

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DE SÃO PAULO**

**O teorema de Frege: uma reavaliação do seu
projeto logicista**

Arthur Heller Britto

Mestrado em Filosofia

SÃO PAULO

2013

O teorema de Frege: uma reavaliação do seu projeto logicista

Arthur Heller Britto

Mestrado em Filosofia

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Filosofia, sob a orientação do Prof. Dr. Mario Ariel González Porta.

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

São Paulo, agosto de 2013

Banca examinadora

*Ao meu avô, por sempre ter me lembrado
as vantagens de uma boa cabeça.*

Agradecimentos

Agradeço a meus pais e à minha irmã, que sempre me incentivaram a fazer aquilo que me parecesse mais interessante.

Agradeço também a meu orientador, Prof. Mario Porta, que foi, sem dúvida, uma parte importantíssima na minha formação intelectual, assim como, em alguma medida, da formação de todos os alunos de filosofia da PUC-SP.

Finalmente, agradeço ao Prof. Edelcio que me ajudou muito na parte formal deste trabalho, dedicando uma grande parte de seu tempo ao chatíssimo trabalho de verificar comigo a validade das demonstrações aqui presentes.

Resumo

O objetivo desta dissertação é, em primeiro lugar, apresentar o núcleo fundamental do projeto logicista fregeano – o que ficou conhecido pelo nome de teorema de Frege – como um resultado matemático independente para, em seguida, avaliar o seu significado filosófico por meio da discussão acerca do conceito fregeano de lógica. Além disso, este trabalho contém dois anexos, nos quais se demonstra um teorema geral de recursão dentro de um sistema clássico de lógica de segunda ordem e se apresenta uma construção neofregeana dos números reais por meio de sequências de Cauchy.

Palavras-chave: teorema de Frege, logicismo, concepção fregeana de lógica.

Abstract

The objective of this dissertation is first to present the fundamental part of Frege's logicist project – that became known as Frege's theorem – as an independent mathematical result in order to then evaluate its philosophical significance through a discussion of Frege's concept of logic. Besides, there are two appendixes in which a general recursion theorem is proven inside a classical second-order logical system and a neofregean construction of the real numbers from Cauchy sequences is presented.

Key-words: Frege's theorem, logicism, Frege's conception of logic.

Sumário

Introdução	11
I O teorema de Frege	23
1 Apresentação do sistema $\mathfrak{F}$	25
2 Os axiomas de Peano-Dedekind	31
3 Derivação dos Axiomas de Peano-Dedekind	37
II O significado do teorema de Frege	47
4 A consistência do sistema $\mathfrak{F}$	49
5 A logicidade do sistema $\mathfrak{F}$	53
5.1 A discussão sobre a logicidade de sistemas de lógica de segunda ordem	54
5.2 A concepção fregeana de lógica	58
5.2.1 A concepção kantiana de lógica	61
5.2.2 Aplicação das noções de generalidade e formalidade ao estudo da concepção fregeana de lógica	65

	9
5.3 Conclusão acerca da logicidade de $\mathfrak{F}$	70
Anexo A. O teorema geral de recursão	75
Anexo B. Para além dos números naturais	81
Referências Bibliográficas	86

Introdução

Se há um aspecto da filosofia de Frege ao qual pode-se atribuir uma certa centralidade com respeito à totalidade da sua obra, esse aspecto é, sem dúvidas, o seu projeto logicista, i.e., o seu esforço no sentido de fundamentar a aritmética na lógica. De fato, praticamente todas as idéias filosóficas desenvolvidas na obra fregeana nasceram com o objetivo de esclarecer e justificar a relação estreita que ele acreditava existir entre essas duas disciplinas, por mais que essas idéias tenham, eventualmente, se desvincilhado do contexto no qual elas se originaram e tenham se desenvolvido em teorias independentes, com diferentes graus de relevância própria. A título de exemplo, podemos notar esse fato, de forma particularmente clara, na reinterpretação de sentenças do tipo “A é B” como o preenchimento de uma função de um tipo especial por um certo argumento. Essa mudança de perspectiva foi efetuada por Frege, num primeiro momento, com o objetivo de proporcionar uma compreensão mais detalhada da noção de quantificação, tal como ela se dá na linguagem matemática, para apenas depois se desdobrar em uma das idéias básicas da filosofia da linguagem enquanto uma teoria independente da sua aplicação na linguagem matemática.

Frege viveu e escreveu na passagem do século XIX para o século XX, uma época na qual se nota um grande esforço coletivo para livrar a matemática de fundamentos intuitivos. Com efeito, a concepção dominante da matemática durante a primeira metade do século XIX era a concepção kantiana, segundo a qual os juízos matemáticos seriam sintéticos *a priori*, na medida em que esses juízos seriam fundados na intuição pura do espaço e do tempo. Agora,

para se opor a essa posição, o que certos matemáticos do século XIX – como Bolzano, Weierstraß, Hilbert e Dedekind – procuravam realizar era uma fundamentação de proposições matemáticas construída exclusivamente a partir de encadeamentos lógicos entre proposições e que, portanto, não apelava a nenhum tipo de intuição. Surgia, assim, a idéia rigorosa de demonstração matemática que permeou todo o desenvolvimento dessa ciência até os dias de hoje.

Um exemplo desse movimento é um teorema de análise real conhecido como teorema de Bolzano ou teorema do anulamento, que diz respeito a uma propriedade fundamental de funções contínuas com valores reais.¹ Intuitivamente, pode-se explicar a noção de continuidade de uma certa função f definida num intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ a valores reais dizendo que seu gráfico pode ser desenhado com um lápis em uma folha de papel sem retirar o lápis da folha. Nesse sentido, a função cujo gráfico está representado na figura 1 abaixo é contínua.

¹Esse teorema foi demonstrado pela primeira vez de forma puramente analítica por B. Bolzano no artigo “Rein analytischer Beweis der Lehrsätze, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewären, wenigstens eine reelle wurzel der Gleichung liege” de 1817. Um outro exemplo interessante nesse sentido é o teorema das curvas de Jordan, cuja demonstração infelizmente é intrincada demais para ser exposta aqui. Uma curva no plano real é dita de Jordan, em homenagem ao matemático francês Camille Jordan, se ela for fechada e simples. Isso significa que, se ela for dada por uma função paramétrica $\alpha : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, então $\alpha(a) = \alpha(b)$ e α é injetora em todo o intervalo $[a, b]$, ou seja, ela não se autointercepta. Exemplos de curvas de Jordan são circunferências, elipses, polígonos etc. Então, o teorema das curvas de Jordan diz que dada uma curva de Jordan C , C divide o plano em duas regiões conexas, uma limitada, dita o interior de C , e outra ilimitada, dita o seu exterior. É muito fácil observar esse resultado geometricamente para curvas simples como circunferências, mas a demonstração desse fato para *todas* as curvas de Jordan requer um refinamento analítico enorme e só pode ser realizada sem qualquer apelo à intuição.

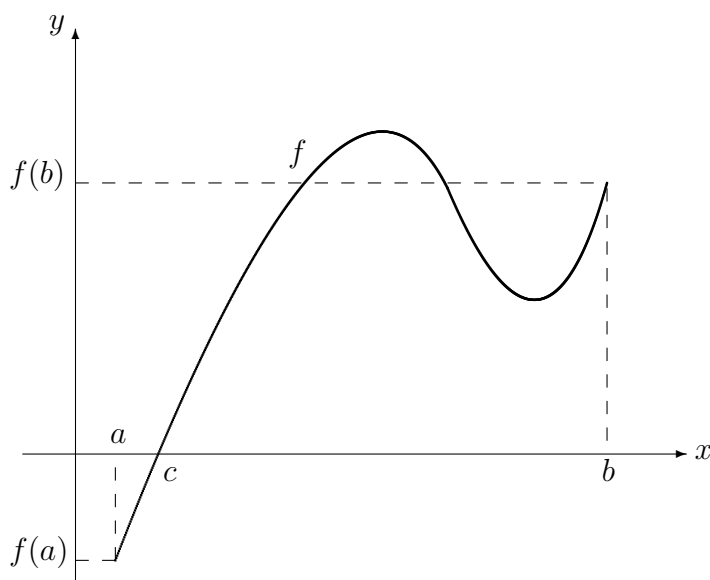


Figura 1. O gráfico de uma função contínua.

Notemos que, nesse caso particular, ocorre $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Nessa situação, parece claro que o gráfico de f deve cruzar o eixo x ao menos uma vez entre os pontos a e b e, de fato, isso ocorre no ponto c . O que notou Bolzano, no entanto, é que essa proposição deveria ser demonstrada sem apelo à intuição ou mesmo a uma explicação da continuidade de f que seja composta de um conteúdo intuitivo, como claramente é o caso da explicação dada acima. Seria necessário apresentar uma definição puramente lógica desse conceito e, então, por meio desta demonstrar que, de fato, a asserção feita acima é verdadeira. Consideremos, assim, a seguinte definição do conceito de continuidade, que surgiu no século XIX, se tornou canônica e é uma das definições mais importantes da matemática moderna:

Definição. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x \in [a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é *contínua em x* , se, para todo número real $\epsilon > 0$, existir

um número real $\delta > 0$, tal que, para todo $y \in [a, b]$, se $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. f é dita *contínua*, se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

A partir dela, então, podemos demonstrar o teorema de Bolzano, que diz o seguinte:

Teorema de Bolzano. *Dada uma função contínua f definida num intervalo $[a, b]$ a valores reais com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, existe $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = 0$*

Antes, no entanto, precisamos dizer algo a respeito de uma propriedade básica dos números reais e demonstrar um lema. Começamos pelo lema.

Lema. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $x \in [a, b]$ com $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$. Então, existe um intervalo $]x - \delta, x + \delta[$, tal que, no primeiro caso, $f(y) < 0$, para todo $y \in]x - \delta, x + \delta[$, e, no segundo, $f(y) > 0$, para todo $y \in]x - \delta, x + \delta[$.*

Demonstração. Como $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$, podemos tomar $\epsilon > 0$ com $\epsilon < |f(x)|$. Notemos, então, que, se $z \in]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$, então, no primeiro caso, $z < 0$, pois

$$z < f(x) + \epsilon < f(x) + |f(x)| = f(x) - f(x) = 0;$$

e, no segundo, $z > 0$, pois

$$z > f(x) - \epsilon > f(x) - |f(x)| = f(x) - f(x) = 0.$$

Agora, como f é contínua em x , existe, por definição, um número real $\delta > 0$, tal que, para todo $y \in [a, b]$, se $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, ou seja, existe um intervalo $]x - \delta, x + \delta[$, tal que, se $y \in]x - \delta, x + \delta[$, então $f(y) \in]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$. Assim, concluímos que, no primeiro caso, $f(y) < 0$, para todo $y \in]x - \delta, x + \delta[$, e, no segundo, $f(y) > 0$, para todo $y \in]x - \delta, x + \delta[$.

Dado um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, e $x \in \mathbb{R}$, dizemos que x é um *limitante superior* de A , se $y \leq x$, para todo $y \in A$. Além disso, x é dito o *supremo* de

A , se, para todo z limitante superior de A , $x \leq z$. Agora, uma propriedade importante dos números reais é a sua completude, que pode ser caracterizada pelo fato que todo subconjunto não vazio de números reais limitado superiormente possui um supremo. Munidos desse aparato conceitual, então, podemos tentar demonstrar de forma puramente lógica o teorema de Bolzano da seguinte maneira:

Demonstração do teorema de Bolzano. Seja f como requer o teorema e consideremos o conjunto $S = \{x \in [a, b] | f(x) < 0\}$. Temos que S é limitado superiormente em $\mathbb{R}$, pois, por exemplo, $x \leq b$, para todo $x \in S$. Seja, então, c o supremo de S . Vamos mostrar que é impossível termos $f(c) < 0$ ou $f(c) > 0$, de forma a concluir que $f(c) = 0$. De fato, se $f(c) < 0$, então, pelo lema, existiria um intervalo $]c - \delta, c + \delta[$, tal que $f(x) < 0$, para todo $x \in]c - \delta, c + \delta[$. Mas, então, existiria $x \in]c, c + \delta[$ com $f(x) < 0$, o que contradiria o fato de que c é um limitante superior de S . Agora, se $f(c) > 0$, então, outra vez pelo lema, existiria um intervalo $]c - \delta, c + \delta[$, tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in]c - \delta, c + \delta[$. Mas, então, existiria $x \in]c - \delta, c[$ limitante superior de S estritamente menor que c , o que contradiria o fato de que c é o supremo de S e, portanto, o *menor* limitante superior de S . Logo, temos o teorema.

Assim, temos um exemplo claro de como a idéia de que resultados intuitivamente óbvios deviam ser demonstrados de forma lógica se fez presente na matemática a partir do século XIX. Mas, agora, voltemos às considerações mais específicas acerca do projeto logicista de Frege lembrando que, de acordo com Kant, os juízos se distinguem de duas maneiras diferentes. Por um lado, eles se distinguem, de acordo com o modo através do qual sua eventual validade poderia se fundamentar, entre juízos *a posteriori* e *a priori* e, por outro, de acordo com a relação que se estabeleceria entre suas partes constituintes, entre juízos analíticos e sintéticos. De acordo com a primeira distinção, *a posteriori* seriam juízos cuja validade se fundamentaria na experiência e *a priori* juízos cuja validade não dependeria da experiência – uma distinção

simples e sem muitos problemas. Todavia, a segunda distinção se fundava na concepção, que Kant herdara de Aristóteles, da forma proposicional como composta de sujeito, predicado e cópula. Assim, um juízo seria analítico, se o conceito que figura na posição de predicado já estivesse contido no conceito que figura na posição de sujeito, e sintético, caso contrário. Agora, como notamos acima, Frege se distancia dessa concepção aristotélica da forma proposicional, de modo que, para não abandonar a terminologia kantiana, ele precisou redefinir em que consistiria a analiticidade de um juízo.

Para isso, Frege notou que, os juízos *a priori* são, por definição, juízos – ou, numa terminologia mais atual, proposições – cuja validade não pode ser fundamentada através da experiência. Mas isso significa, numa formulação positiva, que essa fundamentação deve se dar por meio de uma *demonstração*, i.e., que se deve procurar justificar a sua validade unicamente através de passos lógicos, a partir da validade de certas proposições mais fundamentais. Portanto, o que propõe Frege é que, se nesse percurso parte-se apenas de proposições da lógica e lança-se mão apenas de definições cujo emprego está justificado unicamente por leis lógicas, então, diz-se que a proposição cuja validade foi assim justificada é analítica. Caso contrário, i.e., se se utilizou em algum momento de leis alheias à lógica, então a proposição é dita sintética. Nesse sentido, então, Frege concorda com Kant que as proposições que formam a geometria têm caráter sintético. Todavia, esse acordo não é transportado para o caso da aritmética. De fato, isso se deixa mostrar, segundo Frege, na impossibilidade de se supor, sem incorrer em contradições, a negação das leis da aritmética, enquanto, por outro lado, a suposição da negação de algum axioma da geometria euclidiana, que é aquela que exprime a nossa intuição do espaço físico, gera simplesmente uma nova geometria – não euclidiana, mas que, a princípio, poderia ser tão consistente quanto aquela. De fato, ele diz que

[d]o ponto de vista do pensamento conceitual, pode-se sempre assumir o contrário deste ou daquele axioma geométrico, sem incorrer em contradições ao serem feitas deduções a partir de tais

assunções contraditórias com a intuição. Esta possibilidade mostra que os axiomas geométricos são independentes entre si e em relação às leis lógicas primitivas, e portanto sintéticos. Pode-se dizer o mesmo dos princípios da ciência dos números? Não teríamos uma total confusão caso pretendêssemos rejeitar um deles? Seria então ainda possível o pensamento? O fundamento da aritmética não é mais profundo que o de todo saber empírico, mais profundo mesmo que o da geometria? As verdades aritméticas governam o domínio do enumerável. Este é o mais inclusivo; pois não lhe pertence apenas o efetivamente real, não apenas o intuível, mas todo o pensável. Não deveriam portanto as leis dos números manter com as do pensamento a mais íntima das conexões? (*GA*, §14)

Assim, chegamos ao projeto logicista fregeano: mostrar que a aritmética é composta de proposições analíticas, ou seja, de proposições cuja fundamentação independe de quaisquer leis diferentes daquelas puramente lógicas.

Um primeiro passo rumo à concretização desse projeto, foi, então, dado por Frege em 1884 nos *Fundamentos da aritmética* (*GA*), de onde provém a passagem acima. Nessa obra, Frege discute de forma crítica diversas concepções acerca da natureza dos números naturais, sustentadas na época tanto por matemáticos, quanto por filósofos; mais notadamente, são discutidos o empirismo, o psicologismo e a posição kantiana. Então, Frege apresenta a sua própria definição de número natural em termos de extensões de conceitos, i.e., “o número que convém ao conceito F é a extensão do conceito ‘equinúmero ao conceito F ’” (*GA*, §68), com a condição que um conceito G é dito equinúmero a um outro conceito F , se existir uma correspondência biunívoca entre F e G . Finalmente, são demonstradas de maneira informal certas proposições que expressam propriedades dos objetos que caem sobre esse conceito de número natural, de forma a mostrar que essa definição se adéqua de fato àquilo que normalmente se compreende através desse conceito.

No entanto, Frege admite que todo o trabalho realizado nos *GA* não pode

pretender definir a questão de uma vez por todas a favor da posição logicista. De fato, ele próprio diz na conclusão dessa obra:

Não pretendo ter tornado mais do que verossímil a natureza analítica das proposições aritméticas, visto que ainda se pode duvidar que sua demonstração possa ser conduzida a partir de leis puramente lógicas, que em alguma parte não se tenha imiscuído uma premissa de outra espécie. Nem é essa dúvida completamente enfraquecida pelas indicações que dei com respeito à demonstração de algumas proposições; ela pode ser afastada apenas por meio de uma cadeia de raciocínio sem lacunas, de modo que não seja dado nenhum passo que não se conforme a um dos poucos modos de inferência reconhecidos como puramente lógicos. (*GA*, §90)

O que Frege reconhece aqui é simplesmente a impossibilidade de se comprovar a posição logicista por meio de argumentos que deixam de lado o núcleo do problema. De forma mais explícita, se uma proposição é analítica quando, e somente quando, ela puder ser demonstrada unicamente a partir de leis lógicas, então para mostrar que uma proposição é analítica é suficiente, mas também – o que é o importante aqui – é *necessário* apresentar uma tal demonstração. Além disso, essa demonstração deve ser dada como uma “cadeia de raciocínio sem lacunas”, pois, de fato, se o que interessa é mostrar que não há ingerência de leis alheias à lógica na demonstração de uma certa proposição, então cumpre apresentar essa demonstração nos seus mais sutis detalhes, com todos os passos completamente explicitados, de forma a garantir que cada um deles é um passo essencialmente lógico e que não houve de forma alguma apelo a verdades dadas apenas através da intuição.

A confirmação definitiva do logicismo precisava, então, de um último esforço e Frege se propôs realizá-lo nas *Leis básicas da aritmética* (*GGA*). Nessa obra, publicada em dois volumes, muito provavelmente de forma in-

completa,² Frege almejava efetivamente apresentar uma demonstração das leis da aritmética, partindo somente de proposições que eram tomadas como puramente lógicas. Para isso, ele lançou mão de um sistema simbólico formal parecido com aquele apresentado, pela primeira vez em 1879 na *Conceitografia* (*B*), e que pode ser concebido inicialmente como um sistema de lógica de predicados de segunda ordem, ao qual foi acrescentado um novo axioma para governar o uso de termos que denotam entidades chamadas por Frege de cursos de valores (*Wertverläufe*).

Dada uma função de um único argumento φ , o sistema das *GGA* permitia associar a essa função um único objeto, denotado por $\dot{\epsilon}.\varphi(\epsilon)$ e chamado de curso de valores (*Wertverlauf*) da função φ . Então, para estabelecer uma condição de identidade para cursos de valores, Frege se utilizou de um axioma, chamado por ele de Lei Básica V, que poderia ser formalizado em um sistema de lógica de segunda ordem como

$$(V) \quad \forall\varphi\forall\psi(\dot{\epsilon}.\varphi(\epsilon) = \dot{\epsilon}.\psi(\epsilon) \iff \forall x(\varphi(x) = \psi(x))).$$

Agora, se considerarmos um conceito F , como temos, segundo Frege, que um conceito é uma função de um argumento cujo valor é sempre um valor de verdade, então podemos considerar o seu curso de valores $\dot{\epsilon}.F(\epsilon)$. Este é chamado por Frege de *extensão* do conceito F .

Infelizmente, essa suposição irrestrita da existência de cursos de valores, regulada pelo princípio de extensionalidade contido na Lei Básica V, faz com que o sistema das *GGA* se torne inconsistente. De fato, seja $R(x)$ a sentença

$$\forall F(x = \dot{\epsilon}.F(\epsilon) \Rightarrow \neg F(x)).$$

Então, como vimos acima, podemos supor no sistema das *GGA* que existe o curso de valores do predicado $R(\xi)$, que denotamos por $r = \dot{\epsilon}.R(\epsilon)$. Agora,

²Frege quase certamente teria preparado para a publicação um terceiro volume com a continuação da sua construção dos números reais, interrompida no volume II – muito provavelmente por pressões editoriais de ordem financeira –, não fosse o total estado de desânimo que lhe foi trazido pela fatídica carta de Russell na qual é exposto o paradoxo hoje conhecido como paradoxo de Russell e pela sua subsequente incapacidade de saná-lo.

é verdade que $R(r)$? Suponhamos que sim, de forma que, pela definição do predicado $R(\xi)$, temos que, para todo conceito F , se $r = \dot{\epsilon}.F(\epsilon)$, então $\neg F(r)$. Mas $r = \dot{\epsilon}.R(\epsilon)$, de forma que concluímos que $\neg R(r)$. Por outro lado, se não for verdade que $R(r)$, então, outra vez pela definição do predicado $R(\xi)$, existe um conceito F , tal que $r = \dot{\epsilon}.F(\epsilon)$ e $F(r)$. Agora, pela Lei Básica V, como $r = \dot{\epsilon}.F(\epsilon)$, $r = \dot{\epsilon}.R(\epsilon)$ e $F(r)$, temos que $R(r)$. Logo, temos que $R(r)$ se, e somente se, $\neg R(r)$, o que é uma contradição. Esse é o famoso paradoxo de Russell, comunicado a Frege por Bertrand Russell em uma carta datada de 16 de junho de 1902, e responsável pela eventual desistência por parte daquele do seu projeto logicista nos amargurados anos finais da sua vida.

Com efeito, a descoberta da inconsistência do sistema das *GGA*, foi a grande responsável, não só pelo eventual abandono por parte do próprio Frege de seu projeto logicista, mas também por um verdadeiro sentimento de aversão a esse projeto particular e, em geral, dada as dificuldades enfrentadas por Russell, o próprio descobridor dessa inconsistência, e por todos que se propuseram sanar o paradoxo no qual esse projeto incorria, a qualquer tipo de logicismo, que se espalhou pela filosofia da matemática durante boa parte do século XX. No entanto, a segunda metade desse século trouxe uma pequena surpresa que talvez resgate uma certa medida de respeitabilidade ao projeto fregeano.

Já nos *GA*³, a estratégia usada por Frege para demonstrar as leis fundamentais da aritmética a partir da lógica, foi primeiro mostrar que, da definição de número, decorre um certo princípio, modernamente conhecido como Princípio de Hume (PH)⁴, para, então, mostrar que essas leis são conseqüências desse princípio. Atentando para esse fato, Crispin Wright, no livro *Frege's conception of numbers as objects* de 1983 ([60]), se propôs reviver o projeto logicista mostrando que, de fato, o único uso indispensável

³§§ 67 e ss.

⁴Esse nome foi dado por George Boolos por causa da menção a Hume no próprio texto dos *GA* quando esse princípio é introduzido. No entanto, a passagem de Hume diz respeito apenas a conjuntos finitos, de forma que um nome melhor talvez fosse princípio de Cantor.

da definição de número natural em termo de extensões no texto fregeano se dá na demonstração do PH e que deste é possível demonstrar um certo conjunto de leis aritméticas que podem ser ditas fundamentais num sentido determinado. Assim, surge uma nova corrente chamada neo-logicismo que se funda na constatação do seguinte resultado matemático, conhecido na literatura como teorema de Frege: partindo de um sistema de lógica de predicados de segunda ordem acrescido do PH é possível demonstrar um conjunto de proposições que forma uma axiomatização da aritmética. Na primeira parte deste trabalho, então, veremos exatamente o que esse resultado quer dizer e como ele pode ser obtido.

Por outro lado, a simples constatação desse resultado matemático não é suficiente para reivindicar um ressurgimento do logicismo nos moldes fregeanos. Para isso, é necessário, de acordo com a concepção fregeana, que esse sistema no qual uma axiomatização da aritmética é derivável seja, de fato, um sistema de *lógica* – e, o que não é tão óbvio, como vemos no caso do próprio Frege, que esse sistema de lógica seja consistente. Dessa maneira, na segunda parte deste trabalho abordaremos essas questões com ênfase numa tentativa de remissão desse problema à uma explicitação da concepção de lógica presente nos textos fregeanos.

Parte I

O teorema de Frege

Capítulo 1

Apresentação do sistema $\mathfrak{F}$

Começamos nossa exposição do teorema de Frege, de forma um pouco paradoxal, nos afastando do sistema lógico proposto por Frege e no qual ele realiza as suas demonstrações formais. O motivo para isso é que, por mais que Frege tenha revolucionado a história da lógica introduzindo de forma clara e rigorosa boa parte das idéias e conceitos que perpassam a lógica moderna, ocorre que, de fato, os sistemas de lógica ditos clássicos, que são estudados atualmente, apresentam diferenças fundamentais com respeito aos sistemas utilizados por Frege e que serão analisadas mais adiante. O que nos propomos nesse capítulo, então, é apresentar uma demonstração do teorema de Frege para uma extensão de um sistema clássico de lógica, ou seja, nesse momento apresentaremos uma demonstração dos axiomas de Peano-Dedekind a partir de um sistema de lógica de predicados de segunda ordem acrescido do princípio de Hume, que chamaremos de sistema $\mathfrak{F}$.

Primeiro, então, apresentaremos a estrutura sintática desse sistema. Seu alfabeto é formado por um número enumerável de constantes e variáveis de primeira ordem, referentes a objetos, $a, b, c, \dots, m, n, k, \dots, x, y, z, \dots$; um número enumerável de variáveis de segunda ordem, referentes a conceitos $F, G, H, \dots$ ou a relações $R, S, T, \dots$; e as seguintes constantes lógicas:

$\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =, \equiv$ e $\mathfrak{p}$.¹ Além dessas constantes, temos ainda as seguintes relações primitivas Φ e Ψ_n , para cada $n \geq 2$, que são, intuitivamente, as relações de satisfação. A primeira é uma relação binária que toma por argumentos um objeto e um conceito, nessa ordem, e a segunda é, para cada $n \geq 2$ uma relação $(n+1)$ -ária, que toma como argumentos n objetos e uma relação n -ária, nessa ordem. No entanto, de forma a simplificar a notação, escreveremos simplesmente $F(x)$ para $\Phi(x, F)$ e $R(x_1, \dots, x_n)$ para $\Psi(x_1, \dots, x_n, R)$.

As fórmulas desse nosso sistema são definidas da forma usual por recursão. Primeiro, dizemos que as variáveis de primeira ordem são termos do nosso sistema e estipulamos que, dado um conceito F , $\mathfrak{p}F$ é um termo. Agora, se a for um termo e F um conceito, então $F(a)$ será uma fórmula; se $a_1, \dots, a_n$ forem termos e R uma relação n -ária, então $R(a_1, \dots, a_n)$ será uma fórmula; e, se a, b forem termos, então $a = b$ será uma fórmula. Além disso, se F, G forem variáveis de segunda ordem (i.e., conceitos ou relações n -árias), então $F \equiv G$ será uma fórmula. Finalmente, se A, B forem fórmulas, então os seguintes conjuntos de símbolos também serão fórmulas:

- (i) $\sim A$;
- (ii) $A \vee B$;
- (iii) $A \wedge B$;
- (iv) $A \rightarrow B$;
- (v) $A \leftrightarrow B$;
- (vi) $\forall x A$;

¹O símbolo $\equiv$ será utilizado para expressar a identidade entre conceitos ou relações, de forma a reservar a identidade $=$ apenas para expressar a relação entre objetos. Certamente, muitas dessas constantes lógicas não precisam ser introduzidas como símbolos primitivos. Por exemplo, é muito comum definir $A \leftrightarrow B$ como $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, $A \rightarrow B$ como $\sim A \vee B$ ou até mesmo, seguindo o exemplo de Leibniz, o conceito de identidade fazendo $a = b$ se, e somente se, $\forall F(F(a) \leftrightarrow F(b))$. No entanto, aqui nossa preocupação é simplesmente apresentar nosso sistema da forma mais clara e concisa possível e não nos engajar em discussões concernentes a questões de redundância e exigüidade.

(vii) $\exists x A$;

(viii) $\forall F A$;

(ix) $\exists F A$.

Podemos tomar como axiomas qualquer conjunto de axiomas que gerem um sistema completo de lógica de predicados de primeira ordem com identidade,² junto com alguns outros axiomas. Primeiro, axiomas de *compreensão*, dizendo que cada fórmula com uma variável livre define um conceito e, para cada $n \geq 2$, cada fórmula com n variáveis livres define uma relação n -ária, ou seja, dadas fórmula $\phi(x)$ e $\psi(x_1, \dots, x_n)$ da nossa linguagem,

$$\exists F \forall x (F(x) \leftrightarrow \phi(x))$$

e

$$\exists R \forall x_1 \dots \forall x_n (R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)),$$

desde que F e R não apareçam livres em $\phi(x)$ e $\psi(x_1, \dots, x_n)$, respectivamente. Além desses dois axiomas, precisamos de mais dois axiomas de *extensionalidade* para regular a identidade de conceitos e de relações, a saber,

$$F \equiv G \leftrightarrow \forall x (F(x) \leftrightarrow G(x))$$

e, para cada $n \geq 2$,

$$R \equiv S \leftrightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n (R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow S(x_1, \dots, x_n)).$$

Desse último grupo de axiomas, decorre a unicidade dos conceitos e relações cuja existência é garantida pelos axiomas de compreensão. Assim, podemos dar um nome para tais conceitos e relações definidos pelas fórmulas $\phi(x)$ e $\psi(x_1, \dots, x_n)$, a saber, $[x : \phi(x)]$ e $[x_1, \dots, x_n : \psi(x_1, \dots, x_n)]$, respectivamente.³

²Por exemplo, o sistema apresentado em [38].

³Aqui se encontra uma das diferenças mais marcantes entre nosso sistema e os sistemas utilizados por Frege. Nestes, conceitos e relações diferiam de forma essencial de objetos, estes sendo designados por nomes e aqueles pelas próprias fórmulas com variáveis livres,

Finalmente, temos o Princípio de Hume, que regula o operador $\mathfrak{H}$. Ele pode ser apresentado diretamente, utilizando-se apenas de símbolos primitivos,⁴ mas essa apresentação se mostra demasiadamente desajeitada e obscura. Nos parece mais claro formular esse princípio após algumas definições.

Definição. Dados dois conceitos F , G e uma relação R , dizemos que R é uma *correspondência* biunívoca entre F e G , se R satisfizer as seguintes condições:

- (i) $\forall x(F(x) \rightarrow \forall y\forall z(R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow y = z))$;
- (ii) $\forall y(G(y) \rightarrow \forall x\forall z(R(x, y) \wedge R(z, y) \rightarrow x = z))$;
- (iii) $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge R(x, y)))$;
- (iv) $\forall y(G(y) \rightarrow \exists x(F(x) \wedge R(x, y)))$.

Dizemos que F e G são *equinumericos* e introduzimos em nosso sistema o símbolo $\approx$ para denotar esse fato como $F \approx G$, se existir uma correspondência biunívoca entre F e G .

Então, podemos expressar nosso último axioma como

ditas, na linguagem de Frege, incompletas ou insaturadas. No entanto, a forma utilizada aqui possui a grande vantagem de proporcionar uma maior clareza na identificação das variáveis livres de conceitos e relações, uma vez que estas se encontram explicitadas antes do símbolo ‘:’, além de não influenciar nas discussões filosóficas posteriores, pois, mesmo que conceitos agora sejam referidos por expressões saturadas (notemos, porém, que no tempo de Frege não havia sido criado o cálculo λ de onde nossa notação provém, de forma que esse tipo de saturação de uma expressão insaturada ‘ $\phi(\xi)$ ’ não poderia ter sido considerado por ele) estes continuam possuindo um estatuto completamente distinto daquele dos objetos – o que parece ser a tese filosoficamente relevante para Frege. Por exemplo, notemos que uma expressão do tipo ‘ $[x : \phi(x)] = a$ ’ não é bem formada no nosso sistema, uma vez que uma expressão do tipo ‘ $[x : \phi(x)]$ ’ só pode figurar em um dos lados da relação ‘ $\equiv$ ’, que é a relação de identidade para entidades de segunda ordem.

⁴Nesse caso, ele seria expresso como $\mathfrak{H}F = \mathfrak{H}G \leftrightarrow \exists R(\forall x(F(x) \rightarrow \forall y\forall z(R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow y = z)) \wedge (\forall y(G(y) \rightarrow \forall x\forall z(R(x, y) \wedge R(z, y) \rightarrow x = z)) \wedge (\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge R(x, y))) \wedge (\forall y(G(y) \rightarrow \exists x(F(x) \wedge R(x, y))))$.

$$(PH) \quad \eta F = \eta G \leftrightarrow F \approx G.$$

As regras de inferência desse sistema são as regras normalmente empregadas em sistemas de lógica de predicados de primeira ordem, como, por exemplo, *modus ponens* e as regras referentes a introdução e retirada dos quantificadores, agora estendidas também para a quantificação sobre conceitos e relações. O símbolo clássico para expressar a dedutibilidade de uma fórmula dentro de um sistema lógico é $\vdash$, que remete diretamente ao traço de juízo de Frege, apresentado pela primeira vez já na sua primeira obra lógica, o *Begriffsschrift*. Assim, por exemplo, temos $\vdash A \rightarrow A$, para toda fórmula A escrita na linguagem do nosso sistema e, em particular, que

$$\vdash \eta F = \eta G \vee (\forall x(F(x) \wedge \sim G(x)) \rightarrow \eta F = \eta G \vee (\forall x(F(x) \wedge \sim G(x))),$$

mesmo que não seja verdade que

$$\vdash \eta F = \eta G \vee (\forall x(F(x) \wedge \sim G(x))).^5$$

Supomos aqui, sem argumentação, mas de certa forma confiantes, que é possível emular em sistemas de lógica de predicados a argumentação matemática corriqueira. Assim, de forma a tornar a exposição um pouco mais aprazível, argumentaremos, nas demonstrações que seguem, na linguagem natural e esperamos que o leitor possa se convencer da possibilidade de formalizar no nosso sistema, restrito a quaisquer conjuntos de regras de inferência suficientemente extensos para fazê-lo completo, os argumentos que serão apresentados a seguir, realizando as interpretações usuais dos símbolos $\sim$, $\wedge$, $\vee$ etc. como, respectivamente, as conjunções “não”, “e”, “ou” etc. e os símbolos $\forall$ e $\exists$ como as expressões “para todo” e “existe”.

⁵Outra vez notamos que todos esses conceitos são muito bem explicados em livros de lógica como [38].

Capítulo 2

Os axiomas de Peano-Dedekind

Como vimos, o projeto logicista de Frege pode ser descrito como uma tentativa de mostrar que a verdade de proposições aritméticas pode ser reduzida à verdade de proposições da lógica pura, utilizando-se nessa empreitada apenas definições e formas de inferência justificadas por leis lógicas. Agora, para isso, é necessário apresentar, de fato, como uma tal redução poderia ser realizada, ou seja, é necessário que se apresente de forma explícita uma *demonstração* das leis aritméticas dentro de um sistema formal de lógica. Todavia, vê-se facilmente que há um número infinito de proposições aritméticas. Por exemplo, $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $0 + 2 = 2, \dots$ são todas proposições aritméticas. Assim, é impossível apresentar, de forma explícita, uma demonstração do tipo requerido para cada proposição aritmética. O que se pode fazer, no entanto, é apresentar uma tal demonstração para um certo conjunto finito de proposições que, por sua vez são suficientes para demonstrar todas as outras proposições aritméticas. Esse conjunto é dito uma *axiomatização da aritmética* e as proposições contidas nele são ditas *axiomas aritméticos*.

Infelizmente, com o teorema de incompletude de Gödel, sabe-se que é impossível encontrar uma axiomatização correta e completa para a aritmética, isto é, sabe-se que dado um sistema de axiomas aritméticos, se deles não for possível derivar uma contradição, então existe uma proposição escrita na

linguagem desses axiomas que não é passível de ser demonstrada partindo-se desses axiomas e cuja negação também não é passível de ser demonstrada. Entretanto, nem tudo está perdido. Existem, de fato, axiomatizações de partes consideráveis da aritmética – tão consideráveis que, antes dos resultados de Gödel, acreditava-se que elas eram realmente axiomatizações de *toda* a aritmética. Uma dessas axiomatizações são os chamados axiomas de Peano-Dedekind.

Esses axiomas foram apresentados por Peano no seu *Arithmetices principia* de 1889 de forma praticamente idêntica à forma como eles são concebidos atualmente; no entanto, é justo lembrar que Dedekind já os havia de certa forma vislumbrado na sua definição de sistema simplesmente infinito, apresentada no pequeno livro *Was sind und was sollen die Zahlen?* de 1888 – o que justifica o nome dado a esses axiomas. O que esses axiomas fazem é definir um conceito – ou uma classe de objetos, que são exatamente os objetos que caem sob esse conceito – que podemos denotar por $N(x)$ e compreender de forma intuitiva como o conceito de *número natural*. Para enunciá-los, então, é necessário empregar uma linguagem que contenha alguns ingredientes indispensáveis. Em primeiro lugar, são necessárias variáveis $x, y, z, \dots$ para nos referirmos a objetos e $F, G, \dots$ para nos referirmos a conceitos;¹ depois, devemos ter o símbolo de identidade $=$, com a sua conotação usual (além, é claro, da sua negação usual $\neq$); e, finalmente, é necessário que distingamos um símbolo 0 e uma relação entre objetos que denotaremos, com um símbolo de Frege, por f . Feitas, assim, essas suposições preliminares, podemos enunciar os axiomas de Peano-Dedekind da seguinte maneira:

A1. $N(0)$;

A2. se $N(x)$ e $f(x, y)$, então $N(y)$;

¹Aqui poderíamos falar de classes ou conjuntos ao invés de conceitos e, de fato, essa costuma ser a abordagem mais corriqueira desse tema. No entanto, conceitos possuem um caráter mais fundamental para Frege do que classes, que são, de certa maneira, objetos derivados de conceitos; e, além disso, aqueles irão jogar um papel muito mais fundamental no que se segue, enquanto estas aparecerão, quando muito, apenas de forma incidental.

- A3. para todo x e todo y , se $f(x, y)$, então $0 \neq y$;
- A4. para todo x , se $N(x)$, então existe y , tal que $f(x, y)$;
- A5. Para todo x , todo y e todo z , se $f(x, y)$ e $f(x, z)$, então $y = z$;
- A6. para todo x , todo y e todo z , se $f(x, z)$ e $f(y, z)$, então $x = y$;
- A7. dado um conceito F , se $F(0)$ e, para todo x e todo y , $F(x)$ e $f(x, y)$ implicar $F(y)$, então, para todo x , $N(x)$ implica $F(x)$.

Os axiomas 4 e 5 caracterizam a relação f como aquilo que modernamente se chama de uma função nos números naturais. Em particular, a condição do axioma 5 será chamada de *funcionalidade*. O acréscimo do axioma 6 caracteriza f como aquilo que se chama modernamente de uma função injetora e, portanto, a condição expressa nesse axioma será chamada de *injetividade*. Finalmente, o axioma 7 expressa aquilo que se chama de *princípio de indução finita*.

Apresentados dessa maneira, esse conjunto de proposições pode parecer inócuo. No entanto, se colocados no contexto de nosso sistema de lógica de predicados de segunda ordem, esses axiomas tomam vida e se consolidam como um fundamento para grande parte da aritmética. Um exemplo da força desses axiomas é a possibilidade de definir as operações usuais entre números naturais e até mesmo outros tipos de números, como os números racionais e reais. Aqui é interessante vermos como pelo menos a primeira dessas tarefas pode ser levada a cabo.

Como mostraremos no anexo A, podemos demonstrar em um sistema de lógica de predicados de segunda ordem um teorema geral de recursão. Intuitivamente, chamaremos uma seqüência de objetos de *linear* se cada objeto dessa seqüência tiver exatamente um sucessor e de *simples* se nenhum objeto dessa seqüência suceder a si próprio. O teorema geral de recursão, então, nos diz o seguinte:

Teorema (Teorema geral de recursão). *Seja F uma seqüência linear simples que contém um objeto a , G um conceito qualquer, b um objeto tal que $G(b)$*

e R uma relação funcional cujo domínio abarca os objetos que satisfazem G . Denotemos por x^* o sucessor de um objeto x em F e por $R(y)$ o único objeto que satisfaz G que está na relação R com y . Então, existe uma relação funcional S , tal que

$$(i) S(a, b);$$

$$(ii) \text{ para todo } x \text{ na seqüência } F, \text{ se } S(x, y), \text{ então } S(x^*, R(y)).$$

Agora, os axiomas de Peano-Dedekind constituem os números naturais como uma seqüência linear simples, de forma que temos, como corolário do teorema geral, um teorema de recursão para os números naturais, a saber,

Corolário (Recursão nos números naturais). *Seja R uma relação funcional definida em todos os números naturais e a, b números naturais. Denotemos por n^+ o sucessor do número n e por $R(n)$ o único número natural que está na relação R com o número n . Então, existe uma relação funcional g , tal que*

$$(i) g(a, b);$$

$$(ii) \text{ para todo número natural } n, \text{ se } g(n, m), \text{ então } g(n^+, R(m)).$$

Tomando, então, a função sucessor no lugar de R e o número 0 no lugar de a , temos, para cada número natural m , uma função $+_m$ que satisfaz:

$$(\alpha) +_m(0) = m;$$

$$(\beta) +_m(n^+) = (+_m(n))^+;$$

ou, numa notação mais palatável,

$$(\alpha') 0 + m = m;$$

$$(\beta') n^+ + m = (n + m)^+.$$

Analogamente, tomando no corolário a própria função $+_m$ por R e o número 1 por a , temos uma função $\times_m$ que satisfaz

$$(\gamma) \times_m(1) = m;$$

$$(\delta) \times_m(n^+) = +_m(\times_m(n));$$

ou, numa notação mais palatável,

$$(\gamma') 1 \times m = m;$$

$$(\delta') n^+ \times m = n \times m + m.$$

Capítulo 3

Derivação dos Axiomas de Peano-Dedekind

Agora, nosso objetivo é mostrar como, de fato, os axiomas de Peano-Dedekind são derivados no nosso sistema axiomático $\mathfrak{F}$. Em primeiro lugar, precisamos definir na linguagem deste o número 0 e uma relação de sucessão, que chamaremos, seguindo Frege, de f . Fazemos isso da seguinte maneira:

Definição. (i) $0 = \mathfrak{N}[x : x \neq x]$.

(ii) $f(x, y) \leftrightarrow \exists F \exists u (\sim F(u) \wedge x = \mathfrak{N}F \wedge y = \mathfrak{N}[z : f(z) \vee z = u])$.¹

A partir dessa definição do numeral 0, podemos definir $1 = \mathfrak{N}[x : x \neq x \vee x = 0]$. Então, como, claramente, $\sim (0 \neq 0)$, temos que $f(0, 1)$. Analogamente, definimos $2 = \mathfrak{N}[x : (x \neq x \vee x = 0) \vee x = 1]$ e obtemos $f(1, 2)$ etc. Assim, intuitivamente, podemos definir *todos* os números naturais. No entanto, ainda não temos como definir o *conceito* de número natural. Para

¹Notemos que aqui definimos uma relação por meio do símbolo $\leftrightarrow$ seguido de uma expressão da linguagem com duas variáveis livres. Alternativamente, podemos definir uma relação por meio do símbolo $\equiv$ seguido do nome da relação definida por essa expressão, dado pela nossa notação $[\quad : \quad]$. Nesse caso, a nossa definição da relação de sucessão seria $f \equiv [x, y : \exists F \exists u (\sim F(u) \wedge x = \mathfrak{N}F \wedge y = \mathfrak{N}(f(z) \vee z = u))]$. Os dois modos de definição são claramente equivalentes e ambos serão utilizados adiante de forma irrestrita.

isso, é necessário apresentar outras noções adicionais. Primeiro, dada uma relação R , precisamos distinguir uma classe de conceitos que, de certa forma, são preservados por essa relação. Esses conceitos são ditos *R-hereditários* e são definidos da seguinte maneira:

Definição. Seja R uma relação e F um conceito. Dizemos que F é *R-hereditário* (em símbolos $Her_R(F)$ ²) se, e somente se,

$$\vdash \forall x \forall y (F(x) \wedge R(x, y) \rightarrow F(y)).$$

Agora, dada uma relação R , definimos duas outras, a saber, $\perp R$ e $\cup R$, ditas, respectivamente, o *ancestral* de R e o *ancestral fraco* de R .

Definição. (i) $\perp R(x, y) \leftrightarrow \forall F (Her_R(F) \wedge \forall z (R(x, z) \rightarrow F(z)) \rightarrow F(y))$;
(ii) $\cup R(x, y) \leftrightarrow \perp R(x, y) \vee x = y$.

Se $\perp R(x, y)$, então dizemos que y segue x na R -série e, se $\cup R(x, y)$, então dizemos que y pertence à R -série que começa com x . Os números naturais, então, serão os elementos da f-série que começa com 0, i.e., se tomarmos $N(x)$ como expressão formal da sentença “ x é um número natural”, podemos definir

$$N(x) \leftrightarrow \cup f(0, x).$$

A seguinte proposição expressa certas propriedades do ancestral de uma relação que serão utilizadas mais adiante.

²Esse é um dos poucos símbolos utilizados aqui para definir conceitos que não provêm do próprio Frege. O motivo disso é que Frege utiliza no *Begriffsschrift* um símbolo complicadíssimo, que transferido para nosso sistema de variáveis seria

$$\frac{x}{y} \left(\frac{F(y)}{R(x, y)} \right).$$

Após isso, nas *Grundgesetze*, Frege deixa de utilizar um símbolo para se referir à hereditariedade de um conceito, repetindo sempre que necessário a expressão que define tal propriedade.

Proposição 1. *Seja R uma relação. Então,*

- (i) $\vdash \forall x \circ R(x, x);$
- (ii) $\vdash \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \perp R(x, y));$
- (iii) $\vdash \forall x \forall y \forall z (\perp R(x, y) \wedge \perp R(y, z) \rightarrow \perp R(x, z));$
- (iv) $\vdash \forall x \forall y \forall z (\perp R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow \perp R(x, z));$
- (v) $\vdash \forall x \forall y (\perp R(x, y) \rightarrow \exists z (\circ R(x, z) \wedge R(z, y))).$

Demonstração. A asserção (i) é clara na medida em que

$$\vdash \forall x (x = x).$$

Agora, para mostrar (ii), suponhamos que $R(x, y)$ e consideremos um conceito F R -hereditário, tal que, $\forall z (R(x, z) \rightarrow F(z))$. Então, em particular, como $R(x, y)$, temos $F(y)$ e, portanto, $\perp R(x, y)$.

Para mostrar (iii), suponhamos que $\perp R(x, y)$, que $\perp R(y, z)$ e consideremos um conceito F R -hereditário, tal que, $\forall w (R(x, w) \rightarrow F(w))$. Como $\perp R(x, y)$, temos que $F(y)$ e, portanto, como F é R -hereditário que $\forall t (R(y, t) \rightarrow F(t))$. Assim, como $\perp R(y, z)$, concluímos que $F(z)$ e, portanto, que $\perp R(x, z)$.

(iv) decorre imediatamente de (ii) e (iii).

Finalmente, para mostrar (v), suponhamos que $\perp R(x, y)$ e consideremos o conceito $F \equiv [w : \exists z (\circ R(x, z) \wedge R(z, w))]$. Queremos mostrar, então, que $F(y)$. Para isso, no entanto, basta mostrar que F é R -hereditário e que, se $R(x, w)$, então $F(w)$. O segundo fato é simples, pois, se $R(x, w)$, basta tomar $z = x$ e temos, por (i), que $\circ R(x, z)$ e, por hipótese que $R(z, w)$. Agora, sejam x_1 e x_2 com $F(x_1)$ e $R(x_1, x_2)$. Então, em particular $\circ R(x, x_1)$, de forma que $F(x_2)$. Assim, concluímos que $Her_R(F)$.

Agora, podemos começar a mostrar que os axiomas de Peano-Dedekind são deriváveis no nosso sistema. Notemos, para isso, que, claramente, todas as propriedades que demonstramos com respeito ao ancestral de uma relação valem também para o ancestral fraco dessa relação, i.e., temos, por exemplo,

$$(3.1) \quad \vdash \forall x \forall y \forall z (\circ R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow \circ R(x, z)).$$

O primeiro axioma é um corolário direto do item (i) da proposição anterior e o segundo decorre de (3.1), tomando no lugar de R a relação f e notando que, por definição, $N(x) \leftrightarrow \circ f(0, x)$. Para mostrar o terceiro axioma, precisamos antes demonstrar o seguinte lema.

Lema 2. *Se $0 = \wp F$, então $\forall x(\sim F(x))$.*

Demonstração. Vamos mostrar a contrapositiva. Para isso, notemos que $0 = \wp[x : x \neq x]$ e que $\sim \exists x(x \neq x)$. Então, se considerarmos um conceito F tal que $\sim \forall x(\sim F(x))$, i.e, tal que $F(a)$, para algum a , e uma relação R qualquer, nunca poderemos ter $\exists x(x \neq x \wedge R(a, x))$, o que seria necessário para se estabelecer que R é uma correspondência biunívoca. Assim, não existe uma correspondência biunívoca entre F e $[x : x \neq x]$, de forma que, pelo PH, $\wp F \neq \wp[x : x \neq x] = 0$.

Teorema 3. $\vdash \forall x \forall y (f(x, y) \rightarrow 0 \neq y)$.

Demonstração. Se $f(x, y)$, então, por definição,

$$\exists F \exists u (\sim F(u) \wedge x = \wp F \wedge y = \wp[z : F(z) \vee z = u]).$$

Agora, como

$$\vdash F(u) \vee u = u,$$

temos que

$$\exists z (F(z) \vee z = u),$$

de forma que, pelo lema acima, $0 \neq \wp[z : f(z) \vee z = u] = y$.

O quinto axioma expressa a funcionalidade da relação de sucessão entre números naturais, uma vez que esse caráter pode ser expresso na nossa linguagem formal para uma certa relação R por meio da seguinte expressão:

$$(3.2) \quad \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \rightarrow (R(x, z) \rightarrow y = z))$$

Agora, se uma certa relação R satisfaz (3.2), escrevemos $I(R)$. Assim, mostrar que o quinto axioma vale é mostrar que $I(f)$, o que é feito no próximo teorema.

Teorema 4. $\vdash I(f)$.

Demonstração. Suponhamos que $f(m, n)$, i.e., que

$$\exists F \exists u (\sim F(u) \wedge m = \mathfrak{H}F \wedge n = \mathfrak{H}[z : F(z) \vee z = u])$$

e que $f(m, k)$, i.e., que

$$\exists G \exists v (\sim G(v) \wedge m = \mathfrak{H}G \wedge k = \mathfrak{H}[z : G(z) \vee z = v]).$$

Como $\mathfrak{H}F = \mathfrak{H}G$, existe uma correspondência biunívoca R entre F e G . Definimos, então,

$$S(x, y) \leftrightarrow (F(x) \wedge R(x, y)) \vee (x = u \wedge y = v)$$

e afirmamos que S é uma correspondência biunívoca entre os conceitos $F^* \equiv [z : F(z) \vee z = u]$ e $G^* \equiv [z : G(z) \vee z = v]$. De fato, dado um objeto x , $F^*(x)$ se, e somente se, $F(x)$ ou $x = u$. Agora, se $F(x)$, então, como R é correspondência biunívoca entre F e G , existe y , tal que $G(y)$ (e, portanto, também $G^*(y)$) e $R(x, y)$, de forma que, por definição, $S(x, y)$. Por outro lado, se $x = u$, então, outra vez por definição, $S(u, v)$ e $G^*(v)$. Analogamente, mostramos que, para todo objeto y que cai sobre o conceito G^* , existe um objeto x , tal que $F^*(x)$ e $S(x, y)$. Com isso mostramos que S satisfaz as cláusulas (iii) e (iv) da definição de correspondência biunívoca. Para mostrar que as cláusulas restantes da definição de correspondência biunívoca também são satisfeitas, consideremos objetos x, y, z , com $F^*(x)$, $S(x, y)$ e $S(x, z)$. Se $x = u$, então, por definição, $y = v = z$ e obtemos $y = z$. Agora, se $F(x)$, então, $R(x, y)$ e $R(x, z)$, de forma que $y = z$ decorre da biunivocidade de R . Assim, mostramos a cláusula (i); a cláusula (ii) é mostrada de forma absolutamente análoga. Concluimos, então, que S é uma correspondência biunívoca entre F^* e G^* , de forma que $n = \mathfrak{H}F^* = \mathfrak{H}G^* = k$, que era o que queríamos mostrar.

Podemos, agora, como faz Frege, definir a *conversa* de uma relação R como a relação $\mathbb{R}R$ dada por

$$\mathbb{R}R(x, y) \leftrightarrow R(y, x).$$

Assim, é fácil ver que, na realidade, a injetividade de uma relação não é outra coisa que a funcionalidade da sua conversa, de forma que o sexto axioma se reduz à afirmação $I(\mathbb{F}f)$.

Teorema 5. $\vdash I(\mathbb{F}f)$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathbb{F}f(m, n)$, i.e., que

$$\exists F \exists u (\sim F(u) \wedge n = \mathfrak{H}F \wedge m = \mathfrak{H}[z : F(z) \vee z = u])$$

e que $\mathbb{F}f(m, k)$, i.e., que

$$\exists G \exists v (\sim G(v) \wedge k = \mathfrak{H}G \wedge m = \mathfrak{H}[z : G(z) \vee z = v]).$$

Então, tomando, como na demonstração do teorema anterior, $F^* \equiv [z : F(z) \vee z = u]$ e $G^* \equiv [z : G(z) \vee z = v]$, temos que $\mathfrak{H}F^* = m = \mathfrak{H}G^*$, de forma que existe uma correspondência biunívoca R entre F^* e G^* . Definimos uma relação S por

$$S(x, y) \leftrightarrow (F(x) \wedge G(y) \wedge R(x, y)) \vee (R(x, v) \wedge R(u, y)).$$

Queremos mostrar, então, que S é uma correspondência biunívoca entre F e G , de forma a mostrar, portanto, que $n = \mathfrak{H}F = \mathfrak{H}G = k$. Vamos verificar outra vez apenas as cláusulas (i) e (iii), deixando a verificação – absolutamente análoga – das cláusulas (ii) e (iv) a cargo do leitor.

Primeiro, para verificar a cláusula (iii), notemos que, dado um objeto x com $F(x)$, temos $F^*(x)$, de forma que, como R é uma correspondência biunívoca entre F^* e G^* , existe w , tal que $G^*(w)$ e $R(x, w)$. Agora, como $G^*(w)$, temos que $G(w)$ ou $w = v$. No primeiro caso, já temos o que precisamos; no segundo, outra vez porque R é uma correspondência biunívoca entre F^* e G^* , existe y , tal que $G^*(y)$ e $R(u, y)$. Além disso, temos que $R(x, v)$, de forma que, pela definição de S , temos $S(x, y)$. Finalmente, precisamos mostrar que $G(y)$. Mas, de fato, temos que $y \neq v$, pois, por hipótese, $x \neq u$ e, se tivéssemos $y = v$, então teríamos $R(x, v)$ e $R(u, v)$, o que implicaria $x = u$.

Agora, para mostrar a cláusula (iv), suponhamos que $S(x, y)$ e $S(x, z)$. Então, existem quatro alternativas:

- (α) $F(x)$, $G(y)$, $G(z)$, $R(x, y)$ e $R(x, z)$;
- (β) $R(x, v)$, $R(u, y)$, $F(x)$, $G(z)$ e $R(x, z)$;
- (γ) $F(x)$, $G(y)$, $R(x, y)$, $R(x, v)$ e $R(u, z)$;
- (δ) $R(x, v)$, $R(u, y)$, $R(x, v)$ e $R(u, z)$.

Notemos que as alternativas (β) e (γ) não são possíveis, pois elas implicam $G(v)$, o que claramente contradiz as suposições feitas no início da demonstração. Agora, tanto na alternativa (α), quanto na alternativa (δ), $y = z$ decorre do fato que R é uma correspondência biunívoca. Assim, obtemos aquilo de desejávamos e o teorema está demonstrado.

Restam, dessa maneira, apenas os axiomas 4 e 7 para ser demonstrados. Como a demonstração daquele depende deste, demonstraremos este primeiro. Agora, para tanto, notamos que basta mostrarmos que o seguinte esquema, denominado *princípio geral de indução*, é derivável no nosso sistema

$$\forall F((F(a) \wedge \forall x \forall y (F(x) \wedge R(x, y) \rightarrow F(y))) \rightarrow \forall x (\circlearrowleft R(a, x) \rightarrow F(x))),$$

pois, nesse caso, lembrando da definição de $N(x)$, basta substituímos a por 0 e R por f para obter o resultado desejado. Então, pela definição de $Her_R(F)$, temos que, para mostrar a derivabilidade do axioma 7, basta mostrarmos o seguinte teorema:

Teorema 6. $\vdash \forall F((F(a) \wedge Her_R(F)) \rightarrow \forall x (\circlearrowleft R(a, x) \rightarrow F(x)))$.

Demonstração. Tomemos um conceito F satisfazendo $F(a)$ e $Her_R(F)$ e consideremos um objeto b qualquer com $\circlearrowleft R(a, b)$. Queremos mostrar, então, que $F(b)$. Agora, pela definição da relação $\circlearrowleft R$, temos que $a = b$ ou $\perp R(a, b)$. No primeiro caso, é claro que $F(b)$. No segundo, basta lembrarmos da definição da relação $\perp R$ para obtermos

$$\forall F(Her_R(F) \wedge \forall z (R(a, z) \rightarrow F(z)) \rightarrow F(b)).$$

Assim, como, por hipótese, $Her_R(F)$ e $\forall z(R(a, z) \rightarrow F(z))$ decorre diretamente de $Her_R(F)$ e $F(a)$, temos $F(b)$.

Corolário 7. $\vdash \forall F(F(0) \wedge \forall x \forall y(N(x) \wedge N(y) \wedge F(x) \wedge f(x, y) \rightarrow F(y)) \rightarrow \forall x(N(x) \rightarrow F(x)))$.

Demonstração. Basta substituírmos no teorema a por 0 , R por f e F por $F^* \equiv [z : N(z) \rightarrow F(z)]$, de forma a obtermos

$$F^*(0) \wedge Her_f(F^*) \rightarrow \forall x(\downarrow f(0, x) \rightarrow F^*(x)),$$

ou seja,

$$(N(0) \rightarrow F(0)) \wedge \forall x \forall y((N(x) \rightarrow F(x)) \wedge f(x, y) \rightarrow (N(y) \rightarrow F(y))) \rightarrow \forall x(N(x) \rightarrow (N(x) \rightarrow F(x))).$$

Então, notando que $\vdash N(0)$, com alguns argumentos simples de lógica proposicional obtemos

$$F(0) \wedge \forall x \forall y(N(x) \wedge N(y) \wedge F(x) \wedge f(x, y) \rightarrow F(y)) \rightarrow \forall x(N(x) \rightarrow F(x)),$$

de forma que, quantificando universalmente, obtemos o corolário.

É esse último resultado que usamos para mostrar o axioma 4, o que será feito a seguir com o auxílio de alguns lemas e de um teorema.

Lema 8. $\vdash \forall x(N(x) \rightarrow \sim \downarrow f(x, x))$.

Demonstração. Seja $F \equiv [x : \sim \downarrow f(x, x)]$. Se mostrarmos que $F(0)$ e que $Her_f(F)$, então teremos o resultado pelo princípio de indução finita, já demonstrado. Agora, de fato, temos $F(0)$, pois, pela proposição 1(v), se $\downarrow f(0, 0)$, então existe y com $\downarrow f(0, y)$ e $f(y, 0)$, o que contradiz o teorema 3. Além disso, dados a e b com $f(a, b)$, se $\sim F(b)$, então, como pela proposição 1(v) existe w com $\downarrow f(b, w)$ e $f(w, b)$, temos, pelo teorema 5, que $a = w$, de forma que $\downarrow f(b, a)$. No entanto, isso implicaria que $\sim F(a)$, pois, se $a = b$, então, $\sim F(a)$ é uma consequência imediata da hipótese; e, se $\downarrow f(b, a)$, então, como $f(a, b)$ e, portanto, $\downarrow f(a, b)$, pela proposição 1(iii), teríamos $\downarrow f(a, a)$. Logo, concluímos que $Her_f(F)$ e obtemos o resultado desejado.

Lema 9. *Sejam a, b objetos quaisquer com $f(a, b)$. Então, temos*

$$\circlearrowleft f(x, b) \leftrightarrow \circlearrowleft f(x, a) \vee x = b.$$

Demonstração. Se $\circlearrowleft f(x, a)$, então claramente $\circlearrowleft f(x, b)$ e, se $x = b$, então, pela proposição 1(i), $\circlearrowleft f(x, b)$. Por outro lado, se $\circlearrowleft f(x, b)$, então $\perp f(x, b)$ ou $x = b$. No segundo caso, não há nada a ser demonstrado. No primeiro, pela proposição 1(v), existe w com $\circlearrowleft f(x, w)$ e $f(w, b)$. Agora, pela injetividade da relação f , temos $w = a$, de forma que $\circlearrowleft f(x, a)$.

Teorema 10. $\vdash \forall x(N(x) \rightarrow f(x, \mathfrak{H}[y : \circlearrowleft f(y, x)]))$.

Demonstração. Consideremos o conceito $F \equiv [x : f(x, \mathfrak{H}[y : \circlearrowleft f(y, x)])]$. O que queremos mostrar, então, é que

$$\forall x(N(x) \rightarrow F(x)).$$

Agora, pelo corolário do princípio geral de indução, obtemos esse resultado mostrando que $F(0)$ e que

$$\forall x \forall y(N(x) \wedge N(y) \wedge F(x) \wedge f(x, y) \rightarrow F(y)).$$

Para mostrar $F(0)$, consideremos o conceito $G_0 \equiv [y : \circlearrowleft f(y, 0)]$. Lembremos que, por definição, $1 = \mathfrak{H}[x : x \neq x \vee x = 0]$, de forma que 1 é o número de um conceito sob o qual só cai o número 0. Assim, se mostrarmos que $G_0(0)$ e que $\forall z(G_0(z) \rightarrow z = 0)$, teremos que a relação identidade $\text{id} \equiv [x, y : x = y]$ é uma correspondência biunívoca entre G_0 e $[x : x \neq x \vee x = 0]$, ou seja, que $\mathfrak{H}G_0 = 1$. Agora, de fato, pela proposição 1(i), temos $G_0(0)$ e, se $G_0(z)$, então $z = 0$ ou $\perp f(z, 0)$. Mas, no segundo caso, pela proposição 1(v), existiria w com $\circlearrowleft f(z, w)$ e $f(w, 0)$, o que contrariaria o teorema 3. Logo, temos $z = 0$.

Finalmente, consideremos dois objetos quaisquer a e b com $N(a)$, $N(b)$, $F(a)$ e $f(a, b)$. Então, pela injetividade da relação f , temos $[x : \circlearrowleft f(x, a)] = b$, de forma que, tomando $G_a \equiv [x : \circlearrowleft f(x, a)]$, temos $\sim G_a(b)$, uma vez que $G_a(b)$ implicaria $\perp f(b, b)$, o que contrariaria o lema 8. Além disso, temos $b = \mathfrak{H}G_a$ e, pelo lema 9, $\mathfrak{H}[y : \circlearrowleft f(y, b)] = \mathfrak{H}[y : G_a(y) \vee y = b]$, do que concluímos que $F(b)$.

Corolário 11. $\vdash \forall x(N(x) \rightarrow \exists y f(x, y))$.

Demonstração. Basta considerar, para cada x com $N(x)$, $\# [y : f(y, x)]$ e usar o teorema anterior.

Parte II

O significado do teorema de Frege

Capítulo 4

A consistência do sistema $\mathfrak{F}$

O teorema de Frege, tal como ele foi apresentado no capítulo anterior, não passa de um resultado lógico-matemático. Ele tem como conteúdo a asserção de que certas proposições se seguem de um certo conjunto de proposições básicas por meio de um certo conjunto de regras de inferência puramente mecânicas. Agora, esse resultado ganha significado na medida em que paramos para nos perguntar acerca das particularidades, não só das proposições demonstradas, como, principalmente, do sistema no qual elas foram demonstradas. Já notamos acima que essas proposições demonstradas formam uma axiomatização de uma parte considerável da aritmética, de forma que, na medida daquilo que é possível, dados os teoremas de incompletude de Gödel, temos aqui a confirmação de um lado da tese logicista. De fato, conseguimos deduzir praticamente toda a aritmética de um certo sistema formal dado. Contudo, é claro que isso não é suficiente para um ressurgimento do logicismo nos moldes fregeanos. Para tanto, seria necessário que o sistema utilizado cumpra certos requisitos. Em especial, seria necessário que ele possa de alguma forma ser considerado um sistema de *lógica*. Com efeito, sabe-se que os axiomas de Peano podem ser facilmente demonstrados em diversos sistemas diferentes, que não necessariamente seriam aceitos como sistemas de lógica. Por exemplo, eles podem ser derivados no sistema ZFC

de teoria de conjuntos, que certamente não é visto atualmente como um tal sistema. Assim, teremos que nos fazer essa pergunta com respeito a nosso sistema. Mas, antes, direcionemos nossa atenção a um outro ponto.

Sabemos que um dos grandes motivos pelo qual o logicismo perdeu completamente sua força no início do século XX é a inconsistência do sistema fregeano das *GGA*. Por esse motivo, é interessante notar que, mesmo que não seja possível mostrar que o nosso sistema seja consistente, existem resultados que tornam sua consistência algo extremamente plausível, como veremos a seguir.

A primeira conjectura da consistência de um sistema análogo ao nosso foi feita já por Crispin Wright em 1983 no seu livro *Frege's conception of numbers as objects* ([60]). No entanto, essa consistência não pode ser demonstrada de forma absoluta. O que se pode mostrar, por exemplo, é como um modelo do nosso sistema $\mathfrak{F}$ pode ser construído dentro de um sistema de teoria de conjuntos como ZFC.

De fato, consideremos um modelo M da seguinte maneira: o domínio das variáveis de primeira ordem é $X = \{0, 1, 2, \dots, \aleph_0\}$ e o domínio das variáveis n -árias de segunda ordem é o conjunto das partes de X^n , de forma que, para uma dada interpretação i , $R(x_1, \dots, x_n)$ se, e somente se, $(i(x_1), \dots, i(x_n)) \in i(R)$. Além disso, notemos que X possui a cardinalidade de todos os seus subconjuntos,¹ de forma que podemos interpretar $\mathfrak{p}$ através do conceito de cardinalidade, i.e., dado um conceito F e uma interpretação i , temos que $i(\mathfrak{p}F) = |i(F)|$, em que $|\cdot|$ denota a cardinalidade de um conjunto. Finalmente, todas as constantes lógicas clássicas são interpretadas do modo usual como sendo as suas correspondentes óbvias de ZFC.² Então, todos os axiomas do nosso sistema são satisfeitos pelo modelo M . De fato, para vermos a satisfação do PH, basta notarmos que, em ZFC, $|A| = |B|$ se, e somente se, existir uma função bijetora entre A e B . Mas o conceito conjuntista de

¹Uma propriedade que o conjunto de todos os números naturais não possui.

²Por exemplo, tanto “=”, quanto “ $\equiv$ ” são interpretadas como a relação de identidade de ZFC.

função bijetora não é outra coisa que a tradução do nosso conceito de relação biunívoca, de forma que temos, de fato, que, dada uma interpretação i , ela satisfaz $\eta F = \eta G$ se, e somente se, $|i(F)| = |i(G)|$. Mas isso é equivalente a dizer que existe $r \subseteq i(F) \times i(G)$, tal que r é uma função bijetora. Seja, então, R uma relação tal que $i(R) = r$, de forma que R é uma correspondência biunívoca entre F e G se, e somente se, r for uma função bijetora e, portanto, temos o resultado desejado.³

Assim, vemos que, dada uma proposição A de $\mathfrak{F}$, podemos interpretá-la em ZFC como uma certa proposição A' , de tal forma que teremos que A é derivável em $\mathfrak{F}$ se, e somente se, A' for derivável em ZFC. Logo, se conseguíssemos demonstrar uma contradição em $\mathfrak{F}$, poderíamos traduzir essa contradição para ZFC, de forma que mostraríamos a inconsistência deste. Logo, como a consistência de ZFC é algo que se pressupõe amplamente, podemos pressupor da mesma maneira a consistência de $\mathfrak{F}$.

³Esse modelo foi proposto primeiramente por Burgess na sua resenha do livro de Wright. Boolos o apresenta de forma mais detalhada no artigo [5].

Capítulo 5

A logicidade do sistema $\mathfrak{F}$

Agora, voltemos o nosso foco para a questão acerca da logicidade do sistema $\mathfrak{F}$. Nesse sentido, a primeira coisa a ser notada é que esse sistema é essencialmente um sistema de lógica de segunda ordem, na medida em que ele admite quantificação sobre variáveis de segunda ordem. Esse fato é importante, pois ele situa a nossa discussão particular no contexto mais geral da discussão acerca da logicidade de sistemas de lógica de segunda ordem, que ganhou muita força principalmente após a descoberta do teorema de Frege. Todavia, essa discussão parece ter tomado um caminho demasiado técnico e, nesse contexto, a posição ortodoxa parece ser a recusa de aceitar sistemas de lógica de segunda ordem como sistemas de *lógica*.

Tentaremos, então, propor um caminho alternativo a essa discussão, chamando atenção para o fato de que o logicismo é um projeto histórico, que se desdobrou ao longo de mudanças no que diz respeito à própria concepção de lógica. Mais claramente, o que nos propomos aqui é eventualmente analisar o significado do teorema de Frege no contexto no qual o projeto logicista foi proposto por esse autor, ou seja, avaliar em que sentido o nosso sistema $\mathfrak{F}$ poderia ser aceito por ele como um verdadeiro sistema de lógica. Contudo, não deixará de ser proveitosa uma rápida análise da situação na qual essa discussão se encontra atualmente.

5.1 A discussão sobre a logicidade de sistemas de lógica de segunda ordem

Como já notamos acima, atualmente a posição ortodoxa entre os autores que participam dessa discussão é a recusa de aceitar a logicidade de sistemas de lógica de segunda ordem. No entanto, é importante reconhecermos que isso nem sempre foi assim. De fato, todos os grandes sistemas de lógica do final do século XIX e do início do século XX eram de ordem superior, como, por exemplo, o sistema dos *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead, os sistemas apresentados por Frege ou até mesmo as primeiras tentativas de axiomatização da teoria de conjuntos por Zermelo. Apenas a partir de 1915 com os trabalhos de Löwenheim e Skolem, sistemas de lógica de primeira ordem passaram a ser considerados, num primeiro momento como *subsistemas* de sistemas de ordem superior e depois também de forma independente.

Então, durante a primeira metade do século XX, na medida em que esses sistemas passaram a ser estudados de forma independente, foram obtidos com respeito a eles diversos resultados interessantes como, por exemplo, o teorema de completude de Gödel, o teorema de compacidade e os teoremas de Löwenheim-Skolem. Assim, dada a elegância e a simplicidade que esses resultados aportam ao estudo desses sistemas,¹ estes terminaram por ser considerados pela maior parte dos lógicos contemporâneos como os objetos de estudo por excelência da lógica.

Todavia, nesse primeiro momento de separação dos sistemas de lógica de primeira ordem para estudo independente, não havia ainda uma discussão propriamente dita com o objetivo de estabelecer uma linha demarcatória entre lógica e matemática. De fato, o primeiro autor a levantar essa questão foi Quine, que considerava a lógica de segunda ordem como sendo apenas

¹Por exemplo, a completude dos sistemas de primeira ordem, somada à sua correção, que é facilmente estabelecida tanto para sistemas de primeira ordem quanto para sistemas de ordem superior, estabelece um equilíbrio perfeito entre consequência formal e consequência semântica, que facilita enormemente o manejo desses sistemas.

uma teoria de conjuntos disfarçada,² relegando esta ao campo da matemática, sobretudo por causa dos seus comprometimentos ontológicos. Então, após Quine, essa discussão ganhou força e inúmeros autores passaram a considerar os mais diversos argumentos a favor e contra o reconhecimento de sistemas de lógica de segunda ordem como verdadeiramente matemáticos e não lógicos. Podemos, contudo, destacar um certo conjunto de princípios demarcatórios que norteiam essa discussão.

Dentre eles, os mais comuns são aqueles que poderíamos chamar de *princípios de exigüidade ontológica*. Estes dizem respeito à possibilidade³ de existência de objetos lógicos ou ao número de objetos que podem ser pressupostos por uma teoria lógica. Notemos que em sistemas de lógica de primeira ordem – que são considerados os sistemas de lógica por excelência – a seguinte expressão é dedutível:

$$\exists x(x = x),$$

de forma que aceita-se sem problemas a existência de pelo menos um objeto lógico. Agora, a posição majoritária parece ser que uma teoria lógica não poderia implicar a existência de mais de um objeto. Por exemplo, Quine diz que “[a lógica] não possui objetos que ela pode dizer seus; suas variáveis admitem todos os valores indiscriminadamente”⁴ e Boolos diz que se a aritmética fosse redutível à lógica, “[esta] implicaria a existência de dois objetos distintos, o que ela não faz (em qualquer sentido de lógica disponível atualmente).”⁵

Entretanto, como vimos acima, nosso sistema $\mathfrak{F}$ implica a existência de dois objetos distintos, a saber, 0 e 1, de forma que, de acordo com o princípio demarcatório em questão, ele não poderia ser considerado um sistema de

²Nesse sentido temos o slogan clássico de Quine, segundo o qual sistemas de ordem superior seriam apenas “set theory in sheeps clothing”.

³Mais comumente, à impossibilidade.

⁴“[logic] has no objects it can call its own; its variables admit all values indiscriminately.” ([47], p. 52)

⁵“logic would imply the existence of two distinct objects, which it fails to do (on any understanding of logic now available to us).” ([9], p. 302)

lógica. De fato, nosso sistema implica a existência de infinitos objetos – todos os números naturais – e, portanto, ele não qualifica como um sistema lógico por ainda outro critério comumente utilizado, que podemos chamar de *princípio de satisfação irrestrita*. Segundo esse princípio, que visa de certa forma capturar a noção intuitiva de analiticidade da lógica, sistemas de lógica devem ser satisfeitos por qualquer modelo que possa ser formulado para ele, independente de quantos ou quais objetos pertençam ao domínio desse modelo. Como nosso sistema implica a existência de infinitos objetos, ele não é satisfeito por nenhum modelo finito e, portanto, ele não poderia, também de acordo com esse critério, ser considerado um sistema de lógica. Nesse sentido, diz Heck que

de acordo com o modo no qual a noção de verdade lógica tende a ser compreendida na filosofia contemporânea, segundo o qual uma verdade da lógica é algo verdadeiro em qualquer interpretação, o princípio de Hume foi demonstrado *não* ser uma verdade da lógica, uma vez que ele não é verdadeiro em qualquer interpretação cujo domínio seja finito.⁶

Finalmente, podemos mencionar o *princípio de invariância sob todas as permutações do domínio*, que é atualmente o grande candidato para a posição de princípio demarcatório, dada a enorme precisão alcançada pela sua possível formulação em termos de conceitos matemáticos. Proposto inicialmente por Tarski num artigo póstumo de 1986 intitulado “What are logical notions?” ([58]), esse princípio já possui uma história, tendo sido reformulado e refinado por autores como Feferman, McGee, Sher ([53] e [54]) e MacFarlane ([40]). No entanto, a idéia central por trás dele é a seguinte: dada uma certa teoria, ela contém, entre outros, símbolos que significam objetos.

⁶“Indeed, given how the notion of logical truth tends to be understood in contemporary philosophy, so that a truth of logic is something true in all interpretations, Hume’s Principle has just been proven *not* to be a truth of logic, since it is not true in any interpretation whose domain is finite.” ([30], p. 19)

Agora, ao interpretar essa teoria o que fazemos é, entre outras coisas, delimitar um domínio de objetos aos quais esses símbolos se referem. Definimos, então, uma permutação do domínio como sendo uma função bijetora que leva elementos desse domínio a elementos dele próprio.⁷ Assim, dizemos que uma noção dessa teoria é *lógica* se dada uma interpretação dessa teoria essa noção não for sensível a permutações do domínio dessa interpretação.

Por exemplo, consideremos uma teoria na qual os números naturais são denotados por algarismos romanos e que possua o predicado P , tal que $P(x)$ signifique intuitivamente que x é par; interpretemos essa teoria com o domínio $X = \{0, 1, 2, \dots, \aleph_0\}$ e tomando o referente do predicado P como sendo o conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$; e, finalmente, consideremos a permutação de X considerada na nota anterior, que denotaremos por f . Então, temos a seguinte situação. Inicialmente, temos que $P(II)$, uma vez que $2 \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$. Agora, $f(2) = 3$, de forma que, após aplicada a permutação f ao domínio X , temos que não é mais o caso que $P(II)$, uma vez que, agora II denota o número 3 e $3 \notin \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$. Logo, concluímos que o predicado P não é lógico, pois ele é sensível a certas permutações do domínio. Por outro lado, a relação de identidade tal como ela é usualmente introduzida em sistemas de lógica é lógica nesse sentido, pois ela continua a se comportar da mesma maneira independentemente de permutações no domínio de interpretação do sistema no qual ela é considerada.

Assim, podemos dizer que um certo sistema é *lógico* se todas as suas noções forem lógicas no sentido definido acima. Agora, considerando uma tal definição de logicidade, seríamos obrigados mais uma vez a negar a logicidade do sistema $\mathfrak{F}$, pois nesse sistema podemos definir um predicado equivalente ao predicado P do exemplo acima por

$$P(x) \leftrightarrow Nx \wedge \exists y(Ny \wedge x = 2y).$$

⁷Por exemplo, a função identidade é uma permutação de qualquer domínio e a função que leva cada $n \in \mathbb{N}$ em $n + 1$ e $\aleph_0$ no 0 é uma permutação do domínio X considerado acima na demonstração da consistência de $\mathfrak{F}$ relativa a ZFC.

O que concluímos dessa análise, portanto, é que, do ponto de vista da discussão contemporânea, não nos resta alternativas a não ser negar a logicidade do sistema $\mathfrak{F}$. O que faremos no próximo capítulo, todavia, é remeter a pergunta sobre a logicidade de sistemas formais à concepção fregeana de lógica, de forma a colocar em dúvida o *status quo* no qual a discussão se encontra.

5.2 A concepção fregeana de lógica

Definitivamente, não é necessário um conhecimento muito profundo do que pensava Frege a respeito da noção de lógica para se concluir que ele não aceitava os princípios de exigüidade ontológica mencionados acima como princípios demarcatórios dessa noção. De fato, é bem conhecido que ele aceitava sem mais a existência de objetos lógicos, cujos representantes mais simples e indispensáveis seriam os valores de verdade. Isso já seria suficiente para descartar o primeiro exemplo desse tipo de princípio demarcatório. Agora, de forma mais essencial, devemos notar que a aceitação de qualquer um dos princípios demarcatórios desse tipo já impossibilitaria um projeto logicista de tipo fregeano no seu ponto de partida. Ora, o objetivo desse projeto é demonstrar dentro de um sistema de lógica, por exemplo, os axiomas de peano (ou qualquer outro conjunto de proposições que formem, como vimos acima, uma axiomatização de uma parte considerável da aritmética). Agora, uma axiomatização desse tipo irá sempre implicar a existência dos números naturais. Logo, se supusermos, como fazia Frege,⁸ que números são objetos, teremos que qualquer sistema capaz de satisfazer esse projeto não será um sistema de lógica, com respeito a esse tipo de princípio demarcatório. Notemos que isso é suficiente para descartar também o princípio de satisfação irrestrita, pois um sistema capaz de concretizar esse projeto nunca terá um modelo finito.

⁸Para Frege, essa era uma tese bastante clara e incontroversa, independentemente do seu desenvolvimento intelectual.

No que diz respeito ao princípio de invariância sob todas as permutações do domínio, a situação não é muito mais complicada. Para vermos como Frege não poderia aceitá-lo como um princípio demarcatório da noção de lógica, basta considerarmos algumas características do sistema apresentado por ele nas *GGA*, que certamente era considerado por ele como um sistema de lógica. Primeiro, notemos que, como foi dito acima, Frege aceitava a existência de dois valores de verdade, o verdadeiro e o falso. Além disso, esses valores de verdade eram para ele objetos, que, de acordo com a teoria fregeana de sentido e referência, eram tomados como a referência de expressões proposicionais, de forma análoga à relação que se estabeleceria entre nomes próprios e os objetos nomeados por eles. Assim, para considerarmos um exemplo dessa situação em linguagem natural, temos que a sentença “todo triângulo tem três lados” denota o verdadeiro assim como o nome “Frege” denota um filósofo e matemático que viveu na Alemanha na passagem do século XIX para o século XX.

Agora, por esse motivo, fica claro que nenhum conceito do sistema das *GGA* pode ser invariante com respeito a, pelo menos, um tipo de permutações do domínio, a saber, aquelas permutações que levam o verdadeiro no falso e reciprocamente. De fato, consideremos um conceito F desse sistema tal que, digamos, seja verdade que $F(a)$, para algum termo ‘ a ’ – i.e., tal que a expressão ‘ $F(a)$ ’ denote o verdadeiro. Então, após aplicarmos a permutação do domínio mencionada acima, teremos que ‘ $F(a)$ ’ passa a denotar o falso, de forma que esse conceito F não é lógico no sentido de invariante sob todas as permutações do domínio.⁹

⁹Na exposição do princípio em questão que me parece mais minuciosa, que é a de MacFarlane, o domínio de objetos se encontra dividido em um domínio de objetos propriamente ditos e um domínio de valores de verdade. Então, esse autor passa a argumentar que o que importa na exposição desse princípio são as permutações com respeito apenas àquele, pois ele considera apenas permutações que preservam uma certa estrutura dos domínios e apenas a permutação identidade preservaria a estrutura do domínio dos valores de verdade. Todavia, para Frege essa distinção no domínio dos objetos não faz sentido, uma vez que, para ele, valores de verdade seriam objetos como quaisquer outros. Por esse

Dessa maneira, concluímos que nenhum dos princípios usados na discussão contemporânea acerca da logicidade de sistemas formais pode abarcar a concepção fregeana de lógica. Por outro lado, como foi dito acima, o objetivo que nos propusemos é analisar a importância do teorema de Frege no contexto de um projeto logicista de tipo fregeano, i.e., de um projeto de redução da aritmética à lógica que pressuponha a mesma concepção de lógica que Frege. Assim, devemos nos perguntar qual era essa concepção e, mais fundamentalmente, se uma tal concepção pode de fato ser reconhecida nos textos fregeanos.

Em primeiro lugar, devemos voltar nossa atenção para uma famosa passagem da *Lógica* de 1897, a saber:

a tarefa que conferimos à lógica é somente a de estabelecer aquilo que vale com a maior generalidade para toda esfera de pensamento.¹⁰

Nessa passagem, encontramos um possível princípio demarcatório para a noção de lógica. Agora, é importante notarmos que há nela uma ambigüidade de interpretação, de forma que podemos pensá-la como expressão de dois princípios demarcatórios distintos. De fato, podemos interpretar essa passagem como expressando aquilo que chamaremos de *princípio de generalidade irrestrita* ou aquilo que chamaremos de *princípio de abstração de todo conteúdo*. Aquele afirma que a lógica se preocupa com leis que dizem respeito a todo tipo de pensamento e este que a lógica abstrai de todo o conteúdo do pensamento. Assim, o nosso objetivo no que se segue é mostrar que a passagem de Frege deve ser interpretada como uma expressão do primeiro desses princípios e explicitar o sentido no qual esse princípio deve ser compreendido.

motivo, então, por mais que devamos louvar a exposição de MacFarlane como um esclarecimento da situação num contexto contemporâneo, não fazemos aqui essa sua distinção para permanecermos mais perto da concepção fregeana dos valores de verdade.

¹⁰“nur das Allgemeinste, was für alle Gebiete des Denkens Geltung hat, anzugeben, weisen wir der Logik als aufgabe zu.” ([23], p. 139)

5.2.1 A concepção kantiana de lógica

As duas possíveis leituras da passagem de Frege citada acima provêm de duas teses kantianas a respeito da natureza da lógica.¹¹ De fato, Kant nos diz na *Crítica da Razão Pura* (*KrV*) que a lógica geral

contém as regras absolutamente necessárias do pensamento, sem as quais não pode haver nenhum uso do entendimento, e ocupa-se portanto deste, independentemente da diversidade de objetos a que possa dirigir-se[,]

em oposição à lógica particular, que

contém as regras para pensar corretamente sobre determinada espécie de objetos. (*KrV*, A52 B76)

De fato, podemos reconhecer na primeira parte da citação acima uma reprodução quase perfeita da asserção fregeana que mencionamos anteriormente, de forma que o que nos propomos aqui é explicitar a concepção fregeana de lógica remetendo-a à concepção kantiana. Agora, a título de fundamentação para o percurso argumentativo escolhido, podemos notar outros fatos que dizem respeito a aceitação por parte de Frege de teses kantianas. Em primeiro lugar, notemos que, em diversas ocasiões nos *GA*, Frege afirma a sua admiração por Kant e assegura seus leitores que o que ele propõe não é uma mudança fundamental com respeito às teses kantianas, mas uma explicitação de seu conteúdo, de forma a corrigir certos erros cometidos por Kant que não dizem respeito a questões fundamentais, mas a meros detalhes (como, por exemplo, a classificação dos juízos aritméticos como sintéticos *a priori* e não como analíticos). Depois, notemos também que, por mais que essas menções a Kant não se repitam em obras mais tardias de Frege, como

¹¹De acordo com a taxonomia kantiana das diferentes lógicas apresentada no início da lógica transcendental, identificamos aqui lógica *tout cours* com aquilo que Kant chamava de lógica geral pura (*reine allgemeine Logik*).

é o caso da *Lógica* de 1897, da qual extraímos a passagem em questão, ele até o final da sua vida aceita muitas teses kantianas fundamentais como, por exemplo, a distinção dos tipos de juízos e a tripartição das fontes de conhecimento que a acompanha, inclusive após a rejeição da analiticidade da aritmética e o início da sua curta empreitada tardia no sentido de reduzir a aritmética não mais à lógica, mas à geometria.¹² Logo, dado o caráter exíguo das afirmações deitas por Frege com respeito à natureza da lógica e a semelhança destas com passagens kantianas, parece razoável supor a aceitação por parte dele das teses kantianas com respeito a essa questão.

Assim, o próximo passo que devemos dar é nos perguntarmos sobre a natureza da concepção kantiana de lógica. Para isso, seguiremos de forma bastante fiel idéias apresentadas por MacFarlane em [40]. Nesse trabalho, o objetivo do autor é esclarecer os possíveis sentidos expressos pela tese aparentemente incontroversa segundo a qual a lógica é uma disciplina formal. Nesse sentido, então, são distinguidas três noções principais de formalidade, de modo que a aceitação de cada uma delas importa à tese segundo a qual a lógica é uma disciplina formal um conteúdo diferente. Essas noções são as seguintes:

Dizer que a lógica é *1-formal* é dizer que suas normas são *constitutivas* do uso de conceitos *como tal* (em oposição a um tipo particular de uso de conceitos). Leis 1-formais são as normas para as quais qualquer atividade conceitual – asserção, inferência, suposição, juízo etc. – deve ser remetida.

Dizer que a lógica é *2-formal* é dizer que suas noções e leis características são indiferentes com respeito à identidade particular de objetos distintos. Noções e leis 2-formais tratam cada objeto da mesma maneira (seja ele uma vaca, um pêssego, uma sombra ou um número). Matematicamente, 2-formalidade pode ser esclare-

¹²Para uma análise mais minuciosa da influência epistemológica kantiana no pensamento de Frege, cf. [37].

cida como invariância sob todas as permutações do domínio de objetos.

Dizer que a lógica é *3-formal* é dizer que ela abstrai completamente do conteúdo semântico ou da “matéria” dos conceitos – que ela considera o pensamento abstraindo da relação deste com o mundo e é, portanto, inteiramente livre de pressuposições substantivas.¹³

Para tornar essas noções mais intuitivas, usaremos aqui outros nomes para elas. Chamaremos a 1-formalidade de *generalidade*, a 2-formalidade, como já vimos acima, de *invariância sob todas as permutações do domínio* e a 3-formalidade propriamente de *formalidade*. Notemos ainda que, no contexto no qual nos encontramos agora, as únicas noções que nos serão importantes são a primeira e a terceira, na medida em que a primeira interpretação da passagem fregeana mencionada acima nada mais é do que a tese segundo a qual a lógica é geral e a segunda interpretação dessa passagem nada mais é do que a tese segundo a qual a lógica é formal.

Agora, a tese de MacFarlane é que Kant definia seu conceito de lógica por meio da noção de generalidade e que a afirmação de que a lógica é formal – que sem dúvida pode ser atribuída a Kant – seria apenas uma consequência dessa definição no contexto do sistema epistemológico kantiano.

¹³ “To say that logic is *1-formal* is to say that its norms are *constitutive* of concept use *as such* (as opposed to a particular kind of concept use). 1-formal laws are the norms to which any conceptual activity – asserting, inferring, supposing, judging, and so on – must be held responsible.

“To say that logic is *2-formal* is to say that its characteristic notions and laws are indifferent to the particular identities of deferent objects. 2-formal notions and laws treat each object the same (whether it is a cow, a peach, a shadow, or a number). Mathematically, 2-formality can be spelled out as invariance under all permutations of the domain of objects.

“To say that logic is *3-formal* is to say that it abstracts entirely from the semantic content or ‘matter’ of concepts – that it considers thought in abstraction from its relation to the world and is therefore entirely free of substantial presuppositions.” ([40], p. 51)

Mais especificamente, temos que essa afirmação seria uma consequência da definição de lógica junto com as seguintes teses claramente kantianas:¹⁴

- (i) O pensamento é inteligível independentemente da sua relação com a sensibilidade.
- (ii) Conceitos podem ser utilizados apenas em juízos.
- (iii) Julgar envolve essencialmente a subsunção de objetos dados na intuição a um conceito.
- (iv) Objetos podem nos ser dados apenas pela sensibilidade.

Todavia, no que exatamente consiste essa concepção da lógica como geral? A primeira coisa que salta aos olhos na explicação do conceito de generalidade é que nela a lógica é considerada uma ciência normativa. Uma ciência é um conjunto de leis. Contudo, há dois sentidos nos quais a palavra lei pode ser compreendida. Por um lado, temos, por exemplo, as leis das ciências naturais, que são descrições de fenômenos físicos e, por outro, temos as leis de um determinado Estado ou as leis morais, que seriam prescrições às quais as condutas de cidadãos individuais deveriam se conformar, por mais que elas (talvez na maior parte das vezes, no que diz respeito às leis morais) não o façam. Assim, podemos distinguir um conceito descritivo de lei, do qual aquelas seriam exemplos, e um conceito normativo de lei, do qual estas seriam exemplos, de forma que a lógica, quando vista do ponto de vista da sua generalidade, deve ser pensada em analogia a estas, i.e., a lógica deve ser pensada nesse contexto como um conjunto de regras para o entendimento,

¹⁴Para os detalhes do argumento, cf. [40], pp. 121 e ss. Além desse argumento sistemático, MacFarlane ainda sustenta a sua tese com argumentos históricos que dizem respeito tanto ao próprio desenvolvimento kantiano na direção do seu idealismo transcendental, quanto à relação de Kant com seus predecessores e, em especial, com Leibniz e a escola wollfiana.

às quais este deve se adequar, mas que não descrevem necessariamente o seu desenvolvimento real.

Dessa forma, temos que a noção kantiana de lógica seria dada em dois momentos. Primeiro, no reconhecimento de que a lógica seria um conjunto de regras que visam estabelecer parâmetros segundo os quais o entendimento deve atuar e, em segundo lugar, no reconhecimento de que apenas regras gerais poderiam ser consideradas lógicas, no sentido de que essas regras não dependeriam de um contexto específico de atuação do entendimento – como depende, por exemplo, as regras de atuação do entendimento de um indivíduo particular que se dedica, digamos, ao estudo de física quântica ou da história do império brasileiro –, mas diriam respeito a *qualquer* atuação do entendimento, seja ela qual for.¹⁵

5.2.2 Aplicação das noções de generalidade e formalidade ao estudo da concepção fregeana de lógica

Como já foi dito acima, o objetivo dessa discussão é tentar interpretar a noção fregeana de lógica como similar à concepção que MacFarlane atribui a Kant. Assim, depois de notar que essa interpretação claramente não está em franca contradição com a passagem da *Lógica* de 1897, precisamos ainda procurar na obra de Frege passagens que se coadunem de forma mais explícita com partes específicas dessa noção de lógica, da qual pretendemos que essas passagens sejam expressão. Mais especificamente devemos notar que, na passagem mencionada, nada está dito sobre um eventual caráter normativo da lógica.¹⁶ Agora, basta considerarmos a seguinte passagem imediatamente

¹⁵Uma evidência inusitada para a posição que defendemos aqui talvez seja a insistência dos neokantianos em geral de distinguir a lógica da psicologia, no contexto da sua empreitada antipsicologista, apelando à normatividade daquela em oposição ao caráter descritivo desta, i.e., podemos ver essa insistência apenas como a reiteração de uma tese que é fundamental para a concepção kantiana de lógica.

¹⁶De fato, Frege, principalmente em passagens que visam combater a concepção psico-

anterior a essa no texto da *Lógica* para vermos como a lógica era certamente reconhecida por Frege como uma ciência normativa:

Como a ética, a lógica também pode ser chamada de ciência normativa. Como devo pensar para atingir o objetivo, a verdade? Esperamos que a lógica nos dê a resposta para essa questão, mas não exigimos dela que ela deva entrar nas peculiaridades de cada ramo do conhecimento e no conteúdo de cada um destes. Ao contrário, a tarefa que conferimos à lógica é somente a de estabelecer aquilo que vale com a maior generalidade para toda esfera de pensamento.¹⁷

Além dessa passagem, há uma outra passagem de Frege muito interessante nesse sentido, a saber:

Que as leis lógicas devem ser normas para o pensamento alcançar a verdade é algo reconhecido certamente por todo o mundo; mas se esquece disso muito facilmente. Aqui, o duplo sentido da palavra “lei” é enganador. Em um sentido, é dito o que é, no outro, é prescrito o que deve ser. Apenas neste sentido as leis lógicas podem ser chamadas leis do pensamento, ao estabelecerem como se deve pensar. Toda lei que diz o que é pode ser concebida também como uma prescrição no sentido de se dever pensar de acordo com ela e é, portanto, nesse sentido uma lei do pensamento. (...) [As leis lógicas] merecem com maior direito o nome de “leis do pensamento”, então, apenas quando com isso queremos dizer que elas

logista da lógica, explicitamente reconhece um caráter descritivo às leis lógicas, tomadas como leis do ser verdadeiro.

¹⁷ “Wie die Ethik kann man auch die Logik eine normative Wissenschaft nennen. Wie muss ich denken, um das Ziel, die Wahrheit, zu erreichen? Die Beantwortung dieser Frage erwarten wir von der Logik, aber wir verlangen nicht von ihr, dass sie auf das Besondere jedes Wissenschaftsgebietes und deren Gegenstände eingehe; sondern nur das Allgemeinste, was für alle Gebiete des Denkens Geltung hat, anzugeben, weisen wir der Logik als aufgabe zu.” ([23], p. 139)

são as mais gerais, que elas prescrevem universalmente como se há de pensar sempre que se pense.¹⁸

Nesta temos, de fato, uma explicitação da posição expressa por Frege na *Lógica*. Para ele, qualquer proposição verdadeira p que descreva alguma situação pode ser imediatamente transformada em uma regra para o pensamento, no sentido de uma diretriz para indivíduos que desejam pensar de acordo com a verdade. Com efeito, essa regra é algo como “deve-se pensar de acordo com p ”. Agora, para compreendermos melhor o que Frege quer dizer, consideremos o seguinte argumento. Primeiro, suponhamos que seja verdade que o presidente do Brasil seja uma mulher. Então, se alguém se propõe a pensar de acordo com a verdade, essa pessoa deve necessariamente julgar que o presidente do Brasil seja uma mulher. Todavia, essa regra para o pensamento verdadeiro certamente não possui uma aplicação muito ampla, pois ela se aplica apenas àquelas pessoas que visam pensar acerca do gênero da pessoa que ocupa o cargo de presidente brasileiro. Por outro lado, as leis da física, se as supusermos verdadeiras, parecem constituir da maneira descrita acima regras com um campo de aplicação muito mais amplo, a saber, o campo composto por todos aqueles pensamentos que visem aspectos físicos do mundo. Assim, um engenheiro construindo um edifício está compelido por essas regras da mesma maneira que um jogador de futebol que precisa compensar o efeito do vento para acertar o seu chute a gol. Contudo, ainda podemos imaginar possíveis casos em que alguém pense, mas que esse

¹⁸“Dass die logischen Gesetze Richtschnuren für das Denken sein sollen zur Erreichung der Wahrheit, wird zwar vorweg allgemein zugegeben; aber es geräth nur zu leicht in Vergessenheit. Der Doppelsinn des Wortes ‚Gesetz‘ ist hier verhängnissvoll. In dem einen Sinne besagt es, was ist, in dem anderen schreibt es vor, was sein soll. Nur in diesem Sinne können die logischen Gesetze Denkgesetze genannt werden, indem sie feststellen, wie gedacht werden soll. Jedes Gesetz, das besagt, was ist, kann aufgefasst werden als vorschreibend, es solle im Einklange damit gedacht werden, und ist also in dem Sinne ein Denkgesetz. (...) [As leis lógicas] verdienen den Namen ‚Denkgesetze‘ nur dann mit mehr Recht, wenn damit gesagt sein soll, dass sie die allgemeinsten sind, die überall da vorschreiben, wie gedacht werden soll, wo überhaupt gedacht wird.” (*GGA*, p. XV)

pensamento não esteja regulado de forma alguma pelas leis da física. Por exemplo, basta considerarmos um crítico literário que discute um romance famoso. Na medida em que ele se restringe a comentar a trama do romance ou as imagens que certas passagens podem evocar na mente do leitor, esse crítico pensa de forma completamente alheia às leis da física, i.e., a verdade destas não regula de forma alguma a correção da atividade intelectual do crítico. Todavia, parece que ele ainda não está completamente livre de amarras na medida em que ele vise pensar verdadeiramente sobre esse romance. Ora, ele com certeza não pode pensar que uma certa passagem do romance invoca a lembrança da infância do protagonista e que a mesma passagem *não* invoca uma tal lembrança, ao menos sob a suposição que sua interpretação visa ser verdadeira em algum sentido – e isso por causa do princípio lógico de não contradição. Dessa maneira, podemos dizer que o que diferencia as leis lógicas de leis de outras ciências é que, enquanto estas podem eventualmente ter um âmbito de aplicação muito grande, aquelas têm necessariamente um âmbito de aplicação *irrestrito*, no sentido de que elas devem poder regular *qualquer* atividade intelectual de indivíduos, seja ela qual for.

Portanto, essas passagens parecem sustentar claramente a tese de que a noção de lógica de Frege se fundamenta na noção de generalidade, tal como ela foi apresentada acima. Entretanto, essa conclusão é dificilmente vislumbrada de forma explícita nos textos de comentadores da obra de Frege. A título de exemplo, podemos considerar a seguinte passagem de Dummett:

A caracterização implícita de uma proposição lógica é tal que ela contém apenas termos de aplicação universal, cujo uso não delimita o domínio no qual a proposição vale; eles são, numa terminologia mais moderna, “*topic-neutral*”.¹⁹

Nessa passagem, Dummett parece querer explicitar o sentido da passagem

¹⁹ “The implicit characterization of a logical proposition is thus that it involves only terms of universal application, whose use in no way delimits the domain in which the proposition holds good; they are, in a later terminology, ‘topic-neutral’.” ([17], p. 24)

da *Lógica* de 1897 com a qual começamos nossa discussão. Todavia, não só Dummett falha em tornar explícita a ambigüidade presente na formulação de Frege, como ele introduz ainda um novo sentido à tese fregeana. De fato, ao introduzir a noção de termos de aplicação universal, Dummett parece querer introduzir na demarcação da lógica algo como o princípio de invariância sob todas as permutações do domínio, que já vimos não se aplicar à concepção fregeana de lógica. Logo, vemos como é necessário abriremos mão de explicações dessas passagens de Frege através de noções contemporâneas essencialmente ambíguas como uma noção confusa de formalidade ou a de *topic-neutrality*, introduzidas não só por Dummett como também por diversos outros comentadores da obra fregeana, procurando conceitos que explicitem exatamente os possíveis sentidos presentes nessas noções.²⁰

Finalmente, devemos notar que a concordância entre as noções fregeana e kantiana de lógica se restringem ao princípio demarcatório dessa disciplina, i.e., à sua generalidade. Como mencionamos acima, Kant pensava ser possível deduzir a formalidade da lógica da sua generalidade. Agora, para Frege, a lógica certamente não é formal no sentido no qual pensamos esse conceito, pois ela versa sobre certos objetos determinados como, por exemplo, os valores de verdade e esses objetos são, para ele, parte do mundo como qualquer outro, de forma que a lógica possuiria sim, para ele, um conteúdo objetivo. Como explicar, então, essa diferença entre teses que dizem respeito a concepções de lógica que são essencialmente a mesma? Ora, para isso, basta lembrarmos que a dedução da formalidade da lógica da sua generalidade ocorria dentro do sistema epistemológico do idealismo transcendental kantiano e envolvia, entre outras premissas, a tese segundo a qual objetos podem nos ser dados apenas pela sensibilidade. No entanto, Frege é bastante

²⁰Devemos notar, contudo, que essa reformulação da concepção fregeana de lógica não é algo extremamente novo, mas tem relação com questões já colocadas por comentadores, como, além do texto de MacFarlane já mencionado, aquela presente na seguinte passagem: “Logic is often thought to be unique among the sciences in its lack of a distinctive subject matter, in its ‘topic-neutrality.’ How can a part of logic be about a distinctive domain of objects and yet preserve its topic-neutrality?” ([34], p. 123)

explícito ao afirmar a existência de objetos abstratos, que, por definição, não podem ser dados pela sensibilidade. De fato, ele reconhece claramente que ele

[deve] também contradizer a generalidade da afirmação de Kant:
sem a sensibilidade nenhum objeto nos seria dado.²¹

Assim, dada essa diferença essencial entre as pressuposições epistemológicas de Frege e Kant, podemos compreender como, de um princípio demarcatório similar, disciplinas com propriedades distintas podem surgir.

5.3 Conclusão acerca da logicidade de $\mathfrak{F}$

Finalmente, podemos voltar à questão acerca da logicidade do sistema $\mathfrak{F}$, agora sob o prisma da concepção de lógica que extraímos dos textos fregeanos acima, i.e., da concepção de lógica como a disciplina que contém as regras de acordo com as quais qualquer atividade conceitual que se propõe atingir a verdade deve se adequar; e, nesse contexto, podemos respondê-la de maneira afirmativa. De fato, notemos que o único símbolo primitivo desse sistema que não possui um correspondente entre os símbolos primitivos de sistemas fregeanos – por exemplo, do sistema das *GGA* – é o operador numérico η . Logo, o nosso problema acerca da logicidade de $\mathfrak{F}$ se reduz à pergunta acerca da aplicação irrestrita das leis com respeito a números como regras para o pensamento.

No entanto, para obtermos uma resposta satisfatória, precisamos tornar essa nossa pergunta um pouco mais precisa, pois, no seu sentido mais literal, é claro que podemos pensar independentemente de números – por exemplo, quando inferimos da proposição “Roberto está em São Paulo” a proposição “Roberto está no Brasil”, uma vez que São Paulo está localizada no Brasil.

²¹ “Ich muss auch der Allgemeinheit der Behauptung Kants widersprechen: ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden.” (*GA*, §89, p. 101)

Nesse exemplo, não há qualquer menção a números e a correção da inferência realizada não depende de quaisquer leis sobre números, de forma que aqui parecemos nos defrontar com uma instância de atividade conceitual independente da noção de número; e isso seria suficiente para resolver a questão que nos colocamos de forma negativa. Por outro lado, para Frege, não há dúvidas que o conceito de negação seria um conceito lógico; de fato, ele é um conceito primitivo em todos os sistemas propostos por Frege. Contudo, na inferência acima não há qualquer menção a esse conceito e a correção daquela depende das leis que regulam este tanto quanto ela depende das leis que regulam o comportamento dos números, de forma que, para aceitar a resposta negativa apresentada acima, seríamos forçados a negar a logicidade de qualquer sistema que contenha um símbolo para a negação – por exemplo, do sistema de B –, o que certamente vai de encontro às conclusões fregeanas.

Dessa maneira, vemos como esse não pode ser o sentido no qual tomamos a pergunta acerca da possibilidade de uma instância de atividade conceitual cuja correção independe das leis sobre números. Mas, então, como devemos interpretá-la? Nesse momento, voltamos outra vez à obra de Frege, pois ele parece possuir uma resposta muito clara para essa pergunta. Com efeito, numa passagem dos *GA* já citada na introdução deste trabalho, ele diz que

[d]o ponto de vista do pensamento conceitual, pode-se sempre assumir o contrário deste ou daquele axioma geométrico, sem incorrer em contradições ao serem feitas deduções a partir de tais assunções contraditórias com a intuição. Esta possibilidade mostra que os axiomas geométricos são independentes entre si e em relação às leis lógicas primitivas, e portanto sintéticos. Pode-se dizer o mesmo dos princípios da ciência dos números? Não teríamos uma total confusão caso pretendêssemos rejeitar um deles? Seria então ainda possível o pensamento? O fundamento da aritmética não é mais profundo que o de todo saber empírico, mais profundo mesmo que o da geometria? As verdades aritméticas governam o domínio do enumerável. Este é o mais inclusivo; pois não lhe per-

tence apenas o efetivamente real, não apenas o intuível, mas todo o pensável. Não deveriam portanto as leis dos números manter com as do pensamento a mais íntima das conexões?²²

A imagem que parece transparecer nessa passagem é a seguinte: os objetos que existem formam um domínio que pode ser dividido de acordo com uma infinidade de maneiras em um subdomínio de objetos que são de tal maneira e o seu complementar, que contém o resto dos objetos; por exemplo, ele pode ser dividido em objetos azuis e não azuis, ou materiais e imateriais, ou animados e inanimados etc. Agora, algumas dessas divisões possuem uma propriedade especial. Com respeito a elas, existem disciplinas que dizem respeito apenas aos objetos do subdomínio por ela estabelecido e não aos objetos contidos no seu complementar, no sentido de que essa disciplina estabelece leis que dizem respeito apenas àqueles e não a estes e que, portanto, se deixam traduzir em regras para a atividade conceitual restritas somente àquelas instâncias desta que dizem respeito unicamente a esse conjunto de objetos. Por exemplo, a divisão do domínio de objetos em animados e inanimados é dessa forma, pois há uma disciplina, a saber, a biologia, que diz respeito apenas a objetos animados (i.e., a seres vivos) e que, portanto, não regula de forma alguma o nosso pensamento com respeito a objetos inanimados.

Então, podemos chamar disciplinas que correspondem a alguma dessas

²² „Für das begriffliche Denken kann man immerhin von diesem oder jenem geometrischen Axiome das Gegentheil annehmen, ohne dass man in Widersprüche mit sich selbst verwickelt wird, wenn man Schlussfolgerungen aus solchen der Anschauung widerstreiten Annahmen zieht. Diese Möglichkeit zeigt, dass die geometrischen Axiome von einander und von den logischen Urgesetzen unabhängig sind, also synthetisch sind. Kann man dasselbe von den Grundsätzen der Zahlenwissenschaft sagen? Stürzt nicht alles in Verwirrung, wenn man einen von diesen leugnen wollte? Wäre dann noch Denken möglich? Liegt nicht der Grund der Arithmetik tiefer als der alles Erfahrungswissens, tiefer selbst als der der Geometrie? Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren. Dies ist das umfassendste; denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare. Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?“ (GA, §14)

divisões do domínio de objetos de *disciplinas de aplicação restrita* e disciplinas que não correspondem a nenhuma divisão desse tipo de *disciplinas de aplicação irrestrita*. Estas são, para Frege, as disciplinas lógicas e, portanto, precisamos nos perguntar se, para ele, nosso sistema $\mathfrak{F}$ formaria uma disciplina desse tipo ou não. Mais especificamente, precisamos nos perguntar se, para ele, o uso do operador $\mathfrak{A}$ se restringe a um subdomínio específico do domínio de objetos ou não.

Ora, parece que devemos responder essa pergunta de forma afirmativa. Com efeito, consideremos os contextos nos quais o operador $\mathfrak{A}$ é utilizado. De acordo com a exposição acima, temos que este operador pode ser prefixado a um conceito de forma a constituir um nome de um objeto, que pode, por sua vez, ser argumento de uma função proposicional. Assim, uma proposição que contém esse operador possui a estrutura geral

$$(*) \quad G(\mathfrak{A}F),$$

na qual F e G são conceitos. Agora, nos perguntamos se proposições desse tipo dizem respeito apenas a um subdomínio de objetos determinado ou não. Então, a resposta que podemos extrair da passagem de Frege mencionada acima é negativa e a interpretação que nos fornece essa resposta é a seguinte: o conceito F ao qual prefixamos o operador $\mathfrak{A}$ pode ser qualquer conceito; em particular, podemos supor, para qualquer subdomínio de objetos, que o conceito F pode ser satisfeito apenas por objetos desse subdomínio. Portanto, não podemos determinar um subdomínio específico de objetos ao qual a proposição $(*)$ é remetida, ou, nas palavras de Frege, “As verdades aritméticas governam o domínio do enumerável. Este é o mais inclusivo; pois não lhe pertence apenas o efetivamente real, não apenas o intuível, mas todo o pensável.”

Assim, concluímos que existe um sentido, que deriva das próprias concepções expressas por Frege ao longo de sua obra, no qual o resultado matemático que ficou conhecido como teorema de Frege pode ser considerado uma concretização do projeto logicista. Em outras palavras, podemos ver

depois de todo o caminho percorrido como a derivação dos axiomas de Peano no contexto de um sistema de lógica de segunda ordem acrescido do PH pode ser considerado uma realização parcial do projeto logicista, tal como ele era concebido por Frege – parcial porque, como vemos no anexo B deste trabalho, por mais que consigamos demonstrar as leis básicas dos números naturais no nosso sistema $\mathfrak{F}$, este não é forte o suficiente para continuar o desenvolvimento do projeto logicista em direção à definição dos números racionais e reais, o que seria necessário para uma fundamentação da análise.

Para terminarmos a exposição, seria interessante levantarmos a seguinte pergunta: dada a conclusão alcançada no parágrafo anterior, não seria estranho notar que o próprio Frege não tenha recorrido a um expediente semelhante àquele exposto neste trabalho de forma a contornar os problemas da sua própria tentativa de concretização do projeto logicista que vieram à tona com a descoberta do paradoxo de Russell? Certamente, tentar descobrir os motivos psicológicos que fizeram com que Frege tenha tomado um certo caminho e não outro quando ele se deparou com uma falha irreparável na construção do seu sistema não parece ser uma tarefa cuja realização seja possível. Todavia, há tentativas de resposta a essa pergunta que parecem bastante verossímeis; em especial, a resposta dada por Marco Ruffino ([48], [49]). Para ele, o motivo pelo qual Frege não poderia aceitar uma solução nos moldes daquela que esboçamos neste trabalho é que uma tal construção não seria capaz de dar conta do modo no qual os números naturais nos seriam dados, i.e., faltaria nessa solução uma resposta de cunho epistemológico para a pergunta acerca da nossa relação com os números naturais. Segundo Ruffino, Frege não teria conseguido aceitar a possibilidade de acesso direto por meios unicamente lógicos a objetos abstratos que não fossem extensões de conceitos – ou, em geral, cursos de valores de funções –, de forma que a postulação de um operador de cardinalidade, como o nosso η , seria simplesmente uma suposição infundada. Mas esse já seria um outro problema, cuja análise vai além dos objetivos propostos para este trabalho.

Anexo A. O teorema geral de recursão

O objetivo aqui é mostrar dentro de um sistema de lógica de predicados de segunda ordem uma versão do teorema geral de recursão, usado no capítulo 2 deste trabalho para definir as operações nos números naturais. Para isso, precisamos antes estabelecer uma certa terminologia. Primeiro, dizemos que uma relação binária R é uma *aplicação* de um conceito F em um conceito G (em símbolos, $\rangle R(F, G)$), se R satisfizer as seguintes condições:

- (i) $I(R)$;
- (ii) $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge R(x, y)))$.²³

Em segundo lugar, precisamos estender a noção de ancestral de uma relação para relações quaternárias.²⁴ Seja, então, R uma relação quaternária

²³Frege, em *GGA*, toma pela segunda condição a expressão equivalente $\forall x(\forall y(R(x, y) \rightarrow \sim G(y)) \rightarrow \sim F(x))$.

²⁴Frege, em *GGA*, faz uso de relações binárias com pares ordenados como argumentos ao invés de relações quaternárias. No entanto, para isso, ele precisa apresentar uma definição de par ordenado, o que é feito por meio do seu operador de extensão, estipulando que o par ordenado (a, b) deve ser a extensão do conceito de segunda ordem que é satisfeito exatamente pelas relações nas quais o objeto a se encontra com o objeto b , i.e., $(a, b) = \hat{e}.\varepsilon(a, b)$. Nós, todavia, não temos o operador de extensão disponível, sem contar que essa definição faz com que pares ordenados sejam classes próprias, o que não deixa de trazer certas complicações. Outra opção para a introdução de pares ordenados é explorada em um contexto diferente no anexo B.

e F uma relação binária. Definimos o predicado $Her_R^2(F)$, de forma análoga ao caso das relações binárias, da seguinte maneira:

$$Her_R^2(F) \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \forall w (F(x, y) \wedge R(x, y, z, w) \rightarrow F(z, w)).$$

Os ancestrais forte e fraco de R também são definidos de forma análoga ao caso das relações binárias como, respectivamente,

$$\perp^2 R(a, b, c, d) \leftrightarrow \forall F (Her_R^2(F) \wedge \forall x \forall y (R(a, b, x, y) \rightarrow F(x, y)) \rightarrow F(c, d))$$

e

$$\mathcal{I}^2 R(a, b, c, d) \leftrightarrow \perp^2 R(a, b, c, d) \vee (a = c \wedge b = d).$$

Escrevemos, ainda, $\mathcal{I}^2 R_{(a,b)}$ para a relação binária $[x, y : \mathcal{I}^2 R(a, b, x, y)]$ e definimos a funcionalidade de R como

$$I^2(R) \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \forall w \forall u \forall v (R(x, y, z, w) \wedge R(x, y, u, v) \rightarrow z = u \wedge w = v).$$

Em geral, como nota Heck no artigo “Definition by Induction in Frege’s *Grundgesetze der Arithmetik*”, dado um número natural $n > 0$, uma relação $2n$ -ária R e uma relação n -ária F , podemos definir

$$Her_R^n(F) \leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_{2n} (F(x_1, \dots, x_n) \wedge R(x_1, \dots, x_{2n}) \rightarrow F(x_{n+1}, \dots, x_{2n}));$$

$$\perp^n R(a_1, \dots, a_{2n}) \leftrightarrow \forall F (Her_R^n(F) \wedge \forall x_1 \dots \forall x_n (R(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(x_1, \dots, x_n)) \rightarrow F(a_{n+1}, \dots, a_{2n}));$$

$$\mathcal{I}^n R(a_1, \dots, a_{2n}) \leftrightarrow \perp^n R(a_1, \dots, a_{2n}) \vee (a_1 = a_{n+1} \wedge a_2 = a_{n+2} \wedge \dots \wedge a_n = a_{2n})$$

e

$$I^n(R) \leftrightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \forall z_1 \dots \forall z_n (R(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \wedge R(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n) \rightarrow y_1 = z_1 \wedge \dots \wedge y_n = z_n).$$

Finalmente, a última noção a ser definida é a noção de *pareamento de relações*. Dadas duas relações binárias R e Q , definimos o pareamento das duas como sendo a relação quaternária $R \simeq Q$ dada por

$$R \simeq Q(x, y, z, w) \leftrightarrow R(x, z) \wedge Q(y, w).$$

Podemos, assim, enunciar o teorema cuja demonstração é nosso objetivo:

Teorema 12 (Teorema geral de recursão). $\vdash I(R) \wedge I(Q) \wedge \sim \exists y(\smile R(a, y) \wedge \perp R(y, y)) \wedge \forall x(\smile Q(b, x) \rightarrow \exists y(Q(x, y)) \rightarrow \smile (R \asymp Q)_{(a,b)}([x : \smile R(a, x)], [x : \smile Q(b, x)]))$

Antes de mostrar esse teorema, no entanto, precisamos provar alguns resultados preliminares. Nessas provas, para simplificar a notação, deixaremos de lado os índices nos símbolos $\smile^2$, I^2 etc.

Lema 13. *Seja R uma relação quaternária. Então,*

$$\vdash \perp R(a, b, c, d) \rightarrow \exists u \exists v (R(a, b, u, v) \wedge \smile R(u, v, c, d)).$$

Demonstração. Seja $F \equiv [x, y : \exists u \exists v (R(a, b, u, v) \wedge \smile R(u, v, x, y))]$. Se $R(a, b, x, y)$, então $F(x, y)$, pois, tomando $u = x$ e $v = y$, temos que $R(a, b, u, v)$ e $\smile R(u, v, x, y)$. Agora, temos ainda que $Her_R(F)$, pois, se $F(x, y)$ e $R(x, y, z, w)$, então, por definição, existem u e v , tais que $R(a, b, u, v)$ e $\smile R(u, v, x, y)$. Mas, então, temos que $R(a, b, u, v)$ e $\smile R(u, v, z, w)$,²⁵ ou seja, $F(z, w)$. Logo, se $\perp R(a, b, c, d)$, então $\exists u \exists v (R(a, b, u, v) \wedge \smile R(u, v, c, d))$.

Lema 14. *Seja R uma relação quaternária. Então,*

$$\vdash I(R) \wedge \perp R(a, b, c, d) \wedge R(a, b, e, f) \rightarrow \smile R(e, f, c, d).$$

Demonstração. Pelo lema anterior, temos que as hipóteses implicam que existem u e v , tais que $R(a, b, u, v)$ e $\smile R(u, v, c, d)$. Agora, como $I(R)$, temos que $u = e$ e $v = f$, de forma que $\smile R(e, f, c, d)$.

Lema 15. *Seja R uma relação quaternária. Então,*

$$\vdash I(R) \wedge \smile R(a, b, c, d) \wedge \smile R(a, b, e, f) \rightarrow \perp R(c, d, e, f) \vee \smile R(e, f, c, d).$$

Demonstração. É uma consequência da definição da noção de ancestral que, dada uma relação binária F , temos $\smile R(a, b, c, d) \wedge F(a, b) \wedge Her_R(F) \rightarrow$

²⁵Aqui utilizamos uma generalização para relações quaternárias de um resultado sobre os ancestrais de relações binárias, a saber, $\smile R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow \smile R(x, z)$, cuja demonstração (absolutamente análoga àquela no caso de relações binárias) é deixada como exercício.

$F(c, d)$. Agora, tomemos $F \equiv [x, y : \perp R(x, y, e, f) \vee \cup R(e, f, x, y)]$. Para obter o resultado desejado, precisamos mostrar

- (i) $F(a, b)$, i.e., $\perp R(a, b, e, f) \vee \cup R(e, f, a, b)$ e
- (ii) $Her_R(F)$, i.e., $\forall x \forall y \forall z \forall w ((\perp R(x, y, e, f) \vee \cup R(e, f, x, y)) \wedge R(x, y, z, w) \rightarrow \perp R(z, w, e, f) \vee \cup R(e, f, z, w))$.

Mostrar (i) é fácil, pois, supondo que $\cup R(a, b, e, f)$, temos que $\perp R(a, b, e, f)$ ou $a = e \wedge b = f$ e, portanto, que $\perp R(a, b, e, f) \vee \cup R(e, f, a, b)$. Agora, para mostrar (ii), suponhamos que $R(x, y, z, w)$. Se $\perp R(x, y, e, f)$, então, pelo lema anterior, temos $\cup R(z, w, e, f)$. Mas isso implica que $\perp R(z, w, e, f)$ ou $z = e \wedge w = f$, que, por sua vez implica que $\cup R(e, f, z, w)$. Por outro lado, se $\cup R(e, f, x, y)$, então $\cup R(e, f, z, w)$.

Lema 16. $\vdash \perp R \simeq Q(a, b, c, d) \rightarrow \perp R(a, c)$.

Demonstração. Dado um conceito F , tal que $Her_R(F)$ e, para todo x , $R(a, x) \rightarrow F(x)$, consideremos a relação binária $S_F \equiv [x, y : F(x)]$. Notemos que, se $S_F(x, y)$ e $R \simeq Q(x, y, z, w)$, então, por definição, temos $F(x)$ e $R(x, z)$, de forma que, como $Her_R(F)$, temos $F(z)$ e, portanto, $S_F(z, w)$. Assim, mostramos que $Her_{R \simeq Q}(S_F)$. Por outro lado, se $R \simeq Q(a, b, z, w)$, então, por definição, temos $R(a, z)$ e, portanto, por hipótese temos que $F(z)$. Agora, isso significa que $S_F(z, w)$, de forma que, pela definição do ancestral forte, temos que $S_F(c, d)$ e, portanto, que $F(c)$.

Lema 17. *Sejam R e Q relações binárias tais que $I(R)$ e $I(Q)$. Então $\vdash I(R \simeq Q)$.*

Demonstração. Suponhamos que $R \simeq Q(x, y, z, w)$ e que $R \simeq Q(x, y, u, v)$. Então, por definição, temos $R(x, z)$, $R(x, u)$, $Q(y, w)$ e $Q(y, v)$, de forma que, como $I(R)$ e $I(Q)$, temos $z = u$ e $w = v$.

Teorema 18. $\vdash I(R \simeq Q) \wedge \sim \exists x (\cup R(a, x) \wedge \perp R(x, x)) \rightarrow I(\cup R \simeq Q_{(a,b)})$.

Demonstração. Suponhamos que $\cup R \simeq Q_{(a,b)}(x, y)$ e $\cup R \simeq Q_{(a,b)}(x, z)$, ou seja, que $\cup R \simeq Q(a, b, x, y)$ e $\cup R \simeq Q(a, b, x, z)$. Assim, pelo lema 15, devemos ter um dos seguintes casos:

- (i) $\perp R \simeq Q(x, y, x, z)$;
- (ii) $\perp R \simeq Q(x, z, x, y)$;
- (iii) $x = x \wedge y = z$.

Nos dois primeiros casos, teríamos, pelo lema 16, que $\perp R(x, x)$, o que contradiz a hipótese do teorema. Logo, resta apenas o caso (iii), de forma que devemos concluir que $I(\cup R \simeq Q_{(a,b)})$.

Demonstração (do teorema geral de recursão). Notemos em primeiro lugar que, por causa do lema 17 e do teorema 18, as hipóteses implicam que $I(\cup R \simeq Q_{(a,b)})$. Agora, seja x , tal que $\cup R(a, x)$. Se $x = a$, então, como $\cup Q(b, b)$ e $\cup R \simeq Q_{(a,b)}(a, b)$, não há nada a ser demonstrado. Suponhamos, então, que $\perp R(x, a)$ e seja $F \equiv [z : \exists y(\cup Q(b, y) \wedge \cup R \simeq Q_{(a,b)}(z, y))]$. Como $\cup Q(b, b)$, por hipótese, existe y , tal que $Q(b, y)$. Logo, se $R(a, z)$, então $R \simeq Q(a, b, z, y)$ e, portanto, $\cup R \simeq Q(a, b, z, y)$. Além disso, suponhamos que $F(u)$ e $R(u, v)$. Então, existe t , tal que $\cup Q(b, t)$ e $\cup R \simeq Q(a, b, u, t)$. Agora, por hipótese, existe t' , tal que $Q(t, t')$ e $\cup Q(b, t')$, de forma que temos $R \simeq Q(u, t, v, t')$ e, portanto, que $\cup R \simeq Q(a, b, v, t')^{26}$, i.e., que $F(v)$. Assim, concluímos que $Her_R(F)$ e, portanto, que $F(x)$, ou seja, que $\exists y(\cup Q(b, y) \wedge \cup R \simeq Q_{(a,b)}(x, y))$.

²⁶Aqui, outra vez utilizamos uma generalização para relações quaternárias de uma propriedade demonstrada apenas para relações binárias.

Anexo B. Para além dos números naturais

Como vimos na primeira parte deste trabalho, é possível definir no sistema $\mathfrak{F}$ os números naturais e demonstrar nele as leis básicas que os regulam. No entanto, esse sistema não é forte o suficiente para que continuemos na direção de uma definição dos números inteiros, racionais e reais, de forma que, ainda que a aritmética, i.e., o estudo dos números naturais, possa ser, como vimos, reduzida a esse sistema, o estudo de um conjunto mais abrangente de números, e eventualmente a análise real e complexa, não pode. O motivo disso é, em primeiro lugar, que, como vimos no anexo A, não existe a possibilidade de definirmos a noção de par ordenado no sistema $\mathfrak{F}$. Contudo, essa noção é essencial para a realização dessa extrapolação para conjuntos mais complexos de números, uma vez que, dentro dos limites do meu conhecimento, não há uma forma de definir estes a partir dos números naturais sem a utilização de pares ordenados. Assim, recentemente o que se tem procurado fazer é encontrar princípios análogos ao PH que possam ser adicionados a sistemas do tipo do nosso sistema $\mathfrak{F}$, de forma a proporcionar uma definição desses conjuntos mais abrangentes de números nesse novo sistema mais forte. Esses princípios, dos quais o PH é um exemplo, são chamados *princípios de abstração* e a discussão a seu respeito consiste numa parte considerável dos trabalhos contemporâneos em filosofia da matemática.²⁷

²⁷Cf. [18].

Normalmente, princípios de abstração são tidos como proposições que reduzem a identidade de certos objetos a serem introduzidos em um sistema a uma relação de equivalência²⁸ entre entidades já presentes no sistema. Formalmente, temos que esses princípios estabelecem o sentido de operadores que, como o operador numérico η , podem ser prefixados a certos símbolos do sistema de forma a gerarem termos desse sistema. Em geral, se considerarmos um tal operador $\ddagger$ e uma relação de equivalência $\rightsquigarrow$ que se dá entre entidades α, β do sistema, podemos dizer que um princípio de equivalência é uma proposição da forma

$$(\ddagger) \quad \ddagger\alpha = \ddagger\beta \iff \alpha \rightsquigarrow \beta.$$

Agora, o objetivo desse anexo é apresentar uma construção dos números reais, passando pelos números inteiros e racionais, a partir da adição de princípios desse tipo ao nosso sistema $\mathfrak{F}$ original.²⁹ Todavia, para isso, teremos que expandir um pouco os conceitos apresentados acima de uma forma similar àquela do anexo A, mas um pouco menos geral. Dada uma relação quaternária R , dizemos que R é uma *relação de equivalência* se, para quaisquer objetos x, y, z, u, v, w , R satisfizer as seguintes condições:

$$(i) \ R(x, y, x, y);$$

²⁸Uma relação de equivalência é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva, i.e., ela é uma relação R que satisfaz, para todo objeto x, y, z , as seguintes cláusulas:

$$(i) \ R(x, x);$$

$$(ii) \ \text{se } R(x, y), \text{ então } R(y, x); \text{ e}$$

$$(iii) \ \text{se } R(x, y) \text{ e } R(y, z), \text{ então } R(x, z).$$

²⁹Em grande parte, a presente exposição segue aquela feita por Shapiro em [52], principalmente antes da introdução dos números reais. Há entre essas duas exposições algumas diferenças que dizem respeito às modificações necessárias à adequação da presente discussão ao sistema $\mathfrak{F}$, assim como acréscimos visando um maior rigor conceitual e supressões de partes que não são absolutamente necessárias para a presente exposição. Mais essencialmente, contudo, esse anexo se distancia de [52] na medida em que a introdução dos números reais é feita aqui – ao menos no que diz respeito ao meu conhecimento, pela primeira vez de forma detalhada – por meio de seqüências de Cauchy e não, como é feito naquele texto, por meio de cortes de Dedekind.

(ii) se $R(x, y, z, u)$, então $R(z, u, x, y)$; e

(iii) se $R(x, y, z, u)$ e $R(z, u, v, w)$, então $R(x, y, v, w)$.

Então, podemos dizer que os princípios da forma $(\dagger)$ são princípios *unários* de abstração e definimos princípios *binários* de abstração como sendo princípios da forma

$$\imath(\alpha, \beta) = \imath(\gamma, \delta) \iff E(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

em que E é uma relação de equivalência quaternária no sentido definido acima e $\imath$ é um operador binário, e não mais unário, como era $\ddagger$.

Assim, para introduzir pares ordenados no nosso sistema $\mathfrak{F}$, adicionamos a ele um operador binário sobre objetos, que denotaremos por Π , e, para regular seu uso, o seguinte princípio binário de abstração, que chamaremos de *princípio dos pares*:³⁰

$$(PP) \quad \Pi(a, b) = \Pi(c, d) \leftrightarrow (a = c \wedge b = d).$$

Depois, adicionamos o operador de número inteiro $\mathfrak{Z}$, que é regulado pelo seguinte princípio, que chamaremos de *princípio dos números inteiros*:

$$(PNI) \quad \mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) = \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)) \leftrightarrow a + d = b + c,$$

no qual a, b, c e d são números naturais. Esse princípio incorpora a intuição por trás das definições usuais dos números inteiros a partir dos números naturais segundo a qual um número inteiro é a classe de pares de números naturais cuja diferença entre o primeiro e o segundo números desse par é a mesma. Logo, por exemplo, temos que todas as seguintes expressões denotam o mesmo número inteiro -2 : $\mathfrak{Z}(\Pi(0, 2))$, $\mathfrak{Z}(\Pi(1, 3))$, $\mathfrak{Z}(\Pi(7, 9))$, $\mathfrak{Z}(\Pi(75, 77))$ etc.; e, em geral, o correspondente inteiro de cada número natural n pode ser expresso pelo termo $\mathfrak{Z}(\Pi(n, 0))$, assim como, para cada número natural

³⁰Notemos que no sistema obtido do sistema $\mathfrak{F}$, acrescido do princípio dos pares, a demonstração do teorema geral de recursão, vista no anexo anterior, se torna consideravelmente mais simples.

m , pelo termo $\mathfrak{Z}(\Pi(n + m, m))$.³¹

Então, as operações de adição e multiplicação de números inteiros são definidas sobre a base das operações correspondentes para números naturais, definidas no capítulo 2, da seguinte maneira:

$$\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) + \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)) = \mathfrak{Z}(\Pi(a + c, b + d));$$

$$\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) \cdot \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)) = \mathfrak{Z}(\Pi(ac + bd, bc + ad)).$$

Além disso, temos, para cada número inteiro $\mathfrak{Z}(\Pi(m, n))$ um outro número inteiro, a saber, $\mathfrak{Z}(\Pi(n, m))$, tal que

$$\mathfrak{Z}(\Pi(m, n)) + \mathfrak{Z}(\Pi(n, m)) = \mathfrak{Z}(\Pi(0, 0)).³²$$

Esse número $\mathfrak{Z}(\Pi(n, m))$ – que, como pode ser facilmente demonstrado,³³ é único – é dito o *oposto* de $\mathfrak{Z}(\Pi(m, n))$ e é denotado por $-\mathfrak{Z}(\Pi(m, n))$. Por

³¹O objetivo desse anexo é apenas apresentar uma possível extensão formal do sistema $\mathfrak{F}$ na qual seja possível definir conjuntos mais abrangentes de números que aquele dos números naturais. Por esse motivo, vamos evitar considerar questões acerca da identidade entre números pertencentes a conjuntos diferentes. Este é um problema muito sutil, em vista do qual a atitude predominante entre os matemáticos é identificação pragmática dos números menos complexos com os seus correspondentes nos conjuntos mais abrangentes por meio de um homomorfismo injetor daqueles nestes, i.e., por meio de uma função injetora que preserva as operações. Esse problema é mencionado em [52] e a cada passagem para números mais complexos o homomorfismo em questão é imediatamente introduzido.

³²Notemos que $\mathfrak{Z}(\Pi(0, 0))$ é o zero inteiro, que deve ser a princípio distinguido do número natural 0. Cf. nota anterior.

³³Demonstração: suponhamos que obtemos o número inteiro zero somando ao número $\mathfrak{Z}(\Pi(m, n))$, tanto o número $\mathfrak{Z}(\Pi(a, b))$, quanto o número $\mathfrak{Z}(\Pi(c, d))$. Então, pela definição de adição, temos que

$$\mathfrak{Z}(\Pi(m + a, n + b)) = \mathfrak{Z}(\Pi(0, 0)) = \mathfrak{Z}(\Pi(m + c, n + d)),$$

i.e., que

$$m + a + n + d = m + c + n + b.$$

Logo, usando propriedades dos números naturais deriváveis dos axiomas de Peano-Dedekind, temos que

$$a + d = b + c,$$

meio deste, podemos definir a subtração de números inteiros como

$$\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) - \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)) = \mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) + (-\mathfrak{Z}(\Pi(c, d))).$$

Depois, passamos aos números racionais. A forma clássica de defini-los é considerando-os como classes de equivalência de pares de números inteiros (com o segundo elemento do par não nulo), de forma que os pares (a, b) e (c, d) pertençam à mesma classe se, e somente se, tivermos $ad = bc$. Assim, utilizamos essa intuição clássica para adicionar ao sistema $\mathfrak{F}$ um operador $\mathfrak{Q}$ regulado pelo que chamaremos de *princípio dos quocientes*:

$$\begin{aligned} \text{(PQ)} \quad \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)), \mathfrak{Z}(\Pi(c, d))) &= \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(e, f)), \mathfrak{Z}(\Pi(g, h))) \leftrightarrow \\ &(\mathfrak{Z}(\Pi(c, d)) = 0 \wedge \mathfrak{Z}(\Pi(g, h)) = 0) \vee \\ &(\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) \cdot \mathfrak{Z}(\Pi(g, h)) = \mathfrak{Z}(\Pi(d, e)) \cdot \mathfrak{Z}(\Pi(c, d))). \end{aligned}$$

As operações de adição e multiplicação sobre números racionais são definidas do modo usual como

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)), \mathfrak{Z}(\Pi(c, d))) + \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(e, f)), \mathfrak{Z}(\Pi(g, h))) = \\ &\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) \cdot \mathfrak{Z}(\Pi(g, h)) + \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)) \cdot \mathfrak{Z}(\Pi(e, f)), \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)) \cdot \mathfrak{Z}(\Pi(g, h))) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)), \mathfrak{Z}(\Pi(c, d))) \cdot \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(e, f)), \mathfrak{Z}(\Pi(g, h))) = \\ &\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) \cdot \mathfrak{Z}(\Pi(e, f)), \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)) \cdot \mathfrak{Z}(\Pi(g, h))). \end{aligned}$$

Além disso, cada número racional possuirá um oposto e, se ele for não nulo, um inverso – i.e., o número que multiplicado a um certo número racional resulta na unidade $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(1, 0)), \mathfrak{Z}(\Pi(1, 0)))$, que denotaremos no que segue por **1**. Esses números podem ser introduzidos, assim como as operações de

ou seja, que

$$\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) = \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)). \quad Q.E.D.$$

subtração e divisão, de forma análoga aos opostos dos números inteiros e à operação de subtração nestes.³⁴

Notemos como, por meio dessa exposição, fica claro como números mais complexos são introduzidos a partir de números mais simples, na medida em que os operadores que estamos introduzindo se aplicam às entidades obtidas por meio dos operadores introduzidos anteriormente. No entanto, para realizarmos a introdução dos números reais, de forma a evitar que a complexidade excessiva da notação comprometa a sua compreensão, introduziremos primeiro as variáveis **p**, **q**, **r**, **s** para designar números racionais e escreveremos números inteiros em negrito para nos referirmos aos seus correspondentes racionais.³⁵

Além disso, notemos que, a partir de uma quantidade enumerável de objetos, princípios de abstração contendo operadores sobre objetos ou sobre pares de objetos – como são, por exemplo, os princípios dos pares, dos números inteiros e dos quocientes vistos acima – implicam a existência de apenas um número enumerável de objetos. Logo, uma vez que os números reais não são enumeráveis, concluímos que o princípio que precisamos encontrar para

³⁴No que segue, denotaremos o oposto de um número racional **p** por $-\mathbf{p}$ e o inverso de um número racional não nulo **p** por $\frac{1}{\mathbf{p}}$.

³⁵No que segue, também utilizaremos quantificadores restritos a números racionais, o que não era algo inicialmente presente no sistema $\mathfrak{F}$. No entanto, esses quantificadores podem ser rigorosamente definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{p} F(\mathbf{p}) \leftrightarrow \\ \forall a_1 \forall a_2 \forall a_3 \forall a_4 (\exists G_1 \exists G_2 \exists G_3 \exists G_4 (a_1 = \mathfrak{H}(G_1) \wedge a_2 = \mathfrak{H}(G_2) \wedge \\ a_3 = \mathfrak{H}(G_3) \wedge a_4 = \mathfrak{H}(G_4)) \rightarrow F(\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a_1, a_2), \mathfrak{Z}(\Pi(a_3, a_4))))) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{p} F(\mathbf{p}) \leftrightarrow \\ \exists a_1 \exists a_2 \exists a_3 \exists a_4 \exists G_1 \exists G_2 \exists G_3 \exists G_4 (a_1 = \mathfrak{H}(G_1) \wedge a_2 = \mathfrak{H}(G_2) \wedge \\ a_3 = \mathfrak{H}(G_3) \wedge a_4 = \mathfrak{H}(G_4) \wedge F(\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a_1, a_2), \mathfrak{Z}(\Pi(a_3, a_4))))) \end{aligned}$$

introduzi-los deve regular a atuação de um operador sobre entidades diferentes de objetos ou pares de objetos. Mas isso não é um problema, pois o próprio operador η do sistema $\mathfrak{F}$ original não era um operador sobre objetos, mas sobre conceitos. Analogamente, então, vamos considerar um operador $\mathfrak{L}$ que atua sobre relações.

Contudo, antes disso, precisamos introduzir uma ordem nos números obtidos até agora. Para os números naturais, a noção de ordem é concretizada pela relação $\perp f$, de forma que, dados dois números naturais m, n , dizemos que $m < n$ se, e somente se, $\perp f(m, n)$. Agora, para estender essa noção para os números inteiros, notemos que estes são, intuitivamente, classes de pares de números naturais, nos quais o segundo é, em algum sentido, subtraído do primeiro, i.e., eles nos são dados na forma $\mathfrak{Z}(\Pi(m, n))$, com m, n números naturais. Assim, podemos definir a noção de número inteiro positivo como a propriedade dos números inteiros da forma acima tais que $n < m$, ou, na nossa linguagem original, tais que $\perp f(n, m)$. Então, dizemos que $\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)) < \mathfrak{Z}(\Pi(c, d))$ se, e somente se, $\mathfrak{Z}(\Pi(c, d)) - \mathfrak{Z}(\Pi(a, b))$ for um número positivo.

Uma ordem nos números racionais será introduzida de maneira análoga. Primeiro, dizemos que um número racional $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)), \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)))$ é positivo se ambos $\mathfrak{Z}(\Pi(a, b))$ e $\mathfrak{Z}(\Pi(c, d))$ forem positivos ou se ambos os seus respectivos opostos o forem. Assim, definimos

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)), \mathfrak{Z}(\Pi(c, d))) < \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(e, f)), \mathfrak{Z}(\Pi(g, h)))$$

como significando que o número

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(e, f)), \mathfrak{Z}(\Pi(g, h))) - \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}(\Pi(a, b)), \mathfrak{Z}(\Pi(c, d)))$$

é positivo.

Em geral, foi definida dessa maneira uma noção de ordem estrita aplicável a qualquer classe de números. Para definir uma noção de ordem fraca – i.e., a relação “menor ou igual” –, basta colocarmos $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$, com α e β podendo ser substituídos por pares de números de

qualquer tipo, desde que sempre do mesmo tipo; e definimos $\alpha > \beta$ e $\alpha \geq \beta$ como significando, respectivamente, $\beta < \alpha$ e $\beta \leq \alpha$.

Finalmente, antes de introduzir os números reais, é necessário fixar alguns conceitos básicos. Em primeiro lugar, dizemos que uma relação R é uma *seqüência de números racionais* se R for funcional e, para cada número natural n existir um número racional $\mathbf{p}$, tal que $R(n, \mathbf{p})$. Como é costumeiro, denotaremos a relação R por $(\mathbf{p}_n)_n$, em que $\mathbf{p}_n$ denota o único número racional que está na relação R com n . Depois, definimos, para um dado número racional $\mathbf{p}$,³⁶

$$|\mathbf{p}| = \begin{cases} -\mathbf{p} & \text{se } \mathbf{p} < \mathbf{0} \\ \mathbf{p} & \text{se } \mathbf{0} \leq \mathbf{p}. \end{cases}$$

Então, introduzimos no nosso sistema o seguinte princípio de abstração, que chamaremos *princípio dos limites*:³⁷

$$(\text{PL}) \quad \mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n = \mathfrak{L}(\mathbf{q}_n)_n \leftrightarrow \forall \mathbf{r} > \mathbf{0} \exists n_0 \forall n (n_0 \leq n \rightarrow |\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_n| \leq \mathbf{r}).$$

Agora, dizemos que uma seqüência de números racionais é *de Cauchy* se, para todo número racional positivo $\mathbf{q}$, existir um número natural n_0 tal que

$$|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n| \leq \mathbf{q},$$

para todo $m, n \geq n_0$. Então, podemos definir os números reais como sendo os limites de seqüências de Cauchy de números racionais.

Para definir as operações nos números reais, vamos definir antes as operações análogas para seqüências de números racionais. Assim, dadas duas seqüências $(\mathbf{p}_n)_n$ e $(\mathbf{q}_n)_n$, definimos

$$(\mathbf{p}_n)_n + (\mathbf{q}_n)_n = (\mathbf{p}_n + \mathbf{q}_n)_n$$

³⁶A função definida aqui é absolutamente análoga à função módulo utilizada em análise e, o que vai ser importante mais adiante, ela satisfaz todas as desigualdades clássicas.

³⁷Notemos que seqüências divergentes no sentido clássico – i.e., seqüências $(\mathbf{p}_n)_n$ tais que, para quaisquer números racionais $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, existir um número natural n , tal que $|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}| > \mathbf{q}$ – possuirão um limite no sentido de limite apresentado aqui e, de fato, todas as seqüências classicamente divergente possuirão o mesmo limite no nosso sentido.

e

$$(\mathbf{p}_n)_n \cdot (\mathbf{q}_n)_n = (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{q}_n)_n.$$

Então, definimos

$$\mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n + \mathfrak{L}(\mathbf{q}_n)_n = \mathfrak{L}((\mathbf{p}_n)_n + (\mathbf{q}_n)_n)$$

e

$$\mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n \cdot \mathfrak{L}(\mathbf{q}_n)_n = \mathfrak{L}((\mathbf{p}_n)_n \cdot (\mathbf{q}_n)_n).$$

De posse dessas definições, é fácil verificar que $\mathbb{0} = \mathfrak{L}(\mathbf{0})_n$ e $\mathbb{1} = \mathfrak{L}(\mathbf{1})_n$ são os elementos neutros para a adição e a multiplicação, respectivamente. Além disso, podemos mostrar que todo número real possui um oposto e – se ele for não nulo – também um inverso multiplicativo. De fato, dada uma seqüência de Cauchy de números racionais $(\mathbf{p}_n)_n$, consideramos a seqüência $(-\mathbf{p}_n)_n$. Ela é de Cauchy, pois, como $(\mathbf{p}_n)_n$ é, por hipótese, de Cauchy, dado $\mathbf{q} > \mathbf{0}$, existe n_0 , tal que, para todo $m, n \geq n_0$,

$$|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n| \leq \mathbf{q}.$$

Então, temos que

$$|-\mathbf{p}_m - (-\mathbf{p}_n)| = |\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m| = |\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n| \leq \mathbf{q}.$$

Agora,

$$\mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n + \mathfrak{L}(-\mathbf{p}_n)_n = \mathfrak{L}((\mathbf{p}_n)_n + (-\mathbf{p}_n)_n) = \mathfrak{L}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_n)_n = \mathfrak{L}(\mathbf{0})_n = \mathbb{0},$$

de forma que $\mathfrak{L}(-\mathbf{p}_n)_n$ é o oposto de $\mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n$.

Por outro lado, se $(\mathbf{p}_n)_n$ tem limite distinto de $\mathbb{0}$, então, para todo número natural n , existe $m > n$, tal que, para algum número racional $\mathbf{q} > \mathbf{0}$,

$$|\mathbf{p}_n| > \mathbf{q};$$

ou seja, podemos considerar uma subsequência³⁸ $(\mathbf{p}_{n_s})_s$ com

$$|\mathbf{p}_{n_s}| > \mathbf{q},$$

³⁸A noção de subsequência é tomada aqui da mesma forma que na linguagem usual de análise e sua introdução no nosso sistema não oferece quaisquer dificuldades.

para todo s natural. Além disso, como, outra vez por hipótese, $(\mathbf{p}_n)_n$ é de Cauchy, existe n_0 , tal que, para todo $m, n \geq n_0$,

$$|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n| \leq \frac{\mathbf{q}}{2},$$

de forma que, para um $n_s > n_0$ fixado, temos

$$|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n_s}| \leq \frac{\mathbf{q}}{2},$$

para todo $n \geq n_s$. Assim, como

$$|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n_s}| \geq |\mathbf{p}_{n_s}| - |\mathbf{p}_n|,$$

temos, para todo $n \geq n_s$, que

$$|\mathbf{p}_n| \geq |\mathbf{p}_{n_s}| - \frac{\mathbf{q}}{2} > \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}}{2} = \frac{\mathbf{q}}{2}.$$

Seja, então, $(\mathbf{q}_n)_n$ dada por

$$\mathbf{q}_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{p}_n = \mathbf{0} \\ \frac{1}{\mathbf{p}} & \text{se } \mathbf{p}_n \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Em particular, pelo que vimos acima, temos que $\mathbf{p}_n \neq \mathbf{0}$, para todo $n \geq n_s$. Para vermos que $(\mathbf{q}_n)_n$ é de Cauchy, seja $\mathbf{r} > \mathbf{0}$. Como $(\mathbf{p}_n)_n$ é de Cauchy, existe n_1 , tal que, para todo $m, n \geq n_1$,

$$|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n| \leq \frac{\mathbf{r}\mathbf{q}^2}{4}.$$

Então, tomando $m, n \geq m_0 = \max\{n_s, n_1\}$,³⁹ temos que

$$|\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_n| = \left| \frac{1}{\mathbf{p}_m} - \frac{1}{\mathbf{p}_n} \right| \leq \frac{|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n|}{|\mathbf{p}_m| \cdot |\mathbf{p}_n|} < \frac{|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n|}{\frac{\mathbf{q}^2}{4}} \leq \frac{4}{\mathbf{q}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}\mathbf{q}^2}{4} = \mathbf{r}.$$

Finalmente, resta vermos que

$$\mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n \cdot \mathfrak{L}(\mathbf{q}_n)_n = \mathbb{1}.$$

³⁹I.e., $m_0 = n_s$, se $n_s \geq n_1$, e $m_0 = n_1$, se $n_1 \geq n_s$.

Para isso, dado $\mathbf{r} > 0$, basta considerarmos $n \geq n_s$, de forma que

$$|\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{q}_n - \mathbf{1}| = \left| \mathbf{p}_n \cdot \frac{1}{\mathbf{p}_n} - \mathbf{1} \right| = |\mathbf{1} - \mathbf{1}| < \mathbf{r}.$$

Assim, temos o essencial para mostrar que esses números reais que definimos formam, de fato, um corpo com as operações de adição e multiplicação e que esse corpo é ordenado pela relação definida por

$$\mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n \leq \mathfrak{L}(\mathbf{q}_n)_n \leftrightarrow \exists n_0 \forall n (n_0 \leq n \rightarrow \mathbf{p}_n \leq \mathbf{q}_n),$$

que é uma relação reflexiva, transitiva, antissimétrica⁴⁰ e que satisfaz $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$, para todos os números reais α, β .⁴¹ Resta, portanto, mostrarmos apenas que esse corpo que construímos é completo, ou seja, que todo conceito sob o qual um número real cai e que é limitado superiormente por um número real, possui um supremo, i.e., um limitante superior que é menor ou igual a qualquer outro limitante superior desse conceito.⁴² No sistema $\mathfrak{F}$, essa propriedade dos números reais pode ser expressa pela seguinte sentença:

$$\begin{aligned} \forall F (\exists \alpha F(\alpha) \wedge \exists \gamma \forall \delta (F(\delta) \rightarrow \delta \leq \gamma) \rightarrow \\ \exists \alpha \forall \beta (F(\beta) \rightarrow (\beta \leq \alpha \wedge \forall \gamma (\beta \leq \gamma \rightarrow \alpha \leq \gamma))))), \end{aligned}$$

na qual letras gregas são introduzidas para nos referirmos a números reais, assim como as letras em negrito foram utilizadas acima para nos referirmos a números racionais. Para mostrar que os números reais construídos acima possuem essa propriedade, primeiro mostraremos o seguinte:

Lema. *Seja $(\mathbf{p}_n)_n$ com $\mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n = \alpha$ e $\mathfrak{L}(\mathbf{p}_m)_n \geq \beta$, para todo número natural m . Então, $\alpha \geq \beta$.*

⁴⁰Uma relação R é dita antissimétrica se, para todo a, b , tivermos $R(a, b) \wedge R(b, a) \rightarrow a = b$.

⁴¹Como é usual, definimos $\alpha \geq \beta$ como $\beta \leq \alpha$; $\alpha < \beta$ como $\alpha \leq \beta \wedge \alpha \neq \beta$; e $\alpha > \beta$ como $\beta < \alpha$.

⁴²Dado um conceito F e um número real α , dizemos que α é um *limitante superior* de F se, para todo número real β , tal que $F(\beta)$, tivermos $\beta \leq \alpha$.

Demonstração. Seja $(\mathbf{q}_n)_n$ tal que $\mathfrak{L}(\mathbf{q}_n)_n = \beta$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $(\mathbf{q}_n)_n$ é crescente, de forma que, para todo número natural m , temos que $\mathfrak{L}(\mathbf{q}_m)_n \leq \beta$. Mas então, como, por hipótese, temos $\mathfrak{L}(\mathbf{p}_m)_n \geq \beta$, temos, em particular, que $\mathbf{p}_m \geq \mathbf{q}_m$, para todo número natural m . Portanto, temos que

$$\alpha = \mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n \geq \mathfrak{L}(\mathbf{q}_n)_n = \beta.$$

Então, podemos passar à demonstração da completude do corpo de números reais construído acima.⁴³ Para isso, consideremos um conceito F sob o qual pelo menos um número real cai e que é limitado superiormente. Então, existe um número inteiro a_0 , cujo correspondente real não é limitante superior de F , mas cujo correspondente real do seu sucessor $a_0 + 1$ é. Analogamente, existe um inteiro a_1 entre 0 e 9, tal que o correspondente real de $a_0 + \frac{a_1}{10}$ não é limitante superior de F , mas o correspondente real de $a_0 + \frac{a_1+1}{10}$ é. Assim, construímos duas seqüências de números racionais $(\mathbf{p}_n)_n$ e $(\mathbf{q}_n)_n$, tais que, para todo natural n , o correspondente real de

$$\mathbf{p}_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

não é limitante superior de F , mas o correspondente real de

$$\mathbf{q}_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n} = \mathbf{p}_n + \frac{1}{10^n}$$

é. Seja, então, $\alpha = \mathfrak{L}(\mathbf{p}_n)_n = \mathfrak{L}(\mathbf{q}_n)_n$. Vamos ver, primeiro, que α é limitante superior de F e, depois, que ele é o *menor* limitante superior desse conceito.

De fato, temos, por construção, que $\mathfrak{L}(\mathbf{q}_n)_n = \alpha$ e que, para todo número real β com $F(\beta)$, $\mathfrak{L}(\mathbf{q}_m)_n \geq \beta$, para todo número natural m . Logo, pelo lema

⁴³Nos argumentos anteriores, foi respeitada de forma consistente a distinção essencial entre números de diferentes tipos. Todavia, para simplificar um pouco os próximos argumentos, iremos relevar em certas ocasiões essa diferença e considerar como idênticos números de diferentes tipos, ao invés de sempre nos referirmos, por exemplo, ao número real correspondente a um certo número inteiro etc. Pelo visto acima, fica claro quais são esses números correspondentes e os detalhes podem facilmente ser completados pelo leitor.

acima, temos que $\alpha \geq \beta$, para todo β que cai sob o conceito F . Agora, dado um número real $\epsilon > 0$, existe um número natural n , tal que

$$\epsilon > \frac{1}{10^n},$$

de forma que, como $\alpha \leq \mathbf{q}_n$,

$$\alpha - \epsilon < \mathbf{q}_n - \frac{1}{10^n} = \mathbf{p}_n.$$

Assim, $\alpha - \epsilon$ não é limitante superior de F e, portanto, α é o supremo de F .

Referências Bibliográficas

- [1] BLANCHETTE, P., “Frege’s Reduction”, *History and Philosophy of Logic*, 15, 1994, pp. 85-103.
- [2] BOLZANO, B., “Rein analytischer Beweis der Lehrsätze, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewären, wenigstens eine reelle wurzel der Gleichung liege”, Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1905.
- [3] BOOLOS, G., “Frege’s theorem and the Peano postulates”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, v. 1, 3 (1995), pp. 317-326.
- [4] BOOLOS, G., “On the proof of Frege’s Theorem”, in *Logic, logic and logic*, Cambridge: Harvard University Press, 1998, pp. 275-290.
- [5] BOOLOS, G., “The consistency of Frege’s *Foundations of Arithmetic*”, in *Logic, logic and logic*, Cambridge: Harvard University Press, 1998, pp. 143-153.
- [6] BOOLOS, G., “Gottlob Frege and the foundations of arithmetic”, in *Logic, logic and logic*, Cambridge: Harvard University Press, 1998, pp. 182-201.
- [7] BOOLOS, G., “The standart of equality of numbers”, in *Logic, logic and logic*, Cambridge: Harvard University Press, 1998, pp. 202-219.
- [8] BOOLOS, G., “Saving Frege from contradiction”, in *Logic, logic and logic*, Cambridge: Harvard University Press, 1998, pp. 171-182.

- [9] BOOLOS, G., “Is Hume’s Principle analytic?” in *Logic, logic and logic*, Cambridge: Harvard University Press, 1998, pp. 301-314.
- [10] BOOLOS, G. e HECK JR., R., “*Die Grundlagen der Arithmetik*, §§82-83”, in *Logic, logic and logic*, Cambridge: Harvard University Press, 1998, pp. 315-338.
- [11] BURGESS, J. P., “Review of *Frege’s Conception of Numbers as Objects*”, *The Philosophical Review*, XCIII, 4, 1984, pp. 638-640.
- [12] BURGESS, J. P., *Fixing Frege*, Princeton: Princeton University Press, 2005.
- [13] DEMOPOULOS, W., *Frege’s philosophy of mathematics*, Cambridge: Harvard University Press, 1995.
- [14] DEDEKIND, R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig: Vieweg, 1872.
- [15] DEDEKIND, R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig: Vieweg, 1888.
- [16] DUMMETT, M., *Frege: Philosophy of language*, Cambridge: Harvard University Press, 1973.
- [17] DUMMETT, M., *Frege: Philosophy of mathematics*, Londres: Duckworth, 1991.
- [18] FINE, K., *The Limits of Abstraction*, Oxford: Oxford University Press, 2002.
- [19] FREGE, G., *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle: Verlag von Louis Nebert, 1879.
- [20] FREGE, G., *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl (GA)*, Breslau: Wilhelm Koebner, 1884.

- [21] FREGE, G., *Die Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, vol I (GGA I)*, Jena: Verlag von Hermann Pohle, 1893.
- [22] FREGE, G., *Die Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, vol II (GGA II)*, Jena: Verlag von Hermann Pohle, 1903.
- [23] FREGE, G., *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1969.
- [24] FREGE, G., *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russel, sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges*, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1980.
- [25] GÖDEL, K., “Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verandter Systeme I”, in FEFERMAN, S. et al. (Eds.), *Kurt Gödel Collected Works*, v. 1, Oxford: Oxford University Press, 1986.
- [26] HAZEN, A., “Review of *Frege’s Conception of Numbers as Objects*”, *Australasian Journal of Philosophy*, 63, 2, 1985, pp. 251-254.
- [27] HECK JR., R., “The development of arithmetic in Frege’s *Grundgesetze der Arithmetik*”, in *The Journal of Symbolic Logic*, 58, 1993, pp. 579-601.
- [28] HECK JR., R., “Frege’s Principle”, HINTIKKA, J. (Ed.), *Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 119-142.
- [29] HECK JR., R., “Definition by Induction in Frege’s *Grundgesetze der Arithmetik*”, DEMOPOULOS, W. (Ed.), *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Harvard University Press, 1995, pp. 295-333.
- [30] HECK JR., R., “Frege’s Theorem: an introduction”, *The Harvard Review of Philosophy*, VII, 1999, pp. 56-73.
- [31] HECK JR., R., “On the consistency of second-order contextual definitions”, *NOÛS*, 26, pp. 491-495.

- [32] HECK JR., R., *Frege's Theorem*, Oxford: Clarendon Press, 2011.
- [33] HECK JR., R., *Reading Frege's Grundgesetze*, Oxford: Clarendon Press, 2012.
- [34] HODES, H., "Logicism and the ontological commitments of Arithmetic", *The Journal of Philosophy*, LXXXI, 3, 1984, pp. 123-149.
- [35] KANT, I., *Kritik der reinen Vernunft*, in *Kants Werke. Akademie Textausgabe*, Berlim e Nova York: Walter de Gruyter, 1968, v. III (2ª edição) e v. IV (1ª edição)
- [36] KENNY, A., *Frege: An introduction to the founder of modern analytic philosophy*, Malden: Blackwell, 1995.
- [37] KITCHER, P., "Frege's Epistemology", *The Philosophical Review*, LXXXVIII, 2, 1979, pp. 235-262".
- [38] KLEENE, S. C., *Introduction to Metamathematics*, Nova York e Tóquio: Ishi Press, 2009.
- [39] LINNEBO, Ø., "Frege's conception of logic: from Kant to *Grundgesetze*", *Manuscrito*, 26, 2, Campinas, 2003, pp. 235-252.
- [40] MACFARLANE, J., *What does it mean to say that logic is formal?*, dissertação de doutorado, Universidade de Pittsburg, 2000.
- [41] MACFARLANE, J., "Frege, Kant and the Logic in Logicism", *The Philosophical Review*, CXI, 1, 2002, pp. 25-65.
- [42] NAGEL, E. e NEWMAN, J. R., *Gödel's Proof*, Nova York: New York University Press, 2001.
- [43] PARSONS, C., "Frege's theory of numbers", in Willian Demopoulos (Ed.), *Frege's philosophy of mathematics*, Cambridge: Harvard University Press, 1995, pp. 182-210.

- [44] PEANO, G., *Arithmetices Principia. Nova Methodo Exposita*, Roma e Florença: Fratres Bocca, 1889.
- [45] POTTER, M. e RICKETTS, T. (Eds.), *The Cambridge companion to Frege*, Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [46] QUINE, W. V., *Philosophy of Logic*, Cambridge e Londres: Harvard University Press, 1986.
- [47] QUINE, W. V., *From Stimulus to Science*, Cambridge e Londres: Harvard University Press, 1995.
- [48] RUFFINO, M., “Logicism: Fregean and Neofregean”, *Manuscrito*, 21, 1, 1998, pp. 149-188.
- [49] RUFFINO, M., “Why Frege would not be a neo-Fregean”, *Mind*, 112, 2003, pp. 51-78.
- [50] SHAPIRO, S., *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic*, Oxford: Clarendon Press, 1991.
- [51] SHAPIRO, S. (Ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press, 2005.
- [52] SHAPIRO, S., “Frege meets Dedekind: a neo-logicist treatment of real analysis”, *The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction*, Springer Verlag, 2007, pp. 219-252.
- [53] SHER, G., “Tarski’s thesis”, *New Essays on Tarski and Philosophy*, PATTERSON D. (Ed.), Oxford: Oxford University Press, 2008, pp. 300-339.
- [54] SHER, G., “The foundational problem of logic”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, forthcoming.
- [55] SLUGA, H., *Gottlob Frege*, Londres e Nova York: Routledge, 1980.

- [56] SULLIVAN, P. M., “Frege’s logic”, in GABBAY, D. M. e WOODS, J. (Eds.), *Handbook of the History and Philosophy of Logic*, v. 3, Elsevier, 2004, pp. 671-762.
- [57] TABATA, H., “Frege’s Theorem and his Logicism”, *History and Philosophy of Logic*, 21, 2000, pp. 265-295.
- [58] TARSKI, A., “What are logical notions?”, *History and Philosophy of Logic*, 7, 1986, pp.143-154.
- [59] VAN HEIJENOORT, J. (Ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Cambridge: Harvard University Press, 1967.
- [60] WRIGHT, C., *Freges’s conception of numbers as objects*, Aberdeen: Aberdeen University Press, 1983.