ver ligadas suas variáveis livres. Apesar do trata-

---

<sup>153</sup> Em linhas gerais, o Paradoxo de Richard de 1905, devido ao matemático francês Jules Richard, pode ser apresentado assim: seja possível tomar todas as sentenças de uma determinada língua (português, por exemplo) que caracterizam, cada uma, um número inteiro. Depois ordenemos essas sentenças desde as que têm menos letras até as que têm mais letras (caso haja duas ou mais sentenças com a mesma quantidade de letras, coloquemos tais sentenças em ordem alfabética). Feita essa ordenação, associemos a cada sentença da lista sua cardinalidade (isto é, linha-sentença 1, linha-sentença 2, linha-sentença 3 e assim por diante até a  $n$ -ésima sentença). Agora chamaremos de *número não-richardiano* ao número inteiro que, tomado cardinalmente, tenha suas características descritas pela sentença daquela cardinalidade. Por exemplo, suponhamos que a *sentença 17* seja a “número divisível por si mesmo e pela unidade”. Então o número 17 é *não-richardiano*. Já o número 11 é richardiano se a *sentença 11* for “número quadrado perfeito”. Agora vem o paradoxo: suponhamos a  $k$ -ésima sentença “todo número ou é richardiano ou é não-richardiano”. O número  $k$  é richardiano ou não richardiano? Se ele for richardiano, então ele nem é richardiano, nem é não-richardiano e se ele for não-richardiano, então ele é richardiano ou é não-richardiano. Em todos os casos  $k$  ou fere o Princípio de Terceiro Excluído ou não pode ser definido, isto é,  $k$  nem é um número real, nem é complexo, ou é real ou complexo indecidivelmente. Como os cardinais são feitos de números inteiros, não pode existir, neste caso, a *cardinalidade k*, apesar de la existir! Ela existe enquanto não pode existir e, não existindo, existe. Em outras palavras, um sistema richardiano deve admitir a sentença (intuitivamente clara em sua condição de descrever uma propriedade dos números inteiros em um sistema richardiano) “todo número inteiro ou é richardiano ou é não-richardiano” e é essa admissão que impede a criação de um sistema richardiano, o que é paradoxal: admitindo-se, não há o que admitir, e não se admitindo, admite-se. Gödel inspirou-se no Paradoxo de Richard para estruturar seu Teorema da Incompletude.

mento rigorosamente formal, Tarski não perderá o foco da questão (TARSKI, A.; [1983k], pp.128-129): “Agora a questão de saber se *as definições então construídas* (o rigor formal que não levanta objeções) *também são materialmente adequadas*; em outras palavras, *elas de fato compreendem o corrente significado da noção como é intuitivamente conhecida?*” Tarski (TARSKI, A.; [1983k], p.129) responderá afirmativamente:

“Na tentativa de dar a esta questão uma forma mais precisa, vamos supor que a adequação material da definição metamatemática de conjunto definível de ordem  $n$ , (...) está acima de dúvidas. A questão proposta então se reduz ao problema bem concreto (...) nomeadamente o caso onde  $n = 1$ . Este último problema pertence ao domínio da metamatemática e é facilmente resolvido na afirmativa.

“(…), podemos mostrar sem dificuldade pela indução que a família  $D_f$  é exatamente a família dos conjuntos de seqüências que são determinadas pelas funções sentençiais de ordem 1. Segue-se imediatamente que a família  $D$  coincide com aquela dos conjuntos definíveis de ordem 1 (...)”

“Se desejarmos convencer-mo-nos da adequação material da Def. 10 e de sua conformidade com a intuição sem ir além do domínio das considerações estritamente matemáticas, nós podemos recorrer ao método empírico. De fato, examinando vários conjuntos especiais que tem sido definidos aritmeticamente (no sentido intuitivo do termo), nós podemos mostrar que todos eles pertencem à família  $D$ ; Conversamente, para todo conjunto particular dessa família nós estamos aptos a construir uma definição elementar.”

Fica bem caracterizado que *definibilidade* para Tarski envolve sua noção de satisfação e todo aparato teórico que permite a redução dos problemas matemáticos a linguagens de primeira ordem. O projeto tarskiano de definibilidade é estabelecer que *definição é o processo de se obter conseqüências a partir de axiomas*, como podemos aprender de seu artigo de 1934 *Some Methodological Investigations on the Definability of Concepts* (TARSKI, A.; [1983f], p.296):

“Na metodologia das ciências dedutivas dois grupos de conceitos ocorrem que, embora de conteúdos um pouco remotos um do outro, não obstante mostram consideráveis analogias, se nós considerarmos seus papéis na construção de teorias dedutivas, assim como as relações internas entre conceitos dentro de cada um dos próprios grupos.

Ao primeiro grupo pertencem tais conceitos como ‘*axioma*’, ‘*sentença derivável*’, (ou ‘*teorema*’), ‘*regra de inferência*’, ‘*prova*’, para o segundo – ‘*conceito primitivo (indefinido)*’ (ou ‘*termo primitivo*’), ‘*conceito definível*’, ‘*regra de definição*’, ‘*definição*’. Um amplo paralelismo pode ser estabelecido entre os conceitos dos dois grupos: os conceitos primitivos correspondem aos axiomas, os conceitos definidos às sentenças deriváveis, os processos e regras de definição aos processos e regras de prova.”

A *nota de rodapé 1* no trecho [pp.193-194] para *definibilidade* inicia falando da denotação (assunto já bem comentado em *1. Conceito de “denotação”* neste capítulo):

[pp.193-194] – *nota de rodapé 1 (a)*

<sup>1</sup> Dizer que o nome  $x$  denota um dado objeto  $a$  é o mesmo que estipular que o objeto  $a$  (ou toda sequência de que  $a$  é o termo correspondente) satisfaz uma função sentencial de um tipo particular. Em linguagem coloquial seria uma função que consiste de três partes na seguinte ordem: uma variável, a palavra ‘é’ e o dado nome  $x$ .

Não vamos nos deter mais tratando da denotação. Só interpretando a redação de Tarski, ele entende *denotação* como uma função que aplica um predicado a um nome. Assim,  $x$  é denotado pela condição  $a$ . A cópula ‘é’ aplica sobre o nome o predicado caracterizado pela variável.

O restante da nota se dedica à *definibilidade*:

[pp.193-194] – *nota de rodapé 1 (b)*

Com respeito ao conceito de definibilidade, tentarei explicar seu conteúdo só em um caso particular. Se considerarmos quais propriedades de classe tomamos como definíveis (em referência ao sistema de cálculo de classes discutido aqui), nós conseguimos a seguinte formulação:

*Dizemos que a função sentencial  $x$  define a propriedade  $P$  de classes se e só se para um número natural  $k$  ( $\alpha$ )  $x$  contém  $v_k$  como sua única variável livre, e ( $\beta$ ) já que uma sequência infinita de classes pode satisfazer  $x$ , é necessário e suficiente que  $f_k$  tenha a propriedade  $P$ ; dizemos que a propriedade  $P$  de classes é definível se e somente se há uma função sentencial  $x$  que define  $P$ .*

A formulação é aquilo que vimos comentando no [p.194]-2: Tarski entende definibilidade de uma propriedade como a condição de *satisfação de uma função sentencial que define a propriedade*. Seguem-se exemplos dessa formulação:

[pp.193-194] – *nota de rodapé 1 (c)*

Com base nessa estipulação podemos mostrar, por exemplo, que tais propriedades de classes com vacuidade, de continência de um, dois, três, etc., elementos são definíveis.

Então, a condição de um conjunto ser vazio é definível pelo fato de haver o objeto  $\square$  em condições de satisfazer a função sentencial que quer definir a vacuidade do conjunto vazio. O mesmo se diz dos outros conjuntos com um ou mais (mas não infinitos) elementos. No caso de conjuntos com infinitos elementos:

[pp.193-194] – *nota de rodapé 1 (d)*

Por outro lado a propriedade de conter infinitamente muitos elementos não é definível (cf. os apontamentos dados abaixo em conexão com os Teor. 14-16).

Não é definível por não existir uma sequência infinita que satisfaça a função sentencial que descreva a propriedade de infinitude de um conjunto. Tarski já aponta onde será visto os estudos a esse respeito, nos Teoremas 14, 15 e 16.

Um último detalhe técnico é que a definibilidade é um conceito que independe da necessidade da linguagem de fazer definições:

[pp.193-194] – *nota de rodapé 1 (d)*

Será visto que com esta interpretação o conceito de definibilidade não depende de se a formalização da ciência investigada admite a possibilidade de construção de definições. Uma discussão mais exata de definibilidade será encontrada nos artigos VI e XII do presente volume.

O “presente volume” é o *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, de 1983, organizado por Corcoran, de onde tiramos o artigo que vimos comentando. O artigo VI é o *On Definable Sets of Real Numbers* (TARSKI, A.; [1983k]) e o artigo XIII é o *On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories* (TARSKI, A.; [1983l]), de 1935. Em especial neste último artigo XIII Tarski está preocupado com os significados das expressões. Na *nota de rodapé 1* da página 386 desse *On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories* (TARSKI, A.; [1983l], p.386), Tarski escreve:<sup>154</sup>

“As palavras ‘define’, ‘definível’, etc., são usados em dois sentidos distintos: no primeiro sentido é uma questão de relação *formal* de certas expressões para outras expressões da teoria (cf. artigo X do presente trabalho); no segundo sentido, de uma relação *semântica* entre objetos e expressões (cf. artigo VI). Aqui essas palavras são usadas no segundo sentido.”

<sup>154</sup> O ‘artigo X’ citado nesse trecho é o TARSKI, A.; [1983f].

No trabalho que vimos comentando (TARSKI, A.; [1983b]), Tarski está entendendo *definibilidade* no primeiro sentido apontado neste trecho, isto é, como uma *relação formal*.

Não vamos nos deter mais e encerremos o estudo destes dois dos três mais importantes conceitos, na listagem de Tarski, entendíveis – como vimos – do ponto de vista da teoria da satisfação: *denotação*, *definibilidade* e *verdade*. Este último, o conceito de *verdade*, introduzirá no capítulo seguinte a discussão sobre a definição de *sentença verdadeira*.

## CAPÍTULO 13

### DEFINIÇÃO DE SENTENÇA VERDADEIRA

Tarski sabe que o problemático conceito de verdade esta no rol dos mais importantes para seu trabalho. Ele o cita, após os outros anteriores de denotação e definibilidade, como segue:

[p.194]-1

e verdade, com o último dos quais especialmente nos ocuparemos aqui.

A idéia de ‘verdade’, ‘verdadeiro’, permeia todo o artigo de Tarski que vimos comentando e não vamos tentar esgotar o assunto no comentário a este trecho. Só para citar que essa é a posição de todo autor que queira tratar brevemente do assunto, o casal Feferman (FEFERMAN, ANITA & SOLOMON; [2004], p. 109) escreveu:

“A questão de que é verdade se faz presente em todos os momentos da vida: contos infantis, reportagens de jornal, disputas nas cortes de justiça, e testes de teorias científicas. Pode ser muito difícil determinar o que é a verdade em cada situação e é sabido que nem sempre se trata de ser preto-no-branco, já que para a idéia do que é verdadeiro ou falso ordinariamente não se considerar exigir explanação ou análise. Mas tão logo perguntamos a respeito do que são, em geral, as bases de nossa fé ou crenças, a perene questão filosófica “O que é a verdade?” entra no jogo. Muitas teorias têm sido levantadas para responder essa questão. Para mencionar algumas poucas: a teoria da *correspondência* identifica a verdade com o que corresponde aos fatos, a teoria *pragmatista* com aquilo que prova ser útil ao longo do uso, e a teoria *verificacionista* com o que pode ser demonstrado. Cada uma das teses tem sido considerada inaceitável por uma razão ou outra; aquele com mais objeções – a teoria da correspondência – é criticada em seus fundamentos por falhar em suprir satisfatoriamente explicações do que é ‘correspondente’ e do que são ‘fatos’.

“Tarski formula uma versão muito precisa do que ele chama de teoria da verdade por correspondência.”

Aqui vamos situar aquilo que Tarski entende por ‘verdade’.

Quando a edição de 1935 do *Concept of Truth in Formalized Languages* (TARSKI, A.; [1983b]) ficou famoso (foi divulgado amplamente no congresso da *Unidade da Ciência* em Paris, naquele ano) as críticas vieram principalmente de Otto Neurath, cabeça do ‘Círculo de Viena’, cujos membros estavam presentes ao congresso de Paris. A questão era se as concepções semânticas poderiam ser conciliadas com a posição fortemente empirista e antimetafísica do Círculo de Viena, apesar do apoio de Popper e Carnap, membros do Círculo, a Tarski. As críticas aos resultados do *Concept of Truth in Formalized Languages* e à palestra de Tarski que resultaria no *The Establishment of Scientific Semantics* (TARSKI, A.; [1983a]) obrigaram Tarski a responder por meio de seu artigo de 1944, *A Concepção Semântica da Verdade e os Fundamentos da Semântica* (TARSKI, A.; [1990]), onde buscou estabelecer de maneira mais clara aquilo que entende por ‘verdade’ (FEFERMAN, ANITA & SOLOMON; [2004], p. 122.). Tarski prefere que por ‘verdade’ seja entendido uma *adequação material* que vá pela direção vagamente aponta por Aristóteles<sup>155</sup>. Lemos de Tarski (TARSKI, A.; [1990], p.162):

“Parece claro que, se nos basearmos na concepção clássica de verdade, diremos que a sentença é verdadeira se a neve é branca, e que ela é falsa se a neve não é branca. Assim, se a definição de verdade tem de se conformar à nossa concepção, ela deve implicar a seguinte equivalência:

*A sentença ‘a neve é branca’ é verdadeira se, e somente se, a neve é branca.*

“Observemos que a frase ‘a neve é branca’ ocorre do lado esquerdo dessa equivalência entre aspas, e do lado direito, sem aspas. Do lado direito, temos a própria sentença, e do lado esquerdo, o nome da sentença. Empregando a terminologia lógica medieval, poderíamos também dizer que, do lado direito, as palavras ‘a neve é branca’ ocorre sob *suppositio formalis* e, do lado esquerdo, sob *suppositio materialis*.

A respeito dessa interpretação que Tarski faz da verdade, Kirkham (KIRKHAM, R. L.; [2008], p.206-207) comenta muito bem que:

---

<sup>155</sup> A respeito das posições de Aristóteles e de Tarski, ver *CAPÍTULO 12 – CONOTAÇÃO E DEFINIBILIDADE* neste trabalho.

“Para toda sentença da linguagem cuja verdade está sendo explicada, existe uma equivalência na qual a sentença é mencionada do lado esquerdo e utilizada do lado direito. É bastante fácil formular o padrão de todas essas equivalências, e Tarski o faz com uma fórmula que tem sido chamada tanto de “forma T” como de “esquema T” e “convenção T”:

X é verdadeira se, e somente se, *p*

Devemos chamar qualquer equivalência desse tipo (com “*p*” podendo ser substituído por qualquer sentença da linguagem à qual a palavra “*verdadeira*” se refere, e “X” podendo ser substituído pelo nome dessa sentença) uma “*equivalência da forma (T)*”.

Não é difícil ver por que Tarski pensou que uma condição mínima para qualquer teoria adequada da verdade é que ela tenha como consequência todas as sentenças-T (*i.e.*, sentenças que instanciam a convenção T): as sentenças-T são obviamente verdadeiras se tivermos em mente que a equivalência asseverada por uma sentença-T é extensional e não intencional), assim qualquer teoria que seja incompatível com elas seria falsa. (A esse respeito, note-se que se podem aceitar as sentenças-T insistindo-se em que a sentença do lado direito do símbolo “ $\equiv$ ” expresse um estado de coisas *dependente da mente*.) Mas uma teoria da verdade pode ser bastante implausível e ainda assim ser compatível com as sentenças-T (...). Por causa disso, a condição de adequação material de Tarski (...) exige que uma teoria da verdade realmente *implique* as sentenças-T.

O que Kirkham entende por *extensional* e *intencional* é o que se designa usualmente respectivamente por *conotação* e *denotação*. E já citamos mais de uma vez que a posição contrária de Kirkham (KIRKHAM, R.L.; [2008], p.243) à de Haack<sup>156</sup> (HAACK, S.; [1978], p.161). Passemos aquilo que Tarski tem como *conceito de verdade*.

### 1. Conceito de verdade

Tarski inicia sua discussão a respeito do conceito de verdade como segue:

---

<sup>156</sup> Ela acredita que Tarski não pretendeu construir uma teoria da verdade por correspondência.

[p.194]-2

O conceito de verdade é obtido do seguinte modo. Com base na Def. 22 e as considerações intuitivas que a precederam, é fácil ver que uma dada sequência satisfazer ou não uma dada função sentencial depende só daqueles termos da sequência que corresponde (em seus índices) com as variáveis livres da função.

Isso é um resumo bem geral daquilo que já aprendemos. Existe sempre uma sequência que satisfaz uma função sentencial. O processo de satisfação sempre é a correspondência índice-a-índice do *k-ésimo* termo da sequência para a *k-ésima* variável da função sentencial, quando essa é uma variável livre. Que há variáveis livres nas funções sentenciais, isso faz parte da definição de função sentencial. Que o *k-ésimo* termo de uma sequência corresponde à variável livre na *k-ésima* posição dentro da função sentencial, só depende do termo de índice *k* da sequência. Lemos de Azambuja (AZAMBUJA, A.; [2005], p.26):

“A definição de Tarski é considerada uma concepção semântica da verdade porque verdade é definida em termos de satisfação, e esta é considerada uma noção semântica porque é uma relação entre fórmulas e seqüências de objetos. A cláusula de base da definição recursiva de satisfação funciona de modo análogo ao esquema (T): uma seqüência satisfaz a fórmula ‘ $x_i$  é grego’ se, e somente se, o objeto que está na posição correspondente à variável  $x_i$  é grego.”

O fato de a satisfação depender de que o termo de índice *i* (no exemplo de Azambuja) da sequência seja grego, mostra como a satisfação de uma função sentencial não depende só da sequência, mas de uma sequência que tenha os termos certos para corresponder *índice-a-índice* com as variáveis livres da função sentencial.

Há uma situação especial, porém. Ocorre quando uma função sentencial é na verdade uma *sentença*:

[p.194]-3

Então no caso extremo, quando a função é uma sentença, e como tal não contém nenhuma variável livre (que de modo algum está excluído pela Def. 22), a satisfação da função como um todo por uma sequência não depende das propriedades dos termos da sequência.

Em outras palavras, para uma sentença, qualquer sequência serve, pois não há correspondência *índice-a-índice* com as variáveis livres da sentença porque *não há va-*

*riáveis livres*. É isso que separa a verdade da falsidade: verdade é uma satisfação por todas e quaisquer sequências, como explica Haack (HAACK, S.; [1978], p.152.):

“As sentenças fechadas são casos especiais de sentenças abertas, a saber, aquelas sem *nenhuma* variável livre. O primeiro elemento de uma sequência, e todos os elementos subsequentes, é irrelevante para que a sequência satisfaça ou não uma sentença aberta niládica [sem variáveis livres], isto é, uma sentença *fechada*. Assim, Tarski define uma sentença como *verdadeira apenas no caso de ser satisfeita por todas as sequências*, e *falsa apenas no caso de não ser satisfeita por nenhuma*.

Ocorre, então, que uma sentença é verdadeira se qualquer sequência a satisfaz e é falsa se qualquer sentença satisfaz sua negação:

[p.194]-4

Só duas

possibilidades então restam: ou toda sequência infinita satisfaz uma dada sentença, ou nenhuma sequência satisfaz (cf. os Lemas A e B dados abaixo). As sentenças do primeiro tipo, e.g.  $\bigcup_1 t_{1,1}$ , são as *sentenças verdadeiras*; aquelas do segundo tipo, e.g.  $\bigcap_1 \overline{t_{1,1}}$ , podem ser correspondentemente chamadas de *sentenças falsas*.<sup>†</sup>

---

<sup>†</sup> Um método de definição da verdade que é essencialmente equivalente ao método desenvolvido neste trabalho, mas baseado sobre uma idéia diferente, tem recentemente sido sugerido por J. C. C. McKinsey no artigo ‘Uma nova definição de verdade’, *Synthese*, vol. 7 (1948-9), pp. 428-33.

Teremos oportunidade de estudar, a seu tempo, os Lemas citados. A sentença metalingüística  $\bigcup_1 t_{1,1}$  é interpretada ‘para todo  $a$ ,  $a \sqsubset a$ ’<sup>157</sup> e se escreve na linguagem-objeto  $\Pi x, Ix, x$ , em notação polonesa (ou  $\square x_1(x_1 \sqsubset x_1)$ , em linguagem moderna mais usual). Do mesmo modo,  $\bigcap_1 \overline{t_{1,1}}$  é interpretada ‘existe ao menos um  $a$ ,  $a \sqsubset a$ ’.

A *nota de rodapé* † foi posta por Corcoran, que organizou a coletânea dos textos de Tarski (TARSKI, A.; [1983b]), de onde tiramos o artigo que vimos comentando. No artigo citado vemos que a diferença é o não uso, por McKinsey (MCKINSEY, J. C. C.; [1948/1949], p.428), de uma teoria da satisfação:

---

<sup>157</sup> Para saber qual o sentido do símbolo “ $\sqsubset$ ” aqui, ver o QUADRO III no fim do capítulo 7 deste livro.

“Como bem sabemos, Tarski deu em 1933 uma exata e intuitivamente aceitável definição da noção de verdade objetiva. Mostrarei aqui uma nova definição dessa noção. As duas definições parecem ser equivalentes (i.e. dão a mesma classe de sentenças ‘verdadeiras’), mas isto não foi provado formalmente.

“Eu não coloco esta nova definição como um intencional implemento para mais à frente suplantando a definição de Tarski. Como o caso está aberto, cada definição é em algum aspecto melhor do que a outra. A de Tarski é superior em depender bem menos da teoria dos conjuntos do que a minha. A minha própria tem a vantagem de definir verdade sem fazer uso da noção de satisfação da função sentencial por um conjunto de entidades: essa característica é útil se for preciso dar uma definição semântica das noções de necessidade lógica e possibilidade lógica.”

Bem, a base da idéia de Tarski é sua teoria da satisfação. Passemos então, finalmente, à definição mais importante do trabalho de Tarski.

## 2. A definição de *sentença verdadeira*.

A famosa definição de Alfred Tarski é a Definição 23. Tarski a enuncia como segue:

[p.195]-1

DEFINIÇÃO 23.  $X$  é uma *sentença verdadeira* – em símbolos  $x \in Tr$  – se e somente se  $x \in S$  e toda sequência infinita de classes satisfaz  $x$ .<sup>1</sup>

No [pp.187-188] aprendemos a natureza do conjunto  $Tr$  de todas as sentenças verdadeiras. A Definição 23 acima diz explicitamente que pertence a  $Tr$  toda sentença satisfeita por qualquer sequência infinita.

A *nota de rodapé 1* merece ser dividida em partes:

[p.195]-1 – *nota de rodapé 1* (a)

<sup>1</sup> No total da construção acima nós podemos operar com finitas sequências com um número variável de termos no lugar de sequências infinitas.

De fato, se uma quantidade enumerável de sequências infinitas satisfaz a sentença, também ocorre satisfação se a sequência for finita, mas os termos forem variáveis. Funcionaria como o ‘carrossel’ de termos que vimos nos diagramas das figuras 17.5 e 17.6. Se isso é possível, então se faz necessário formalizar essa idéia:

[p.195]-1 – nota de rodapé 1 (b)

Será, então, conveniente generalizar o conceito de sequência finita. Na interpretação usual deste termo, uma sequência que tem um  $n$ -ésimos termo deve também ter todos os termos com índices menores do que  $n$  – devemos agora abandonar este postulado e considerar qualquer relação de muitos-para-um como uma sequência finita se seu contradomínio consistir de um número finito de números naturais distinto de 0.

Usualmente então, uma sequência finita de  $n$  termos pode ser designada por este  $n$ -ésimo termo que ficará subtendido que possui todos os termos de índice abaixo de  $n$ . O problema é que a sequência fica vagamente construída. O termo  $n-1$  é idêntico ao de índice  $n$ ? O fato de ser menor do que  $n$  não garante que seja ou não distinto. Uma forma de estabelecer isso é montar uma relação “muitos-para-um”. Seriam um produto cartesiano onde a abscissa (domínio) tem o símbolo que identifica os termos e na ordenada (contradomínio) os números naturais (ver diagrama da figura 19.1):

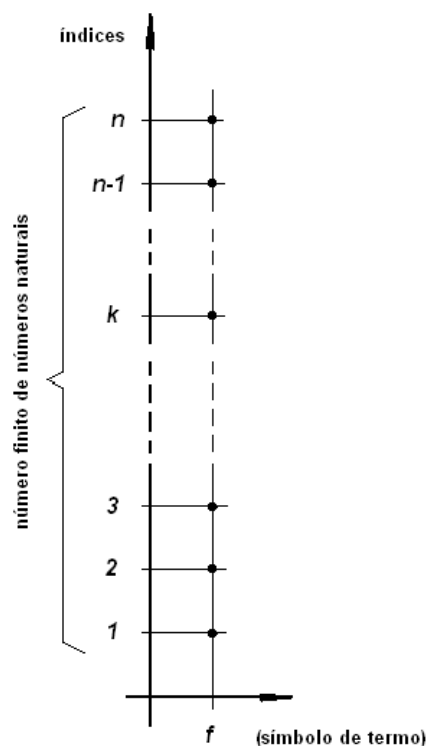


Figura 19.1 – o contradomínio é um número finito de números naturais e o domínio é o símbolo  $f$ , que designa todos os termos de uma sequência.

Fica óbvio, pelo diagrama da figura 19.1 que o conjunto de pares ordenados ( $f$ , *índice*) é finito. Esse conjunto é sequência finita dos pares ordenados, desde o de índice 1 até índice  $n$  (o zero é omitido por não poder fornecer ordinalidade).

[p.195]-1 – nota de rodapé 1 (c)

A modificação da construção consistiria em eliminar da sequência que satisfaz a dada função sentencial todos os termos ‘supérfluos’, que não tem nenhuma influência na satisfação da função. Então se  $v_k, v_l$ , etc., ocorrem como variáveis livres na função (naturalmente em número finito), só aqueles termos com índices  $k, l$ , etc., restariam na sequência que satisfaz a função.

O que Tarski quer explicar é obvio. Imaginemos uma sequência infinita e uma função sentencial com um número finito de variáveis, algumas das quais são livres. Existe correspondência índice-a-índice entre os primeiros termos da sequência e todas as variáveis da função sentencial, de modo que os termos cujo índice corresponde ao índice das variáveis livres são tais que permitem à sequência satisfazer a função. Ora, fica óbvio que os termos sem correspondência com variáveis dessa função são os termos cujos índices são maiores que o índice da última variável da função sentencial. Esses termos podem ser eliminados, pois não há correspondência, de nada servem para a função sentencial e isso é tão forte que esses termos excessivos podem estar nomeando as coisas mais disparatadas, como o ‘unicórnio cor-de-laranja’ e ‘Papai Noel com menos de 150 quilos’ quando a função descreve os membros do Parlamento Europeu, por exemplo. Ora, se esses termos são superfluos ao ponto de descreverem qualquer natureza e em nada causar dificuldade para a função sentencial, o mesmo ocorre com os termos da sequência cujo índice corresponde ao de uma variável ligada. Se ela está ligada, pouco importa qual seja o natureza descrita pelo termo que lhe corresponde: esse termo é superfluo. Então, como os termos ‘excessivos’ foram eliminados por superfluidade, os termos correspondentes a variáveis ligadas também podem. Sobra apenas uma sequência de termos que realmente afetam a função sentencial, satisfazendo-a.

Tarski fornece o seguinte exemplo:

[p.195]-1 – nota de rodapé 1 (d)

Por exemplo, aquelas, e só aquelas, sequências  $f$  de classes que satisfazem a função  $t_{2,4}$  que consiste de unicamente dois termos  $f_2$  e  $f_4$  verificando a fórmula  $f_2 \square f_4$ .

A sequência  $f_1 f_2 f_3 f_4$  satisfaz a função sentencial  $t_{2,4}$ , porém, eliminado os termos superfluos, a sequência se reduz a  $f_2 f_4$ . Obviamente, há uma quantidade enumerável de sequências cujos termos  $f_2$  e  $f_4$  satisfazem a função sentencial em questão, dependendo daquilo que a função sentencial queira dizer (pois ela é o modo correto de escre-

ver a função sentencial que na linguagem-objeto descreve um estado de coisas; pode ser que o que está sendo descrito, por exemplo, seja a inclusão do ‘mais novo’ dentre os filhos do personagem bíblico Jacó entre os irmãos de José, e neste caso só existe uma sequência capaz de atender a isso, aquela que tem ‘José’ no lugar de  $f_2$ ).

Mas essa sequência condensada, apesar de intuitiva, é problemática:

[p.195]-1 – nota de rodapé 1 (e)

O valor de tal modificação do ponto de vista da naturalidade e conformidade com o procedimento usual é claro, mas quando vamos efetivá-lo, revelam-se certos defeitos de natureza lógica: a Def. 22 então toma uma forma mais complicada.

Sabemos que a Definição 22 não exclui a possibilidade de satisfação da função sentencial sem variáveis livres. É fácil perceber para onde isso vai: uma sentença - que é a função sentencial sem variáveis livres - é satisfeita por qualquer sequência, pois qualquer termo de qualquer sequência é supérfluo para qualquer variável ligada que lhe corresponda. Se formos continuar a seguir o método de eliminar da sequência os termos supérfluos, só o vazio restara satisfazendo a sentença:

[p.195]-1 – nota de rodapé 1 (f)

Conservando o conceito de verdade, nota-se que - de acordo com o tratamento acima - só *uma* sequência, nomeadamente a sequência ‘vazia’ que não tem nenhum membro, pode satisfazer a sentença, i.e. uma função sem variáveis livres; deveríamos então chamar de verdadeiras as sentenças atualmente satisfeitas pela sequência ‘vazia’.

A sequência vazia - que aparentemente é o mesmo que *nada* - satisfaria a sentença. Parece que o *nada* satisfaz a sentença e por isso ela é verdadeira, o que soa paradoxal de um ponto de vista não matemático<sup>158</sup>:

[p.195]-1 – nota de rodapé 1 (g)

Uma certa artificialidade presa a esta definição indubitavelmente desagradará a todos que não são suficientemente familiarizados com os procedimentos específicos comuns usados em construções matemáticas.

---

<sup>158</sup> Qualquer sequência é um conjunto e o conjunto vazio é um de seus subconjuntos; eliminados todos os membros do conjunto ainda sobra um membro: o subconjunto vazio. Então não é verdade - do ponto de vista da teoria dos conjuntos - que é o *nada* que está satisfazendo a sentença.

Encerra-se aqui a nota explicativa para a Definição 23, que explica porque sentenças infinitas é que são mais apropriadas para satisfazer as sentenças, mesmo as sentenças com um número finito de variáveis.

### 3. A adequação material da Definição 23: prova restrita ao método empírico

Lembremos que Tarski está buscando uma definição formalmente correta e materialmente adequada de *sentença verdadeira*. A respeito da corretude não há dúvida:

[p.195]-2

A questão que surge agora é se essa definição, a respeito da qual a corretude formal não traz dúvida, é também materialmente correta – ao menos no sentido previamente formulado sob a convenção **T**.

Esse problema é bem explicado e resumido como segue pelo prof. Delcio Krause:<sup>159</sup>

“Para Tarski, uma 'definição' satisfatória deve cumprir duas condições:

- ser formalmente correta (fc) e
- ser materialmente adequada (ma).

Para ser (fc), a definição deve satisfazer regras formais para a sua construção, como ocorre com o conceito de sentença de uma linguagem formal (fórmula sem variáveis livres). Não se pode, por exemplo, definir 'número par' usando o conceito de número par; a estrutura formal da linguagem deve ser conhecida. Por outro lado, a definição não pode fazer uso de conceitos reconhecidamente problemáticos, como 'significação' ou 'realidade'. Para ser (ma), devemos reparar no que queremos representar com nossa 'definição'. Podemos sair por aí definindo coisas, sem que essas definições representem algo de relevante. Para exemplificar isto, o filósofo Nelson Goodman usou o predicado *verzul* para designar algo que foi examinado antes do tempo *t* e é verde ou não foi examinado antes do tempo *t* e é azul. Uma tal definição unicamente introduz um novo termo, *verzul*, mas não tem nada de especial. Definições desse tipo não atendem materialmente a nada. Pelo contrário, Tarski diz que

---

<sup>159</sup> KRAUSE, D.; [2010]. A citação de Tarski é a de TARSKI, A.; [1990]. O problema da cor *verzul* de Nelson Goodman se encontra no livro *Fact, Fiction, and Forecast* do próprio Goodman.

"[a] definição desejada não pretende especificar o significado de uma palavra familiar [verdade] usada para denotar uma noção nova: ela pretende captar o significado efetivo de uma nova noção." (Tarski 1944).

Isso é ser (ma).

[p.195]-3  
– ao menos no

sentido previamente formulado sob a convenção **T**.

O sentido proposto pela T-CONVENÇÃO<sup>160</sup> é substituir na expressão ‘ $x \square Tr$  se e somente se  $p$ ’ a símbolo  $x$  pelo nome *descritivo-estrutural de qualquer sentença* e o símbolo ‘ $p$ ’ pela tradução desse nome na metalinguagem. Por exemplo, dado a sentença “Paris é a Cidade-Luz”, então o sentido de adequação material dada pela T-CONVENÇÃO é

‘*Paris é a Cidade-Luz*’ é uma sentença verdadeira (i.e. pertence a  $Tr$ ) se e somente se *Paris é a Cidade Luz*.

Sobre a questão, então de se a Definição 23 é adequada materialmente, Tarski adianta a resposta afirmativa:

[p.195]-4

Pode ser mostrado que a resposta a essa questão é afirmativa: *Def. 23 é uma definição adequada de verdade no sentido da convenção T*, uma vez que sua consequência inclui todas aquelas exigidas pela convenção.

É óbvio que a sentença ‘*Paris é a Cidade-Luz*’ é uma sentença verdadeira se e somente se *Paris é a Cidade Luz* é o T-ESQUEMA. A função das aspas simples na primeira citação de *Paris é a Cidade-Luz* é *mencionar a sentença*. A sentença sem aspas no fim desse T-ESQUEMA está sendo *usada* e não *mencionada*. O T-ESQUEMA é um *esquema de sentenças* (não uma definição de sentença verdadei-

---

<sup>160</sup> Já dissemos anteriormente e repetiremos aqui que não há prejuízo em escrevermos T-CONVENÇÃO, T-ESQUEMA, no lugar de CONVENÇÃO-T e ESQUEMA-T.

ra), mas é a consequência da definição de sentença verdadeira. Comenta o prof. Delcio Krause (KRAUSE, D.; [2010]):

“Assim, a definição de verdade será materialmente adequada se capturar todas as instâncias do esquema (T), que se obtêm quando substituimos S por uma sentença particular. Se pudermos listar todas as sentenças de uma dada linguagem L, então poderíamos aplicar (T) a cada uma delas e ter um sentido preciso para a verdade das sentenças de L. No entanto, em geral as linguagens (mesmo as formais) têm uma quantidade infinita de sentenças de modo que uma tal solução não seria satisfatória. A definição, insistindo um pouco, deve ser tal que capture o esquema (T), ou seja, que implique tenha todas as suas instâncias e, como exigiu Tarski, para toda S (da linguagem L), se S é verdadeira, então S é uma sentença de L.”

Esse último comentário traduz o que Tarski quis dizer:

[p.195]-5

Porém, pode-se ver sem dificuldade (do fato que o número dessas consequências é infinito) que o exato e geral estabelecimento deste fato não tem lugar dentro dos limites das considerações tomadas até agora. A prova requererá o conjunto de um aparato inteiramente novo: de fato envolve a transição para um nível um passo mais alto – para a meta-metateoria, que teria de ser precedida pela formalização da metateoria que forma a fundação de nossa investigação.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Veja p. 188, nota de rodapé.

A *nota de rodapé 2* cita aquela que vimos em [pp.187-188]. Em outras palavras, para se provar formalmente que a Definição é materialmente adequada, teríamos de formalizar a metalinguagem com o mesmo grau de corretude que formalizamos a linguagem-objeto *L* e criarmos para ela uma meta-metalinguagem. No fim teríamos coisas estranhas como o seguinte T-ESQUEMA meta-metateórico:

*A ‘X é uma sentença verdadeira se e somente se  $x \sqsubseteq S$  e toda sequência infinita de classes satisfaz  $x$ ’ é verdadeira se e somente se X é uma sentença verdadeira se e somente se  $x \sqsubseteq S$  e toda sequência infinita de classes satisfaz  $x$ ,*

cuja adequação material sofreria do mesmo drama de prova formal que resultou na meta-metateoria. A formalização então não é solução.

[pp.195-196]

Se não quisermos escapar do nível de nossa discussão prévia, só um método, o método empírico, resta – a verificação das propriedades da Def. 23 em uma série de exemplos concretos.

Assim, verificada a impossibilidade teórica de se provar a adequação material da definição 23, passa-se à prova empírica.

### 3.1. Prova empírica: sentença $\bigcap_1 \bigcup_2 \iota_{1,2}$

Tarski apresenta o primeiro exemplo como segue:

[p.196]-1

Considere, por exemplo, a sentença  $\bigcap_1 \bigcup_2 \iota_{1,2}$ , i.e. ‘ $\forall x, \exists M \forall x, \exists N \forall x, x, \dots$ ’.

A sentença  $\bigcap_1 \bigcup_2 \iota_{1,2}$  é interpretada “para todo  $a$  não ocorre que para todo  $b$  não se dá  $a \sqsubset b$ ”<sup>161</sup>. Em linguagem moderna mais usual que a polonesa é escrito  $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 \sqsubset x_2)$ . Vejamos o ‘histórico’ do processo de satisfação dessa sentença, decompondo-a em funções sentenciais hipotéticas. Isso porque, sabemos, uma sentença não é feita nem de pedaços de sentenças, nem de funções sentenciais; sentenças são ‘unidades atômicas’. O exercício que se faz aqui é para se compreender a satisfação dessa sentença.

[p.196]-2

De

acordo com a Def. 22 a função sentencial  $\iota_{1,2}$  é satisfeita por aquelas, e só por aquelas, sequências  $f$  de classes em que vale  $f_1 \sqsubset f_2$ , mas sua negação, i.e. a função  $\overline{\iota_{1,2}}$ , só por aquelas sequências onde vale  $f_1 \sqsupset f_2$ .

Tarski está propondo funções sentenciais mais simples que, juntas, seriam o ‘histórico’ de construção da função sentencial que, satisfeita em algum grau, daria origem à sentença.<sup>162</sup> Aqui está sendo estudado como ocorre a satisfação de uma inclusão, que é a cláusula ( $\alpha$ ) da Definição 22.

<sup>161</sup> Para saber qual o sentido do símbolo “ $\sqsubset$ ” aqui, ver o QUADRO III no fim do capítulo 2 deste livro.

<sup>162</sup> Lembrando que esse não é processo de satisfação da sentença: existe uma quantidade enumerável de sequências para satisfazer tal hipotética função sentencial mais complexa (feita dessas funções mais simples), mas existe uma quantidade enumerável de sequências que *não satisfazem* tal função sentencial mais complexa; ora, tal função sentencial mais complexa, uma vez satisfeita, gera a sentença em questão, mas essa sentença é verdadeira quando *todas*, absolutamente todas, as sequências – inclusive as que não satis-

[p.196]-3

Consequentemente, uma seqüência  $f$  satisfaz a função  $\prod_2 \overline{t_{1,2}}$ , se toda seqüência  $g$  que difere de  $f$  no máximo na 2ª posição satisfaz a função  $\overline{t_{1,2}}$  e então verifica a fórmula  $g_1 \sqsupseteq g_2$ .

O mesmo se dá aqui, construindo um ‘histórico’ para a sentença. Neste caso, o estudo é da satisfação de uma quantificação universal de uma negação de inclusão, que é a cláusula ( $\delta$ ) da definição 22. Ocorre que uma seqüência  $g$  está satisfazendo uma função com duas variáveis livres, enquanto  $f$  está satisfazendo uma função sentencial com só uma variável livre. Porém, para  $f$  o problema é satisfazer uma função sentencial quantificada universalmente. A seqüência  $f$  agora satisfaz a primeira variável, que é livre, e tem qualquer indivíduo no segundo termo – mesmo um indivíduo bizarro – para a segunda variável, pois ela é ligada e pouco importa o indivíduo que esteja no segundo termo (quem teve esse trabalho antes fora a seqüência  $g$ ). Como para a variável ligada  $v_2$  pouco importa a natureza do indivíduo do segundo termo de  $f$ , o segundo termo de  $f$  pode diferir daquele de  $g$  (por isso  $g$  difere de  $f$  no máximo no segundo termo). Mas, para ambas,  $g$  e  $f$ , a variável  $v_1$  é livre e por isso  $f$  não pode diferir de  $g$  no primeiro termo. Daí que  $g_1 = f_1$ . Por isso:

[p.196]-4

Uma vez que  $g_1 = f_1$  e a classe  $g_2$  podem ser arbitrária, só aquelas seqüências  $f$  satisfazem a função  $\prod_2 \overline{t_{1,2}}$ , que são tais que  $f_1 \sqsupseteq b$  para qualquer classe  $b$ .

Em outras palavras, apesar de  $g$  compor um processo de satisfação anterior, é a seqüência  $f$  que importa. No caso, ela determina que o primeiro termo não esteja incluso em nenhuma classe. Isso é problemático – senão paradoxal – porque o indivíduo do termo  $f_1$  compõe ele próprio nem que seja a ‘classe do único indivíduo posto como termo  $f_1$ ’. De fato, no exemplo dado por Tarski o quantificador para a inclusão não é o universal, mas o existencial (o que elimina o paradoxo). Então:

[p.196]-5

Se procedermos de modo análogo, obtemos como resultado que a seqüência  $f$  satisfaz a função  $\bigcup_2 t_{1,2}$ , i.e. a negação da função  $\prod_2 \overline{t_{1,2}}$ , só se há uma classe  $b$  para a qual vale  $f_1 \sqsupseteq b$ .

para seu objetivo, que é mostrar a adequação material da definição de sentença verdadeira.

De fato, existe ao menos uma classe que contenha o indivíduo designado pelo

[p.196]-6

Além disso, a sentença  $\bigcap_1 \bigcup_2 t_{1,2}$ , só é satisfeita (por uma sequência arbitrária  $f$ ) se há para uma classe arbitrária  $a$ , uma classe  $b$  para a qual  $a \sqsubset b$ .

termo  $f_i$ , pelo menos a ‘classe do único indivíduo posto como termo  $f_i$ ’.

Note que nos trechos [p.196]-2 até [p.196]-5 Tarski fala de ‘aquelas, e somente aquelas, sequências’ etc.. Neste trecho ele já aponta a característica das sentenças: são satisfeitas por quaisquer sequências, indicada como ‘uma sequência arbitrária  $f$ ’. No caso dessa sentença de exemplo, para toda classe  $a$ , existe ao menos uma classe  $b$  que a contenha. Não é preciso muito esforço para perceber que se trata do fato de um conjunto conter a si próprio como subconjunto. Por fim, aplica-se a Definição 23:

[p.196]-7

Finalmente pela aplicação da Def. 23 obtemos um dos teoremas que são descritos na condição ( $\alpha$ ) da convenção **T**:

$\bigcap_1 \bigcup_2 t_{1,2} \sqsubset Tr$  se e somente se para toda classe  $a$  há uma classe  $b$  tal que  $a \sqsubset b$ .

Em [p.195]-3 já vimos como isso se dá. Obtido essa cláusula ( $\alpha$ ) da T-CONVENÇÃO, por meio de regras de inferência e aplicações de teoremas conseguimos mostrar que estamos diante de uma sentença verdadeira.

[p.196]-8

Disso inferimos sem dificuldade, pelo uso dos conhecidos teoremas do cálculo de classes, que  $\bigcap_1 \bigcup_2 t_{1,2}$  é uma sentença verdadeira.

Já que sabemos que toda sentença demonstrável também é sentença verdadeira, Tarski propõe que consigamos demonstrar a sentença  $\bigcap_1 \bigcup_2 t_{1,2}$  a partir dos axiomas da linguagem-objeto e sua regra de inferência (no caso, modus ponens). O descrito para a sentença  $\bigcap_1 \bigcup_2 t_{1,2}$  vale para outras sentenças:

[p.196]-7

Podemos procede de modo exatamente análogo com qualquer outra sentença da linguagem que estamos considerando. Se para tal sentença construirmos uma asserção correspondente descrita na condição ( $\alpha$ ) e então aplicarmos o modo de inferência usado acima, podemos provar sem muita dificuldade que essa asserção é uma consequência da definição de verdade que temos adotado. Em muitos casos, com o auxílio único de leis simples da lógica (do domínio do cálculo sentencial e do cálculo de classe), podemos traçar conclusões definitivas dos teoremas, obtendo desse modo a verdade ou falsidade dos teoremas em questão.

Então o roteiro para se obter uma sentença verdadeira é primeiro obter a cláusula (a) que vimos na T-CONVENÇÃO e em seguida usar ferramental teórico comum da lógica booleana (regras de inferência e teoremas) para mostrar que a sentença em questão pertence a *Tr*. Tarski passa aos exemplos:

[p.197]-1

Assim, por exemplo,  $\bigcap_1 \bigcup_2 (t_{1,2} + \overline{t_{1,2}})$  é revelada ser uma verdade

e do mesmo modo

[p.197]-2  
e

$\bigcap_1 \bigcap_2 \overline{t_{1,2}}$  é uma sentença falsa.

Porém, há casos que não se pode estabelecer:

[p.197]-3

Com respeito a outras sentenças, e.g. a sentença  $\bigcap_1 \bigcap_2 \bigcap_3 (t_{1,2} + t_{2,3} + t_{3,1})$  ou sua negação, a questão análoga não pode ser decidida (ao menos enquanto não tivermos recurso às considerações existenciais da metateoria, cf. p. 174): a Def 23 sozinha não dá nenhum critério geral para a verdade de uma sentença.<sup>1</sup> Porém, através dos teoremas obtidos, o sentido da expressão correspondente do tipo ' $x \in Tr$ ' torna-se inteligível e não-ambíguo. Notar-se-á que o teorema expresso na condição ( $\beta$ ) da convenção **T** é também consequência óbvia dessa definição.

<sup>1</sup> Pelo menos enquanto é considerado de ponto de vista metodológico, isto não é um defeito da definição em questão; neste aspecto em nada difere de grande parte das definições ocorrem nas ciências dedutivas.

A discussão a respeito do problema existencial citado por Tarski foi vista em [p.174]-3 até [p.174]-5. A respeito da *nota de rodapé 1* neste [p.197]-2, sabemos o motivo de não ser possível tomar a definição 23 como regra geral de estabelecimento da

verdade uma sentença desde o trecho [p.195]-5: para isso seria necessário a formalização da metateoria, o que seria pouco prático nos rumos tomados pela discussão até aqui.

## CAPÍTULO 14

### TEOREMAS DERIVADOS DA DEFINIÇÃO DE SENTENÇA VERDADEIRA

A Definição 23 estabelecida por Tarski mostra-se ter a propriedade da corretude, isto é, ela define claramente que toda sentença demonstrável é verdadeira. Um conjunto de teoremas pode ser derivado dessa Definição 23. Esses teoremas referem-se a sentenças da linguagem-objeto  $L$  que eram tomadas como verdadeiras de modo intuitivo. O ferramental teórico ao redor da Definição 23 vai permitir que se demonstre essas sentenças e assim, possamos classificá-las como verdadeiras.

[p.197]-5

Com esta discussão o leitor não duvidará possuir a subjetiva convicção que a Def. 23 atualmente possui a propriedade que se pretendia que tivesse: satisfaz todas as condições da convenção **T**. Com a intenção de fixar a convicção da corretude material da definição que tem sido conseguida desse modo, é apropriado estudar algumas características gerais dos teoremas que podem ser derivadas dela. Com o cuidado de não cobrir este trabalho com matéria puramente dedutiva, darei alguns teoremas sem provas exatas.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> As provas são baseadas nas leis gerais da lógica, os axiomas específicos da metaciência e as definições dos conceitos que ocorrem nos teoremas. Em alguns casos é indicada a aplicação de propriedades gerais dos conceitos de consequência, de sistema dedutivo, etc., que são dados no artigo V do presente volume. Poderemos usar os resultados obtidos porque se pode facilmente mostrar que os conceitos de sentença e consequência introduzidos aqui satisfazem todos os axiomas sobre os quais o trabalho mencionado acima está baseado.

O artigo V citado por Tarski é o *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences* (TARSKI, A.; [1983d]). Passemos aos teoremas escolhidos por Tarski.

### 1. Teorema 1 e demonstração.

O Teorema 1 é o Princípio de Contradição e afirma que de duas sentenças, se uma for negação da outra (i.e. se forem contraditórias), uma delas não pode se verdadeira. É enunciado como segue:

[p.197]-6

TEOREMA 1. (Princípio de contradição). *Para toda sentença  $x$ , ou  $x \sqsubseteq Tr$  ou  $x \sqsubseteq \neg Tr$ .*

O Teorema, em notação usual mais moderna, quer dizer que dado a sentença  $x$ , ou  $x \sqsubseteq Tr$  ou  $\neg x \sqsubseteq Tr$ .

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que uma sentença  $x$  é tal que  $x \sqsubseteq Tr$ . É preciso mostrar que  $\neg x \sqsubseteq Tr$ . Como  $x \sqsubseteq Tr$ , pela Definição 23 toda sequência infinita de classes satisfaz  $x$ . Seja  $f$  uma tal sequência. Pela Definição 22,  $(\beta)$ , temos que  $f$  não satisfaz  $\neg x$ . Assim,  $\neg x$  não é satisfeita por todas as sentenças, isto é,  $\neg x \sqsubseteq Tr$ .

### 2. Teorema 2, LEMAS A e B, e demonstrações.

O teorema 2 é o Princípio de Terceiro Excluído e afirma que de duas sentenças, se forem contraditórias, uma delas tem de ser verdadeira. Esse teorema é apresentado por Tarski juntamente com os Lemas que são auxiliares em sua demonstração:

[p.197-198]

TEOREMA 2. (Princípio de terceiro excluído). *Para toda sentença  $x$ , ou  $x \sqsubseteq Tr$  ou  $x \sqsubseteq \neg Tr$*

O seguinte lema, que se segue das Defs. 11 e 12, tem participação essencial na prova:

LEMA A. *Se a sequência  $f$  satisfaz a função sentencial  $x$ , e a sequência infinita  $g$  de classes é tal que para todo  $k$ ,  $f_k = g_k$  se  $v_k$  é uma variável livre de  $x$ , então a sequência  $g$  também satisfaz a função  $x$ .*

Como uma consequência imediata deste lema e da Def. 12 nós obtemos o Lema B que, em combinação com as Defs. 22 e 23, facilmente leva ao Teor. 2:

LEMA B. *Se  $x \sqsubseteq S$  e pelo menos uma sequência infinita de classes satisfaz a sentença  $x$ , então toda sequência infinita de classes satisfaz  $x$ .*

Como os Lemas são usados na demonstração do teorema, vamos aqui fazer primeiro a prova dos lemas A e B e só então do Teorema 2.

### 2.1. Demonstração do LEMA A

A interpretação do LEMA A nos dá que para uma sequência  $f$  satisfazer uma função sentencial  $x$  tudo que é necessário considerar são os elementos de  $f$  que estão em posições correspondentes aos índices de variáveis livres de  $x$ . Assim, a prova desse lema é feita por indução em cada uma das cláusulas da Definição 10 (que é a definição de função sentencial).

#### DEMONSTRAÇÃO:

( $\alpha$ ) seja  $x = \mathbf{v}_{k,l}$  e seja  $f$  satisfazendo  $x$ , isto é,  $f_k = f_l$ . Seja  $g$  uma sequência que concorda com  $f$  nas posições das variáveis livres de  $x$ , isto é,  $f_k = g_k$  e  $f_l = g_l$ . Assim  $g_k = g_l$  e  $g$  satisfaz  $x$ .

( $\beta$ ) seja  $x = \mathbf{y}$  e seja  $f$  satisfazendo  $x$ . Seja  $g$  tal que para todo  $k$ ,  $f_k = g_k$  se  $v_k$  é variável livre de  $x$ . Como  $f$  satisfaz  $x$ , então  $f$  não satisfaz  $y$ . Pela hipótese de indução, duas sequências que concordem nas variáveis livres de  $y$  são tais que uma satisfaz  $y$  se e somente se a outra também satisfaz. Como  $x$  e  $y$  possuem as mesmas variáveis livres (definição 11 ( $\beta$ )),  $g$  também não satisfaz  $y$ . Logo,  $g$  satisfaz  $x$ .

( $\gamma$ ) seja  $x = \mathbf{y} + \mathbf{z}$  com  $f$  satisfazendo  $x$ . Seja  $g$  uma sequência que concorda com  $f$  nas posições das variáveis livres de  $x$  (e, portanto, nas variáveis livres de  $y$  e  $z$  pela definição 11 ( $\gamma$ )). Temos que  $f$  satisfaz  $y$  ou  $f$  satisfaz  $z$ . Pela hipótese de indução,  $g$  satisfaz  $y$  ou  $g$  satisfaz  $z$ , isto é,  $g$  satisfaz  $x$ .

( $\delta$ ) seja  $x = \mathbf{v}_l \mathbf{y}$  e  $f$  satisfazendo  $x$ , isto é, toda sequência  $f'$  que difere de  $f$  no máximo na posição  $l$  também satisfaz  $y$ . Seja  $g$  tal que, para todo  $k$ ,  $f_k = g_k$  se  $v_k$  é variável livre de  $x$ . Como  $v_l$  não é livre em  $x$  (definição 11 ( $\delta$ )), seja  $g'$  uma sequência que difere de  $g$  no máximo na posição  $l$ . Como  $g'$  concorda com  $g$  nas posições dos índices de variáveis livres  $y$ , pela hipótese de indução,  $g'$  satisfaz  $y$ . Como  $v_l$  não é livre em  $x$ , as  $g'$  são do tipo  $f'$ . Logo,  $g$  satisfaz  $x$ .

### 2.2. Demonstração do LEMA B

DEMONSTRAÇÃO. Lembrando que sentenças são funções sentenciais sem variáveis livres, pelo LEMA A, a satisfação de uma função sentencial por uma sequência só depende dos elementos da sequência que ocupam as posições dos índices das variáveis livres da função sentencial. Como uma sentença não possui variáveis livres, a satisfação da mesma por uma sequência não depende dos elementos da própria sequência. Logo, se uma sequência satisfaz uma sentença, todas as sequências a satisfazem.

### 2.3. Demonstração do Teorema 2

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que  $x \not\models Tr$ . Temos que mostrar que  $x \models Tr$ . Como  $x \not\models Tr$ , alguma sequência infinita de classes não satisfaz  $x$ . Logo, alguma sequência infinita de classes satisfaz  $x$  (definição 22 ( $\beta$ )). Pelo LEMA B, toda sequência infinita de classes satisfaz  $x$ , isto é,  $x \models Tr$ .

### 3. Teorema 3, LEMA C e demonstrações

Esse teorema é apresentado por Tarski juntamente com o LEMA C que é auxiliar em sua demonstração:

[p.198]-1

TEOREMA 3. Se  $X \models Tr$  então  $Cn(X) \models Tr$ ; assim em particular  $Cn(Tr) \models Tr$ .

Este teorema é provado pela indução completa baseada principalmente nas Defs. 15, 16, 22 e 23; o simples lema a seguir também é útil na demonstração:

LEMA C. Se  $y$  é uma quantificação universal da função sentencial  $x$ , então para que toda sequência infinita de classes satisfaça  $x$ , é necessário e suficiente que toda sequência infinita satisfaça  $y$ .

Vamos, por isso, apresentar primeiro a demonstração do LEMA C.

#### 3.1. Demonstração do LEMA C

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $y = \prod_{p_k}^{k \leq n} x$ . (Prova da condição suficiente) suponha que toda sequência satisfaz  $x$  e tomemos uma sequência  $f$ . Considere todas as sequências  $f^{\square}$  que diferem de  $f$  no máximo nas posições  $p_k$ , para  $k \leq n$  (i.e. nas posições de variáveis

livres de  $x$ ). Como toda sequência satisfaz  $x$ , as  $f^{\square}$  também satisfazem. Logo, (definição 22 ( $\beta$ )) a sequência  $f$  satisfaz  $y$ . Como  $y$  é sentença, pelo LEMA B, todas as sequências satisfazem  $y$ . (*Prova da condição necessária*) prova por absurdo: suponha que uma sequência  $f$  não satisfaz  $x$ . Suponha por absurdo que  $f$  satisfaz  $y$ . Pela definição 22 ( $\delta$ ), toda sequência  $f^{\square}$  que difere de  $f$  no máximo nas posições  $p_k$ ,  $k \leq n$ , satisfaz  $x$ . Mas  $f$  é uma dessas  $f^{\square}$ . Logo  $f$  satisfaz  $x$ , o que contradiz a hipótese. Portanto  $f$  satisfaz  $x$ .

### 3.2. Demonstração do Teorema 3

DEMONSTRAÇÃO. Toda a demonstração é por indução no grau de consequência lógica para cada cláusula da Definição 15. Assim:

( $\alpha$ ) Seja  $n = 0$  e  $x \square X$  (Definição 15 ( $\alpha$ )). As consequências de grau zero ( $n = 0$ ) são os próprios elementos de  $X$  e, por hipótese,  $X \square Tr$ .

( $\beta$ ) Seja  $x$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$  e  $x \square X$  (Definição 15 ( $\beta$ )). As consequências de grau  $n-1$  são as consequências de grau  $n$  e o resultado vale por hipótese de indução.

( $\gamma$ ) Sejam funções sentenciais  $u$  e  $w$ , uma sentença  $y$  e números naturais  $k$  e  $l$  tais que  $x$  é a quantificação universal da função  $u$ ,  $y$  é a quantificação universal da função  $w$ ,  $u$  pode ser obtida da função  $w$  pela substituição da variável  $v_l$  pela variável  $v_k$ , e  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$  (Definição 15 ( $\gamma$ )). Pela hipótese de indução,  $y \square Tr$  (porque seu grau é  $n-1$ ). Como  $y$  é sentença, toda sequência satisfaz  $y$ . Como  $y$  é quantificação universal de  $w$ , pelo LEMA C toda sequência satisfaz  $w$ . Pela construção de  $u$ , toda sequência satisfaz  $u$ . Como  $x$  é quantificação universal de  $u$ , pelo LEMA C, toda sequência satisfaz  $x$ , isto é,  $x \square Tr$ .

( $\delta$ ) Sejam funções sentenciais  $u$  e  $w$  bem como sentenças  $y$  e  $z$  tais que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são quantificações universais das funções  $u$ ,  $w \square + u$  e  $w$ , respectivamente, e  $y$  e  $z$  são consequências de grau  $n-1$  da classe  $X$  (Definição 15 ( $\gamma$ )). Pela hipótese de indução  $y$  e  $z$  pertencem a  $Tr$ . Então toda sequência satisfaz  $y$  e  $z$ . Pelo LEMA C, toda sequência satisfaz  $w$ . Pela definição 22 ( $\gamma$ ), toda sequência satisfaz  $u$ . Pelo LEMA C, toda sequência satisfaz  $x$ . Daí  $x \square Tr$ .

( $\epsilon$ ) Sejam funções sentenciais  $u$  e  $w$ , uma sentença  $y$  e um número natural  $k$  tais que  $x$  é uma quantificação universal da função  $u + \bigcap_k w$ ,  $y$  é uma quantificação universal da função  $u + w$ ,  $v_k$  não é uma variável livre de  $u$ , e  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$  (Definição 15 ( $\epsilon$ )). Pela hipótese de indução  $y \sqsubseteq Tr$ . Pelo LEMA C, toda sequência satisfaz  $u + w$ . Seja  $f$  uma sequência. Então ou (caso 1)  $f$  satisfaz  $u$  ou (caso 2)  $f$  satisfaz  $w$ .<sup>163</sup> (Caso 1) se  $f$  satisfaz  $u$ , então  $f$  satisfaz  $u + \bigcap_k w$  (pois se satisfaz  $u$ , satisfaz  $u$  adicionado a qualquer coisa – que é a regra de adição lógica, que baseia o Princípio de Verdade). (Caso 2) se  $f$  satisfaz  $w$ , então ou  $f$  satisfaz  $u$  ou  $f$  satisfaz  $\bigcap_k w$ . Suponhamos que  $f$  não satisfaz  $\bigcap_k w$ . Então existe  $f^\square$  que difere de  $f$  no máximo na posição  $k$  tal que  $f^\square$  não satisfaz  $w$ . Como toda sequência satisfaz  $u + w$ ,  $f^\square$  satisfaz  $u$ . Como  $v_k$  não é livre em  $u$ , então  $f$  satisfaz  $u$  (LEMA A) e então  $f$  satisfaz  $u + \bigcap_k w$ . Assim em qualquer caso  $f$  satisfaz  $u + \bigcap_k w$ , o que quer dizer que qualquer sequência satisfaz  $u + \bigcap_k w$ . Logo, pelo LEMA C, toda sequência satisfaz  $x$ , i.e.  $x \sqsubseteq Tr$ .

( $\zeta$ ) Sejam funções sentenciais  $u$  e  $w$ , uma sentença  $y$  e um número natural  $k$ , tais que  $x$  é uma quantificação universal da função  $u + w$ ,  $y$  é uma quantificação universal da função  $u + \bigcap_k w$ , e  $y$  é uma consequência de grau  $n-1$  da classe  $X$  (Definição 15 ( $\zeta$ )). Pela hipótese de indução  $y \sqsubseteq Tr$ . Então toda sequência satisfaz  $u + \bigcap_k w$  (LEMA C). Seja  $f$  uma sequência. Se  $f$  satisfaz  $u$ , então  $f$  satisfaz  $u + w$ . Suponha que  $f$  não satisfaz  $u$ . Então  $f$  satisfaz  $\bigcap_k w$ . Queremos mostrar que  $f$  satisfaz  $w$ . Suponha que  $f$  não satisfaz  $w$ . Como  $f^\square$  difere de  $f$  no máximo na posição  $k$ ,  $f$  não satisfaria  $\bigcap_k w$ , o que contraria a hipótese. Logo,  $f$  satisfaz  $w$  e, portanto, satisfaz  $u + w$ . Então, toda sequência satisfaz  $u + w$  e pelo LEMA C toda sequência satisfaz  $x$ , i.e.  $x \sqsubseteq Tr$ .

#### 4. Teorema 4, Teorema 5 e LEMA D

A teoria construída pelos teoremas até aqui pode ser resumida em dois teoremas simples, o Teorema 4 e o Teorema 5, como Tarski informa:

---

<sup>163</sup> Isso pode ser escrito de modo formal:  $f \sqsubseteq u + w \sqsubseteq f \sqsubseteq u \sqsubseteq f \sqsubseteq w$ .

[p.198]-2

Os resultados contidos nos Teors 1-3 podem ser resumidos nos seguintes (obtidos com auxílio das Defs 18-20):

TEOREMA 4. *A classe  $Tr$  é um sistema dedutivo consistente e completo.*

TEOREMA 5. *Toda sentença demonstrável é uma sentença verdadeira, em outras palavras,  $Pr \sqsubseteq Tr$ .*

Estes teoremas seguem-se imediatamente da Def. 17, do Teor. 3 e do Lema D, a prova do qual (na base da Def. 13 e Lema C entre outros) não apresenta dificuldade.

LEMA D. *Todo axioma é uma sentença verdadeira.*

Vamos estudar cada um por sua vez, seguindo o que Tarski aconselhou como estratégia de prova, demonstrando o LEMA D antes de demonstrar o Teorema 5.

#### 4.1. Teorema 4 e demonstração

DEMONSTRAÇÃO. Que  $Tr$  é um sistema dedutivo segue do Teorema 3 e da Definição 18. No entanto, pela definição 15 ( $\alpha$ ), temos que vale sempre que  $X \sqsubseteq S$ ,  $X \sqsubseteq Cn(X)$ . Então temos  $Tr \sqsubseteq Cn(Tr)$  e  $Cn(Tr) \sqsubseteq Tr$ , isto é,  $Tr = Cn(Tr)$ . **Prova da consistência:** pelo Teorema 1, para  $x \sqsubseteq S$ ,  $x \sqsubseteq Tr$  ou  $x \sqsubseteq \neg Tr$ . Então, para  $x \sqsubseteq S$ ,  $x \sqsubseteq Cn(Tr)$  ou  $x \sqsubseteq \neg Tr$ , isto é, pela Definição 19,  $Tr$  é consistente. **Prova da completude:** novamente, pelo teorema 2, para  $x \sqsubseteq S$ ,  $x \sqsubseteq Tr$  ou  $x \sqsubseteq \neg Tr$ . Então, para  $x \sqsubseteq S$ ,  $x \sqsubseteq Cn(Tr)$  ou  $x \sqsubseteq \neg Cn(Tr)$ , isto é, pela Definição 20,  $Tr$  é completo.

Fica demonstrado assim que  $Tr$  é um sistema dedutivo consistente e completo.

#### 4.2. Lema D e demonstração

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com a def.13, temos dois grupos distintos de axiomas:  $\alpha$  e  $\beta$ . Para o grupo ( $\alpha$ ), temos um conjunto de sentenças que são quantificações universais de cada uma de quatro funções sentenciais, a saber:  $\overline{y + y + y}$ ,  $\overline{y + (y + z)}$ ,  $\overline{y + z + (z + y)}$  e  $\overline{y + z + (u + y + (u + z))}$ . Pelas cláusulas ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) da def. 22, verifica-se facilmente que qualquer seqüência infinita de classes satisfaz cada uma dessas quatro funções (aplicando tabelas de verdade para verificar a tautologia) assim, pelo LEMA C, os axiomas do grupo ( $\alpha$ ) são verdadeiros. Para o grupo ( $\beta$ ) examinamos

cada axioma encontrando uma tradução do mesmo na metalinguagem e sua verdade fica manifesta por esta tradução. Assim:

1)  $\cap_1 \iota_{1,1}$ , significa “toda classe está contida em si própria”

2)  $\cap_1 \cap_2 \cap_3 (\overline{\iota_{1,2}} + \overline{\iota_{2,3}} + \iota_{1,3}) \dots$ , que formula a transitividade da relação de inclusão, isto é, “para toda a classe **a**, **b** e **c** se **a** está contida em **b** e **b** está contida em **c**, então **a** está contida em **c**”

3)  $\cap_1 \cap_2 \cup_3 (\iota_{1,3} \cdot \iota_{2,3} \cdot \cap_4 (\overline{\iota_{1,4}} + \overline{\iota_{2,4}} + \iota_{3,4}))$ , formula a existência da união de dois conjuntos dados.

4)  $\cap_1 \cap_2 \cup_3 (\iota_{3,1} \cdot \iota_{3,2} \cdot \cap_4 (\overline{\iota_{4,1}} + \overline{\iota_{4,2}} + \iota_{4,3}))$ , formula a existência da intersecção de dois conjuntos dados.

5)

$\cap_1 \cup_2 (\cap_3 \cap_4 ((\overline{\iota_{3,1}} + \overline{\iota_{3,2}} + \iota_{3,4}) \cdot (\overline{\iota_{1,3}} + \overline{\iota_{2,3}} + \iota_{4,3}) \cdot \cap_5 (\iota_{5,1} + \cup_6 (\iota_{6,2} \cdot \overline{\iota_{6,1}} \cdot \iota_{6,5}))))$ ,

formula a existência do complemento de um dado conjunto e a diferença para outro dado conjunto.

Logo, segue-se o resultado (os axiomas são verdadeiros por suas traduções).

### 4.3. Teorema 5 e demonstração

DEMONSTRAÇÃO. Se  $x$  é uma sentença demonstrável, então é consequência de um sistema axiomático. Sabemos que toda axioma é verdadeiro (LEMA D) e que suas consequências são verdadeiras (Teorema 3).

### 5. Teorema 6 e LEMA E

O Teorema 6 e o LEMA E são apresentados como segue:

[pp.198-199]

O Teor. 5 não pode ser invertido:

TEOREMA 6. *Existem sentenças verdadeiras que não podem ser provadas, em outras palavras,  $Tr \not\equiv Pr$ .*

Isto é uma consequência imediata do Teor. 2 e do seguinte lema, cuja prova exata não é fácil:

O Teorema 6 garante que é impossível inverter o teorema 5, mas para provar o Teorema 6 precisaremos antes do Lema E.

### 5.1. Demonstração do LEMA E

DEMONSTRAÇÃO. A idéia da prova consiste em encontrar uma certa propriedade que os axiomas possuem e que seja preservada pelas cláusulas da definição de consequência de grau  $n$  (Definição 15). Nesse caso temos que todos os elementos da classe  $Pr$  devem possuir a propriedade. Assim, se uma determinada sentença não possui a referida propriedade, a sentença não pode pertencer a  $Pr$ . Para o caso particular do LEMA E considere a propriedade de “ser uma sentença verdadeira em um domínio de indivíduos ( $\mathbf{a}$ )” (esta propriedade é definida por Tarski nas Definições 24 e 25). Para a sentença  $\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2})$  considere um domínio de indivíduos não-vazio ( $\mathbf{a}$ ) qualquer<sup>164</sup>. Nesse caso os axiomas são todos verdadeiros em ( $\mathbf{a}$ ) e as regras são preservadas, mas a referida sentença não possui a propriedade, pois afirmaria que todo subconjunto de um conjunto não-vazio está incluído em qualquer outro (o que é falso). Logo,  $\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2}) \not\equiv Pr$ . Para a sentença  $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2})}$ , considere um domínio de indivíduos ( $\mathbf{a}$ ) vazio. Nesse caso, também vale que os axiomas são verdadeiros em ( $\mathbf{a}$ ) e as regras são preserva-

---

<sup>164</sup> É a primeira vez que Tarski está supondo um conjunto de indivíduos. Ele sempre propôs as questões a partir de classes e subclasses. Os resultados para classes e subclasses cabem para conjuntos de indivíduos e seus indivíduos. Sabemos disso a partir do que ele entende por indivíduo na Definição 25, que não será citada por escapar ao projeto desta dissertação, que abarcar minuciosamente o corpo principal e relevante de *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas*.

das. No entanto,  $\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2})$  é verdadeira (pois o vazio só possui um subconjunto, o próprio vazio). Logo,  $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2})}$ , é falsa em (a) e segue-se que  $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2})} \sqsubseteq Pr$ .

## 5.2. Demonstração do Teorema 6

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $x \sqsubseteq S$ . Ou  $x \sqsubseteq Tr$  ou  $x \sqsubseteq \neg Tr$  (Teorema 2) e  $\{x, x \sqsubseteq \neg Pr\} \sqsubseteq Pr$  (Lema E).

## 6. Teorema 7

Por fim, vem o Teorema 7 é apresentado como corolário dos anteriores como segue:

[pp.198-199]

Como um corolário dos Teors. 1, 5, e 6, dou finalmente o seguinte teorema:

TEOREMA 7. *A classe Pr é um sistema dedutivo consistente, mas não completo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja o sistema axiomático  $X$ . Então  $x \sqsubseteq X$  tal que  $x \sqsubseteq \neg Tr$  (Teorema 1), pois todo axioma é verdadeiro (Lema D). Por isso  $Cn(X) \sqsubseteq Tr$  (Teorema 3). Como  $Cn(X) \sqsubseteq X$  (Definição 15,  $\alpha$ ), então  $X$  é um sistema dedutivo e  $Cn(X) \sqsubseteq Pr$  (como sabemos de TARSKI, A.; [1983i]) e por isso  $Pr \sqsubseteq Tr$  (Teorema 5). Então  $Pr$  é consistente (Teorema 4). Mas  $Tr \sqsubseteq Pr$  (Teorema 6). Então  $Pr$  não é completo.

Este último teorema encerra as consequências da Definição 23 (Definição de sentença verdadeira) para o universo das classes de sentenças. Com isso se encerra o conjunto principal do trabalho de Tarski e fica atingido o objetivo e explorado suas consequências: a definição de verdade para as linguagens formalizadas e os teoremas derivados.

## CONCLUSÃO

Existe uma anedota política sobre uma brincadeira do presidente Ronald Reagan, dos Estados Unidos, que antes de começar uma declaração oficial disse diante dos microfones ligados: “dentro de alguns minutos darei ordens para bombardear a Rússia”. Eram os anos 1980, os anos mais potencialmente destrutivos a níveis globais da Guerra Fria. Técnicos viviam fazendo cálculos de quantas vezes o planeta Terra podia ser destruído pelos arsenais nucleares da Rússia e Estados Unidos, a União Soviética havia enviado tanques à Polônia, ativistas da OLP sequestravam aviões de passageiros todos os meses, o mundo inteiro estavam sob muita tensão. O alvoroço causado pela declaração obrigou o presidente a se explicar dizendo que a respeito de sua fala, “não pretendia dizer o que ela significava”. Esse anedota é citada por Umberto Eco e esse problema de uma sentença não significar o que ela enuncia, o que ela de fato significa e qual o peso de sua expressão literal é bem discutida por ele em seu livro *Os limites da Interpretação* (ECO. U. [1995], p. 9-11). Mas o modo como Tarski lidaria com essa frase seria:

**T:** “dentro de alguns minutos darei ordens para bombardear a Rússia” é uma sentença verdadeira se e somente se dentro de alguns minutos darei ordens para bombardear a Rússia.

Há muito de uma teoria sobre os futuros contingentes envolvida aqui (e até com a coincidência da frase ter peso militar, como o exemplo famoso de Aristóteles – “amanhã haverá uma batalha naval” – do *De Interpretatione*, 9), e não vamos tecer nada a respeito das contingências futuras, para não correremos o risco desta conclusão merecer muitos capítulos. Vamos nos ater ao T-ESQUEMA: como o nome de sentença “dentro de alguns minutos darei ordens para bombardear a Rússia” não correspondeu aos estado de coisas *dentro de alguns minutos darei ordens para bombardear a Rússia*, sabemos que ela é falsa (não atendeu à condição absoluta *se e somente se*). De fato, Ronald Reagan nunca deu essa ordem, nem mesmo para desautorizá-la depois.

O T-ESQUEMA, aplicado segundo seu contexto, i.e. segundo as condições exigidas por Tarski, é uma das mais interessantes ferramentas da lógica. O T-ESQUEMA em si não é uma sentença verdadeira (é só um esquema) mas permite construir sentenças verdadeiras que se enquadrem nas condições exigidas pela Definição 23 do trabalho de Tarski (TARSKI, A.; [1983b]). Vamos chamar isso de ‘solução de Tarski’. A solução de Tarski ao problema da atribuição de ‘verdadeiro’ e ‘falso’ não pode ser encarado como ‘a solução’ por excelência ao antigo problema filosófico. Tarski resolveu a questão indicando a existência de dois mundos: o mundo das coisas reais e o mundo da linguagem. Só no mundo da linguagem se pode falar de ‘verdade’ e ‘falsidade’. A solução de Tarski, então, começa escolhendo um conceito lingüístico de ‘verdade’ que corresponde de forma inteligível aquilo que realmente se verifica (que é *fato* no mundo real). Não é objetivo de Tarski tentar determinar a natureza dessa inteligibilidade e por isso deixa que fiquem brigando as escolas realistas e idealistas da filosofia. Tarski parte para outra empreitada.

E mesmo no mundo da linguagem, mais divisões são exigidas. Se ‘verdade’ e ‘falsidade’ são conceitos lingüísticos, suas significações e semânticas dependerão de seus lugares na linguagem. Tarski inaugura um modo novo de se encarar a linguagem: ela passa a ser uma estrutura de níveis. Torna-se necessário localizar em que nível de linguagem (e no caso, será em um nível *meta*) o orador situa suas referências. Assim, ‘verdade’ e ‘falsidade’ são atributos de objetos de uma linguagem que não tem as palavras ‘verdade’ e ‘falsidade’ em seu rol de objetos. Em outras palavras, ‘verdade’ e ‘falsidade’ são atribuições metalingüísticas.

A principal consequência do trabalho de Tarski é mostrar que a hierarquia de níveis de linguagem conseguem preservar as linguagens formais – que são a base das linguagens científicas – da auto-referência e, portanto, da ambigüidade. A outra consequência foi mostrar a dificuldade de se hierarquizar a linguagem natural. A facilidade com que a hierarquização da linguagem formal foi feita, porém, sempre inspirou tentativas de se hierarquizar a linguagem natural.

A ferramenta principal de teste lingüístico – o Paradoxo do Mentiroso – não é usada por Tarski para testar sua hierarquia de linguagens. No fim de seu trabalho, depois de realizada a tarefa de definir o que é uma sentença verdadeira, Tarski não faz o

teste do Paradoxo do Mentiroso. A razão é percebida de imediato. O Paradoxo do Mentiroso exige que ‘verdade’ e ‘falsidade’ sejam atributos da linguagem. Só assim se cria a auto-referência. Uma vez que fica estabelecido que não são objetos da linguagem, mas sim da metalinguagem, desaparece a possibilidade da sentença do mentiroso referir-se a si mesma.

O projeto tarskiano pode ser resumido em um modo de caracterizar melhor a antiga definição de verdade herdada de Aristóteles, apontar seu limite natural de aplicação e estabelecer um esquema-geral que traduza a estrutura básica de toda verdade. No fim, usar esse esquema como modelo para mostrar que uma definição de verdade nas linguagens formalizadas é atendida por todas as instâncias do T-ESQUEMA: toda sentença verdadeira no formato T-ESQUEMA atende a definição de verdade de Tarski.

A prova da deficiência de se estabelecer com clareza essas condições nas linguagens naturais foi todo o trabalho de Tarski no §1 de seu *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas* (TARSKI, A.; [1983b]), que exploramos na INTRODUÇÃO a esta dissertação. Essa dificuldade intrínseca à linguagem natural (como ele provou mediante o Mentiroso) o fez abandonar essa tentativa e partir para definição de verdade para as linguagens formais, o que é a idéia principal de seu trabalho. Isso é feito de modo bastante detalhado no §2 e parte do §3, até a prova do Teorema 7 (TARSKI, A.; [1983b], p.199). Esse é o núcleo essencial de sua pesquisa, o local de seu trabalho onde se situa todo o caminho que Tarski idealizou para construir sua definição de verdade. Esse núcleo essencial foi o objeto principal desta dissertação e ocupou os capítulos de exposição lidos até aqui. Linha por linha, exploramos e explicitamos o texto original de Tarski e apresentamos esse corpo principal de sua tese.

O restante do trabalho de Tarski não é pouco importante, mas o que se lê do texto além do Teorema 7 no §3 e o §4 é dedicado a fazer uma reestruturação da teoria exposta: Tarski faz todo o roteiro de definição formal da verdade, mas ao invés de lidar com classes de indivíduos propõe lidar com os indivíduos, coisa efetivamente feita, seguindo um raciocínio idêntico em estrutura, mas distinto no objeto (indivíduos, não classes de indivíduos). O resultado é corroborado identicamente (guardada a natureza dos indivíduos) como no §3.

O exposto nesta dissertação deixa bem explícito a dimensão da obra de Tarski: o pernicioso problema da auto-referência pode ser driblado, sim, pelo esquema inteligente da hierarquização da linguagem e uma definição de verdade pode ser definitivamente construída, ao menos em um tipo de linguagem, as formalizadas. E a porta alternativa fica aberta à linguagem natural: se for possível hierarquizá-la talvez uma definição semelhante de verdade possa ser estabelecida para a linguagem da filosofia, o santo graal buscado desde quando Tales de Mileto ergueu os olhos para o céu.

## BIBLIOGRAFIA

ANAND, BHUPINDER. S.; [2007], *A constructive definition of the intuitive truth of the Axioms and Rules of Inference of Peano Arithmetic* in *The Reasoner*, University of Kent, v.1, número 8, pp. 6-7.

ACKRILL, J.L. (trans.); [1963], *Aristotle: Categories and De Interpretatione*. Oxford: Clarendon Press.

AWODEY, S. E RECK, E. H.; [2002a], *Completeness and Categoricity. Part I: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic* in *History and Philosophy of Logic*, 1464-5149, Volume 23, nº 1, 2002, pp.1-30.

AWODEY, S. E RECK, E. H.; [2002b], *Completeness and Categoricity. Part II: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic* in *History and Philosophy of Logic*, 1464-5149, Volume 23, nº 2, 2002, pp.77-94.

AZAMBUJA, A.; [2005], *Sobre a Concepção de Verdade de Tarski* in revista *Abstracta – linguagem, mente e ação*, volume 5, número 2, Rio de Janeiro, p.24-61.

BELNAP, N.; [1993], *On Rigorous Definition* in *An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, Vol. 72, No. 2/3, Ed. Springer, pp.115-146.

CHATEAUBRIAND, O.; [2001], *Some Critical Remarks on Tarski's Semantic Conception of Truth*, in *Ontologia, Conhecimento e Linguagem – um encontro de filósofos latino-americanos*, Ulysses Pinheiro, Marco Ruffino, Plínio Junqueira Smith (org.), FAPERJ: MAUAD, Rio de Janeiro.

CUARÓN, B. G.; [1978], *La connotación: Problemas del significado*, El Colegio de México, México.

DE SOUZA, EDELICIO G. e VELASCO, PATRÍCIA D. N.; [2001], *Sobre alguns conceitos fundamentais da matemática – Alfred Tarski, traduzido e comentado por Patrícia Del Nero Velasco e Edelcio Gonçalves de Souza*, in *Revista Princípios* v.8 n.10, UFRN, Natal, Brasil, pp.187-209.

ECO, U.; [1995], *Os limites da interpretação*, Perspectiva, São Paulo

ETCHEMENDY, J.; [2008]. *Reflections on consequence*, in PATTERSON, D. (Ed.). *New Essays on Tarski and Philosophy*. New York: Oxford University Press, 2008. p. 263–299.

FEFERMAN, ANITA & SOLOMON; [2004], *Alfred Tarski: Life and Logic*, Cambridge University Press.

FILHO, B. B.; [2003], *Notas sobre o Conceito Aristotélico de Verdade* in *Cad. Hist. Fil. Ci.*, Campinas, Brasil, Série 3, v. 13, n. 2, p., jul.-dez, pp. 233-244.

FRAENKEL, A., BAR-HILLEL, Y. E LÉVY, A.; [1973]; *Foundations of Set Theory*, Collection *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, V.67, J. Barwise, D. Kaplan, H.J. Keisler, P. Suppes, A.S. Troelstra editors, Elsevier Science B.V., Amsterdam, Holanda, Segunda edição revisada, segunda reimpressão (2001).

GREEN, R. P. H. (trad.); [1996], *De Doctrina Christiana*, Oxford Early Christian Texts Serie.

HAACK, S.; [1978], *Filosofia das Lógicas*, tradução brasileira de 1998, Fundação Editora UNESP, São Paulo, 2002.

HENKIN, L.; [1979], 'Verdade e demonstrabilidade', in Morgenbasser, S. (org.), *Filosofia da Ciência*, Cultrix, 3a. ed., 1979, pp. 55-64.

HOBBS, T.; [1999], *De Corpore*, Librairie Philosophique J. Vrin.

KELLY, L. G.; [2002], *The mirror of grammar: theology, philosophy, and the Modistae*, John Benjamins Publishing Company.

KIRKHAM, RICHARD L.; [2008], *Teorias da Verdade – uma introdução crítica*, trad. Alessandro Zir, Editora Unisinos, São Leopoldo, RS, Brasil.

KRAUSE, D.; [2010], *Semântica para linguagens de primeira ordem – Resumo*, Disponível em <http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/cursos/LoPrOrSemantica.htm> , último acesso em set/2010.

MCKINSEY, J. C. C.; [1948/1949]; *A New Definition of Truth*, in *Synthèse*, vol. 7, nº6-A, p.428-433.

MILL, J. S.; [1974]; *The Collected Works of John Stuart Mill, Volume VII - A System of Logic Ratiocinative and Inductive, Being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation (Books I-III)*, ed. John M. Robson, Toronto: University of Toronto Press, London: Routledge and Kegan Paul.

MILLER, DAVID; [1989], *Russel, Tarsky, Gödel – An Internal Study Aid*, Department of Philosophy – University of Warwick.

NASCIMENTO, M. C. e FEITOSA, H. A.; [2005], *As Álgebras dos Operadores de Conseqüência*, in *Revista de Matemática Estatística*, Departamento de Matemática, UNESP, Bauru, SP, Brasil v.23, n.1, pp.19-30.

NEF, FRÉDÉRIC; [1995]; *Linguagem – uma abordagem filosófica*, Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro.

POPPER, KARL R.; [1993], *Unended Quest: An Intellectual Autobiography*, 1974. London: Routledge.

RUSSEL, B.; [1978], *Da denotação*, Coleção ‘Os pensadores’, Russell - Ensaios escolhidos, Abril Cultural, pp. 3-14.

SACKS, O.; [1996], *Um antropólogo em Marte*, Relógio D’Água, Lisboa.

SHOENFIELD, J. R.; [1967], *Mathematical Logic*, Addison-Wesley Publishing Company, Estados Unidos.

SIMPSON, T. M.; [1976], *Linguagem, realidade e significado*, Livraria Francisco Alves Editora, Rio de Janeiro..

STUMP, E. (trad.); [1988], *Boethius – In Ciceronis Topica*, Cornell University Press.

TARSKI, A.; [1983a], *The Establishment of Scientific Semantics*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.401-408.

TARSKI, A.; [1983b], *Concept of truth in formalized languages*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.152-278.

TARSKI, A.; [1983c], *On the Primitive Term of Logistic*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.1-23.

TARSKI, A.; [1983d], *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.60-109.

TARSKI, A.; [1983e], *Some Observations on the Concepts of  $\omega$ -Consistency and  $\omega$ -Completeness*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.279-295.

TARSKI, A.; [1983f], *Some Methodological Investigations on the Definability of Concepts*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.296-319.

TARSKI, A.; [1983g], *Investigations into the Sentential Calculus*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.38-59.

TARSKI, A.; [1983h], *On the Concept of Logical Consequence*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.409-420.

TARSKI, A.; [1983i], *On Some Fundamental Concepts of Metamathematics*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.30-37.

TARSKI, A.; [1983j], *Foundations of the Calculus of Systems*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.342-383.

TARSKI, A.; [1983k], *On Definable Sets of Real Numbers*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.110-142.

TARSKI, A.; [1983l], *On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories*, in *Logic, Semantics, Metamathematics – papers from 1923 to 1938*, Segunda Edição, Hackett Publishing Company, EUA, pp.384-392.

TARSKI, A.; [1990] – *A Concepção Semântica da Verdade e os Fundamentos da Semântica* in BRANQUINHO, JOÃO; [1990]; *Existência e Linguagem – ensaios de metafísica analítica*, Editora Presença, Lisboa, pp.74-118.

TARSKI, A.; [1994], *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*, editada por Jan Tarski, New York Oxford, Oxford University Press, 4ª edição.

TARSKI, A. [2006]; *Verdade e Demonstração* in *A Concepção Semântica da Verdade – Textos Clássicos de Tarski*; Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra, orgs., Editora UNESP, São Paulo, pp. 203-233.

TARSKI, A. & GIVANT, S. R.; [1987]; *A formalization of set theory without variables*, American Mathematical Society – Colloquium Publications, Volume 41, AMS Bookstore

VAUGHT, R. L.; [1974], *Model Theory Before 1945* in *Proceedings of the Tarski Symposium – Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Volume XXV, Ed. Henkin L. et al. Providence: American Mathematical Society, pp.153-173.

VEBLEN, O.; [1904], *A system of axioms for geometry* in *Transactions of the American Mathematical Society* 5, 343-384.

VELASCO, PATRÍCIA D. N.; [2004], *Sobre o operador de consequência de Tarski*. In: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C., P.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. (eds.). *Filosofia e história da ciência no Cone Sul: 3o Encontro*, Campinas: AFHIC, pp. 351-358. (ISBN 85-904198-1-9).

WOLEŃSKI, JAN; [1994], *Jan Łukasiewicz on the liar paradox, logical consequence, truth, and induction* in *Review of Modern Logic*, Volume 4, nº 4, Outubro, ISSN 1047-5982, pp.392-400.

WOLEŃSKI, JAN; [2003], *Lvov-Warsaw School* in <http://plato.stanford.edu/entries/lvov-warsaw>, acessado em 07/01/2009.

ZOPPI, M.; [2009], *La serità sull'uomo – l'antropologia di Anselmo d'Aosta*, Città Nuova Editore, Itália.

FONTES TRUETYPE USADAS: Times New Roman, Symbol, Arial Unicode Ms, Antraxia Goth 1938, Lucida Calligraphy, Palace Script MT