PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

MARIDETE BRITO CUNHA FERREIRA

UMA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA EM QUADRILÁTERO QUE APROXIME O ALUNO DE LICENCIATURA DAS DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2016

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

MARIDETE BRITO CUNHA FERREIRA

UMA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA EM QUADRILÁTERO QUE APROXIME O ALUNO DE LICENCIATURA DAS DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Doutor em Educação Matemática**, sob a orientação do Professor Doutor **Saddo Ag Almouloud**.

São Paulo
2016

Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela inspiração e por tornar possível a realização deste sonho.

Ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, por quem tenho grande admiração, pela orientação, paciência e amizade.

Aos Professores Doutores Lilian Nasser, Claudia Flores, Célia Maria Carolino Pires e Gerson Pastre de Oliveira, por terem aceitado participar da banca de qualificação e pelas contribuições essenciais para o desenvolvimento desse trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Professores Doutores Lilian Nasser, Claudia Flores, Maria José Ferreira da Silva e Gerson Pastre de Oliveira, pelos comentários e sugestões.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP pelos ensinamentos compartilhados.

Aos professores e colegas do grupo PEA-MAT, por terem contribuído de alguma forma para o enriquecimento deste trabalho.

Aos colegas do grupo, em especial, Katia Ingar, Jacinto Ordem e Amari, pelo incentivo e companheirismo e à conterrânea Conceição, pela amizade e acolhimento.

Aos colegas Robson Aldrin, Mirian Brito, Gianete Meira e Samuel Meira, com os quais compartilhei esta jornada.

À UNEB, pelo apoio financeiro, e aos colegas, que tornaram possível meu afastamento, essencial para a conclusão do curso.

Ao colega André Magalhães, por me apresentar o Programa de Doutorado da PUC-SP.

A Gerson Ferracini, pela revisão feita com competência e profissionalismo.

Ao meu eterno mestre e amigo Roque, que sempre me incentivou a estudar e pela confiança depositada em mim.

Ao eterno aluno e amigo Gredson, pelo carinho e por me dar a certeza de que a educação vale a pena.

Às minhas amigas Grace e Eliana, pela amizade, companheirismo, incentivo e cumplicidade em todos os momentos.

À Fátima, minha irmã do coração, por estar sempre ao meu lado compartilhando alegrias e tristezas. Obrigada por tudo!

Aos meus filhos Mariana e Marcos Vinícius, pelo incentivo, pelo carinho, pelo apoio técnico e por me obrigar ao descanso quando a fadiga me consumia. Não sei o que seria de mim sem vocês!

Ao meu esposo Manoel, pelo apoio incondicional, pelo amor, incentivo, paciência e por assumir o papel de pai e mãe durante minha ausência.

Aos meus irmãos, cunhados e sobrinhos, pelo incentivo, apoio e disponibilidade e por compreenderem a minha ausência.

Aos meus tios Roque e Marisalva, responsáveis pelo meu ingresso na educação, pelo constante incentivo.

À minha sogra Edite, pelas orações durante minhas viagens.

A Bel, Iza, Line, Lule e Ele, pelo carinho e incentivo e pelo suporte dado durante minha ausência.

Aos alunos que participaram desta pesquisa, pela disponibilidade e dedicação. Sem vocês não seria possível a realização deste trabalho.

Dedico este trabalho aos meus pais
Manoel (*in memoriam*) e Nildete,
por me ensinarem o valor dos estudos
e por serem responsáveis por quem sou.

RESUMO

Esta pesquisa investiga uma proposta didática cujas tarefas articulam provas e demonstrações como estratégia metodológica de ensino para minimizar as dificuldades relacionadas ao tópico 'quadriláteros' em um curso de licenciatura em matemática. As tarefas envolvem construções geométricas em um ambiente de papel e lápis em que os alunos são solicitados a construir figuras geométricas e justificar matematicamente as técnicas utilizadas. Na execução das tarefas os alunos efetuam conversões de registros e mobilizam as diferentes apreensões de uma figura geométrica (sequencial, perceptiva, operatória e discursiva). Para cumprir o objetivo, elegemos a engenharia didática como metodologia de pesquisa e fundamentamos nossas análises na teoria dos registros de representação semiótica, na teoria das situações didáticas e na teoria antropológica do didático. Em um estudo preliminar, investigaram-se as concepções dos alunos com relação a provas e demonstrações e analisaram-se três livros de geometria utilizados nos cursos de licenciatura em matemática. As análises preliminares evidenciaram que as concepções de provas e demonstrações dos alunos investigados são influenciadas pelos livros didáticos. Na análise da experiência, evidenciamos que os alunos parecem ter tomado consciência das limitações da apreensão perceptiva, passando a realizar a interpretação discursiva da figura, o que provocou uma evolução de provas pragmáticas para provas conceituais, segundo Balacheff. Com relação às funções da demonstração, os alunos passaram a realizá-las não apenas com a função de validação, mas também com a função de explicação, sistematização e comunicação, segundo De Villiers. Em suma, concluímos que tarefas que articularam provas e demonstrações se mostraram férteis para que os alunos pudessem vivenciar as fases da teoria das situações didáticas, de Brousseau; efetuar conversões de registros representação semiótica e tratamentos; e coordenar as apreensões da figura, contribuindo assim para a (re)construção dos saberes/conhecimentos relativos a quadriláteros, prova e demonstração.

Palavras-chave: Prova. Demonstração. Geometria. Quadriláteros.

ABSTRACT

This study investigated a didactic proposal whose tasks coordinate proofs and demonstrations as a teaching methodological strategy for easing some of the difficulties related to the topic ‘quadrilaterals’ on a teaching certification course in mathematics. The tasks involve geometric constructions within a paper-and-pencil setting in which students are asked to build figures and mathematically justify the techniques used. Upon carrying out the tasks, students perform conversions of registers and mobilize different understandings of a geometric figure (sequential, perceptive, operative, and discursive). In order to meet the objective, didactic engineering was elected as the investigative method and analyses were based on the theory of registers of semiotic representation, the theory of didactic situations, and the anthropological theory of the didactic. In a preliminary study, the conceptions of students regarding the proofs and demonstrations were investigated and three geometry books used on the teaching certification courses in mathematics were analyzed. The preliminary analyses showed that the conceptions of proofs and demonstrations of the students investigated were influenced by the didactic books. Analysis of the experience revealed that the students appeared to have become aware of the limitations of perceptive understanding, subsequently performing discursive interpretation of the figure, which led to evolution from pragmatic proofs to conceptual proofs, according to Balacheff. With regard to the functions of demonstration, the students performed these not only with the function of validation, but also with the functions of explanation, systematization, and communication, according to De Villiers. In summary, it was concluded that tasks which coordinate proofs and demonstrations are conducive for students to experience the phases of Brousseau’s theory of didactic situations; carry out conversion of registers, semiotic representation and treatments; and coordinate the understandings of the figure, thereby contributing to the (re)construction of implicit and formalized knowledge on quadrilaterals, proof, and demonstration.

Keywords: Proof. Demonstration. Geometry. Quadrilaterals.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Resultados da disciplina ‘Geometria plana’, UNEB, Campus II. 22
Quadro 2. Exemplos de conversões de representações. 62
Quadro 3. Congruência e não congruência na conversão de representações. 63
Quadro 4. Respostas às questões objetivas. 74
Quadro 5. Autonomia percebida pelos licenciandos para ensinarem demonstrações, por semestres cursados. 76
Quadro 6. Concepções dos alunos sobre demonstração e prova. 81
Quadro 7. Diferenças entre prova e demonstração, na concepção dos licenciandos. 83
Quadro 8. Opinião dos alunos sobre a importância do método dedutivo. 84
Quadro 9. Concepção do papel das provas e das demonstrações na licenciatura. 85
Quadro 10. Concepções sobre o papel das provas e demonstração no ensino fundamental 86
Quadro 11. Síntese das tarefas realizadas pelos autores dos livros analisados, referentes à questão 1... 110
Quadro 12. Análise da questão 2 (Q2). 115
Quadro 13. Análise referente da questão 3 (Q3). 120
Quadro 14. Análise referente à tarefa 1 da questão 4. 130
Quadro 15. Análise referente à tarefa 2 da questão 4. 133
Quadro 16. Análise referente às tarefas 3, 4 e 5 da questão 4 e tarefa 1 da questão 5. 140
Quadro 17. Número de tarefas que contemplam propriedades de quadriláteros. 144
Quadro 18. Tarefas selecionadas e organização praxeológica. 145
Quadro 19. Institucionalização de definições relacionadas a quadriláteros. 184
Quadro 20. Caracterizações do paralelogramo institucionalizadas na tarefa 1. 213
Quadro 21. Caracterizações do paralelogramo institucionalizadas na tarefa 2. 222
Quadro 22. Propriedades institucionalizadas nas tarefas 3, 4 e 5. 256
Quadro 23. Institucionalizações das tarefas 7, 8 e 9. 288

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Interações subjacentes cognitivas envolvidas na atividade de geometria. 64
Figura 2. Um exemplo da lei da continuidade. 66
Figura 3. Número de alunos por semestre. 73
Figura 4. Representação de apoio às expectativas sobre a questão 14. 89
Figura 5. Resposta do aluno I à questão 14. 92
Figura 6. Resposta do aluno II à questão 14. 94
Figura 7. Resposta do aluno III à questão 14. 95
Figura 8. Resposta do aluno IV à questão 14. 96
Figura 9. Resposta do aluno V à questão 14. 97
Figura 10. Resposta do aluno VI à questão 14. 98
Figura 11. Representação de apoio às expectativas sobre a questão 14. 99
Figura 12. Relações ente os quadriláteros, segundo Hadamard. 105
Figura 13. Representações de trapézios habitualmente encontradas em livros didáticos. 106
Figura 14. Trecho da leitura "Euclides e a geometria dedutiva". 112
Figura 15. Demonstração da existência de retas concorrentes. 112
Figura 16. Propriedade dos quadriláteros circunscritíveis. 113
Figura 17. Definição de polígono apresentada em LG_1. 117
Figura 18. Definição de quadrilátero em LG2. 118
Figura 19. Figura-suporte para a demonstração de que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e os consecutivos são suplementares, segundo a técnica $t_1(T_{11}Q_4)$. 124
Figura 20. Figura-suporte para a demonstração de que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e os consecutivos são suplementares, segundo $t_2(T_{11}Q_4)$. 125
Figura 21. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{21}Q_4$ segundo a técnica $t_2(T_{21}Q_4)$. 125
Figura 22. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{31}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{31}Q_4)$. 126
Figura 23. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{41}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{41}Q_4)$. 127
Figura 24. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{51}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{51}Q_4)$. 128
Figura 25. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{61}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{61}Q_4)$. 128
Figura 26. Figura suporte para a demonstração da tarefa $T_{71}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{71}Q_4)$. 129
Figura 27. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{22}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{22}Q_4)$. 131
Figura 28. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{32}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{32}Q_4)$. 132
Figura 29. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{32}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{13}Q_4)$. 134
Figura 30. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{32}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{13}Q_4)$. 134
Figura 31. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{33}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{33}Q_4)$. 135
Figura 32. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{15}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{15}Q_4)$. 137
Figura 33. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{25}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{25}Q_4)$. 137
Figura 34. Figura-suporte para a demonstração da tarefa T_1Q_5 segundo as técnicas $t_1(T_1Q_5)$ e $t_2(T_1Q_5)$. 139
Figura 35. Resumo das condições necessárias para que um quadrilátero seja paralelogramo, retângulo, losango e quadrado. 142
Figura 36. Tarefa 1 de LG2, resolvida pelos autores. 147
Figura 37. Retângulo e trapézio isósceles. 148
Figura 38. Conjecturas referentes à tarefa 2. 149
Figura 39. Figuras de suporte para a tarefa 3. 149
Figura 40. Figura-suporte para a tarefa 5. 150
Figura 41. Figura-suporte para a tarefa 5. 151
Figura 42. Diagrama que relaciona os quadriláteros notáveis 180

Figura 43. Trapézios. 184
Figura 44. Figura-suporte da técnica 1, tarefa 1. 191
Figura 45. Figura-suporte para validação da propriedade: se um quadrilátero possui dois lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo. 191
Figura 46. Figura-suporte da técnica 2 referente à tarefa 1. 192
Figura 47. Figura-suporte da técnica 3 referente à tarefa 1. 193
Figura 48. Justificativa da construção referente à tarefa 1 pelo grupo I. 195
Figura 49. Primeiro registro escrito do grupo II referente à tarefa 1. 197
Figura 50. Segundo registro escrito do grupo II. 198
Figura 51. Construção do grupo III referente à tarefa 1. 200
Figura 52. Solução apresentada pelo grupo III. 201
Figura 53. Figura-suporte da discussão da técnica utilizada pelo grupo III. 204
Figura 54. Figura-suporte da discussão da técnica utilizada pelo grupo III. 205
Figura 55. Demonstração realizada pelo aluno Gustavo na atividade extra. 207
Figura 56. Demonstração realizada pelo aluno Gustavo referente ao recíproco do teorema da congruência dos lados opostos do paralelogramo. 209
Figura 57. Figura-suporte da demonstração da propriedade dos lados opostos do paralelogramo. 210
Figura 58. Figura-suporte da técnica 1, correspondente à tarefa 2. 214
Figura 59. Figura-suporte da técnica 2, correspondente à tarefa 2. 215
Figura 60. Registro da realização da tarefa 2 pelo grupo IV. 217
Figura 61. Reconfiguração que possibilita visualizar o tratamento matemático possível à demonstração do paralelismo de $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{BC}$. 218
Figura 62. Registro da realização da tarefa 2 pelo grupo III. 219
Figura 63. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 3. 224
Figura 64. Figura-suporte da técnica 2 referente à tarefa 3. 225
Figura 65. Primeira figura que orienta a realização da tarefa 3 pela dupla III. 226
Figura 66. Segunda figura que orienta a construção da tarefa 3 pela dupla III. 227
Figura 67. Construção apresentada pela dupla III na tarefa 3. 227
Figura 68. Construção e justificativa apresentada pela dupla II. 229
Figura 69. Construção e justificativa apresentada pela dupla I. 230
Figura 70. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 4. 233
Figura 71. Produção da dupla Bruna e Camila. 237
Figura 72. Produção da dupla Fábio e Marina. 238
Figura 73. Produção de Gustavo e Hugo. 239
Figura 74. Quadrilátero com diagonais perpendiculares e que não é losango. 241
Figura 75. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 5. 244
Figura 76. Início da construção do losango solicitado na tarefa 5. 246
Figura 77. Conjecturas da dupla Fábio e Marina referentes à tarefa 5. 246
Figura 78. Conjecturas da dupla Fábio e Marina referentes à tarefa 5. 247
Figura 79. Produção da dupla Fábio e Marina referente à tarefa 5. 248
Figura 80. Produção da dupla Camila e Bruna. 250
Figura 81. Construção apresentada pela dupla Gustavo e Hugo. 252
Figura 82. Segunda construção apresentada pela dupla Gustavo e Hugo. 253
Figura 83. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 6. 258
Figura 84. Produção de Camila e Bruna referente à tarefa 6. 259
Figura 85. Produção de Gustavo e Hugo referente à tarefa 6. 261
Figura 86. Produção da dupla Fábio e Marina referente à tarefa 6. 261

Figura 87. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 7. 264
Figura 88. Produção da dupla Marina e Fábio referente à tarefa 7. 267
Figura 89. Produção da dupla Camila e Bruna referente à tarefa 7. 269
Figura 90. Produção de Hugo e Gustavo referente à tarefa 7. 271
Figura 91. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 8. 274
Figura 92. Figura-suporte da técnica 2 referente à tarefa 8. 275
Figura 93. Primeira conjectura da dupla Bruna e Camila. 277
Figura 94. Segunda conjectura da dupla Bruna e Camila. 278
Figura 95. Figura-suporte da construção feita pela dupla Camila e Bruna. 279
Figura 96. Produção da dupla Bruna e Camila referente à tarefa 8. 280
Figura 97. Produção da dupla Gustavo e Hugo referente à tarefa 8. 281
Figura 98. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 9. 284
Figura 99. Produção de Fábio e Marina relativa à tarefa 9. 285
Figura 100. Produção da dupla Gustavo e Hugo referente à tarefa 9. 286
Figura 101. Produção da dupla Bruna e Camila referente à tarefa 9. 286
Figura 102. Solução da tarefa $T_{12\mathrm{c}}$ pela aluna Bruna. 293
Figura 103. Figura-suporte da tarefa 12. 297
Figura 104. Figura-suporte da tarefa $T_{12\mathrm{f}}$. 298
Figura 105. Figura suporte da Tarefa 10. 320
Figura 106. Figura-suporte da Técnica 1, referente à tarefa 10. 320
Figura 107. Figura suporte da tarefa ($\mathrm{T}_{14\mathrm{b}}$). 323
Figura 108. Figura suporte da tarefa 17. 328
Figura 109. Figura suporte da tarefa 17. 329
Figura 110. Figura suporte da tarefa T_{19}. 330
Figura 111. Figura suporte da tarefa T_{19a}. 331
Figura 112. Figura suporte da tarefa T_{19b}. 332
Figura 113. Figura suporte da tarefa T_{19c}. 332
Figura 114. Figura suporte da tarefa T_{19d}. 333
Figura 115. Figura suporte da tarefa T_{20a}. 334
Figura 116. Figura suporte da tarefa T_{20b}. 334

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **19**

CAPÍTULO 1 – PROBLEMÁTICA **27**

1.1 REVISÃO DE LITERATURA 27

1.1.1 Cenário dos grupos de pesquisa sobre provas e demonstrações *27*

1.1.2 Resultados de pesquisas sobre provas e demonstrações *30*

1.1.3 Nossas considerações *41*

1.2 PROVA E DEMONSTRAÇÃO 43

1.2.1 As concepções de prova e de demonstração adotadas neste estudo *43*

1.2.2 Aspectos sobre provas e demonstrações *44*

1.3 PROBLEMA DE PESQUISA 49

CAPÍTULO 2 – ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS **53**

2.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS 53

2.1.1 Teoria antropológica do didático *53*

2.1.2 Teoria das situações didáticas *57*

2.1.3 Teoria dos registros de representação semiótica *60*

2.2 ASPECTOS METODOLÓGICOS 67

CAPÍTULO 3 – ESTUDO DE CONCEPÇÕES DE ALUNOS E DAS ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS PROPOSTAS EM LIVROS DIDÁTICOS **71**

3.1 ANÁLISE DAS CONCEPÇÕES DE ALUNOS 71

3.1.1 Análise do questionário *72*

3.2 ANÁLISE DOS LIVROS INDICADOS NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA 101

3.2.1 Nosso objeto matemático: o quadrilátero *102*

3.2.2 Os livros de geometria plana indicados nos cursos de licenciatura em matemática: definindo nossa escolha 107

3.2.3 Análise dos livros selecionados *108*

CAPÍTULO 4 – FASE EXPERIMENTAL **157**

4.1. ESCOLHAS DAS VARIÁVEIS GLOBAIS 157

4.2. COMO CHEGAMOS A NOSSA SEQUÊNCIA 160

4.3. LOCAL E PÚBLICO DA PESQUISA 162

4.4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI* DAS TAREFAS 163

CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS **305**

REFERÊNCIAS **313**

APÊNDICE A **320**

APÊNDICE B **336**

INTRODUÇÃO

Este estudo tem por objeto as demonstrações geométricas em um curso de licenciatura em matemática e seu tema faz parte de um projeto mais global, intitulado *Processo de ensino e de aprendizagem de matemática em ambientes tecnológicos – Parceria PUC-SP e PUC-PERU, grupos de pesquisa PEA-MAT/DIMAT*[1], aprovado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e coordenado pelo Prof. Dr. Saddo Almouloud.

A escolha pela geometria foi motivada por inquietações nascidas de minha prática como professora em um curso de licenciatura em matemática na Universidade do Estado da Bahia (UNEB), somadas às de minha trajetória como estudante.

Minha relação com a geometria teve início na então chamada licenciatura em ciências com habilitação em matemática. Isso se justifica por haver cursado os antigos cursos primário e ginasial nos anos 1970, época em que a geometria, como prática, esteve ausente das aulas de matemática (PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995). Durante esse período, a geometria era apresentada apenas no final dos livros, e por isso "não havia tempo" de ser contemplada. Ela, porém, despertava minha curiosidade.

Ao ingressar no curso de licenciatura, a metodologia utilizada na disciplina 'Fundamentos de geometria' foi o estudo dirigido, uma vez que, segundo a professora, já tínhamos sido aprovados no exame de vestibular e, portanto, já conhecíamos os conteúdos geométricos. Esse foi nosso primeiro contato com a geometria e com as demonstrações. A única preocupação do professor parecia ser a de que os alunos compreendessem as demonstrações e resolvessem os exercícios práticos e teóricos.

Ao concluir a graduação, passei a trabalhar simultaneamente no ensino básico, como professora da rede estadual, e no ensino superior, como professora da UNEB. Sustentava então duas crenças: a de que o conhecimento do conteúdo era condição necessária e suficiente para ser bom professor e a de que meus alunos, tanto da educação básica como da licenciatura, teriam aulas de geometria.

Atraída pela matemática pura e motivada pelos professores da graduação, ingressei no mestrado em matemática, em que desenvolvi pesquisa na área de Álgebra. Trabalhando como docente em uma instituição em que culturalmente os concluintes de licenciatura

---

[1] PEA-MAT: Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática; DIMAT: Didáctica de las Matemáticas.

ingressavam em mestrados e posteriormente em doutorados em matemática pura, acreditei por algum tempo, tal como meus colegas de trabalho, que a paciência para transmitir a matéria, a motivação para o ensino e a exigência pela formalidade faziam de nós bons professores e que, consequentemente, isso bastava para formarmos bons professores. No entanto, alguns fatos nos fizeram refletir quanto à prática desenvolvida até então. O primeiro deles: os diretores das escolas da região nos pediam indicações de alunos em final de curso para lecionar em suas escolas. Indicávamos os que considerávamos excelentes, mas estes não davam bons professores.

Outro fato ocorreu quando, ao participar da correção de provas de uma competição nacional em matemática, percebemos que em nossa região os alunos, mesmo aqueles que se destacaram nessas provas, deixavam as questões que envolviam geometria totalmente em branco. Como isso ocorria em praticamente 100% das provas, levantamos a hipótese de que esses estudantes não tinham contato com conteúdos geométricos. Esse fato nos motivou a elaborar o projeto *Resgatando o ensino de geometria nas escolas públicas de Alagoinhas*.

Pretendíamos com o projeto, de início, criar um ambiente de pesquisa entre professores e discentes do curso de licenciatura em matemática para o estudo de geometria e, num segundo momento, preparar cursos e oficinas, a princípio para os professores das escolas públicas de Alagoinhas e depois para todas as cidades circunvizinhas.

Ao iniciarmos o projeto, começamos a perceber que no ensino fundamental e médio das escolas públicas dessa cidade a maioria dos professores não conseguia vencer o conteúdo programático da disciplina ‘Matemática’, principalmente os conteúdos geométricos. Para melhor investigação, promovemos o I Fórum do Ensino de Geometria nas escolas públicas de Alagoinhas, no qual reunimos professores das redes municipal e estadual de ensino desse município.

Após várias discussões, constatamos que nossas desconfianças tinham fundamento. Embora os professores saibam da importância da geometria, não contemplam seus conteúdos em suas aulas. Os motivos relatados pelos professores foram exatamente os mesmos expressos em pesquisas sobre a ausência de conteúdos geométricos em aulas de matemática – pesquisas estas que até então desconhecíamos, como as de Pavanello (1993) e Lorenzato (1995).

Um dos motivos que nos chamaram atenção: os professores não se sentiam seguros para ministrar conteúdos geométricos. Essa constatação nos fez refletir as razões de professores supostamente tão “bem fundamentados teoricamente” não se sentirem seguros para ministrar tais conteúdos.

Tardif aponta uma relação de distância entre os saberes profissionais e os conhecimentos universitários. Nesse sentido, o autor afirma que:

> Essa distância pode assumir diversas formas, podendo ir da ruptura à rejeição da formação teórica pelos profissionais, ou então assumir formas mais atenuadas como adaptações, transformações, seleção de certos conhecimentos universitários a fim de incorporá-los à prática. Desse ponto de vista, a prática profissional nunca é um espaço de aplicação dos conhecimentos universitários. (TARDIF, 2000, p. 11)

Para tentar minimizar os problemas relacionados com o ensino de geometria, ministramos um curso de formação continuada nesse ramo da matemática para tentar "fazer diferente". Mas como? A partir desse momento, iniciamos uma busca por pesquisas que nos orientassem nesse sentido. Conhecemos o material do Projeto Fundão, coordenado por Lúcia Tinoco e Lílian Nasser e, orientados por esse material, iniciamos nossa formação, sem conhecimento teórico, porém ansiosos por aprender e por ensinar.

Por outro lado, nas disciplinas 'Geometria plana' e 'Geometria espacial' oferecidas no curso de licenciatura em matemática da UNEB, os conteúdos são desenvolvidos numa abordagem axiomática e dedutiva, permeada de formalidades, para uma clientela que, em sua maioria, não teve nenhum contato prévio com essa disciplina. O resultado é um índice de aprovação majoritariamente baixo e um alto índice de desistência.

O Quadro 1 apresenta os resultados da disciplina 'Geometria plana', ministrada por três docentes (todos com formação em matemática pura) a partir de 2004, ano em que foi implantada a nova grade curricular em cumprimento à resolução 271/2004, em substituição ao curso de Ciências com Habilitação em matemática.

Quadro 1. Resultados da disciplina 'Geometria plana', UNEB, Campus II.

Ano, semestre	Alunos matriculados	Alunos aprovados	Alunos reprovados
2004, 2.º	25	18	7
2005, 2.º	28	20	8
2006, 1.º	29	10	19
2006, 2.º	27	8	19
2007, 1.º	31	15	16
2007, 2.º	53	17	36
2008, 1.º	42	18	24
2009, 1.º	34	5	29
2009, 2.º	11	5	6
2010, 1.º	23	3	20
2010, 2.º	34	25	9
2011, 1.º	15	3	12
2012, 2.º	20	5	15

Fonte: Dados da pesquisa.

Esses fatos fizeram-me refletir sobre esse modelo de ensino praticado, especialmente na disciplina 'Geometria', diretamente abordada na educação básica. Percebi a necessidade de investigar estratégias que minimizassem as dificuldades do licenciando enquanto aluno, mas ao mesmo tempo o preparassem para integrar esses conteúdos em sua futura prática docente.

As dificuldades observadas são ainda maiores quando se trata de demonstrações. Ao longo de minha experiência, pude notar que meus alunos de licenciatura em matemática, em sua maioria, são avessos a demonstrações.

Acredito na importância da prática das demonstrações, uma vez que todo professor de matemática deve dispor de um conhecimento mais aprofundado da matemática e de seus métodos de construção do conhecimento. Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam para que as atividades envolvendo práticas argumentativas sejam iniciadas nos primeiros ciclos da educação básica, de modo que no quarto ciclo os alunos já tenham entrado em contato com as primeiras demonstrações (BRASIL, 1997). No entanto, inexiste nos PCN orientação sobre como o professor deve proceder nessa empreitada.

Esses fatos me impulsionaram a direcionar a investigação para o ensino e a aprendizagem das demonstrações geométricas com alunos do curso de licenciatura em matemática.

Desse modo, passei a pesquisar o tema demonstrações geométricas, iniciando uma revisão de literatura, que permitiu constatar que as observações advindas de minha experiência também se aplicam ao que ocorre no Brasil e em outros países.

As pesquisas apontam que o ensino e a aprendizagem de demonstrações e provas nas escolas e universidades brasileiras fazem parte de um círculo vicioso em que os cursos de licenciatura não estão dando conta de formar professores com autonomia para desenvolver com seus alunos atividades que os preparem para o domínio do processo dedutivo. Esses alunos chegam à universidade com limitações e, nesse universo, a demonstração é praticada com uma abordagem que não motiva o licenciando a estudar, e muito menos a ensinar, a prática de demonstrações a seus futuros alunos.

A revisão de literatura (Capítulo 1) também permitiu conhecer fatores que influenciam as dificuldades enfrentadas pelos alunos em compreender demonstrações geométricas. As pesquisas mostraram que estudantes dos níveis secundário e terciário ficam mais convencidos da validação de um teorema matemático por argumentos empíricos que por meio de demonstração e que isso pode contribuir para a falta de motivação do aluno em demonstrar. A dificuldade na passagem do empírico ao dedutivo também foi observada durante o levantamento bibliográfico.

Outro dado apreendido foi que, no âmbito da educação matemática, prova e demonstração têm significados distintos e que, para que estas sejam praticadas em todos os níveis de ensino, propõe-se que sejam considerados níveis distintos de prova.

Ao refletir sobre estas constatações, indaguei-me sobre o tipo de abordagem de ensino que poderia minimizar as dificuldades vivenciadas por alunos de licenciatura em matemática na prática de demonstrações em geometria e, ao mesmo tempo, contribuir para que estes se sintam motivados a ensinar geometria a seus futuros alunos.

Estas constatações e indagações permitiram construir a questão que norteou esta pesquisa:

Situações de formação que articulam provas e demonstrações em geometria, mais especificamente em quadriláteros, permitem a alunos de licenciatura em matemática a (re)construção de saberes/conhecimentos relativos a esse conteúdo?

A escolha do objeto ‘quadrilátero’ se justifica por este propiciar um campo fértil para a consecução dos objetivos da pesquisa. Ele permite explorar as características de um conceito e a diferença entre condição necessária e condição suficiente. As propriedades dos quadriláteros permitem trabalhar demonstrações e abordar diversos conteúdos de geometria plana. Além disso, por ser considerado elementar, este é um tópico pouco explorado na graduação.

Para responder a esta questão tem-se como objetivo geral:

- Elaborar, aplicar e analisar uma organização didática que permita minimizar as dificuldades de alunos de licenciatura em matemática em uma universidade no estado da Bahia em compreender demonstrações geométricas, bem como criar condições para que estes futuros professores desenvolvam competências que possam interferir em suas práticas docentes.

Para cumprir esse objetivo, buscou-se suporte teórico na didática da matemática, elegendo a engenharia didática como metodologia, pois optou-se por realizar uma intervenção didática baseada em um trabalho experimental. Essa intervenção foi realizada no curso de licenciatura em matemática de uma universidade situada na Bahia. Essa escolha se justifica porque ser professora dessa instituição facilitou-me o acesso ao curso para a pesquisa, e também pelo fato de conhecer a forma como a geometria vem sendo trabalhada nessa instituição e desejar, enquanto pesquisadora, apresentar uma nova proposta de trabalho, já que essa proposta, uma vez construída e investigada, poderá trazer contribuições para o curso de licenciatura em matemática desta e de outras instituições de ensino.

Neste *campus*, a disciplina ‘Geometria plana’ é ministrada com um enfoque teórico descrito na ementa como “o estudo axiomático da geometria plana”, e os livros indicados na referência básica nesse curso são os mesmos indicados para cursos de graduação em matemática. Após pesquisa nos sítios de cursos de licenciatura em matemática de universidades brasileiras, verifiquei que três livros utilizados em nosso curso – Barbosa (2006), Dolce e Pompeo (2009) e Rezende e Queiroz (2008) – figuram nas referências de um número significativo de programas.

Diante dessa observação, e entendendo que os livros são importantes como apoio para alunos e também professores, procedi a uma análise minuciosa desses volumes, apoiando-me na teoria antropológica do didático, de Chevallard (1999), que se prestou a analisar as organizações matemática e didática dessas obras no tópico quadriláteros.

A escolha da metodologia levou-me a eleger a teoria das situações didáticas, de Brousseau (2008), para análise dos contextos concebidos na aplicação de uma organização didática. Para a análise da articulação dos registros de representação dos autores dos livros analisados e dos alunos que participaram da pesquisa, foi utilizada a teoria dos registros de representação semiótica, de Duval (2011).

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. No capítulo 1, é apresentada a problemática, traçada a partir dos resultados de pesquisas brasileiras e de outros países que tratam de provas e demonstrações e de considerações sobre estes temas fundamentadas em pesquisas de estudiosos desses assuntos.

O Capítulo 2 apresenta uma síntese das teorias que fundamentam esta pesquisa, bem como aspectos da metodologia eleita para norteá-la.

O Capítulo 3 focaliza as concepções, entre os alunos do curso pesquisado, sobre provas e demonstrações, além de analisar os livros de geometria selecionados.

O Capítulo 4 apresenta a concepção, experimentação e análise *a priori* e *a posteriori* da organização didática desenvolvida a partir da presente pesquisa.

Por fim trazemos as considerações finais que sumarizam este estudo.

CAPÍTULO 1 – PROBLEMÁTICA

Ao iniciar esta pesquisa, buscou-se, por meio de leituras, conhecer o panorama de investigação do tema em questão, o que permitiu selecionar o referencial teórico e metodológico e traçar nossa problemática.

A seção 1.1 deste capítulo traz uma revisão de literatura, apresentando os resultados de pesquisas nacionais e internacionais referentes ao tema provas e demonstrações. A seção 1.2 apresenta uma síntese dos aspectos epistemológicos da demonstração. Na seção 1.3 são apresentados os objetivos, a questão de pesquisa e a hipótese.

1.1 Revisão de literatura

Para esta pesquisa, visitamos os sítios de programas de pós-graduação[2] em educação e em educação matemática no Brasil, o banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), revistas científicas e anais de eventos científicos. A procura se deu por meio dos títulos dos trabalhos em que estivessem presentes as palavras ‘geometria’ e ‘prova’ ou então ‘geometria’ e ‘demonstração’, publicados de 2000 a 2013. Como nossa intenção não foi fazer um estado da arte sobre o tema em questão, selecionamos os trabalhos que pudessem contribuir com nossa pesquisa. Nessa busca, constatamos que a maior parte das pesquisas brasileiras sobre o tema provém da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Acreditamos que isso se deva ao fato de existirem nessa instituição grupos de pesquisa que se dedicaram ao tema no período delimitado para a busca.

Dividimos a revisão de literatura em três tópicos: em 1.1.1 apresentamos um levantamento de alguns grupos de pesquisa nacionais que discutem sobre prova e demonstração; em 1.1.2 são apresentados alguns resultados de pesquisas nacionais e internacionais sobre o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, a fim de nos posicionarmos quanto ao objeto a ser pesquisado; em 1.1.3 fazemos algumas considerações sobre nossas leituras.

1.1.1 Cenário dos grupos de pesquisa sobre provas e demonstrações

Neste tópico traçamos um breve panorama do quadro atual das pesquisas sobre provas e demonstrações no Brasil e em outros países.

---

2 Os endereços dos sítios visitados encontram-se nas Referências

O desenvolvimento do raciocínio dedutivo tem sido preocupação de muitos pesquisadores da área de educação matemática desde a década de 1980, mas nos últimos anos as pesquisas envolvendo provas e demonstrações em muitos países têm crescido consideravelmente. As discussões em torno desse tema, nas mais variadas abordagens, envolvem pesquisadores conhecidos internacionalmente, dentre cuja produção podemos citar as de Balacheff (1988; 2000; 2004), Hanna (2000), Knipping (2008), Mariotti (2006), Hanna e Barbeau (2008) e De Villiers (2001; 2001).

O National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, organização de professores e educadores matemáticos dos Estados Unidos) teve papel muito influente no aumento do número de pesquisas relacionadas a prova e argumentação. Sua publicação de *Principles and standards for school mathematics* [*Princípios e padrões para a matemática escolar*], obra que orienta a prática de argumentações e provas desde as séries iniciais, influenciou os pesquisadores de educação matemática não só dos Estados Unidos como também em outras partes do mundo (WALLE, 2009).

A ausência da prática de provas nas aulas de matemática, provocada pelas dificuldades em seu ensino e sua aprendizagem, tem incitado debates sobre esse tema entre pesquisadores de educação matemática, a exemplo do grupo Psychology of Mathematics Education (PME), cujos trabalhos, inclusive os da 37.ª reunião, ocorrida em 2013 em Kiel[3]**.** A leitura dos resumos mostra que esses trabalhos apresentam, em sua maioria, intervenções pedagógicas que objetivam minimizar as dificuldades no ensino e na aprendizagem de argumentações e provas e tornar possível seu ensino.

Mais uma evidência da importância atribuída à prova em anos recentes é o espaço destinado ao tema *Proof and proving in mathematics education* na 19.ª conferência da International Commission on Mathematical Instruction (ICMI Study 19th Conference, ou ICMI 19), ocorrida em 2009 em Taiwan. Buscando discutir os diferentes significados do termo ‘prova’ e reunir uma variedade de pontos de vista sobre o ensino e a aprendizagem de provas, o estudo se desenvolveu em torno dos seguintes temas: ‘Aspectos cognitivos’, ‘Argumentação e prova’, ‘Tipos de prova’, ‘*Software* de geometria dinâmica e transição para a prova’, ‘O papel da prova e experimentação’, ‘Provas e as ciências empíricas’ e ‘Prova no nível terciário’.

Para cada tema, levaram em consideração os seguintes pontos:

1. Opiniões e crenças dos professores.
2. Preparação de professores e desenvolvimento profissional.
3. Materiais curriculares e seu papel no apoio à instrução.

---

[3] Disponíveis em: <http://www.lettredelapreuve.org/archives.html>. Acesso em: 14 set. 2015.

Considerando cada tema, foram sugeridas questões como propostas de investigação. As questões se encontram na íntegra nos *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: proof and proving in mathematics education*. Quanto ao tema ‘Prova no nível terciário’, as seguintes questões, segundo o documento, ainda carecem de investigação**:**

1. Quais as expectativas dos professores sobre o desempenho dos estudantes em cursos de matemática baseados em provas diferentes daquelas que os alunos experimentaram anteriormente?
2. Aprender a provar é parcialmente ou mesmo totalmente um problema de enculturação nas práticas dos matemáticos?
3. Como os estudantes concebem teoremas, provas, axiomas, definições e as relações entre estes? Qual é a concepção dos estudantes sobre provas e como sua concepção é influenciada por suas experiências com provas?
4. Quais são as funções da resolução de problemas, da análise heurística, da intuição, da visualização, do conhecimento processual e conceitual, da lógica e da validação?
5. Que experiências anteriores os alunos tiveram com provas que os professores podem levar em consideração?
6. Como podemos criar oportunidades para que os futuros professores possam adquirir o conhecimento (competências, entendimentos e alienações) necessário para ensinar provas de modo eficaz? (ICMI, 2009, p. 1-xxviii).

Os resultados do ICMI 19 foram apresentados no 12th International Congress on Mathematical Education – ICME 12 –, realizado em 2012 na Coreia. O grupo 14, cujo tema foi *Reasoning, proof and proving in mathematics education*, teve como tarefa apresentar o estado da arte no tópico *Reasoning, proof and proving* (RPP) e expor as recentes contribuições relevantes em todos os níveis de ensino relacionadas às questões epistemológicas lógicas históricas; ao currículo e livro didático; ao aspecto cognitivo; e ao ensino e formação de professores.

No Brasil, na PUC-SP, o grupo de pesquisa Processos de Ensino e de Aprendizagem Matemática (PEAMAT), coordenado pelo Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, desenvolve desde 1994 projetos sobre o tema ‘O raciocínio dedutivo nos processos de ensino e na aprendizagem da matemática nas séries finais do ensino fundamental’, com o objetivo de investigar os fatores que interferem nesses processos envolvendo o raciocínio dedutivo em matemática. Os estudos desenvolvidos no grupo PEAMAT deram origem a outros projetos de pesquisa focalizando o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, que resultaram em artigos, dissertações e teses.

Podemos citar, ainda no Brasil, Pietropaolo (2005) e Busquini (2003), que observaram quão reduzido era o número de trabalhos que tratavam de provas e demonstrações. Uma década depois desse trabalho de Pietropaolo, podemos observar que, no estado de São Paulo, as pesquisas relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo têm aumentado consideravelmente, como mostra o número de trabalhos de mestrado e doutorado que versam sobre argumentação, prova e demonstração gerados a partir de projetos de pesquisa locais.

Em 2005, teve início na PUC-SP o projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME), coordenado pela Prof.ª D.ra Lulu Healy. A pesquisa investigou as concepções de prova de aproximadamente 2.000 estudantes brasileiros do ensino fundamental e médio (8.ª série – atual 9º ano – e 1.º ano do ensino médio), buscando elucidar em que medida estes estudantes distinguem entre evidência empírica e argumentação válida. Após mapear as concepções apresentadas pelos alunos e professores participantes, deu-se início à segunda fase do projeto, que buscou elaborar propostas de ensino coerentes com a realidade brasileira, "visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados" (JAHN; HEALY; PITTA COELHO, 2007, p. 2). Cientes da importância do papel do professor na integração efetiva de uma nova abordagem para o ensino de provas, os pesquisadores ainda investigaram "em que medida a participação desses professores nos grupos colaborativos contribui para apropriação de novas perspectivas sobre o ensino e aprendizagem de provas" (p. 2). Esse projeto originou diversas dissertações e teses, todas relacionadas a argumentações e provas, nos níveis fundamental e médio.

Ainda no Brasil, tem-se o trabalho desenvolvido por um grupo do Projeto Fundão, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, coordenado pelas pesquisadoras Lilian Nasser e Lucia Tinoco, que conta com a participação de professores de ensino fundamental e médio e licenciandos. Esse trabalho originou o livro *Argumentação e provas no ensino de matemática*, no qual as pesquisadoras defendem que os alunos devem ser preparados para dominar o processo dedutivo desde as primeiras séries com atividades de argumentação, como pré-requisito para a introdução de demonstrações.

Diante do panorama traçado, apresentaremos a seguir algumas pesquisas relacionadas ao tema provas e demonstrações.

1.1.2 Resultados de pesquisas sobre provas e demonstrações

Neste tópico, focalizaremos pesquisas desenvolvidas sobre provas e demonstrações, a fim de encontrar respostas preliminares para as seguintes questões:

1. O que dizem os pesquisadores a respeito das dificuldades apresentadas no ensino e na aprendizagem de provas e demonstrações?
2. Que ações têm sido empreendidas para minimizar essas dificuldades?
3. Tratando-se de alunos de licenciatura em matemática, qual é o cenário nacional em termos das dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem de provas e demonstrações?

Embora não seja objetivo deste capítulo cobrir exaustivamente as pesquisas relacionadas a provas e demonstrações, vamos apresentar os resultados de alguns trabalhos que tratam desse tema, em diversas abordagens. Todos eles buscam identificar a origem das dificuldades relacionadas a provas, sejam elas cognitivas, epistemológicas ou didáticas, e/ou propõem intervenções que venham a minimizar as dificuldades no ensino e na aprendizagem de provas.

Ainda que nosso foco seja o aluno de licenciatura, sentimos necessidade de investigar também pesquisas sobre as dificuldades apresentadas por professores e alunos do ensino fundamental e médio, buscando conhecer problemáticas pertinentes ao ensino e à aprendizagem de provas e demonstrações.

Para tanto, dividiremos este tópico em três subtópicos. O primeiro apresenta as pesquisas que tratam dos alunos de ensino fundamental e médio; o segundo, as pesquisas relacionadas a professores desses níveis de ensino; o último focaliza pesquisas voltadas à formação inicial de professores de matemática.

1.1.2.1 Pesquisas relacionadas a alunos

Neste subtópico, destacaremos os principais resultados de dissertações, teses e artigos científicos que versam sobre alunos de ensino fundamental e médio.

Dificuldades na passagem da geometria empírica à dedutiva, deficiências nos conhecimentos geométricos e dificuldades na leitura e interpretação de enunciados foram observadas na pesquisa de Almouloud e Mello (2000) que propõem uma reflexão didática sobre os problemas de ensino e de aprendizagem de conceitos geométricos e apresentam os resultados de uma sequência didática que teve a finalidade de introduzir a demonstração no ensino de geometria. Concordamos com esses autores quando afirmam que o desenvolvimento da capacidade de raciocinar logicamente requer trabalho de longo prazo e que “é preciso dar atenção à necessidade de uma formação adequada do professor para trabalhar a demonstração em geometria, a fim de que os alunos possam se apropriar dos conceitos-habilidades geométricos, no ensino fundamental" (Ibid, p. 10).

Como relatado no tópico 1.1.1, o projeto AProvaME, da PUC-SP, deu origem a diversas pesquisas relacionadas a argumentações e provas no âmbito do ensino fundamental e médio. Entre elas está a empreendida por Doro (2007), que procedeu a um levantamento das concepções sobre argumentos e provas geométricas de alunos envolvidos no projeto AProvaME, revelando que estes não têm o hábito de apresentar justificativas em suas rotinas escolares e não atribuem significado à prova em matemática, dando maior valor à apresentação de respostas.

Ainda no âmbito de concepções de alunos sobre argumentos e provas, Souza (2009) buscou responder à questão: "Quais argumentos os alunos usam para justificar a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer?" (p. 34). Para tanto, a autora extraiu uma amostra de 50 alunos do universo pesquisado no projeto AProvaME e a analisou fundamentando-se nas pesquisas de Balacheff (1988) e de Healy e Hoyles sobre argumentos empíricos e formais e sobre a passagem da produção de provas pragmáticas para provas conceituais. Além de analisar as respostas, a autora realizou entrevistas com alguns alunos, visando melhor esclarecer as respostas, concluindo que os alunos apresentavam insuficiência de conhecimentos elementares de geometria plana e mostravam preferência por argumentos empíricos.

Os trabalhos citados apontam a dificuldade dos alunos em fazer a transição do empírico para o dedutivo. Resultados semelhantes haviam sido observados em trabalhos como o de Gravina (2001), que, além de constatar essa dificuldade, propôs uma engenharia didática em um ambiente de geometria dinâmica, a fim de favorecer essa transição.

Outros pesquisadores apontaram alternativas para facilitar a transição do empírico ao dedutivo. Podemos mencionar, dentro do projeto AProvaME, a pesquisa de Ferreira Filho (2007), que investigou o envolvimento de alunos da 1.ª série do ensino médio em processos de construção de conjecturas e provas, buscando responder a questão: "Que dificuldades apresentam os alunos diante de situações de argumentação e prova envolvendo o Teorema de Pitágoras?". O autor concluiu que uma sequência de ensino concebida para produzir argumentações e provas favoreceu a passagem de uma etapa em que as validações são predominantemente empíricas para outra em que as validações são dedutivas.

Annette (2008) observou que os programas franceses em geometria apresentam lacunas quanto à passagem de uma geometria prática para outra abstrata. O autor aborda em sua tese de doutorado a complexidade dessa transição e a dificuldade que o aluno enfrenta nesse processo. Neste sentido, enfatiza a necessidade de preparo do professor para dar suporte satisfatório ao aluno nessa transição.

Nunes (2011) pesquisou a possibilidade da prática da argumentação como método de ensino, tomando área e perímetro como objetos matemáticos no contexto no 5.º ano do ensino fundamental. A questão que norteou sua pesquisa foi: “Em que medida a prática da argumentação pode se apresentar como método que favoreça a compreensão de conceitos de matemática, tomando como referência o caso de área e perímetro de figuras planas?”. Para tanto, o autor desenvolveu e aplicou uma sequência didática cuja análise revelou que a prática da argumentação favoreceu a compreensão de área e perímetro de figuras planas, habilitando essa prática como método de ensino.

Os trabalhos relacionados mostraram que os alunos não veem necessidade de demonstrar, uma vez que se sentem convencidos de seus resultados por meio de verificações empíricas. Pesquisadores em educação matemática estudam a origem dessa problemática e alternativas para fazer o aluno compreender a essência da prova matemática. Podemos citar o estudo de Jahnke (2008), em que se discute as dificuldades enfrentadas pelos alunos em aceitar o fato que, em matemática, uma declaração universalmente aceita não pode ser verdadeira apenas pela validação empírica, a exemplo do que ocorre em situações cotidianas.

Jahnke (2008) recorre a exemplos históricos para evidenciar que as declarações gerais abertas (aquelas cujos domínios de validade não são e não podem ser completamente especificados) desempenham um importante papel na matemática e se apropria desses exemplos para mostrar que as recíprocas de declarações gerais abertas não são válidas. Considera que se o aluno, a exemplo do que ocorre em situações cotidianas, pensa em termos de situações gerais abertas e vivencia dificuldade em compreender a distinção entre condições necessárias e suficientes em situações de prova matemática, essas dificuldades não serão sanadas com simples exemplos: “a incapacidade de compreender esta distinção lógica está profundamente enraizada. Nossa tese é que essa é uma consequência natural de uma mente que está acostumada a pensar em termos de declarações gerais abertas” (JAHNKE, 2008, p. 369).

Jahnke (2008, p. 371) sugere que “em vez de simplesmente negar os procedimentos do pensamento diário devemos criar situações em que os alunos possam fazer experiências significativas com a verificação da generalidade das declarações”. E afirma que a associação entre trabalho empírico e argumentação teórica pode contribuir para minimizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos na compreensão da essência da prova matemática.

Alguns pesquisadores divergem quanto à relação entre empírico e dedutivo. Mariotti (2006) considera que “a discrepância entre a verificação empírica (típica de comportamento comum) e raciocínio dedutivo (típico do comportamento teórico) é reconhecida como uma fonte de dificuldades” (p. 9). Sobre esse tema, Duval (1992) afirma que, do ponto de vista cognitivo, existe uma lacuna entre o empírico e o teórico, que não deve ser negligenciada quando a questão é o aprendizado de matemática. Balacheff (1988), de um ponto de vista epistemológico, acredita que essa lacuna entre argumentação e prova pode se tornar um obstáculo que deve ser superado para que haja apreensão da demonstração.

Além da transição entre o empírico e o dedutivo, outros problemas são destacados em pesquisas relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Heinze, Cheng e Ufer (2008) discutem a complexidade das provas geométricas tomando como referência resultados empíricos de uma experiência com alunos de escolas secundárias de Taiwan e da Alemanha, a fim de compreender como esses alunos desenvolvem a competência de prova ao longo dos anos e como ambientes de aprendizagem específicos podem influenciar esse desenvolvimento. Os autores conjecturam que as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao lidarem com provas matemáticas estão relacionadas com a complexidade destas, em termos do número de argumentos que um estudante deve combinar.

Heinze, Cheng e Ufer (2008) fazem uma explanação sobre o processo de prova em multietapas, distinguindo-o do processo de prova em uma única etapa. Para tanto, fundamentam-se na análise teórica do processo de construção de provas multietapas e, refletindo com base na teoria, hipotetizam que a dificuldade nas tarefas envolvendo provas na escola secundária pode ser determinada pela distinção entre provas de uma única etapa e provas em multietapas.

Chamam também atenção para o fato de que, embora muitos dos problemas de provas trabalhados no ensino médio consistam em uma sequência linear de argumentos, isso não deve ser assumido como caso geral.

Observamos que tanto no Brasil quanto em outros países tenta-se compreender a origem das dificuldades relacionadas à aprendizagem de provas e demonstrações e apontar alternativas para minimizá-las. Diante dos resultados apresentados pelas pesquisas relacionadas a alunos, observemos no próximo subtópico, o que dizem as pesquisas que focalizam professores, a fim de saber como estes têm lidado com tais problemas ou se enfrentam as mesmas dificuldades ao ensinar provas e demonstrações a seus alunos.

1.1.2.2 Pesquisas relacionadas a professores

O projeto *O raciocínio dedutivo no processo de ensino-aprendizagem de matemática nas séries finais do ensino fundamental*, desenvolvido na PUC-SP, tece reflexões sobre provas e demonstrações em matemática a partir de análise de um trabalho realizado com professores do ensino fundamental, em que foram desenvolvidas atividades envolvendo raciocínio dedutivo. O projeto se desenvolveu em torno das seguintes questões:

> Quais fatores influenciam no processo ensino-aprendizagem envolvendo o raciocínio dedutivo em matemática?
>
> Quais ações desenvolver com os professores para lhes proporcionar uma apreensão significativa dos problemas envolvendo provas e demonstrações?
>
> Quais fatores devem nortear a formação inicial e continuada dos professores no que diz respeito às provas e demonstração em matemática? (ALMOULOUD, 2007, p. 2)

A pesquisa foi realizada com professores de ensino fundamental e médio, privilegiando o trabalho cooperativo, e foram tratados temas como prova, demonstração, explicação e dedução de fórmulas, constatando-se que os membros dos grupos não estavam seguros desses termos. Além disso, os participantes mostraram confusão em identificar as hipóteses e teses nas situações propostas.

Almouloud (2007) afirma que os professores adquiriram certa autonomia no decorrer do trabalho, tendo este contribuído para sua formação, e destaca a necessidade de se criarem condições para que os professores se sintam preparados para trabalhar com provas e demonstrações com seus alunos e para que percebam a importância de trabalhar esses temas com alunos do ensino fundamental e médio.

Serralheiro (2007) pesquisou os reflexos que a prática de geometria provocou em professores que participaram do projeto *O raciocínio dedutivo no processo de ensino-aprendizagem de matemática nas séries finais do ensino fundamental*, investigando os conhecimentos iniciais que esses professores dispunham a respeito de demonstrações. A autora identificou que esses conhecimentos eram vagos e superficiais, embora alguns mostrassem ter tido contato com demonstrações durante o curso de graduação. Foi observado um grande desenvolvimento dos professores que participaram do projeto no que tange à autonomia e confiança em relação ao trabalho com demonstrações, bem como um aumento em seu interesse em demonstrar.

O resultado obtido por Serralheiro (2007) nos mostra que o fato de o aluno realizar demonstrações matemáticas na graduação não garante que as introduzirá em sua prática docente.

As constatações de Almouloud (2007) e Serralheiro (2007) revelam dificuldades dos professores com relação aos termos próprios ao método dedutivo, mas mostram também a superação de dificuldades que pode ser alcançada mediante uma intervenção didática.

Outros pesquisadores acreditam que cursos de formação continuada podem promover transformações na concepção e na prática de professores. Grinkraut (2009) observou em seu estudo que a formação continuada associada a projetos de pesquisa privilegiando práticas reflexivas, colaborativas e investigativas pode colaborar no desenvolvimento profissional dos professores. Acrescenta ainda que a mudança de concepção sobre provas e demonstrações pode levar o professor a mudar sua postura em sala de aula e fazê-lo refletir sobre sua prática.

Acreditamos que, além de dominar o processo de demonstração, os professores precisam estar motivados e conscientes da importância de trabalhar demonstrações com seus alunos. A esse respeito, Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007) afirmam que uma abordagem eficiente sobre provas envolve não só evidenciar as concepções e dificuldades de professores e alunos, mas deve envolver situações de aprendizagens inovadoras e a aceitação e apropriação destas pelos professores. Acrescentam que "a integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor" (p. 2), e refletem a respeito das condições necessárias ao professor para favorecer essa inovação.

Outros pesquisadores questionam a formação dada ao professor quanto ao preparo para ensinar demonstrações a seus alunos. Sobre esse tema, Leandro (2012) fez um levantamento dos saberes mobilizados por professores atuantes na rede pública na educação básica referentes à prova matemática. Conjectura que "para uma cultura de provas matemáticas ocupar um lugar na realidade escolar, deverá primeiramente ser prática e domínio dos professores" (p. 10). O pesquisador verificou existir uma lacuna entre a formação inicial e a prática de sala de aula no ensino fundamental e que há necessidade de ampliar o significado da prova matemática na formação inicial e continuada de professores, uma vez que detectou, entre os sujeitos pesquisados, que a prova é vista como técnica formal, interferindo negativamente na exploração desse procedimento no ensino fundamental. O autor finaliza seu trabalho com uma reflexão: "Cabe-nos indagar se não seria um dos objetivos primordiais da formação inicial da docência a preparação desses professores para o desenvolvimento dos conteúdos e dos objetos previstos nos currículos da educação básica prioritariamente" (p. 167).

A necessidade de ampliar o conceito de prova para que esta possa ser incluída na educação básica já foi apontada por Pietropaolo (2005), que em sua pesquisa de doutorado buscou compreender a utilidade e a viabilidade da implementação de provas e demonstrações nos currículos de matemática da educação básica e investigar as implicações que essas inovações trazem aos currículos de formação inicial de professores.

Para tanto, coletou depoimentos de professores sobre as possibilidades das argumentações e provas nos currículos de matemática da educação básica e o trabalho a ser desenvolvido na formação inicial. Além disso, os professores analisaram provas de geometria e de álgebra elaboradas por alunos de 8.ª série, indicando quais ações desencadeariam com esses alunos se deles fossem professores.

Em sua análise das entrevistas, o autor apontou que todos os professores concordam que as demonstrações devem estar presentes nas aulas de matemática desde o ensino fundamental. Além da necessidade de ampliar o conceito de provas, o autor também aponta que o ensino de prova deve ser desenvolvido como processo de questionamento, de conjecturas, de contraexemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação, e finaliza deixando a seguinte questão: "[...] estariam os cursos de licenciatura em condições de oferecer uma formação de qualidade a um profissional que vai ensinar provas, inclusive rigorosas? Há ainda uma questão anterior a essa: ele próprio aprendeu a provar?" (PIETROPAOLO, 2005, p. 226).

As pesquisas relacionadas ao professor colocam em cheque a formação inicial recebida por estes. Os docentes investigados por Serralheiro (2007) responsabilizam a formação inicial pelas dificuldades enfrentadas no ensino de demonstrações. No entanto, a autora discorda que este seja o único fator e afirma que o objetivo dos cursos de formação inicial não é exclusivamente suprir a formação específica, no que concorda com Perrenoud (1999) ao afirmar que cabe à formação inicial formar um professor crítico, reflexivo e que busque minimizar suas dificuldades.

Diante das discussões envolvendo a formação inicial de professores, e visto que nossa pesquisa envolve provas e demonstração em um curso de licenciatura em matemática, sentimos a necessidade de tomar conhecimento dos debates envolvendo esse tema.

1.1.2.3 Pesquisas relacionadas a alunos de graduação em matemática

Neste tópico apresentamos a síntese de três pesquisas (DIAS, 2009; FERREIRA, 2008; ORDEM, 2015) realizadas com alunos de graduação envolvendo provas e demonstrações no âmbito da geometria. Detalhamos em maior grau essas pesquisas por apresentarem pontos que se assemelham a nosso trabalho e fornecerem dados relevantes a este.

A pesquisa de Dias (2009) trata da demonstração em um curso de licenciatura em matemática e teve como objetivos "fazer com que os alunos evoluam na construção do raciocínio hipotético-dedutivo a partir da interação com atividades de construção geométrica e demonstração" e "estudar a suficiência dos níveis de raciocínio geométrico elaborados para compreensão das produções dos alunos" (p. 73). A partir de resultados de pesquisas, constata que os cursos de licenciatura em matemática não estão dando conta de preparar os futuros professores para trabalhar demonstrações nos termos expressos nos PCN. Esta constatação motiva a autora a delinear seus objetivos e propor as seguintes questões:

> 1. Que articulações podemos inferir entre os níveis de raciocínio geométrico propostos por Parzysz [...] e os tipos de prova propostos por Balacheff [...], quando os alunos mobilizam seus conhecimentos para resolver problemas relativos à demonstração em Geometria?
> 2. Qual a influência da utilização de softwares de geometria dinâmica na construção de argumentações por alunos do curso de Licenciatura em Matemática? (DIAS, 2009, p. 73)

Diante dos objetivos e das questões propostas, a autora optou pela pesquisa qualitativa, na forma de estudo de caso focalizando um grupo formado por três duplas de alunos do 6.º período de um curso de licenciatura em matemática. A atividade elaborada por Dias (2009) envolve duas questões voltadas a conteúdos do ensino médio e a resolução se deu em dois ambientes: o de papel e lápis e o de geometria dinâmica do *software* GeoGebra. Para a coleta de dados, a autora utilizou como instrumentos as atividades resolvidas pelos alunos nos dois ambientes, as gravações de áudio dos diálogos dos alunos e suas próprias observações como pesquisadora. As atividades foram desenvolvidas em dias diferentes, um para cada ambiente. Posteriormente, cada dupla foi entrevistada, buscando-se esclarecer fatos didáticos observados durante a resolução das atividades. A autora concluiu que o ambiente de geometria dinâmica teve pouca influência na construção da argumentação pelo grupo pesquisado e que a "investigação, no ambiente de geometria dinâmica, propicia a construção de provas do tipo experiência crucial, desde que o aluno explore o aspecto dinâmico das figuras" (DIAS, 2009, p. 207).

A pesquisa de Ferreira (2008) se propôs a trabalhar com a demonstração em geometria euclidiana em um curso de licenciatura em matemática, buscando investigar os aspectos teóricos e pedagógicos capazes de auxiliar a compreensão do que vem a ser uma demonstração. O estudo visou, portanto, apresentar uma estratégia metodológica que contribuísse para minimizar as dificuldades constatadas. Para tanto, a autora se baseou na teoria de registro de representação semiótica de Duval, e, se propôs a elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática fundamentada na Engenharia Didática de Artigue (1996). Inicialmente, a autora aplicou e analisou um questionário de nove perguntas a um grupo de 49 alunos de licenciatura em matemática, buscando verificar o conhecimento destes sobre demonstração, bem como o conhecimento de que dispunham sobre esse tema no ensino de geometria. A análise das respostas confirmou as dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Com o intuito de disponibilizar um material didático que pudesse despertar nos alunos de licenciatura um olhar crítico para as demonstrações em geometria, a autora elaborou, testou e analisou uma sequência de cinco sessões com a finalidade de "adotar uma proposta metodológica para introduzir 'técnicas de demonstração' em um curso de licenciatura em matemática para alunos que já cursaram as disciplinas de Geometria Plana e Espacial" (FERREIRA, 2008, p. 76). A pesquisa abrangeu alunos de licenciatura em matemática de uma universidade da região metropolitana de Belo Horizonte. Os alunos escolhidos cursavam do 3.º período ao 7.º que já haviam cursado a disciplina 'Geometria plana' e haviam cursado ou estavam cursando a disciplina 'Geometria espacial'.

Certa da necessidade do trabalho com demonstrações no ensino básico e de que a maneira como a geometria é trabalhada na formação inicial se reflete na atuação do futuro professor de matemática, Ferreira (2008) coloca as seguintes questões:

> Como fazer para que esse trabalho tenha significado e que realmente ofereça contribuições na aquisição de conceitos geométricos? Como desenvolver, por meio de atividades que envolvam demonstrações, a noção do sistema formal e dos elementos que o compõem? Por fim, como trabalhar as demonstrações caracterizando-as mais como um processo, com o objetivo principal de validar teoricamente a veracidade de um teorema? (FERREIRA, 2008, p. 74)

Tendo elaborado e aplicado uma sequência didática, Ferreira (2008) constatou que, embora os alunos não tivessem atingido um nível de abstração que lhes permitisse resolver qualquer problema envolvendo demonstração por meio de conhecimentos próprios, o trabalho com diferentes registros de representação e o uso constante de figuras contribuíram para que vários obstáculos fossem superados ou minimizados. Os alunos revelaram maior desenvoltura em resolver problemas envolvendo demonstrações, e foi observado que a sequência contribuiu nos seguintes aspectos:

> - Os alunos compreenderam a lógica necessária de um sistema formal e a relação entre seus elementos;
> - Conseguiram estabelecer e reconhecer o estatuto de um teorema;
> - Coordenaram registros de representação distintos, estabelecendo entre eles relações semânticas e de congruência;
> - Perceberam na figura geométrica um apoio para obter uma demonstração;
> - Compreenderam a subordinação da figura às propriedades de um enunciado (ultrapassaram a apreensão perceptiva);
> - Melhoraram o tratamento algébrico de dados;
> - Reconheceram o ordenamento lógico dos esquemas de demonstração trabalhados;
> - Enxergaram a demonstração como fundamental na teorização da geometria;
> - Utilizaram coerentemente "ferramentas" lógicas para provar um enunciado;
> - Perceberam a necessidade de justificar cada passo trilhado na efetivação de uma demonstração;
> - Sentiram-se mais seguros para desenvolver problemas de demonstração. (FERREIRA, 2008, p. 157)

A autora conclui que a aplicação da sequência didática foi válida e sugere, para que os alunos atinjam maior independência em resolver problemas envolvendo demonstrações em geometria, um trabalho mais intenso envolvendo técnicas de demonstração.

A pesquisa de doutorado apresentada por Ordem (2015) à PUC-SP e desenvolvida com alunos da Universidade Pedagógica de Moçambique, investigou as concepções utilizadas por estudantes de licenciatura em matemática em situações que envolvem provas e demonstrações em geometria plana. Mais especificamente, a pesquisa buscou:

> 1. Estudar as estratégias e/ou justificativas que os estudantes de licenciatura em matemática utilizam em tarefas que exigem provas ou demonstrações.
> 2. Identificar a função que estudantes de licenciatura em matemática atribuem à prova e demonstração em matemática.
> 3. Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os estudantes de licenciatura em matemática. (p. 110)
> 4. Analisar que critérios utilizam para avaliar uma prova e demonstração em geometria plana ou argumentos que consideram convincentes que uma propriedade em geometria é válida.

A coleta de dados foi efetuada em três fases. Na primeira, os alunos responderam, presencial e individualmente, à primeira parte de um questionário, contendo questões abertas que permitiam aos respondentes desenvolver suas ideias, sem serem limitados por alternativas pré-definidas. Na segunda fase, a segunda parte do questionário foi respondida individualmente ou em grupo utilizando o *software* GeoGebra. Na terceira, procedeu-se a entrevista individual, composta de duas partes: a primeira, comum a todos os entrevistados, abordava o significado dos termos ‘prova’ e ‘demonstração’; a segunda, específica a cada entrevistado, buscou esclarecer dados obtidos no questionário.

O autor concluiu que:

> *i*) Os sujeitos não mostraram estratégias consistentes de produção de demonstrações, nem justificativas com embasamento material plausível – suas estratégias parecem mais influenciadas pela abordagem da geometria nos livros didáticos adotados no ensino fundamental;
>
> *ii*) Os sujeitos lidam com provas e demonstrações como mais um tópico de aprendizagem em matemática e não como meio de comunicação e de validação em matemática;
>
> *iii*) Os nossos sujeitos não utilizam critérios consistentes para avaliar provas e demonstrações.
>
> *iv*) Os sujeitos da pesquisa têm uma concepção de que provas e demonstrações são simples rituais dissociados de uma de suas funções principais, a de validar propriedades e conjecturas verídicas, ou de refutar conjecturas falsas. (ORDEM, 2015, p. 308)

O autor concluiu também que, na concepção dos alunos investigados, métodos empíricos podem ou não validar propriedades geométricas, a depender do instrumento utilizado para essa validação. Além disso, percebeu que, “em geral, os alunos investigados não sabem que é inaceitável o recurso a evidências empíricas como meio de generalização" (ORDEM, 2015, p. 307).

Tais achados corroboram os de Jahnke (2008) quando afirma que, em grande número, os estudantes dos níveis secundário e terciário ficam mais convencidos da validação de um teorema matemático por argumentos empíricos que por uma prova matemática.

1.1.3 Nossas considerações

Neste tópico buscamos investigar, por meio de uma revisão de literatura, os fatores que influenciam as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao lidarem com problemas que envolvem demonstrações geométricas e as ações empreendidas para minimizar essas dificuldades.

Embora, ao iniciarmos nossas leituras, tivéssemos certeza do tema a ser pesquisado, precisávamos definir um problema de pesquisa, captar ideias para investigação e definir um referencial teórico e uma metodologia de pesquisa. A revisão de literatura foi fundamental para ampliar nossa visão sobre o tema provas e demonstração e sobre as teorias da didática da matemática, permitindo-nos fazer escolhas.

Não foi nosso objetivo neste capítulo fazer um inventário das pesquisas existentes sobre o tema. Desse modo, apresentamos apenas uma parte desses estudos, a qual abrange os achados mais relevantes para nossos propósitos.

Encontramos um grande número de pesquisas que tratam do ensino de provas e demonstrações, sendo a maioria relacionada a alunos do ensino básico e à formação continuada de professores. Selecionamos três estudos que trataram de provas e demonstrações na formação inicial: os de Ferreira (2008), Dias (2009) e Ordem (2015). A pesquisa de Dias (2009) difere de nossa proposta na fundamentação teórica e na metodologia, além do fato de seu trabalho envolver *software* de geometria dinâmica. Já a pesquisa de Ferreira (2008) se assemelha à nossa nos referenciais teórico e metodológico, embora a autora tenha buscado desenvolver por meio de atividades os termos próprios do sistema dedutivo e oferecer técnicas de demonstração com a utilização de esquemas, com o propósito de validar teoricamente a veracidade de um teorema. Ordem (2015) investigou as concepções utilizadas por estudantes de licenciatura em matemática em situações que envolvem provas e demonstrações em geometria plana com alunos da Universidade Pedagógica de Moçambique. Nossa proposta, por sua vez, é a de apresentar uma situação, em termos de tarefa, técnica e tecnologia, que possibilite minimizar as dificuldades dos alunos em demonstrar, bem como contribuir para que estes, como futuros professores, percebam a importância de implementar as demonstrações em sua prática.

Outros trabalhos podem apresentar uma estrutura semelhante à que propomos, porém temos como diferencial o público e a proposta em termos de sequência.

Embora o foco de nossa pesquisa seja o aluno de licenciatura, fazer um estudo das dificuldades enfrentadas pelos alunos e professores da educação básica foi importante para que pudéssemos tomar conhecimento do quadro atual de ensino e aprendizagem de demonstrações, visto que acreditamos ser este, em parte, reflexo da formação inicial.

Na revisão de literatura, foi possível também observar alguns fatores que contribuem para essas dificuldades, tais como inabilidade na manipulação de argumentos de um dado problema (HEINZE; CHENG; UFER, 2008), dificuldades na leitura de um problema e na redação de uma demonstração (ALMOULOUD, 2007), diferenças entre o nível de escolaridade do aluno e o nível de pensamento geométrico exigido, problemas na transição da geometria empírica à geometria dedutiva e falta de uma metodologia que aproxime o aluno da prova matemática (BUSQUINI, 2003).

Como já exposto, em nosso ponto de vista, muito mais que saber demonstrar, é fundamental que o professor da educação básica, ao inserir a demonstração em sua prática, reconheça a importância das demonstrações geométricas para o desenvolvimento intelectual do aluno. No entanto, nossas leituras, associadas a nossa experiência profissional, nos levam a constatar que a atual abordagem dada à demonstração na graduação não parece estimular o futuro professor a implementá-las em suas aulas. Na formação inicial, a demonstração é geralmente utilizada como ferramenta para atestar a validade de resultados, mas é feito um estudo da demonstração e de seus termos próprios? O graduando é levado a construir demonstrações? Embora o método axiomático seja introduzido, seu surgimento e seus propósitos são em algum momento apresentados a esses alunos?

Concordamos com Serralheiro (2007) em que a formação inicial não tem a responsabilidade de ensinar conteúdos específicos como se o professor fosse reproduzi-los futuramente em suas aulas. Ela deve, no entanto, oferecer uma nova abordagem para as demonstrações, que permita ao aluno aprender a demonstrar e aprender a ensinar demonstrações.

A presente pesquisa visa contribuir com a busca de meios que minimizem as dificuldades relacionadas à aprendizagem da demonstração geométrica na formação inicial de licenciandos em matemática, propondo uma organização didática que lhes permita construir demonstrações de modo a sentirem-se estimulados a trabalhar com esse recurso em sua prática docente futura.

Uma das grandes contribuições a nossas leituras foi trazida por Balacheff (1988), permitindo-nos perceber a diferença entre prova e demonstração, que até então víamos como designações sinônimas, em decorrência de nossa formação até o mestrado ter sido em matemática pura. Cientes de que tais termos necessitam ser distinguidos para fins didáticos, procederemos a esmiuçá-los na próxima seção.

1.2 Prova e demonstração

Acreditamos que para que o professor ensine demonstrações e para que o aluno aprenda a demonstrar, o interesse de ambos por esse objeto paramatemático[4] precisa ser despertado. Mas aprende-se a demonstrar? A demonstração é uma técnica? Um processo? O que é, afinal, demonstração? Para que serve?

Pretendemos neste capítulo fazer uma síntese dos aspectos epistemológicos da demonstração para tentar responder algumas de nossas indagações.

1.2.1 As concepções de prova e de demonstração adotadas neste estudo

Iniciaremos este tópico esclarecendo os significados dos termos ‘demonstração’ e ‘prova’, a fim de nos posicionarmos quanto à concepção que adotaremos nesta pesquisa.

Os termos ‘demonstração’, ‘prova’, ‘prova formal’ e ‘prova rigorosa’ são vistos como sinônimos pelos matemáticos, que não discutem seus significados nem se ocupam em defini-los.

Em educação matemática, porém, os termos ‘prova’ e ‘demonstração’ não são sinônimos, sendo que o primeiro pode assumir diferentes significados, segundo a concepção adotada. Reid e Knipping (2010) fazem uma exposição de suas utilizações na vida cotidiana, na educação matemática e nas ciências empíricas, apontando seus significados distintos.

Balacheff (2004) considera que a falta de esclarecimento quanto ao significado do termo ‘prova’ pode prejudicar a comunicação entre pesquisadores em educação matemática. Para que os resultados das pesquisas sejam compartilhados, esse ponto deve ser esclarecido.

Balacheff (2000) distingue os termos ‘explicação’, ‘prova’ e ‘demonstração’:

> - *Explicação:* Um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, refutados ou aceitos.

[4] O objeto paramatemático não é geralmente objeto de ensino explícito, mas consiste em saberes auxiliares ou ferramentas de estudo, como as noções de demonstração e prova, que são importantes no processo de construção de conceitos matemáticos (CHEVALLARD, 1991).

- *Prova:* Uma explicação aceita por dada comunidade em dado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate voltado a determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
- *Demonstração:* Um tipo de prova dominante em matemática, com uma forma particular. Trata-se de uma série de enunciados que se organizam segundo um conjunto bem definido de regras.

Acreditamos na pertinência desta distinção e na necessidade de nos posicionarmos quanto a nossa concepção de prova e demonstração. Como expõe Balacheff (2004), a falta de esclarecimento pode provocar equívocos na comunicação da pesquisa. Além disso, e principalmente, acreditamos que fazer uma distinção entre os termos ‘explicação’, ‘prova’ e ‘demonstração’ é condição necessária para que estas sejam praticadas em todos os níveis de ensino.

A distinção entre os significados de demonstração e prova implica aceitar, a depender do contexto, outras produções dos alunos para estabelecer a validade de uma afirmação.

Portanto, a concepções de explicação, prova e demonstração considerada em nossa pesquisa será a definida acima segundo Balacheff (2000). Nas próximas seções e capítulos, o termo ‘prova’ será utilizado significando uma explicação que convence uma comunidade, mesmo não convencendo outras, e o termo ‘demonstração’ significará uma prova restrita ao âmbito da matemática.

1.2.2 Aspectos sobre provas e demonstrações

A história do desenvolvimento da demonstração mostra que ao longo dos séculos esse conceito esteve associado à ideia de verdade, e suas funções de validação e comunicação perduram até os dias atuais. Questionamo-nos se estas são as únicas funções da demonstração. “A demonstração como conjunto de raciocínios feitos a partir de axiomas e verdades já demonstradas, raciocínios por intermédio dos quais se estabelece a veracidade de uma dada proposição” (FETISSOV, 1995, p. 22), aceita pelos matemáticos, tem o mesmo significado para os educadores matemáticos?

O desenvolvimento da matemática foi acompanhado do desenvolvimento da demonstração e suas transformações. Verificamos que a concepção de demonstração que temos hoje deriva do trabalho que Euclides concebeu em *Os elementos,* primeiro trabalho estruturado com perfil didático com fins de comunicação. A forma apresentada por Euclides impôs um modelo de transmitir conhecimentos e um padrão de rigor que inspirou matemáticos e lógicos. Nesse âmbito, Mariotti (2006) enfatiza que *Os elementos*, de Euclides, atende a um duplo propósito: por um lado, a necessidade de compreensão e, por outro, a de validade, isto é, ser aceito por uma comunidade. Foi essa a primeira tentativa de comunicar conhecimentos matemáticos, além de tornar válida uma teoria.

No entanto, séculos de desenvolvimento fizeram com que a demonstração passasse por transformações e padrões de aceitabilidade. Em determinada época, por exemplo, matemáticos já estabeleceram verdades por meio de observações. Após *Os elementos*, a ideia de verdade passou a ser associada ao método dedutivo. Os questionamentos a respeito do quinto axioma de *Os elementos* colocou em questão a verdade proposta pelo modelo euclidiano, que posteriormente veio a se ajustar aos padrões impostos por Hilbert. No entanto, Mariotti (2006) expõe que, embora a ideia de verdade considerada pelos matemáticos tenha sofrido transformações, a relação entre compreensão e aceitação não sofreu mudanças radicais e ainda constitui um elemento de caracterização da matemática. O modelo euclidiano até hoje continua presente nos livros didáticos e nas aulas reproduzidas por professores de geometria.

Embora no âmbito da matemática a demonstração seja única forma de validação e os termos ‘demonstração’ e ‘prova’ sejam utilizados como sinônimos, na educação matemática alguns pesquisadores fazem a distinção entre esses termos, ampliando o conceito de prova de modo que não só a validação por meio de encadeamento de argumentos lógicos seja aceita, mas também outras formas de provas produzidas pelos alunos ao validar suas afirmações.

No entanto, o fato de aceitar outras formas de provas produzidas pelos alunos não minimiza a importância do papel da demonstração para o ensino da matemática. Balacheff (2010) corrobora esse fato e considera que não se pode aprender matemática sem aprender demonstração:

> [...] a prova matemática tem características específicas, entre elas um tipo formal de texto [...], uma organização específica e uma robustez indiscutível uma vez sintaticamente corretas. Essas características deram à matemática a reputação de ter práticas excepcionalmente rigorosas em relação a outras disciplinas, práticas que não são socialmente determinadas, mas inerentes à natureza da própria matemática. (p. 115)

Essa importância atribuída à prova e demonstração também no âmbito da educação matemática faz com que alguns pesquisadores, como Balacheff, defendam que as provas devem ser trabalhadas desde as primeiras séries. Balacheff (2004) leva em consideração conteúdo e contexto ao se referir a uma prova e afirma que no ensino e aprendizagem de provas matemáticas devem-se considerar regras e critérios específicos – ou seja, o grau de exigência de uma prova deve corresponder à situação ou nível em que o aluno se encontra. Propõe-se geralmente que nas primeiras séries sejam trabalhadas atividades que envolvam argumentações, que levem os alunos a conjecturar e a sentir a necessidade e reconhecer a importância da validação para a matemática.

Muitos alunos recorrem a exemplos para justificar resultados. Valorizando esse tipo de produção dos alunos, Balacheff (2000, p. 4) distingue dois tipos de provas: as pragmáticas, "que têm o recurso à ação real ou apresentações" (exemplos, desenhos) e as conceituais, "que não envolvem ação e são caracterizadas por formulações de propriedades e as relações entre elas".

Em ambas, Balacheff (1988) identifica níveis de prova, assim classificados:

> - Empirismo ingênuo: Consiste em assegurar a validade de uma proposição após verificar para alguns casos. É considerado uma das primeiras formas de processo de generalização.
> - Experimento crucial: Consiste em afirmar a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, para o qual se assume que, se funciona para este, então funcionará sempre.
> - Exemplo genérico: Descreve o processo de verificação de uma proposição após efetuar operações ou transformações sobre um objeto na qualidade de representante característico de uma classe.
> - Experimento de pensamento: Invoca a ação, interiorizando-a, mas afasta-se de sua execução sobre um caso particular. (p. 218-219)

Como podemos observar, os dois primeiros tipos de prova (empirismo ingênuo e experimento crucial) não estabelecem a verdade de uma proposição e não podem ser considerados como provas matemáticas, a não ser por quem os executa. O que se espera é que os alunos partam das provas experimentais e consigam desenvolver provas conceituais. Mas isto não ocorre tão facilmente. Atingir o nível de rigor exigido pela matemática é muito raro entre estudantes, inclusive os universitários, como identificado por Nasser e Tinoco (2003), por Jahnke (2008) e por Knipping (2008).

Balacheff (2000) acredita existir uma ruptura cognitiva entre os dois primeiros tipos de provas e os dois últimos. Mariotti (2006) concorda com Balacheff (2000) quando afirma que há uma discrepância entre a verificação empírica e o raciocínio dedutivo, e isso é reconhecido como fonte de dificuldade relacionada à demonstração.

Embora reconhecendo a importância de considerar as produções dos alunos da educação básica em diferentes níveis, acreditamos ser necessário que, ainda nesse âmbito, o aluno seja levado a perceber que exemplos não garantem a validade de um caso geral e que a demonstração é necessária.

Para valorização da prova na educação básica, o professor deve estar consciente da ampliação do conceito de prova e estar apto a elaborar situações que levem o aluno, no momento oportuno, a realizar demonstrações. Nesse caso, seria coerente, no âmbito da formação inicial, considerar prova e demonstração com significados distintos, para que o futuro professor esteja preparado para, na educação básica, trabalhar provas e demonstrações considerando o nível de escolaridade do aluno.

A necessidade de provar está, de modo geral, associada à necessidade de convencer – a si próprio, isto é, verificar a validade de uma afirmação; e aos outros, que é o aspecto social da prova. Entretanto, na maioria das vezes, em matemática, os alunos se convencem de uma proposição a partir de verificações empíricas. Esse fato foi confirmado por Jahnke (2008), que afirma que muitos estudantes dos níveis secundário e terciário ficam mais convencidos da validação de um teorema matemático por argumentos empíricos que por prova matemática. Por exemplo, para provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, muitos professores do ensino fundamental e médio utilizam dobraduras ou recortes, de modo que os ângulos internos de um triângulo fiquem dispostos formando um ângulo raso, e acreditam que a verificação de um caso particular pode validar um caso geral.

É possível que a preferência por verificações empíricas se justifique pelo fato de atribuir à prova a única função de validação. Verificar a veracidade de uma proposição é uma função da prova matemática que, para o aluno, pode se tornar desnecessária caso este fique convencido por meio de verificações empíricas. De Villiers (2001) acredita que tomar consciência de outras funções da demonstração pode motivar o aluno à prática de provas matemáticas. As funções da demonstração listadas em De Villiers (2001) são:

- Verificação (dizendo respeito à verdade da afirmação).
- Explicação (fornecendo explicações quanto ao fato de ser verdadeira).
- Sistematização (organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas).
- Descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados).
- Comunicação (transmissão do conhecimento matemático).
- Desafio intelectual (realização pessoal ou gratificação resultantes da construção de uma demonstração).

Além dessas funções, Hanna (2000) acredita que as provas são portadoras de conhecimentos matemáticos em sala de aula e afirma que a maior importância da prova não é atestar uma verdade matemática, e sim fornecer novos métodos, estratégias e conceitos que permitam resolver problemas.

Concordamos com De Villiers (2001) em que, ao demonstrarmos uma propriedade, esta já terá sido testada por meio de conjecturas e já estamos seguros de sua validade. Assim, não é com objetivo de verificar a validade de um resultado que se empreende a prova, mas sim com o propósito de provar o porquê de esse resultado ser válido. Portanto, é com a função de explicar por que o resultado é verdadeiro que partimos para a demonstração, julgando que esta apontará as razões da validade do caso geral.

Vimos que, do ponto de vista do ensino e da aprendizagem em matemática, as perguntas *‘O que é prova?’*, *‘Para que provar?’* e *‘Por que provar?’* podem ter diferentes respostas.

Balacheff (2004) destaca a importância de que em toda pesquisa esteja clara a concepção de prova adotada e também de haver unidade a respeito de seu significado para que se possam compartilhar de forma mais significativa os resultados dos trabalhos desenvolvidos sobre esse tema. Portanto, reafirmamos aqui as concepções de prova e demonstração adotadas neste estudo. Usaremos o termo ‘prova’ para designar uma explicação que convence uma comunidade, mesmo não convencendo outra, e o termo ‘demonstração’ para designar uma prova restrita ao âmbito da matemática, composta de raciocínios feitos a partir de axiomas e propriedades já demonstradas.

Reafirmamos também que os alunos de licenciatura em matemática devem reconhecer a importância da demonstração e saber realizá-la. No âmbito da licenciatura, porém, a noção de prova deve ser ampliada, para que os futuros professores possam criar e conduzir situações que lhes permitam incluir provas em sua prática futura.

Não existe uma resposta única e definitiva sobre por que e para que provar. Concordamos com Balacheff (2004) quando expõe que, ao ensinar provas, o contexto deve ser considerado e, nesse caso, as questões de *por que* e *para que* provar podem ter diferentes respostas. Concordamos também que, mais do que a validação, a demonstração tem como função produzir conhecimento (DE VILLIERS, 2002). Portanto, além da função de verificação – qual seja, *se é verdade* –, deve ser explorada a função de explicação – ou seja, *por que* é verdade –, bem como a função de fornecer ferramentas para a resolução de problemas.

As leituras e compreensões focalizadas neste capítulo levaram-nos a investigar estratégias de ensino que possibilitem aos alunos de licenciatura atingir o grau de formalização necessária a uma demonstração matemática e, ao mesmo tempo, sentirem-se motivados a aprender a realizar provas e a ensiná-las futuramente a seus alunos.

As leituras também esclareceram os significados do termo ‘prova’ e as funções desta – aspectos imprescindíveis quando da análise dos achados de nossa investigação. Quanto ao tipo de prova produzida pelos alunos, tomaremos como referência para análise a classificação em provas pragmáticas e conceituais, proposta por Balacheff (2000), e as funções da prova, como classificadas por De Villiers (2002) e Hanna e Barbeau (2008).

Acreditamos que abordar a prova por meio de situações que instiguem o aluno a conjecturar e buscar o porquê da validade de uma descoberta – ou seja, prova com função de explicação – se revelará mais motivador que levá-lo a provar uma propriedade de cuja validade já esteja seguro por meio de experimentos.

1.3 Problema de pesquisa

Nesta seção retomaremos alguns dos resultados de nossa revisão de literatura para, com base na leitura de pesquisas e documentos oficiais, situar nossa problemática, a fim de traçarmos nossos objetivos e formular as questões que nortearão, a princípio, nosso trabalho. Vamos também, com base nas leituras de pesquisas e em nossa experiência profissional, traçar hipóteses que, ao final deste trabalho, poderão ser confirmadas ou refutadas.

Os PCN propõem que as atividades envolvendo práticas argumentativas sejam iniciadas já nos primeiros ciclos da educação básica, e já no quarto ciclo os alunos deverão ter contato com as primeiras demonstrações:

> [...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (BRASIL, 1997, p. 71)

Embora os documentos oficiais orientem à introdução do método dedutivo na educação básica, não oferecem orientação sobre como o professor deve proceder nessa empreitada.

Constatamos em nossa revisão de literatura que as pesquisas envolvendo alunos da educação básica evidenciam que estes não estão habituados a lidar com práticas argumentativas, vivenciando dificuldades na leitura e interpretação de enunciados (DUARTE, 2007), não têm o hábito de apresentar justificativas em suas rotinas escolares (DORO, 2007), aceitam melhor as provas empíricas e apresentam dificuldade em aceitar provas dedutivas (VIEIRA, 2007).

Essas e outras pesquisas nos permitem afirmar que as demonstrações ainda estão ausentes da maioria das escolas brasileiras.

Por outro lado, pesquisas envolvendo professores de matemática da educação básica, apontam que estes se sentem inseguros para ensinar demonstrações a seus futuros alunos, apesar de reconhecer sua importância. Nessa direção, Leandro (2012) afirma existir uma lacuna entre a formação inicial e a prática de sala de aula; Dias (2009) aponta que a formação inicial não está dando conta de preparar o professor para o ensino de provas; Almouloud (2007) destaca a necessidade de criar condições para que os professores se sintam preparados para trabalhar com provas e demonstração com seus alunos; Serralheiro (2007) expõe a fragilidade nos conhecimentos dos professores a respeito de demonstração.

As diretrizes que regulamentam os cursos de licenciatura em matemática consideram que os alunos já trazem uma bagagem matemática de formação básica e que esta deve ser desenvolvida. No entanto, nos ingressantes nesses cursos, a precariedade de seus conhecimentos dificulta desenvolvê-los.

Constatamos que o ensino e a aprendizagem de provas e demonstrações nas escolas e universidades brasileiras estão em um círculo vicioso em que os cursos de licenciatura não dão conta de formar professores com autonomia para desenvolver com seus alunos atividades que os preparem para o domínio do processo dedutivo. Esses alunos chegam à universidade com limitações que os levam a praticar a demonstração sob abordagem técnica, desmotivando-os a estudar esse recurso matemático e muito menos ensiná-lo a seus futuros alunos. Para mudar essa situação, Pietropaolo (2005) e Leandro (2012), por exemplo, apontam a necessidade de ampliar o significado de prova matemática na formação inicial do professor, capacitando-o a ensiná-la a seus futuros alunos.

Em nossa pesquisa, estamos lançando um olhar para o aluno de licenciatura em matemática, sob duas perspectivas: a do estudante que enfrenta dificuldades próprias de um curso de matemática e advindas de lacunas da educação básica; e a do futuro professor que ao final do curso ainda não se sente seguro para ensinar demonstrações a seus futuros alunos.

As leituras dos trabalhos acima citados ratificam a necessidade de investigar as demonstrações em geometria, apontam que as dificuldades nesse tema ocorrem também em outros países e revelam que os pontos a investigar ainda não se esgotaram. Por essa razão que buscamos compreender as origens dessas dificuldades e ao mesmo tempo fazer intervenções com o propósito de minimizá-las. Visando cumprir os objetivos indicados, e a fim de guiar este estudo, formulamos a seguinte questão que irá nortear nossa investigação: **Situações de formação que articulam provas e demonstrações em geometria, mais especificamente em quadriláteros, permitem a alunos de licenciatura em matemática a (re)construção de saberes/conhecimentos relativos a esse conteúdo?**

Associados a nossa experiência, os resultados observados nas pesquisas visitadas nos permitem afirmar que a abordagem do método dedutivo na graduação é feita no sentido inverso ao do desenvolvimento desse método. Há indícios de que não está sendo permitido ao aluno construir a demonstração a partir de uma motivação que possa provocar sua descoberta.

Observamos ainda em nossa revisão de literatura que a maioria dos professores dá preferência às provas empíricas para validar conjecturas, baseando-se em argumentos que não aproximam os alunos das demonstrações.

Acreditamos que situações de ensino que articulem provas e demonstrações em que o aluno tenha um papel ativo na construção das mesmas podem minimizar as dificuldades relacionadas às provas e demonstrações geométricas. Estas constatações nos levaram a conjecturar que: **Situações de formação que articulam provas e demonstrações em geometria, mais especificamente em quadriláteros, poderão permitir a alunos de licenciatura em matemática a (re)construção de saberes/conhecimentos relativos a esse conteúdo.**

Para responder nossa questão de pesquisa, pretendemos cumprir este objetivo geral: **Elaborar, aplicar e analisar uma organização didática que permita minimizar as dificuldades dos alunos de um curso de licenciatura em matemática do estado da Bahia em compreender demonstrações geométricas**.

Para alcançar esse objetivo, precisamos cumprir as seguintes metas específicas:

- Investigar as concepções dos alunos de licenciatura em uma universidade situada no estado da Bahia a respeito de provas e demonstrações.
- Analisar as organizações didática e matemática de livros de geometria adotados em cursos de licenciatura em matemática.
- Proporcionar a esses alunos tarefas que articulem provas e demonstrações geométricas.
- Proporcionar a esses alunos tarefas que contemplem mudanças e coordenação de registros de representação.

A fim de cumprir nossos objetivos, buscamos fundamentos teóricos e metodológicos que garantissem a generalidade de nossas possíveis constatações. Esses fundamentos serão apresentados no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2 – ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

2.1 Fundamentos teóricos

Os achados da revisão de literatura revelam que as dificuldades enfrentadas pelos alunos de licenciatura referem-se a aspectos didáticos e cognitivos, o que influenciou na escolha do referencial teórico que dará suporte a nossa pesquisa: a teoria antropológica do didático, proposta por Chevallard (1999), a teoria dos registros de representação semiótica, desenvolvida por Duval, e a teoria das situações didáticas, elaborada por Brousseau (2008).

Estas teorias analisam de modos distintos as dificuldades que emergem nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática. Chevallard atribui tais dificuldades a aspectos didáticos; Duval as atribui a aspectos cognitivos (ALMOULOUD, 2010); para Brousseau, a modelagem apropriada de uma situação de ensino pode contribuir para uma aprendizagem significativa. Pretendemos articular essas três teorias para analisar nossa proposta metodológica que visa contribuir para a reflexão sobre os fatores envolvidos no ensino e na aprendizagem de provas e demonstrações em geometria.

Não pretendemos aqui fazer uma exposição completa dessas teorias, e sim sintetizar os principais pontos que serão utilizados em nossas análises[5].

2.1.1 Teoria antropológica do didático

A teoria antropológica do didático, desenvolvida por Yves Chevallard nos anos 1990, tem como objeto de estudo os processos de ensino e de aprendizagem. No momento em que considera seu objeto de estudo uma ação humana, esta deverá pertencer ao campo que estuda o homem: a antropologia.

O postulado que serve de base a essa teoria afirma que toda atividade humana pode ser descrita a partir de um modelo único, o qual Chevallard (1999) chamou de praxeologia, ou organização praxeológica.

No âmbito da matemática, todo problema solicita meios para resolvê-lo e o processo que dá suporte teórico a essa resolução é a organização praxeológica matemática, ou

5 A consulta às obras destes autores citadas na lista de referências permite um estudo completo de suas teorias.

organização matemática. Chevallard (1999) dá a esse problema matemático o nome de tarefa, a qual a praxeologia se encarrega de resolver.

Para uma dada tarefa existe uma técnica (que é o modo de realizar a tarefa), uma tecnologia que justifica a técnica e uma teoria que fundamenta a tecnologia. Esses elementos compõem dois blocos: um bloco técnico prático, composto de tarefa e técnica, e um bloco tecnológico-teórico, composto de tecnologia e teoria. É o bloco tecnológico teórico que permite a compreensão de uma técnica e até a possibilidade de uma nova técnica para resolver uma dada tarefa.

Como foi dito, a teoria antropológica do didático tem por foco estudar o homem em relação ao conhecimento matemático. Segundo Chevallard (1999), os objetos matemáticos são produzidos em uma instituição social, que pode ser uma escola, uma universidade, um livro didático, documentos oficiais etc., e o saber constitui uma das formas de sistematização de conhecimentos (ALMOULOUD, 2010) que se tornam objetos ao serem reconhecidos pelos sujeitos e por alguma instituição. Consideremos, por exemplo, uma situação em que um professor *A*, de uma instituição *I* (uma escola) apresenta a um aluno *C* um objeto *O*. Para apresentar esse objeto ao aluno, é necessário que o professor organize uma situação que favoreça o relacionamento entre o aluno e o objeto, isto é, uma situação que permita ao sujeito adquirir saberes sobre o objeto. Essa situação é o que Chevallard (1999) chama de organização didática.

Chevallard (1999) afirma que toda atividade matemática pode ser realizada de modo único por meio de uma organização matemática, que se refere aos conteúdos matemáticos. As organizações matemáticas possuem formas de ensinar correspondentes em determinada instituição, que são as organizações didáticas.

Na presente pesquisa, consideramos os livros e a formação como instituições, o quadrilátero como o objeto e os alunos que participaram da pesquisa, bem como a pesquisadora e os autores dos livros analisados, como sujeitos.

Investigamos como o objeto matemático ‘quadrilátero’ “sobrevive” nos livros analisados e propusemos uma organização didática com o objetivo de permitir o estabelecimento de uma relação entre os alunos envolvidos na pesquisa e o objeto ‘quadrilátero’.

Elementos da praxeologia

Expusemos, em linhas gerais, do que se trata uma praxeologia. Faremos agora uma abordagem mais específica desse conceito, de modo a exemplificar seus elementos.

Como já explicitado, uma praxeologia se compõe de dois blocos: um técnico-prático, que diz respeito à tarefa e a técnica e que corresponde ao bloco do saber fazer, e um tecnológico-teórico, que abrange a tecnologia e a teoria, correspondendo ao bloco do saber. A noção de praxeologia tem início com a ideia de tarefa, que diz respeito a qualquer atividade humana que requer ser desenvolvida. Uma tarefa é uma atividade específica que pertence a um tipo de tarefa, que por sua vez pertence a um gênero de tarefa. Uma tarefa e o tipo de tarefa que lhe corresponde são geralmente designados por um verbo: *'resolver'*, *'fazer'* e *'demonstrar'* dizem respeito a gêneros de tarefas, enquanto *'resolver um problema'*, *'fazer um bolo'* e *'demonstrar um teorema'* são os tipos de tarefas correspondentes. Um gênero de tarefa solicita uma particularidade para que seu sentido se complete; essa particularidade é o tipo de tarefa. Se T é um tipo de tarefa associado a um gênero de tarefa t, Chevallard (1999) diz que $T \in t$.

Um exemplo: *'demonstrar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes'* é uma tarefa enquanto *'demonstrar propriedade do paralelogramo'* é um tipo de tarefa correspondente. *'Demonstrar'*, por sua vez, é um gênero de tarefa.

Um tipo de tarefa solicita uma execução, isto é, determinado tipo de tarefa requer uma forma pela qual ela possa ser desenvolvida, forma essa que Chevallard (1999) chama de *técnica*. Assim, uma técnica é uma maneira de fazer uma tarefa. Uma tarefa T solicita uma técnica τ, que é a maneira de executar T. O par $[T/\tau]$ é chamado, na teoria antropológica do didático, de bloco prático-técnico, que corresponde ao saber fazer.

Uma técnica que se mostre eficiente para executar determinado tipo de tarefa pode não o ser para outra, e para a consecução de uma mesma tarefa pode haver mais de uma técnica disponível. O tipo de técnica disponível para desenvolver determinado tipo de tarefa depende da instituição a que estas pertencem. Uma técnica que se revela eficiente para executar uma tarefa em dada instituição pode não servir em outra. Dependendo do nível da instituição, é necessária uma técnica de maior ou menor complexidade. Tomemos, por exemplo, a tarefa *'provar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes'*: no 7.º ano do ensino fundamental, tal tarefa pode ser resolvida por meio de dobraduras, mas no 8.

º ano já pode ser demonstrada utilizando como técnica a congruência de triângulos.

Independentemente da instituição à qual a tarefa e técnica pertençam, a técnica escolhida deve vir acompanhada de uma justificativa, que Chevallard (1999) chama de *tecnologia* (θ). É a tecnologia que justifica a escolha de determinada técnica para resolver uma dada tarefa em determinada instituição. Por mais simples ou mais formal que a técnica seja, ela requer uma tecnologia apropriada que a justifique.

Além da função de justificar a técnica, Chevallard (1999) atribui mais duas funções à tecnologia: a de tornar clara a técnica, isto é, explicar a escolha da técnica, e a de produzir novas técnicas. De mão de uma tecnologia, torna-se possível escolher a técnica apropriada para executar uma tarefa.

Proposta uma tarefa e escolhida uma técnica, que por sua vez foi justificada por uma tecnologia, essa tecnologia deve ser fundamentada por uma teoria (Θ). A teoria tem o papel de justificar a tecnologia. Segundo Chevallard (1999), a teoria participa da praxeologia como quem contempla algo de uma posição superior, e atua sobre a tecnologia de modo equivalente àquele em que a tecnologia atua sobre a técnica.

A tecnologia θ e a teoria Θ formam o bloco *tecnológico-teórico* e, juntas, representam o *saber*. Uma organização matemática se constitui, então, de dois blocos: um técnico-prático $[T/\tau]$, composto de tarefa e técnica, que representa o saber fazer, e outro tecnológico-teórico $[\theta/ \Theta]$, composto de tecnologia e teoria, que representa o saber. Uma organização matemática $OM[T/\tau/\theta/\Theta]$ desenvolvida em determinada instituição que considera um tipo de tarefa específico recebe o nome de organização pontual. Quando às organizações matemáticas pontuais se reúnem em torno de uma mesma tecnologia θ, recebem, cada uma, o nome de organização matemática local, representada por $OM_\theta[T/\tau/\theta/\Theta]$. As organizações matemáticas locais desenvolvidas em torno de uma mesma teoria são chamadas de organizações matemáticas regionais; quando reunidas em torno de várias teorias, são denominadas organizações matemáticas globais (FONSECA, 2010).

Em nossa pesquisa analisamos as organizações matemáticas e didáticas presentes em três livros de geometria indicados nas referências de cursos de licenciatura em matemática. Analisamos a relação entre o objeto matemático (*O*) ‘quadrilátero’, as pessoas (*A*) ‘autores’ e a instituição (*I*) ‘livro’ em termos de tarefas, técnicas e bloco teórico-tecnológico.

Por meio de uma organização didática, identificamos a organização matemática referente a ‘quadrilátero’ a partir das tarefas propostas pelos autores e da análise das técnicas e do bloco teórico-tecnológico relativos a cada tarefa.

Exemplifiquemos esses conceitos com um tipo de tarefa e uma tarefa a ele correspondente, juntamente com as possíveis técnicas utilizadas pelos autores dos livros analisados e o bloco teórico-tecnológico envolvido nessa tarefa:

- **Tipo de tarefa**: Enunciar e demonstrar propriedades do paralelogramo.
- **Tarefa**: Enunciar e demonstrar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.
- **Técnica 1:** Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a congruência de triângulos.
- **Técnica 2**: Apenas enunciar a propriedade, sem demonstrar.
- **Técnica 3**: Propor a propriedade como exercício.
- **Bloco teórico-tecnológico**: Teorema das paralelas cortadas por uma transversal; congruência de triângulos; definição de paralelogramo; definição de diagonal.

Entre outras, esta tarefa foi “proposta” para a análise de livros com o objetivo de conhecermos como estes apresentam as propriedades dos quadriláteros.

A teoria antropológica do didático também foi utilizada em nossa pesquisa para propor uma organização didática referente a demonstrações geométricas, utilizando o objeto ‘quadrilátero’. Nessa organização, são propostas tarefas de construção geométrica que os alunos são convidados a executar e são analisadas as técnicas que estes utilizam e os discursos teórico-tecnológicos por eles mobilizados em suas justificativas.

2.1.2 Teoria das situações didáticas

O modelo axiomático de apresentação de conteúdos matemáticos é adotado até os dias atuais. No entanto, segundo Brousseau (1986), “saber matemática não é apenas aprender teoremas e definições, para reconhecer o momento de utilizá-los” (p. 4). Embora esse modelo seja uma opção cômoda para o professor organizar sua exposição, o autor considera que essa forma de apresentação omite o contexto em que o conhecimento se estabeleceu, inclusive conjecturas, erros e toda a discussão em torno do saber em jogo.

Foi partindo dessa concepção que Brousseau (1986) desenvolveu a teoria das situações didáticas, com objetivo de modelar o conhecimento matemático de modo que este se torne acessível ao aluno e lhe permita alcançar uma aprendizagem significativa.

O objetivo da teoria das situações didáticas é estudar as circunstâncias que regem a difusão e a aquisição do conhecimento. Seu foco são as situações, mais especificamente as situações didáticas, definida por Brousseau (2008), bem como todo o contexto que envolve o aluno, incluindo o professor e o sistema educacional.

Portanto, “o objeto central de estudo da teoria das situações didáticas não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber” (ALMOULOUD, 2010, p. 32).

Cabe ao professor escolher situações de modo que o aluno aceite o problema como seu e sinta-se desafiado a resolvê-lo. Tal momento, em que o aluno aceita a responsabilidade do problema independentemente da imposição do professor, como se o problema fosse seu, é chamado por Brousseau (1997) de *devolução*. Nesse momento o professor transfere a responsabilidade da resolução do problema para o aluno sem intencionalidade didática declarada. A partir do momento que há a devolução, o professor não interfere no sentido de fornecer respostas para o problema.

Na presente pesquisa, ao fazermos o estudo das organizações didáticas e matemáticas constantes nos livros analisados, avaliamos se as tarefas que os autores propuseram aos alunos possibilitavam a devolução, ou seja, se as tarefas apresentavam potencial de desafiar os alunos a resolvê-las.

Essa situação em que o aluno se considera a priori responsável pelo sucesso ou fracasso de suas ações, sem a intervenção didática do professor é chamada de situação adidática (BROUSSEAU, 2000-2001).

A situação mais ampla, que abrange a situação adidática e em que o professor manifesta sua intenção didática, é chamada de *situação didática*. A situação didática se compõe de quatro fases: *situação de ação, situação de formulação, situação de validação* e *situação de institucionalização.* As três primeiras fases transcorrem em situação adidática e independem da orientação do professor, ao passo que na institucionalização o professor mesmo manifesta sua intencionalidade didática.

Na *situação de ação,* o aluno se empenha em encontrar a solução para o problema proposto pelo professor. É a fase em que ele testa resultados e toma decisões. A partir de situações de ação, diante de erros e acertos obtidos por experimentações, o aluno chega a conclusões, porém estas não são comunicadas e nem justificadas com uso de argumentos teóricos.

A escolha do problema pelo professor deve permitir que o aluno perceba regularidades diante de suas escolhas, permitindo-lhe criar estratégias de resolução, sem contudo, justificá-las teoricamente, mas permanecendo restrito à experimentação. Segundo Almouloud (2010, p. 37):

> [...] uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre [...].

É a sucessão de situações de ação que constituirá o "processo pelo qual o aluno vai aprender um método de resolução de um problema" (BROUSSEAU, 2008, p. 25).

Na *situação de formulação* são explicitadas as observações feitas na situação de ação, ou seja, nessa fase o aluno comunica as estratégias criadas para resolver o problema, sem com isso preocupar-se com sua validade. Nessa etapa ocorre a comunicação entre o aluno e o meio, sendo que essa comunicação deve ocorrer em uma linguagem que possa ser compreendida por todos (ALMOULOUD, 2010)

Na *situação de validação*, além de comunicar uma estratégia de resolução, o aluno deve justificar a validade do método diante de uma teoria, isto é, deve provar que seu método é válido. Nessa etapa são rejeitadas estratégias em que foram detectados erros.

As fases acima descritas fazem parte da situação adidática: uma fez feita a devolução, o aluno se encarrega de administrar as situações de ação, formulação e validação. Essas fases são vivenciadas pelos alunos sucessivamente; em cada uma delas o saber assume uma função diferente e a relação do aluno com o saber também se transforma. (ALMOULOUD, 2010).

Na *situação de institucionalização*, a intenção didática do professor é declarada. O conhecimento formulado e validado na situação adidática deve ser oficializado diante de uma sociedade, receber a devida importância cultural e social e estar disponível para um possível uso em situação posterior.

Nessa etapa os conhecimentos são disponibilizados aos alunos e adquirem o *status* de saber.[6] Brousseau (2008) ainda salienta que na ausência de institucionalização os conhecimentos adquiridos nas fases da situação adidática tendem a desaparecer.

Nesta pesquisa, as tarefas que compõem a sequência de ensino visam ampliar os conhecimentos dos alunos relativamente ao objeto matemático 'quadrilátero'. Com as tarefas de construção, pretendemos fazer a devolução das situações de aprendizagem aos alunos e

---

[6] Embora não seja usual destacar a diferença entre conhecimento e saber, em uma análise didática é conveniente buscar sentidos mais precisos para esses termos. "O *saber* é caracterizado por ser relativamente descontextualizado, despersonalizado e mais associado a um contexto científico histórico e cultural [...]. [...] o *conhecimento* diz respeito ao contexto mais individual e subjetivo, revelando aspectos com os quais o sujeito tem uma experiência mais direta e pessoal" (PAIS, 2010, p. 12-13).

dar-lhes a oportunidade de vivenciar as sucessivas fases de ação, formulação e validação, para em seguida institucionalizarmos as propriedades dos quadriláteros contempladas. Após a institucionalização das propriedades, propomos tarefas que proporcionem aos alunos aplicar essas propriedades com o intuito de consolidar seus conhecimentos do objeto matemático em questão.

Na análise dos livros, buscamos observar, nas tarefas propostas pelos autores, se as organizações didáticas apresentadas, relativas ao objeto matemático ‘quadrilátero’, proporcionam ao aluno a oportunidade de vivenciar as etapas de ação, formulação e validação propostas nessa teoria.

Segundo Brousseau (2008), as sucessivas fases de ação, formulação e validação podem acelerar a aprendizagem e, associadas à institucionalização, “parecem constituir uma ordem razoável para a construção dos saberes” (p. 33).

2.1.3 Teoria dos registros de representação semiótica

A matemática é, por natureza, uma ciência abstrata e seu desenvolvimento tem estreita relação com o desenvolvimento das formas em que seus objetos são representados. Diferentemente de outras ciências, não temos outra forma de acesso a seus objetos senão por meio de representações. Além disso, um mesmo objeto matemático pode ser representado de mais de uma maneira.

Segundo Duval (2009a) qualquer área do conhecimento apresenta complexidades específicas, não cabendo, portanto, atribuir às complexidades epistemológicas dos conceitos matemáticos a origem das dificuldades enfrentadas por professores e alunos no ensino e aprendizagem de matemática, e sim a essa dependência das representações e multiplicidade destas.

As representações semióticas se referem a um sistema específico de signos[7], que, no âmbito da matemática, incluem a língua natural, a escrita algébrica, os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.

A função de uma representação semiótica vai muito além da comunicação. Ela se presta a representar um objeto que só é acessível por meio de representações, que podem até mesmo ser confundidas com o próprio objeto. Segundo Duval (2011), mais que tornar

[7] Signo “é uma coisa que representa uma outra coisa: seu objeto. Ele só pode funcionar como signo se carregar esse poder de representar, substituir uma outra coisa diferente dele” (SANTAELLA, 1983, p. 12). Segundo Duval (2011, p. 71), “o que constitui qualquer coisa como signo não é a sua utilização com a finalidade de comunicação; é seu emprego por oposição a uma ou várias outras coisas que poderiam ser empregadas em seu lugar na mesma situação”.

possível o acesso aos objetos está a possibilidade de transformar uma representação em outra representação semiótica.

Essas transformações podem ocorrer dentro de um mesmo sistema (o *tratamento*) ou entre sistemas semióticos diferentes (a *conversão*). Duval (2011) afirma que essas transformações "constituem a dinâmica cognitiva de toda atividade matemática" (p. 69) e que nem todo sistema semiótico é suficiente para efetuar essas transformações.

Buscando um sistema semiótico que, além de representar o objeto, cumprisse as atividades de tratamento e conversão, Duval introduziu a noção de registro de representação, que "se caracteriza essencialmente pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar" (DUVAL, 2011, p. 70).

A especificidade da atividade matemática, segundo Duval (2011), está relacionada à diversidade de registros de um mesmo objeto e à possibilidade de transformação de registros de representação, que o leva a acreditar que a compreensão em matemática depende da coordenação de ao menos dois registros de representação para um mesmo objeto.

As representações envolvidas na geometria são a língua natural, a simbólica e a representações geométricas ou figurais. Para serem resolvidos, os problemas de geometria necessitam, em sua maioria, do apoio da figura, o que corresponde à conversão de um problema em língua natural para um problema no registro figural. Os tratamentos também são comuns em geometria ao relacionar as propriedades de um objeto.

Os exemplos a seguir correspondem a tratamentos, pois representam esquemas no registro simbólico, ou seja, em um mesmo registro:

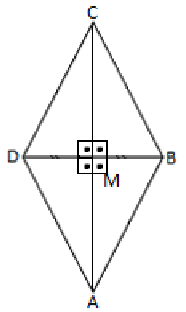
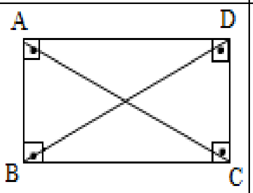
$$1)\ ABCD \text{ é } losango \overset{tratamento}{\Longleftrightarrow} ABCD \text{ é paralelogramo e } \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

$$2)\ ABCD\ Retângulo \overset{tratamento}{\Longleftrightarrow} ABCD \text{ é paralelogramo e } \overline{AB} \perp \overline{BC}$$

Os mesmos esquemas podem ser representados por meio de outros sistemas de representação (Quadro 2). As sentenças continuam as mesmas, porém mudaram os sistemas de representação. Neste caso ocorreu uma conversão.

No ensino e na aprendizagem de matemática, há supervalorização do tratamento, uma vez que os processos matemáticos ocorrem dentro de um mesmo registro e o papel da conversão fica restrito à escolha da representação que tornará mais prático o procedimento matemático que se busca efetuar. No entanto, Duval (2011), na teoria dos registros de representação semiótica, defende que, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que garante a apreensão do conhecimento matemático. É a ocorrência de conversão entre dois tipos de registro que garante que houve aprendizagem, uma vez que permanecer em um único registro induz a confundir o objeto com sua representação. Portanto, o que evidencia o conhecimento matemático é o reconhecimento das múltiplas representações de um mesmo objeto, bem como a capacidade de transitar entre uma e outra representação, demonstrando a distinção entre um objeto e sua representação.

Quadro 2. Exemplos de conversões de representações.

Registro da língua natural	**Registro figural**	**Registro simbólico**
ABCD é um losango se, e somente se, ele é um paralelogramo e suas diagonais são perpendiculares.		$ABCD\ \text{é}\ losango \xLeftrightarrow{tratamento} ABCD$ é paralelogramo e $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
ABCD é um retângulo se, e somente se, ele é um paralelogramo que dois lados consecutivos perpendiculares.		$ABCD\ Retângulo \xLeftrightarrow{tratamento} ABCD$ é paralelogramo e $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

Fonte: Dados da pesquisa.

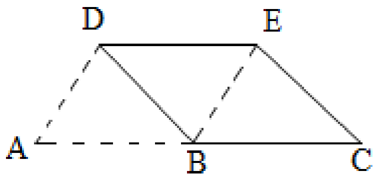
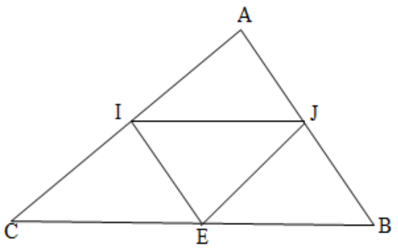
As tarefas incluídas na sequência de ensino proposta nesta pesquisa solicitam do aluno o trânsito entre representações em um mesmo registro e entre registros distintos. São apresentadas no registro da língua natural atividades em que ele deverá construir figuras justificando cada passo.

O trânsito entre registros não ocorre sempre de modo natural. O fato de um aluno ser capaz de fazer a conversão em um sentido não implica que também a fará no sentido inverso. As variáveis cognitivas mobilizadas na atividade de conversão mudam de um sentido para o outro. Uma conversão que, em um sentido, é feita de modo natural pode, feita em outro, levar o aluno a vivenciar dificuldades. Quando a conversão é imediata e efetuada espontaneamente, dizemos que há congruência. Caso contrário, há não congruência.

O Quadro 3 exemplifica dois problemas em que ocorrem congruência e não congruência na conversão.

O enunciado do primeiro problema faz referência a dois paralelogramos que são imediatamente identificáveis no registro figural, ocorrendo, portanto, congruência entre os registros. No segundo caso, o registro em língua natural faz referência a retas paralelas, enquanto no registro figural são apresentados triângulos. Nesse caso ocorre o fenômeno da não congruência.

Quadro 3. Congruência e não congruência na conversão de representações.

Conversão	Registro: língua natural	Registro: figuras geométricas
Congruente	*ABED* e *BCED* são paralelogramos. Provar que B é ponto médio de AC	
Não congruente	*AC* e *JE* são paralelas. *AB* e *IE* são paralelas. *IJ* e *CB* são paralelas. Provar que *E* é ponto médio de *CB*.	

Fonte: Adaptado de Duval (2011, p. 120).

Duval afirma que a grande dificuldade dos alunos está relacionada a aspectos de não congruência, levando-os a ficar presos a um único registro e a confundir o objeto com sua representação. Desse modo não há acesso ao conhecimento, uma vez que não ocorre articulação entre os registros, o que, segundo Duval (2011), é condição para que o conhecimento matemático se efetive.

As dificuldades relacionadas à não congruência independem do conteúdo matemático. Especialmente no âmbito da geometria, tais dificuldades que muitas vezes são atribuídas a problemas conceituais devem-se, na verdade, à ausência de coordenação entre registros (DUVAL, 2012).

Nos livros analisados, identificamos nas tarefas propostas casos de não congruência entre registros. Na aplicação de nossa organização didática, cuidamos de observar a reação dos alunos diante de tarefas que exploram coordenação entre registros não congruentes.

A geometria tem peculiaridades que a diferenciam de outros conteúdos matemáticos. As atividades cognitivas mobilizadas na apreensão dos conteúdos geométricos são abrangentes e complexas, dificultando seu aprendizado e seu ensino (DUVAL, 2012). Tendo em conta as especificidades da geometria, apresentaremos no próximo subtópico as ideias de

Duval a respeito da apreensão dos conteúdos geométricos, a qual, segundo esse autor, ocorre de forma diferenciada dos outros conteúdos matemáticos.

Apreensão dos conteúdos geométricos

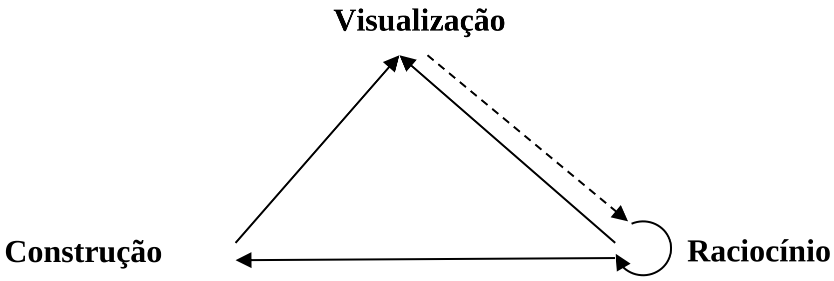
O raciocínio geométrico, de acordo com Duval (*apud* ALMOULOUD, 2004) envolve três tipos de processos cognitivos, que desempenham funções epistemológicas próprias:

- o processo de visualização para exploração heurística de uma situação complexa;
- a construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
- o raciocínio, que é o processo que conduz à prova e à explicação.

Duval (*apud* ALMOULOUD, 2004, p. 126) afirma que “esses processos estão entrelaçados e sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência em Geometria”. No entanto, esses processos podem ser realizados de forma independente. Por exemplo, a construção pode levar a uma visualização, mas esta não depende da construção. Já a visualização pode colaborar para o raciocínio, bem como levar a cometer enganos (DUVAL *apud* JONES, 1998).

Duval esquematiza esse processo como mostrado na Figura 1.

Figura 1. Interações subjacentes cognitivas envolvidas na atividade de geometria.



Fonte: Duval (*apud* JONES, 1998, p. 125).

Segundo Duval, a seta pontilhada indica que a visualização nem sempre apoia o raciocínio. A seta circular representa que o raciocínio pode ser desenvolvido independentemente dos processos de construção ou visualização.

As definições e os problemas em geometria solicitam, mesmo que inconscientemente, ações de reprodução, construção e desconstrução de figuras que, associadas aos textos, requerem formas de interpretação que Duval (ALMOULOUD, 2004) classifica em:

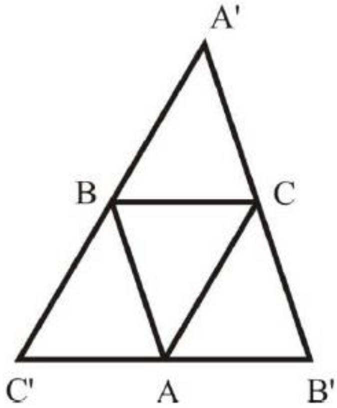
1. *Sequencial*: utilizada nas atividades de construção ou descrição, com o objetivo de reproduzir uma figura.
2. *Perceptiva*: interpretação das formas de uma figura em dada situação geométrica.
3. *Discursiva*: interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação de enunciados, levando em consideração a rede semântica de propriedades do objeto.
4. *Operatória*: centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

Tomar consciência da distinção entre as três primeiras formas de apreensão é condição necessária para a resolução de problemas em geometria e para entrada na forma de desenvolvimento do raciocínio exigida por essa resolução (DUVAL, 2012).

Independente do contexto de uma atividade, a figura desenhada é objeto de duas atitudes: apreensão perceptiva, que é imediata e automática, e apreensão discursiva, que é controlada e torna possível a aprendizagem. Duval (2012) afirma que essas atitudes geralmente se opõem, pois a figura pode mostrar objetos não necessariamente explícitos nos enunciados das hipóteses, do mesmo modo como os objetos indicados em tais enunciados nem sempre são identificados espontaneamente.

A organização perceptiva segue a lei do fecho, ou lei da continuidade: “Quando diferentes traços formam um contorno simples, fechado, eles se destacam como uma figura sobre um fundo” (DUVAL, 2012, p. 121). Diante dessa lei, os alunos tendem a visualizar linhas contínuas, as quais, por sua vez, os impedem de ver outras formas mais simples da figura. A Figura 2 mostra um exemplo em que automaticamente identificamos dois triângulos, os quais, porém, nos impedem de prontamente visualizar os paralelogramos *ABCB*’ e *ACBC*’.

Figura 2. Um exemplo da lei da continuidade.



Fonte: Duval (2012, p. 121).

O autor completa que o apego dos alunos à apreensão perceptiva os impede de enxergar a figura por meio das hipóteses apresentadas no enunciado, o que constitui um abandono da apreensão discursiva. É, assim, provável que os alunos apresentem dificuldades em problemas em que os enunciados são semanticamente incongruentes com a representação figural.

A apreensão operatória diz respeito às modificações que uma figura pode sofrer. São elas:

- *Modificação mereológica*: dividir uma figura em subfiguras, reagrupá-las, incluir uma figura em outra.
- *Modificação ótica*: transformar uma figura em outra, chamada de sua imagem.
- *Modificação posicional*: deslocar uma figura em relação a um referencial.

Essas modificações podem ser realizadas graficamente ou mentalmente. O ato de fracionar uma figura em subfiguras e reagrupá-la constitui uma reconfiguração intermediária. O interesse por esse fracionamento é que o mesmo permite efetuar tratamento sobre a figura de modo a auxiliar a resolução de problemas. Podemos citar como exemplo a prova da soma dos ângulos internos de um quadrilátero: este é fracionado por meio de sua diagonal, formando dois triângulos.

Em nossa pesquisa, utilizaremos a teoria dos registros de representação semiótica na análise de livros e na análise da organização didática.

Na análise dos livros, investigamos como os autores mobilizaram os registros de representação e fizeram uso de reconfigurações para demonstrar as propriedades dos quadriláteros.

Na organização didática, são propostas tarefas de construção geométrica em que os enunciados se encontram em registro da língua natural, solicitando apreensão sequencial no momento em que os alunos farão a conversão da representação para o registro figural. Na justificativa da construção são solicitadas apreensões perceptivas, discursivas e operatórias.

A organização didática que elaboramos foi modelada em termos de tarefas que solicitam de os alunos efetuar a conversão da representação no registro em língua natural para o registro figural e justificar as técnicas utilizadas nessa conversão. Acreditamos que a identificação das técnicas e do discurso teórico-tecnológico que as fundamenta permite analisar se os alunos mobilizam os diferentes registros de representação, destacando a congruência e a não congruência entre eles. Além disso, pretendemos com essa organização analisar se os alunos distinguem e relacionam as apreensões perceptivas e discursivas, possibilitando verificarmos se nossa organização didática contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar logicamente em geometria.

As tarefas propostas possibilitarão aos alunos conjecturar sobre as figuras, o que nos permitirá analisar se eles vivenciam as fases de ação, formulação e validação e se esse processo contribui para ampliar seus conhecimentos sobre o objeto ‘quadrilátero’.

Selecionamos essas teorias por acreditarmos que, quando articuladas, podem subsidiar nossa análise dos diferentes fatores didáticos ou cognitivos que influenciam as dificuldades que os alunos vivenciam ao trabalharem com demonstrações geométricas.

2.2 Aspectos metodológicos

Visto que nosso objetivo de pesquisa gira em torno da realização de uma intervenção didática baseada em trabalho experimental, elegemos como metodologia de pesquisa a engenharia didática, abordagem que está baseada nos trabalhos de Artigue (1996).

Construída no âmbito da didática da matemática no início dos anos 1980, a engenharia didática, segundo Artigue (1996), foi assim batizada por analogia com o trabalho de um engenheiro que:

> [...] para realizar um projeto preciso, se baseia em conhecimentos científicos de seu domínio e aceita submeter-se a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar com objetos muito mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar na prática, com todos os meios disponíveis, problemas pelos quais a ciência não quer ou não pode se responsabilizar. (p. 243, tradução nossa)

A engenharia didática se fundamenta na teoria das situações didáticas, de Brousseau (1986), e tem dupla função: é tanto de produção para o ensino, baseada em resultados de pesquisas, quanto metodologia de pesquisa. Como metodologia de pesquisa, caracteriza-se primeiramente, segundo Artigue (1996, p. 247), “por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino”. Outra característica dessa metodologia é a de ser um modelo de experimentação em classe, com uma particularidade: a de situar-se “no registro de estudo de caso cuja validação é essencialmente interna, baseada na confrontação entre a análise *a priori* e *a posteriori*” (ARTIGUE, 1996, p. 248).

O processo experimental dessa metodologia se distribui em quatro fases: análises preliminares; concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*; e validação.

Descreveremos a seguir cada fase, considerando o tema de nossa pesquisa:

A **análise preliminar** é a fase em que buscamos os fundamentos teóricos para a concepção da engenharia. Segundo Artigue (1996), nessa fase se analisam as dimensões epistemológica, cognitiva e didática do saber em jogo.

Os estudos preliminares de nosso trabalho tiveram início com um levantamento da literatura nacional e internacional sobre demonstrações e provas em geometria, onde buscamos um norte para a pesquisa, situando-nos quanto ao objeto a ser pesquisado e confirmando a relevância do tema.

Em seguida procedemos a um levantamento de aspectos epistemológicos da demonstração, em que definimos as concepções de prova e demonstração adotadas nesta pesquisa e selecionamos as teorias de apoio.

Traçamos algumas considerações a respeito da demonstração na formação inicial; selecionamos e analisamos os principais livros de geometria indicados nos programas de disciplinas de algumas universidades brasileiras, os quais foram analisados com o objetivo de verificar como as demonstrações relativas ao objeto matemático quadrilátero estão apresentadas nesses livros; e investigamos as concepções que os alunos do curso de licenciatura em matemática em uma universidade no estado da Bahia têm a respeito de demonstrações e provas.

Esses estudos nos permitiram delimitar nossa problemática, definir nosso objetivo de pesquisa e formular questões que norteiam a presente investigação.

A **concepção e análise *a priori*** é a fase em que a sequência é concebida e analisada considerando as variáveis fixadas que serão manipuladas pelo pesquisador de acordo com as análises preliminares. Segundo Artigue (1996), o objetivo da análise *a priori* é elucidar como a escolha dessas variáveis, sejam gerais ou específicas ao conteúdo, permite controlar os comportamentos dos alunos, bem como revelar o significado de cada um desses comportamentos.

Almouloud (2010) expõe que tais variáveis são analisadas em três dimensões: a epistemológica, a didática e a cognitiva, e salienta que a "análise *a priori* é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema" (p. 176).

Nossa sequência didática foi adaptada em função de problemas detectados na análise preliminar e, em sua versão definitiva, aplicada em um ambiente de construções geométricas (papel e lápis) utilizando instrumentos (esquadros, régua e compasso). Suas tarefas buscam proporcionar momentos de ação, formulação e validação, visando gerar um ambiente propício para que os alunos adquiram conhecimento de forma autônoma, como proposto por Brousseau. Nessa perspectiva, a sequência tem os seguintes objetivos:

- Realizar a devolução do problema proposto, fazendo com que os integrantes do grupo pesquisado o aceitem e possam vivenciar momentos de ação, de formulação e de validação.
- Fazer com que o aluno identifique e saiba utilizar os termos inerentes ao sistema dedutivo.
- Habilitar o aluno a efetuar conversões de representação.
- Provocar a passagem da apreensão perceptiva para a apreensão discursiva.
- Habilitar o aluno a usar as propriedades (condições necessárias e/ou suficientes) em suas justificativas para levá-los a validar suas conjecturas.
- Frente às dificuldades geométricas detectadas na análise preliminar, pretendemos aperfeiçoar os conhecimentos geométricos do grupo pesquisado referentes a quadriláteros.
- Apresentar aos alunos outras funções da prova, além de validar resultados.

A **experimentação** é a realização da engenharia – no presente caso, a aplicação da organização didática.

Nossa sequência foi aplicada, com a presença da pesquisadora-observadora, a um grupo de 12 alunos do curso de licenciatura em matemática investigado. O experimento foi realizado em seis semanas, totalizando 18 h (um encontro de 3 h a cada semana).

Os dados foram coletados por meio de anotações escritas e recursos audiovisuais.

O papel da pesquisadora na aplicação da sequência foi o de observar e intervir de modo a provocar debates, a fim de promover o progresso na aquisição individual do conhecimento, sem, porém, prejudicar o processo de aprendizagem do aluno (ALMOULOUD, 2010).

A **análise *a posteriori*** se baseia nos dados coletados durante a aplicação da sequência. Nessa fase os registros são analisados à luz da teoria adotada. Essa análise é posteriormente confrontada com a análise *a priori*.

A **validação** (ou refutação) das hipóteses levantadas nas análises preliminares se dá após a confrontação dos dados das análises *a priori* e *a posteriori*.

Seguindo os passos da engenharia didática, apresentaremos no próximo capítulo nosso estudo das concepções dos estudantes pesquisados a respeito de provas e demonstrações e analisaremos os livros didáticos selecionados.

CAPÍTULO 3 – ESTUDO DE CONCEPÇÕES DE ALUNOS E DAS ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS PROPOSTAS EM LIVROS DIDÁTICOS

Este capítulo está dividido em dois tópicos. O primeiro traz um estudo das concepções dos estudantes do curso de licenciatura em matemática pesquisado, a respeito de provas e demonstrações. No segundo analisamos livros didáticos adotados em cursos de licenciatura em matemática de algumas universidades brasileiras.

3.1 Análise das concepções de alunos

O conhecimento e as crenças de alunos e professores a respeito de provas e demonstrações são fatores a considerar ao se promover uma intervenção para o ensino desses objetos (KNUTH, 2002).

Estudos como os de Ponte (1992), de Knuth (2002) e de Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007) investigaram as concepções de estudantes e professores. Balacheff (1988) acredita que as concepções de prova e seu papel nos processos de ensino e de aprendizagem são fundamentais para um bom desempenho dos alunos. Para Ponte (1992):

> As concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Atuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis, pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de atuação e compreensão. (p. 1)

Nesta pesquisa, adotaremos para o termo 'concepção' a definição proposta por Artigue, que a considera como:

> [...] um ponto de vista local sobre um dado objeto, caracterizado por:
>
> - situações que lhe servem de ponto de vista de partida: situações ligadas à aparição da concepção ou para as quais ela constitui um ponto de vista particularmente bem adequado;
> - sistemas de representações mentais, icônicas, simbólicas;
> - propriedades, invariantes, técnicas de treinamento, métodos específicos (implícitos e explícitos). (ARTIGUE *apud* ALMOULOUD, 2010, p. 154)

Almouloud (2010, p. 154) completa ainda que “as concepções são modelos construídos pelo pesquisador para analisar as situações do ensino e os comportamentos cognitivos dos alunos”.

Adotando o termo ‘concepção’ segundo Artigue, procuramos fazer um levantamento das concepções dos alunos do curso pesquisado a respeito de demonstrações e provas em matemática, buscando subsídios para elaborar nossa sequência de ensino. Para tanto, elaboramos um questionário contendo 14 questões e o aplicamos a esses alunos, visando investigar:

- a experiência dos alunos com demonstrações e com geometria na formação básica;
- seu conhecimento a respeito de um sistema dedutivo e de seus elementos;
- suas concepções de provas e demonstrações;
- a importância que atribuem ao raciocínio dedutivo;
- sua opinião sobre sua própria autonomia para ensinar provas a seus futuros alunos;
- sua opinião sobre a proposta dos livros de geometria indicados em seu curso.

3.1.1 Análise do questionário

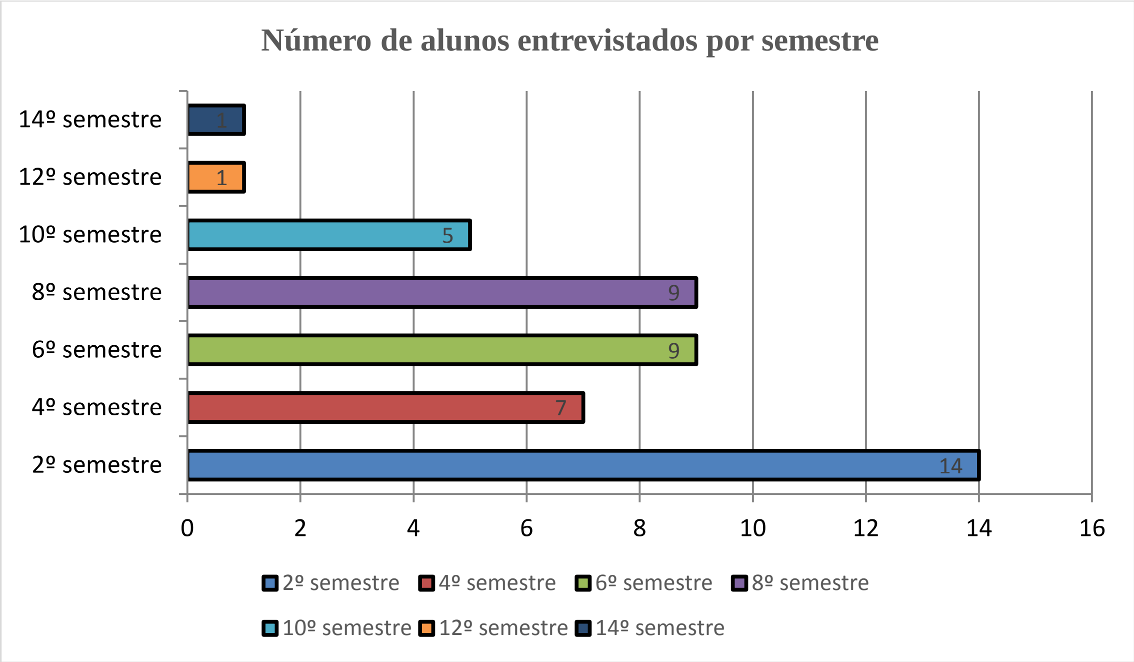
Foram distribuídos 80 questionários, dos quais apenas 45 foram respondidos.

O critério utilizado para selecionar os alunos que responderiam ao questionário foi o de que deveriam já ter concluído a disciplina ‘Geometria plana’. Portanto, todos eles já haviam concluído ou estavam concluindo o 2.º semestre.

O questionário se compunha de sete questões objetivas com opções *sim* e *não*, contendo espaço reservado para comentários sobre a resposta; quatro questões abertas em que o aluno era solicitado a expressar seus conhecimentos sobre o sistema dedutivo, seus elementos e a importância atribuída a estes; e três questões específicas de geometria, envolvendo conhecimentos sobre o método dedutivo.

Inicialmente solicitou-se aos alunos que informassem o semestre que cursavam (Figura 3). Como o questionário foi aplicado no final do 2.º semestre de 2013, o semestre indicado foi considerado concluído.

Figura 3. Número de alunos por semestre.



Fonte: Dados do questionário.

Observemos que, quanto mais elevado o semestre, menor é o número de alunos que responderam o questionário. Conjecturamos que isso se deva ao menor número de alunos que concluem o curso ou à insegurança em mostrar seus conhecimentos. O Quadro 4 explicita as respostas dos alunos referentes às questões objetivas.

Quadro 4. Respostas às questões objetivas.

Questões	Sim	Não
1. Você estudou geometria durante algum período da educação básica?	28	17
2. Caso sua resposta tenha sido “sim” na questão anterior, responda: Você foi envolvido em algum trabalho que exigisse demonstrações nas aulas de geometria na educação básica?	5	23
3. Na graduação, foi envolvido em algum trabalho que exigisse demonstrações na disciplina ‘Geometria plana’?	36	9
4. Você sabe o que é um sistema dedutivo?	28	17
5. Você se sente preparado para ensinar demonstração a seus futuros alunos?*	11	31
6. Os livros de geometria indicados no programa da disciplina ‘Geometria plana’ oferecem uma proposta que permita a você compreender as demonstrações?**	29	11
7. Em sua opinião, a demonstração de um teorema ajuda a esclarecê-lo?***	38	4

*Três alunos não responderam. **Cinco alunos não responderam. ***Três alunos não responderam.
Fonte: Dados da pesquisa.

As duas primeiras perguntas versavam sobre a experiência com geometria e demonstrações durante a formação básica. Observamos que, em sua maioria, os respondentes (28) estudaram geometria em algum momento da educação básica, mas não estiveram envolvidos em atividades que exigissem demonstrações. Esse resultado corrobora os de pesquisas como a de Nasser e Tinoco (2003) quanto à ausência de demonstrações na educação básica.

Na graduação, por sua vez, os respondentes afirmaram majoritariamente (36) haver se envolvido em trabalhos que exigissem demonstrações. Os comentários relacionados às respostas afirmativas, em sua maioria, se assemelham, atestando que a disciplina é basicamente composta de demonstrações. Alguns exemplos:

1. *Toda a disciplina geometria plana foi baseada em demonstrações.*
2. *Na matéria geometria plana usamos demonstrações a todo momento, em atividades e prova.*

Os alunos também comentam que a ausência de demonstrações na formação básica, em um ensino em que o rigor é privilegiado, causa dificuldades à aprendizagem desse procedimento, como evidenciam estes comentários:

3. *Demonstração é o que mais dificulta a matéria por não ter visto durante a educação básica.*
4. *Foi o que mais vi, apresentei uma dificuldade enorme, pois nunca havia visto na educação básica.*
5. *Foi um impacto muito grande, pois não tinha nenhuma ideia de como fazer uma demonstração.*

Dentre os que afirmaram não haverem tido contato com demonstrações na disciplina ‘Geometria plana’, poucos comentaram. Os comentários, porém, evidenciam que as demonstrações eram feitas pelo professor, e o aluno não se sentiu envolvido no processo ou esperava alguma verificação empírica do que foi demonstrado. Os comentários abaixo confirmam nossa afirmação:

6. *Nós assistíamos aula e fazíamos prova que normalmente não caiam demonstração.*
7. *Não teve nenhuma demonstração na prática e sim na teoria.*

A resposta 7 traz indícios de que o aluno não distingue uma demonstração de uma prova baseada em argumentos empíricos. Resultado como este foi obtido por Ordem (2015), que constatou que os alunos atribuíram o mesmo valor a uma prova baseada em argumentos empíricos e a uma prova matemática.

A afirmação de que *não teve nenhuma demonstração na prática e sim na teoria*, nos permite conjecturar também que este aluno esperava uma aplicação prática do que foi demonstrado. Almouloud (2007) faz uma reflexão sobre prova e demonstração em matemática a partir de análise de um trabalho realizado com professores do ensino fundamental e observou que os professores apresentam uma grande preocupação em dar sentido prático a tudo que é feito em matemática. O autor acrescenta ainda que essa preocupação do professor indica que para este profissional, só tem valor em matemática aquilo que apresenta uma aplicação imediata em uma situação do cotidiano. Almouloud (2007) sinaliza a necessidade de se criar condições que promovam mudanças neste tipo de concepção para que os professores proporcionem aos seus alunos condições que lhes permitam raciocinar e demonstrar.

Quanto ao que vem a ser o método dedutivo, a maioria dos respondentes (28) afirma conhecê-lo. No entanto, ao solicitarmos que expressassem seu significado, obtivemos respostas dando indícios de que os alunos não estão certos do que vem a ser esse método, embora façam referência a algum de seus elementos.

Algumas dessas respostas:

1. *Sistema dedutivo é aquele que se inicia com um pensamento e gera axiomas, postulados que podem ser provados.*
2. *O sistema dedutivo na minha opinião é um sistema através de demonstração.*
3. *Acho que é o passo-a-passo da demonstração.*
4. *É tentar deduzir uma coisa que já sabemos. Mas, tentar provar como chegar.*

A resposta 1 evidencia que, além de não estar certo sobre que vem a ser o método dedutivo, o aluno tem uma ideia equivocada dos significados de axioma e postulado, associando estes termos a algo que precisa ser provado.

Apenas cinco respostas se aproximaram do significado do método dedutivo:

1. *O que deduz a partir de axiomas ou postulados, ou seja, é feito a partir de algo já provado.*
2. *É um sistema feito a partir de algo já provado ou que foi aceito como verdade.*
3. *Sistema lógico que apresenta um resultado, partindo de proposições e teoremas anteriores.*
4. *É o sistema que consiste na utilização de determinados conceitos e propriedades para se chegar a possíveis resultados.*
5. *Sistema dedutivo são formas de verificar, de provar elementos da geometria com axiomas e postulados que são parâmetros que jamais vieram a ser provados dentro da geometria.*

Quanto à autonomia dos licenciandos para ensinarem demonstrações a seus futuros alunos, constatamos que a maioria (31) se sente insegura para essa prática. O Quadro 5 mostra a distribuição das respostas por semestres cursados.

Quadro 5. Autonomia percebida pelos licenciandos para ensinarem demonstrações, por semestres cursados.

Semestres cursados	Sim	Não
2	2	11
4 a 6	2	14
Mais de 6	7	9

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que, embora o número de alunos que não se dizem preparados para ensinar demonstrações caia entre os que já contam com mais de seis semestres de curso, esse número supera o dos alunos que se consideram preparados. Podemos notar que com três anos de estudo os licenciandos já tenham cumprido 75% do curso, 34 alunos não se sentem preparados para ensinar demonstrações a seus futuros alunos.

Vejamos alguns comentários de alunos que se sentem preparados para ensinar provas matemáticas:

1. *Sinto que estaria preparado! Mas, não sei se isso significa estar seguro. Nesse caso, já envolveria outras questões. [2 anos de curso]*
2. *Pois durante o meu curso aprendi a fazer e compreender a sua importância. [4 anos de curso]*
3. *Pois não será trabalhado da mesma forma que eu aprendo. [5 anos de curso]*
4. *Hoje tenho a capacidade de pegar uma demonstração do livro de ensino fundamental/médio e entender o processo e as propriedades utilizadas. [5 anos de curso]*
5. *Pois a partir do momento que aprendemos algo, temos capacidade de ensinar esse aprendizado. [6 anos de curso]*
6. *Sim, pois no que se refere a esse quesito temos uma formação sólida. [7 anos de curso]*

Verificamos que mesmo aqueles que afirmam estar preparados para ensinar demonstrações, em sua maioria, mostram insegurança, afirmando que precisam buscar formas de se preparar para essa prática ou que terão os livros didáticos como referência.

A influência do livro didático na prática da demonstração foi observada por Ordem (2015) quando investigou as concepções de alunos de licenciatura em matemática de Moçambique a respeito de provas e demonstrações. O autor observou que as provas realizadas pelos alunos investigados, apresentam estratégias que parecem ter sido influenciadas por livros didáticos. Notou ainda que estes aceitam como demonstração determinados métodos – como dobraduras ou recortes – apresentados nos livros que não constituem provas matemáticas. Na declaração 4 do aluno, observamos indícios de que este poderá ser capaz de compreender provas apresentadas em livros didáticos.

Quanto aos alunos que afirmam não estar preparados para incluir a demonstração em sua futura prática observamos que grande parte atribui esta dificuldade à complexidade da mesma. Vejamos algumas respostas apresentadas:

1. *Ainda não, sinto bastante dificuldade. [1 ano de curso]*
2. *Pois é muito difícil. [1 ano de curso]*
3. *Não estou preparada e muito menos segura. [2 anos de curso]*
4. *Por conta da formalidade. [2 anos de curso]*
5. *Pois eu não gosto de demonstração. [4 anos de curso]*
6. *Tenho muita dificuldade com demonstração, pois só vi isso aqui na faculdade. [4 anos de curso]*
7. *Posso dizer que tenho uma grande dificuldade de visualização quanto às demonstrações. [5 anos de curso]*
8. *Tenho grande dificuldade em iniciar uma demonstração, então não sei como farei isso se não sei dar um ponto de partida. [5 anos de curso]*

Fica evidenciado nas respostas de alguns alunos que as situações relacionadas às demonstrações, vivenciadas por eles são as provas conceituais, segundo a classificação de Balacheff (1988), próprias das disciplinas cursadas. Diante das dificuldades explicitadas por alguns alunos, existe a possibilidade dos mesmos compararem suas dificuldades com as possíveis dificuldades dos futuros alunos e interpretar que as demonstrações não devam ser praticadas na educação básica. Esse é o pensamento dos professores que participaram da pesquisa de Leandro (2012) que acreditam não ser possível trabalhar as provas intelectuais com alunos da educação básica devido à complexidade das mesmas. O autor acredita que essa conclusão é oriunda da forma como as demonstrações são trabalhadas na formação inicial.

Percebemos também indícios de que alguns imaginam replicar a metodologia que provavelmente vivenciaram na graduação, em sua futura prática, ou seja, que irão apresentar a demonstração e seus alunos deverão compreendê-la. Observamos isto nas declarações:

1. *Não. Porque do jeito que é ensinada na Universidade os meninos não iriam entender. (3 anos de curso)*
2 *Acho que não saberia passar de maneira clara, o que iria dificultar o entendimento. (3 anos de curso)*

Observamos que outras pesquisas obtiveram resultados semelhantes, a exemplo de Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007) que pesquisaram as concepções de professores sobre demonstrações e provas e concluíram que os professores investigados não se sentem preparados para ensinar provas. As pesquisadoras atribuíram essa insegurança à pouca ênfase dada às provas na formação inicial e pelo fato de não encontrarem muitas atividades envolvendo esse tema nos livros didáticos. Afirmam ainda que na formação inicial dos participantes da pesquisa não foram contemplados aspectos pedagógicos relacionados ao ensino e a aprendizagem de provas, apropriados para alunos da educação básica.

Para que os alunos de licenciatura possam compreender e ensinar provas matemáticas, acreditamos que estas devam ser praticadas nos cursos de licenciatura, devendo os licenciandos tomar conhecimento das diferentes funções e diferentes níveis de prova. Nesse sentido, Pietropaolo (2005) acredita que para o licenciando desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo e também incluir demonstração em sua prática futura, esses cursos devem imprimir às demonstrações um caráter mais amplo. Em sua opinião, a demonstração, além de utilizada em uma perspectiva matemática, deve ser focalizada sob uma perspectiva didática, curricular e histórica.

Os livros são ferramentas que apoiam professores e alunos. Inquirindo se os livros utilizados pelos licenciandos estão cumprindo seu papel, constatamos que na opinião da maioria dos respondentes (29) os livros de geometria indicados oferecem uma proposta que lhes permite compreender as demonstrações. Embora os alunos afirmem satisfação com o livro, a maioria dos comentários deixa dúvidas quanto a essa afirmação, como pode ser observado nos seguintes excertos de alunos que se dizem satisfeitos:

1. *Tive um pouco de dificuldade devido a defasagem da educação básica. Mas quase sempre conseguia compreender, só não conseguia demonstrar algumas vezes.*
2. *É importante a obtenção de novos autores.*
3. *Com o auxílio do professor acredito que sim.*
4. *Mas precisaria de uma disciplina anterior que trabalhasse com demonstrações.*
5. *Em partes. As vezes um pouco confuso para mim, por falta de base no ensino médio que não me permitia enxergar algumas coisas.*

Podemos notar, diante das respostas dos alunos, que estes atribuem as dificuldades em compreender as demonstrações apresentadas nos livros utilizados, às suas próprias limitações. E alguns atribuem estas dificuldades às lacunas oriundas da educação básica. Nesse sentido Nasser e Tinoco (2003) chamam a atenção para a forma como as aulas de matemática estão sendo ministradas na maioria das escolas brasileiras, nas quais não estão sendo priorizadas atividades que preparem os alunos para o domínio do processo dedutivo. As autoras afirmam ainda terem constatado que “os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias” (p. 1).

Na resposta 1 o aluno afirma conseguir compreender a demonstração, no entanto, nem sempre consegue realiza-la. Duval (2012) aponta para a diferença entre compreender uma demonstração feita por outro e produzir uma demonstração. O autor afirma que a “atividade cognitiva de demonstração é menos simples e menos homogênea que seu produto” (p. 137).

As declarações dos alunos apresentam indícios de que a abordagem da demonstração vivenciada por estes, foi a reprodução das demonstrações encontradas nos livros ou apresentadas pelo professor. A resposta 3 apresenta indícios de que a relação entre a demonstração e o aluno é intermediada pelo professor. Isto é, que o papel do professor é traduzir para o aluno as demonstrações que constam nos livros sem que o aluno assuma um papel ativo diante das atividades de demonstrações.

Os alunos sentem necessidade de um livro que lhes sirva realmente de apoio na ausência do professor. A maioria dos livros de geometria voltados ao ensino superior segue os padrões de fundamentos da geometria propostos por Hilbert, com estrutura formal, o que pode causar dificuldades no início do curso.

Vejamos agora alguns comentários de alunos que não estão satisfeitos com os livros indicados:

1. *Textos resumidos que pulam explicações.*
2. *Porque deveria se aprofundar mais nos assuntos abordados em sala de aula.*
3. *Acredito que poderíamos ter livros com abordagens mais detalhadas.*

4. *Por ser a primeira disciplina que utiliza e em que vemos axiomas, provas, demonstrações, seria interessante um livro que trouxesse as demonstrações passo a passo, para poder ajudar o aluno estudar.*
5. *As demonstrações para os autores são sempre triviais e não explicam passo a passo para melhorar o nosso entendimento.*
6. *São livros alguns muito avançados para nós que viemos de escolas públicas.*

Na opinião desses respondentes, o livro não está realizando seu papel de servir de apoio ao aluno.

Podemos observar que os alunos justificam a insatisfação quanto aos livros, ao fato de estes não apresentarem textos detalhados. Aparentemente, julgam como um bom livro àquele que traz demonstrações compreensíveis.

Comungamos que, mais que verificar uma veracidade, a demonstração de um teorema tem a função de convencer o aluno e explicar-lhe o porquê de sua validade. Questionados se a demonstração de um teorema os ajuda a esclarecê-lo, a maioria dos alunos (38) respondeu positivamente. Alguns deles, mesmo declarando concordar que a demonstração esclarece o teorema, expressam sentir dificuldade no processo de demonstração, como atestam os seguintes comentários:

1. *Primeiro elas dificultam, complicam, mas no propósito geral ela ajuda a esclarecer.*
2. *A dificuldade é demonstrá-lo.*
3. *Pois quando demonstramos um teorema, vemos o porquê das coisas.*

Buscando identificar os conhecimentos dos licenciandos sobre elementos do sistema dedutivo e sobre provas e demonstrações, perguntamos na questão 8 o que o aluno entende por axioma, postulado e teoremas.

Observamos que a maioria dos respondentes tem noção do que seja um axioma, caracterizando-o como algo que podemos admitir como verdade sem demonstração ou dando ideia de ponto de partida de um sistema. Apenas três alunos consideraram que o axioma deve ser demonstrado e sete não responderam, o que totaliza 10 alunos que não atribuem ao axioma nenhuma de suas características. Apenas 10 alunos consideraram axioma como sinônimo de postulado ou caracterizaram postulado como algo que não necessita de demonstração. Sete alunos confundiram postulado com lema ou corolário. Estes sete alunos mostram ter mais familiaridade com o termo ‘axioma’ que com a palavra ‘postulado’. Uma hipótese seria o fato de que ‘axioma’ é termo que consta nos livros de geometria por eles utilizados. Outra seria o fato de fazerem relação com os axiomas de Euclides. Vinte e dois alunos relacionam teorema com algo que necessita de demonstração. Seguem algumas respostas que confirmam nossa visão:

1. *Axiomas: ideias primitivas, não é necessário provar. Tomamos como verdade;*
   Teorema: É necessário provar para perceber o resultado;
   Postulado: É como se fosse um axioma. Na verdade, é um axioma.

. *Axioma e postulado são admitidos como verdade sem precisar ser provados. Já os teoremas precisam ser provados.*

3. *Axioma é uma proposição que não tem demonstração.*
4. *Axioma: verdade absoluta;*
   Postulado: definição ou que se diz do teorema;
   Teorema: conjunto de propriedades que precisam ser demonstradas.
5. *Axioma: uma verdade que não é necessário provar;*
   Postulado: antecipa o teorema;
   Teorema: algo que precisa ser demonstrado.
6. *Axioma: uma afirmação primitiva que tomamos como verdade;*
   Postulado: uma consequência advinda de um axioma;
   Teorema: algo que podemos demonstrar usando definições e propriedades.
7. *Axioma, postulado e teorema são elementos da Geometria que tem como função provar e demonstrar as informações acerca da Geometria onde estes elementos serão investigados quanto a sua veracidade.*
8. *São coisas que alguém descobriu e apenas aceitamos. Pois não é necessário prová-los.*
9. *Axioma, tomado como verdade. Postulado, igualmente como os axiomas são tomados como verdade e os teoremas são definições, embasadas nos axiomas e postulados, que podem ser provados por demonstração.*

Podemos ainda observar que, apesar de identificarem características peculiares a esses termos, os alunos utilizam expressões imprecisas (*"é algo que..."*, *"é uma ideia que..."*, *"são definições..."*, *"tomado como..."*, *"são coisas..."* etc.) ao tentarem formular suas definições. Tal fato nos leva a inferir que os alunos tiveram contato com abordagens axiomáticas das disciplinas sendo que este método não foi apresentado, mas apenas utilizado.

Na questão 9, perguntamos sobre as concepções de provas e demonstrações apresentadas pelos alunos, 19 dos quais afirmaram haver diferença entre demonstração e prova, enquanto 21 não consideram haver diferença e cinco não responderam.

Os que afirmam haver diferença entre esses objetos os definiram por meio de uma de suas funções. O Quadro 6 apresenta os resultados observados.

Quadro 6. Concepções dos alunos sobre demonstração e prova.

Não há diferença entre demonstração e prova	
Demonstração com função de:	Verificação
	Explicação
	Sistematização
	Sistematização e verificação
	Não definiu

Fonte: Dados da pesquisa.

A maioria dos respondentes que não vê diferença entre demonstração e prova define demonstração como um método de validar uma afirmação. Conceber a demonstração apenas com a função de validação pode não ser motivador, uma vez que, na maioria das vezes, antes de demonstrar uma proposição, já temos consciência de sua veracidade, segundo De Villiers (2001), Hanna, Jahnk e Pulte (2010) e Nasser e Tinoco (2003). Mesmo estudantes de níveis mais elevados, ficam mais convencidos de uma afirmação por meio de verificações empíricas do que por demonstrações (REID; KNIPPING, 2010; JAHNKE, 2008).

Algumas respostas confirmam nossa análise:

1. *[...] a veracidade ou não de uma afirmação, fazendo uso das propriedades. Não existe diferença entre provar e demonstrar em matemática.*
2. *Demonstrar e provar são as mesmas coisas, ou seja, mostrar que uma afirmação é falsa ou verdadeira, através de dados verdadeiros e consistentes.*
3. *Demonstrar e provar é mostrar com bastante clareza que aquela questão pedida está correta ou não.*
4. *Demonstração é uma prova de que algo é válido ou não. Em matemática não há diferença entre demonstrar e provar.*

Atribuindo à demonstração a função de explicação, alguns alunos afirmam que:

1. *Provar e demonstrar é saber como se chega no resultado. E não existe diferença entre demonstrar e provar.*
2. *Mostrar o porquê de algo ocorrer. Para mim, provar e demonstrar na matemática dá no mesmo.*

Com função de sistematização, outro aluno afirma que:

1. *Até agora aprendi que demonstrar e provar são a mesma coisa, ou seja, vamos utilizar axiomas, teoremas já demonstrados para demonstrar alguma coisa.*

Com função de sistematização e verificação, um aluno aponta que:

1. *Demonstrar é descrever o caminho para uma dada afirmação utilizando os axiomas e as regras de inferências e algumas vezes utiliza-se de outros teoremas. Demonstração é uma prova de que é verdade um teorema.*

Pudemos observar também, em nossa pesquisa, a desmotivação para a prática da demonstração, como pode ser observado na seguinte afirmação:

1. *Nunca consigo provar nada, então não vejo significado nenhum. Acho tudo isso uma tortura.*

Quanto aos alunos que acreditam haver diferença entre demonstração e prova, elaboramos o Quadro 7, que categoriza o significado desses objetos segundo a concepção dos alunos.

Quadro 7. Diferenças entre prova e demonstração, na concepção dos licenciandos.

Demonstrar	Provar
Dar resultado. Mostra de onde e como surgiu.	Mostrar o resultado exato, sem nenhuma exigência.
É generalizar.	Tornar explícito o que está implícito dentro de nós.
Explicar passo a passo em como se chegou a existência de algo.	Mostrar que algo existe.
Detalhar porque aquele problema é assim.	Mostrar o porquê ele é exato.
Obter um panorama de algo.	Mostrar que algo é verdadeiro.
Relatar de que forma isto já foi provado.	É algo que ainda deveria ser comprovado quanto à sua veracidade.
Precisa provar por que a tese é verdadeira e provar por que não é falsa, esgotando todas as possibilidades de dúvidas.	Para provar, basta usar algum recurso que prove o que queremos afirmar.
Vale para todas as situações.	Provar é só um exemplo.
É um conjunto de ideias que provam uma determinada teoria.	É usar um exemplo qualquer.
É provar aquilo que se sabe.	É pôr em prática.
Utilizar ferramentas para chegar a certo resultado.	Sair de uma hipótese e chegar a uma tese preestabelecida.
Abrange um conhecimento maior.	Está mais relacionado a um problema isolado.
Utiliza conhecimentos prévios para garantir a afirmação.	É mostrar na prática.
Pode-se usar informações e figuras.	Em matemática você usa informações e teoremas para informar algo.
Mostrar que um resultado é verdadeiro para qualquer situação.	É mostrar que uma situação é verdadeira.
Provar que existe para qualquer caso.	Mostrar apenas que existe.
Mostrar a validade de algum resultado em matemática.	Usar algo já demonstrado e chegar a um resultado.

Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos observar que na maioria das concepções apresentadas a prova está mais relacionada à informalidade, ao próprio convencimento por meio de argumentos empíricos. Já a demonstração está na maioria das vezes relacionada a algo mais formal ou a uma generalização. Na prova, segundo os relatos, o aluno se convence que uma afirmação é verdadeira; na demonstração convence os outros.

Com a questão 10 buscamos investigar a importância que os licenciandos atribuem ao raciocínio dedutivo enquanto alunos e enquanto futuros professores. Investigamos ainda a importância atribuída a demonstrações e provas em matemática na formação desses futuros professores e a importância que atribuem a essas ferramentas tendo em vista o aluno do ensino fundamental.

Apenas um respondente afirmou não atribuir importância no raciocínio dedutivo para seu próprio uso, declarando: *"Para mim não tem muita importância, é algo um pouco desnecessário".* No entanto, atribuiu importância ao raciocínio dedutivo para sua formação: *"Na minha formação ele é importante, pois pode nos ajudar no momento que estamos em sala de aula*".

O Quadro 8 sumariza as respostas mais frequentes apresentadas para essa questão.

Quadro 8. Opinião dos alunos sobre a importância do método dedutivo.

Qual a importância do raciocínio dedutivo para você?	**Qual a importância do raciocínio dedutivo na sua formação?**
Aumentar o conhecimento.	Aumentar o conhecimento.
Tirar proveito de resultados na resolução de problemas.	Aumentar o raciocínio lógico.
Aumentar o poder de interpretação argumentação e análise, inclusive na vida.	Ajudar na tomada de decisão na matemática e na vida.
Saber de onde vêm os resultados ou as fórmulas.	Ajudar na prática como professor.
Validar ou verificar a validade de algo.	Convencer o aluno.
8 não responderam.	11 não responderam.

Fonte: Dados da pesquisa.

A importância de se convencer e a de convencer outrem continuam evidentes. Outro destaque foi a supervalorização do resultado final e sua aplicação à resolução de problemas. Nesse sentido, De Villiers (2001, p. 33) afirma que "a prática real da investigação moderna em matemática requer uma análise mais completa das diversas funções e papéis da demonstração". O que se observa, porém, é que o interesse expresso pelos licenciandos se restringe ao uso de resultados e à função de validação.

Quanto à importância do sistema dedutivo para a formação, observamos o interesse dos respondentes em mostrar conhecimento e segurança diante de seus futuros alunos, como mostras as seguintes respostas:

1. *O raciocínio dedutivo ajuda tanto na aplicação de resolução de problemas, quanto na vida em geral.*
   É importante, pois auxilia na resolução de problemas e na lógica.
2. *É eficaz para o entendimento e desenvolvimento de atividades, demonstrações. Amadurecimento do pensamento.*
   Facilita o entendimento e desenvolvimento das atividades, demonstrações.
3. *Perceber resultados através de informações reais, e com isso, se poupar de fazer grandes esforços para obter o resultado desejado.*
   Por nos ajudar a otimizar a tomada de decisão. Decisões estas no mundo da matemática, assim como no cotidiano.

4. *Auxilia no desenvolvimento lógico tanto na vida acadêmica, quanto no pessoal.*
   Para mostrar e compreender as questões matemáticas na vida profissional.
5. *Ajuda no desenvolvimento da aprendizagem de coisas novas.*
   Desenvolver minha argumentação para além do ensino, convencer os alunos da coerência do que estou falando.

Tais respostas evidenciam a importância atribuída por estes ao método dedutivo, com supervalorização da produção final, visando seu uso no futuro.

Investigamos com a questão 11 as concepções sobre o papel das provas e demonstrações na licenciatura (Quadro 9) e no ensino fundamental.

Quadro 9. Concepção do papel das provas e das demonstrações na licenciatura.

Papel das provas e demonstrações na licenciatura	Número de respostas
Oferece segurança profissional	9
Orienta nas disciplinas de graduação	1
Desenvolvimento do raciocínio lógico, interpretação	11
Explicação (saber o porquê)	11
Respostas que confundiram prova com verificação de aprendizagem	3
Não responderam	10

Fonte: Dados da pesquisa.

O Quadro 9 mostra que nove alunos têm a opinião de que as demonstrações lhes fornecem autonomia para que possam futuramente ensinar provas e demonstrações a seus alunos. Alguns respondentes chegaram a traçar comparações com as dificuldades que vivenciaram na graduação, o que evidencia que as atribuem ao fato de não terem lidado com demonstrações na educação básica. Tais aspectos são expressos nos seguintes relatos:

1. *As provas e demonstrações fazem o indivíduo pensar logicamente, usar propriedades, ler, questionar, descobrir outros caminhos até para provar a mesma coisa. Na educação básica é bom pelos mesmos motivos já citados, mas também porque ao chegar no ensino superior não será mais um susto, e o professor orienta o aluno chegar onde ele deseja e não achar a resposta pronta sem saber de onde veio.*
2. *É importante o professor saber provar aquilo que apresenta, caso ele seja questionado pelo aluno.*
3. *Fazer com que tenhamos muito mais consistência e convicção ao tirar dúvidas dos nossos alunos do ensino fundamental.*

Um respondente declarou que na graduação as provas têm importância apenas no desenvolvimento das disciplinas ministradas: *"Na minha formação ela é muito importante, pois é o que mais utilizamos em muitas disciplinas".* Esta resposta dá sinais de que, para esse licenciando, as demonstrações foram mais trabalhadas na graduação.

O desenvolvimento intelectual (em termos de desenvolvimento do raciocínio lógico e do poder de interpretação, do saber o porquê dos resultados, da função de explicação) foi apontado por 11 dos respondentes, como exemplificam as seguintes declarações:

1. *É dar subsídios necessários e suficientes para sabermos como chegamos aos resultados.*
2. *O papel da demonstração é mostrar além do que aprendemos, mostrar como conseguimos encontrar uma resposta para alguma pergunta.*
3. *Em ambos os casos deixar o conhecimento mais consistente na mente dos alunos.*
4. *A demonstração nos torna conhecedores do assunto. Conhecendo-o seremos capazes de dominá-los. A prova nos ajuda a testar nossos conhecimentos.*
5. *Ajuda a compreender o meio em que vive e melhora o raciocínio lógico.*

Quanto ao papel das provas e demonstrações na formação do aluno do ensino fundamental, temos os resultados apresentados no Quadro 10.

Quadro 10. Concepções sobre o papel das provas e demonstração no ensino fundamental

O papel da prova e demonstração no ensino fundamental	Número de respostas
Explicação (saber o porquê, a origem, de onde vieram as fórmulas ou as teorias)	14
Desenvolvimento intelectual	12
Aplicação na resolução de problemas	1
Nenhuma importância	4
Confundiram prova com verificação de aprendizagem	3
Não responderam	11

Fonte: Dados da pesquisa.

Como mostra o Quadro 10, 14 alunos acreditam que o papel das provas e demonstrações no ensino fundamental é possibilitar ao aluno saber por que as proposições são verdadeiras (função de explicação) e elucidar a origem das fórmulas e teorias. É o que expressam estas respostas:

1. *Como eu não tive no ensino fundamental, é importante o aluno saber de onde vem.*
2. *Perceber que nada é por acaso, há um fundamento por trás de tudo, na matemática as coisas não surgem do nada.*
3. *No ensino fundamental é necessário mostrar basicamente que todo conteúdo matemático tem uma razão e o motivo de sua existência.*
4. *Mostrar a eles que as fórmulas têm um porquê, que não surgiu do nada.*
5. *Participar do processo de construção do resultado, ao invés de admitirmos como verdade de maneira imediata. Tornar os alunos mais curiosos.*

O Quadro 10 ainda revela que 12 alunos acreditam que o papel das provas e demonstrações no ensino fundamental é aumentar os conhecimentos, desenvolver o raciocínio lógico dos alunos, como podemos observar nas seguintes declarações:

6. *Ajuda a compreender o meio em que vive e melhora o raciocínio lógico.*
7. *Ajuda a entender melhor os conteúdos matemáticos.*
8. *Possibilita a construção do raciocínio do aluno.*
9. *Para aprimorar os conhecimentos e trabalhar o raciocínio lógico.*

Um aluno aparentemente fez referência à importância do processo de demonstração na resolução de problemas, ao responder: "Saber aplicar as definições e teoremas em casos particulares. Proporcionar ao aluno construir seu próprio conhecimento, achando por si só maneiras mais simples de resolução". Segundo Hanna e Barbeau (2008), mais importante que permitir verificar ou explicar, o processo de demonstração fornece novos métodos, estratégias e conceitos que permitem resolver problemas.

Percebemos que quatro respondentes não vêm importância em ensinar demonstrações no ensino fundamental. Esses licenciandos fazem uso da demonstração como recurso exclusivamente técnico. Não percebendo outra finalidade da prova matemática a não ser a de verificação, não veem motivo para que esta seja ensinada no ensino básico, como pode ser observado nas seguintes declarações:

1. *Na minha formação ela é muito importante, pois é o que mais utilizamos em muitas disciplinas, mas para o aluno é algo difícil, e muitos nem sabem o que significa demonstrar.*
2. *Acho desnecessário demonstrar e provar no ensino fundamental.*
3. *Não vejo importância para o fundamental. Vejo para o graduando.*

Em relação a essas afirmações, concordamos com De Villiers (2001) quando indica que é preciso discutir outras funções da demonstração, como a função de explicação, para que professores e alunos sintam-se motivados a aprender e ensinar demonstração. Sendo a demonstração praticada com a exclusiva função de convencimento, muitos alunos e professores não percebem a necessidade de demonstrar uma vez que, na maioria das vezes, já estamos seguros da validade de um teorema quando partimos para prova-lo. Ao buscar o porquê de o resultado ser verdadeiro, isto é, a demonstração com a função de explicação, pode despertar no professor e no aluno um sentido para sua prática.

Investigamos as concepções dos licenciandos com relação ao método dedutivo, seus elementos e a importância que atribuem a esse método e às provas e demonstrações. Constatamos que esses alunos tiveram o primeiro contato com a demonstração durante graduação; utilizam o método dedutivo nas aulas de geometria, mas não estão certos de seu significado e de sua relevância. Há indícios de que esses alunos utilizam a demonstração exclusivamente como ferramenta de validação, o que justifica o fato de não diferenciarem o significado dos termos ‘prova’ e ‘demonstração’, uma vez que no âmbito da matemática estes são sinônimos, embora não o sejam no da educação matemática.

Na segunda parte do questionário, buscamos investigar aspectos da utilização do método dedutivo e da prática da demonstração.

Almouloud (2012) focalizou as dificuldades vivenciadas por professores do ensino básico em identificarem se uma proposição corresponde ou não a um teorema recíproco, além de investigar habilidade destes em distinguirem hipótese e tese em uma afirmação matemática. O pesquisador também constatou que muitos alunos só reconhecem uma afirmação como teorema se estiver redigida na forma ‘se..., então...’. Jahnke (2008) também declara que mesmo alunos universitários apresentam dificuldades em distinguir condições necessárias e suficientes em um teorema.

A fim de analisarmos o grau de dificuldade apresentado pelos licenciandos nos aspectos assinalados, solicitamos na questão 12 que destacassem a hipótese e a tese em dois teoremas, apenas um dos quais estava redigido na forma ‘se..., então...’.

Questão 12: Destaque a(s) hipótese(s) e a tese de cada proposição.

I) Se um triângulo é isósceles, então ele possui dois ângulos congruentes.
II) Retas distintas coplanares, perpendiculares a uma terceira, não se encontram.

Observamos que os alunos tiveram melhor desempenho ao identificar hipótese e tese de um teorema quando este foi apresentado na forma ‘se..., então...’. Esse resultado, já observado em nossa experiência docente, corrobora o de pesquisas como a de Almouloud, Silva e Fusco (2012).

Solicitamos também, na questão 13, que os alunos enunciassem o recíproco de um teorema dado, sendo um expresso na forma ‘se..., então...’ e outro não.

Questão 13: Enuncie o teorema recíproco dos enunciados abaixo.

I) Dado um quadrilátero em que ambos os pares de lados opostos são congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.
II) Em um losango, as diagonais são perpendiculares e se bisseccionam.

Mais uma vez, o desempenho dos alunos foi melhor quando o teorema foi enunciado na forma ‘se..., então...’.

Na questão 14 visamos identificar se, dada uma caixa de ferramentas[8], os alunos seriam capazes de produzir uma demonstração. Buscou-se investigar se eles:

- identificariam a hipótese e a tese do teorema;
- efetuariam as mudanças de representação no registro da língua natural para a representação no registro simbólico e figural.
- redigiriam corretamente a demonstração em língua natural.

Questão 14: Conhecendo:

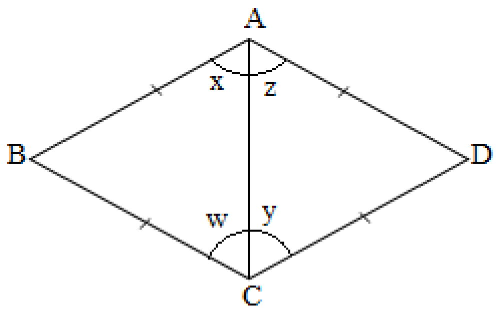
- teorema das paralelas cortadas por uma transversal;
- casos de congruência de triângulos;
- definições de paralelogramo e de losango;

demonstre que todo losango é paralelogramo.

Apresentamos a seguir as expectativas que havíamos formulado para as respostas a essa questão:

1. Espera-se que o aluno demonstre o teorema corretamente partindo das seguintes ações:
   - Fazendo a conversão da representação no registro da língua natural para o registro figural, como representado na Figura 4.

Figura 4. Representação de apoio às expectativas sobre a questão 14.



Fonte: Dados da pesquisa.

   - Destacando hipótese e tese:

$$\begin{cases} \text{Hipótese: ABCD é um losango, então } \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA} \\ \text{Tese: ABCD é um paralelogramo, isto é, } \overline{AB} // \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} // \overline{BC} \end{cases}$$

   - Considerar as duas correspondências possíveis entre os vértices *A*, *B*, *C* e *A*, *D*, *C*:

[8] Nos referimos a caixa de ferramentas no sentido introduzido por Mello (1999)

$$\begin{cases} A \leftrightarrow A \\ B \leftrightarrow D \\ C \leftrightarrow C \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} A \leftrightarrow C \\ B \leftrightarrow D \\ C \leftrightarrow A \end{cases}$$

- Utilizar o caso lado-lado-lado (LLL) de congruência de triângulos para mostrar as duas congruências entre os triângulos *ABC* e *CDA* definidas pelas duas correspondências acima. Desse modo, concluir que $\hat{x} \cong \hat{y} \cong \hat{z} \cong \hat{w}$.
- Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e concluir, a partir do fato que $\hat{x} \cong \hat{y}$ e $\hat{z} \cong \hat{w}$, que $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AD}//\overline{BC}$.
- Redigir a demonstração.

2. É provável que o aluno utilize a propriedade dos ângulos da base do triângulo isósceles e a congruência entre os triângulos *ABC* e *CDA* para mostrar que $\hat{x} \cong \hat{y} \cong \hat{z} \cong \hat{w}$ e concluir que há paralelismo entre os lados.
3. Outra possibilidade é que o aluno utilize propriedades do losango que não pertencem à caixa de ferramenta, como:
   - a diagonal $\overline{AC}$ divide os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ em ângulos congruentes;
   - os ângulos opostos do losango são congruentes;
   - as diagonais de um losango interceptam-se no ponto médio.

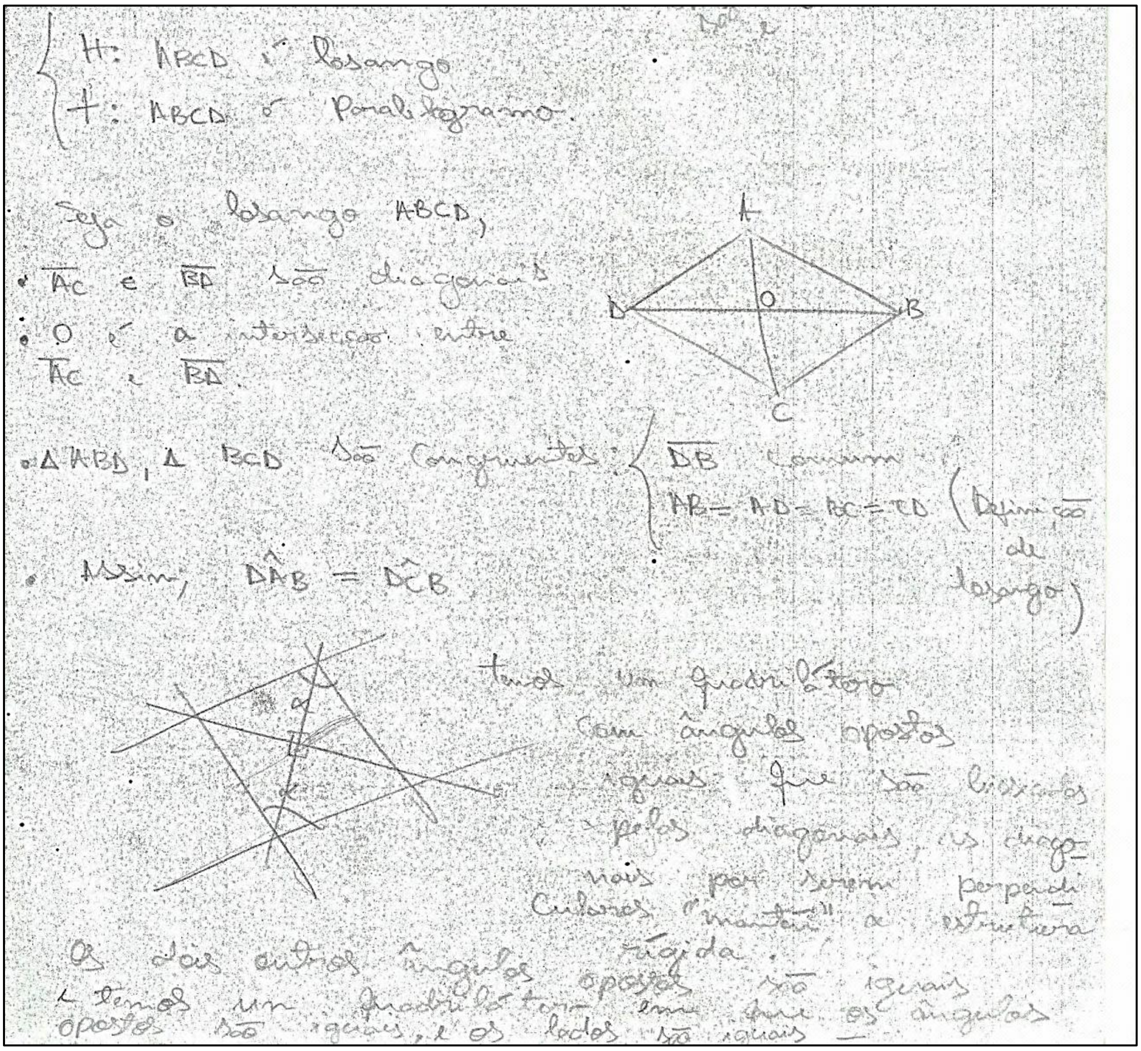
Caso consiga provar que $\hat{x} \cong \hat{y} \cong \hat{z} \cong \hat{w}$, o aluno pode ainda não usar corretamente o teorema das paralelas, uma vez que é comum no ensino básico o uso desse teorema apenas quando formulado como: “Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes”. No entanto, os alunos têm dificuldade em utilizar a formulação recíproca: “Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes, então essas retas são paralelas”. Vejamos os resultados da questão 14:

Dos 45 respondentes, apenas 14 apresentaram respostas escritas, das quais selecionamos aquelas que continham algum esboço de solução. Estabelecemos os seguintes indicadores para análise:

- Efetuou a conversão da representação do registro da língua natural para o registro figural?
- Destacou hipótese e tese?
- Utilizou corretamente as definições de losango e paralelogramo?
- Mostrou que $\hat{x} \cong \hat{y} \cong \hat{z} \cong \hat{w}$? De que forma?
- Mostrou que os lados do losango são paralelos? De que forma?
- Redigiu corretamente a demonstração?

Dos 14 alunos que ofereceram respostas escritas, 13 efetuaram a conversão da representação do registro da língua natural para o registro figural. Destes, 10 traçaram as duas diagonais do losango, um indicou simbolicamente que estas se interceptam no ponto médio de ambas e seis indicaram que as diagonais são perpendiculares. Evidenciaram no registro figural o provável uso de propriedades que não pertencem à caixa de ferramentas. Apenas um aluno fez a representação no registro figural esperada, porém sem dar continuidade à questão. Esses alunos já utilizaram propriedades do paralelogramo que não pertencem à caixa de ferramentas. Dos 14 que apresentaram algum esboço de solução, apenas dois destacaram hipótese e tese e apenas um o fez corretamente. Os demais não deram continuidade à resposta ou empreenderam a demonstração sem destacar esses elementos. Apenas seis alunos deram continuidade à resposta. Vamos analisar o desenvolvimento de cada um deles.

Figura 5. Resposta do aluno I à questão 14[9].



Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 5 podemos observar que o aluno I destacou corretamente a hipótese e a tese do problema, embora este não estivesse enunciado na forma 'se..., então...'. Efetuou a conversão da representação no registro da língua natural para o figural e mostrou conhecer a definição de losango como quadrilátero de lados congruentes. Esse aluno, embora tenha fracionado o losango em quatro triângulos, mostrou utilizar outra reconfiguração ao

---

9 Transcrição:
H: ABCD é losango
T: ABCD é paralelogramo
Seja o losango ABCD, $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *são diagonais; O é a interseção entre* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$*; ΔABD, ΔBCD são congruentes:* $\overline{DB}$ *comum; AB ≡ AD e BC ≡ CD (definição de losango)*
Assim $D\hat{A}B \equiv D\hat{C}B$
Temos um quadrilátero com ângulos opostos iguais que são ligados pelas diagonais, diagonais que são perpendiculares, mantendo uma estrutura rígida. Os dois outros ângulos opostos são iguais e temos um quadrilátero em que os ângulos opostos são iguais e os lados são iguais.

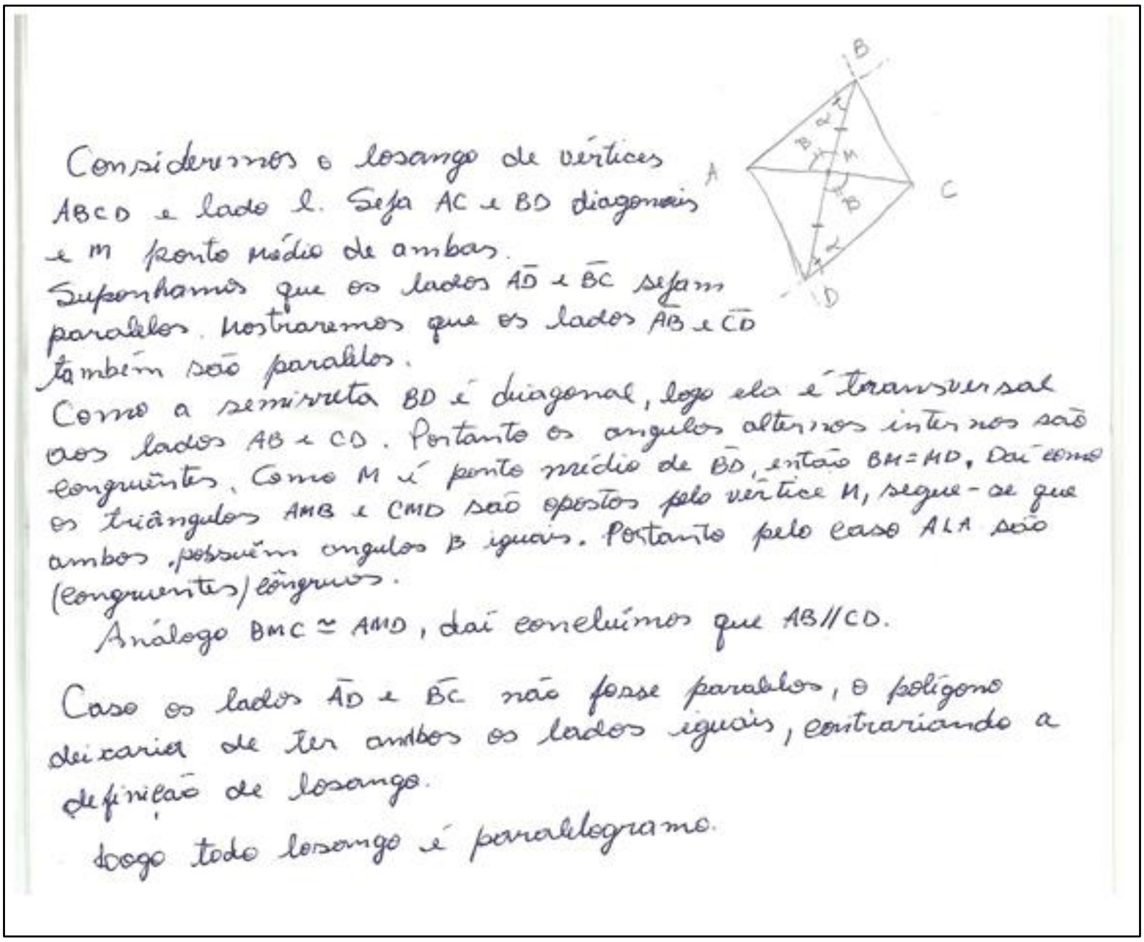
demonstrar que os triângulos *ABD* e *BCD* são congruentes. Utilizou corretamente a congruência de triângulos para mostrar que os ângulos opostos de *ABCD* são congruentes. Apesar de não concluir que *ABCD* é um paralelogramo, o aluno finalizou afirmando que *ABCD* apresenta ângulos opostos congruentes, condição para que um quadrilátero seja paralelogramo. Além disso, por meio de representação figural e discursiva, evidenciou conhecer outras propriedades do losango, como a perpendicularidade entre as diagonais. A resposta evidenciou que o aluno conhece os significados de hipótese e tese, bem como a definição de losango e algumas de suas propriedades. A análise da demonstração efetuada por esse aluno evidencia que a restrição imposta pela caixa de ferramentas talvez tenha sido um obstáculo à finalização de sua demonstração.

O aluno II, por sua vez, converteu o problema à representação no registro figural e efetuou uma reconfiguração que julgou conveniente para realizar sua demonstração, como pode observado na Figura 6. Cabe observar que esse aluno não destacou a hipótese e a tese do problema.

O aluno evidenciou conhecer que o losango possui lados congruentes, ao escrever *"considerando o losango de vértices ABCD e lado l"* embora não tenha representado corretamente os vértices do losango. Além disso, tomou como hipótese o paralelismo entre dois lados do losango e afirmou que, em caso contrário, este deixaria de ter os lados congruentes. Admitindo esta hipótese e o teorema das paralelas, mostrou a congruência dos triângulos *ABM* e *CDM* e, ao escrever *"Análogo BMC ≅ AMD, daí concluímos que AB//CD"*, sinalizou a necessidade de mostrar também a congruência dos triângulos *BMC* e *AMD*, embora não deixando claro sob quais hipóteses. Embora tenha demonstrado corretamente a congruência dos triângulos *ABM* e *CDM*, as hipóteses consideradas já tornariam o losango um paralelogramo.

A análise da produção desse aluno nos permite inferir que ele mostra conhecer a definição de paralelogramo, ao evidenciar a necessidade de mostrar que os lados opostos do losango são paralelos para que este seja um paralelogramo. Mostra também o conhecimento de algumas propriedades do losango, como a de diagonais que se interceptam no ponto médio de ambas, porém não articulou corretamente as propriedades e definições relacionadas ao problema de modo a obter êxito na demonstração.

Figura 6. Resposta do aluno II à questão 14.



Considerimos o losango de vértices ABCD e lado l. Seja AC e BD diagonais e M ponto médio de ambas.

Suponhamos que os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ sejam paralelos. Mostraremos que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ também são paralelos.

Como a semirreta BD é diagonal, logo ela é transversal aos lados AB e CD. Portanto os ângulos alternos internos são congruentes. Como M é ponto médio de $\overline{BD}$, então BM=MD, Daí como os triângulos AMB e CMD são opostos pelo vértice M, segue-se que ambos possuem ângulos β iguais. Portanto pelo caso ALA são ~~(congruentes)~~ côngruos.

Análogo BMC ≃ AMD, daí concluímos que AB//CD.

Caso os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ não fosse paralelos, o polígono deixaria de ter ambos os lados iguais, contrariando a definição de losango.

Logo todo losango é paralelogramo.

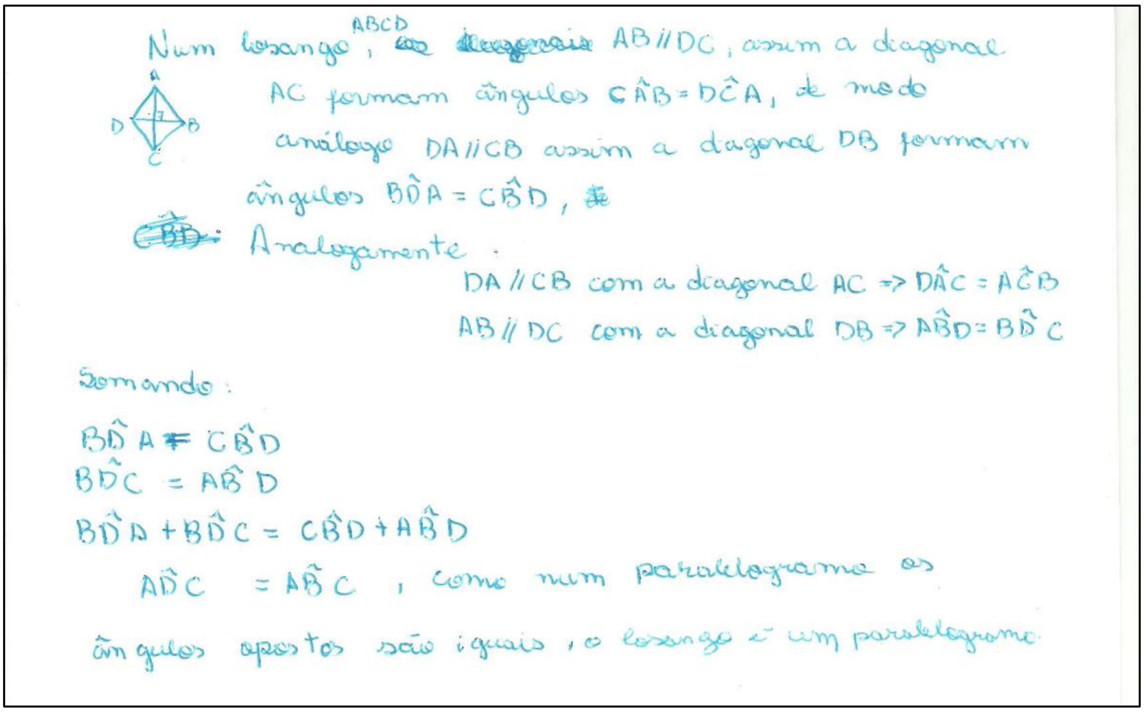
Fonte: Dados da pesquisa.

O uso das congruências e do teorema das paralelas pode estar evidenciando mais uma vez que as propriedades fornecidas na caixa de ferramentas podem haver impedido o aluno de tomar outros caminhos, constituindo-se em obstáculo à demonstração.

O aluno III (Figura 7) efetuou a conversão para o registro figural e em sua demonstração utilizou o registro simbólico, mas não interpretou corretamente sua hipótese e tomou como ponto de partida o paralelismo entre os lados, que é a tese a ser alcançada. Isso parece evidenciar má interpretação dos dados do problema e equívoco na definição de paralelogramo.

Como mostra a Figura 7, embora o aluno tenha utilizado equivocadamente uma hipótese, este optou por mostrar que os ângulos opostos do losango são congruentes, para concluir que este é um paralelogramo.

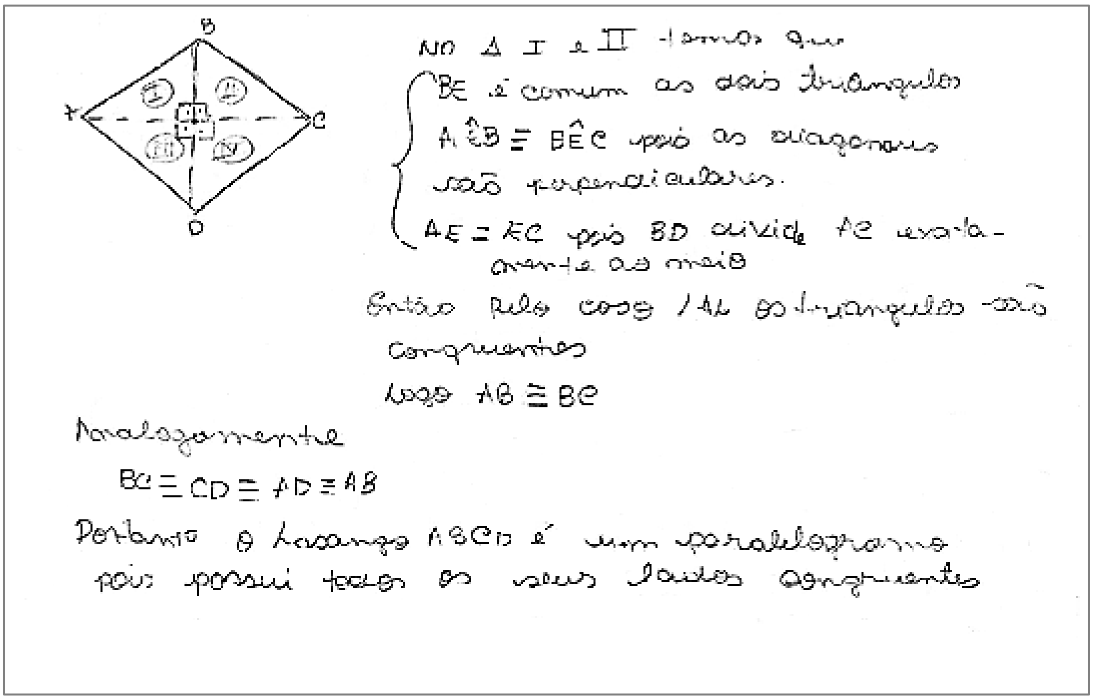
Figura 7. Resposta do aluno III à questão 14.



Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno IV (Figura 8) efetuou conversão para o registro figural e construiu uma reconfiguração coerente com a demonstração realizada. No entanto, não destacou hipótese e tese do problema e mostrou equívocos nas definições de losango e paralelogramo.

Figura 8. Resposta do aluno IV à questão 14.

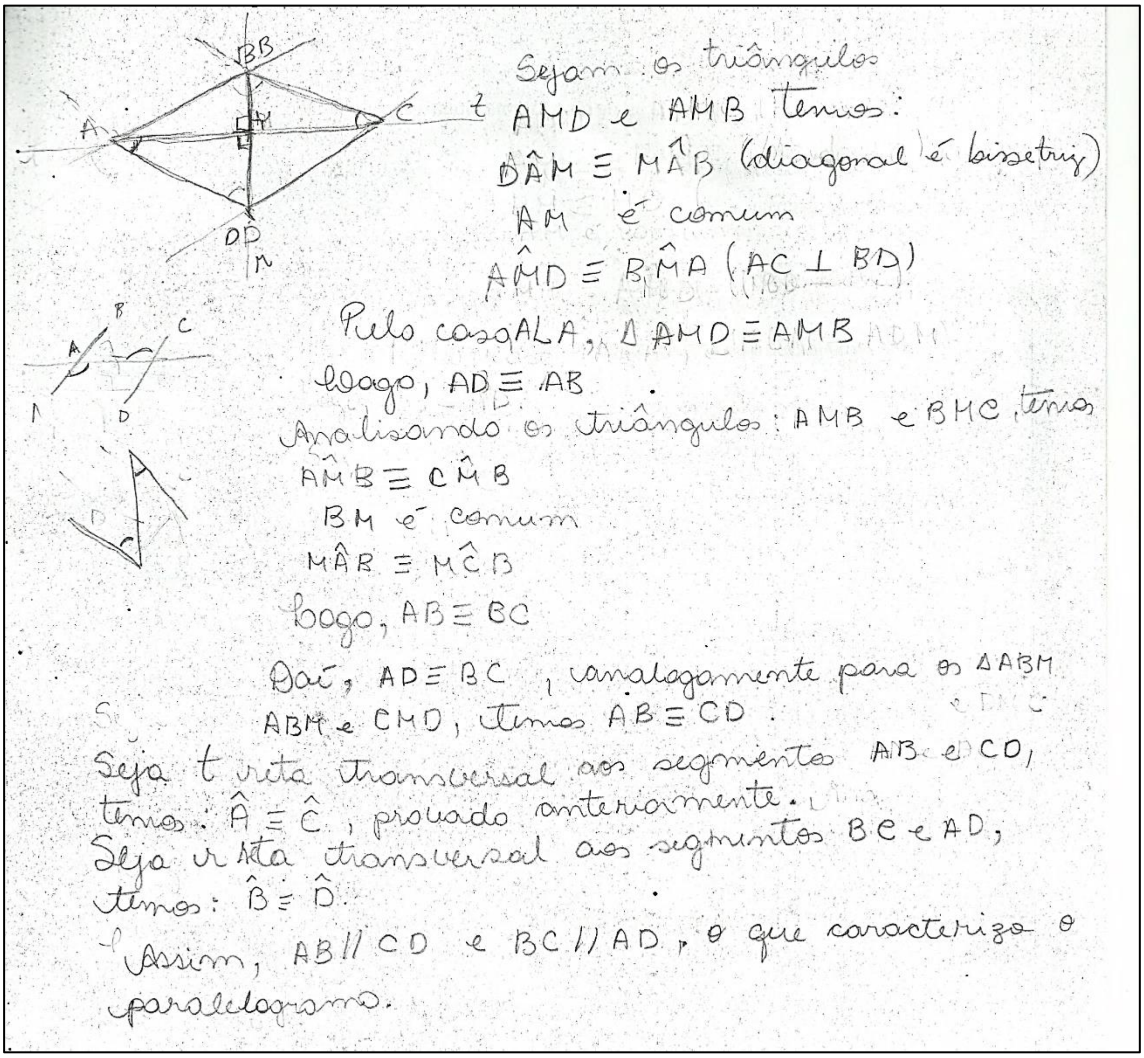


Fonte: Dados da pesquisa.

Embora tenha utilizado equivocadamente as definições de losango e paralelogramo, o aluno mostrou conhecer propriedades do losango, como a de diagonais perpendiculares que se interceptam no ponto médio de ambas, e organizou de forma lógica as propriedades utilizadas ao redigir a demonstração.

A Figura 9, que apresenta a produção do aluno V, que mostra que este efetuou a conversão do problema para o registro figural e construiu reconfigurações que lhe permitiram articular apreensões perceptivas e conceituais. Podemos perceber que também utilizou propriedades adicionais do losango para mostrar uma propriedade que o define, ou seja, para mostrar a igualdade entre as medidas de seus lados, o aluno utilizou a perpendicularidade de suas diagonais.

Figura 9. Resposta do aluno V à questão 14.



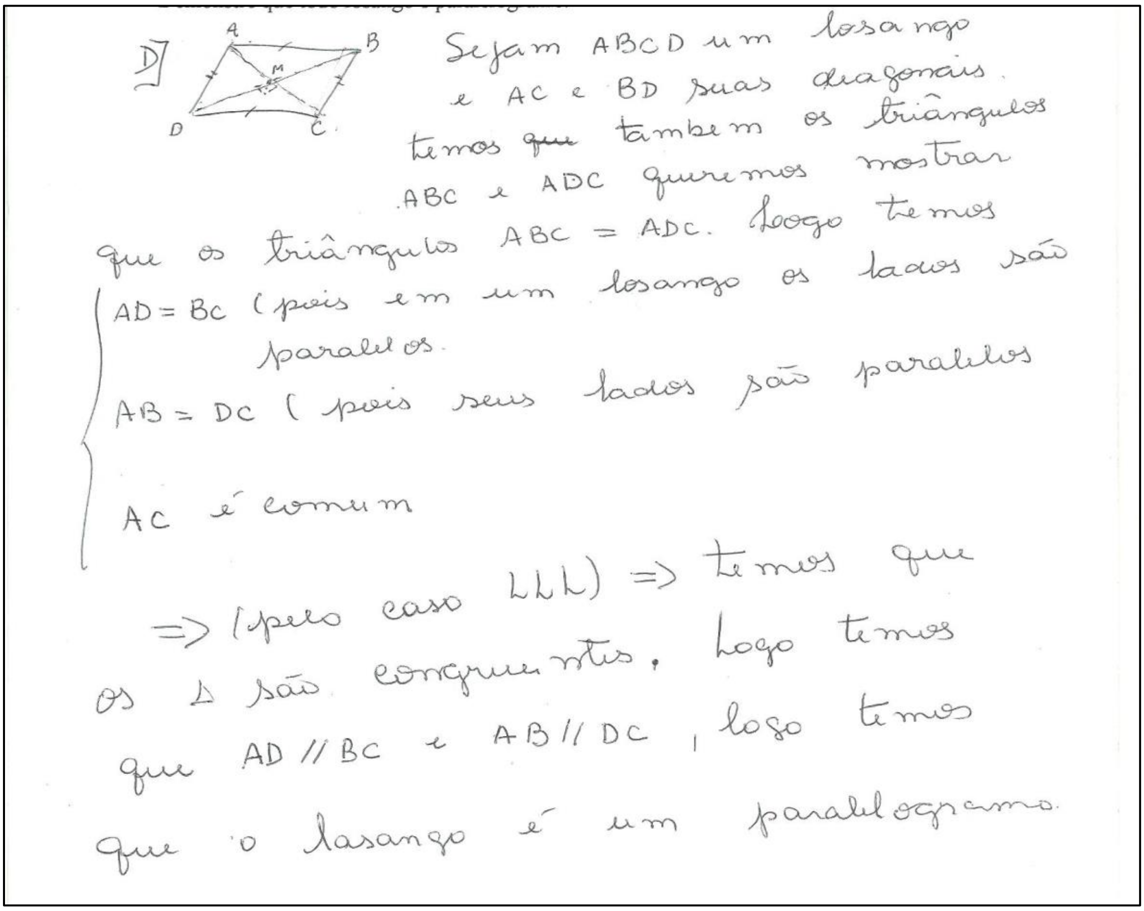
Sejam os triângulos
AMD e AMB temos:
$D\hat{A}M \equiv M\hat{A}B$ (diagonal é bissetriz)
AM é comum
$A\hat{M}D \equiv B\hat{M}A$ ($AC \perp BD$)
Pelo caso ALA, $\Delta AMD \equiv AMB$
logo, $AD \equiv AB$
Analisando os triângulos AMB e BMC, temos
$A\hat{M}B \equiv C\hat{M}B$
BM é comum
$M\hat{A}B \equiv M\hat{C}B$
logo, $AB \equiv BC$
Daí, $AD \equiv BC$, analogamente para os ΔABM
ABM e CMD, temos $AB \equiv CD$.
Seja t reta transversal aos segmentos AB e CD,
temos: $\hat{A} \equiv \hat{C}$, provado anteriormente.
Seja r reta transversal aos segmentos BC e AD,
temos: $\hat{B} \equiv \hat{D}$.
Assim, $AB // CD$ e $BC // AD$, o que caracteriza o paralelogramo.

Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno articulou corretamente propriedades do losango (diagonais que dividem os ângulos em ângulos congruentes; diagonais perpendiculares e diagonais que se bisseccionam), a congruência de triângulos, a transitividade da relação de congruência de triângulos e o teorema das paralelas, associando esses elementos a uma reconfiguração conveniente para mostrar o paralelismo entre os lados do losango e concluindo que o losango é um paralelogramo.

Como mostra a Figura 10, o aluno VI não destacou hipótese e tese do problema. A figura representada na conversão assemelha-se a um paralelogramo que não é losango. Utilizou registro simbólico para representar a congruência entre os lados e registro da língua natural para expressar o paralelismo: *"AD = BC (pois em um losango os lados são paralelos)"*. Este registro evidencia um equívoco entre congruência e paralelismo e entre as definições de paralelogramo e losango.

Figura 10. Resposta do aluno VI à questão 14.


D) Sejam ABCD um losango
e AC e BD suas diagonais.
temos ~~que~~ também os triângulos
ABC e ADC queremos mostrar
que os triângulos ABC = ADC. Logo temos
AD = Bc (pois em um losango os lados são
paralelos.
AB = DC (pois seus lados são paralelos
AC é comum
=> (pelo caso LLL) => temos que
os Δ são congruentes. Logo temos
que AD // BC e AB // DC, logo temos
que o lasango é um paralelograma.

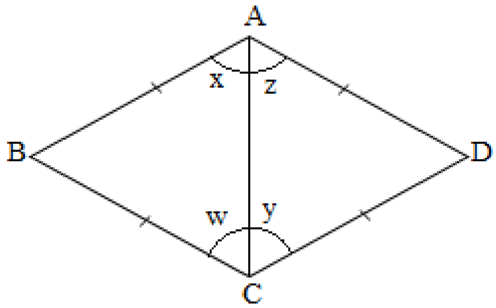
Fonte: Dados da pesquisa.

Conclusões sobre a questão 14

Dos 45 respondentes, 39 não responderam à questão 14. A grande quantidade de alunos que não respondeu esta questão nos leva a inferir que estes alunos dispunham de pouco conhecimento sobre alguns conteúdos de geometria, especialmente sobre os processos de prova e demonstração.

Prevíamos que os alunos utilizariam propriedades adicionais não incluídas na caixa de ferramentas, por não havermos explicitado que apenas estas poderiam ser usadas, como as propriedades do triângulo isósceles e a congruência dos triângulos *ABC* e *ACD*, como mostra a Figura 11.

Figura 11. Representação de apoio às expectativas sobre a questão 14.



Fonte: Dados da pesquisa.

Eles utilizaram propriedades que são consequências da definição de paralelogramo, mesmo sem saber ainda que o losango era um paralelogramo – ou seja, utilizaram a tese para provar a própria tese, o que Ordem (2015) cita em seu estudo como “argumento circular”. Isto evidencia a fragilidade dos alunos em relação às propriedades do paralelogramo e dificuldade em articular os argumentos na elaboração da demonstração. Observamos também que estes alunos apresentam problemas na interpretação das hipóteses de um teorema levando-os a uma representação figural inadequada. Outra evidência foi o mau uso da escolha do fracionamento. O fracionamento feito nem sempre foi o utilizado na demonstração. Com relação à configuração utilizada, percebemos que os alunos que responderam à tarefa de demonstração, que estes não conseguiram articular as apreensões figural e conceitual necessárias para produzir a demonstração.

A quantidade e qualidade das produções apresentadas na tarefa de demonstração nos dão indícios de que estes alunos apresentam dificuldades relacionadas a conceitos e propriedades geométricas, bem como dificuldade em utilizar argumentos válidos, em manipular as hipóteses e teses do problema, organizar logicamente os argumentos e concluir um raciocínio corretamente. Este resultado se assemelha ao obtido por Ordem (2015), apresentado em nossa revisão de literatura. O autor constatou nas produções dos alunos investigados, insegurança e falta de domínio de regras básicas da demonstração e dos conceitos básicos de geometria plana.

Reflexões da análise do questionário

Nesse tópico buscamos conhecer as concepções dos alunos investigados sobre provas e demonstração em matemática a fim de obter subsídios para a construção e análise das situações de ensino que serão utilizadas em nossa engenharia.

Os resultados observados na análise do questionário assemelham-se aos encontrados por Ordem (2015) e Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007).

Diante da análise feita com base na revisão de literatura observamos que:

1. Os alunos pesquisados foram envolvidos em tarefas que exigiam demonstração na graduação, porém não com participação ativa na construção da mesma. Isto é, há indícios de que os alunos não foram envolvidos em tarefas que os permitissem construir demonstrações, indicando que a abordagem da demonstração vivenciada pelos mesmos foi a reprodução das demonstrações encontradas nos livros ou apresentadas pelo professor.
2. A maioria dos alunos, embora afirmasse conhecer o método dedutivo, não foi capaz de defini-lo.
3. A maioria dos alunos investigados reconhece a importância da demonstração, mas não se sente segura para ensiná-la a seu futuro aluno e o principal motivo apresentado é a dificuldade relacionada à prática da demonstração.
4. Os alunos que afirmam estar seguros para ensinar demonstração aos seus futuros alunos indicam que buscarão apoio no livro didático.
5. As respostas dos alunos indicam que para eles um bom livro é aquele que traz as demonstrações de forma detalhada, permitindo sua compreensão.
6. A maioria dos alunos não reconhece diferença entre demonstração e prova atribuindo à prova a única função de validação.
7. As produções apresentadas pelos alunos, ao responderem o problema proposto, apontam dificuldades relacionadas a conceitos e propriedades geométricas, bem como dificuldade em utilizar argumentos válidos, em manipular as hipóteses e teses do problema, organizar logicamente os argumentos e concluir um raciocínio corretamente.

Verificamos que em sua maioria os licenciandos pesquisados tiveram seu primeiro contato com demonstrações na graduação, usando-a como ferramenta de validação. Para a maioria desses alunos, o papel da demonstração se reduz ao de validar uma afirmação. A maioria atribui a prova e demonstração o mesmo significado, o que é lícito no âmbito da matemática, mas não no da educação matemática. Dos 45 respondentes, apenas oito sinalizaram em suas respostas que atribuem um caráter prático à prova, distinguindo-a da demonstração.

Embora pratiquem provas formais, os alunos demonstraram fragilidade no desenvolvimento de uma prova e mostraram deficiências em articular propriedades e conceitos geométricos.

Outro fato constatado é que, apesar de aprovarem os livros de geometria indicados no programa da disciplina ‘Geometria plana’, os alunos ofereceram respostas que indicam que a proposta didática desses livros não lhes permite compreender as demonstrações.

Os respondentes reconhecem a importância da demonstração, mas não se sentem preparados para ensinar esse recurso matemático a seus futuros alunos. Este fato está provavelmente associado à influência da prática da demonstração vivenciada por esses licenciandos.

Os resultados do questionário apontam para a importância do livro na formação da concepção de provas e demonstrações geométricas dos alunos, visto que há indícios de que as situações, envolvendo estes objetos, vivenciadas pelos mesmos, são reproduções das demonstrações apresentadas nos livros de geometria. Esta é mais uma razão que nos leva a querer conhecer as organizações didáticas e matemáticas apresentadas nos livros utilizados por estes alunos. É o que faremos no próximo tópico.

3.2 Análise dos livros indicados nos cursos de licenciatura em matemática

Os resultados observados na revisão de literatura associados à nossa experiência nos permitem afirmar que a abordagem do método dedutivo na graduação é feita no sentido inverso em relação ao desenvolvimento desse método. Há indícios de que não está sendo permitido ao aluno construir a demonstração a partir de uma motivação que possa provocar sua descoberta. Diante dessa afirmação, sentimos a necessidade de investigar de que forma os livros de geometria, utilizados na licenciatura em matemática, estão abordando as demonstrações.

Diante da análise do questionário e de resultados de pesquisas (MAIOLI, 2001; ORDEM, 2015), conjecturamos ainda que os alunos têm a concepção de provas e demonstrações influenciadas pelos livros de geometria utilizados na graduação.

Perante esses fatos e ainda pela necessidade de buscar inspiração para elaborar nossa situação de ensino é que a análise do livro se faz um dos objetivos deste trabalho.

Portanto, nesta seção analisamos livros de geometria plana adotados em cursos de licenciatura em matemática. Especificamente, focalizamos as tarefas relativas a provas e demonstrações envolvendo o conteúdo ‘quadriláteros’, nos livros selecionados.

Inicialmente justificamos a escolha do objeto matemático que será explorado e a dos livros que serão analisados.

3.2.1 Nosso objeto matemático: o quadrilátero

Nossa pesquisa está relacionada às dificuldades apresentadas por alunos de licenciatura em matemática ao lidarem com demonstrações geométricas. Para cumprir nosso objetivo, foi necessário eleger um conteúdo geométrico por intermédio do qual pudéssemos abordar o tema pesquisado, fazer nossas análises e obter respostas para nossas indagações.

Buscamos um conteúdo em que pudéssemos abordar de forma reflexiva as características de uma definição e as consequências da interpretação de um conceito, e que também propiciasse a introdução do método dedutivo. Desse modo, elegemos o conteúdo ‘quadriláteros’ por entendermos que este propicia um campo fértil para atingirmos nossos objetivos. Além disso, as relações entre as propriedades dos quadriláteros permitem trabalhar as demonstrações e abordar diversos conteúdos da geometria plana, tais como a congruência de triângulos.

Fomos em busca de trabalhos que tinham os quadriláteros como objeto de pesquisa. Selecionamos os estudos de Maioli (2001) e Silva (2007).

A pesquisa de Maioli (2001) visou contribuir com a formação de professores “tanto no que se refere à aquisição de conteúdos, quanto no aprimoramento de conhecimentos que venham a auxiliar os professores na elaboração de estratégias adequadas para o trabalho com geometria em sala de aula”. A questão que orientou esse estudo foi: “como trabalhar com formação de professores de forma a contribuir com a aquisição de conteúdos de geometria, proporcionando ao professor conhecimentos didáticos inerentes a esses conteúdos?” (MAIOLI, 2001). A autora buscou fundamentação na teoria das situações didáticas, de Brousseau, e nos registros de representação semiótica, de Duval.

Maioli (2001) analisou três coleções de livros didáticos de 5.ª a 8.ª séries (atualmente 6.º a 9.º anos). Tomando como referência as recomendações dos PCN e as questões levantadas por Duval relacionadas às pesquisas sobre registros de representação semiótica, a autora estabeleceu sete critérios para análise dos livros:

(C_I) – O autor apresenta os conteúdos partindo de situações-problema?

(C_{II}) – O autor apresenta atividades de construção geométrica?

(C_{III}) – As atividades permitem ao aluno fazer conjecturas?

(C_{IV}) – As atividades envolvem demonstrações?

(C_{V}) – O autor trabalha com diversos registros de representação?

(C_{VII}) – Qual definição de trapézio é considerada?

A autora observou variações entre as definições de quadrilátero, embora todas fossem coerentes com a definição escolhida. Esse ponto merece destaque, uma vez que o livro serve como principal apoio ao professor, e a má interpretação de uma definição, associada ao uso de mais de um livro para elaboração de aulas, pode gerar erros conceituais por parte dos professores.

Analisando as discussões ocorridas durante uma oficina, Maioli (2001, p. 36) conclui que "as atividades provocaram reflexões sobre definições, conjecturas, propriedades dos quadriláteros, teoremas e demonstrações, bem como ajudou os professores a descobrirem a dificuldade que têm em utilizar diferentes registros de representação em geometria".

O trabalho de Silva (2007), por sua vez, teve por objetivo envolver um grupo de professores de matemática de uma mesma escola no desenvolvimento de uma sequência didática sobre quadriláteros e suas propriedades. A sequência desenvolvida foi baseada nos trabalhos de Parsysz. A concepção e os tipos de prova adotados provieram de Balacheff (1988) e as funções de prova de De Villiers (2001). O objetivo da sequência foi o de focar e demonstrar ou provar as propriedades dos quadriláteros. Para o desenvolvimento de algumas atividades utilizou-se o programa Cabri-Géomètre, visando proporcionar condições para que se pudesse desenvolver, de modo indutivo e dedutivo, a prova solicitada em cada atividade.

Silva (2007) concluiu que os professores do grupo pesquisado não tinham familiaridade com provas e acreditavam que seus alunos só compreenderiam provas pragmáticas.

A definição de quadrilátero é apresentada na educação básica nas primeiras séries do ensino fundamental, no sexto ano é desenvolvida sua sistematização, no oitavo, propõe-se a demonstrações das propriedades dos quadriláteros. Espera-se que no ensino médio os alunos já dominem este tópico. No entanto, a literatura nos mostra, a análise do questionário e a nossa experiência confirmam, que os alunos de licenciatura em matemática apresentam problemas conceituais relativos a quadriláteros, dificuldades em sua identificação e no estabelecimento de relações entre os quadriláteros notáveis.

Compreendendo a importância da definição para o desenvolvimento do pensamento geométrico, acreditamos que é imprescindível que em nossa sequência sejam contempladas tarefas relacionadas às definições dos quadriláteros.

Diante dos argumentos apresentados, cabe aqui abrirmos espaço para apresentarmos diferentes definições de quadriláteros notáveis, propostas ao longo da história por alguns matemáticos, e as variações que a definição de trapézio e trapézio isósceles pode adquirir. Nossa exposição se baseará em dois artigos de Vicenzo Bongiovanni (BONGIOVANNI, 2004; 2010).

No primeiro, Bongiovanni (2004) apresenta quatro definições distintas para quadriláteros notáveis, as quais admitem relações distintas entre si, dependendo da classificação adotada. As classificações apresentadas pelo autor provêm de Euclides, Legendre e Hadamard:

No livro I de *Os elementos*, Euclides define "figura quadrilátera" como sendo aquela "contida por quatro linhas retas", e assim define os quadriláteros notáveis:

- *Quadrado*: figura quadrilátera de quatro lados iguais com ângulos retos.
- *Oblongo (retângulo)*: figura quadrilátera com ângulos retos, mas que não tem quatro lados iguais.
- *Rombo (losango)*: figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas não com ângulos retos.
- *Romboide (paralelogramo)*: figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas não tem quatro lados iguais nem ângulos retos.

Na definição de Euclides, o conjunto formado por cada classe de quadrilátero notável é disjunto.

Segundo Bongiovanni (2004), a classificação de Legendre é mais rigorosa e menos intuitiva que a de Euclides.

Caracterização dos quadriláteros segundo Legendre:

- O *quadrado* tem lados iguais e ângulos retos.
- O *retângulo* tem ângulos retos sem ter os lados iguais.
- O *losango* tem lados iguais sem que os ângulos sejam retos.
- O *paralelogramo* tem lados opostos paralelos.

Pela definição de Legendre, o quadrado não é um retângulo e não é um losango, porém todos eles são paralelogramos. Também podemos observar que os quadriláteros que

Euclides chama de oblongo, rombo e romboide passaram a se denominar respectivamente retângulo, losango e paralelogramo.

Segundo Bongiovanni (2004), Hadamard caracterizou os quadriláteros notáveis de maneira mais ampla:

- *Quadrado* é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.
- *Retângulo* é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais e, consequentemente, retos.
- *Losango* é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais.
- *Paralelogramo* é um quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois.

De acordo com a definição de Hadamard, um quadrado também é retângulo e losango, ao passo que o quadrado, o retângulo e o losango são todos paralelogramos. A caracterização de Hadamard (Figura 12) é a que hoje consta nos livros didáticos.

Figura 12. Relações ente os quadriláteros, segundo Hadamard.

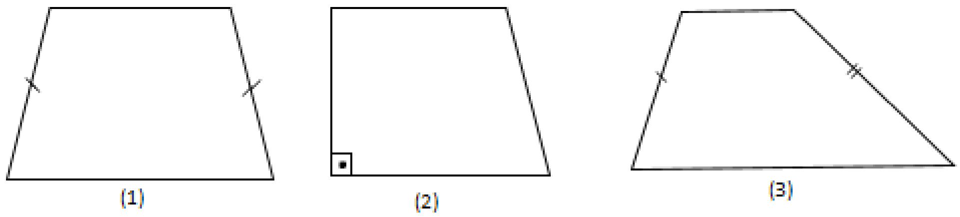
Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto à definição de trapézio, esta causa dúvida até entre professores. Duas definições são consideradas:

- *Trapézio* é um quadrilátero em que dois lados opostos são paralelos;
- *Trapézio* é um quadrilátero em que exatamente dois lados opostos são paralelos.

Segundo a primeira definição, o paralelogramo é um trapézio, o que pode causar dúvidas em alunos e professores (MAIOLI, 2001; SILVA, 2007) pela ênfase dada à representação figural e não às propriedades do objeto. De modo geral, as representações de trapézio que os livros didáticos trazem são variações das que constam na Figura 13.

Figura 13. Representações de trapézios habitualmente encontradas em livros didáticos.



Fonte: Dados da pesquisa.

A depender da definição de trapézio adotada, é necessário haver coerência com as demais definições adotadas e propriedades enunciadas. Um caso que pode gerar incoerência é a definição de trapézio isósceles e de suas propriedades. Ao definir este tipo de trapézio como sendo aquele que apresenta dois lados congruentes, não podemos assumir que os ângulos de suas bases e suas diagonais sejam congruentes, uma vez que o paralelogramo seria um trapézio isósceles que não satisfaz tais propriedades. Bongiovanni (2010, p. 10) propõe uma definição de trapézio isósceles que seria coerente com as propriedades que já estão incorporadas por alunos e professores: "*Trapézio isósceles é um trapézio que tem um único par de lados opostos congruentes*". Ao assumir esta definição, excluímos os paralelogramos da lista dos trapézios isósceles.

Nos trabalhos de Maioli (2001) e Silva (2007), o objeto matemático 'quadrilátero' permitiu a abordagem de diferentes tipos de provas, uma vez que proporcionou condições para propor conjecturas e enunciar e demonstrar teoremas, revelando-se assim um conteúdo rico para a introdução do método dedutivo. Também as caracterizações dos quadriláteros notáveis discutidas por Bongiovanni (2010) mostram como esse conteúdo permite trabalhar as implicações de uma interpretação equivocada de uma definição.

Diante dessas constatações, observamos que, do ponto de vista matemático, o conteúdo 'quadriláteros' permite explorar um número significativo de propriedades geométricas que possibilitam a resolução de diversos problemas. Viabiliza também a resolução de problemas com o uso de régua e compasso, o que possibilita o levantamento de conjecturas. Além disso, favorece a exploração de teoremas, teoremas recíprocos, demonstrações e diferentes registros de representação. Assim, o *quadrilátero* é um objeto matemático conveniente para dar continuidade a nosso estudo.

Diante do que foi abordado neste tópico, observamos a relevância de contemplar em nossa organização didática, atividades que envolvam a definição de quadriláteros, uma vez que ela influencia na sua classificação, enfatizando a importância de se manter coerente com a definição escolhida.

3.2.2 Os livros de geometria plana indicados nos cursos de licenciatura em matemática: definindo nossa escolha

Nossa pesquisa focaliza o aluno do curso de licenciatura não só como futuro professor, mas também como aluno, com suas dificuldades e limitações. Na graduação, o livro, além de apoiar o professor no preparo de suas aulas, torna-se um dos principais apoios do aluno.

As opiniões dos respondentes dão indícios de que o livro adotado no curso de licenciatura pesquisado não está cumprindo seu papel de apoiar o aluno e que estes influenciam na concepção de provas e demonstrações. Portanto, pretendemos fazer uma análise da organização praxeológica do objeto quadrilátero a fim de investigar de que forma são abordadas as demonstrações nos livros de geometria plana utilizados nos cursos de licenciatura em matemática.

Para nortear nossa investigação, levantamos algumas questões: De que forma os livros de geometria plana, utilizados nos cursos de licenciatura em matemática, estão abordando as demonstrações relativamente ao tópico ‘quadriláteros’? As tarefas propostas nos livros de geometria plana, utilizados nos cursos de licenciatura, têm potencial para motivar os alunos a fazer descobertas e propiciar a estes vivenciar momentos de ação, formulação e validação? As tarefas propostas nos livros de geometria plana, utilizados nos cursos de licenciatura, têm potencial para induzir os alunos a pensar sobre a figura, fazer conversões entre representações de diferentes registros e evoluir da apreensão perceptiva para a discursiva?

A fim de responder as questões propostas faremos um estudo das organizações praxeológicas propostas por autores de livros de geometria, indicados aos cursos de licenciatura de universidades brasileiras, relativamente ao conteúdo *quadrilátero* à luz da teoria antropológica do didático, teoria dos registros de representação semiótica e teoria das situações didáticas e dos níveis de prova propostos por Balacheff (1988).

Para cobrir todas as regiões brasileiras nesse levantamento, consultamos os projetos pedagógicos disponíveis nos sítios de 21 universidades (Apêndice B).

As referências selecionadas correspondem às disciplinas que contemplam os conteúdos de geometria plana. Nos programas analisados, nem sempre o componente aparece com esse nome. Observamos que entre as referências constam também livros de História da matemática, construções geométricas, artigos e revistas.

Nas referências que aparecem mais de uma vez, optamos por indicar o ano da mais atual. Dos 20 programas analisados, constatamos que estas três obras receberam números expressivos de:

- BARBOSA, J.L.M. *Geometria euclidiana plana*. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. (14 indicações; doravante designado LG1.)
- DOLCE, O.; POMPEO, J.N. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. 7 ed. São Paulo: Atual, 2009. v. 9. (12 indicações; doravante designado LG2.)
- REZENDE, E.Q.; QUEIROZ, M.L.B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Campinas: Unicamp, 2008. (10 indicações; doravante designado LG3.)

A frequência das indicações e o fato de serem obras especificamente voltadas à geometria plana nos levaram a escolhê-las para análise.

3.2.3 Análise dos livros selecionados

Iniciaremos este tópico identificando o público ao qual, segundo seus autores, os livros selecionados se destinam.

Barbosa (2006) propõe-se a fazer uma apresentação axiomática da geometria e indica seu livro (LG1) para alunos de licenciatura em matemática, explicando que seu objetivo é dar ao futuro professor uma visão mais ampla daquilo que irá futuramente ensinar. O autor esclarece não estar propondo que o futuro professor adote o mesmo tipo de apresentação quando estiver lecionando na educação básica.

Dolce e Pompeo (2009) expõem que seu livro (LG2) se destina a alunos do ensino médio, visando prepará-los para exames vestibulares, ou a universitários, a título de revisão dos conteúdos do ensino médio.

Rezende e Queiroz (2008) indicam seu livro (LG3) a alunos e professores em cursos de especialização e graduação em matemática ou áreas afins, bem como a professores de matemática de outros níveis de ensino. Acrescentam que esperam proporcionar ao leitor maior facilidade em organizar raciocínios e construir argumentações lógicas.

Note-se que apenas um autor indica sua obra especialmente para alunos de licenciatura em matemática.

O livro LG1 é estruturado em 11 capítulos e o conteúdo ‘quadriláteros’ é abordado no Capítulo 6, intitulado “O axioma das paralelas”. Ao final de cada capítulo é proposta uma série de exercícios e de problemas, seguidos de um texto que o autor chama de “Comentário”. O final do livro traz uma seção de exercícios intitulada “Revisão e aprofundamento”.

O livro LG2 é estruturado em 19 capítulos e o conteúdo ‘quadriláteros’ é abordado no capítulo VII, intitulado “Quadriláteros notáveis”. O volume traz quatro textos históricos de autoria do professor Hygino Domingues em seções denominadas “Leitura”, localizadas após os capítulos IV, VIII, XII e XVI. Os textos focalizam os seguintes temas:

- Euclides e a geometria dedutiva;
- Papus: o epílogo da geometria grega;
- Legendre: por uma geometria rigorosa e didática;
- Hilbert e a formalização da geometria.

Ao final de cada conteúdo é apresentada uma série de exercícios, alguns dos quais são resolvidos pelos autores. No final do livro é disponibilizada uma lista de testes de vestibular, organizada por conteúdo. O autor não explicita detalhadamente a estrutura de cada volume.

O livro LG3 é estruturado em 14 capítulos, sendo que sete abordam os conteúdos de geometria plana euclidiana e os demais se destinam às construções geométricas. O conteúdo ‘quadriláteros’ é apresentado no capítulo 4, intitulado “O postulado das paralelas e a geometria euclidiana”. Ao final de cada capítulo é apresentada uma seção denominada “Nota histórica”, seguida de uma série de exercícios propostos.

Análise das organizações matemáticas e didáticas dos livros selecionados

À luz da teoria antropológica do didático, analisamos esses livros em termos de tarefa, técnica e bloco teórico-tecnológico, investigando como os autores apresentam o método dedutivo e seus termos próprios e como é feito o estudo dos quadriláteros, tendo como foco as definições e as demonstrações.

Formulamos cinco questões que darão origem às tarefas com suas respectivas técnicas, que por sua vez serão justificadas por um bloco teórico-tecnológico. Serão abordados dois tipos de tarefas: as relacionadas ao estudo teórico dos quadriláteros (que são tarefas direcionadas ao professor) e tarefas relacionadas à aplicação das propriedades (tarefas direcionadas ao aluno).

Neste tópico utilizaremos as seguintes notações relacionadas à praxeologia:

- Q_i: questão *i*;
- T_iQ_j: tarefa *i* referente à questão *j*;

- t_k(T_iQ_j): técnica *k*, referente à tarefa *i* da questão *j*;
- [θ/Θ]$_i$: discurso tecnológico-teórico referente à questão *i*.

Nas justificativas matemáticas apresentadas neste e nos próximos tópicos, utilizaremos também as notações $\overline{AB}$, para representar o segmento de reta de extremos *A* e *B*; *AB*, para representar a medida do segmento $\overline{AB}$; $\overrightarrow{AB}$, para representar a semirreta de origem *A* e que contém o ponto *B*; *AÔB*, para representar o ângulo de vértice *O* e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$; e med(*AÔB)*, para representar a medida desse ângulo. Quando não houver risco de confusão, representaremos o ângulo $A\hat{O}B$ simplificadamente por $\hat{O}$.

Análise das tarefas voltadas ao professor

Questão 1 (Q_1): Como o autor aborda o método dedutivo e seus termos próprios?

T_1Q_1: Explicar o que vem a ser o método dedutivo.

t_1(T_1Q_1): abordagem histórica.

t_2(T_1Q_1): abordagem direta, sem utilizar a história.

T_2Q_1: Explicar o significado das seguintes noções: postulado, axioma, teorema, prova, demonstração, hipótese, tese, recíproca.

t_1(T_2Q_1): Levantamento sobre a diferenciação das noções de postulado, axioma, teorema, prova, demonstração, hipótese, tese e recíproca.

T_3Q_1: Identificar se há utilização das seguintes noções: postulado, axioma, teorema, prova, demonstração, hipótese, tese, recíproca.

t_1(T_3Q_1): Levantamento sobre a utilização das noções de postulado, axioma, teorema, prova, demonstração, hipótese, tese e recíproca.

[θ/Θ]$_1$: O discurso teórico-tecnológico associado às tarefas **T_1Q_1**, **T_2Q_1** e **T_3Q_1** é o texto histórico ou direto informando o que vem a ser o método dedutivo, esclarecendo quanto aos termos próprios desse método e como estes são utilizados.

No Quadro 11, apresentamos uma síntese das tarefas referentes a Q1 realizadas pelos autores de LG1, LG2 e LG3. O símbolo ✓ indica que os autores realizaram a tarefa ao menos parcialmente.

Quadro 11. Síntese das tarefas realizadas pelos autores dos livros analisados, referentes à questão 1.

		LG1	LG2	LG3
	t_1(T_1Q_1)			

T_1	$t_2(T_1Q_1)$			✓
T_2	$t_1(T_2Q_1)$	✓	✓	✓
T_3	$t_1(T_3Q_1)$	✓	✓	✓

Fonte: Dados da pesquisa.

Em LG1, o autor inicia o estudo de geometria referindo-se a ‘ponto’, ‘reta’ e ‘plano’ como ‘figuras geométricas elementares’. Utiliza os termos ‘axioma’, ‘postulado’, ‘teorema’, ‘corolário’, ‘definição’, ‘demonstração’ e ‘prova’, bem como as expressões ‘necessário e suficiente’ e ‘se, e só se’, e, a princípio, não faz nenhum esclarecimento quanto ao método dedutivo ou seus elementos.

No final do capítulo 1, no primeiro comentário, o autor explica o que vem a ser ‘método dedutivo’, comparando-o a um jogo em que as peças são as figuras geométricas elementares e as regras são os axiomas. Associa a determinação das propriedades das figuras geométricas, a que chama de ‘teorema’ ou ‘proposição’, ao objetivo final do jogo.

O autor não utiliza texto histórico ou texto direto para esclarecer o que vem a ser o método dedutivo, mas faz uma comparação com um jogo e suas regras. Desse modo, a tarefa foi realizada com a utilização de uma técnica diferente das que foram propostas em $t_1(T_1Q_1)$ e $t_2(T_1Q_1)$.

O comentário mencionado também informa que os teoremas ou proposições “devem ser deduzidos por meio de raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades já estabelecidas” (LG1, p. 12). No entanto, o autor não deixa claro que essa dedução “por meio de raciocínios lógicos” é o que ele associa ao termo ‘prova’ utilizado ao demonstrar os teoremas. O autor faz uso do registro figural, enfatizando que a figura está sendo usada apenas como “um instrumento de ajuda à nossa intuição e linguagem” (LG1, p. 2).

Os autores de LG2, por sua vez, introduzem a geometria estabelecendo uma distinção entre noção primitiva e outros entes geométricos, que são apresentados mediante definições. Tenta esclarecer os significados de ‘postulado’, ou ‘axioma’, chamando-os de propriedades primitivas que são aceitas sem demonstração, e de ‘proposição’, como sendo uma propriedade aceita mediante demonstração. Não esclarece, porém, o significado do termo ‘demonstração’ ou o que vem a ser o método dedutivo, embora faça referência a este na leitura “Euclides e o método dedutivo” (Figura 14).

Figura 14. Trecho da leitura "Euclides e a geometria dedutiva".

Mas, sem dúvida, o forte dos *Elementos* é a geometria. A partir de cinco noções comuns, cinco postulados específicos e algumas definições, centenas de teoremas (467 em toda a obra) são deduzidos, alguns de grande profundidade. Além de ser o mais antigo texto de matemática na forma axiomático-dedutiva a chegar a nossos dias, nele Euclides foi muito feliz na escolha e no enunciado de seus postulados básicos. E soube usá-los com proficiência. Assim, não é sem motivo que os *Elementos*, por dois milênios, além de texto fundamental de geometria, foi o modelo de boa matemática.

Fonte: LG2, p. 60.

São utilizados em LG2 os termos 'definição', 'postulado', 'teorema' e 'demonstração', mas alguns resultados são enunciados e demonstrados sem que os termos 'proposição', 'teorema' ou 'demonstração' sejam explicitados. A Figura 15, que reproduz trecho desse livro, mostra como é feita a demonstração da existência de retas concorrentes sem que as palavras 'prova' ou 'demonstração' sejam explicitadas.

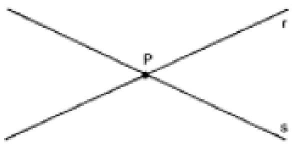
Figura 15. Demonstração da existência de retas concorrentes.

10. *Retas concorrentes*

a) *Definição*

Duas retas são *concorrentes* se, e somente se, elas têm *um único* ponto comum.

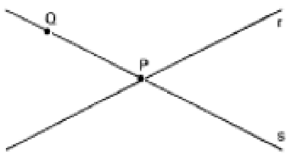
$r \cap s = \{P\}$



b) *Existência*

Usando o postulado da existência (item 4), tomemos uma reta *r*, um ponto *P* em *r* ($P \in r$) e um ponto *Q* fora de *r* ($Q \notin r$).

Os pontos *P* e *Q* são distintos, pois um deles pertence a *r* e o outro não.



Usando o postulado da determinação (item 7a), consideremos a reta *s* determinada pelos pontos *P* e *Q* ($s = \overleftrightarrow{PQ}$).

As retas *r* e *s* são distintas, pois se coincidissem o ponto *Q* estaria em *r* (e ele foi construído fora de *r*), e o ponto *P* pertence às duas. Logo,

r e *s* são concorrentes.

Fonte: LG2, p. 4-5.

Em LG2 o termo 'teorema' é utilizado apenas para resultados considerados importantes para os autores, como teorema do triângulo isósceles, teorema de Pitágoras, teorema de Tales e outros. Os demais resultados são enunciados e demonstrados sem fazer referência aos termos 'teorema' ou 'demonstração', como exemplificado na Figura 15. Essa prática explica o fato de muitos alunos só considerarem como teoremas os que vêm acompanhados de um nome contendo esse termo.

Em LG2 não são enunciados teoremas utilizando a expressão ‘se, e somente se’. Os teoremas recíprocos são enunciados separadamente na forma ‘se, então’ e, na demonstração, os autores destaca ‘hipótese’ e ‘tese’. Somente após a demonstração esclarecem que, neste caso, a condição é necessária e suficiente. A Figura 16 exemplifica a forma como os teoremas recíprocos são abordados. (A demonstração completa do teorema encontra-se nas páginas 157 e 158 da obra.)

Figura 16. Propriedade dos quadriláteros circunscritíveis.

a) Se um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

Hipótese — *Tese*

$ABCD$ circunscrito a $\lambda \Rightarrow \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

b) Se num quadrilátero convexo a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois, então o quadrilátero é circunscritível a uma circunferência.

Sendo $ABCD$ um quadrilátero convexo,

Hipótese — *Tese*

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} \Rightarrow ABCD$ é circunscritível a uma circunferência.

Uma condição necessária e suficiente para um quadrilátero convexo ser circunscritível a uma circunferência é a soma de dois lados opostos ser igual à soma dos outros dois.

Fonte: LG2 (p. 157-158)

Em LG3, a geometria é introduzida com ‘ponto’, ‘reta’ e ‘plano’ como termos indefinidos. Na apresentação, as autoras explicam o que vêm a ser ‘método dedutivo’ e ‘postulado’, ou ‘axioma’. No entanto, utilizam sem explicação o termo ‘demonstração’ para esclarecer o significado do método dedutivo.

São utilizados os termos ‘postulado’, ‘definição’, ‘teorema’, ‘lema’, ‘corolário’ e ‘demonstração’, mas não são oferecidas explicações desses termos.

Os três livros têm estruturas semelhantes. Embora LG2 seja o único voltado ao ensino médio, não traz explicação sobre o método dedutivo, embora dele faça uso. LG1 e LG3 trazem alguma noção sobre esse método, o que pode motivar o leitor buscar aprofundamento.

Apenas LG1 tenta esclarecer o significado do termo ‘demonstração’, mas utiliza o termo ‘prova’ ao demonstrar as propriedades enunciadas. Embora os empregue como sinônimos ao afirmar que os teoremas são “deduzidos através da demonstração”, seria coerente utilizar este termo último ao demonstrar as propriedades enunciadas.

As provas utilizadas nos três livros são do tipo conceitual, o que era previsível em LG1 e LG3, uma vez que seus conteúdos se destinam para o ensino superior.

Quanto aos registros de representação, nos três livros são figurais, discursivos e simbólicos, mas LG2 é o único a utilizá-los simultaneamente, em todas as definições, postulados e propriedades. Já LG1 e LG3 privilegiam os registros em língua natural e simbólicos. Para Duval (2011), a simultaneidade de registros figurais e em língua natural é fundamental para potencializar a aprendizagem.

Nenhum dos três livros explorou o estudo das condições necessárias e suficientes. Jahnke (2008) afirma que a distinção entre condições necessárias e suficientes não é óbvia para os alunos, mesmo universitários. Considera ainda que um número reduzido de exemplos não é suficiente para ultrapassar essas dificuldades, uma vez que elas se encontram enraizadas.

Outro aspecto que merece destaque é a axiomática que os livros utilizam para explorar medidas de segmentos. Em LG1, considera-se a noção ‘estar entre’ como primitiva, assim como Hilbert, mas usam-se números reais para formalizar a noção de medidas de segmentos, tomando como referência a obra de Pogorélov. LG3 segue os postulados de Birkhoff, considerando a noção de ‘medida’ como primitiva e definindo a noção ‘estar entre’, que utiliza a correspondência entre números reais e pontos de uma reta. LG2 adota a axiomática de Hilbert. Considera a noção ‘estar entre’ e ‘congruência’ como primitivas e utiliza o postulado do transporte de segmento para introduzir o conceito de medida de segmento.

Uma vez que estes três livros são indicados simultaneamente em um grande número de universidades, esse esclarecimento deve ser feito pelo professor, já que os conceitos envolvidos podem gerar confusão no aluno. O exemplo apresentado acima presta-se também a abrir uma discussão sobre as implicações da escolha de axiomáticas distintas.

Questão 2 (Q_2): Como são introduzidos o conceito de quadriláteros e a soma de seus ângulos internos?

T_1Q_2: Apresentar a definição de quadrilátero e seus elementos.

$t_1(T_1Q_2)$: Utilizar o registro de representação em língua natural.

$t_2(T_1Q_2)$: Utilizar o registro de representação simbólico.

$t_3(T_1Q_2)$: Utilizar o registro de representação figural.

T_2Q_2: Apresentar a soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

$t_1(T_2Q_2)$: Utilizar a triangulação do quadrilátero.

$t_2(T_2Q_2)$: Enunciar a propriedade sem demonstração.

$[\theta/\Theta]_2$: O discurso teórico-tecnológico associado às tarefas T_1Q_2 e T_2Q_2 é a definição de quadrilátero, a triangulação do quadrilátero (divisão do quadrilátero em dois triângulos por meio de uma de suas diagonais), a soma dos ângulos internos de um triângulo e a soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

As técnicas $t_1(T_1Q_2)$, $t_2(T_1Q_2)$ e $t_3(T_1Q_2)$ só se distinguem pelo tipo de registro utilizado. Para um aprendizado significativo, segundo Duval (2009a,b), devem-se mobilizar simultaneamente ao menos dois registros de representação.

Com relação à segunda tarefa, como LG1 e LG3 são voltados ao ensino superior, acreditamos que ambos utilizem a técnica $t_1(T_2Q_2)$ que consiste em traçar a diagonal que parte de um de seus vértices, dividindo o quadrilátero em dois triângulos, e utilizar o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Por ser um resultado considerado elementar, é provável também a utilização da técnica $t_2(T_2Q_2)$ que consiste em apenas enunciar a propriedade. O Quadro 12 sumariza a análise da questão 2.

Quadro 12. Análise da questão 2 (Q2).

		LG1	LG2	LG3
T_1	$t_1(T_1Q_2)$		✓	✓
	$t_2(T_1Q_2)$		✓	✓
	$t_3(T_1Q_2)$		✓	✓
T_2	$t_1(T_2Q_2)$			
	$t_2(T_2Q_2)$	✓	✓	

Fonte: Dados da pesquisa.

Dos três livros analisados, apenas LG1 não apresenta explicitamente a definição de quadrilátero. Na seção destinada aos exercícios do Capítulo 3 (“Axiomas sobre medição de ângulos”), é apresentada a definição de polígono (questão 30) e um quadro com os nomes dos polígonos (questão 35), incluindo o quadrilátero. Os demais livros explicitam a definição.

Maioli (2001) discute as implicações da má interpretação de uma definição e a importância de estudar suas características, o que nos estimulou a estudar as características de cada definição apresentada nos livros analisados, a fim de evitar interpretações equivocadas nas análises que se seguem.

Ao analisar como a definição é proposta em cada um dos livros, observamos que LG1 e LG3 utilizam a definição de polígono, uma vez que nessas duas obras esse conteúdo antecede o estudo dos quadriláteros. LG2, por sua vez, define quadrilátero utilizando a reunião de segmentos.

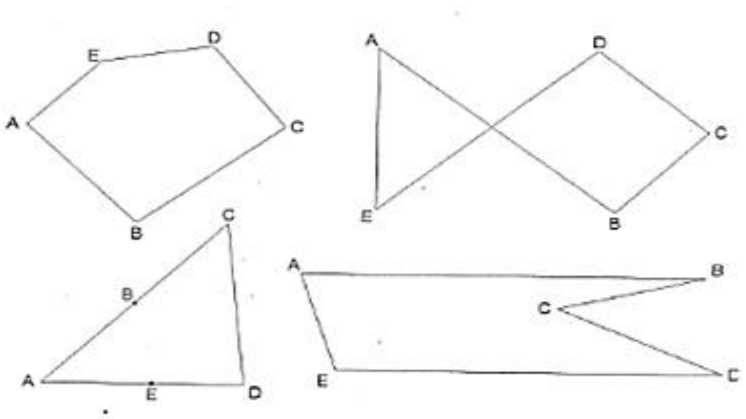
Visto que em LG1 a apresentação do objeto 'quadrilátero' é atrelada a outros polígonos, vamos analisar a definição de polígono considerada nesse volume.

Observamos na Figura 17 que em LG1 o polígono é definido como contorno, não sendo especificado que os pontos (vértices do polígono) foram tomados todos em um mesmo plano. Isso nos leva a concluir que o autor não excluiu a possibilidade de um polígono não plano. Poderíamos então considerar que a definição proposta pelo autor abrange quadriláteros não planos, mas, analisando o livro em sua íntegra, detectamos uma questão proposta em que se solicita ao aluno discutir a seguinte afirmação: "Todo polígono separa o plano em duas partes, uma limitada e outra ilimitada. (A parte limitada é referida como a região limitada pelo polígono, ou interior do polígono)" (LG1, p. 39). Embora o autor solicite a discussão da afirmação, faz-nos pensar que os polígonos definidos são planos. Seria, portanto, aconselhável deixar claro o tipo de polígono considerado.

Figura 17. Definição de polígono apresentada em LG_1.

18. Uma *poligonal* é uma figura formada por uma seqüência de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$. Os pontos são os *vértices* da poligonal e os segmentos são os seus *lados*. Desenhe a poligonal $ABCD$ sabendo que: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2cm$, $A\hat{B}C = 120°$ e $B\hat{C}D = 100°$.

19. Um *polígono* é uma poligonal em que as seguintes 3 condições são satisfeitas: (a) $A_n = A_1$, (b) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades, (c) cada vértice é extremidade de dois lados e (d) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta. Das 4 figuras, abaixo, apenas duas são polígonos. Determine quais são elas.



Um polígono de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} = A_1$, será representado por $A_1A_2A_3, \ldots, A_n$. Ele tem n lados, n vértices e n ângulos.

35. Polígonos convexos recebem designações especiais. São as seguintes as designações dadas a estes polígonos de acordo com seu número de lados, até 10 lados.

nº de lados	nome do polígono convexo
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octágono
9	nonágono
10	decágono

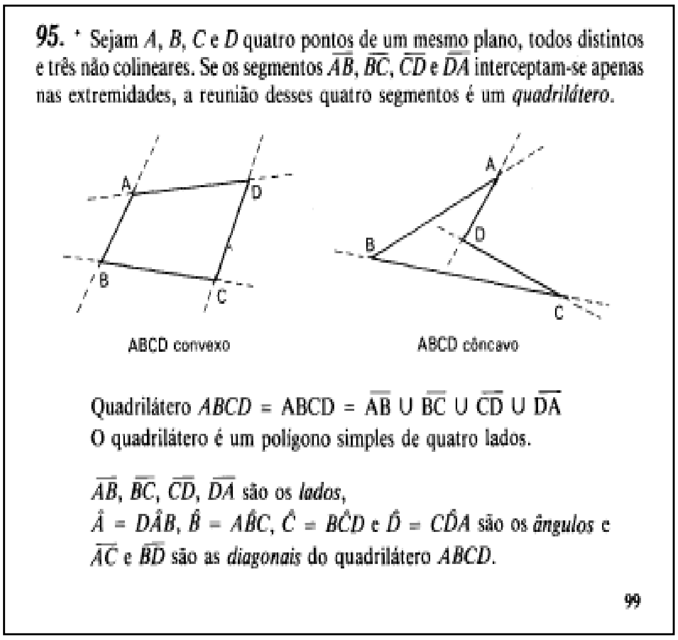
Dado um polígono convexo mostre que qualquer de suas diagonais sempre o divide em dois conjuntos convexos.

Fonte: LG1 (p. 38, 41).

Em LG3, a definição é apresentada no capítulo destinado a quadriláteros, mas, tal como em LG1, também está associada à definição de polígono: “Um quadrilátero é um polígono de quatro lados”, sem deixar claro se o polígono é plano.

Em LG2, o estudo de quadrilátero antecede o de polígono e por isso a definição do primeiro não utiliza a do segundo, deixando, porém, claro que o quadrilátero é um contorno e é plano (Figura 18). Observamos também que o autor utiliza simultaneamente três registros de representação.

Figura 18. Definição de quadrilátero em LG2.



95. * Sejam *A*, *B*, *C* e *D* quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um *quadrilátero*.

Quadrilátero *ABCD* = ABCD = $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$

O quadrilátero é um polígono simples de quatro lados.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ são os *lados*,

$\hat{A} = D\hat{A}B$, $\hat{B} = A\hat{B}C$, $\hat{C} = B\hat{C}D$ e $\hat{D} = C\hat{D}A$ são os *ângulos* e

$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as *diagonais* do quadrilátero *ABCD*.

99

Fonte: LG2 (p. 99).

Quanto aos elementos dos quadriláteros (ângulos, vértices, lados e diagonais), em LG1 e LG3 são abordados no tópico referente a polígonos, embora apenas LG3 esclareça o significado de lados e ângulos opostos e consecutivos do quadrilátero. Esse esclarecimento se faz necessário, uma vez que é requerido nas propriedades dos quadriláteros.

Com relação a $T_2(Q_2)$, nenhuma das obras apresenta a demonstração. LG1 traz o enunciado como um corolário da soma dos ângulos internos do triângulo e propõe a demonstração como exercício. LG2 traz apenas o enunciado e LG3 não se refere a essa propriedade, mas apresenta a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.

As tarefas $T_1(Q_2)$ e $T_2(Q_2)$ têm por objetivo evidenciar a forma como o conteúdo ‘quadriláteros’ foi introduzido em cada livro e qual foi a definição adotada. Observamos que, especialmente nos livros indicados para a graduação, ‘quadriláteros’ foi abordado como um conteúdo já conhecido pelos alunos e a demonstração da soma dos ângulos internos foi proposta como exercício, supondo que os alunos estejam aptos a demonstrá-la, ou deixada de vez a cargo do professor.

Questão 3 (Q_3): Como o autor classifica e define os diferentes tipos de quadriláteros?

T_1Q_3: Apresentar a classificação dos quadriláteros.

$t_1(T_1Q_3)$: Como um tópico do conteúdo quadrilátero.

$t_2(T_1Q_3)$: Incluído na seção de exercícios.

$t_3(T_1Q_3)$: Utilizando diferentes registros de representação.

$t_4(T_1Q_3)$: Utilizando diagrama.

T_2Q_3: Definir paralelogramo.

$t_1(T_2Q_3)$: Utilizando o paralelismo dos lados.

$t_2(T_2Q_3)$: Utilizando uma caracterização do paralelogramo.

$t_3(T_2Q_3)$: Utilizando diferentes registros de representação.

T_3Q_3: Definir retângulo, losango e quadrado.

$t_1(T_3Q_3)$: Utilizando a definição de paralelogramo e congruência de lados e/ou ângulos.

$t_2(T_3Q_3)$: Utilizando a congruência de lados e/ou ângulos.

$t_3(T_3Q_3)$: Utilizando diferentes registros de representação.

T_4Q_3: Definir trapézio.

$t_1(T_4Q_3)$: Utilizando apenas um par de lados paralelos.

$t_2(T_4Q_3)$: Utilizando um par de lados paralelos.

$[\theta/\Theta]_3$: O discurso teórico-tecnológico associado às tarefas T_1Q_3, T_2Q_3 e T_3Q_3 consiste nas definições de paralelogramo, retângulo, losango, quadrado e trapézio.

As tarefas T_1Q_3, T_2Q_3, T_3Q_3 e T_4Q_3 visam observar como a classificação dos quadriláteros é apresentada. As técnicas $t_1(T_1Q_3)$ e $t_2(T_1Q_3)$ prestam-se a apontar a forma com que os autores apresentam a classificação (se em um tópico específico ou na seção de exercícios) e, ainda, quais registros de representação semiótica são utilizados para essa classificação. Com a técnica $t_4(T_1Q_3)$, verificamos se os autores utilizam diagramas para relacionar os quadriláteros.

As técnicas $t_1(T_2Q_3)$ e $t_2(T_2Q_3)$ nos permitiram analisar se os autores utilizam as caracterizações do paralelogramo para defini-lo. Ao utilizar $t_1(T_2Q_3)$, o autor define paralelogramo como o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos; ao optar por $t_2(T_2Q_3)$, utiliza uma caracterização do paralelogramo para defini-lo – por exemplo: (*a*) um quadrilátero convexo que tem dois lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo; (*b*) um quadrilátero cujas diagonais se interceptam em seus pontos médios é um paralelogramo; (*c*) um quadrilátero que tem seus lados opostos congruentes é um paralelogramo; (*d*) um quadrilátero que possui os ângulos opostos congruentes é um paralelogramo.

As técnicas $t_1(T_3Q_3)$ e $t_2(T_3Q_3)$ nos permitiram analisar se os autores descrevem retângulo, quadrado e losango utilizando condições mínimas – por exemplo, se para definir retângulo, uma das seguintes definições foi adotada: (*a*) é um quadrilátero que tem seus ângulos congruentes; (*b*) é um paralelogramo que tem um ângulo reto; (*c*) é um paralelogramo que tem dois lados consecutivos perpendiculares; (*d*) é um paralelogramo cujos ângulos consecutivos são congruentes.

O quadrado pode ser definido como sendo: (*a*) um retângulo em que os lados consecutivos congruentes ou (*b*) um retângulo cujas diagonais são congruentes.

O losango pode ser definido como sendo: (*a*) um paralelogramo cujos lados consecutivos são congruentes ou (*b*) um paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares.

Com a tarefa T_4Q_3 e as técnicas $t_1(T_4Q_3)$ e $t_2(T_4Q_3)$, verificamos se a definição adotada para trapézio foi coerente com as propriedades abordadas pelos autores para esse grupo de quadriláteros. Admitindo a técnica $t_1(T_4Q_3)$, o trapézio é o quadrilátero que possui exatamente um par de lados paralelos (chamados bases, enquanto os outros dois são os lados não bases). Segundo a técnica $t_2(T_4Q_3)$, trapézio é o quadrilátero que possui um par de lados paralelos; neste caso o paralelogramo é um trapézio, ou seja, o paralelogramo é um trapézio isósceles. Essa escolha solicita uma reestruturação da definição de trapézio isósceles ou de suas propriedades. Caso contrário, não poderíamos mais admitir a propriedade que afirma que os ângulos da base de um trapézio isósceles são congruentes.

O Quadro 13 sumariza os resultados dessas tarefas.

Quadro 13. Análise referente da questão 3 (Q3).

		LG1	LG2	LG3
T_1	$t_1(T_1Q_3)$		✓	✓
	$t_2(T_1Q_3)$	✓		
	$t_3(T_1Q_3)$		✓	✓
	$t_4(T_1Q_3)$			
T_2	$t_1(T_2Q_3)$	✓	✓	✓
	$t_2(T_2Q_3)$			
	$t_3(T_2Q_3)$	✓	✓	✓
T_3	$t_1(T_3Q_3)$			✓
	$t_2(T_3Q_3)$	✓	✓	
	$t_3(T_3Q_3)$		✓	✓
T_4	$t_1(T_4Q_3)$			
	$t_2(T_4Q_3)$	✓	✓	✓

Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação à tarefa T_1Q_3, apenas LG1 apresenta a classificação dos quadriláteros na seção de exercícios, e o faz utilizando apenas um tipo de registro – o discursivo – para definir esse polígono.

LG2 e LG3 abordam o conteúdo ‘quadriláteros’ na seção destinada ao desenvolvimento da teoria e utilizam mais de um registro para definir as classes de quadriláteros, sendo que apenas LG2 utiliza simultaneamente os registros em língua natural, figural e simbólico.

Nenhum dos autores utiliza diagramas para relacionar os quadriláteros de acordo com suas propriedades.

Os três livros definem paralelogramo como o quadrilátero que possui lados opostos paralelos. Para representá-lo, utilizam o registro em língua natural e o figural. Apenas LG2 representa este quadrilátero utilizando os três registros simultaneamente.

Quanto a T_3Q_3, LG1 utiliza condições mínimas para definir losango, retângulo e quadrado e emprega os três registros de representação para definir esses quadriláteros. LG2 também utiliza condições mínimas, exceto para o losango, e faz uso apenas do registro em língua natural para definir esses quadriláteros. Apenas LG3 não utiliza condições mínimas para definir retângulo, losango e quadrado, mas emprega a representação discursiva e a figural em suas definições.

A tarefa T_4Q_3 foi executada nos três livros com a técnica $t_2(T_3Q_3)$, ou seja, os três consideram que o paralelogramo é um trapézio. Ao analisar a definição de trapézio isósceles, observamos que nenhuma das três obras recorre a alguma restrição, o que indica que nas três o paralelogramo é um trapézio isósceles e, portanto, o retângulo, o losango e o quadrado também estão contidos no grupo dos trapézios isósceles.

No âmbito da questão 3, observamos mais uma vez que a forma como o conteúdo ‘quadriláteros’ é abordado nos três livros, especialmente LG1 e LG3, indica que os autores esperam que seus leitores disponham de algum conhecimento prévio sobre esse objeto.

Questão 4 (Q_4): **Como o autor aborda as propriedades dos quadriláteros**?

Especialmente na questão 4, subdividimos algumas tarefas em subtarefas, visto que não existe apenas uma propriedade para cada grupo de quadriláteros. Representamos as subtarefas referentes à tarefa T_iQ_j por $T_{ki}Q_j$: subtarefa *k* referente à tarefa *i* da questão *j*. As tarefas referentes às subtarefas $T_{ki}Q_j$, por sua vez, foram representadas por $t_n(T_{ki}Q_j)$, onde *n*, *k*, *i* e *j* são naturais não nulos.

T_1Q_4: Apresentar as propriedades dos paralelogramos.

$t_1(T_1Q_4)$: Observação de propriedades que caracterizam o paralelogramo, validando-as com demonstrações.

$T_{11}Q_4$: Enunciar e demonstrar que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e os consecutivos são suplementares.

$t_1(T_{11}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e congruência de triângulos (caso ângulo-lado-ângulo).

$t_2(T_{11}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a transitividade da igualdade.

$t_3(T_{11}Q_4)$: Apenas enunciar a propriedade, sem demonstrá-la.

$t_4(T_{11}Q_4)$: Propor a propriedade como exercício.

$T_{21}Q_4$: Enunciar e demonstrar que o quadrilátero que possui ângulos opostos congruentes ou ângulos consecutivos suplementares é um paralelogramo.

$t_1(T_{21}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a soma dos ângulos internos do quadrilátero.

$t_2(T_{21}Q_4)$: Apenas enunciar a propriedade, sem demonstrá-la.

$t_3(T_{21}Q_4)$: Propor a propriedade como exercício.

$T_{31}Q_4$: Enunciar e demonstrar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

$t_1(T_{31}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a congruência de triângulos.

$t_2(T_{31}Q_4)$: Apenas enunciar a propriedade, sem demonstrá-la.

$t_3(T_{31}Q_4)$: Propor a propriedade como exercício.

$T_{41}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo quadrilátero que possui lados opostos congruentes é paralelogramo.

$t_1(T_{41}Q_4)$: Utilizar congruência de triângulos.

$t_2(T_{41}Q_4)$: Apenas enunciar a propriedade, sem demonstrá-la.

$t_3(T_{41}Q_4)$: Propor a propriedade como exercício.

$T_{51}Q_4$: Enunciar e demonstrar que em todo paralelogramo as diagonais interceptam-se em seus respectivos pontos médios.

$t_1(T_{51}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal, a propriedade dos lados opostos do paralelogramo e a congruência de triângulos.

$t_2(T_{51}Q_4)$: Apenas enunciar a propriedade, sem demonstrá-la.

$t_3(T_{51}Q_4)$: Propor a propriedade como exercício.

$T_{61}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo quadrilátero em que as diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios é paralelogramo.

$t_1(T_{61}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal, a propriedade dos ângulos opostos pelo vértice e a congruência de triângulos.

$t_2(T_{61}Q_4)$: Apenas enunciar a propriedade, sem demonstrá-la.

$t_3(T_{61}Q_4)$: Propor a propriedade como exercício.

$T_{71}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo quadrilátero convexo que possui dois lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo.

$t_1(T_{71}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a congruência de triângulos.

$t_2(T_{71}Q_4)$: Apenas enunciar a propriedade, sem demonstrá-la.

$t_3(T_{71}Q_4)$: Propor a propriedade como exercício

$[\theta/\Theta](T_1Q_4)$: O discurso teórico-tecnológico associado à tarefa T_1Q_4 consiste em: teorema das paralelas cortados por uma transversal, soma dos ângulos internos de um quadrilátero, congruência de triângulos, transitividade da relação de igualdade, definição de paralelogramo, definição de diagonal, propriedades do paralelogramo, definição de ponto médio e propriedade dos ângulos opostos pelo vértice.

Utilizando as duas últimas técnicas de cada subtarefa, o livro apenas enuncia a propriedade, sendo que, utilizando a última técnica, a demonstração da propriedade é proposta como exercício para o aluno.

Seguem-se as demonstrações, efetuadas segundo as técnicas propostas para cada subtarefa.

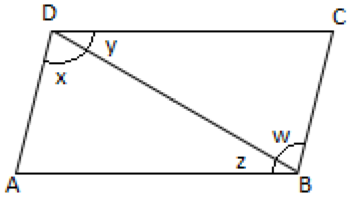
$T_{11}Q_4$: Enunciar e demonstrar que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e os consecutivos são suplementares.

As técnicas $t_1(T_{11}Q_4)$ e $t_2(T_{11}Q_4)$ se distinguem pelo fato de apenas a primeira utilizar congruência de triângulos, embora as duas utilizem o teorema das paralelas. Seguem-se as demonstrações segundo cada técnica.

Demonstração segundo a técnica $t_1(T_{11}Q_4)$:

$t_1(T_{11}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e congruência de triângulos (caso ângulo-lado-ângulo) (Figura 19).

Figura 19. Figura-suporte para a demonstração de que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e os consecutivos são suplementares, segundo a técnica *t*$_1$(T$_{11}$Q$_4$).



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é paralelogramo

Tese: Os ângulos opostos são congruentes, isto é, $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\widehat{D} \equiv \hat{B}$

Os ângulos consecutivos são suplementares, isto, é,

$med(\hat{A}) + med(\widehat{D}) = med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = 180^o$ e

$med(\hat{A}) + med(\widehat{B}\ ) = med(\widehat{D}) + med(\hat{C}) = 180^o$

Demonstração:

A diagonal $\overline{BD}$ divide o paralelogramo *ABCD* em dois triângulos: *ABD* e *BCD*. Como os lados opostos do paralelogramo são paralelos, pelo teorema das paralelas, $\hat{x} \equiv A\widehat{D}B \equiv D\hat{B}C \equiv \widehat{w}$ e $\hat{y} \equiv C\widehat{D}B \equiv A\hat{B}D \equiv \hat{z}$ (ângulos alternos internos). Destas igualdades observamos que $med\ (A\widehat{D}C) = x + y = w + z = med(A\hat{B}C)$. Logo, $\widehat{D} \equiv \hat{B}$.

Comparando os triângulos *ABD* e *BCD*, tem-se: $\hat{x} \equiv \widehat{w}$, $\overline{BD}$ lado comum e $\hat{y} \equiv \hat{z}$. Pelo caso ângulo-lado-ângulo de congruência de triângulos, esses triângulos são congruentes e, portanto, $\hat{A} \equiv \hat{C}$.

Ainda pelo teorema das paralelas, $med\ (\hat{A}) + med(\widehat{D}) = med(\hat{B}\ ) + med\ (\hat{C}) = 180^o$ e $med(\hat{A}) + med(\widehat{B}\ ) = med(\widehat{D}) + med(\hat{C}) = 180^o$. Logo, os ângulos consecutivos são suplementares.

Demonstração segundo a técnica *t*$_2$(T$_{11}$Q$_4$):

t$_2$(T$_{11}$Q$_4$): Utilizando o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a transitividade da igualdade (Figura 20).

Figura 20. Figura-suporte para a demonstração de que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e os consecutivos são suplementares, segundo t_2($T_{11}Q_4$).

Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é paralelogramo

Tese: $\hat{A} \equiv \hat{C}, \hat{B} \equiv \hat{D}$;

$med\,(\hat{A}) + med(\hat{D}) = med(\hat{B}\,) + med\,(\hat{C}) = 180^o$ e $med(\hat{A}) + med(\hat{B}\,) = med(\hat{D}) + med(\hat{C}) = 180^o$

Demonstração:

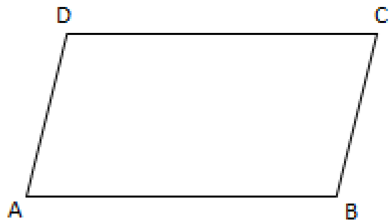
Como os lados opostos do paralelogramo são paralelos, pelo teorema das paralelas, temos: $med(\hat{A}) + med(\hat{B}\,) = 180^o$ e $med(\hat{B}\,) + med\,(\hat{C}) = 180^o$. Daí segue-se que $med(\hat{A}) + med(\hat{B}\,) = med(\hat{B}\,) + med\,(\hat{C})$ e, portanto, $\hat{A} \equiv \hat{C}$. De modo análogo, mostra-se que $\hat{B} \equiv \hat{D}$.

Ainda pelo teorema das paralelas, $med\,(\hat{A}) + med(\hat{D}) = med(\hat{B}\,) + med\,(\hat{C}) = 180^o$ e $med(\hat{A}) + med(\hat{B}\,) = med(\hat{D}) + med(\hat{C}) = 180^o$. Logo, os ângulos consecutivos são suplementares.

$T_{21}Q_4$: Enunciar e demonstrar que o quadrilátero que possui ângulos opostos congruentes ou ângulos consecutivos suplementares é um paralelogramo.

t_1($T_{21}Q_4$): Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a soma dos ângulos internos do quadrilátero (Figura 21).

Figura 21. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{21}Q_4$ segundo a técnica t_2($T_{21}Q_4$).



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: Os ângulos opostos do quadrilátero *ABCD* são congruentes, isto é, $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$.

Tese: O quadrilátero *ABCD* é um paralelogramo.

Demonstração:

$\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D} \Rightarrow med(\hat{A}) + med(\hat{B}) = med(\hat{C}) + med(\hat{D})$.

$med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) + med(\hat{D}) = 360^o \Rightarrow 2[med(\hat{A}) + med(\hat{B})] = 360^o \Rightarrow med(\hat{A}) + med(\hat{B}) = 180^o$.

Se $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são cortadas por uma transversal $\overline{AB}$, sendo que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares, então $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelas. De modo análogo, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelas. Logo, *ABCD* é um paralelogramo.

Mostramos que um quadrilátero que possui ângulos opostos congruentes é um paralelogramo. Vamos mostrar que um quadrilátero que possui ângulos consecutivos suplementares é um paralelogramo.

Ainda considerando a Figura 21**.**

Hipótese: Os ângulos consecutivos do quadrilátero *ABCD* são suplementares, ou seja:

$$med(\hat{A}) + med(\hat{B}) = med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = med(\hat{C}) + med(\hat{D}) = med(\hat{D}) + med(\hat{A}) = 180^o$$

Tese: *ABCD* é um paralelogramo.

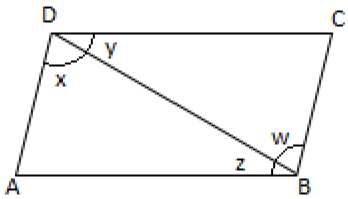
Demonstração:

Se $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) = med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = med(\hat{C}) + med(\hat{D}) = med(\hat{D}) + med(\hat{A}) = 180^o$, então, pelo teorema das paralelas, $\overline{AB}//\overline{DC}$ e $\overline{AD}//\overline{BC}$. Logo, *ABCD* é um paralelogramo.

$T_{31}Q_4$: Enunciar e demonstrar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

$t_1(T_{31}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a congruência de triângulos.

Figura 22. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{31}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{31}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é paralelogramo

Tese: Os lados opostos são congruentes, ou seja, *AB* = *DC* e *AD* = *BC*.

Demonstração:

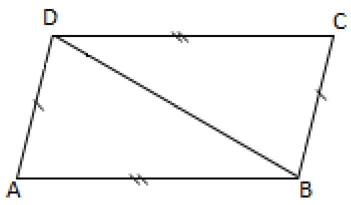
A diagonal $\overline{BD}$ divide o paralelogramo *ABCD* em dois triângulos: *ABD* e *BCD*. Como os lados opostos do paralelogramo são paralelos, pelo teorema das paralelas, $\hat{x} \equiv A\hat{D}B \equiv D\hat{B}C \equiv \hat{w}$ e $\hat{y} \equiv C\hat{D}B \equiv A\hat{B}D \equiv \hat{z}$ (ângulos alternos internos).

Comparando os triângulos *ABD* e *BCD* tem-se: $\hat{x} \equiv \hat{w}$, $\overline{BD}$ lado comum e $\hat{y} \equiv \hat{z}$. Pelo caso ângulo-lado-ângulo de congruência de triângulos, esses triângulos são congruentes e, portanto, *AB* = *CD* e *AD* = *BC.*

$T_{41}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo quadrilátero que possui lados opostos congruentes é paralelogramo.

$t_1(T_{41}Q_4)$: Utilizar congruência de triângulos.

Figura 23. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{41}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{41}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *AD* = *BC* e *AB* = *DC*

Tese: *ABCD* é paralelogramo

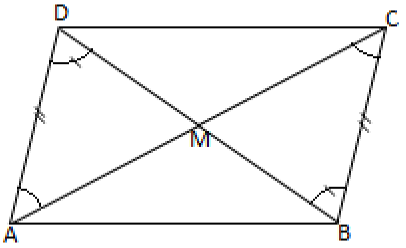
Demonstração:

Considerando os triângulos *ABD* e *BCD*, tem-se, por hipótese, que *AD* = *BC* e *AB* = *DC*. Além disso, $\overline{BD}$ é lado comum. Logo, pelo caso de congruência lado-lado-lado, esses triângulos são congruentes e, portanto, $A\hat{D}B \equiv D\hat{B}C$ e $A\hat{B}D \equiv B\hat{D}C$. Pelo teorema das paralelas, $\overline{AD} // \overline{BC}$ e $\overline{AB} // \overline{DC}$. Podemos concluir então que *ABCD* é paralelogramo.

$T_{51}Q_4$: Enunciar e demonstrar que em todo paralelogramo as diagonais interceptam-se em seus respectivos pontos médios.

$t_1(T_{51}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal, a propriedade dos lados opostos do paralelogramo e a congruência de triângulos.

Figura 24. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{51}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{51}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é paralelogramo, $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{\mathrm{BD}}$ são diagonais e *M* é a interseção das diagonais $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{BD}$.

Tese: *M* é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, isto é, *AM* = *MC* e *BM* = *MD.*

Demonstração:

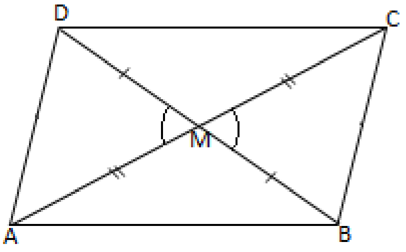
As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ dividem o paralelogramo *ABCD* em quatro triângulos: *AMD*, *BMC*, *DMC* e *AMB.* Considerando os triângulos *AMD* e *BMC*, o fato de *ABCD* ser um paralelogramo, tem-se: $A\widehat{D}M \equiv M\widehat{B}C$ (ângulos alternos internos); *AD* = *BC* (lados opostos de um paralelogramo) e $D\hat{A}M \equiv M\hat{C}B$ (ângulos alternos internos).

Pelo caso de congruência ângulo-lado-ângulo, os triângulos *AMD* e *BMC* são congruentes. Logo, *AM* = *MC* e *DM* = *MB* e, portanto, *M* é ponto médio de *AC* e *BD.*

$T_{61}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo quadrilátero em que as diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios é paralelogramo.

$t_1(T_{61}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal, a propriedade dos ângulos opostos pelo vértice e a congruência de triângulos.

Figura 25. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{61}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{61}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é quadrilátero, $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{\mathrm{BD}}$ são diagonais e o ponto *M*, que é interseção das diagonais $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{BD}$, é ponto médio de ambas.

Tese: *ABCD* é paralelogramo

Demonstração:

Considerando os triângulos *AMD* e *BMC* e o fato de *M* ser ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, tem-se:

DM = *MB* (onde *M* é ponto médio de $\overline{DB}$);

$D\widehat{M}A \equiv C\widehat{M}B$ (ângulos opostos pelo vértice);

AM = *MC* (*M* é ponto médio de $\overline{AC}$).

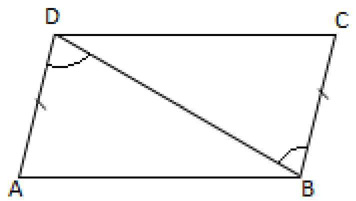
Pelo caso de congruência lado-ângulo-lado, os triângulos *AMD* e *BMC* são congruentes. Logo, $A\widehat{D}M \equiv M\widehat{B}C$ e portanto, pelo teorema das paralelas, $\overline{AD}//\overline{BC}$.

De modo análogo, mostra-se a congruência dos triângulos *DMC* e *AMB*, o que implicará que $\overline{AB}//\overline{CD}$, concluindo-se que *ABCD* é um paralelogramo.

$T_{71}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo.

$t_1(T_{71}Q_4)$: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a congruência de triângulos.

Figura 26. Figura suporte para a demonstração da tarefa $T_{71}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{71}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é quadrilátero, $\overline{BD}$ é diagonal e $\overline{AD}$ é paralelo e congruente a $\overline{BC}$.

Tese: *ABCD* é paralelogramo.

Demonstração:

A diagonal $\overline{BD}$ divide o quadrilátero *ABCD* em dois triângulos: *ABD* e *BCD.*

Considerando esses triângulos, tem-se: *AD* = *BC* (hipótese).

$A\widehat{D}B \equiv D\widehat{B}C$ (hipótese e teorema das paralelas) e $\overline{BD}$ é lado comum.

Pelo caso de congruência lado-ângulo-lado, os triângulos *ABD* e *BCD* são congruentes. Logo, $A\widehat{B}D \equiv B\widehat{D}C$ e portanto, pelo teorema das paralelas, $\overline{AB}//\overline{DC}$. Podemos concluir então que *ABCD* é um paralelogramo.

O Quadro 14 sumariza a análise correspondente à primeira tarefa da questão 4.

Quadro 14. Análise referente à tarefa 1 da questão 4.

			LG1	LG2	LG3
T_1Q_4	$T_{11}Q_4$	$t_1(T_{11}Q_4)$	✓		
		$t_2(T_{11}Q_4)$		✓	
		$t_3(T_{11}Q_4)$			✓
		$t_4(T_{11}Q_4)$			
	$T_{21}Q_4$	$t_1(T_{21}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{21}Q_4)$			
		$t_3(T_{21}Q_4)$	✓		
	$T_{31}Q_4$	$t_1(T_{31}Q_4)$	✓	✓	
		$t_2(T_{31}Q_4)$			✓
		$t_3(T_{31}Q_4)$			
	$T_{41}Q_4$	$t_1(T_{41}Q_4)$	✓	✓	
		$t_2(T_{41}Q_4)$			✓
		$t_3(T_{41}Q_4)$			
	$T_{51}Q_4$	$t_1(T_{51}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{51}Q_4)$	✓		
		$t_3(T_{51}Q_4)$	✓		✓
	$T_{61}Q_4$	$t_1(T_{61}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{61}Q_4)$			✓
		$t_3(T_{61}Q_4)$	✓		✓
	$T_{71}Q_4$	$t_1(T_{71}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{71}Q_4)$	✓		✓
		$t_3(T_{71}Q_4)$			

Fonte: Dados da pesquisa.

T_2Q_4: Apresentar as propriedades dos retângulos

$t_1(T_2Q_4)$: Observação de propriedades que caracterizam o retângulo, validando-as com demonstração.

$T_{12}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo retângulo é paralelogramo.

$t_1(T_{12}Q_4)$: Utilizar a propriedade das paralelas.

$t_2(T_{12}Q_4)$: Utilizar as propriedades do paralelogramo.

$t_3(T_{12}Q_4)$: Apenas enunciar, sem demonstrar.

$t_4(T_{12}Q_4)$: Apresentar a propriedade como exercício.

$T_{22}Q_4$: Enunciar e demonstrar que em todo retângulo as diagonais são congruentes.

$t_1(T_{22}Q_4)$: Assumir que o retângulo é paralelogramo e utilizar a congruência de triângulos.

$t_2(T_{22}Q_4)$: Apenas enunciar, sem demonstrar;

$t_3(T_{22}Q_4)$: Apresentar a propriedade como exercício.

$T_{32}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo paralelogramo que possui diagonais congruentes é um retângulo.

$t_1(T_{32}Q_4)$: Utilizar a congruência de triângulos.

$t_2(T_{32}Q_4)$: Apenas enunciar, sem demonstrar.

$t_3(T_{32}Q_4)$: Apresentar a propriedade como exercício.

$[\theta/\Theta](T_2Q_4)$: Os discursos teórico-tecnológicos associados à tarefa T_2Q_4 são: definição de retângulo, definição de diagonal de um quadrilátero, teorema das paralelas cortadas por uma transversal, propriedades do paralelogramo, definição de paralelogramo, soma dos ângulos internos de um quadrilátero e congruência de triângulos.

Ao optar pelas duas últimas técnicas de cada tarefa, o autor apenas enuncia a propriedade. Estas se distinguem pelo fato de, em cada tarefa, t_2 enunciar a propriedade na seção que contempla a teoria sobre quadriláteros e t_3 fazê-lo na seção de exercícios propostos ao aluno.

Seguem-se as demonstrações, segundo as técnicas propostas para cada subtarefa.

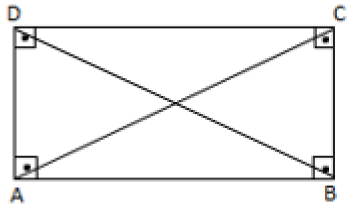
$T_{12}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo retângulo é paralelogramo.

As técnicas $t_1(T_{12}Q_4)$ e $t_2(T_{12}Q_4)$ se distinguem pelo fato de a primeira demonstrar a propriedade utilizando a definição de retângulo (os quatro ângulos iguais, consequentemente retos) e a propriedade das paralelas cortadas por uma transversal, enquanto a segunda utiliza a definição de retângulo e uma das condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja paralelogramo (ângulos opostos congruentes ou ângulos consecutivos suplementares).

$T_{22}Q_4$: Enunciar e demonstrar que em todo retângulo as diagonais são congruentes.

$t_1(T_{22}Q_4)$: Assumir que o retângulo é paralelogramo e utilizar congruência de triângulos.

Figura 27. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{22}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{22}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é um retângulo.

Tese: $AC = BD$

Demonstração:

Considerando os triângulos *ADB* e *ABC*, tem-se:

AD = *BC* (pois o retângulo é um paralelogramo)

$med(D\hat{A}B) = 90^o = med(C\hat{B}A)$ (*ABCD* é retângulo);

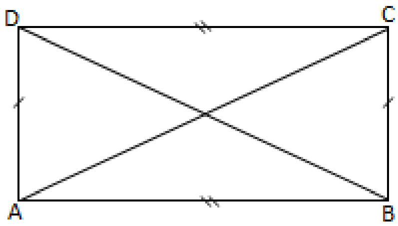
$\overline{AB}$ é lado comum.

Pelo caso de congruência lado-ângulo-lado, os triângulos *ADB* e *ABC* são congruentes. Logo *AC* = *BD*.

$T_{32}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo paralelogramo que possui diagonais congruentes é um retângulo.

$t_1(T_{32}Q_4)$: Utilizar a congruência de triângulos.

Figura 28. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{32}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{32}Q_4)$.



Fonte: A autora

Hipótese: *ABCD* é um paralelogramo e *AC* = *BD*.

Tese: *ABCD* é um retângulo.

Demonstração:

Considerando os triângulos *ADB* e *ABC*, tem-se:

AD = *BC* (pois *ABCD* é um paralelogramo);

AC = *BD* (hipótese);

$\overline{AB}$ é lado comum.

Pelo caso de congruência lado-lado-lado, os triângulos *ADB* e *ABC* são congruentes. Logo, $med(D\hat{A}B) = med(C\hat{B}A)$. Mas *ABCD* é paralelogramo, e então $D\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ são suplementares. Assim, $med(D\hat{A}B) = med(C\hat{B}A) = 90^o$. Mais uma vez, pelo fato de *ABCD* ser um paralelogramo (os ângulos opostos são congruentes), tem-se que $med(A\hat{D}C) = med(D\hat{C}B) = 90^o$. Portanto *ABCD* é um retângulo.

O Quadro 15 sumariza a análise da tarefa 2 da questão 4.

Quadro 15. Análise referente à tarefa 2 da questão 4.

			LG1	LG2	LG3
T_2Q_4	$T_{12}Q_4$	$t_1(T_{12}Q_4)$			
		$t_2(T_{12}Q_4)$		✓	
		$t_3(T_{12}Q_4)$			✓
		$t_4(T_{12}Q_4)$	✓		
	$T_{22}Q_4$	$t_1(T_{22}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{22}Q_4)$			
		$t_3(T_{22}Q_4)$	✓		
	$T_{32}Q_4$	$t_1(T_{32}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{32}Q_4)$			
		$t_3(T_{32}Q_4)$	✓		

Fonte: Dados da pesquisa.

T_3Q_4: Apresentar as propriedades do losango.

$t_1(T_3Q_4)$: Observação de propriedades que caracterizam o losango, validando-as com demonstração.

$T_{13}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo losango é paralelogramo.

$t_1(T_{13}Q_4)$: Utilizar a congruência de triângulos.

$t_2(T_{13}Q_4)$: Utilizar a congruência dos lados opostos.

$t_3(T_{13}Q_4)$: Apenas enunciar, sem demonstrar.

$t_4(T_{13}Q_4)$: Apresentar a propriedade como exercício.

$T_{23}Q_4$: Enunciar e demonstrar que em todo losango as diagonais são perpendiculares.

$t_1(T_{23}Q_4)$: Assumir que o losango é paralelogramo e utilizar a congruência de triângulos.

$t_2(T_{23}Q_4)$: Apenas enunciar, sem demonstrar.

$t_3(T_{23}Q_4)$: Apresentar a propriedade como exercício.

$T_{33}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo paralelogramo que possui diagonais perpendiculares é um losango.

$t_1(T_{33}Q_4)$: Utilizar congruência de triângulos.

$t_2(T_{33}Q_4)$: Apenas enunciar, sem demonstrar.

$t_3(T_{33}Q_4)$: Apresentar a propriedade como exercício.

$[\theta/\Theta](T_3Q_4)$: O discurso teórico-tecnológico associado à tarefa T_3Q_4 consiste em: definição de losango, definição de diagonal de um quadrilátero, propriedades do paralelogramo, definição de paralelogramo, ângulos suplementares e congruência de triângulos.

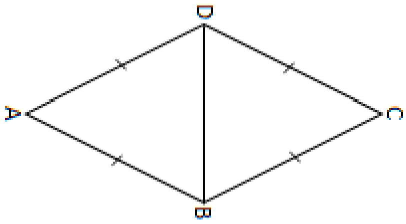
As técnicas utilizadas para resolução de T_3Q_4 determinarão se a propriedade correspondente é contemplada na seção destinada à teoria ou na seção de exercício ou, ainda, se é apresentada a respectiva demonstração.

Seguem-se as técnicas apresentadas para a resolução das subtarefas referentes a T_3Q_4.

$T_{13}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo losango é paralelogramo.

$t_1(T_{13}Q_4)$: Utilizar a congruência de triângulos.

Figura 29. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{32}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{13}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: ABCD é um losango.

Tese: ABCD é um paralelogramo.

Demonstração:

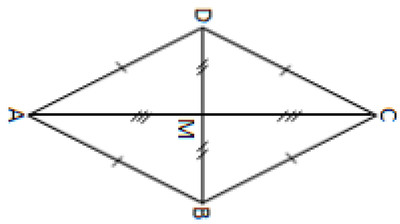
Considerando os triângulos ADB e BCD, tem-se que o lado $\overline{BD}$ é comum e que AD = DC e AB = BC, visto que ABCD é um losango. Pelo caso lado-lado-lado de congruência de triângulos, ADB e BCD são congruentes. Logo, $D\hat{A}B \equiv D\hat{C}B$ e, portanto, ABCD é um paralelogramo.

Utilizando-se a técnica $t_2(T_{13}Q_4)$, basta usar a congruência dos lados opostos, que é uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

$T_{23}Q_4$: Enunciar e demonstrar que em todo losango as diagonais são perpendiculares.

$t_1(T_{23}Q_4)$: Assumir que o losango é paralelogramo e utilizar a congruência de triângulos.

Figura 30. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{32}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{13}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é um losango.

Tese: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares.

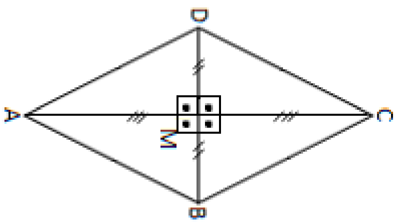
Demonstração:

Se *ABCD* é losango, então *ABCD* é paralelogramo. Daí segue-se que *DM* = *MB*, *AM* = *MC* e *AB* = *BC* = *CD* = *DA*. Logo, os triângulos *ABM*, *BMC*, *MCD* e *CMD* são congruentes pelo caso lado-lado-lado e, portanto, $med(A\widehat{M}D) = med(A\widehat{M}B) = med(B\widehat{M}C) = med(C\widehat{M}D) = 90^{o}$. Assim, podemos concluir que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares.

$T_{33}Q_4$: Enunciar e demonstrar que todo paralelogramo que possui diagonais perpendiculares é um losango.

$t_1(T_{33}Q_4)$: Utilizar a congruência de triângulos.

Figura 31. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{33}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{33}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é um paralelogramo e $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares.

Tese: *ABCD* é um losango.

Demonstração:

Como as diagonais de um paralelogramo se bisseccionam e, por hipótese, as diagonais do paralelogramo *ABCD* são perpendiculares, podemos afirmar, pelo caso lado-ângulo-lado, que os triângulos *AMB*, *BMC*, *CMD* e *DMA* são congruentes. Logo, *AB* = *BC* = *CD* = *DA* e, portanto, *ABCD* é um losango.

T_4Q_4: Enunciar e justificar que o quadrado é paralelogramo, retângulo e losango.

t_1(**T_4Q_4**): Utilizar as propriedades do paralelogramo, retângulo e losango.

t_2(**T_4Q_4**)**:** Apresentar como exercício.

[θ/Θ](T_4Q_4): O discurso teórico-tecnológico associado à tarefa T_4Q_4 consiste em: definições de quadrado, paralelogramo, retângulo e losango; propriedades do paralelogramo, de retângulo e de losango.

T_5Q_4: Apresentar as propriedades dos trapézios.

$t_1(T_5Q_4)$: Observação de propriedades que caracterizam o trapézio, validando-as com demonstração.

$T_{15}Q_4$: Enunciar e demonstrar que os ângulos consecutivos de bases distinta, de um trapézio são suplementares.

$t_1(T_{15}Q_4)$: Utilizar a definição de trapézio e o teorema das paralelas.

$t_2(T_{15}Q_4)$: Apenas enunciar, sem demonstrar.

$t_3(T_{15}Q_4)$: Apresentar a propriedade como exercício.

$T_{25}Q_4$: Enunciar e demonstrar que os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

$t_1(T_{25}Q_4)$: Utilizar a congruência de triângulos.

$t_2(T_{25}Q_4)$: Apenas enunciar, sem demonstrar.

$t_3(T_{25}Q_4)$: Apresentar a propriedade como exercício.

$T_{35}Q_4$: Enunciar e demonstrar que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

$t_1(T_{35}Q_4)$: Utilizar a congruência de triângulos.

$t_2(T_{35}Q_4)$: Apenas enunciar, sem demonstrar.

$t_3(T_{35}Q_4)$: Apresentar a propriedade como exercício.

[θ/Θ](T_5Q_4): O discurso teórico-tecnológico associado à tarefa T_5Q_4 consiste em: definição de trapézio, definição de trapézio isósceles, definição de diagonal de um quadrilátero e congruência de triângulos, teorema das paralelas, definição de ângulos suplementares.

As técnicas utilizadas para a resolução de T_5Q_4 determinam se a propriedade correspondente é contemplada na seção destinada à teoria ou na seção de exercício ou, ainda, se a respectiva demonstração.

Seguem-se as técnicas apresentadas para resolução das subtarefas referentes a T_5Q_4.

$T_{15}Q_4$: Enunciar e demonstrar que os ângulos consecutivos de bases distintas de um trapézio são suplementares.

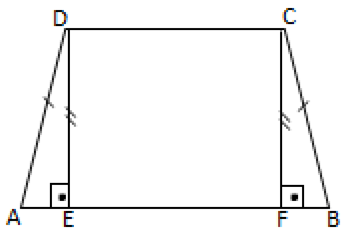
$t_1(T_{15}Q_4)$: Utilizar a definição de trapézio e o teorema das paralelas.

A solução dessa tarefa utilizando a técnica $t_1(T_{15}Q_4)$ consiste em utilizar o teorema das paralelas e a definição de trapézio. Os ângulos consecutivos de bases distintas de um trapézio são colaterais internos formados por retas paralelas e uma transversal. Logo, são suplementares.

$T_{25}Q_4$: Enunciar e demonstrar que os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

$t_1(T_{25}Q_4)$: Utilizar a congruência de triângulos.

Figura 32. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{15}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{15}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é um trapézio isósceles.

Tese: $D\hat{A}B \equiv C\hat{B}A$ e $A\hat{D}C \equiv D\hat{C}B$.

Demonstração:

Traçando duas perpendiculares à base maior do trapézio pelos pontos *C* e *D* (Figura 32), obtemos os triângulos retângulos *ADE* e *BCF* tais que:

AD = *BC* (*ABCD* é um trapézio isósceles);

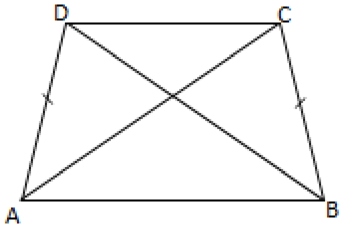
DE = *CF* (distâncias entre duas paralelas, que corresponde à altura do trapézio).

Pelo caso cateto-hipotenusa, *ADE* e *BCF* são congruentes. Logo, $D\hat{A}B \equiv C\hat{B}A$. Como os ângulos $A\hat{D}C$ e $D\hat{C}B$ são respectivamente suplementos de $D\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$, então $A\hat{D}C \equiv D\hat{C}B$.

$T_{35}Q_4$: Enunciar e demonstrar que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

$t_1(T_{35}Q_4)$: Utilizar a congruência de triângulos.

Figura 33. Figura-suporte para a demonstração da tarefa $T_{25}Q_4$ segundo a técnica $t_1(T_{25}Q_4)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: *ABCD* é um trapézio isósceles.

Tese: *AC = BD.*

Demonstração:

Considerando os triângulos *ACD* e *BDC*, tem-se que:

AD = BC (lados congruentes do trapézio isósceles);

$A\widehat{D}C \equiv D\widehat{C}B$ (ângulos da base de um trapézio isósceles);

$\overline{DC}$ é lado comum.

Pelo caso de congruência lado-ângulo-lado, os triângulos *ACD* e *BDC* são congruentes. Logo, *AC = BD.*

As técnicas $t_1(T_{15}Q_4)$ e $t_1(T_{25}Q_4)$ só têm validade para trapézios não paralelogramos. Embora os paralelogramos sejam trapézios com dois lados não bases congruentes, deve ser feita uma restrição quanto à definição de trapézio isósceles, para não haver incoerências nas propriedades desse tipo de trapézio. Uma definição sugerida por Bongiovanni (2010, p. 10) e que evita tais contradições é: "Trapézio isósceles é um trapézio que tem um único par de lados opostos congruentes (ou de uma maneira equivalente: trapézio isósceles é um trapézio que apresenta um único eixo de simetria)".

Questão 5 (Q_5): Como o autor aborda base média de um triângulo?

T_1Q_5: Enunciar e demonstrar o teorema da base média do triângulo.

$t_1(T_1Q_5)$: Utilizar o teorema das paralelas, a congruência de triângulos e o axioma de Euclides.

$t_2(T_1Q_5)$: Utilizar o teorema das paralelas, congruência de triângulos e a existência do ponto médio.

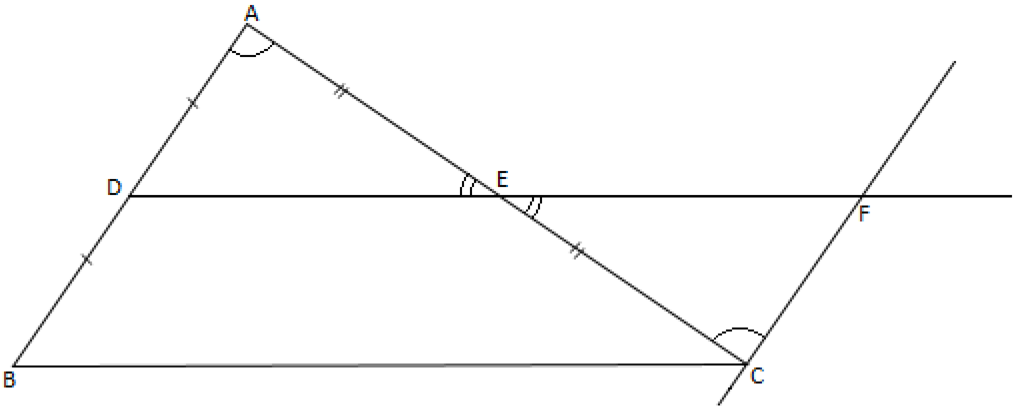
$t_3(T_1Q_5)$: Apenas enunciar sem demonstrar.

$t_4(T_1Q_5)$: Apresentar o teorema como exercício.

$[\theta/\Theta](T_1Q_5)$: O discurso teórico-tecnológico associado à tarefa T_1Q_5 consiste em: definição de paralelogramo, propriedades do paralelogramo, definição de ponto médio, axioma de Euclides, teorema das paralelas e congruência de triângulos.

Segue-se a resolução da tarefa T_1Q_5 segundo as técnicas $t_1(T_1Q_5)$ e $t_2(T_1Q_5)$.

Figura 34. Figura-suporte para a demonstração da tarefa T_1Q_5 segundo as técnicas $t_1(T_1Q_5)$ e $t_2(T_1Q_5)$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Hipótese: D é ponto médio de $\overline{AB}$ e E é ponto médio de $\overline{AC}$.

Tese: $\overline{DE}//\overline{BC}$ e $DE = \frac{BC}{2}$.

Pelo vértice C do triângulo ABC, traça-se uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$ (a existência dessa reta está garantida pelo axioma de Euclides), a qual que encontra a reta-suporte do segmento $\overline{DE}$ em um ponto F.

Considerando os triângulos ADE e CEF tem-se que:

$D\hat{A}E \equiv E\hat{C}F$ (ângulos alternos internos);

$AE \equiv EC$ (E é ponto médio do lado $\overline{AC}$);

$D\hat{E}A \equiv C\hat{E}F$ (ângulos opostos pelo vértice).

Pelo caso de congruência ângulo-lado-ângulo, os triângulos ADE e CEF são congruentes. Logo, $AD = CF = BD$. Segue-se então que o quadrilátero $BCFD$ possui dois lados paralelos e congruentes. Assim, $BCFD$ é um paralelogramo e, portanto, $\overline{DE}//\overline{BC}$.

Ainda da congruência dos triângulos ADE e CEF, tem-se que $DE = EF$ e $DF = BC$. Logo. $DE = \frac{1}{2}BC$.

A técnica $t_2(T_1Q_5)$ se diferencia de $t_1(T_1Q_5)$ ao utilizar a existência do ponto médio, em vez de usar o axioma de Euclides, ou seja, considerar um ponto F na reta-suporte do segmento $\overline{DE}$ tal que E seja ponto médio de $\overline{DE}$ e obter o paralelismo entre $\overline{AB}$ e $\overline{CF}$ a partir da congruência dos triângulos ADE e CEF. Desse modo, a congruência se justifica pelo caso lado-ângulo-lado.

O Quadro 16 sumariza a análise das tarefas 3, 4 e 5 da questão 4 e da tarefa 1 da questão 5.

Quadro 16. Análise referente às tarefas 3, 4 e 5 da questão 4 e tarefa 1 da questão 5.

			LG1	LG2	LG3
T_3Q_4	$T_{13}Q_4$	$t_1(T_{13}Q_4)$			
		$t_2(T_{13}Q_4)$		✓	
		$t_3(T_{13}Q_4)$			✓
		$t_4(T_{13}Q_4)$	✓		
	$T_{23}Q_4$	$t_1(T_{23}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{23}Q_4)$			✓
		$t_3(T_{23}Q_4)$	✓		
	$T_{33}Q_4$	$t_1(T_{33}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{33}Q_4)$			✓
		$t_3(T_{33}Q_4)$	✓		
T_4Q_4	–	$t_1(T_4Q_4)$		✓	
		$t_2(T_4Q_4)$	✓		
T_5Q_4	$T_{15}Q_4$	$t_1(T_{15}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{15}Q_4)$			
		$t_3(T_{15}Q_4)$			
	$T_{25}Q_4$	$t_1(T_{25}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{25}Q_4)$			
		$t_3(T_{25}Q_4)$	✓		✓
	$T_{35}Q_4$	$t_1(T_{35}Q_4)$		✓	
		$t_2(T_{35}Q_4)$			
		$t_3(T_{35}Q_4)$	✓		
		$t_4(T_{35}Q_4)$			
Q_5	T_1Q_5	$t_1(T_1Q_5)$		✓	
		$t_2(T_1Q_5)$	✓		✓
		$t_3(T_1Q_5)$			
		$t_4(T_1Q_5)$			

Fonte: Dados da pesquisa.

A classificação dos quadriláteros é abordada nos três livros analisados. Em LG1, apenas o paralelogramo é definido na seção que focaliza a teoria. Os demais quadriláteros (retângulo, losango, quadrado, trapézio) são definidos na seção de exercícios. Semelhantemente, as propriedades desses quadriláteros e as relações entre eles são em sua maioria expostas como exercício na seção referente à teoria ou propostas como exercício nas seções *Exercício* ou *Problemas*. Essa forma de apresentação pode levar a uma abordagem superficial desse tópico e evidencia que o autor admite que o conteúdo já é conhecido pelo aluno.

As únicas propriedades de quadriláteros demonstradas pelo autor são as relativas às tarefas $T_{31}Q_4$, $T_{41}Q_4$ e T_1Q_5. As duas primeiras são executadas respectivamente pelas técnicas $t_1(T_{31}Q_4)$ e $t_1(T_{41}Q_4)$. Apenas em $T_{31}Q_4$ foram utilizadas uma representação figural e uma reconfiguração por meio da diagonal do paralelogramo, embora sem um tratamento que colabore com a associação entre a apreensão perceptiva e a discursiva, pois não estão evidenciados na figura os ângulos internos dos triângulos obtidos na reconfiguração, nem as congruências entre esses ângulos. O autor não aborda essas duas propriedades em um único teorema, na forma ‘se, e somente se’.

T_1Q_5 é executada pelo autor de LG1 mediante a técnica $t_1(T_1Q_5)$. É realizada uma reconfiguração do triângulo como apresentado na Figura 34, porém, mais uma vez, não é feito um tratamento figural coerente com o tratamento discursivo. Duval (2012) enfatiza a importância da figura como apoio ao raciocínio dedutivo.

As validações das propriedades de quadriláteros utilizadas em LG1 são do tipo conceitual (BALACHEFF, 1988) e são priorizados os registros em língua natural e simbólicos.

Em LG2 são apresentadas as definições de todos os quadriláteros (paralelogramo, losango, retângulo, quadrado e trapézio) na seção destinada à teoria e todas as propriedades são enunciadas e validadas por meio de provas conceituais. (BALACHEFF, 1988). Para enunciar as propriedades e definições dos quadriláteros, o autor utiliza os três registros de representação: língua natural, simbólico e figural.

Mesmo sendo um livro voltado ao ensino médio, as demonstrações das propriedades não são precedidas de atividades de argumentação ou outras que levem o aluno a conjecturar e sentir-se desafiado a justificar as propriedades como proposto por Brousseau (2008).

Os autores de LG2 utilizam a figura como apoio às demonstrações das propriedades dos paralelogramos, losango, retângulo e quadrado, efetuando tratamentos figurais que interagem com o tratamento discursivo, o que pode favorecer uma associação entre a apreensão perceptiva e a discursiva.

Ainda em LG2, as propriedades que caracterizam os quadriláteros paralelogramo, losango, retângulo, quadrado, não são enunciadas em um único teorema, ou seja, na forma ‘se, e somente se’. Os autores fazem um resumo das condições necessárias (relativas às diagonais) para que um quadrilátero convexo seja paralelogramo, losango, retângulo ou quadrado, mas não enfatizam que estas são também suficientes e que, portanto, podem caracterizar cada um desses quadriláteros. A Figura 35 sumariza essas condições apresentadas em LG2.

Figura 35. Resumo das condições necessárias para que um quadrilátero seja paralelogramo, retângulo, losango e quadrado.

> Notemos, em resumo, que se um *quadrilátero convexo*
> tem as diagonais que se cortam ao meio, então é um *paralelogramo*,
> tem diagonais que se cortam ao meio e são congruentes, então é um *retângulo*,
> tem diagonais que se cortam ao meio e são perpendiculares, então é um *losango*,
> tem diagonais que se cortam ao meio, são congruentes e são perpendiculares,
> então é um *quadrado*.

Fonte: LG2 (p. 110).

Em LG3, os quadriláteros são classificados na seção destinada à teoria e não são utilizadas condições mínimas nas definições de losango, retângulo e quadrado. O losango, por exemplo, é definido como “um paralelogramo cujos lados são congruentes”. (LG3, p. 61) Nesse caso, a palavra ‘paralelogramo’ é desnecessária, uma vez que pode ser provado que todo losango é paralelogramo.

Nesse livro, a única propriedade relacionada ao objeto quadrilátero que é demonstrada é o teorema da base média do triângulo (T_1Q_6). É utilizada a técnica $t_2(T_1Q_5)$ e, como apoio à demonstração, é efetuada uma reconfiguração do triângulo por meio de uma paralela a um de seus lados, de modo semelhante ao da Figura 35. O tratamento figural utilizado é coerente com o tratamento do discurso em língua natural. Os registros utilizados por estes autores são figurais, língua natural e simbólico.

O conteúdo ‘quadriláteros’ é apresentado em LG1, LG2 e LG3 de forma semelhante. Como previsto, em todos eles as provas apresentadas são formais, com a exclusiva função de explicação. As propriedades são abordadas de modo direto sem nenhuma atividade que permita ao aluno fazer conjecturas ou sentir a necessidade de demonstrá-las como proposto por Brousseau (2008).

LG1 e LG3 se assemelham por não validarem a maioria das propriedades dos quadriláteros. Não supomos que esses autores considerem desnecessária a validação matemática dessas propriedades, mas sim que não as demonstram por acreditarem que são elementares para o nível a que o livro é destinado.

Análise das tarefas voltadas ao aluno

Neste tópico analisaremos as tarefas relacionadas ao tema ‘quadriláteros’ que os autores de LG1, LG2 e LG3 propõem aos alunos.

Os três livros analisados contêm seções destinadas a exercícios propostos aos alunos, embora estas apresentem estruturas diferenciadas em cada obra. Em LG1 elas são de dois tipos: *Exercícios* e *Problemas*. O autor expõe que a seção de problemas complementa a teoria. No caso do conteúdo ‘quadriláteros’, as seis tarefas propostas para o aluno na seção *Problemas* são do tipo ‘Mostre que...’ ou ‘Prove que...’. Duas delas solicitam prova ou que se mostre quais são as condições para um quadrilátero ser paralelogramo; duas solicitam a prova de condições para que o paralelogramo seja retângulo e losango; e uma pede que se mostre o teorema da base média de um trapézio. Logo, apenas uma tarefa, embora teórica, não corresponde a uma condição necessária ou suficiente para que um quadrilátero seja paralelogramo, retângulo, losango ou quadrado.

Ainda em LG1, das 13 tarefas propostas na seção *Exercícios*, dez são do tipo ‘Mostre que...’ ou ‘Demonstre que...’ e solicitam a demonstração de propriedades dos quadriláteros que não foram contempladas na seção de teoria.

Em LG2, os tipos de tarefas são organizados pelo grau de complexidade. Iniciam-se com tarefas apresentadas em registro figural. A técnica utilizada para resolver cada uma delas exige apenas aplicações diretas de propriedades, como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero. Em seguida os autores apresentam tarefas enunciadas no registro em língua natural cuja técnica de resolução solicita conversão da representação para o registro figural com o intuito de auxiliar na solução do problema. Por último vêm as tarefas do tipo ‘Prove que...’. Em meio às tarefas propostas, há duas resolvidas.

LG3 apresenta apenas cinco tarefas com quadriláteros, todas do tipo ‘Mostre que...’, sendo duas delas referentes a propriedades dessas figuras.

Note-se que nos três livros as expressões ‘Prove que...’, ‘Mostre que...’ e ‘Demonstre que...’ são consideradas sinônimas e correspondem a provas conceituais (BALACHEFF, 1988).

Assim, selecionamos para análise, dentre as tarefas propostas para alunos, apenas as do tipo ‘Prove que...’, ‘Mostre que...’ e ‘Demonstre que...’ e que não correspondam a uma propriedade de quadrilátero já analisada no tópico anterior. Além desse critério, escolhemos tarefas cuja resolução faça uso de alguma das propriedades de quadrilátero aqui demonstradas.

Frente aos critérios de escolha, fizemos uma nova leitura nas seções de exercícios dos livros analisados e observamos que em LG1 15 das 16 tarefas que solicitam algum tipo de prova correspondem a propriedades de quadriláteros já analisadas no tópico relacionado a tarefas para o autor. Segundo os critérios estabelecidos para escolha, restou apenas uma tarefa a ser analisada em LG1. No entanto, analisaremos mais uma tarefa, que, embora não solicite diretamente uma demonstração, possibilita ao aluno pensar sobre a figura, conjecturar, analisar e validar conjecturas, vivenciando as fases de ação, formulação e validação que, segundo Brousseau (2008), podem acelerar a aprendizagem e, associadas à institucionalização, contribuem para a construção do saber. Segue o enunciado da tarefa que será analisada posteriormente.

"Se as diagonais de um quadrilátero convexo têm o mesmo comprimento o que pode ser dito sobre ele?" (LG1, p. 99, tarefa 23).

LG2 propõe dez tarefas com a expressão 'prove que' e duas semelhantes à tarefa enunciada acima. Escolhemos para análise as que estão relacionadas a propriedades de paralelogramos.

Em LG3 identificamos cinco tarefas relacionadas ao tema 'quadriláteros', duas das quais correspondem a propriedades já analisadas. Restaram então três questões a analisar. O Quadro 17 quantifica em cada livro as tarefas que correspondem a propriedades de quadriláteros.

Quadro 17. Número de tarefas que contemplam propriedades de quadriláteros.

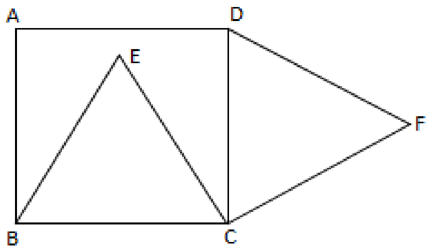
Definição e/ou propriedades	LG1	LG2	LG3
Do paralelogramo	1	4	2
Do losango	1	1	
Do retângulo		2	
Do quadrado		1	1
Do trapézio		1	
Da base média do triângulo	2	1	1

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que em LG1 e LG3 a maioria das tarefas propostas para os alunos correspondem à complementação da teoria. As tarefas referentes à demonstração e que necessitam de aplicação das propriedades dos quadriláteros comparecem em número reduzido. Analisaremos todas as tarefas de LG1 e LG3 que satisfazem ao critério estabelecido. De LG2, escolhemos as tarefas que solicitam aplicação de propriedades do paralelogramo. O Quadro 18 apresenta as questões que serão analisadas e o livro que traz a tarefa correspondente.

Quadro 18. Tarefas selecionadas e organização praxeológica.

Tarefas	**Técnica**	**Bloco teórico-tecnológico**	**Livro**
T_1: Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.	$t_1(T_1)$: Utilizar base média do triângulo.	$[\theta/\Theta](T_1)$: Definição de paralelogramo; definição de ponto médio; teorema da base média de um triângulo.	LG1, p. 104 LG2, p. 119 LG3, p. 71
T_2: Se as diagonais de um quadrilátero convexo têm o mesmo comprimento, o que pode ser dito sobre ele?	$t_1(T_2)$: Utilizar desenhos com conjecturas sem demonstração. $t_2(T_2)$: Uso da base média de um triângulo para validação da conjectura.	$[\theta/\Theta](T_2)$: Definição de losango; definição de ponto médio; teorema da base média de um triângulo.	LG1, p. 99
T_3: Prove que as bissetrizes dos ângulos obtusos de um paralelogramo são paralelas.	$t_1(T_3)$: Utilizar exemplos e verificar que as bissetrizes dos ângulos obtusos com os outros dois lados do paralelogramo formam outro paralelogramo, e assim verificar empiricamente que as bissetrizes são paralelas. $t_2(T_3)$: Utilizar o teorema das paralelas e a propriedade dos ângulos opostos do paralelogramo. $t_3(T_3)$: Utilizar o teorema das paralelas e a congruência de triângulos. $t_4(T_3)$: Utilizar o teorema das paralelas e a propriedade dos	$[\theta/\Theta](T_3)$: Definição de paralelogramo; definição de bissetriz; definição de suplemento de um ângulo; teorema das paralelas; propriedade dos ângulos opostos do paralelogramo.	LG2, p. 121

	ângulos da base de um triângulo isósceles.		
T_4: Seja *ABCD* um paralelogramo e sejam *M* e *N* os pontos médios dos lados *AB* e *CD*, respectivamente. Mostre que a reta *MD* é paralela à reta *BN*.	$t_1(T_4)$: Utilizar a propriedade: um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo. $t_2(T_4)$: Utilizar a congruência de triângulo e a propriedade: um quadrilátero que possui lados opostos congruentes é um paralelogramo.	$[\theta/\Theta](T_4)$: Definição de paralelogramo; definição de ponto médio; teorema das paralelas; congruência de triângulos; propriedade dos quadriláteros.	LG3, p. 71
T_5: Considere os triângulos equiláteros *EBC* e *FDC* e o quadrado *ABCD* como na figura. Mostre que os pontos *A*, *E* e *F* são colineares. 	$t_1(T_5)$: Ligar os pontos *A*, *E* e *F* utilizando a figura como instrumento de validação. $t_2(T_5)$: Utilizar a reta como um ângulo de 180^o.	$[\theta/\Theta](T_5)$: Definição de quadrado; propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo; definição de pontos colineares; definição de ângulo raso.	LG3, p. 72

Fonte: Dados da pesquisa.

Seguem-se as análises das tarefas selecionadas.

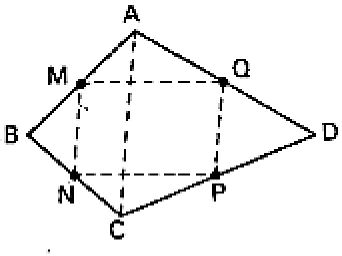
Tarefa 1: Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

Esta tarefa foi proposta nos três livros analisados e em LG2 os autores a resolvem como apresentado na Figura 36.

Figura 36. Tarefa 1 de LG2, resolvida pelos autores.

Seja $ABCD$ um quadrilátero; M, N, P e Q os respectivos pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \ : \ \overline{MN} \,/\!/\, \overline{AC} \text{ e } \overline{MN} = \dfrac{\overline{AC}}{2} \\ \triangle DAC \ : \ \overline{PQ} \,/\!/\, \overline{AC} \text{ e } \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AC}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$



$$\Longrightarrow \ \overline{MN} \,/\!/\, \overline{PQ} \text{ e } \overline{MN} \equiv \overline{PQ} \ \Longrightarrow \ MNPQ \text{ é paralelogramo.}$$

Fonte: LG2 (p. 119).

O autor utiliza a figura como apoio à demonstração e emprega três registros de representação. Na redação da demonstração, prioriza o registro simbólico. Faz um tratamento do quadrilátero por meio de uma reconfiguração, obtendo dois triângulos e suas bases médias. Explicitar que $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são respectivamente as bases médias dos triângulos ABC e ACD poderia favorecer a associação entre o tratamento figural e o simbólico.

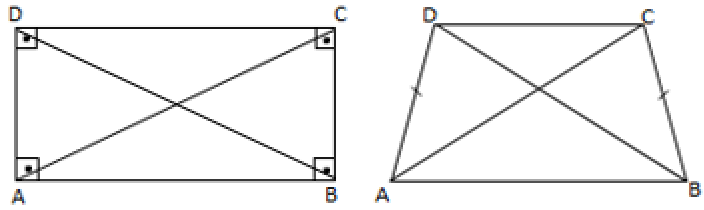
Observamos também que afirmar que $\overline{MN}/\!/\overline{PQ}$ sem apresentar justificativas (propriedade da base média e transitividade da ralação de paralelismo) pode induzir o aluno a concluir sobre esse paralelismo baseando-se apenas na apreensão perceptiva. Os autores concluem a demonstração utilizando a seguinte propriedade do paralelogramo: se um quadrilátero possui dois lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

É uma tarefa que possibilita a aplicação das propriedades de quadriláteros e a associação entre a apreensão perceptiva e a discursiva.

Tarefa 2: Se as diagonais de um quadrilátero convexo têm o mesmo comprimento, o que pode ser dito sobre ele?

Essa tarefa oferece ao aluno oportunidade de fazer conjecturas sobre figuras e vivenciar as fases de ação, formulação e validação. A tarefa não envolve demonstração de um resultado e nem exige cálculo. O aluno deverá fazer uma "descoberta". É provável que ao resolvê-la o aluno inicialmente se apegue a casos particulares e chegue a resultados não gerais, como por exemplo dizer que o quadrilátero é um retângulo ou um trapézio isósceles.

Figura 37. Retângulo e trapézio isósceles.



Fonte: Dados da pesquisa.

Conclusões como as representadas na Figura 37 podem decorrer de problemas na interpretação de condições necessárias e suficientes. O aluno pode utilizar de maneira equivocada as recíprocas (que não são verdadeiras) dos teoremas que afirmam que “As diagonais de um retângulo são congruentes”, ou “As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes”. Nesses casos, o aluno pode concluir que todos os quadriláteros que possuem diagonais congruentes são retângulos ou trapézios isósceles.

O aluno pode também ter dificuldades na interpretação do seguinte teorema: “Todo paralelogramo que possui diagonais congruentes é retângulo”, não atentando para o fato de que, na tarefa, o quadrilátero não é necessariamente um paralelogramo.

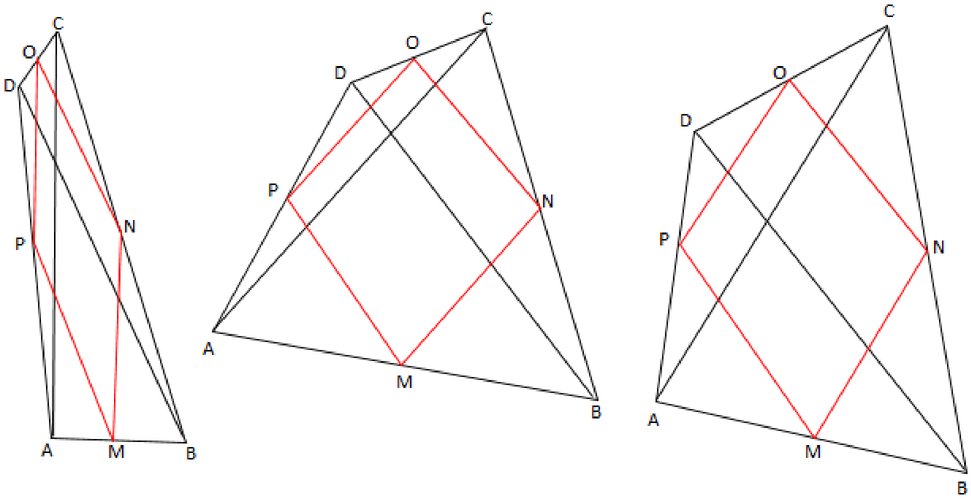
Uma discussão em grupo e/ou questionamentos provocados pelo professor podem levar o aluno a perceber que existem outras formas de intersecção dessas diagonais e, por meio de conjecturas, verificar que os pontos médios *M*, *N*, *O* e *P*, respectivamente dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ do quadrilátero *ABCD* são vértices de um losango, como no caso da Figura 38.

Ao se chegar à conclusão esperada, ocorre validação por meio da propriedade da base média do triângulo.

Esta tarefa pode ser institucionalizada com uma condição suficiente, das diagonais de um quadrilátero convexo, para que os pontos médios de seus lados sejam vértices de um losango. Permite ainda questionar se, em vez de um losango, quiséssemos um quadrado.

Desse modo, esta é uma tarefa que dá oportunidade ao aluno de testar estratégias, detectar erros e experimentar sucessivas fases de ação, formulação e validação, contribuindo para uma real aprendizagem.

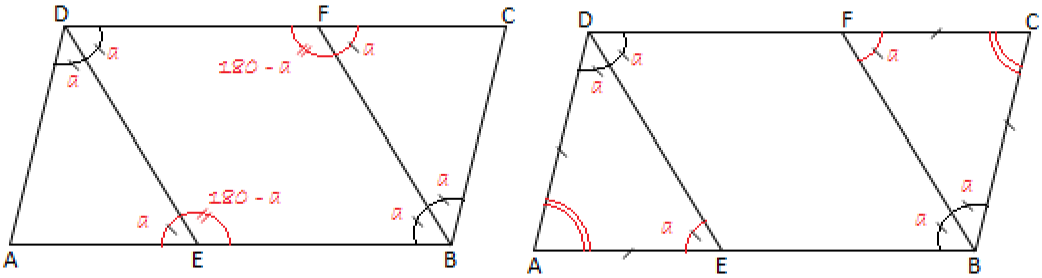
Figura 38. Conjecturas referentes à tarefa 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Tarefa 3: Prove que as bissetrizes dos ângulos obtusos de um paralelogramo são paralelas.

Figura 39. Figuras de suporte para a tarefa 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Com esta tarefa, o aluno tem a oportunidade de fazer uma conversão da representação no registro da língua natural ao figural e aplicar as propriedades de paralelogramo. Por meio da técnica t_1(T_3), o aluno poderá fazer uso da figura e atribuir valores aos ângulos para tentar encontrar um caminho para a validação do caso geral, ou aceitar a figura como uma forma de validação. Neste caso, realizará uma prova pragmática (BALACHEFF, 1987).

Pela técnica t_2(T_3), o aluno deverá utilizar o teorema das paralelas para provar que $C\hat{D}A \equiv D\hat{E}A$ e $C\hat{F}B \equiv F\hat{B}A$ (alternos internos) e, por suplemento, $D\hat{E}B \equiv D\hat{F}B$. Assim, o quadrilátero *DEBF* tem ângulos opostos congruentes, sendo, portanto, um paralelogramo.

A técnica t_3(T_3) difere de t_2(T_3), pois, após utilizar o teorema das paralelas e provar que $C\hat{D}A \equiv D\hat{E}A$ e $C\hat{F}B \equiv F\hat{B}A$, o aluno poderá usar a congruência dos triângulos *DAE* e

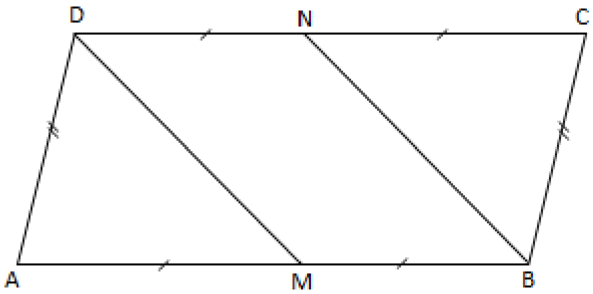
BCF para provar que *DE* = *FB* e, por diferença, que *DF* = *EB*, concluindo assim que o quadrilátero *DEBF* tem lados opostos congruentes, sendo, portanto, um paralelogramo.

A técnica $t_4(T_3)$ difere das demais por usar a propriedade do triângulo isósceles, em vez de utilizar congruência de triângulos, e mostrar que *AE* = *FC* e, por diferença, que *DF* = *BE*. O aluno deve concluir, assim, que o quadrilátero *DEBF* tem dois lados opostos congruentes e paralelos, sendo, portanto, um paralelogramo.

Acreditamos que o aluno opte pela técnica $t_3(T_3)$, pois a congruência de triângulos é utilizada em grande parte das demonstrações das propriedades dos quadriláteros, e concordamos com Hanna (2008) em que, além de validar um resultado, o processo de demonstração pode fornecer estratégias e métodos que podem ser utilizados na resolução de problemas.

Tarefa 4: Seja *ABCD* um paralelogramo e sejam *M* e *N* os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Mostre que a reta $\overleftrightarrow{MD}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{BN}$.

Figura 40. Figura-suporte para a tarefa 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Técnica 1. Utilizar a seguinte condição para que um quadrilátero seja um paralelogramo: “Um quadrilátero que possui dois lados opostos congruentes é um paralelogramo”.

Por esta técnica, diante da hipótese de que *M* e *N* são respectivamente pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e que *AB* = *CD* e $\overline{AB}//\overline{CD}$ (pois *ABCD* é paralelogramo), constata-se que *AM* = *MB* = *DN* = *NC*. Segue-se então que *MB* = *DN* e $\overline{MB}//\overline{DN}$. Logo, MBDN é um paralelogramo e, portanto, $\overline{MD}//\overline{BN}$.

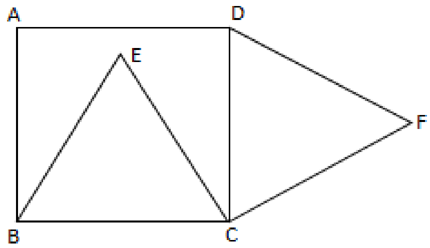
Técnica 2. Utilizar congruência de triângulos e a seguinte propriedade do paralelogramo: “Um quadrilátero que possui lados opostos congruentes é paralelogramo”.

Por esta técnica, diante da hipótese de que *ABCD* é paralelogramo e *M* e *N* são respectivamente pontos médios de *ABCD*, verifica-se que os triângulos *ADM* e *BCN* são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado (pois *AD* = *BC*, $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e *AM* = *NC*). Logo, *DM* = *BN*. Como *DN* = *MB*, segue-se que *DMBN* é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos. Portanto, é um paralelogramo. Concluímos então que *DM* = *BN*.

Essa tarefa cria condições para o aluno converter a representação do registro na língua natural para o figural e aplicar as propriedades do paralelogramo no processo de uma demonstração e sua redação. Diante do tipo de provas encontradas no bloco referente às propriedades do quadrilátero, acreditamos que os autores esperam que o aluno utilize a técnica 1 e elabore uma prova conceitual. No entanto, é provável que o aluno faça uso da congruência de triângulos, por esta ter sido utilizada como ferramenta em muitas das demonstrações das propriedades.

Tarefa 5: **Considere os triângulos equiláteros *EBC* e FDC e o quadrado *ABCD*, como na figura. Mostre que os pontos *A*, *E* e *F* são colineares.**

Figura 41. Figura-suporte para a tarefa 5.



Fonte: LG3 (p. 72).

Embora esta tarefa utilize a definição de quadrado, sua solução tem como ponto-chave ver um ângulo raso (de 180°) como representado por uma das regiões do plano limitada por uma reta. Segundo Duval (2012), pelo fato de uma reta e um ângulo raso serem representações semanticamente diferentes, requer-se um trabalho específico para a conscientização de que ambas as representações designam um mesmo elemento geométrico.

É provável que o aluno, ao tentar provar que *A*, *E* e *F* são colineares, trace uma reta que contém esses pontos e valide essa propriedade apenas pela visualização de uma figura, realizando, nesse caso, uma prova pragmática. Para validação do caso geral, o aluno deverá "ver" os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EF}$ não necessariamente contidos na mesma reta, calcular as medidas dos ângulos $A\hat{E}B, B\hat{E}C$ e $C\hat{E}F$ e verificar que a soma dessas medidas é de 180º.

Ao se compreender que para solucionar o problema do alinhamento dos pontos necessita-se calcular ângulos, constata-se que o problema não informa dados numéricos, quais sejam, medidas de ângulos. Mais uma vez, o aluno deverá passar pelas fases de visualização, análise e construção: observar que os ângulos do quadrado são retos e que os ângulos do triângulo equilátero são todos iguais a 60º e visualizar os triângulos isósceles na figura, já que $AB = BC = CD = DA = BE = EC = CF = DF$.

Essa tarefa apresenta dois aspectos citados por Duval (2012) que podem ser fontes de dificuldade na compreensão de problemas de matemática. Um desses aspectos é que ela apresenta uma não congruência inter-registros, uma vez que na língua natural o problema se refere a alinhamento de pontos, mas no registro figural o que se vê são triângulos e quadrado. Duval (2012, p. 121) afirma que a organização perceptiva de uma figura segue a lei do fechamento e da continuidade, isto é, “quando diferentes traços formam um contorno simples e fechado, eles se destacam como uma figura sobre um fundo”. Nesse caso, os pontos que são vértices desses polígonos e os ângulos que deverão ser analisados permanecem em segundo plano.

O outro aspecto é a não congruência semântica intrarregistro, uma vez que, dentro do mesmo registro figural, o alinhamento de pontos (uma reta) e o ângulo (de 180°) não têm nenhuma relação visual evidente, embora representados dentro de um mesmo registro. Duval (2012) aponta que estes casos necessitam de um trabalho de conscientização que permita ao aluno compreender essa equivalência.

Considerações sobre a análise dos livros didáticos

Propusemo-nos neste capítulo a estudar as organizações didáticas e matemáticas relacionadas ao tema ‘quadriláteros’ em três livros adotados em cursos de licenciatura em matemática no Brasil.

Nossa análise foi desenvolvida segundo a teoria antropológica do didático, de Chevallard, e a teoria dos registros de representação semiótica, de Duval, e adotamos a tipologia de provas proposta por Balacheff (1988). Portanto, quando nesta análise nos referirmos a provas conceituais, estaremos falandos das demonstrações que, conforme esse pesquisador, tratam de uma série de enunciados que se organizam segundo um conjunto bem definido de regras.

Iniciamos nossa análise investigando sobre o que esses livros apresentam com relação à história e quanto ao que vem a ser o método dedutivo e seus termos próprios. Observamos que os três livros trazem textos que tratam da história da matemática, porém nenhum destes é usado como motivação para se introduzirem conteúdos específicos.

Quanto ao método dedutivo, LG1 e LG3 trazem dele alguma noção, sendo que LG1 traz essa informação após já havê-lo introduzido. Os termos ‘prova’ e ‘demonstração’ são utilizados nos três livros como sinônimos e estes não são abordados como objeto de estudo, mas exclusivamente com função de validação.

Os três livros desenvolvem o conteúdo ‘quadriláteros’ de forma semelhante. A abordagem dos conceitos e propriedades é direta, sem utilização de nenhum recurso que leve o aluno a fazer conjecturas. Em vez disso, procedem à formalização, seguida da resolução de problemas.

Em LG1 e LG3, o conteúdo ‘quadriláteros’ é abordado a título de revisão, sem um capítulo específico destinado a seu estudo e com poucas demonstrações realizadas pelos autores, sendo a maioria deixada como exercício para o aluno. Em LG2, um capítulo é dedicado ao estudo dos quadriláteros. As propriedades são demonstradas e as definições e propriedades são enunciadas simultaneamente nos três registros de representação.

Quanto às tarefas propostas para o aluno, LG3 combina aquelas em que há reprodução de técnica e tarefas que exigem interpretação, para depois aplicar a técnica e tarefas de realização de provas. Em LG1 e LG3 predominam as tarefas de realização de provas, sendo estas em um número reduzido, prevalecendo, na seção de exercícios, a complementação da teoria.

Nos três livros analisados, as definições de trapézio e de trapézio isósceles adotadas são incoerentes com as propriedades enunciadas, sendo aconselhável fazer uma restrição quanto à definição de trapézio isósceles para adequação aos resultados considerados.

As organizações didáticas dos três livros analisados apresentam semelhanças, especialmente em LG1 e LG3. O conteúdo ‘quadriláteros’ é apresentado de forma direta e superficial. Visto que o livro é uma ferramenta de apoio importante para alunos e professores e que a realidade evidenciada em pesquisas (SANTOS, 2005; CURI, 2004) é a de que os alunos ingressos em cursos de licenciatura em matemática têm formação geométrica precária, podemos afirmar que a forma como o conteúdo ‘quadriláteros’ é apresentado nesses livros pode contribuir para as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem desse conteúdo.

A geometria é geralmente uma disciplina oferecida nos primeiros semestres da graduação, tipicamente constituindo o primeiro contato do aluno com o método dedutivo. Os alunos iniciam o uso desse método sem saber do que se tata ou como funciona. Diante desse fato, seria coerente que nos livros de geometria, especialmente os voltados à graduação, esclarecessem o que vem a ser o método dedutivo e seus termos próprios antes de introduzi-lo.

Os livros analisados são adotados no ensino superior, o que demanda destes uma abordagem científica. Logo, não esperávamos desses livros validações empíricas para as propriedades apresentadas. No entanto, a forma como o conteúdo é introduzido é outro ponto que merece reflexão. A inclusão de situações em forma de problemas, como a que é proposta na tarefa 2 (do aluno) ou problemas de construção geométrica, que levem o aluno a fazer descobertas seria um caminho a ser considerado. Caberia mudar o trajeto adotado na maioria dos livros, e reproduzido por professores, que vai da formalização para a aplicação de resultados na resolução de problemas, adotando, ao invés, uma abordagem inversa: partir da situação-problema e culminar na institucionalização, como propõe Brousseau (2009).

As observações advindas da análise dos livros selecionados, comparadas aos resultados obtidos na análise do questionário e fundamentadas pela revisão de literatura, nos permitiram chegar a alguns resultados que foram fundamentais para o processo de construção da nossa organização didática. Reservamos um pequeno espaço para listar estas considerações.

Análise dos livros x análise do questionário

Diante dos resultados da revisão de literatura, análise do questionário e análise dos livros, apresentaremos alguns resultados que nos permitiram fazer as escolhas no momento de elaboração da nossa organização didática.

1. Na análise do questionário observamos indícios de que a abordagem da demonstração vivenciada pelos alunos investigados poderiam ser reproduções das demonstrações encontradas nos livros. A análise dos livros não nos permite afirmar quanto à abordagem vivenciada por esses alunos, no entanto verificamos semelhanças nas demonstrações apresentadas nos livros analisados e aos ensaios de demonstrações apresentadas nos questionários. É como se houvesse uma tentativa de reproduzir demonstrações memorizadas.
2. Assim como os alunos que responderam ao questionário, os livros analisados atribuem à prova e à demonstração o mesmo significado e, além disso, utilizam a demonstração com a exclusiva função de validar as propriedades matemáticas. Estas evidências, associadas a resultados obtidos como os de Ordem (2015) e Maioli (2001), nos permitem reafirmar a

influência dos livros na concepção de prova e demonstração dos estudantes de licenciatura em matemática.

3. Observamos na análise do questionário que os alunos mostraram ter utilizado o método dedutivo, mas não foram capazes de defini-lo. Observamos que os livros utilizados por esses alunos, de fato utilizam o método dedutivo, porém não esclarecem quanto ao seu significado.
4. Os alunos investigados que afirmam estar seguros para ensinar demonstração aos seus futuros alunos indicam que buscarão apoio no livro. No entanto, os livros analisados abordam o tópico *quadriláteros* de forma superficial e direta, sempre no sentido formalização para depois resolução de problemas, sem utilização de nenhum recurso que leve o aluno a fazer conjecturas. Acreditamos que os livros científicos analisados, podem servir de apoio, em alguns casos, no esclarecimento da teoria, contudo os mesmos não apresentam uma organização didática que favoreça o ensino ou a aprendizagem de demonstrações relativamente ao tópico quadrilátero.
5. As respostas dos alunos indicam que para eles um bom livro é aquele que traz as demonstrações de forma detalhada, permitindo sua compreensão. A opinião dos alunos que afirmaram que os livros não estão cumprindo seu papel no sentido de apoiá-los na aprendizagem de geometria parece estar mais fundamentada na superficialidade da abordagem dos conteúdos do que na forma direta em que os mesmos são apresentados.

Retornando às questões que propomos no início da análise do livro, já nos encontramos em condições de respondê-las:

De que forma os livros de geometria plana, utilizados nos cursos de licenciatura em matemática, estão abordando as demonstrações relativamente ao tópico ‘quadriláteros’? As tarefas propostas nos livros de geometria plana, utilizados nos cursos de licenciatura, têm potencial para motivar os alunos a fazer descobertas e propiciar a estes vivenciar momentos de ação, formulação e validação? As tarefas propostas nos livros de geometria plana, utilizados nos cursos de licenciatura, têm potencial para induzir os alunos a pensar sobre a figura, fazer conversões entre registros e evoluir da apreensão perceptiva para a discursiva?

Diante do que foi relatado a respeito dos livros analisados, podemos declarar que a abordagem de quadriláteros apresentada nesses livros é direta, no sentido formalização para a resolução de problemas. A organização didática relativamente ao tópico quadrilátero não permite ao aluno participar da construção da teoria, mas apenas compreender o que foi feito por outro.

Quanto às tarefas propostas para o aluno, os três livros analisados, estas têm potencial para induzir os alunos a elaborar conjecturas, pensar sobre a figura, fazer conversões entre registros e evoluir da apreensão perceptiva para a discursiva. Mas, as obras analisadas não exploram suficientemente esse potencial para que o aluno entre nos processos de provas e demonstrações.

Diante de tudo que foi exposto, as conclusões obtidas nas análises preliminares nos possibilitaram construir nossa sequência de ensino de forma inversa à apresentada nos livros analisados, ou seja, as tarefas que compõem nossa sequência partem da situação problema para depois culminar na institucionalização como proposta por Brousseau (2008).

Propomos tarefas com intenção de propiciar aos alunos vivenciar momentos de ação, formulação e validação, assumindo um papel ativo diante das situações.

Fundamentados e orientados pelos resultados obtidos nas análises preliminares, construímos nossa organização didática que será apresentada no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4 – FASE EXPERIMENTAL

Neste capítulo apresentamos a organização didática que aplicamos aos alunos de um curso de licenciatura em matemática, no intuito de minimizar as dificuldades discutidas em nossa problemática e ao mesmo tempo criar condições para que os futuros professores (participantes da pesquisa) se sintam seguros e percebam a necessidade de ensinar demonstrações a seus futuros alunos. Ressaltemos que não pretendemos fornecer fórmulas para se ensinar demonstração, mas sim testar se a referida organização, associada às discussões, pode possibilitar o cumprimento dos objetivos propostos.

4.1. Escolhas das variáveis globais

A forma como a geometria é apresentada aos alunos da educação básica e também no ensino superior segue uma lógica que omite todas as fases de seu desenvolvimento. Roque (2012) assinala que existe uma diferença crucial entre a lógica em que um texto matemático é apresentado e o modo como ele se desenvolve. A abordagem do método dedutivo na graduação é feita no sentido inverso em relação ao desenvolvimento desse método. Acreditamos que deve ser permitido ao aluno construir a demonstração a partir de uma motivação que possa provocar sua descoberta. Roque, (2012, introdução) assinala que:

> Um dos fatores que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, em vez de partirmos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas às quais ele responde, tomamos esse conceito como algo pronto.

Esta forma de apresentação direta dos conteúdos matemáticos foi observada nos livros analisados neste trabalho, isto é, da formalização para a aplicação. Acreditamos que a inversão entre a ordem da descoberta e a ordem da exposição dos conhecimentos matemáticos pode ser um dos fatores que contribuem para a dificuldade dos alunos em compreender demonstrações geométricas e buscamos desenvolver uma sequência de atividades que proporcionasse uma simulação do ambiente de descoberta.

Além das considerações acima, constatamos também em nossos estudos preliminares que, de modo geral, o ensino de demonstrações não é realizado. A demonstração é praticada como objeto de validação e, tratando-se do ensino de Geometria, sua abordagem é feita com um enfoque que segue o modelo dos textos científicos. Neste trabalho propomos uma abordagem que se opõe ao modelo atualmente praticado e investigamos se ela se apresenta favorável a mudança do quadro atual de nossos sujeitos.

Apresentaremos em síntese – nas dimensões epistemológica, cognitiva e didática – as razões identificadas nos estudos preliminares que podem justificar a manutenção do atual estado da prática das demonstrações. Objetivamos com essa apresentação decidir quais serão as variáveis globais e seus valores, a fim de fundamentar a construção de nossa sequência. Escolhemos pontos que serão atingidos (modificados) na tentativa de obter um ensino mais satisfatório no que diz respeito às demonstrações geométricas.

Seguem as dimensões e os aspectos que serão focados em cada uma delas.

Na dimensão epistemológica associada às características das demonstrações e provas, visa-se focar os seguintes aspectos.

- A diferença entre a lógica em que um texto matemático é apresentado e o modo em que ele se desenvolve.
- A abordagem do método dedutivo na graduação ocorre no sentido inverso ao de seu desenvolvimento.
- A não distinção entre os termos ‘prova’ e ‘demonstração’ pode contribuir para a ausência de seu ensino.
- A demonstração com a exclusiva função de validação pode contribuir para a falta de estímulo do aluno em demonstrar, dando preferência a validações empíricas.
- Falta de conhecimento dos alunos com relação ao método dedutivo e seus termos próprios.

Na dimensão cognitiva associada às características dos alunos do curso de licenciatura em matemática, focamos:

- O nível de escolaridade do aluno diferindo do nível de pensamento geométrico.
- Problemas na transição da geometria empírica à dedutiva.
- Dificuldades na leitura de um problema e na redação de uma demonstração.
- Inabilidades na manipulação de argumentos de um dado problema.
- Falta de consciência a respeito da distinção entre as apreensões sequencial, perceptiva e discursiva.
- Dificuldades na conversão entre os registros em língua natural, figural e algébrico.

Na dimensão didática associada ao funcionamento do sistema de ensino de provas e demonstrações geométricas, focamos os seguintes aspectos:

- O tipo de abordagem dada à demonstração na graduação não estimula o futuro professor a implementar a demonstração em suas aulas.
- Não reconhecimento, pelo futuro professor, de que a demonstração tem importância para o desenvolvimento intelectual de seu aluno, postura essa que pode contribuir para que esse professor não inclua demonstrações em sua prática.
- Falta de uma metodologia que aproxime o aluno à prova matemática.

A análise dos pontos apresentados nos permite determinar as variáveis macrodidáticas que devem ser consideradas na concepção da sequência:

1. **Referencial:**
    - *Teoria das situações didáticas* – A escolha da adoção de aspectos da teoria das situações didáticas tem como objetivo controlar constatações das dimensões epistemológica e didática referentes à abordagem dada às demonstrações na graduação. Visa também provocar conjecturas e valorizá-las, o que é um aspecto dessa teoria, em que visamos estimular os alunos a elaborar argumentos de um problema e chegar à construção de uma demonstração, controlando constatações da dimensão cognitiva.
    - *Concepção de provas e demonstrações, segundo Balacheff (1988), e funções da prova, segundo De Villiers (2001)* – Apresentação das concepções de prova segundo Balacheff e de funções da prova segundo De Villiers, apresentando uma distinção dos termos ‘prova’ e ‘demonstração’ e outras funções da demonstração. Com essa escolha, buscamos ampliar o conceito de provas para o aluno e apresentar outras funções da demonstração, além da validação de propriedades, controlando constatações da dimensão epistemológica a respeito das concepções dos alunos sobre provas e demonstrações.
    - *Teoria dos registros de representação semiótica* – Buscar articular os registros língua natural, simbólicos e figurais. Nosso experimento será analisado segundo a teoria dos registros de representação semiótica, de Duval, que afirma que a compreensão em matemática depende da coordenação de ao menos dois registros de representações para um mesmo objeto, uma vez que permanecer em um único registro induz a confundir o objeto com sua representação. Buscamos também provocar a passagem da apreensão perceptiva para a apreensão discursiva. Com esta escolha pretendemos esclarecer aos alunos o estatuto da figura e conscientizá-los da subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva, pois, segundo Duval

(2012), esta conscientização constitui uma das vias de acesso à demonstração. Visamos com estas escolhas controlar constatações da dimensão cognitiva.

2. **Ambiente de realização:** Opção por tarefas de construções geométricas em um ambiente de papel e lápis. Acreditamos que estes têm potencial para provocar conjecturas pelo aluno, conscientizá-lo das apreensões perceptiva, sequencial e discursiva, aproximá-lo da prova matemática e criar condições para que perceba a função de explicação da demonstração. Esta escolha visa controlar constatações das dimensões epistemológica, cognitiva e didática.
3. **Organização dos alunos:** Realização das atividades em duplas ou trios. Esta escolha visa proporcionar um ambiente de discursão e de interação entre os alunos.
4. **Formato de entrega das atividades:** Optamos por entregar as atividades impressas, a fim de otimizar o tempo e garantir que os textos referentes às atividades estariam transcritos corretamente, assegurando as informações necessárias para o entendimento do enunciado de cada atividade.
5. **Forma de coleta de dados:** Gravamos as sessões em áudio e vídeo, disponibilizando um gravador para cada grupo a fim de coletar as discussões ocorridas nos grupos. Coletamos também registros escritos.

Diante das escolhas das variáveis globais que fundamentaram nossa organização didática, descreveremos no próximo tópico como chegamos à sequência.

4.2. Como chegamos a nossa sequência

Diante das constatações feitas nas análises preliminares e após determinar as variáveis globais que deverão ser controladas em nosso experimento, partimos para visitar os trabalhos em que o objeto matemático quadrilátero também tivesse sido contemplado, para buscar inspiração para a elaboração de nossa sequência. Encontramos essa inspiração nos trabalhos de Maioli (2001) e Maziero (2011).

Maioli (2001) apresenta uma inspiradora sequência que se mostrou fértil para discutir a construção dos conceitos de quadriláteros notáveis e sua classificação. A primeira etapa de nossa sequência, embora diferente da sequência proposta por Maioli (2001), tem como objetivo abrir uma discussão semelhante à proposta da autora. Tal discussão visa permitir esclarecer aos alunos a importância de um conceito e a existência de diferentes definições para um mesmo quadrilátero, que geram diferentes classificações sem que nenhuma delas esteja incorreta.

Maziero (2011) apresenta como produto final de seu trabalho uma sequência, produzida em conjunto com seu orientador, Dr. Saddo Almouloud, que ainda não havia sido aplicada e que satisfazia nossas expectativas quanto ao modo de simular um ambiente científico com potencial para motivar os alunos a fazer descobertas e propiciar a estes vivenciar momentos de ação, formulação e validação.

A sequência contempla atividades de construções geométricas com potencial de proporcionar aos alunos condições de formular conjecturas, pensar sobre a figura, fazer conversões entre representações e evoluir da apreensão perceptiva para a discursiva.

Adaptamos a sequência modelando-a em termos de tarefas, técnicas e bloco tecnológico-teórico, fundamentando-nos na teoria antropológica do didático, de Chevallard (1999), e a complementamos com atividades que fazem parte de livro de autoria do Dr. Saddo Almouloud (ainda não publicado).

A escolha dessas tarefas complementares se justifica por acreditarmos que têm o potencial de permitir aos alunos interpretar condições necessárias e suficientes, enunciar recíprocos de teoremas, fazer tratamentos figurais, converter representações e elaborar e redigir demonstrações – enfim, aplicar as teorias institucionalizadas.

A nossa proposta difere das apresentadas nos livros analisados, uma vez que estes abordam o conteúdo ‘quadrilátero’ partindo da formalização e posteriormente fazendo a aplicação de resultados na resolução de problemas, enquanto em nossa sequência apresentamos uma abordagem inversa: da situação-problema para depois culminar na institucionalização, como proposto por Brousseau (2008).

Visamos com a situação que será apresentada propiciar condições para que o aluno assuma um papel ativo diante das tarefas e sinta-se comprometido com as situações de aprendizagem.

A sequência foi dividida em três etapas:

1.ª etapa: Utilizando os três livros analisados, que constam na bibliografia da disciplina ‘Geometria plana’ de um curso de licenciatura em matemática, e também livros indicados para os níveis fundamental e médio, desenvolvemos uma atividade com o objetivo de possibilitar aos alunos se apropriar dos conhecimentos em jogo. Objetivamos também nesta etapa, trabalhar as definições de quadriláteros notáveis utilizando simultaneamente três registros de representação: o registro da língua natural, o registro simbólico e o registro figural, chamando atenção dos alunos para a importância dos conceitos e de manter coerência com as definições adotadas. Esta etapa se justifica pelo fato de dois dos livros analisados não apresentaram as definições dos quadriláteros nos três registros de representação e de três apresentarem incoerência entre a definição e a propriedade dos ângulos da base do trapézio isósceles.

2.ª etapa: Nesta etapa serão apresentas atividades em que os alunos terão que efetuar a conversão do registro na língua natural para o registro figural e em sua justificativa o registro simbólico e língua natural. Diante dessas atividades pretendemos oportunizar aos alunos vivenciar momentos de ação, formulação e validação que dizem respeito à fase adidática proposta por Brousseau (2008). Paralelamente faremos a institucionalização em que as propriedades dos quadriláteros serão discutidas.

3.ª etapa: Nesta etapa serão apresentadas tarefas em que os alunos possam aplicar as propriedades institucionalizadas nas tarefas anteriores. Serão propostas situações que permitem aos alunos trabalhar condições necessárias e suficientes, destacar hipótese e tese de um teorema e trabalhar teorema recíproco, assim como explorar a redação de um teorema.

Nas três etapas os alunos serão agrupados em duplas ou trios e as sessões serão gravadas em vídeo e áudio.

A seguir, descreveremos o local e público da pesquisa.

4.3. Local e público da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida em uma universidade do estado da Bahia e os encontros foram realizados no *campus* dessa instituição.

Os alunos que participaram da pesquisa são estudantes de um curso de licenciatura em matemática. Todos já cursaram ou cursam a componente ‘Geometria plana’, que é oferecida no segundo semestre do curso, em que são contemplados os conteúdos da geometria plana euclidiana.

Ocorreram ao todo, seis encontros, de 3 h 30 min cada. Esses encontros foram realizados nos seguintes sábados: 14, 22 e 29 de novembro e 6, 13 e 20 de dezembro de 2014.

Nos três primeiros encontros participaram 12 alunos; nos três últimos houve seis participantes. Tal desistência ocorreu pelo fato de um professor do curso regular marcar aulas extras nas datas de nossos encontros e por não encontrarmos outro dia em que todos pudessem estar presentes.

Não houve interferência da pesquisadora na formação de grupos para a realização das tarefas, ou seja, os alunos se agruparam de acordo com suas afinidades.

No próximo tópico descreveremos as tarefas que compõem cada etapa da nossa organização, seguidas das análises *a priori* e *a posteriori*.

4.4. Descrição e análise *a priori* das tarefas

1.ª etapa

Nesta tarefa pretendemos construir e/ou eleger a definição de quadrilátero e dos quadriláteros notáveis partindo do conhecimento que os alunos apresentarem.

Observamos por meio dos estudos preliminares e de nossas experiências pessoais que, além da dificuldade em demonstrar e identificar os termos inerentes ao método dedutivo, os alunos também apresentam dificuldades com relação ao que vem a ser uma definição e em saber que um mesmo objeto matemático pode ter diferentes definições e, consequentemente, diferentes classificações.

O propósito desta etapa é esclarecer estes pontos e garantir que os alunos participantes da pesquisa reconheçam cada quadrilátero e possam compreender as tarefas da próxima etapa.

Definindo os quadriláteros notáveis

a) Observar os quadriláteros.

(1) (2) (3)

(4) (5) (6)

b) Identifique o nome de cada um deles.

c) Defina quadrilátero.

d) Definir cada um dos quadriláteros seguintes: paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, trapézio.

e) De acordo com sua definição identifique a(s) figura(s) representada(s) acima que é(são) retângulo(s).

f) De acordo com sua definição, identifique a(s) figura(s) representada(s) acima que é(são) losango(s).

g) De acordo com sua definição, identifique a(s) figura(s) representada(s) acima que é(são) trapézio(s)?

h) Você conhece outra definição para trapézio? Se sim, qual?

i) Como você define trapézio isósceles?

É provável que os alunos identifiquem visualmente os quadriláteros notáveis, embora não esperamos que os definam formalmente. Pretendemos abrir uma discussão a respeito das diferentes definições de polígonos e quadriláteros apresentadas nos livros, com o objetivo de estimular os alunos a fazer uma leitura crítica das definições; mostrar a importância de manter coerência com a definição escolhida; fazer nossa escolha da definição de trapézio e quadrilátero para a resolução da nossa sequência; e compreender que uma definição adotada por um autor não está "errada" por ser diferente da definição adotada por outro autor.

Os livros a serem disponibilizados para os alunos para execução da atividade serão os que constam no programa do curso de licenciatura que frequentam, bem como livros do ensino fundamental e ensino médio. A importância dessa atividade reside no fato de trabalhar com futuros professores, os quais devem conhecer a necessidade de transformação do saber científico para que estes possam ser ensinados e consequentemente entendidos em determinado nível (ALMOULOUD, 2011).

No final da atividade, faremos a institucionalização das definições de quadriláteros e dos quadriláteros notáveis utilizando diferentes registros de representação, de acordo com Duval (2009b).

Análise *a posteriori* da 1ª etapa

A atividade foi distribuída impressa para cada aluno participante e também disponibilizamos alguns livros do ensino fundamental e as três obras que analisamos neste trabalho: Barbosa (2006), Dolce e Pompeo (2009) e Rezende e Queiroz (2008). Disponibilizamos 20 min para que os alunos realizassem esta atividade.

Conforme previamos em nossa análise preliminar, os alunos identificaram corretamente os quadriláteros que estavam representados pelo registro figural. Isso nos leva a concluir que os alunos reconhecem os quadriláteros notáveis quando estes se encontram representados por meio de uma figura. Lançamos para discussão o que os alunos entendiam por quadrilátero. Seguem alguns trechos da discussão:

***Eva**: É um polígono cujas medidas são iguais e possui quatro lados.*
***Daniela**: Não precisam ser iguais, tem quadrilátero que não possui lados iguais.*
***Hugo**: É um polígono de quatro lados.*

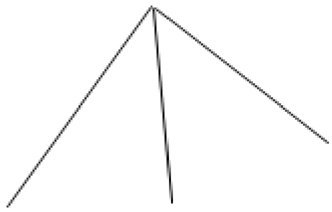
Todos concordaram com a definição de ***Hugo***.

***Pesquisadora**: E como vocês definem polígono?*
***Daniela**: Eu sei o que é, mas não sei responder.*

***Leandro**: Definir quadrilátero como polígono de quatro lados sem saber o que é polígono fica difícil.*

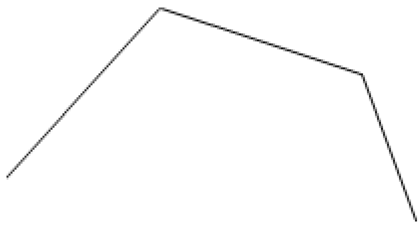
***Fábio**: Conjunto de segmentos,*

Representando a seguinte figura no quadro, a pesquisadora indaga: *Então esta figura é um polígono?*



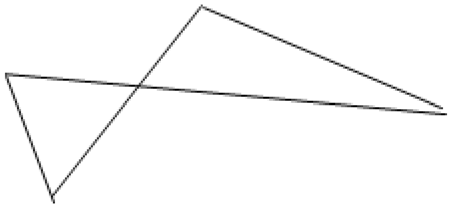
***Hugo**: Polígono é um conjunto de segmentos consecutivos.*

***Pesquisadora**: Então esta figura é um polígono?*



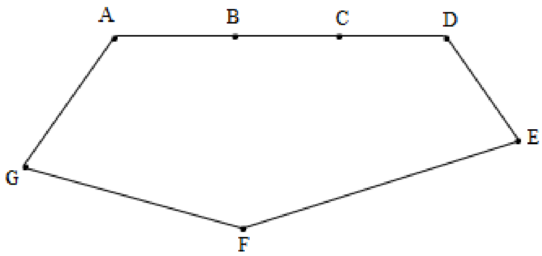
***Fábio**: Tem que ser fechado.*

***Pesquisadora**: Então vamos ver se a figura seguinte, formada por segmentos de reta consecutivos e fechada é um polígono.*



***Ivo**: Tem que acrescentar que seus lados não se interceptam.*

P: Então vamos escrever no quadro todas as características de um polígono que vocês citaram: conjunto formado por segmentos de reta, consecutivos, fechado e que não se interceptam. Então a figura ABCDEFG abaixo é um polígono?



***Fábio**: Não colineares!*

***Fábio**: Vamos trocar conjunto por sequência.*

***Hugo**: Sequência fechada?*

***Fábio**: Mas que sentido faz falar em conjunto de segmentos fechado ou conjunto fechado de segmentos?*

***Hugo**: Tira sequência, vamos colocar segmentos consecutivos apenas.*

***Fábio**: Temos que resolver o problema de ser fechado, como é que resolveremos isso? Temos que falar das extremidades.*

***Jadson**: Cada ponto tem uma extremidade?*

***Ivo**: Uma extremidade do último segmento vai encontrar a origem do primeiro.*

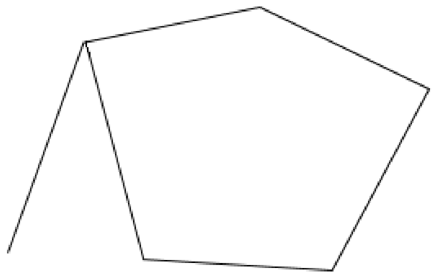
***Pesquisadora**: Segmento tem origem?*

***Hugo**: Quem tem origem é vetor.*

***Fábio**: Semirreta também tem origem. Mas os lados de um polígono são segmentos.*

***Hugo**: Uma extremidade do último segmento vai encontrar uma extremidade do primeiro.*

***Leandro**: Mas assim pode ligar a qualquer uma das extremidades e formar uma figura assim:*



***Leandro**: Tem que definir em qual das extremidades vai ter que ligar.*

***Daniela**: A última extremidade do último segmento.*

***Fábio**: Meu Deus, é complicado!*

***Daniela**: Nós não estamos conseguindo definir porque estamos acostumados a ver a figura junto com a definição e entendemos logo, sem precisar preocupar com a definição. Nós sabemos o que é, mas não sabemos explicar.*

Esta discussão evidencia que os alunos apresentam dificuldades conceituais quando expressam frases equivocadas como: "*cada ponto tem uma extremidade"*; "*É um polígono cujas medidas são iguais e possui quatro lados*" ou quando se referem à origem de segmento.

Podemos observar também dificuldade em expressar a definição de quadrilátero verbalmente, embora reconheçam este objeto na representação figural, isto é, há uma subordinação da apreensão discursiva à apreensão perceptiva. A fala da aluna ao afirmar "*Nós não estamos conseguindo definir porque estamos acostumados a ver a figura junto com a definição e entendemos logo, sem precisar preocupar com a definição. Nós sabemos o que é, mas não sabemos explicar"* evidencia que a discussão a fez perceber que uma definição ao ser apresentada pronta e associada a sua representação figural, sem uma metodologia que privilegie uma construção do conceito, pode simular um falso aprendizado. Nesse caso podemos observar dois fatos: é feita a representação em língua natural e associada à representação figural, mas não há participação do aluno na construção do conceito de modo a proporcionar-lhe vivência das fases propostas por Brousseau (1997) e não há coordenação entre os registros, o que, segundo Duval (2009b), é imprescindível para que o aluno não confunda o objeto com sua representação.

***Pesquisadora**: Vamos observar como a definição de polígono é apresentada nos livros?*

Os alunos tinham em mãos livros da educação básica e livros indicados para graduação.

***Bruna**: Nesse livro tem: polígonos são formas geométricas planas cujo contorno é fechado, formado por segmentos de retas que não se cruzam.*

***Leandro**: Aqui tem dizendo que as formas que têm apenas contornos retos são polígonos. Ele não explica o que é contorno*

***Andreia**: Olhe essa aqui como está difícil: polígono, uma poligonal fechada e simples em um plano, e por uma região interna que essas linhas delimitam. Eu não sei nem o que é uma poligonal.*

Pesquisadora: O autor explica o que é uma poligonal?

***Andreia**: Não, ele vai direto para polígono.*

***Leandro**: Tem aqui o que é contorno! Contorno de um polígono é formado por trechos retos, que são chamados de segmentos de reta, ligados um a um pelos extremos, até que o último segmento se una ao primeiro. Volta àquele problema que eu falei que a união pode ocorrer em um dos dois extremos do segmento.*

***Hugo**: Ele também não disse que esses segmentos não são colineares.*

***Leandro**: Tem mais um detalhe aqui que eu não vi. Ele diz mais "obtendo uma figura poligonal que contenha apenas uma região interna". Resolve o problema das extremidades do segmento.*

***Pesquisadora**: Será que ao ler uma definição desta nós nos atentamos para cada detalhe escrito pelo autor?*

***Leandro**: Só estamos prestando atenção aos detalhes porque estamos discutindo cada situação e como pode ser interpretada.*

***Pesquisadora**: A definição lida por **Andreia** e a definição lida por **Leandro** caracterizam polígono da mesma forma?*

***Leandro**: A que eu li não fala que os segmentos são coplanares.*

***Hugo**: Mas a maior diferença é que pela definição de **Leandro** polígono é só um contorno e pela definição de **Andreia** polígono é o contorno mais a região interna.*

***Pesquisadora**: Alguma dessas definições está errada?*

***Eva**: Não, apenas uma completa a outra.*

***Hugo**: Não acho que está errada, mas acho que a definição de **Leandro** está mais coerente. Porque 'poli' significa muitos e 'gonos' significa lados, não é?*

***Pesquisadora**: 'Gonos' significa ângulos. Nos livros de **Andreia** e **Leandro**, como o autor aborda área de figuras planas?*

***Andreia**: Aqui ele fala em área de polígonos.*

***Leandro**: Aqui ele fala de área de retângulo.*

***Hugo**: Mas ele disse que o retângulo é um polígono e definiu polígono como um contorno. Não se calcula área de contorno. Ele deveria dizer área da região limitada pelo retângulo.*

Os alunos não chegaram a um consenso sobre a definição de polígonos. Como definiram quadriláteros por meio da definição de polígonos, foi sugerido que buscassem a definição que consta nos livros científicos.

Daniela lê a definição de polígono segundo Dolce e Pompeo (2009).

***Andreia**: Eu não entendi nada.*

Convidamos ao quadro alguém que quisesse representar na forma de figura a definição de polígono que ***Daniela*** leu.

***Andreia**: Eu gosto mais de aprender olhando. Eu assimilo mais do que fazendo. Vai, **Hugo**.*

***Pesquisadora**: Vocês acreditam que olhando assimilam mais do que fazendo?*

***Hugo**: Eu não.*

***Andreia**: Eu gosto de fazer sozinha, se eu errar foi eu sozinha e não com todo mundo olhando.*

Hugo foi ao quadro interpretar cada trecho da definição simultaneamente à leitura do livro de Dolce.

***Fábio**: Dada uma sequência de pontos do plano $A_1, A_2, ..., A_n$ com $n \geq 3$.*

***Eva**: Se parasse aí os pontos poderiam ser colineares.*

***Andreia**: Essa parte aí eu entendi.*

***Fábio** (continuando a leitura): ...sendo os pontos todos distintos onde três pontos consecutivos não são colineares...*

***Andreia**: Agora não pode mais ser colineares*

***Fábio** (continuando a leitura): ...onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.*

***Daniela**: Para mim não está claro que os pontos não serão colineares. Falou apenas que três pontos não serão colineares*

***Eva**: Falou cada três pontos consecutivos, então cada três pontos consecutivos que a gente escolher não serão colineares.*

***Fábio**: É isso aí.*

***Daniela**: Agora entendi.*

***Andreia**: Até agora eu estou entendendo.*

***Fábio** lê o restante da definição.*

Jadson lê a definição segundo Barbosa (2006) e a comparamos com a definição lida por **Fábio**.

***Eva**: O conceito que **Fábio** leu, do livro do ensino médio, é mais fácil de entender que o que **Jadson** leu.*

***Fábio**: Eu achei esse aqui com uma linguagem muito simbólica. Aí o aluno fica doido com esses $A_1, A_2, ...,A_n$. Esses A_{n-1} eu não entendia nada.*

***Daniela**: Eu também acho muito complicado, eu só comecei a entender esse $n – 1$ depois de geometria plana.*

***Fábio**: A gente ainda tem uma base, a gente já é quarto semestre, ainda pode até entender, mas tem gente quando pega aí não entende essa linguagem não.*

***Daniela**: Eu não sabia mesmo o que era $n – 1$.*

***Leandro**: O que é esse A_{n-1} aí? Isso aí abre precedente para dúvida.*

Apresentamos alguns exemplos de sequências e, em seguida, esclarecemos de modo geral o significado de A_{n-1} para o aluno.

Eva*: Professora, a definição dos livros mais avançados, vamos dizer assim, é mais completa.*

Pesquisadora*: O que é mais avançado para você?*

Eva*: O do ensino médio ou da graduação. Certo? A gente não vai pegar uma definição desse livro para dar para a criança, certo? Como um autor poderia adaptar a definição do livro mais avançado, para um aluno de sexta série, por exemplo?*

Pesquisadora*: Foi o que acabamos de ver em todos esses autores.*

Eva*: Mas só que a gente percebeu que vários aqui estão incompletos, certo? Aí o que a gente poderia fazer pra um livro ficar completo pra o aluno aprender?*

Pesquisadora*: O que você vai ensinar não estará completo nos livros. Para o aluno aprender, você deverá levá-lo a construir o conceito, que é o que estamos tentando fazer agora, e não fornecer definições prontas. Com relação aos livros devemos ter o cuidado em escolher aqueles que não apresentam erros conceituais e verificar se os autores são coerentes com suas definições.*

Pudemos observar com estes comentários alguns pontos que merecem ser destacados:

- Problemas na leitura e interpretação de textos, isso fica evidenciado em algumas falas dos alunos: “Eu não entendi nada”; “Para mim não está claro que os pontos não serão colineares. Falou apenas que três pontos não serão colineares”.
- Constrangimento do aluno em evidenciar suas dificuldades. Esta constatação pode ser observada na fala da aluna quando expõe que “Eu gosto mais de aprender olhando. Eu assimilo mais do que fazendo”; “Eu gosto de fazer sozinha, se eu errar foi eu sozinha e não com todo mundo olhando”. Isto nos faz concluir que a aluna pode ter vivenciado alguma situação que a deixou constrangida. Com relação a este fato Almouloud *et al.* (2004) apontam alguns atributos que devem ser desenvolvidos para que ocorra aprendizagem em atividades em grupo, como tolerância para com a crítica a nossa produção e humildade para reconhecer que erramos.
- Os alunos apresentam dificuldades na compreensão de representações no registro simbólico e entendem que o fato de vivenciarem dificuldade em um conteúdo indica que outros alunos também a terão. A seguinte fala reforça nossa interpretação: “Eu achei esse aqui com uma linguagem muito simbólica. Aí o aluno fica doido com esses A_1, A_2, ..., A_n. Esses A_{n-1} eu não entendia nada”; “eu também acho muito complicado, eu só comecei a entender esse n – 1 depois de geometria plana”; “A gente ainda tem uma base, a gente já é quarto semestre ainda pode até entender, mas tem gente quando pega aí não entende essa linguagem não”. Mais uma vez constatamos que os alunos não estão habituados com a coordenação entre os registros, têm dificuldade em compreender casos gerais e acreditam

que alunos em nível escolar menos elevado não têm condições de compreender uma representação no registro simbólico.

- A seguinte fala do aluno (futuro professor) com relação ao livro didático mostra o hábito destes em esperarem encontrar respostas prontas e apoiarem-se em algum livro para ministrar suas aulas: “Mas só que a gente percebeu que vários aqui estão incompletos, certo? Aí o que a gente poderia fazer pra um livro ficar completo pra o aluno aprender?
- Observamos também que a discussão em torno da definição de quadrilátero despertou em alguns alunos a atenção na leitura e na observação de possíveis falhas ou incoerências nas definições apresentadas pelos autores. As seguintes falas confirmam nossa observação: “Tem aqui o que é contorno! Contorno de um polígono é formado por trechos retos, que são chamados de segmentos de reta, ligados um a um pelos extremos, até que o último segmento se una ao primeiro. Volta àquele problema que eu falei que a união pode ocorrer em um dos dois extremos do segmento”; “Mas ele disse que o retângulo é um polígono e definiu polígono como um contorno. Não se calcula área de contorno. Ele deveria dizer área da região limitada pelo retângulo”.

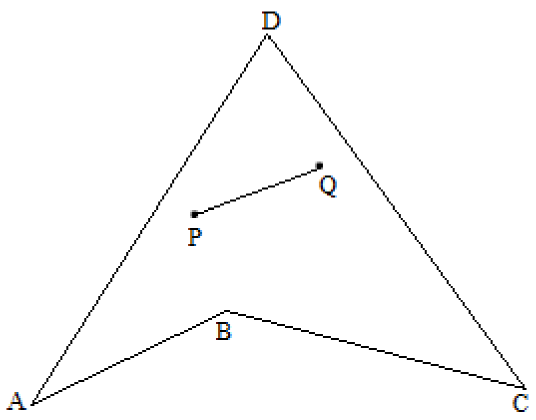
Institucionalizamos o que é polígono, e, discutimos a importância de nos mantermos coerentes com a definição escolhida, bem como da coordenação dos registros de representação.

Dando continuidade a nossa atividade, pedimos aos alunos que apresentassem uma definição para quadrilátero.

Perguntamos-lhes o que entendiam por quadrilátero convexo:

Fábio*: Um polígono convexo é aquele que dois pontos dentro da região, quando unidos, dá um segmento contido na figura.*

Pesquisadora*: Então esse polígono é convexo?*



Hugo*: Quaisquer, tem que ser quaisquer!*

Eva*: É assim professora. Quaisquer dois pontos dentro da figura, o segmento que une esses pontos está totalmente contido na figura.*

***Pesquisadora**: Sim. E esta é a única forma de verificar se um polígono é convexo?*

***Leandro**: Se eu traçar uma reta, sendo que o segmento pelo qual eu tracei a reta está totalmente contido nessa reta, por qualquer segmento da figura, essa figura tem que ficar toda dentro do mesmo plano, toda do mesmo lado dessa reta que eu tracei. Por qualquer lado da figura que eu traçar a reta, a figura toda tem que ficar do mesmo lado.*

***Gustavo**: Não entendi.*

A definição de Gustavo carrega um vocabulário que parece ser só compreendido por ele, como se este estivesse observando uma figura imaginária. É provável que a forma verbalizada pelo aluno não possibilite que outra pessoa construa a mesma representação figural imaginada por ele.

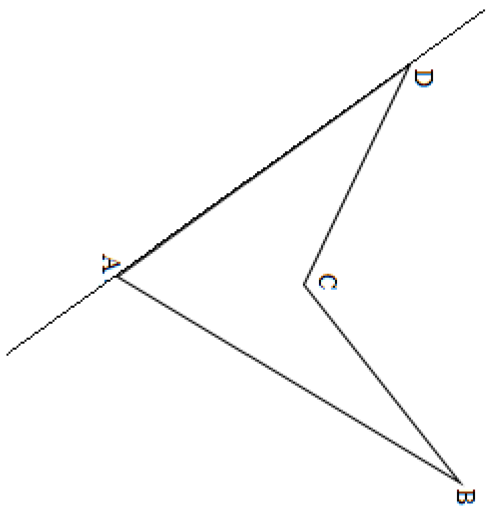
O aluno tentou reformular novamente a definição de polígono:

***Leandro:** Se eu traçar uma reta por qualquer um dos segmentos da figura de modo que o segmento esteja contido nessa reta; se toda figura ficar no mesmo semiplano fornecido pela reta, ela é convexa; se em algum caso ocorrer que alguma parte da figura ficar no outro semiplano, ela não é convexa. Essa definição deixa claro que tem que ser em todos os casos, se em um desses casos não ocorrer... Já deixou...*

***Andreia**: E se eu pegar essa reta que a senhora traçou e passar bem no meio?*

***Hugo**: Mas a reta tem que conter um dos lados.*

A pesquisadora traçou a seguinte figura e perguntou se ela é convexa:



***Leandro**: Tem que ser qualquer reta!*

***Andreia**: Tem que ter as palavrinhas mágicas: qualquer que seja a reta.*

Alguns alunos, apesar de não conseguirem expressar corretamente a definição de polígono convexo, mostraram conhecer duas maneiras de verificar se um polígono é convexo ou não. Notamos, mais uma vez, que os alunos reconhecem alguns objetos geométricos por meio da representação figural, mas não são capazes de representar esses objetos em outro registro. Apesar de apresentar definições em que o quantificador 'quaisquer' foi negligenciado, ao representar um polígono não convexo no quadro os alunos que apresentaram a definição o reconheceram.

Institucionalizamos as duas maneiras de reconhecer um polígono convexo: um polígono será convexo quando a reta que contém qualquer um de seus lados deixa os demais lados em um mesmo semipleno dos dois que essa reta determina; ou: um polígono é convexo quando, para todos os pares de pontos do interior do polígono, os segmentos com extremidades nesses pontos estiverem contidos no polígono.

Os alunos mostraram estar mais familiarizados com a segunda maneira. Chamamos atenção mais uma vez para a importância do conceito e o papel dos livros científicos, uma vez que estes podem esclarecer dúvidas.

Neste momento uma das alunas que ainda observava os livros didáticos fez o seguinte comentário:

***Daniela**: Esse autor mistura quadrilátero com poliedros. Ele colocou o título ‘Quadriláteros’ e inicia o capítulo falando de poliedros. Isso confunde a cabeça do aluno.*

Aproveitamos então para falar-lhes sobre a concepção de alguns educadores matemáticos no que se refere à forma de introduzir os conteúdos geométricos nas séries iniciais, no ensino fundamental 1 e nos primeiros anos do ensino fundamental 2. Falamos também sobre as recomendações dos PCN quanto à introdução do método dedutivo, do Movimento da Matemática Moderna e alguns fatores que contribuíram para a ausência da geometria nas escolas.

***Daniela**: Eu já estou com essa dúvida. Imagine eles que são mais novos. Isso aqui podia tá em um capítulo anterior.*

Pesquisadora: Será que sua dúvida é a dúvida do aluno? E se você tivesse visto dessa forma, será que estaria com as dúvidas que tem hoje?

***Daniela**: Eu discordo que seja dado no mesmo capítulo. Se o conteúdo é quadrilátero, não vai colocar uma figura geométrica não plana logo embaixo. Eu não ia saber falar sobre isso. Tá aqui com um capítulo de quadrilátero com uma figura não plana. Eu poderia dar antes, para depois fazer a comparação.*

***Hugo**: Aí professora, fazendo sempre a relação da geometria plana com a espacial o aluno mais tarde não vai ter dificuldade em calcular a área das superfícies dos sólidos.*

Falamos que, como futuros professores, eles devem estar conscientes de que o livro não é absoluto e que cabe ao professor sua escolha e a condução conveniente do que está escrito no livro.

***Daniela**: Eu não me guiaria por esse livro!*

***Gustavo**: Muitos professores hoje, principalmente professor de cursinho, quase nenhum usa livro. O professor chega na sala de aula, com o piloto na mão e dá aula. Tipo... O conteúdo que ele dá pode ser capítulo de um livro, mas pode ser também que não esteja ou pode ser de outro livro.*

***Pesquisadora**: E você acha o que?*

***Gustavo**: Eu acho assim que, com o aprendizado que a gente leva aqui dá pra gente ter essa noção, saber se o livro é realmente necessário mesmo. Quer dizer: necessário é, mas se o* *livro é realmente utilizável pra gente seguir, como* **Daniela** *falou ali. Só pelo título do capítulo ela já disse que não dá pra seguir.*

***Hugo**: Acho o ideal a gente usar várias fontes de pesquisa e ver alguns tópicos mais coerentes.*

***Pesquisadora**: Mas como vocês introduziriam a geometria para seu aluno?*

***Hugo**: Noções primitivas: ponto, reta e plano. Dá a ideia dele.*

***Gustavo**: Eu acho bom das duas formas, tanto iniciando pelas noções primitivas, como começando pela figura espacial. Acho que deve ter professores que preferem começar pelas noções primitivas e outros que devem começar pelas figuras espaciais. Eu não sei como faria, não Eu gostei da ideia de começar pelas figuras espaciais.*

***Hugo**: Mas para favorecer o aluno a aprender o método dedutivo axiomático, deve começar pelas noções primitivas: ponto, reta e plano.*

***Gustavo**: Eu não concordo com isso, não.*

***Andreia**: Mas há outra questão também, eu falo isso pela geometria que eu tive, por ela estar tão separada, lá nos finais a gente não chega a ver. Se a gente prestar atenção nesses livros mais atuais ele tenta unir a matemática mesmo com a geometria, não uma coisa separada.*

***Daniela**: Os livros novos estão assim então, pois eu dou curso a uma menina que no livro dela tem geometria no início, no meio e no fim. Não é só no final. Ele coloca proporção aí vai e coloca as figuras. Vai alternando.*

***Pesquisadora**: Alguns desses livros que vocês têm na mão trazem os conteúdos geométricos apenas no final?*

Pudemos observar nas falas dos alunos a ausência de coordenação de registros ao tentar expressar a definição de polígono convexo. O aluno evidencia saber reconhecer na prática o que vem a ser um polígono convexo, porém não consegue expressar a definição: "*Se eu traçar uma reta, sendo que o segmento pelo qual eu tracei a reta está totalmente contido nessa reta, por qualquer segmento da figura, essa figura tem que ficar toda dentro do mesmo plano, toda do mesmo lado dessa reta que eu tracei. Por qualquer lado da figura que eu traçar a reta, a figura toda tem que ficar do mesmo lado".*

A dependência ao livro didático, constatada em nossas análises preliminares, foi explicitada. Há indícios de que esses futuros professores reproduziriam em suas futuras aulas o que é apresentado nos livros didáticos, não privilegiando as dialéticas propostas pela teoria das situações didáticas, de Brousseau (1997). A fala a seguir aponta para as dúvidas que seus futuros alunos vivenciarão, tendo em vista as suas próprias: *"Eu já estou com essa dúvida. Imagine eles que são mais novos. Isso aqui podia tá em um capítulo anterior".* A postura desse sujeito de nossa pesquisa foi também observada entre professores pesquisados por Maioli (2001).

Outra observação diz respeito à forma que os alunos acreditam ser a mais eficiente para introduzir a geometria a seus futuros alunos a partir das noções primitivas: *"Mas para favorecer o aluno a aprender o método dedutivo axiomático, deve começar pelas noções* *primitivas: ponto, reta e plano".* Esta fala evidencia que, em sua futura prática, este futuro professor está propenso a reproduzir as aulas vivenciadas na graduação.

Dando continuidade à nossa atividade, concedemos 10 minutos para os alunos identificarem os quadriláteros notáveis. Apresentaram os seguintes comentários:

a) Observar os quadriláteros.

(1) (2) (3)

(4) (5) (6)

***Eva**: Professora, precisa colocar trapézio regular? Eu vou colocar apenas trapézio, viu?*

Com relação ao quadrilátero 6:

***Fábio**: Paralelogramo não é, pois paralelogramo tem que ter quatro lados, sendo iguais dois a dois, e aqui tem dois lados diferentes. Também trapézio não é, pois trapézio tem que ter dois lados iguais e aqui é um polígono irregular.*

***Hugo**: A figura 6 é um trapézio.*

***Fábio**: Mas trapézio tem que ter dois lados iguais.*

***Hugo**: Não. Dois paralelos e dois concorrentes.*

***Leandro**: Esse 6 é o quê?*

***Daniela**: Professora, eu posso usar o termo quadrilátero oblíquo?*

***Pesquisadora**: O que é que você entende por quadrilátero oblíquo?*

***Daniela**: É tortinho.*

***Eva**: Professora, o losango é que nem o quadrado com as medidas iguais?*

***Daniela**: Só que oblíquo.*

***Pesquisadora**: O que vocês acham?*

***Fábio**: Onde tem uma diagonal maior e uma menor.*

Após discussão, todos acabaram por identificar cada quadrilátero corretamente. No entanto, os comentários indicam que os alunos apresentam dificuldades conceituais com relação aos quadriláteros notáveis. Há indícios de que confundem os quadriláteros notáveis com sua representação. A próxima atividade confirmará ou refutará essa hipótese.

Foi solicitado aos alunos definirem cada um dos quadriláteros notáveis, começando com o paralelogramo.

***Andreia**: Eu não sei definir, eu só sei ver.*

***Gustavo**: Paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados paralelos dois a dois.*

***Andreia**: Aí você falou também do retângulo.*

***Gustavo**: É um paralelogramo. O retângulo é um paralelogramo. A diferença é que no retângulo os ângulos internos têm noventa graus. Mas o retângulo também é um paralelogramo.*

***Fábio**: Não. O paralelogramo é um retângulo? Não.*

***Hugo**: O retângulo que é um paralelogramo.*

***Fábio**: Eu coloquei que o paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados iguais e paralelos dois a dois.*

***Eva**: Eu coloquei que paralelogramo é uma figura plana paralela e ligada dois a dois.*

***Pesquisadora**: Vamos imaginar, **Eva**, que a pessoa que ouve esta definição não enxerga e precisa visualizar a representação do que está ouvindo em forma de figura. Ele ouve que paralelogramo é uma figura plana paralela, o que você acha que ele imaginaria?*

***Gustavo**: Tem que dizer que é quadrilátero, mesmo que a pessoa não saiba o que é um quadrilátero, e quem é paralelo a quem. Senão, não vai saber.*

***Jadson**: Eu coloquei que é um quadrilátero com quatro segmentos paralelos dois a dois.*

***Daniela**: Eu coloquei que é um quadrilátero oblíquo com lados opostos iguais e paralelos.*

***Bruna**: Eu também coloquei assim.*

***Ivo**: Eu também coloquei oblíquo.*

***Fábio**: Ele seria oblíquo à base, não é? Que forma ângulo agudo com a base.*

***Ivo**: Eu coloquei: polígono de quatro lados, tendo os lados opostos com mesma medida e os lados oblíquos em relação à base.*

***Fábio**: É! Tem que ser oblíquo em relação à base porque senão eu vou imaginar que vai ser oblíquo em relação a um plano.*

***Pesquisadora**: E vocês imaginaram a necessidade de colocar esse termo oblíquo por quê?*

***Daniela**: Por causa do retângulo.*

***Fábio**: Por causa dos lados paralelos do retângulo.*

***Gustavo**: Mas o retângulo também é um paralelogramo.*

***Daniela**: Sim, mas para a gente falar a diferença... Como vamos falar a diferença deles dois?*

***Gustavo**: Mas aí é como a professora falou. Assim a gente tá usando a figura para definir. A gente pode definir depois que o retângulo é o paralelogramo que possui os quatro ângulos retos.*

***Daniela**: Foi por isso que eu acrescentei o "oblíquo", porque por essa definição o retângulo é um paralelogramo.*

***Hugo**: Mas o retângulo é um paralelogramo.*

***Andreia**: Aí terminou de confundir tudo.*

***Gustavo**: A gente pode definir paralelogramo como o quadrilátero que possui os lados paralelos dois a dois. Pode ser retângulo ou pode não ser retângulo.*

***Pesquisadora**: Nós estamos tentando definir paralelogramo. Quando tentamos definir um objeto, nós devemos estabelecer o que, no mínimo, caracteriza esse objeto. As demais características passam a ser propriedades desse objeto que derivam da definição. Nesse caso, será que existe um quadrilátero com lados opostos paralelos em que estes lados apresentem medidas diferentes?*

***Hugo**: É uma consequência. Não existe paralelogramo com lados opostos diferentes.*

***Daniela**: Existe sim. Eles podem ser paralelos e um maior e outro menor.*

***Ivo**: Pode ser sim, paralelos, o de cima maior e o de baixo menor.*

***Hugo**: Então não seria dois a dois. Se for dois a dois, não tem como não ser.*

***Pesquisadora**: Vamos tentar traçar esse quadrilátero com lados opostos paralelos em que os pares de lados paralelos tenham medidas distintas?*

***Daniela**: Não, não é assim. Eu imaginei diferente. O trapézio...*

***Hugo**: São dois a dois, **Daniela**. A igualdade é uma consequência do paralelismo dos lados.*

O fato de não conseguir construir um quadrilátero com lados opostos paralelos e não congruentes fez com que Daniela aceitasse que não existe o quadrilátero procurado. Alertamos aos alunos que essa procura é o que chamamos de conjectura e que para termos certeza da inexistência desse quadrilátero precisaríamos demonstrar.

Na próxima etapa da atividade, serão exploradas as propriedades do paralelogramo e os alunos terão a oportunidade de conjecturar sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis e demonstrá-las.

***Pesquisadora**: Qual é a definição de retângulo?*

***Bruna**: Eu coloquei: é um quadrilátero com dois lados paralelos e que possui ângulos de 90º.*

***Andreia**: Eu coloquei assim: paralelos entre si e que possui ângulos retos no seu interior.*

***Gustavo**: Eu ia colocar assim: o paralelogramo cujos ângulos internos têm 90º. Aí eu coloquei assim: quadrilátero que possui lados opostos paralelos dois a dois e seus ângulos internos medem 90º.*

***Daniela**: Quadrilátero com lados opostos paralelos e com quatro ângulos retos.*

***Hugo**: Basta dizer que é o paralelogramo com quatro ângulos retos.*

***Gustavo**: Mas tem que especificar que são os quatro ângulos internos.*

***Hugo**: Os externos também são!*

***Fábio**: É. Porque se prolongar os segmentos, os externos também são retos.*

***Leandro**: Eu acho melhor dizer que é o quadrilátero que possui os quatro ângulos internos medindo 90º.*

***Fábio**: Eu também, porque pode ser que o aluno nem saiba o que é um ângulo externo ainda.*

***Gustavo**: Para mim é melhor dizer que é o paralelogramo cujos ângulos internos medem 90º.*

***Pesquisadora**: Então para vocês, quais são as condições para que um quadrilátero seja retângulo?*

***Todos**: Tem que ser quadrilátero, tem que ter os lados opostos paralelos, tem que ter os ângulos internos medindo 90º.*

***Leandro**: Aí entra a questão das medidas dos lados, agora.*

***Gustavo**: Não. Aí não entra a questão das medidas dos lados, não. Porque a gente está dizendo que são paralelos.*

***Leandro**: Sim, mas para ser retângulo, dois dos lados paralelos têm que ser maiores que os outros dois.*

***Gustavo**: Não! O quadrado é um paralelogramo!*

***Leandro**: Mas o quadrado é um retângulo?*

***Fábio**: É, o quadrado é um retângulo!*

***Gustavo**: É sim!*

***Hugo**: O quadrado é um retângulo com todos os lados iguais.*

***Andreia**: Então o quadrado é um paralelogramo, é um retângulo. Se tá dizendo que ele é um retângulo, então ele é um paralelogramo.*

***Hugo**: Com certeza.*

***Andreia**: Então termina de confundir o que o aluno já sabia e vai atrapalhar tudo. Se ele vir a figura ele vai dizer: "Professora eu não sei mais o que é isso".*

***Fábio**: Mas isso confunde mesmo, porque a gente sempre aprendeu a diferenciar o quadrado do retângulo. Aí sempre os alunos pensam que o quadrado não é um retângulo. Sempre foi assim.*

***Daniela**: Desde pequenininho que eles já sabem o que é triângulo, quadrado e retângulo.*

Nesse momento houve uma grande discussão entre os alunos, como se estivessem surpresos em descobrir a relação entre os quadriláteros notáveis.

***Andreia**: Agora eu acabei de descobrir uma coisa professora, que eu não sei.*

***Fábio**: Aí, professora, ele não sabia que o quadrado é um retângulo.*

***Leandro**: A definição que eu tinha é que... Por isso que eu falei da questão das medidas. Pra mim o quadrado não era um retângulo. Pra mim o retângulo sempre ia ser lados opostos paralelos, com mesma medida, e lados adjacentes com medidas diferentes um do outro.*

***Hugo**: A criança não vai saber diferenciar por causa das fases, como dizia Piaget. As fases cognitivas. A criança, quando ela vir a figura, ela vai identificar pela forma. Já no fundamental 2 ela tem que abstrair. A fase do princípio do abstrato. Ele tem que ir pela definição e não... Ele não vai pela forma da figura.*

***Andreia**: Eu tô na faculdade e ainda não abstraí.*

***Daniela**: Eu não concordo com **Hugo**.*

***Pesquisadora**: Mais uma vez estamos vendo o que acontece quando ficamos limitados a um único registro de representação.*

Falamos da importância de coordenar os diferentes registros de representação e fizemos uma breve apresentação das ideias de Duval, que considera que a compreensão em matemática depende da coordenação de ao menos dois registros de representação.

***Eva**: Então quadrado é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos com medidas iguais, não é?*

***Pesquisadora**: E o que mais?*

***Fábio**: Ângulos internos medindo 90º.*

***Gustavo**: Basta dizer que os ângulos internos são iguais também, porque se a soma é 360º, então cada um vai medir 90º.*

***Fábio**: Aí você vai ter que demonstrar, meu amigo.*

***Gustavo**: Aí eu vou ter que dizer que a soma dos ângulos internos é 360º. Demonstrar para depois usar, não é?*

***Hugo**: Eu tenho outra definição para quadrado. É um losango que tem todos os ângulos internos iguais a 90º.*

***Pesquisadora**: Vocês concordam com a definição de **Hugo**?*

***Andreia**: Não, porque o losango pode ter os ângulos agudos [faz com as mãos um losango não quadrado], e aí?*

***Fábio**: Professora, eu acho que não deve envolver losango.*

Gustavo: *Eu não sei. Porque eu não defini losango. E eu não defini porque eu não sei o que é um losango. Então pelo que* **Hugo** *tá dizendo, se o quadrado é um caso especial do losango, os lados do losango são iguais.*

Hugo: *É. Justamente.*

Fábio: *O quadrado é um losango... E é mesmo! O quadrado é um losango.*

Gustavo: *Não... Não, porque...Se ali diz que o quadrado tem que ter os ângulos internos iguais a 90, o losango não tem os ângulos internos iguais a 90. Então o losango não é um quadrado.*

Fábio: *Então se você falar que o losango não tem o ângulo de 90º, então você tá dizendo que o quadrado não é um losango.*

Gustavo: *O quadrado é um losango! Mas só que o losango não é um quadrado!*

Leandro: *Basta colocar que tem os quatro lados iguais e os ângulos internos diferentes de 90º.*

Jadson: *E os ângulos opostos são iguais.*

Leandro: *Os ângulos opostos iguais e diferentes de 90º.*

Fábio: *Os ângulos opostos não podem ser diferentes. Porque o quadrado é um losango. E o quadrado tem os ângulos opostos iguais.*

Percebemos uma confusão por parte de alguns alunos quanto às definições e propriedades dos quadriláteros. Relacionamos as características de cada um dos quadriláteros notáveis e solicitamos dos alunos participantes que tentassem construir um quadrilátero com os quatro ângulos retos e que possuíssem os lados opostos não paralelos e não congruentes ou quadriláteros com lados congruentes e com ângulos opostos com medidas distintas.

Os alunos passaram a desenhar quadriláteros com todos os ângulos retos e perceberam que aparentemente não existe quadrilátero com ângulos retos e lados opostos não paralelos ou não congruentes.

Os alunos chegaram à conclusão por apreensão perceptiva e afirmaram que se um quadrilátero possui todos os ângulos retos, então os lados opostos serão paralelos e congruentes. Esta propriedade não foi demonstrada nesse momento. Não exigimos a demonstração, pois sabíamos que esta surgiria na segunda parte da sequência, porém esclarecemos aos alunos que apenas a demonstração pode validar nossas afirmações.

Gustavo: *Então se for retângulo, ele é um paralelogramo, mas se for um paralelogramo nem sempre é um retângulo.*

Pesquisadora: *Se vocês estivessem dando aula, fizessem essa pergunta: "Será que existe um polígono, quadrilátero, com todos os ângulos retos e os lados opostos não serem paralelos?", vocês não acham que eles terão curiosidade de verificar a existência desse quadrilátero?*

Hugo: *Vão, sim.*

Pesquisadora: *Será que eles ficarão satisfeitos com o "não" do professor?*

Gustavo: *Eles não vão conseguir desenhar e eles também, professora, vão querer ver uma figura que os ângulos não são retos, mas os lados opostos sejam paralelos. Porque eles vão ficar na curiosidade. Eles vão pensar: "Se o professor falou isso, pode ser que exista".*

***Leandro**: O aluno vai ficar sempre na dúvida se ele não conseguiu desenhar ou se não existe.*

***Pesquisadora**: É a oportunidade de mostrar a seu aluno que a única forma de ter certeza de que não existe tal quadrilátero é por meio da demonstração.*

Os alunos foram instigados a fazer a mesma investigação com relação ao losango e seus ângulos internos. Falamos para os alunos que apenas conjecturamos a respeito de algumas propriedades dos quadriláteros, mas nas próximas atividades teríamos a oportunidade de fazer estas demonstrações. Prosseguimos o debate com os alunos:

***Gustavo**: Então, professora, eu penso assim: que no quadrilátero a gente tem que definir do maior para o menor. A gente tem que definir o paralelogramo, porque para definir o retângulo precisa da definição de paralelogramo, e pra definir o quadrado precisa da definição do retângulo.*

***Leandro**: O quadrado está incluído no conjunto dos retângulos?*

***Fábio**: O quadrado é um retângulo.*

***Gustavo**: O quadrado é um subconjunto do conjunto dos retângulos.*

Fizemos a representação em forma de diagrama do conjunto dos retângulos contendo o conjunto dos quadrados.

***Pesquisadora**: E os losangos?*

***Fábio**, **Eva**: Está dentro do quadrado.*

***Fábio**: Não!*

***Andreia**: Não, porque o quadrado só tem ângulo de 90º.*

***Gustavo**: O losango está fora do conjunto dos quadrados.*

***Pesquisadora**: Existe alguma relação entre o losango e o retângulo?*

***Hugo**: O quadrado é a interseção entre o losango e o retângulo.*

***Pesquisadora**: Qual dos quadriláteros tem em sua definição mais exigências?*

***Leandro**: O quadrado.*

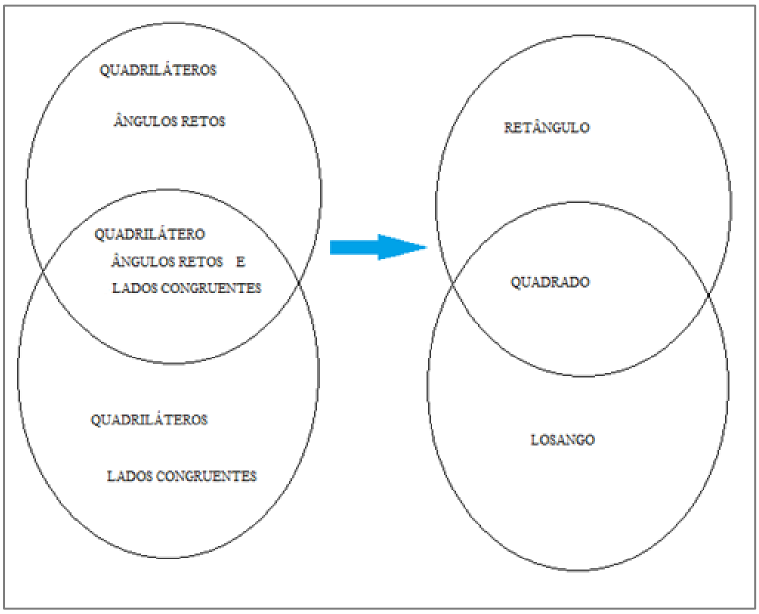
***Pesquisadora**: Isto implica que relação entre o conjunto dos quadrados e os outros quadriláteros?*

***Fábio**: Ele é menor. É igual aos funcionários de uma empresa. Quanto mais qualificados são os funcionários, menos desses funcionários tem na empresa.*

***Pesquisadora**: Quanto mais exigências são impostas sobre os elementos de um conjunto, menor é o conjunto.*

Construímos o diagrama relacionando inicialmente as características dos quadriláteros, para posteriormente substituir pelos quadriláteros correspondentes, estabelecendo assim a relação entre os quadriláteros notáveis (Figura 42).

Figura 42. Diagrama que relaciona os quadriláteros notáveis



Fonte: Dados da pesquisa.

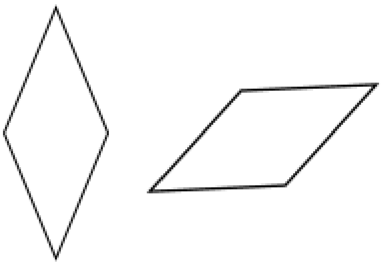
***Andreia**: E o paralelogramo pega tudo.*

***Pesquisadora**: **Andreia** disse que o conjunto dos paralelogramos contém todos os outros.*

***Fábio**: Aí tem outro superior: quadrilátero e polígono.*

***Hugo**: Polígono é maior.*

***Hugo**: Professora, uma coisa interessante é que o aluno não conhece o losango, normalmente vê a questão só da figura e quando vê o losango em determinada posição ele diz que não é um losango e sim apenas um paralelogramo.*



***Gustavo**: É, professora. Quando desenhamos o quadrado com um vértice para baixo, ele é losango. Quando desenhamos com o lado para baixo, ele é quadrado.*

***Leandro**: Foi isso que o palestrante estava falando sobre o livro didático, sobre as posições que vinham as formas geométricas nos livros, que os alunos acabam cauterizando aquilo na mente e só seguem... Só é aquilo se tiver naquela posição.*

Falamos que isso acontece quando ficamos presos a uma única representação: a representação em forma de figura. Nesse caso estamos confundindo o objeto com uma representação.

***Leandro**: E o trapézio entra aonde aí no diagrama?*

***Hugo**: O trapézio é um tipo qualquer de quadrilátero.*

***Pesquisadora**: Que definição vocês deram para trapézio?*

***Gustavo**: É o quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e dois não paralelos.*

***Daniela**: Eu coloquei que é o quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e dois concorrentes.*

***Fábio**: É o quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos, chamados base maior e base menor e os outros lados concorrentes.*

***Hugo**: É o quadrilátero que tem dois lados paralelos e os outros dois não paralelos, os outros dois são oblíquos.*

***Andreia**: E aquele que fica assim, que também é trapézio? [Desenha um trapézio retângulo.]*

***Hugo**: A reta-suporte dos lados não paralelos são oblíquas.*

***Andreia**: Me tire essa dúvida: o que são retas oblíquas?*

***Gustavo**: São retas que, quando prolongadas, elas se encontram.*

***Pesquisadora**: Vocês sabiam que existem duas definições para trapézio?*

***Andreia**: Eu não sabia uma, que dirá duas.*

Passamos a definir trapézio de duas maneiras diferentes, sendo a primeira: “Quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos”.

***Eva**: Essa definição também vale para trapézio regular?*

***Pesquisadora**: O que você entende por trapézio regular?*

***Gustavo**: Não tem como ter um trapézio regular, porque se os quatro lados forem paralelos entre si, consequentemente eles são paralelos dois a dois. Como no trapézio ele não tem os lados paralelos entre si, consequentemente eles também não são iguais dois a dois.*

***Pesquisadora**: O que é um polígono regular?*

***Gustavo**: Possui os ângulos e lados iguais.*

Esclarecemos que um polígono é regular quando possui todos os lados e todos os ângulos congruentes, e observamos que, pela primeira definição de trapézio, não há possibilidade de que este seja um polígono regular.

Apresentamos a segunda definição de trapézio: “Quadrilátero que possui um par de lados paralelos”.

***Andreia**: É a mesma coisa.*

***Hugo**: É. Só com outros dados.*

Os alunos não perceberam a diferença entre as duas definições de trapézio. Solicitamos que observassem a diferença do que estava escrito em cada caso.

***Gustavo**: Aí tem uma diferença, professora. Pode ser que alguém leia e pense assim: trapézio é um quadrilátero que possui pelo menos um par de lados paralelos.*

***Fábio**: Mas aí não tem pelo menos.*

***Gustavo**: Mas pode ser que alguém pense dessa forma.*

***Pesquisadora**: Mas não é isso que tem escrito aqui, não?*

***Fábio**: Não!*

***Gustavo**: Mais ou menos.*

***Eva**: Está, sim. Só que está implícito.*

***Leandro**: Isso pode abrir margem para uma interpretação incorreta.*

***Fábio**: Eu acho que dá no mesmo.*

***Gustavo**: A primeira definição foi mais direta.*

***Leandro**: A segunda definição está dizendo que tem que ter um par, mas não está dizendo que é apenas um.*

Mostramos a representação figural de dois quadriláteros – um trapézio não paralelogramo e um paralelogramo – e perguntamos se o primeiro era um trapézio pela primeira definição. Todos responderam que sim. Pela segunda definição, também todos responderam que sim.

Mostramos a representação figural de um paralelogramo e perguntamos se era um trapézio pela primeira definição. Todos responderam que não. E pela segunda definição?

***Gustavo**: Mas pela segunda é.*

***Pesquisadora**: Então o paralelogramo é um trapézio?*

***Hugo**: O pior que é!*

Os alunos ficaram surpresos com a possibilidade de o paralelogramo ser um trapézio.

***Pesquisadora**: Tomem os livros do nível superior e do ensino fundamental e observem qual a definição escolhida pelos respectivos autores.*

Apenas um livro da educação básica adotou a segunda definição para trapézio, enquanto todos os livros de ensino superior adotaram a segunda definição.

Do livro de Dolce, a segunda definição foi lida por Daniela: “Um quadrilátero plano é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos”.

***Leandro**: E esse “se, e somente se”?*

***Hugo**: Toda definição é “se, e só se”.*

Pedimos aos alunos que fizessem a representação simbólica da definição lida por Daniela para que pudessem esclarecer o significado de “se, e somente se”. Explicamos que as duas definições estão corretas e que teríamos que adotar uma definição.

***Gustavo**: Então o paralelogramo também é um trapézio!?*

***Pesquisadora**: Pela segunda definição, sim.*

***Gustavo**: Não sei. Estou confuso aqui.*

***Fábio**: Essa definição 2 é verídica?*

***Pesquisadora**: Tanto é, que a maioria dos livros científicos a adota.*

***Hugo**: Não, professora. Tem algum problema aí de interpretação. Vamos reler.*

***Gustavo**: Então, por Barbosa [2006], o paralelogramo também é um trapézio.*

***Hugo**: Vamos reler... Vamos reler... Não estou aceitando isso, não. Esse português, esta linguística tá errada!*

***Pesquisadora**: Tanto a primeira definição quanto a segunda estão corretas. Só que teremos de adotar uma delas e ser coerentes com a definição que escolheremos.*

***Hugo**: A mais geral: a segunda.*

***Pesquisadora**: Agora vamos definir o trapézio isósceles.*

***Gustavo**: O trapézio é isósceles quando seus ângulos são iguais dois a dois.*

***Daniela**: Os ângulos da base.*

***Fábio**: Os lados são iguais, não paralelos.*

***Jadson**: Aqui tem dizendo assim: Um trapézio é isósceles quando suas laterais são congruentes* [segundo Barbosa (2006)].

***Pesquisadora**: Então o paralelogramo é um trapézio isósceles?*

***Gustavo**: Professora, a gente deveria ter uma disciplina assim no nosso curso. Porque só assim para a gente saber como ensinar. Porque a gente aprende na teoria; quando chega na hora de ensinar, ninguém sabe. Ninguém sabe ensinar nada.*

***Hugo**: Quando eu estudei, a professora só se preocupava com os cálculos. Era tudo decoreba. Quando eu fui estudar para uma seleção, eram provas abertas que tinha de raciocinar a questão, não era apenas reprodução de algoritmos. Quando eu cheguei na faculdade que comecei a ver demonstração. Eu nunca tinha visto na escola.*

***Gustavo**: É a forma que a gente vê na faculdade. Tinha que ter disciplina assim para ensinar a gente ensinar.*

Pela segunda vez o aluno expressa que as atividades que estão sendo desenvolvidas servem de inspiração para que saibam como ensinar futuramente.

Voltamos à discussão sobre as definições de trapézio...

***Gustavo**: Professora, se o livro que eu usar para ensinar tiver usando a primeira definição de trapézio, eu devo usar qual das duas?*

***Pesquisadora**: Você usa a que achar melhor, mas deve ter o cuidado em ser coerente com a definição que você escolher. Nós aqui adotamos a segunda definição; então vamos definir agora o que vem a ser o trapézio isósceles de modo que seja coerente com nossa definição de trapézio.*

***Fábio**: É o trapézio que possui dois lados com medidas iguais e não paralelos.*

***Bruna**: Aqui nesse livro diz que trapézio isósceles é o trapézio que possui os lados não paralelos com medidas iguais.*

***Pesquisadora**: E como o autor define trapézio nesse livro?*

***Gustavo**: Vendo essa definição de trapézio isósceles, professora, eu acredito que ele considera a primeira definição de trapézio.*

***Bruna**: Quadrilátero com apenas um par de lados paralelos chamados bases.*

***Gustavo**: Tá vendo, professora?*

***Fábio**: Nesse livro [Dolce] ele definiu assim: ABCD é um trapézio se, e somente se, ele possui dois lados paralelos. Então ele usou a definição 1.*

Partimos para a representação simbólica da definição lida por Fábio:

ABCD trapézio $\Leftrightarrow \overline{AB}$ // $\overline{CD}$ ou $\overline{BC}$ //$\overline{DA}$

***Pesquisadora**: Basta que tenha um dos pares de lados paralelos para que ABCD seja trapézio. Que corresponde à definição 2.*

***Marina**: Professora, e esse "se, e somente se", não tá afirmando que é apenas, não?*

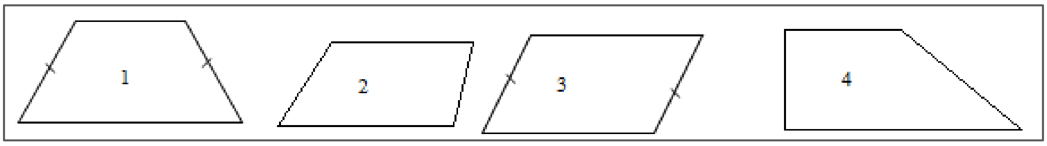
***Fábio**: Foi assim que eu interpretei.*

Esclarecemos aos alunos o significado da expressão "se, e somente se", e que em todas as definições ela está implicitamente sendo utilizada (fizemos a leitura nos dois sentidos) – ou seja, usaremos esta expressão sempre que pretendermos fazer uma caracterização de um objeto.

Fábio: *Aqui não tem a definição de trapézio isósceles.*
Camila: *Barbosa [2006] utilizou a definição 2.*
Pesquisadora: *E qual a definição de trapézio isósceles?*
Camila: *Um trapézio é dito isósceles se suas laterais são congruentes.*

Traçamos vários trapézios no quadro, como representado na Figura 43 e pedimos aos alunos que identificassem os trapézios isósceles utilizando a definição lida por ***Camila***.

Figura 43. Trapézios.



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos afirmaram serem isósceles os trapézios 1 e 3.

Gustavo: *Mas 3 é um paralelogramo e não tem os ângulos da base congruentes.*

Falamos sobre as incoerências que existem em alguns livros e chamamos a atenção dos alunos para a importância de atentar às definições escolhidas e de manter coerência com estas.

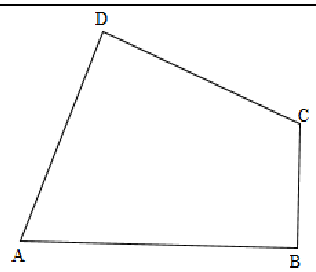
Bruna: *A gente pode acrescentar "não paralelos" na definição de trapézio isósceles.*

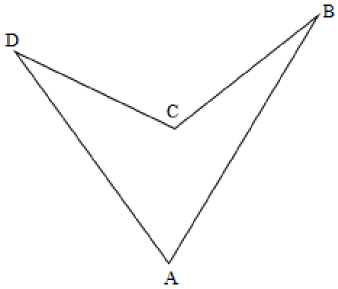
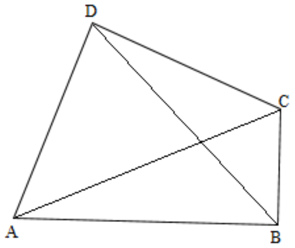
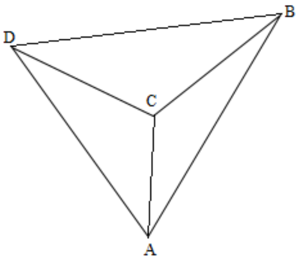
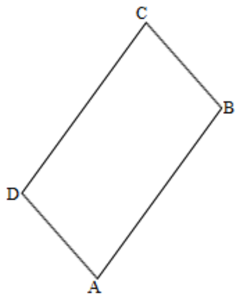
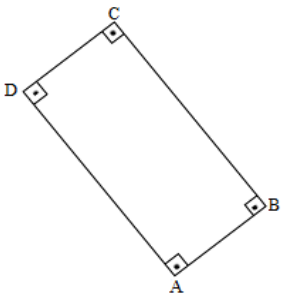
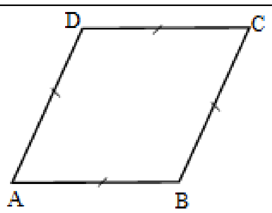
Admitimos que o trapézio será isósceles sempre que tiver apenas um par de lados congruentes, o que corresponde à Figura 43.

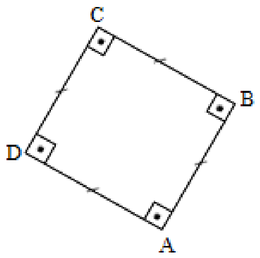
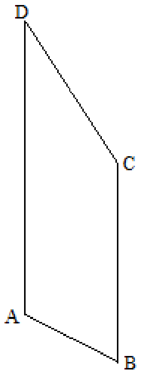
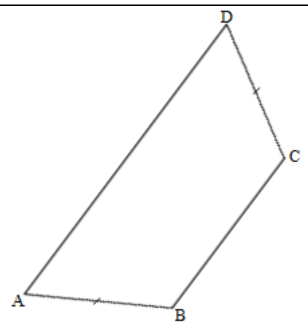
Gustavo: *Se alguém lhe disser que o retângulo é um trapézio, você vai acreditar?*
Pesquisadora: *Fiquemos atentos em manter a coerência com a definição escolhida para trapézio.*

Institucionalizamos em um quadro a definição de cada quadrilátero notável representando-a nos registros de língua natural, figural e simbólica. (Quadro 19).

Quadro 19. Institucionalização de definições relacionadas a quadriláteros.

REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL	REGISTRO FIGURAL	REGISTRO SIMBÓLICO
Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos, de modo que três pontos consecutivos não sejam colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a		Dados A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano em que três pontos consecutivos não são colineares. O quadrilátero ABCD é dado por: $ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$, $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$ e $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \emptyset$

reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero.		
Diagonal de um quadrilátero é um segmento que une dois vértices não consecutivos.		$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais do quadrilátero *ABCD*.
Um quadrilátero plano convexo é paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos.		*ABCD* é paralelogramo ⇔ $\overline{AB}//\ \overline{CD}$ e $\overline{AD}//\ \overline{BC}$.
Um paralelogramo é retângulo se, e somente se, possui um ângulo reto.		O paralelogramo *ABCD* é um retângulo ⇔ $med(A\hat{B}C) = 90^o$ ou $med(B\hat{C}D) = 90^o$ ou $med(C\hat{D}A) = 90^o$ ou $med(D\hat{A}B) = 90^o$
Um paralelogramo é losango se, e somente se, possui dois lados consecutivos congruentes.		O paralelogramo *ABCD* é um losango ⇔ $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ ou $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ ou $\overline{CD} \equiv \overline{DA}$ ou $\overline{DA} \equiv \overline{AB}$.

Um losango é quadrado se, e somente possui um ângulo reto. Ou equivalentemente , um retângulo é um quadrado se, e somente se, possui dois lados consecutivos congruentes		O losango *ABCD* é um quadrado ⇔ $med(A\hat{B}C) = 90^o$ ou $med(B\hat{C}D) = 90^o$ ou $med(C\hat{D}A) = 90^o$ ou $med(D\hat{A}B) = 90^o$ O retângulo *ABCD* é um quadrado ⇔ $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ ou $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ ou $\overline{CD} \equiv \overline{DA}$ ou $\overline{DA} \equiv \overline{AB}$.
Um quadrilátero plano, convexo é trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos.		*ABCD* é um trapézio ⇔ $\overline{AB} // \overline{CD}$ ou $\overline{AD} // \overline{BC}$.
Um trapézio é isósceles se, e somente se, possui apenas dois lados congruentes.		*ABCD* é trapézio isósceles ⇔ $AB \equiv CD$ e $\overline{AD} \neq \overline{BC}$

Fonte: Dados da pesquisa.

O objetivo desta tarefa foi garantir que os alunos conhecessem os quadriláteros que serão abordados nas tarefas seguintes, corrigir alguns equívocos conceituais detectados nas análises preliminares e esclarecer as características de um quadrilátero diferenciando definição e propriedades.

Os relatos apresentados acima nos permitiram algumas observações:

- Os alunos identificam os quadriláteros pela apreensão perceptiva, mas apresentam dificuldades em representá-los em língua natural ou em registro simbólico, evidenciando confusão entre o objeto e sua representação. Pudemos observar isso nas definições apresentadas e em relatos como: *"eu não sei definir, eu só sei ver"*, ou o do aluno que identificou o losango em sua representação figural e declarou: *"Eu não sei. Porque eu não defini losango. E eu não defini porque eu não sei o que é um losango"*.

- Tiveram dificuldade em relacionar os quadriláteros notáveis, o que também é consequência da confusão entre objeto e representação. Chegamos a essa conclusão pelas falas: *"Foi por isso que eu acrescentei o 'oblíquo', porque por essa definição o retângulo é um paralelogramo"* e *"Sim, mas para ser retângulo, dois dos lados paralelos têm que ser maiores que os outros dois"*.
- Os alunos confundem definição com propriedade, incluindo nas definições dos quadriláteros notáveis atributos que devem ser demonstrados para serem considerados válidos.
- Alguns alunos apresentam insegurança em seus conhecimentos. Isso fica evidenciado na fala da aluna: *"Não coloque de caneta não, meninos. Coloque de lápis*".
- Concepção de que o esclarecimento das relações entre os quadriláteros pode causar confusão no aprendizado dos alunos. Isso pôde ser constatado nas seguintes falas: *"Então termina de confundir o que o aluno já sabia e vai atrapalhar tudo. Se ele vir a figura ele vai dizer: 'Professora, eu não sei mais o que é isso'.*" e *"Mas isso confunde mesmo, porque a gente sempre aprendeu a diferenciar o quadrado do retângulo. Aí sempre os alunos pensam que o quadrado não é um retângulo. Sempre foi assim".*
- Problemas na interpretação de enunciados e dificuldade na compreensão do registro simbólico. Chegamos a essa conclusão ao observar que os alunos não perceberam a diferença entre as definições de trapézio e ao vê-los confundir a locução "se, e somente se" com um único termo.

As dificuldades apresentadas pelos alunos os tornam dependentes dos livros didáticos e os levam a fazer escolhas que sejam mais próximas daquilo em que acreditam e que dominam. As seguintes falas reforçam nossa afirmação: *"Esse autor mistura quadrilátero com poliedros. Ele colocou o título 'Quadriláteros' e inicia o capítulo falando de poliedros. Isso confunde a cabeça do aluno"*; *"Eu já estou com essa dúvida. Imagine eles, que são mais novos. Isso aqui podia tá em um capítulo anterior"*; *"Eu não ia saber falar sobre isso. Tá aqui com um capítulo de quadrilátero com uma figura não plana. Eu poderia dar antes, para depois fazer a comparação.* [...] *Eu não me guiaria por esse livro!".*

As produções dos alunos evidenciam que eles apresentam dificuldades conceituais no que tange aos quadriláteros, mais especificamente, na caracterização dos quadriláteros notáveis, que é mais influenciada pela apreensão perceptiva de figura. Isso já foi constatado por Duval (2012), que afirma que a limitação da representação de um objeto matemático a um único registro pode provocar confusão entre o objeto e sua representação.

Constatamos que a experiência que os alunos vivenciaram até o momento com a geometria se restringe à geometria intuitiva apoiada em experiências empíricas. Observamos nas falas dos alunos a característica de uma geometria científica (evidenciada no momento em que um deles afirma que a melhor maneira de dar início à geometria é pelas noções primitivas). Isso evidencia que esses alunos não vivenciam em sua formação os momentos propostos pela teoria das situações didáticas, tornando-os dependentes do livro didático.

Observamos nessa primeira etapa uma aceitação da tarefa, e as discussões apresentadas podem evidenciar que os alunos vivenciaram momentos de ação. Observamos também sinais de mudanças de concepções e também conscientização da necessidade de coordenação entre registros e de participação do aluno na construção do conhecimento para uma real aprendizagem e autonomia em sua prática futura. Essas afirmações são reforçadas pelas seguintes falas: *"Mas aí é como a professora falou. Assim a gente tá usando a figura para definir."*, *"Professora, a gente deveria ter uma disciplina assim no nosso curso. Porque só assim para a gente saber como ensinar. Porque a gente aprende na teoria; quando chega na hora de ensinar ninguém sabe. Ninguém sabe ensinar nada"*; *"Agora eu acabei de descobrir uma coisa, professora: que eu não sei".*

Houve avanço no ganho de conhecimento. Pudemos observar esse ganho quando os alunos começaram a perceber algumas das características essenciais de quadriláteros notáveis, como expressam as seguintes falas: *"Então o quadrado é um paralelogramo, é um retângulo. Se tá dizendo que ele é um retângulo, então ele é um paralelogramo"*; *"O quadrado está incluído no conjunto dos retângulos?"*; *"É igual aos funcionários de uma empresa: quanto mais qualificados são os funcionários, menos desses funcionários tem na empresa".*

Os resultados colhidos na primeira etapa da sequência se assemelham aos obtidos na pesquisa de Maioli (2011), especialmente quanto à autoridade atribuída aos livros didáticos pelos futuros professores pesquisados, à ênfase atribuída ao registro figural e à dificuldade relacionada à geometria. Há indícios que permitem afirmar que as dificuldades e concepções observadas na graduação podem se perpetuar ao longo da carreira docente.

Em seguida apresentaremos a segunda etapa da sequência, envolvendo atividades em que os alunos são solicitados a realizar construções geométricas e apresentar a justificativa matemática de cada uma delas.

2.ª etapa

Neste tópico, apresentamos, as tarefas que compõem a segunda etapa da organização didática, a análise *a priori* e a respectiva análise *a posteriori*.

As tarefas propostas e a aplicação da sequência se fundamentaram nas variáveis globais descritas e na teoria das situações didáticas, de Brousseau (2009).

As 10 tarefas envolvem construções geométricas no ambiente papel-lápis e exigem provas e demonstrações. Solicitou-se que os alunos construíssem quadriláteros notáveis e apresentassem a justificativa matemática de cada construção. Durante a execução de cada tarefa, os alunos tiveram oportunidade de vivenciar momentos de ação, formulação e validação e, ao final, institucionalizamos as propriedades dos quadriláteros que foram contempladas nas tarefas.

Visando controlar a evolução das estratégias que desejávamos que fossem desenvolvidas pelos alunos e, consequentemente, a evolução dos conhecimentos sobre o tópico ‘quadriláteros’, em cada uma das tarefas propostas levaram-se em consideração variáveis locais. Os valores atribuídos a essas variáveis visaram mobilizar diferentes conhecimentos pelos alunos, uma vez que cada escolha visou permitir a resolução das situações de diferentes estratégias de construção e a apresentação de justificativas para as construções realizadas. A escolha dessas variáveis, de seus respectivos valores e as consequências dessas escolhas serão apresentadas nas análises *a priori*.

Para a experimentação, distribuímos as tarefas para cada grupo e após concedermos um intervalo de tempo para que os alunos pudessem discutir internamente, os grupos apresentaram seus resultados, os quais foram colocados em discussão.

Observamos que inicialmente, em alguns grupos, os alunos trabalhavam individualmente ou um trabalhava enquanto outros apenas observavam, ao passo que em outros havia discussão. Solicitamos que todos participassem da execução da tarefa e que expusessem suas ideias. As discussões foram se intensificando no decorrer das atividades, mas mesmo assim percebemos a dificuldade de alguns em trabalhar e discutir em grupo. Quanto a esse fato, Sadovsky (2005) destaca a importância da socialização das atividades, uma vez que pode ocorrer bloqueio de um dos membros do grupo por diferentes motivos, tais como o conhecimento mais profundo de um dos membros, que pode desmotivar a contribuição dos demais participantes. A autora explica que a interação entre os pares e a confrontação entre as diferentes produções, após a interação do aluno com o problema, podem permitir ao professor propor novos problemas.

Nossas análises *a posteriori* se baseiam nos registros coletados nas discussões ocorridas internamente aos grupos, nas discussões ocorridas ao socializarmos os resultados apresentados pelos grupos e nos registros feitos pelos alunos. Desses registros, escolheremos aqueles que forneçam dados relevantes para nossa pesquisa.

Para cada tarefa, apresentaremos a análise *a priori* e, em seguida, relataremos a experimentação e exporemos a análise *a posteriori*.

Tarefas 1 e 2

Objetivos: As tarefas 1 e 2 têm por objetivo construir um paralelogramo utilizando instrumentos de desenho geométrico; descrever as etapas da construção do paralelogramo; e enunciar e demonstrar as principais propriedades do paralelogramo.

Visamos também abordar as principais propriedades do paralelogramo a partir das estratégias utilizadas pelos alunos para a construção desse quadrilátero. Desse modo, a forma de construção do paralelogramo é uma variável local que deverá ser controlada de modo a induzir os alunos à utilização de estratégias convenientes.

Para a tarefa 1, optou-se por construir o paralelogramo a partir de três pontos não colineares e, para a tarefa 2, construir o paralelogramo a partir de dois lados consecutivos e uma diagonal. Cada valor atribuído à variável local determinará um único paralelogramo, mas esse valor induzirá à utilização de diferentes estratégias de construção e, consequentemente, à mobilização de diferentes conhecimentos para justificar matematicamente a técnica utilizada.

A construção do paralelogramo partindo de três pontos não colineares permitirá aos alunos a mobilização de conhecimentos relacionados aos lados do paralelogramo, enquanto a construção partindo de dois lados consecutivos e uma diagonal deve mobilizar conhecimentos sobre simetria ou sobre as diagonais do paralelogramo. Os alunos poderão recorrer às propriedades das diagonais ou da simetria na tarefa 1 e mobilizar conhecimentos sobre lados ao realizar a tarefa 2, porém as técnicas utilizadas nestas tarefas não necessariamente serão as mesmas, o que poderá favorecer a mobilização de diferentes conhecimentos.

A seguir apresentaremos, na análise *a priori*, as consequências advindas de nossas escolhas.

Tarefa 1. Construir um paralelogramo, dados três vértices.
Enunciado: Dados três pontos do plano, *A*, *B* e *C*, não alinhados, construa o ponto *D* tal que *ABCD* seja um paralelogramo. Justifique sua construção.
Análise *a priori* da tarefa 1

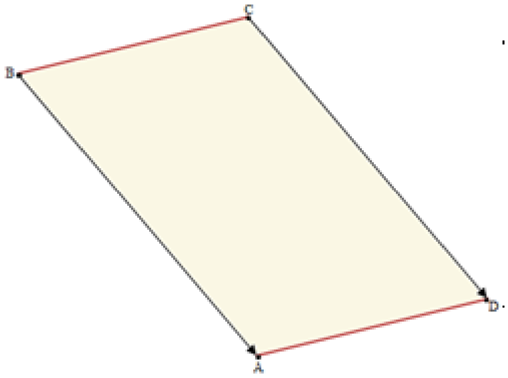
Ao representar os três pontos não colineares, os alunos deverão obter os segmentos consecutivos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ que corresponderão a dois lados consecutivos do paralelogramo procurado. Em seguida deverão buscar uma estratégia para construir o ponto *D*, quarto vértice do paralelogramo.

A busca pelo vértice *D* permitirá a mobilização de conhecimentos referentes aos lados e/ou diagonais do paralelogramo, ao teorema das paralelas e à congruência de triângulos.

Previmos três técnicas para a realização dessa tarefa:

Técnica 1. Usando a translação de vetores; do vetor $\overrightarrow{BA}$, por exemplo:

Figura 44. Figura-suporte da técnica 1, tarefa 1.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

Partindo dos dois lados consecutivos obtidos, ao ligar os pontos fornecidos no problema os alunos poderão obter o quarto vértice construindo os demais lados do paralelogramo.

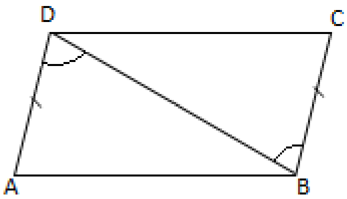
Ao usar a translação de vetor $\overrightarrow{BA}$ para construir o paralelogramo, o aluno deve observar que as propriedades de uma figura-imagem obtida pela translação supracitada são as mesmas propriedades da figura-objeto, isto é, o vetor $\overrightarrow{BA}$ tem mesma direção, sentido e módulo que o vetor $\overrightarrow{CD}$ obtido.

Espera-se a seguinte demonstração:

Hipótese: *ABCD* é quadrilátero, $\overline{\text{BD}}$ é diagonal e $\overline{\text{AD}}$ é paralelo e congruente a $\overline{BC}$.

Tese: *ABCD* é paralelogramo

Figura 45. Figura-suporte para validação da propriedade: se um quadrilátero possui dois lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.



Fonte: Dados da pesquisa.

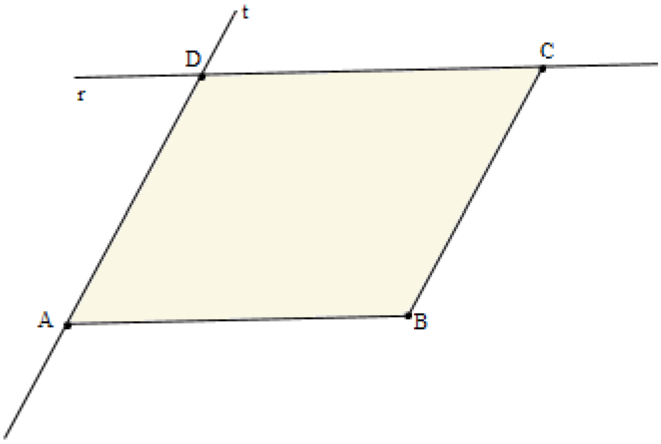
Demonstração

A diagonal $\overline{BD}$ divide o quadrilátero *ABCD* em dois triângulos: *ABD* e *BCD* (Figura 45). Considerando esses triângulos, tem-se: *AD* = *BC* (hipótese), $A\widehat{D}B \equiv D\widehat{B}C$ (hipótese e teorema das paralelas) e $\overline{BD}$ lado comum. Pelo caso de congruência lado-ângulo-lado, os triângulos *ABD*, *BCD* são congruentes. Logo, $A\widehat{B}D \equiv B\widehat{D}C$, e portanto, pelo teorema das paralelas, $\overline{AB}//\overline{DC}$. Podemos concluir então que *ABCD* é um paralelogramo.

Faremos a institucionalização enunciando a seguinte propriedade do paralelogramo: Se um quadrilátero apresenta um par de lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

Técnica 2. Usando o paralelismo dos lados opostos.

Figura 46. Figura-suporte da técnica 2 referente à tarefa 1.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

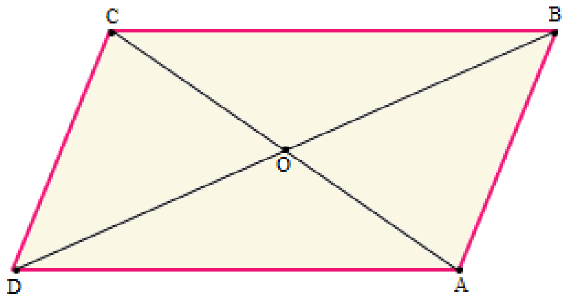
Ao obter os segmentos consecutivos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, os alunos poderão mobilizar uma das caracterizações de paralelogramo (quadrilátero que possui lados opostos paralelos) e construir retas paralelas aos segmentos obtidos.

Para alcançar validação desta técnica, garantindo sua generalidade, o aluno deverá justificar a existência das paralelas utilizando o axioma das paralelas: considerando os pontos *A*, *B* e *C* dados, o axioma das paralelas garante a existência de uma reta *r* paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, passando por *C*, e de uma reta s paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$, passando por *B*. Além disso, o aluno deverá garantir que as retas *r* e *t* interceptam-se em um ponto (no ponto *D* que é o quarto vértice do paralelogramo).

Técnica 3. Usando a propriedade das diagonais de um paralelogramo (Figura 47).

Pela terceira técnica, ao obter os segmentos consecutivos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, por meio da ligação dos pontos dados *A*, *B* e *C*, construímos o segmento $\overline{AC}$ e seu ponto médio *O*. O ponto *D* procurado é o simétrico de *B* em relação ao ponto *O*.

Figura 47. Figura-suporte da técnica 3 referente à tarefa 1.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

A validação do caso geral poderá ser alcançada por meio desta demonstração:

Demonstração: Os triângulos *CDO* e *AOB* são congruentes pelo caso LAL; então $D\hat{C}O \equiv O\hat{A}B$ e, portanto, $\overline{CB} \parallel \overline{AD}$. Os triângulos *COB* e *AOD* são congruentes pelo caso LAL; então $B\hat{D}A \equiv D\hat{B}O$ e, portanto, *BC* = *AD*. Como *ABCD* é um quadrilátero convexo de lados opostos paralelos, então ele é um paralelogramo.

Faremos a institucionalização enunciando a seguinte propriedade do paralelogramo: Se as diagonais de um quadrilátero se bisseccionam, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Esta tarefa tem potencial para propiciar ao aluno condições para a elaboração de conjecturas, e a escolha feita (construir o paralelogramo a partir de três pontos não colineares) poderá mobilizar conhecimentos sobre translação, axioma das paralelas e congruência de triângulos, além de construir e demonstrar condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

Identificamos três técnicas diferentes para construir um paralelogramo a partir de três pontos não colineares e cada uma dessas técnicas deverá ser justificada.

A validação dessa propriedade poderá ocorrer utilizando congruência de triângulos. Para isso, o aluno terá que recorrer à apreensão operatória e realizar uma configuração do quadrilátero ABCD, dividindo-o por meio de uma de suas diagonais.

Com a segunda técnica, cuja validade se evidencia por meio da construção, é maior a probabilidade de que o aluno se convença apenas por apreensão perceptiva. Portanto, esta é uma oportunidade para que possamos mostrar ao aluno a função de explicação da demonstração, além do convencimento. Como afirma De Villiers (2001), realizar a demonstração com a única função de validação pode desmotivar o aluno a essa prática, uma vez que na maioria das vezes este fica mais convencido da validade de uma afirmação por argumentos empíricos.

Pela terceira técnica, o aluno terá que recorrer a uma configuração do quadrilátero ABCD traçando duas diagonais. Pretendemos questionar por que o quadrilátero é paralelogramo e motivar o aluno a formular e validar a propriedade relativa às diagonais do paralelogramo.

Caso todos os grupos façam opção por uma das técnicas, pretendemos abrir uma discussão sobre outras possibilidades de construção, instigando-os a utilizar outras técnicas que permitam abordar, além da definição, propriedades do paralelogramo. Os alunos serão estimulados a experimentar as técnicas, vivenciando momentos de ação e formulação. Esperamos que validem, por meio de provas conceituais, as conclusões oriundas da apreensão perceptiva e provadas experimentalmente, isto é, por meio de provas pragmáticas.

Ao final desta tarefa, esperamos que os alunos tenham evoluído em seus conhecimentos geométricos e reconheçam que argumentos empíricos não validam o caso geral.

As propriedades contempladas serão institucionalizadas e expressas nos três registros de representação: língua natural, figural e simbólico.

Pretendemos **institucionalizar** as seguintes propriedades dos paralelogramos:

- Ao utilizar a técnica 1: Se um quadrilátero apresenta um par de lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.
- Ao utilizar a técnica 3: Se as diagonais de um quadrilátero se bisseccionam, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Bloco tecnológico-teórico: Concepção de pontos não colineares e de paralelogramo – para dar início à resolução da tarefa 1 o aluno precisa ter domínio do que vêm a ser pontos colineares e paralelogramo. A definição de paralelogramo será discutida na primeira etapa.

Experimentação e análise *a posteriori* da tarefa 1

Previmos para esta tarefa três técnicas distintas. Ao observar os resultados apresentados pelos alunos, identificamos duas das técnicas previstas (a 1 e a 2), mas também outra que não fora contemplada em nossa análise a *priori*: a construção de um quadrilátero de lados opostos congruentes (paralelogramo) utilizando régua e compasso.

Dois grupos (I, II) utilizaram a técnica 2, sendo que apenas um deles chegou à validação. Apresentaremos as discussões dos grupos I, II e III, uma vez que estes, em suas discussões e produções escritas, trouxeram elementos para nossa análise.

Seguem-se trechos da discussão ocorrida no grupo I, do qual participaram ***Leandro***, ***Olívia*** e ***Hugo***:

Leandro*: Eu construí uma reta r paralela a* $\overline{AB}$ *passando por C.*

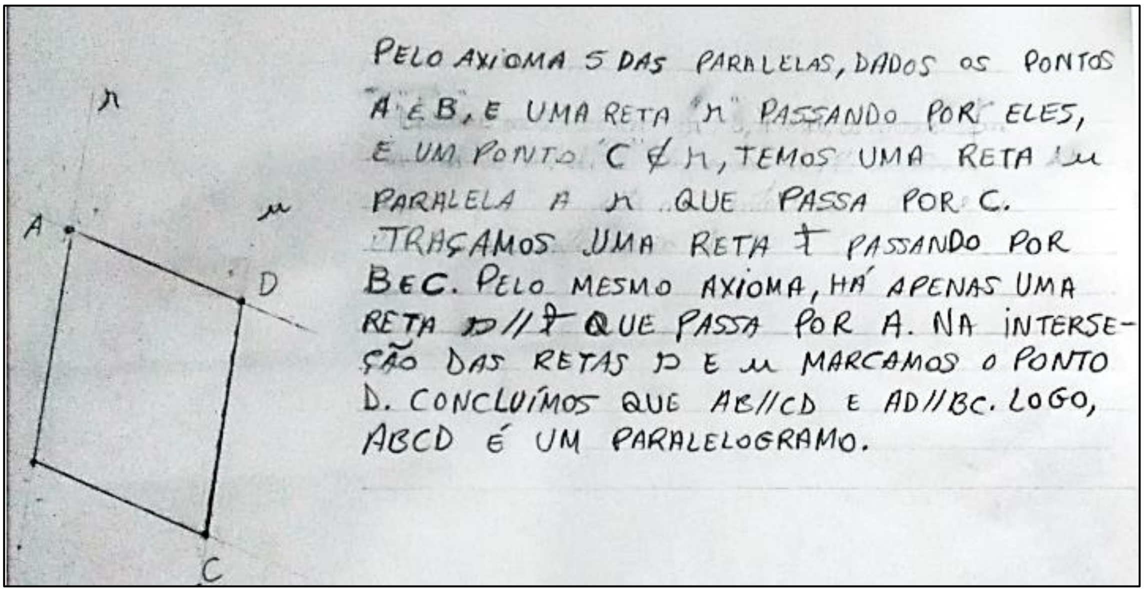
Pesquisadora*: E você garante que existe essa reta?*

Leandro*: Eu acho que existe um axioma aí que garante.*

Olívia*: Vou procurar no meu caderno [de 'Geometria plana']. Eu tenho aqui: "Dada uma reta, existe apenas uma reta paralela à reta dada, passando por um ponto dado".*

Leandro*: Do mesmo modo existe uma outra reta s, paralela a* $\overline{BC}$*, passando por A. E a interseção de r e s é o ponto D procurado. Tá construído o paralelogramo e justificado pelo axioma das paralelas.*

Figura 48. Justificativa da construção referente à tarefa 1 pelo grupo I.



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo I realizou a tarefa utilizando a técnica 2 e validou sua técnica utilizando o axioma das paralelas. A validação ocorreu após o questionamento da pesquisadora sobre a garantia de existência de retas paralelas. Aparentemente a realização da tarefa pela técnica utilizada pelo grupo gerou pouca discussão e mobilizou poucos conhecimentos. Talvez a interferência feita pela pesquisadora tenha conduzido os alunos à justificativa da existência das paralelas. Os alunos não sentiram necessidade de justificar a existência do ponto *D*, uma vez que este fica evidente na construção. De Villiers (2001) aponta que muitas vezes os alunos deixam de demonstrar por não verem necessidade em situações visualmente óbvias.

Neste caso, a existência do ponto *D* não deixa dúvida diante da construção efetuada. No entanto, para explicar sua existência, explicação essa que garantiria a generalidade de sua técnica, os alunos deveriam assegurar que as retas *s* e *u* sempre se interceptam, isto é, que o ponto *D* de fato existe, em qualquer caso. Para isso poderiam supor que *s* e *u* não se interceptam, nesse caso elas seriam paralelas. Mas haver *u* e *t*, ambas paralelas a *s* e passando pelo ponto *C*, contrariaria a unicidade da paralela a uma reta dada passando por um ponto dado. Desse modo, por meio de uma prova conceitual ou uma demonstração, a técnica seria validada.

O grupo II, composto por ***Marina***, ***Bruna*** e **Andreia**, também utilizou a técnica 2, porém não justificou a existência das paralelas:

Bruna*: Pra ser paralelo, meu ponto D tinha que está aqui, ó. Aí a gente ia ter que ligar aí: esse é paralelo com esse e esse ia tá paralelo com esse. Aí agora já vai. Agora assim eu tô em dúvida, porque a gente só sabe que os lados são paralelos. Os lados terem a mesma medida é uma consequência, ou seja, a gente poderia colocar os três pontos, colocar a reta maior, do mesmo jeito aqui maior também, com os esquadros pegar aqui paralelo a esse, descer, depois aqui paralelo a esse e ver que a interseção das duas, depois a gente encontra que dá a mesma medida.*

Bruna*: A gente já tá induzindo que os lados realmente vão ser iguais.*

Marina*: É, e a definição não é que os lados são iguais.*

Andreia*: É apenas que os lados são paralelos.*

Bruna*: Deixe eu colocar de novo aqui três pontos.*

Andreia*: Aqui já é um paralelogramo.*

Bruna*: A gente vai anotando passo a passo como uma receita.*

Marina*: Já que a gente tá tomando sobrando, então é semirreta não é?*

Bruna*: Não, a gente tá tomando essa reta aqui. Eu coloquei aí ligando no segmento.*

Marina*: Ah. Você tomou passando?*

Bruna*: Isso porque... Eu deixei a mais porque aqui eu não tenho certeza que esse outro lado também vai ser igual. Aí quando eu pegar aqui a paralela desse daqui de baixo aí...*

Marina*: Sabe por que eu estou em dúvida? Por que você tá tomando uma reta? Porque você tá tomando paralela, você tá tomando um segmento.*

Andreia*: Eu fiz assim, ó. Coloquei os pontos A, B e C não alinhados. A partir deles tracei o segmento AB e BC. Com o auxílio do par de esquadros encontrei as paralelas.*

Marina*: É isso que eu quero dizer. Se você disser que é uma reta aqui, só que então como é que eu posso dizer que partiu de um segmento? Entendeu?*

Bruna*: Não, mas é que eu botei – ligamos os segmentos AB e BC. Só foi na hora que eu estava explicando que eu falei reta, mas aqui eu coloquei segmento.*

Marina*: Você pode dizer que o encontro desses dois segmentos é um ponto?*

Andreia*: Você colocou D no encontro das paralelas, é?*

Marina*: Então seja o ponto D a interseção das retas paralelas AD e BC.*

Andreia*: Eu não entendi essa parte de escrever.*

Bruna*: Desse mesmo modo que você falou.*

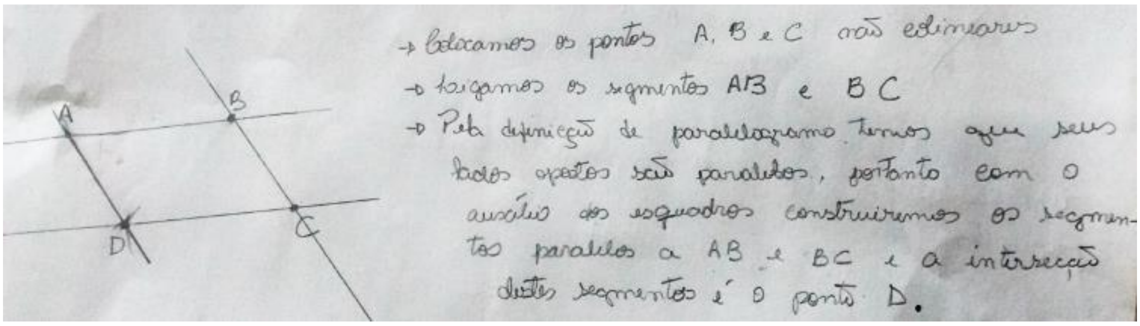
***Andreia**: É. Mas às vezes eu sei falar, mas não sei escrever.*

Diante dessa discussão, podemos observar alguns pontos que merecem ser destacados:

1. Observamos que nesta tarefa os participantes mostram compreender a distinção entre uma definição e uma propriedade no momento em que afirmam: *"A gente já tá induzindo que os lados realmente vão ser iguais"; "É, e a definição não é que os lados são iguais"* e *"É apenas que os lados são paralelos"*.
2. Conjecturaram sobre a propriedade da congruência dos lados opostos do paralelogramo.
3. Discutiram sobre a importância de utilizar na construção dos lados opostos retas paralelas ou segmentos paralelos, uma vez que essa distinção vai influenciar a obtenção do ponto *D* procurado.

Observando o texto mostrado na Figura 49, notamos que foi registrada uma sequência de ações em que as alunas tentam descrever os passos da construção. Não foi apresentada a justificativa da existência das paralelas e confundiram justificativa matemática com sequência de passos. Duval (2012) aponta que, do ponto de vista cognitivo, há uma diferença importante entre a redação de uma lista de instruções para a construção de uma figura e a redação de uma demonstração, uma vez que a primeira reflete apenas a sequência de passos sucessivos, enquanto a demonstração precisa ser organizada a partir de uma rede de relações conceituais. A fala da aluna confirma nossa interpretação: *"A gente vai anotando passo a passo como uma receita"*.

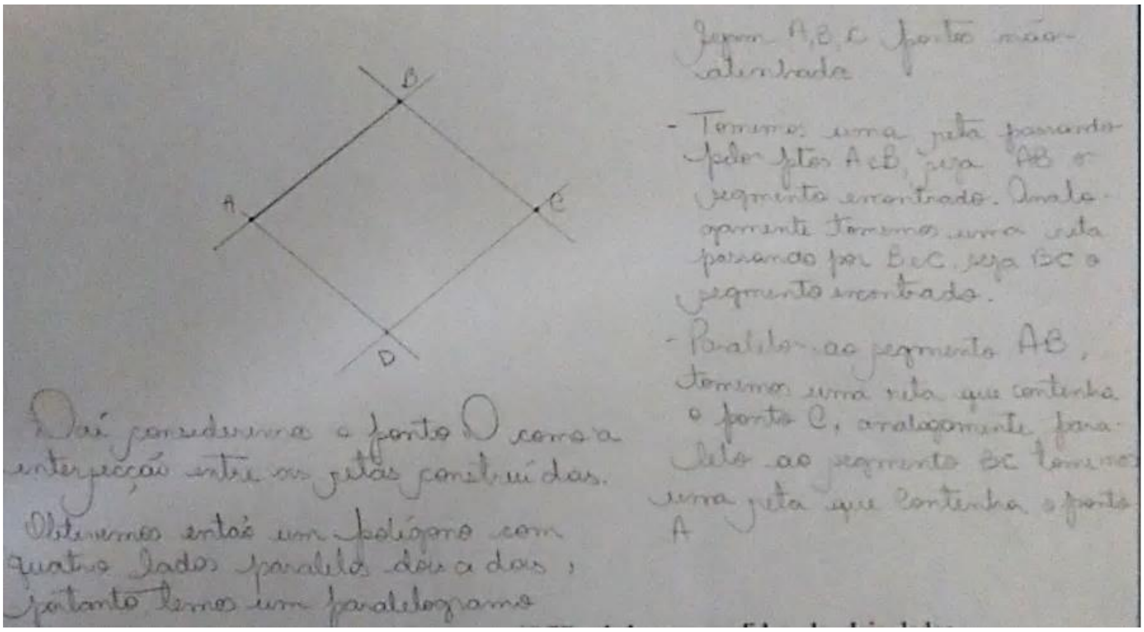
Figura 49. Primeiro registro escrito do grupo II referente à tarefa 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a discussão, seguindo as sugestões de ***Marina,*** elas reescrevem o texto conforme apresentado na Figura 50.

Figura 50. Segundo registro escrito do grupo II[10].



Fonte: Dados da pesquisa.

Como mostra o texto da Figura 50, as alunas justificaram o fato de o quadrilátero ser um paralelogramo por meio da construção de retas paralelas aos lados fornecidos no problema. No entanto, não apresentaram justificativa da existência dessas retas e nem do ponto *D*. Acreditamos que a existência desses elementos não lhes demandou justificativa, uma vez que essa existência ficou evidente na construção, em comportamento similar ao que ocorreu com o grupo I.

Comparando os dois textos apresentado pelo grupo II e o diálogo das alunas, notamos que estas perceberam que, ao construir segmentos paralelos aos segmentos dados, estes poderiam não se interceptar em um ponto, e assim substituíram a construção de segmentos paralelos pela de retas paralelas.

As provas não explicaram por que o quadrilátero é um paralelogramo. Observamos a função de verificação, uma vez que as alunas buscaram ficar convencidas de o quadrilátero ser um paralelogramo por meio de verificações empíricas, como podemos constatar nesta fala:

---

10 Transcrição:
Sejam A, B, C pontos não alinhados.
– Tomemos uma reta passando pelos pontos A e B, seja AB o segmento encontrado. Analogamente tomemos uma reta passando por B e C, seja BC o segmento encontrado.
– Paralelo ao segmento AB, tomemos uma reta que contenha o ponto C, analogamente paralelo ao segmento BC tomemos uma reta que contenha o ponto A
Daí consideremos o ponto D como a intersecção entre as retas construídas.
Obtemos então um polígono com quatro lados paralelos dois a dois, portanto temos um paralelogramo.

"Com os esquadros pegar aqui paralelo a esse, descer, depois aqui paralelo a esse e ver que a interseção das duas, depois a gente encontra que dá a mesma medida".

Em nossos estudos preliminares, identificamos que um dos fatores que contribuem para a dificuldade em realizar demonstrações é sua redação (ALMOULOUD, 2007). Tal dificuldade é exposta quando a aluna afirma: *"É. Mas às vezes eu sei falar, mas não sei escrever".* Esperamos que até o final de nossa sequência essa dificuldade tenha se minimizado.

O grupo III foi composto por ***Fábio***, ***Gustavo*** e ***Camila***. Camila não participou da discussão. A discussão dos dois participantes nos permite concluir que estes esboçaram utilizar as técnicas 1 e 2 previstas em nossa análise *a priori*:

Gustavo*: Eu fiz assim: usando o par de esquadros, foram feitas duas retas, uma paralela a AB e outra paralela a BC.*

Fábio*: Sim...*

Gustavo*: Sim, mas eu fiz a construção aqui. E pela construção são paralelos.*

Fábio*: Sim, você usou o par de esquadros, sim. Você tá dizendo que são paralelos, e como você vai dizer que são iguais? Se não forem iguais, não vai ser um paralelogramo.*

Gustavo*: Mas é paralelo porque tá arrastando aqui o esquadro. Aí fica paralelo.*

Fábio*: Eu construí da mesma forma, mas escrevi de outro modo. Agora eu preciso definir a propriedade de paralelismo. Se é igual, se fica igual ou não.*

Pesquisadora*: Para justificar se o quadrilátero construído é um paralelogramo vocês precisam da igualdade?*

Gustavo*: Só preciso saber se é paralelo. Se for paralelo, aí prova que são iguais. Aí aquele negócio de ângulos alternos internos e externos, aquele negócio, acho que só vai por isso. Não tem outro jeito, não.*

Pesquisadora*: A tarefa solicita que vocês construam um paralelogramo e justifiquem por que a construção é de fato um paralelogramo.*

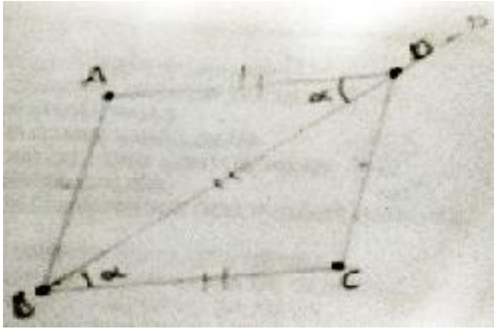
Esses alunos não perceberam ainda que o paralelismo dos lados é condição suficiente para que um quadrilátero seja um paralelogramo e tentaram demonstrar a congruência dos lados opostos.

A ênfase atribuída ao registro figural revelada na primeira etapa da sequência continua evidente. Os alunos parecem acreditar que, para provar que o quadrilátero construído é um paralelogramo, devem justificar todas as características que são vistas na figura. Ainda não conseguiram utilizar a definição de paralelogramo estudada na primeira etapa para decidir o que é suficiente para garantir que o quadrilátero seja um paralelogramo.

Na discussão que se segue, os alunos tentam explicar a técnica utilizada:

Gustavo*: Para a gente provar o alterno interno, no caso, eu tenho que considerar só isso aqui, não é?* [Perguntou comparando os ângulos alternos internos formados por dois lados do quadrilátero e uma de suas diagonais (Figura 51).] *Se eu for comparar a igualdade desse ângulo, eu tenho que comparar com esse...*

Figura 51. Construção do grupo III referente à tarefa 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

***Pesquisadora**: Qual o seu objetivo ao mostrar essa congruência?*

***Gustavo**: Para provar que eles são paralelos. Para provar que esses dois são paralelos, esses dois ângulos têm que ser iguais, não é?*

Gustavo mostrou compreender o recíproco do teorema das paralelas, porém estava tentando fazer uma demonstração aparentemente sem tomar conhecimento de quais hipóteses estava utilizando, uma vez que, a princípio, tinha construído um quadrilátero com lados opostos paralelos.

***Gustavo**: Porque, professora, eu construí com o par de esquadros e usei também o compasso.*

***Pesquisadora**: E como foi sua construção?*

***Gustavo**: Arrastando o esquadro eu construí as paralelas...*

***Fábio**: E com o compasso as medidas iguais.*

***Gustavo**: Primeiro usei o esquadro. Não, primeiro eu liguei os pontos A, B e C. AB e BC. Aí eu vim ligando as paralelas.*

***Fábio**: Pegou uma paralela AB e projetou até o ponto D. Na verdade, com o compasso a gente fez uma translação de medida.*

***Gustavo**: É isso mesmo: nós fizemos uma translação de medidas.*

***Pesquisadora**: E se translada medidas?*

***Fábio**: Uma translação de segmentos.*

***Gustavo**: Mas assim... Mesmo que eu transladasse essa reta toda pra cá e essa reta toda pra cá, elas vão se encontrar nesse ponto.*

A discussão evidencia que os alunos transladaram os dois segmentos *AB* e *BC* utilizando uma técnica que não estava prevista, porém não se convenceram de que essa técnica seria eficiente para a realização da tarefa, uma vez que tal técnica não garantiria a obtenção do ponto *D*. Continuaram a discussão na tentativa de justificar a técnica utilizada:

***Fábio**: É isso. Eu acho que a gente tem que ver pela propriedade de paralelismo. Porque se a gente transladou essa daqui pra cá e transladou essa daqui pra cá, a interseção delas vai dar o ponto D. Então aí a gente teria que provar que...*

***Gustavo**: Que esse ângulo tem que ser igual a esse aqui.*

***Fábio**: Nada disso.*

***Gustavo**: É, sim!*

***Fábio**: Basta você saber que usando esse ângulo você também tá usando a propriedade de paralelismo.*

***Gustavo**: Se você tem essa reta aqui e se você provar que elas duas são paralelas, essa e essa, os ângulos formados...*

***Fábio**: Justamente a propriedade de paralelismo.*

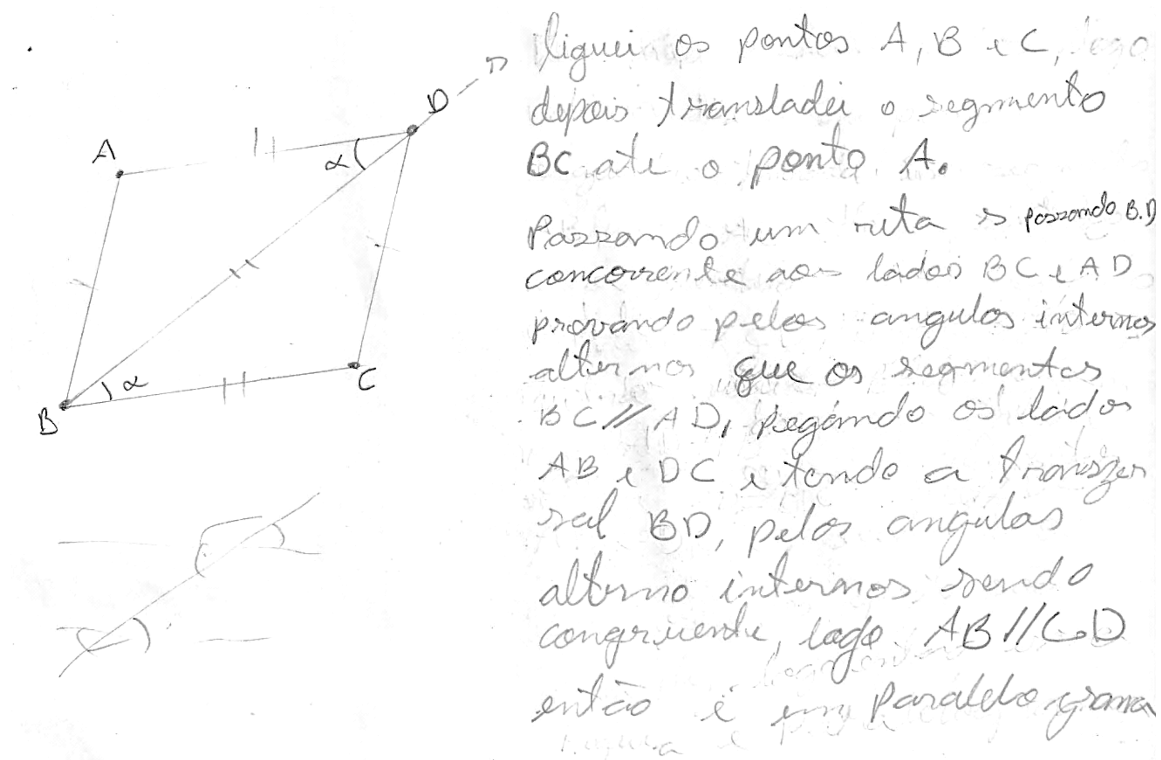
***Gustavo**: ...que eles são iguais. Se eu conseguir provar que eles são paralelos eu iria conseguir provar que a soma deles é 360º. Porque esse somado com esse dá 180º e esse é igual a esse, aí eu iria conseguir provar que a soma é 360º.*

Depois de um tempo em silêncio...

***Fábio**: Eu botei assim: com o par de esquadros, transladei o segmento AB conservando o sentido e a medida até o ponto C. Então a gente conservou a medida, ou seja, são iguais e mesmo sentido; então são paralelos. Eu coloquei assim: transladou o segmento AB conservando o sentido e a medida até o ponto C. Isso aí prova que ela é paralela?*

A Figura 52 corresponde à solução apresentada pelo grupo III.

Figura 52. Solução apresentada pelo grupo III.



Fonte: Dados da pesquisa.

No registro da solução da tarefa 1 apresentado pelo grupo III

Figura (Figura 52), os alunos tentam ao mesmo tempo listar os passos da construção e validar sua técnica. Há indícios, neste texto, de que o aluno tentou realizar uma prova conceitual. Diante da discussão e dos registros escritos, podemos observar que esses alunos têm ideia de que o teorema das paralelas deverá ser utilizado para validar sua técnica e de qual configuração deverá ser utilizada para a demonstração. No entanto, observamos sua dificuldade em coordenar a apreensão perceptiva e a discursiva no momento da construção do quadrilátero *ABCD* a partir da translação do segmento $\overline{BC}$, e tentam provar que $\overline{BC}//\overline{AD}$. Observamos também dificuldade na manipulação dos argumentos, sem uma sequência lógica no texto apresentado, e dificuldades conceituais quando expressam frases sem sentido, como *"translação de medida"*.

Ao socializar as atividades, os grupos apresentaram suas soluções e passamos a discutir as técnicas utilizadas, para posteriormente fazer a institucionalização das propriedades necessárias para justificar as construções.

Os grupos apresentaram suas produções e um dos alunos do grupo III pediu para ir ao quadro, pois queria justificar sua técnica. Seguem alguns trechos da discussão em torno da validação da técnica utilizada por esse grupo:

***Pesquisadora**: Por meio da construção dos meninos, o que nós podemos afirmar?*
***Fábio**: Que $\overline{BC}$ é paralelo e igual a $\overline{AD}$.*
***Pesquisadora**: Qual o objetivo do problema?*
***Fábio**: Mostrar que forma um paralelogramo.*
***Pesquisadora**: Tentem escrever em termos de hipótese e tese estes dados.*
***Todos**: Hipótese: $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$. Tese: ABCD é paralelogramo.*
***Fábio**: Então, professora, basta mostrar que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$, porque $\overline{BC}$ já é paralelo a $\overline{AD}$.*
***Gustavo**: Na verdade a gente já sabe que $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{AD}$. Aí a gente tem que provar agora que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$. Essa é nossa tese.*
***Gustavo**: [Prolonga as retas-suporte dos lados do quadrilátero ABCD.] Se eu conseguir mostrar que esses ângulos correspondentes são congruentes, aí eu provo que as retas são paralelas.*
***Fábio**: Podemos usar o esquadro, professora.*
***Pesquisadora**: Se usarmos o esquadro, nós estaremos verificando a validade da afirmação para todos os paralelogramos, ou apenas este que está no quadro?*
***Gustavo**: É o único jeito.*
***Fábio**: Eu acho melhor transladar os dois lados.*

Os alunos ficaram restritos à hipótese de que os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ eram paralelos e não utilizaram a congruência desses lados.

***Pesquisadora**: Vocês não têm outra hipótese?*
***Marina**: É, tem que usar a outra hipótese. Usa a congruência dos lados.*

A apreensão operatória que conduz à solução do problema pode não ser imediatamente visualizada pelo aluno. Duval (2012) afirma que um dos fatores que pode ocultar ou diminuir a visibilidade da apreensão operatória que conduzirá ao tratamento matemático pertinente à solução do problema é a necessidade de recorrer a partes intermediárias auxiliares. Nesse caso, o aluno deverá recorrer a uma reconfiguração intermediária (traçar uma das diagonais do quadrilátero *ABCD*), para obter dois triângulos, os quais os alunos deverão provar que são congruentes.

Chamamos a atenção dos alunos para a necessidade de construções auxiliares que algumas vezes são necessárias, quando a figura por si só não é suficiente. Isso gerou o seguinte diálogo:

***Ivo**: A diagonal!*

***Gustavo**: Ah! A gente vai por triângulo, não é?*

***Fábio**: Passando a diagonal, forma dois triângulos e pela propriedade lado-ângulo-lado... Chega que são iguais.*

***Gustavo**: Agora eu acho que entendi. Por hipótese, $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ é congruente a $\overline{AD}$, ou seja... Nós temos dois lados que são iguais no triângulo...*

***Fábio**: Pelo caso lado-ângulo-lado...*

Embora os alunos tenham novamente chegado à reconfiguração conveniente para realizar a demonstração e tenham consciência de que deveriam utilizar a congruência de triângulos e o teorema das paralelas, tiveram dificuldade em identificar quais paralelas e quais ângulos deveriam escolher para o processo de prova. Duval (2012, p. 132-133) afirma que “o fato de perceber ou não a reconfiguração intermediária pertinente em uma figura não significa nada quanto à possibilidade de aplicar esta reconfiguração quando ela é percebida”. Neste caso, temos um problema de produtividade heurística e não de visualização. Os alunos perceberam a configuração que deveria ser utilizada (construção da diagonal), mas não conseguiram usá-la para demonstrar a congruência dos triângulos obtidos na divisão do quadrilátero. Esse fato levou ao seguinte diálogo:

***Pesquisadora**: Quais lados e quais ângulos são congruentes?*

***Fábio**: A gente transladou $\overline{BC}$; então $\overline{BC}$ é igual a $\overline{AD}$. Passando a diagonal do ponto A a C, formamos dois triângulos.*

***Pesquisadora**: Quais são esses triângulos?*

***Fábio**: ABC e ADC.*

***Fábio**: Queremos mostrar que os triângulos são iguais. Como eles dividem o mesmo lado que é a diagonal, ou seja, um lado comum e como a diagonal de um paralelogramo... um quadrilátero, divide o ângulo, é... Ela também serve como uma bissetriz...*

***Marina**: Divide?!*

***Gustavo**: Não divide, não!*

***Leandro**: Depende. Vai depender. Eu acho que depende dos lados.*

Fábio: *Então a gente não sabe, não pode usar. Ah! Mas esses ângulos são iguais.* [Aponta para os ângulos alternos internos formados pelos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ e pela diagonal $\overline{AC}$ (Figura 53).]

Figura 53. Figura-suporte da discussão da técnica utilizada pelo grupo III.

Fonte: Dados da pesquisa.

Fábio: *Agora, pelo caso lado-ângulo-lado, esses triângulos são iguais.*

Pesquisadora: *Vocês mostraram a congruência dos triângulos ABC e ACD. Está resolvido nosso problema?*

Fábio: *Agora concluí que forma um paralelogramo.*

Pesquisadora: *Por quê?*

Gustavo: *A gente já mostrou que os dois triângulos são iguais. Então o lado $\overline{AB}$ é igual ao lado $\overline{CD}$.*

Fábio: *E o ângulo externo a A também é congruente ao ângulo $\widehat{D}$.*

Gustavo: *Por quê?*

Fábio: *Por paralelismo. A gente provou que os lados são paralelos.*

Gustavo: *Não. A gente provou que são iguais.*

Fábio: *Então a gente tem que mostrar que esses ângulos são iguais e consequentemente os lados serão paralelos.*

Gustavo: *E agora?*

Fábio: *Mas os ângulos são iguais se os triângulos são congruentes!*

Gustavo: *É mesmo!*

Pesquisadora: *Quais ângulos que são congruentes?*

Fábio: *Por consequência dos triângulos serem congruentes, o ângulo $\hat{B}$ é igual ao ângulo $\widehat{D}$.*

Gustavo: *Ah! Eu já sei, o ângulo med(BÂC) é igual ao ângulo med(A$\hat{C}$D).*

Os alunos sabiam o que queriam provar e também já estavam certos de que as congruências dos ângulos conduziriam ao paralelismo dos lados, pois já citaram o recíproco do teorema das paralelas. No entanto, os ângulos que os alunos verificaram serem congruentes mostram que eles não estão seguros de qual transversal devem utilizar. Mais uma vez questionamos a respeito de quais lados pretendiam mostrar o paralelismo e, já que pretendiam utilizar o recíproco do teorema das paralelas, deveriam fixar as duas retas que querem mostrar serem paralelas e a transversal a essas retas. Desta vez, observamos uma dificuldade em perceberem a reconfiguração intermediária pertinente.

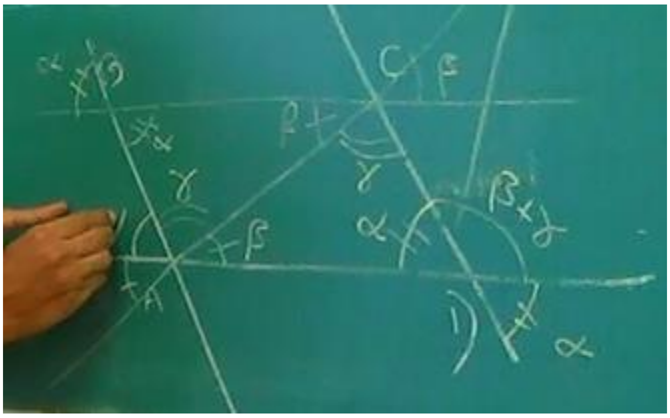
Fábio*: Dê nome aos bois. Dê valores aos ângulos.*

Gustavo*: Temos que alfa mais beta mais gama dá 180º [ângulos internos ao triângulo]. Eu posso dizer também que o ângulo externo ao triângulo ADC é beta mais gama ou vai misturar tudo?*

Andreia*: Para mim aí já está provado. Se ele colocar alfa aí no ângulo $\hat{A}$, alterno interno a $\hat{B}$...*

Gustavo *Ah! Já sei. Se em D é alfa mais beta mais gama e em A é alfa, mais beta, mais gama, então falta alfa para completar.*

Figura 54. Figura-suporte da discussão da técnica utilizada pelo grupo III.



Fonte: Dados da pesquisa.

Andreia*: Só com esse alfa aí resolve. Nem precisava colocar esse tanto de coisa.*

Gustavo*: Precisava, sim, que era para apoiar.*

Gustavo*: Como esses ângulos correspondentes [$\hat{D}$ = α e $\hat{A}$ = α] são congruentes, então os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos. Então ABCD é um paralelogramo. A gente pode perceber também que os ângulos opostos são iguais. Pelo menos nesse; não sei se é em todos.*

Observamos que para ***Gustavo*** o registro simbólico foi necessário para conseguir demonstrar a igualdade dos ângulos. Já ***Andreia*** utilizou a hipótese de que os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são paralelos e, portanto, os ângulos $A\hat{B}C$ e seu alterno interno são congruentes, o qual por sua vez é congruente ao ângulo $C\hat{D}A$. Vale ressaltar que ***Andreia*** sempre mostrou mais dificuldade com a disciplina 'Geometria plana'.

Comentamos sobre a forma de validação sugerida por ***Gustavo*** para provar, usando o par de esquadros, que a figura obtida representa um paralelogramo e comparamos essa forma de validação com a que acabamos de discutir. No primeiro caso, estaríamos provando apenas para o desenho representado no quadro (Figura 54), ao passo que o que o aluno acabou de fazer torna válido o caso geral. Aproveitamos o momento para explicar a diferença entre conjecturar e demonstrar: as figuras construídas e as observações feitas serviram para que eles levantassem hipóteses a respeito das propriedades, que só receberiam o *status* de teorema depois de demonstradas.

Institucionalizamos a seguinte propriedade do paralelogramo observada pelos alunos: "Se um quadrilátero possui dois lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo".

Solicitamos que enunciassem o recíproco do teorema e avaliassem se este era verdadeiro, ou seja: se um quadrilátero é paralelogramo, então possui dois lados opostos paralelos e congruentes.

Os alunos não tiveram dificuldade em enunciar a recíproca verbalmente e evidenciaram ter avançado na manipulação dos argumentos e na identificação das hipóteses e tese de um teorema. Fundamentamos essa afirmação nestas falas dos alunos:

Fábio*: Sabemos que se ABCD é um paralelogramo, então seus lados opostos são paralelos. Mas congruentes não sabemos. Queremos mostrar que $\overline{BC}$ é congruente a $\overline{AB}$.*

Marina*: Agora traça a diagonal. Eu sei que se é um paralelogramo, então os ângulos alternos são iguais.*

Fábio*: De A até C. Ou de B a D, tanto faz.*

Marina*: Os ângulos são iguais, porque as retas são paralelas.*

Fábio*: O ângulo $\hat{A}$ é igual a $\hat{C}$.*

Marina*: Ainda não. Não provamos isso.*

Gustavo*: Nós temos que provar agora que os dois triângulos são congruentes, para a gente poder provar que os lados opostos são congruentes.*

Eles ainda apresentam dificuldade em saber utilizar a reconfiguração percebida: não conseguem identificar, no conjunto de retas apresentadas, qual par de paralelas deverá ser analisado para provarem a congruência dos ângulos em questão. Fizemos o fracionamento do paralelogramo de modo a permitir a visualização necessária e os alunos conseguiram percebê-la. Esperamos que nas próximas tarefas utilizem o fracionamento da figura para permitir a visualização e exploração da reconfiguração em situações semelhantes.

Os alunos apresentam dificuldade em expressar com palavras seu raciocínio, pois utilizam frases como *"usa uma vez uma paralela e depois usa a outra"*. Neste caso, acreditamos que o aluno se refira a par de retas paralelas. Acreditamos também que esse fato pode interferir na redação da demonstração.

Após demonstrar o teorema, perguntamos como este poderia ser enunciado na forma 'se, e somente se'. Expressaram sem dificuldades: *"ABCD é um paralelogramo se, e somente se, dois lados opostos são paralelos e congruentes"* ou *"Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, possui dois lados opostos paralelos e congruentes"*.

Identificamos tal definição como outra caracterização do paralelogramo e esclarecemos o significado de condição necessária e suficiente.

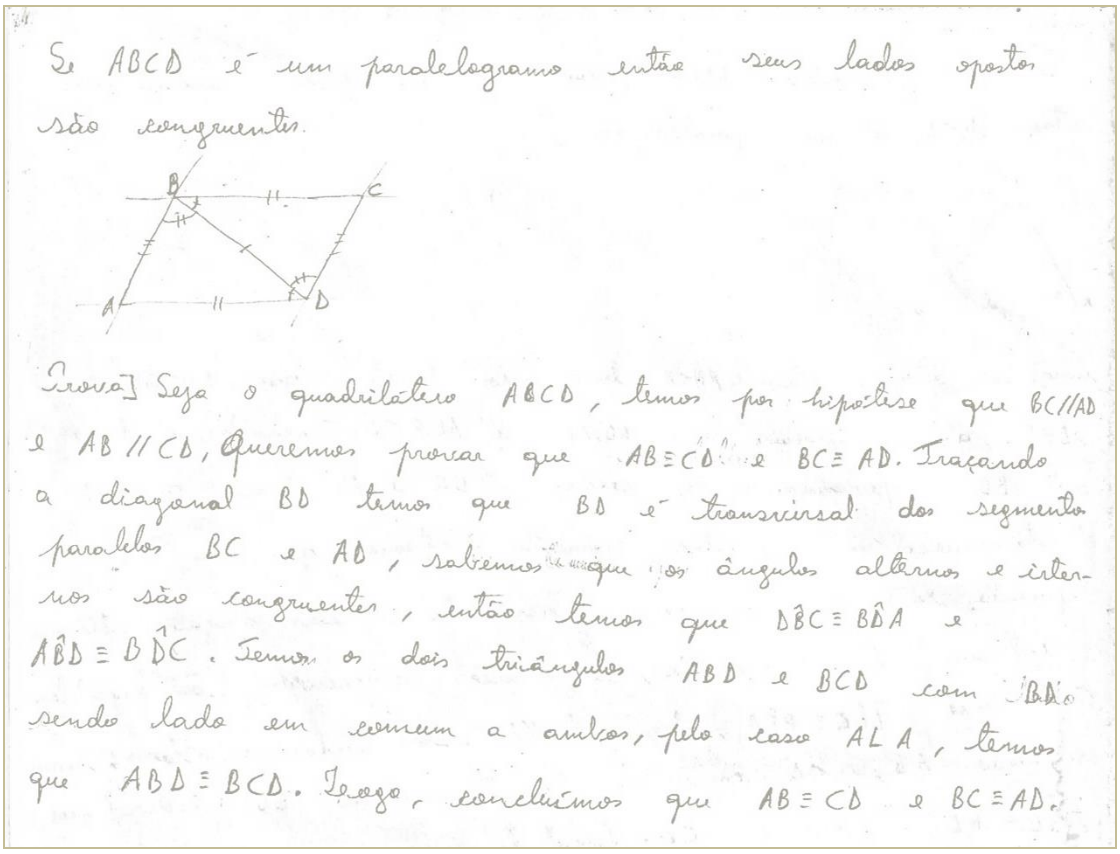
O encontro chegou ao final e não houve tempo para discutir mais uma técnica apresentada que não foi contemplada em nossas análises preliminares: a construção de um quadrilátero com lados opostos congruentes utilizando régua e compasso.

Antes de finalizarmos o encontro, perguntamos a todos os alunos o que teríamos que demonstrar para justificar a construção desse grupo. Responderam corretamente que teriam que mostrar que *“se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo”.* Então solicitamos que para o próximo encontro que tentassem fazer a demonstração da propriedade que haviam enunciado, escrevessem o recíproco e verificassem se este é verdadeiro.

Ao iniciar o encontro subsequente, recolhemos a atividade extra que fora solicitada (seis dos 11 participantes presentes a entregaram). Apresentaremos e analisaremos dois dos textos produzidos pelos alunos nessa atividade.

No texto apresentado na Figura 55, ***Gustavo*** demonstra que, se um quadrilátero é paralelogramo, então seus lados opostos são congruentes.

Figura 55. Demonstração realizada pelo aluno Gustavo na atividade extra.


Se ABCD é um paralelogramo então seus lados opostos são congruentes.

Prova] Seja o quadrilátero ABCD, temos por hipótese que BC//AD e AB // CD, Queremos provar que AB ≡ CD e BC ≡ AD. Traçando a diagonal BD temos que BD é transversal dos segmentos paralelos BC e AD, sabemos que os ângulos alternos e internos são congruentes, então temos que $D\hat{B}C \equiv B\hat{D}A$ e $A\hat{B}D \equiv B\hat{D}C$. Temos os dois triângulos ABD e BCD com BD sendo lado em comum a ambos, pelo caso ALA, temos que ABD ≡ BCD. Logo, concluímos que AB ≡ CD e BC ≡ AD.

Fonte: Dados da pesquisa.

O texto corresponde a uma prova conceitual, segundo a classificação proposta por Balacheff (1988). Nele, ***Gustavo*** consegue destacar corretamente a hipótese e a tese do teorema enunciado, recorre à apreensão operatória e realiza uma configuração conveniente ao traçar a diagonal $\overline{BD}$ do quadrilátero *ABCD*. Utiliza corretamente o paralelismo dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ e o teorema das paralelas para concluir que os ângulos $D\hat{B}C$ e $B\hat{D}A$ são congruentes, porém afirma que os ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ são congruentes sem explicitar o paralelismo dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

O aluno utiliza corretamente o caso de congruência de triângulos e conclui que os lados opostos do quadrilátero *ABCD* são congruentes.

Quanto às funções da demonstração propostas por De Villiers (2001), foram contempladas, além da função de verificação, também a de explicação, uma vez que o aluno apresenta uma justificativa matemática da construção; a de comunicação, pois apresentou um texto comunicando a justificativa; e a de sistematização, ao organizar logicamente suas ideias para produzir o texto.

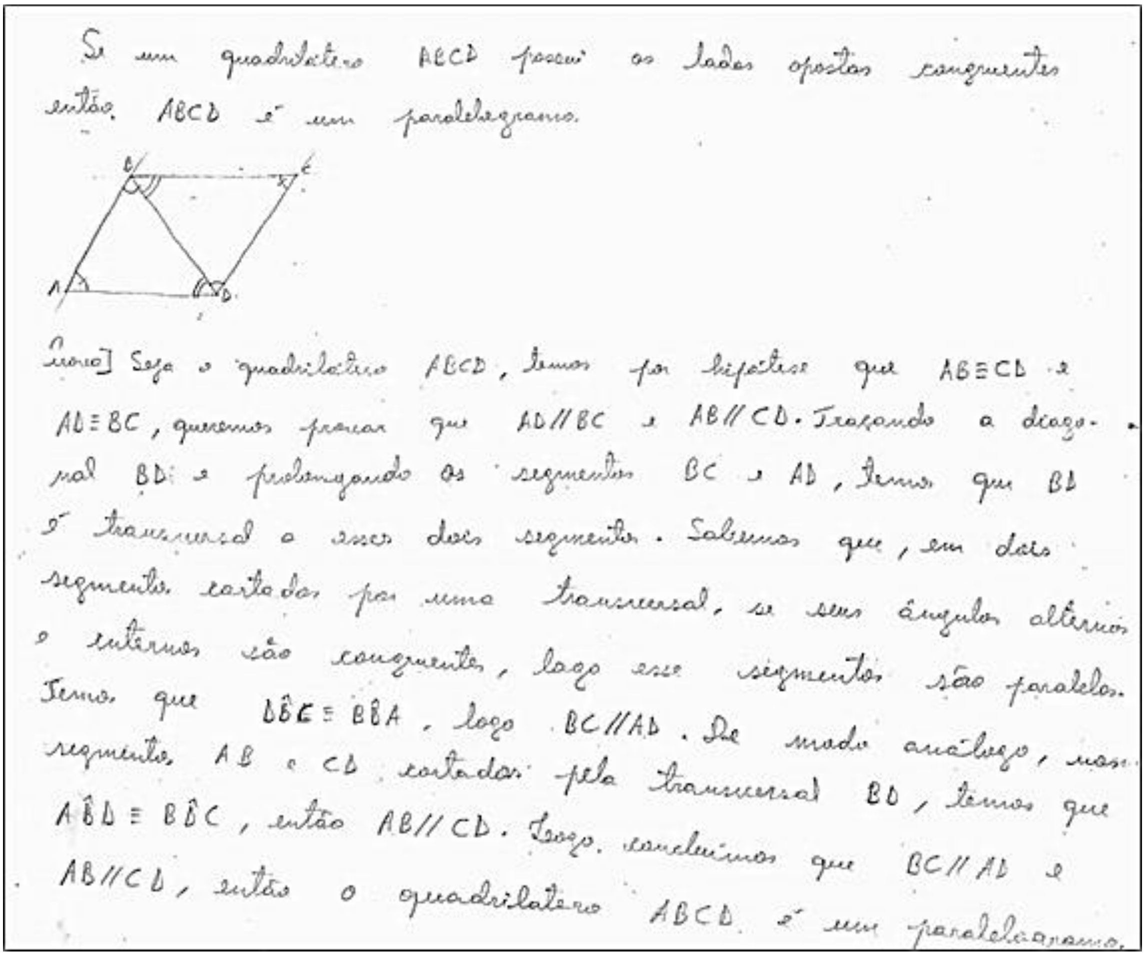
A Figura 56 mostra o recíproco do teorema apresentado na Figura 55 e sua respectiva demonstração, também realizada por ***Gustavo***.

O aluno enuncia corretamente o recíproco do teorema referente à congruência dos lados opostos do paralelogramo e destaca corretamente a hipótese e tese do teorema. No entanto, no registro figural, admite a congruência dos ângulos opostos, a congruência dos ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ e dos ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{B}C$, e abandona a hipótese de que os lados opostos do quadrilátero são congruentes. Há indícios de que o aluno recorreu à apreensão perceptiva e não considerou as hipóteses do problema ao convertê-lo em registro figural.

Na demonstração apresentada, ***Gustavo*** admite a congruência dos ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ e dos ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{B}C$ sem apresentar justificativa adequada (pois não utilizou a hipótese da congruência dos lados opostos), utiliza o recíproco do teorema das paralelas e conclui que o quadrilátero *ABCD* é um paralelogramo.

Nesse caso, houve ausência de “interpretação discursiva da figura”, segundo Duval (2012, p. 124). Isso ocorre quando o aluno, após ler o enunciado e construir a figura, abandona esses artefatos e as hipóteses formuladas no problema.

Figura 56. Demonstração realizada pelo aluno Gustavo referente ao recíproco do teorema da congruência dos lados opostos do paralelogramo.



Se um quadrilátero ABCD possui os lados opostos congruentes então ABCD é um paralelogramo.

Prova] Seja o quadrilátero ABCD, temos por hipótese que AB ≡ CD e AD ≡ BC, queremos provar que AD // BC e AB // CD. Traçando a diagonal BD e prolongando os segmentos BC e AD, temos que BD é transversal a esses dois segmentos. Sabemos que, em dois segmentos cortados por uma transversal, se seus ângulos alternos e internos são congruentes, logo esses segmentos são paralelos. Temos que DB̂C ≡ BB̂A, logo BC // AD. De modo análogo, nos segmentos AB e CD cortados pela transversal BD, temos AB̂D ≡ BB̂C, então AB // CD. Logo, concluímos que BC // AD e AB // CD, então o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar dos equívocos observados nas produções dos alunos, percebemos avanços em todos os textos em termos de visualização da figura, manipulação dos argumentos e cuidado em expressar ideias. Os alunos já apresentam indícios de que, além de validar suas construções, tentam explicá-las, sistematizar e comunicar suas ideias, contemplando assim as funções de explicação, sistematização e comunicação propostas por De Villiers (2001). Pudemos observar esses avanços no seguinte diálogo:

Gustavo*: A tese é provar que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e a hipótese é que os lados são congruentes. Provar que $\overline{BC}//\overline{AD}$ e $\overline{AB}//\overline{DC}$. Aí, professora, vai ser da mesma forma que a gente demonstrou o primeiro. A gente vai pegar... Aliás, não, porque nenhum é paralelo a outro. Aí não dá para usar aquele negócio do ângulo correspondente, porque a gente não sabe se os lados são paralelos.*

Leandro*: Aí a gente vai pelo caso lado-lado-lado porque os lados são iguais.*

Gustavo*: Logo os ângulos também são congruentes.*

Pesquisadora*: Quais ângulos?*

Fábio*: Eles estão entre os lados correspondentes.*

Figura 57. Figura-suporte da demonstração da propriedade dos lados opostos do paralelogramo.

Fonte: Dados da pesquisa.

***Gustavo**: Agora dá para a gente provar. Se a gente prolongar a reta $\overline{BC}$ e a reta $\overline{AB}$, aí a diagonal vai ser uma transversal com os ângulos alternos internos iguais. Então as retas são paralelas.*

***Hugo**: Não! Iguais, não: congruentes. Usamos "iguais" para medidas, não é, professora?*

***Pesquisadora**: Então acabamos de provar o paralelismo entre quais retas?*

***Todos**: $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$.*

***Marina**: Aí agora a gente faz da mesma forma para a outra.*

***Leandro**: Vai prolongar agora $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que vai ser cortada pela diagonal $\overline{BD}$.*

***Gustavo**: Aí, como $B\widehat{D}C \equiv D\widehat{B}A$, $\overline{AB} \mathbin{//} \overline{CD}$.*

***Fábio**: Demais! Não esqueço mais esse teorema das paralelas.*

Chamamos atenção para o fato de que na escola o teorema das paralelas é amplamente utilizado para identificar ângulos congruentes, mas seu recíproco é pouco utilizado para demonstrar o paralelismo de retas.

Demonstramos o recíproco do teorema das paralelas e os alunos observaram outras propriedades do paralelogramo, como a congruência dos ângulos opostos. Utilizamos o termo 'caixa de ferramentas' introduzido por Mello (1999), e informamos aos alunos que todos os teoremas demonstrados seriam guardados nessa caixa de ferramentas e poderiam ser utilizados nas próximas atividades.

Uma fala de um dos participantes nos permitiu explorar mais uma vez a diferença entre definição e propriedade e a importância das condições necessárias e suficientes nas caracterizações do paralelogramo, bem como o que seriam definição e propriedade, dependendo de nossas escolhas. A fala desse aluno foi: *"Pode também ser assim: 'Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos congruentes'. A gente tem outra definição de paralelogramo"*.

Outro fato observado foi a motivação dos alunos para efetuarem as demonstrações, como mostram as seguintes falas: *"Interessante!"*; *"Agora vamos ver a volta. Estou aprendendo muito com isso!"*; *"Outro teorema para a caixa de ferramenta!"*; *"Coloca mais aí, pró, para a gente provar!"*.

Considerações sobre a atividade 1

Foi investido na atividade 1 mais tempo do que prevíamos, pois ela suscitou diversos comentários e as escolhas feitas geraram técnicas que motivaram a abordagem de diferentes propriedades do paralelogramo.

Prevíamos para esta tarefa a utilização de três técnicas diferentes: t_1: translação; t_2: utilização do paralelismo dos lados opostos; e t_3: uso da propriedade das diagonais do paralelogramo. Na realização das tarefas, os alunos empregaram as técnicas t_1 e t_2, bem como uma quarta técnica que não fora prevista: a construção de um quadrilátero com lados opostos congruentes.

Notamos preferência dos alunos por técnicas que lidavam com a congruência dos lados opostos do paralelogramo. Talvez ao visualizarem a figura, a congruência dos lados opostos se destaque mais que o paralelismo.

Em seus registros escritos, observamos tentativas de validação com justificativas baseadas na apreensão perceptiva, que classificamos como provas pragmáticas no nível do experimento crucial. Algumas provas conceituais também foram apresentadas, mas os alunos ainda recorrem à apreensão perceptiva para validar alguns argumentos.

Solicitamos a construção de um paralelogramo a partir de três pontos não colineares. Dependendo da disposição dos pontos considerada pelos alunos, estes poderiam recorrer a casos particulares, mas isso não ocorreu. Todos os grupos construíram um paralelogramo qualquer.

Os alunos mostraram conhecer o teorema das paralelas e a congruência de triângulos, mas apresentaram dificuldade em utilizar estes recursos para validarem suas técnicas. Observamos que, para demonstrar as propriedades do paralelogramo utilizando a congruência de triângulos, realizaram a operação de configuração conveniente ao dividirem o paralelogramo por meio de sua diagonal, porém tiveram dificuldade em identificar quais lados paralelos estavam relacionados aos ângulos que, por hipótese, eram congruentes. Esse fato pode estar relacionado à falta de coordenação entre as apreensões figural e discursiva e também à pouca ênfase dada nas escolas e universidades a aspectos ligados à visualização e à heurística (FLORES; MORETTI, 2006).

Quanto à importância dada à demonstração, os alunos tentaram utilizar casos particulares para validar suas técnicas, como a utilização de instrumentos de construção geométrica, mas no decorrer da atividade já apresentavam sinais de reconhecer que evidências empíricas não validam conjecturas e que, para uma afirmação adquirir o *status* de teorema e poder ser utilizada, ela precisa ser demonstrada.

Além da função de verificação, já foram evidenciados em alguns registros outras funções da demonstração (como explicação, sistematização e comunicação) propostas por De Villiers (2001).

Os alunos mostraram-se motivados e comprometidos com a busca da solução da atividade e aceitaram a responsabilidade do problema. Além disso, o problema proposto foi passível de ser resolvido com os conhecimentos de que os alunos já dispunham. Tudo isso nos permite afirmar que houve devolução, conforme Brousseau (2008).

Os alunos vivenciaram momentos de ação e formulação no momento em que buscaram formas de resolução e elegeram procedimentos para realizar a tarefa, bem como ao discutirem e comunicarem seus procedimentos. Houve também tentativas de validação baseadas em provas pragmáticas e, após a discussão, algumas já evoluíram para provas conceituais, embora em alguns casos os alunos ainda validassem afirmações com base em argumentos empíricos. Notamos também que as tentativas de provas conceituais ocorreram ao buscarem demonstrar teoremas em que os argumentos apresentavam semelhanças com os que foram discutidos.

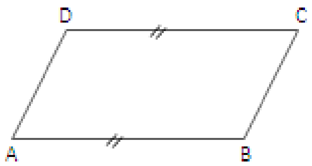
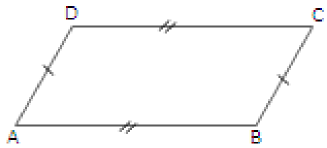
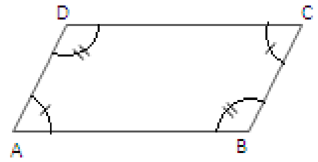
A ênfase atribuída ao registro figural observada na primeira etapa ainda persiste nesta tarefa. Alguns alunos não conseguem utilizar as definições estudadas na primeira etapa para decidir sobre as hipóteses que deverão ser consideradas e a tese que deverá ser demonstrada. Apesar de ainda identificarmos dificuldades relacionadas aos conhecimentos geométricos e à escrita, algumas produções de provas apresentam indícios de avanço na apropriação dos processos de construção de provas conceituais.

Fatos observados nesta tarefa, como justificar conjecturas com base na apreensão perceptiva ou não sentir necessidade de demonstrar resultados visivelmente válidos, também foram diagnosticados em algumas pesquisas revisitadas em nossa revisão de literatura, como ad de Jahnke (2008), Ordem (2015), Maioli (2001) e Dias (2009).

As escolhas feitas nessa tarefa induziram os alunos a buscar estratégias que lhes permitiram mobilizar conhecimentos sobre o teorema das paralelas e seu recíproco e sobre congruência de triângulos, além de institucionalizarem caracterizações do paralelogramo que foram expressas em registro em língua natural, figural e simbólico (Quadro 20).

A próxima tarefa também solicita a construção de um paralelogramo, porém a variável local assume outro valor: a construção do paralelogramo deverá ser feita a partir de dois lados consecutivos e uma de suas diagonais.

Quadro 20. Caracterizações do paralelogramo institucionalizadas na tarefa 1.

REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL	REGISTRO FIGURAL	REGISTRO MATEMÁTICO
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, possui dois lados opostos paralelos e congruentes.		$ABCD$ é paralelogramo ⇔ $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos são congruentes.		$ABCD$ é paralelogramo ⇔ $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos são congruentes.		$ABCD$ é paralelogramo ⇔ $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Segue a tarefa 2, com suas análises *a priori* e *a posteriori*, em que apresentaremos as consequências de nossas escolhas.

Tarefa 2. Construir um paralelogramo, dados dois lados consecutivos e uma diagonal.

Enunciado: Construir um paralelogramo *ABCD*, dados dois lados consecutivos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ e a diagonal $\overline{BD}$.

Análise *a priori* da tarefa 2

Ao representar os dois lados consecutivos e a diagonal, os alunos irão obter um triângulo *ABD*. Em seguida deverão buscar uma estratégia para obter o quarto vértice *C* do quadrilátero *ABCD* de modo que este seja um paralelogramo.

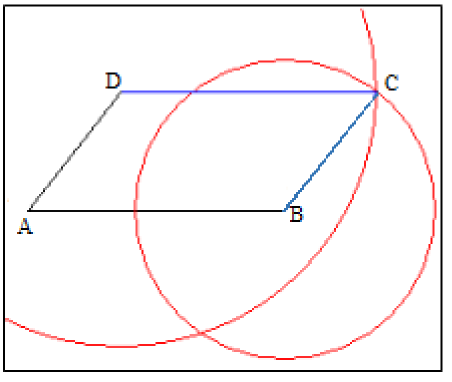
Previmos duas técnicas para a realização desta tarefa:

Técnica 1. Utilizando compasso e régua para construir um quadrilátero com lados opostos congruentes.

Por esta técnica, o aluno poderá utilizar compasso e régua para construir um quadrilátero com lados opostos congruentes, por meio dos seguintes passos:

Sejam m_1 e m_2 as medidas respectivas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Constroem-se as circunferências de centro *D* e raio m_1 e de centro *B* e raio m_2. *C* é o ponto de intersecção dessas duas circunferências. *ABCD* é o paralelogramo procurado (Figura 58).

Figura 58. Figura-suporte da técnica 1, correspondente à tarefa 2.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

O aluno poderá recorrer à apreensão perceptiva e afirmar que o quadrilátero construído é um paralelogramo, não validando sua construção.

Para validar sua técnica, ele poderá utilizar o par de esquadros, verificar que os lados opostos do quadrilátero construído são paralelos e afirmar que *ABCD* é um paralelogramo. Nesse caso, o aluno realizará uma prova pragmática em nível de experimento crucial, visto que poderá generalizar sua técnica a partir de um caso, acreditando que, se funciona para este, então funcionará sempre. Caso tente validar sua técnica utilizando uma prova pragmática, pretendemos esclarecer que esta prova convence, mas não valida o caso geral e não explica por que o quadrilátero construído é um paralelogramo.

Para validar o caso geral, o aluno poderá fazer a seguinte demonstração:

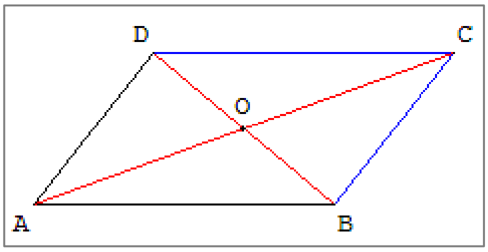
Por construção, $DC = AB$ e $BC = AD$. Traçando a diagonal $\overline{BD}$ e sabendo que ela é comum aos triângulos *ABD* e *BCD*, pelo caso lado-lado-lado, esses triângulos são congruentes. Logo, temos: $A\hat{D}B \equiv D\hat{B}C \Rightarrow \overline{AD} // \overline{BC}$ (teorema das paralelas) e $A\hat{B}D \equiv B\hat{D}C$ $\Rightarrow \overline{AB} // \overline{DC}$ (teorema das paralelas). Portanto, *ABCD* é paralelogramo.

Técnica 2. Construção usando a simetria central.

Por meio desta técnica, o aluno poderá construir o ponto médio O da diagonal $\overline{BD}$ e o ponto C, simétrico de A em relação ao ponto O.

Para validar a técnica, o aluno poderá utilizar a simetria dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ (ou $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$) em relação ao ponto O (Figura 59) ou utilizar a demonstração referente à técnica 3 da tarefa 1.

Figura 59. Figura-suporte da técnica 2, correspondente à tarefa 2.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

Esta tarefa tem potencial para propiciar ao aluno condições para a elaboração de conjecturas, e também é uma tarefa que poderá conduzi-lo a aplicar simetria central, congruência de triângulos e teorema das paralelas, além de formular e demonstrar condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

O aluno pode utilizar técnicas semelhantes à proposta na situação 1 e pode ainda optar por duas novas técnicas: na primeira, poderá utilizar régua e compasso para construir um quadrilátero com lados opostos congruentes ou, com a segunda, utilizar simetria central.

Ao fazer a opção pela técnica 1, o aluno construirá um quadrilátero em que os lados opostos são congruentes. Neste caso, pode afirmar que o quadrilátero construído é um paralelogramo, recorrendo à apreensão perceptiva para justificar sua construção, fundamentado no fato de ter construído um quadrilátero com lados opostos congruentes. Caso isso ocorra, teremos uma oportunidade para rever a definição de paralelogramo considerada e questionar se o fato de um quadrilátero ter lados opostos congruentes implica necessariamente que ele tem os lados opostos paralelos. Leva-se assim o aluno a formular mais uma condição suficiente para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

Faremos a **institucionalização** apresentando a seguinte propriedade do paralelogramo: *Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos congruentes*.

Bloco tecnológico-teórico: Definição de diagonal de um quadrilátero, definição de lados consecutivos de um quadrilátero e definição e propriedade do paralelogramo, para que o aluno possa dar início à resolução da tarefa 2.

Experimentação e análise *a posteriori* da tarefa 2

Entregamos a atividade 2 impressa e disponibilizamos tempo para que fosse realizada.

Três técnicas foram contempladas para esta atividade: duas previstas – utilizando a congruência dos lados e a simetria central – e uma técnica já contemplada na atividade 1, na qual o grupo construiu um quadrilátero com lados opostos paralelos e congruentes.

Observamos que as duplas se sentiram envolvidas com o problema, tendo mais cuidado com suas justificativas. Uma dupla manifestou desejo de encontrar uma nova técnica que permitisse a descoberta de uma nova propriedade. Observamos isso nesta fala:

***Fábio**: Se eu transladar os lados, eu vou ter um quadrilátero com lados opostos de mesma medida. Aí já é paralelogramo. Eu não quero fazer por translação, não. Eu quero fazer por outro agora.*

Apresentamos a análise das produções dos grupos que tentaram utilizar a técnica que faz apelo à simetria central. Os grupos III e IV tentaram utilizar esta técnica.

A Figura 60 mostra o registro da realização da tarefa 2 pelo grupo IV. O texto apresentado corresponde a uma prova conceitual, segundo a classificação de Balacheff (2000). Os alunos utilizaram como hipótese o fato de que as diagonais do quadrilátero se interceptam no ponto médio de ambas, embora isso não fique garantido pela técnica utilizada na construção.

Apesar de não haverem chegado à conclusão utilizando argumentos corretos, podemos considerar um avanço o fato de os alunos não terem confundido a hipótese com o que era para ser demonstrado, como podemos constatar no texto apresentado na Figura 60.

Analisando a construção, observamos que o ponto *C* foi obtido antes de construírem a diagonal $\overline{AC}$. Para que a simetria central justificasse a obtenção do ponto *C*, os alunos deveriam ter obtido antes o ponto médio *M* da diagonal $\overline{BD}$. Isso pode ser constatado no texto apresentado (Figura 60) e neste diálogo:

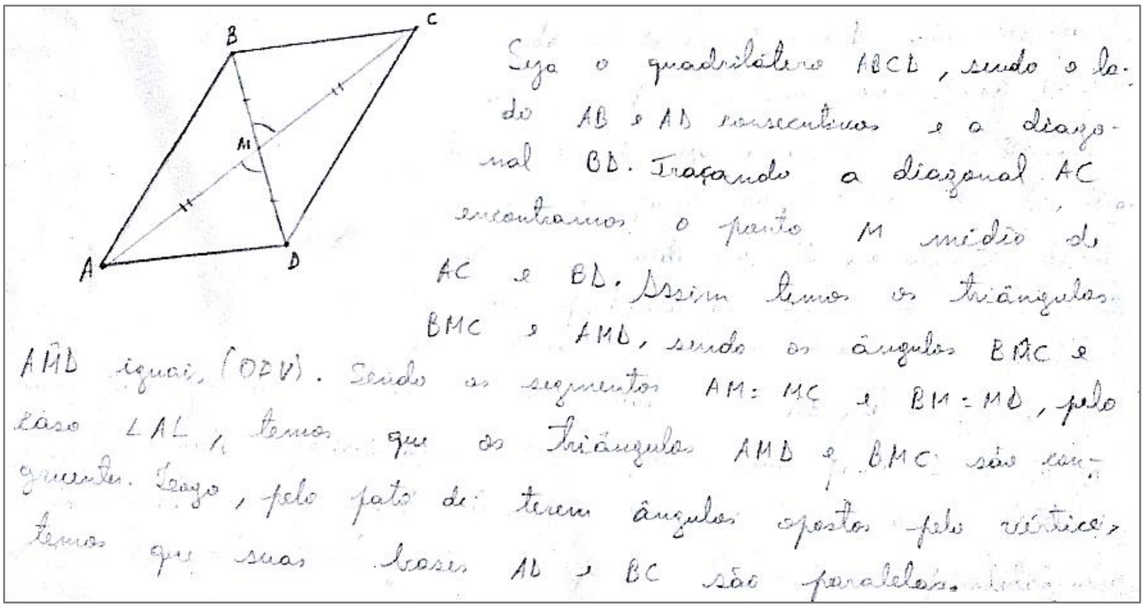
***Ivo**: Com o compasso transferimos essa medida $\overline{AD}$ pra cá e essa medida $\overline{AB}$ pra cá [translação dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$]. Encontramos o ponto C. Como já temos a diagonal $\overline{BD}$, traçamos a outra diagonal $\overline{AC}$ e encontramos o ponto médio [...].*

***Jadson**: Mas e o ponto médio? Por que ponto médio? Não provou ainda.*

***Ivo**: As diagonais do paralelogramo se cruzam no ponto médio.*

***Jadson**: Mas não provou ainda. Eu quero saber do ponto médio.*

Figura 60. Registro da realização da tarefa 2 pelo grupo IV.



Seja o quadrilátero ABCD, sendo o lado AB e AD consecutivos e a diagonal BD. Traçando a diagonal AC encontramos o ponto M médio de AC e BD. Assim temos os triângulos BMC e AMD, sendo os ângulos BMC e AMD iguais (OPV). Sendo os segmentos AM = MC e BM = MD, pelo caso LAL, temos que os triângulos AMD e BMC são congruentes. Logo, pelo fato de terem ângulos opostos pelo vértice, temos que suas bases AD e BC são paralelas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que a técnica utilizada pelo grupo é a construção de um quadrilátero com lados opostos congruentes, que poderia ser justificada pela propriedade dos lados opostos congruentes de um paralelogramo que já foi institucionalizada. Conjecturamos que, pela apreensão perceptiva ou por já conhecer a propriedade, o aluno afirmou que as diagonais do paralelogramo se interceptam em seus pontos médios.

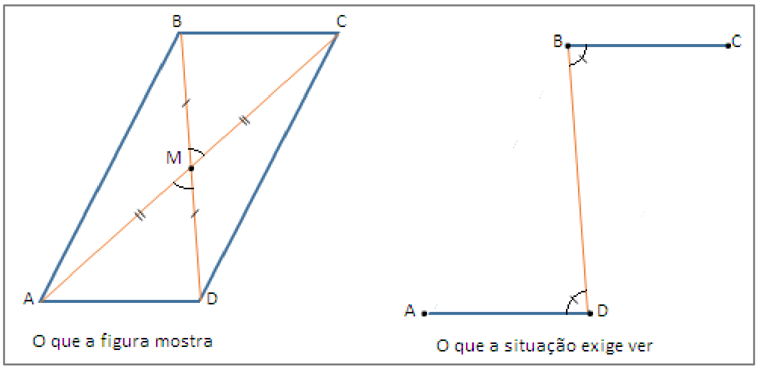
Podemos constatar também que o aluno ***Jadson*** contestou o uso da propriedade (diagonais que se interceptam nos pontos médios), uma vez que esta não foi provada, o que pode ser considerado um avanço em relação à ênfase dada à apreensão perceptiva.

Outra observação na prova apresentada pelo grupo foi a conclusão sobre o paralelismo dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$. Apesar de havermos utilizado em mais de uma demonstração o teorema das paralelas para concluir o paralelismo dos lados do paralelogramo, os alunos deste grupo não perceberam que este teorema deveria ser utilizado para concluir sobre o paralelismo dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ do quadrilátero *ABCD*. Acreditamos que essa dificuldade se relaciona com o fracionamento do quadrilátero. Na atividade 1, os paralelogramos estavam divididos apenas por uma diagonal, enquanto na atividade 2 são traçadas duas diagonais.

Com esta representação estão em destaque a congruência dos ângulos opostos pelo vértice (ângulos formados pela interseção das diagonais) e a congruência dos segmentos $\overline{BM}\ e\ \overline{MD}$ e dos segmentos $\overline{AM}\ e\ \overline{MC}$. Diante destas hipóteses, os alunos justificaram corretamente a congruência dos triângulos *BMC* e *AMD*, mas não utilizaram esta congruência para justificar o paralelismo e a congruência dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Acreditamos que os ângulos opostos pelo vértice se destacaram na figura e provavelmente impediram de perceber a reconfiguração que indicaria o tratamento matemático pertinente.

Apresentamos na Figura 61 uma reconfiguração que sugere o tratamento matemático que poderia solucionar o problema.

Figura 61. Reconfiguração que possibilita visualizar o tratamento matemático possível à demonstração do paralelismo de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.



Fonte: Dados da pesquisa.

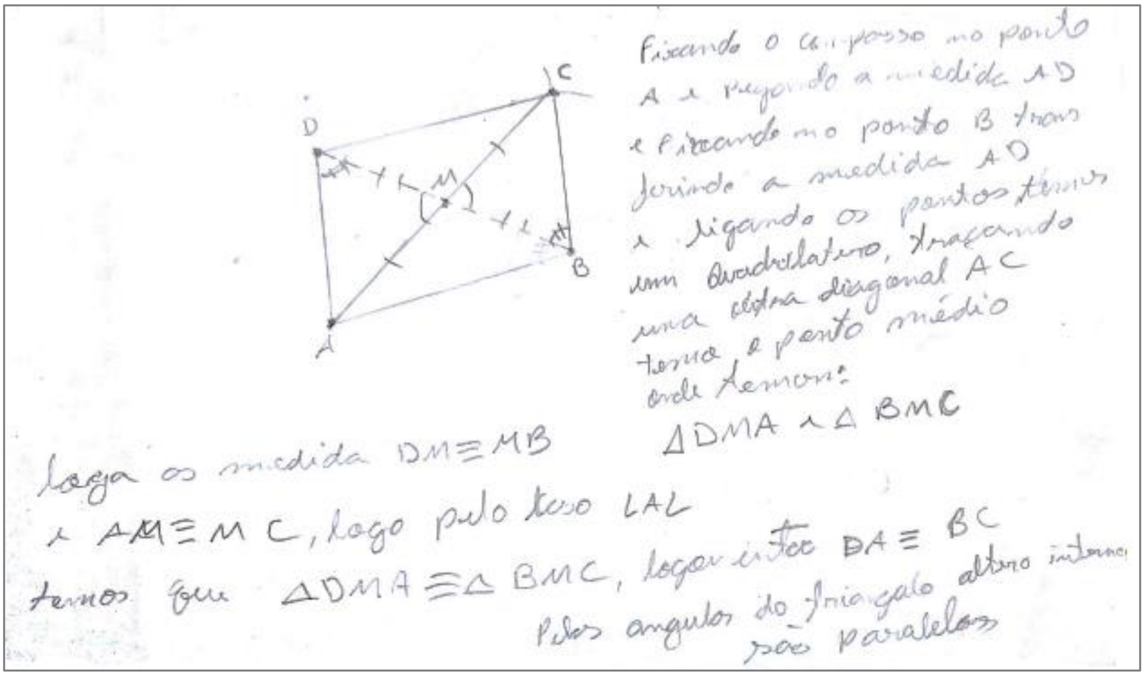
Segundo Duval (2012, p. 124), “uma figura guarda uma estrutura perceptiva autônoma: os objetos que aparecem podem, deste modo, serem diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver”.

O grupo III também tentou utilizar a simetria central para justificar sua construção, porém, semelhantemente ao grupo IV, construiu o paralelogramo utilizando a congruência dos lados opostos.

A Figura 62 mostra o registro escrito da realização da tarefa 2 pelo grupo III. O texto apresentado corresponde a uma prova conceitual, segundo a classificação de Balacheff (2000).

Este grupo construiu o paralelogramo a partir da congruência de um dos lados, o que fica evidenciado quando escrevem *“transferindo a medida $\overline{AD}$”*. Não fica no entanto claro como os alunos controlaram a medida do ângulo $D\hat{B}C$, uma vez que o ponto médio só foi citado após a construção do quadrilátero. Comparando com a discussão ocorrida no grupo, constatamos que os alunos pretendiam realizar a tarefa utilizando uma técnica ainda não contemplada, para que se gerasse uma nova propriedade.

Figura 62. Registro da realização da tarefa 2 pelo grupo III.



Fonte: Dados da pesquisa.

Trecho da discussão:

Gustavo*: A gente poderia fazer diferente agora.*

Fábio*: Como?*

Gustavo*: Poderia ser a partir de triângulos.*

Fábio*: A gente tem que transladar esse lado.*

Gustavo*: Eu vou fazer com o compasso. É melhor.*

Fábio*: Eu não quero transladar também, não. Não vamos fazer por outro?*

Gustavo*: Eu não faço nem ideia por onde começar.*

Fábio*: Já começou. Se fosse transladar, aí iriam ficar duas medidas, aí...*

Gustavo*: Mas aí iria ficar sem graça. Aí já tem uma propriedade que prova. Eu queria ir por outra propriedade. Aqui é meu ponto D. Aqui é meu ponto C. Bom, o que é que eu tenho aqui? Eu tenho um triângulo ABC...*

Fábio*: A gente pode pegar um triângulo congruente.*

Gustavo*: É, Fábio, eu tenho um triângulo ABC. Aí, com a medida do compasso, eu encontrei um ponto C. Aí agora a gente já tem outro triângulo BCD que tem um lado em comum com o outro triângulo, que é o triângulo que tem a diagonal* $\overline{BD}$*, tá vendo?*

Fábio*: Eu não queria ir por aí também, não.*

A técnica sugerida pelo aluno seria construir outro triângulo congruente ao triângulo dado, e a justificativa decorreria de uma das propriedades institucionalizadas. Pretendendo descobrir outra propriedade do paralelogramo os alunos continuaram a discussão:

***Gustavo**: Já sei. A gente parte de um triângulo que é esse aqui [o triângulo ABD]. Se a gente construir um ponto C aleatório e traçar outra diagonal aqui ($\overline{AC}$), aí a gente vai ter quatro triângulos. A gente vai ter que provar a congruência, entendeu?*

***Fábio**: Mas eu não sei mais se esse lado vai ser igual a esse* [$\overline{AD}$ e $\overline{AC}$]...

Analisando a demonstração da congruência dos triângulos *AMD* e *BMC,* podemos observar na Figura 62, que, embora os alunos não representassem quais ângulos são alternos internos e quais são paralelos, representaram a congruência dos ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{B}C$. Esse fato nos faz concluir que a figura desempenhou sua função heurística, uma vez que os alunos realizaram mentalmente a reconfiguração pertinente e utilizaram essa reconfiguração para resolver o problema (aplicaram corretamente o teorema das paralelas para provar o paralelismo dos lados opostos do quadrilátero).

Outro fato diz respeito à redação dos alunos. Mesmo utilizando argumentos válidos, estes não são apresentados em uma sequência lógica. “Coordenar todo o processo de prova e organizar o discurso em uma sequência aceitável” é um dos requisitos necessários citados por Heinze, Cheng e Ufer (2008, p. 3) para uma demonstração. No entanto, constitui uma dificuldade identificada neste trabalho e em pesquisas envolvendo demonstrações geométricas, como as de Mello (1999), Maioli (2001) e Ordem (2015). Nesse caso, é necessário desenvolver a função de sistematização da demonstração, segundo De Villiers (2001).

Socializamos as respostas dos grupos e mais uma vez abrimos uma discussão sobre as respostas apresentadas, para que pudéssemos corrigir os equívocos e institucionalizar a propriedade das diagonais do paralelogramo.

Solicitamos que os alunos enunciassem o recíproco desse teorema e avaliassem sua veracidade. Os alunos não apresentaram dificuldade em enunciar o teorema recíproco e todos afirmaram a validade deste.

Durante a discussão, os alunos declararam ter dificuldade em expressar suas ideias no registro em língua natural, como revela este trecho:

***Gustavo**: Do jeito que **Ivo** fez, ele provou do quadrilátero para o paralelogramo. Ele ainda não sabia que era um paralelogramo.*

***Leandro**: A hipótese é que as diagonais se cortam no ponto médio.*

***Gustavo**: Então é do quadrilátero com diagonais se cortando no ponto médio para o paralelogramo, Agora a gente vai mostrar do paralelogramo para as diagonais que se cortam no ponto médio.*

***Hugo**: A dificuldade é escrever.*

***Gustavo**: A dificuldade é convencer, não é, professora? Tem que convencer...*

***Hugo**: Poderia ter outras formas de avaliação. Oral, por exemplo. Às vezes a gente não consegue escrever, mas no quadro, explicando... É melhor assim...*

Nesse momento falamos mais uma vez da importância da coordenação entre os registros e da importância do registro escrito para fins de comunicação e aproveitamos a fala do aluno para apresentar outras funções da demonstração, além da função de validação, ressaltando as funções de comunicação e explicação focalizadas por De Villiers (2001). Salientamos que, segundo esse autor, limitar a demonstração à exclusiva função de verificação/convencimento pode torná-la desnecessária, uma vez que muitas vezes nos convencemos de um resultado por meio de argumentos empíricos.

Considerações sobre a atividade 2

Para realização da tarefa 2, os alunos evidenciaram ter conhecimento do que vêm a ser lados consecutivos e diagonal do paralelogramo, elementos fornecidos para a construção deste.

As escolhas feitas nesta tarefa (valor da variável local: dois lados consecutivos e uma diagonal) implicaram uma nova técnica, conforme previsto em nossa análise *a priori*. A congruência dos lados opostos, técnica utilizada na tarefa 1, foi utilizada por alguns grupos para realização da tarefa 2, o que também fora previsto em nossa análise *a priori*.

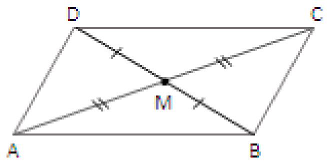
Os grupos que tentaram justificar suas construções utilizando a propriedade do ponto médio evidenciaram ter subordinado a apreensão discursiva à apreensão perceptiva, uma vez que a simetria central não foi, de fato, utilizada para a construção do paralelogramo.

Conjecturamos que o fracionamento da figura (quadrilátero e suas diagonais) dificultou a visualização da reconfiguração pertinente ao tratamento matemático que deveria ser utilizado por um dos grupos para validar sua técnica. No entanto, apenas identificamos esse fato em um grupo. Passaremos a observar a recorrência desse caso para confirmarmos ou refutarmos nossas conjecturas.

Em nossos estudos preliminares, identificamos que a única função da demonstração concebida pelos alunos investigados era a de validação. Durante a resolução desta tarefa, percebemos que a função de verificação/convencimento ainda é ressaltada, por exemplo nesta fala: *"A dificuldade é convencer, não é, professora? Tem que convencer..."*.

Finalizamos institucionalizando, nos três registros de representação, a caracterização do paralelogramo (Quadro 21).

Quadro 21. Caracterizações do paralelogramo institucionalizadas na tarefa 2.

REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL	REGISTRO FIGURAL	REGISTRO SIMBÓLICO
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se intersectam em seus respectivos pontos médios.		$ABCD$ é paralelogramo $\Leftrightarrow$ $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$ e $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$ e $\overline{DM} \equiv \overline{MB}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao finalizar as tarefas 1 e 2, podemos perceber que os objetivos propostos para essas tarefas foram cumpridos. As escolhas feitas para sua execução induziram os alunos a utilizar estratégias que possibilitaram institucionalizar as principais propriedades do paralelogramo. Além disso, essas escolhas influenciaram a mobilização de conhecimentos sobre teorema das paralelas, congruência de triângulos e diagonais do paralelogramo e permitiram conscientizar os alunos de que argumentos empíricos não validam conjecturas.

Observamos uma evolução dos alunos no processo de construção de demonstração. Isso se revela na diminuição do uso de argumentos empíricos na validação das conjecturas e pelo fato de nenhum aluno ter confundido hipótese com tese na atividade 2. As dificuldades relacionadas aos conhecimentos geométricos e a ênfase atribuída à apreensão perceptiva, evidenciadas na primeira etapa, ainda contribuem para que alguns alunos utilizem argumentos que não são matematicamente válidos em suas provas.

Nas próximas tarefas observaremos se as conclusões preliminares a partir das tarefas 1 e 2 serão confirmadas ou refutadas.

Tarefas 3, 4 e 5

Objetivos: Com as tarefas 3, 4 e 5, objetivamos construir um losango utilizando instrumentos de construção de figuras geométricas; recorrer à apreensão sequencial e descrever as etapas da construção do losango, levando em consideração os dados de cada situação proposta ou seguir os passos fornecidos de uma construção; conjecturar as principais propriedades do losango; e esclarecer que a validação de uma propriedade não se dá por meio de provas empíricas.

Um de nossos objetivos é também estudar as principais propriedades desse quadrilátero a partir das estratégias utilizadas pelos alunos em sua construção. Desse modo, a forma de construção do losango é uma variável local que deverá ser controlada de modo a induzir os alunos à utilização de estratégias convenientes que possibilitem a institucionalização das principais propriedades do losango.

Para a tarefa 3, o losango deve ser construído a partir de um de seus lados. Na tarefa 4 são fornecidos os passos da construção, tendo por ponto de partida uma de suas diagonais. Na tarefa 5, o losango deve ser construído a partir de um lado e da semirreta-suporte de uma das diagonais.

As escolhas feitas devem induzir à utilização de diferentes estratégias de construção e, consequentemente, à mobilização de diferentes conhecimentos para justificar matematicamente a técnica utilizada.

A construção do losango partindo de um lado permitirá aos alunos a mobilização de conhecimentos sobre mediatriz de um segmento, simetria ortogonal (ou axial), congruência de triângulos e utilização de propriedades do paralelogramo que foram institucionalizadas nas etapas anteriores. A construção a partir de uma lista de instruções em que o ponto de partida são as extremidades de uma diagonal, solicitada na tarefa 4, permitirá aos participantes mobilizar conhecimentos sobre simetria, congruência de triângulos e propriedades das diagonais do losango. Na tarefa 5, ao construir o losango a partir de um lado e da semirreta-suporte de uma das diagonais, os alunos mobilizarão conhecimentos sobre mediatriz, simetria e propriedades das diagonais referentes aos ângulos do losango.

A seguir apresentaremos, na análise *a priori*, as consequências de nossas escolhas.

Tarefa 3: Construir um losango, dado um lado.

Enunciado da atividade: Descreva um procedimento que permita construir um losango, dado um lado $\overline{AB}$. Faça a construção e justifique seu procedimento.

Análise *a priori* da Tarefa 3

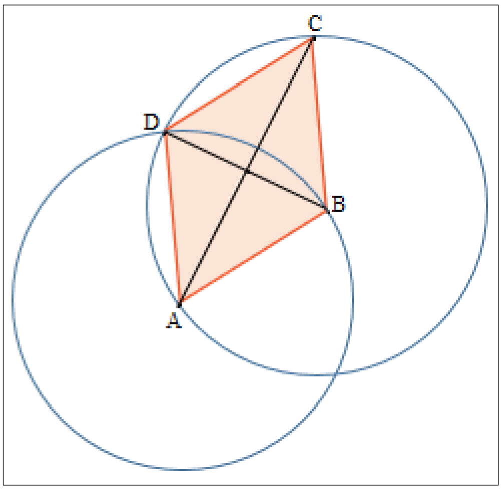
Ao representar o lado do losango, os alunos deverão construir os demais lados desse quadrilátero.

A busca pelos três lados permitirá a mobilização de conhecimentos referentes a mediatriz, simetria ortogonal (ou axial), teorema das paralelas e congruência de triângulos e poderá provocar as primeiras conjecturas a respeito das diagonais do losango.

Previmos duas técnicas para a realização dessa tarefa:

Técnica 1. Desenhamos o segmento $\overline{AB}$. Construímos a circunferência de centro B e raio $\overline{AB}$ e uma circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$. Qualquer um dos pontos de interseção dessas circunferências é o ponto D procurado. Para construir o ponto C, construímos o simétrico de A em relação à reta $\overleftrightarrow{BD}$.

Figura 63. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 3.



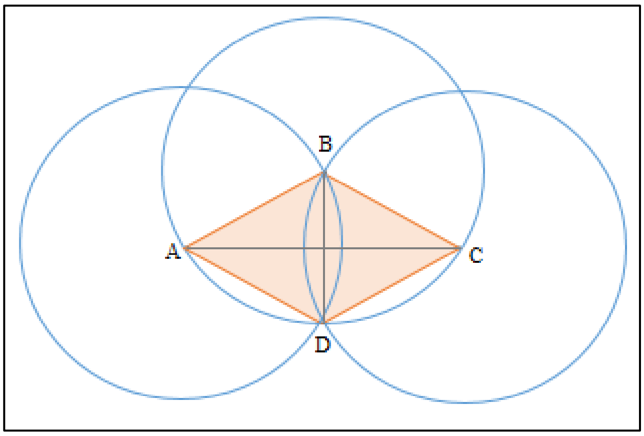
Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

A validação desta construção pode ser feita da seguinte forma (Figura 63):
Por construção, $AD = AB$ (raios das circunferências).
Como C é simétrico de A em relação à reta $\overleftrightarrow{BD}$, então $\overline{BD}$ está contido na mediatriz de $\overline{AC}$. Logo, B e D são equidistantes de A e C. Assim, temos que $DC = AD = AB = BC$. Portanto, $ABCD$ é um losango.

Optando pela técnica 1, o aluno mobiliza conhecimentos sobre definição de losango, mediatriz e simetria. A obtenção do ponto C se dá por meio de simetria axial (C é simétrico de A em relação à reta $\overleftrightarrow{BD}$). Desse modo, podem surgir as primeiras conjecturas sobre as diagonais do losango.

Técnica 2. Criamos o segmento $\overline{AB}$ e depois construímos a circunferência de centro B e raio $\overline{AB}$. Escolhemos um ponto C qualquer nessa circunferência (de modo que A, B e C não sejam colineares) e traçamos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Construímos as circunferências de centros A e C, passando por B. O ponto D é o segundo ponto de intersecção dessas circunferências. Por último, traçamos os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.

Figura 64. Figura-suporte da técnica 2 referente à tarefa 3.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

Para validar a construção realizada, os alunos deverão explicar que todas as circunferências foram construídas com raios cujas medidas são iguais à do segmento $\overline{AB}$. Logo, $AB = BC = CD = DA$ e, portanto, *ABCD* é um losango.

Esperamos que as escolhas feitas induzam os alunos a experimentar estratégias que recaiam sobre as técnicas previstas ou outras técnicas. Prevemos fazer a seguinte **institucionalização:** discutir a necessidade de demonstrar o caso geral para validação de uma propriedade de um objeto matemático, ressaltando a necessidade de explicar que a técnica utilizada é verdadeira para todos os casos e não para um caso particular.

Bloco tecnológico-teórico: Definições de losango, mediatriz, circunferência, raio e triângulo equilátero; propriedade da mediatriz de um segmento. Para que o aluno possa dar início à resolução da tarefa 2, é preciso que domine a definição de losango. Essa definição foi abordada na primeira etapa da sequência. Para validar a técnica 1, o aluno terá que dominar a definição de mediatriz de um segmento e a propriedade da mediatriz. Para validar a técnica 2, necessitará identificar o raio de uma circunferência. Caso o aluno não domine esses objetos, não conseguirá validar estas técnicas e, caso as utilize, faremos o devido esclarecimento.

Experimentação e análise *a posteriori* da tarefa 3

Previmos para a realização desta atividade duas técnicas distintas. A primeira permite construir o losango a partir de dois triângulos equiláteros; a segunda, a partir de três circunferências de mesmo raio. A técnica 1 não foi utilizada por nenhuma dupla.

As discussões das duplas e seus registros escritos mostram que os alunos tomaram como ponto de partida a definição de losango relacionada à congruência dos lados, isto é, buscaram construir um quadrilátero que apresentasse os quatro lados congruentes.

A dupla III iniciou seguindo uma técnica utilizada na construção do paralelogramo, afirmando que o losango é um paralelogramo, como mostra este trecho:

Gustavo*: Um losango tem todos os lados iguais.*

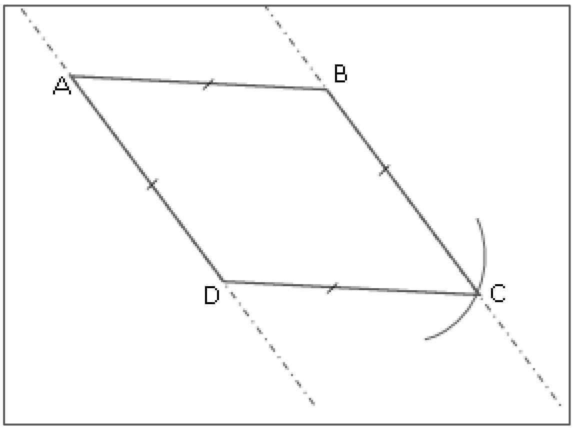
Fábio*: A gente vai construir um lado e outro consecutivo de modo que não fique colinear.*

Gustavo*: A gente fala que essa medida é igual a essa. Dois lados consecutivos e não colineares. Aqui a gente já usa o paralelismo. [O aluno translada um dos lados para obter o paralelismo dos lados opostos.] Utilizando que o losango é um paralelogramo, a gente fala que essa medida é igual a essa. Só que faz com o compasso.*

Fábio*: A gente pode pegar qualquer ângulo aqui entre AB e BC.*

Gustavo*: A gente vai dizer para a professora que agora ficou fácil. Tudo é paralelogramo.*

Figura 65. Primeira figura que orienta a realização da tarefa 3 pela dupla III.



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos partem para justificar a técnica utilizada e compreendem que devem utilizar a definição e os teoremas da caixa de ferramentas.

Fábio*: Temos que justificar agora.*

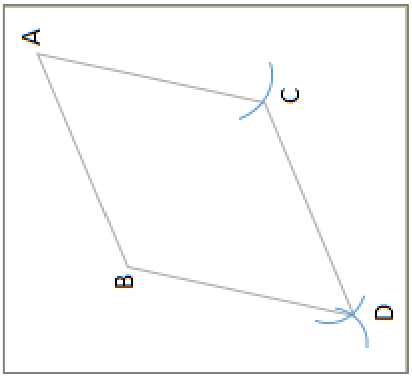
Gustavo*: A gente pode partir da definição, não é?*

Fábio*: Claro. E a caixa de ferramentas. Ela está ali para isso.*

Os alunos construíram os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ congruentes e transladaram o lado $\overline{AB}$ até o ponto *C*, obtendo um paralelogramo com dois lados consecutivos congruentes. O diálogo desses alunos evidencia que utilizaram verbalmente argumentos válidos e mostram estar cientes da possibilidade de utilizar propriedades já demonstradas. No entanto, não dão seguimento à justificativa e partem para uma nova técnica, que é a segunda das técnicas previstas em nossa análise *a priori*.

Em uma segunda tentativa, ***Fábio*** e ***Gustavo*** construíram o losango utilizando apenas os arcos de circunferência (Figura 66), e apresentaram dificuldade em justificar a técnica utilizada.

Figura 66. Segunda figura que orienta a construção da tarefa 3 pela dupla III.



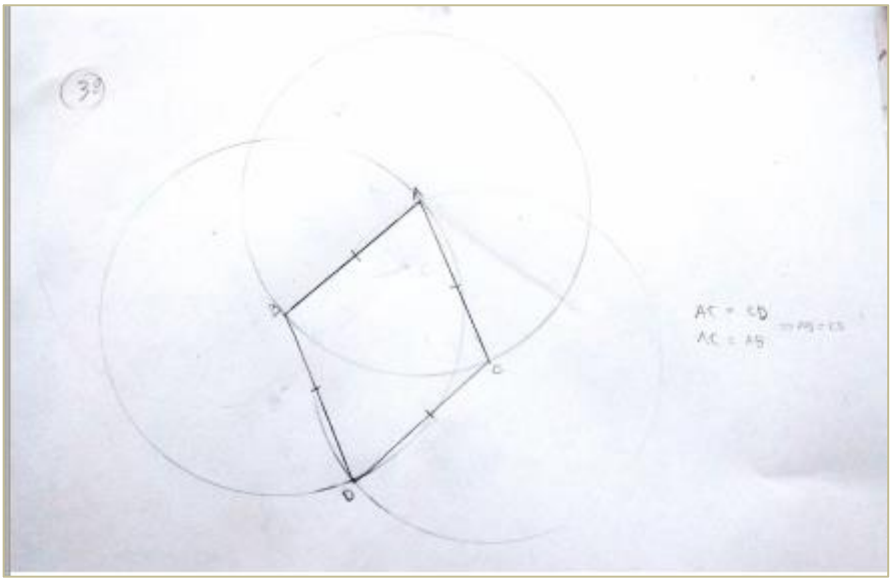
Fonte: Dados da pesquisa.

Aconselhamos os alunos a completarem os arcos traçados para obterem as circunferências e a observarem as relações entre os lados dos quadriláteros.

Gustavo*: Ah! São os raios! Aí, Fábio, os lados do losango são os raios. Tá vendo aqui: o C é centro dessa circunferência, não é? CA é raio e CD é raio; então AC = CD. A é centro dessa outra circunferência aqui, não é? AC é raio e AB é raio também. Então AC = AB; então AB = CD. Muito bom, não é?*

Na Figura 67 está representado o registro figural apresentado pelos alunos na segunda tentativa de construção.

Figura 67. Construção apresentada pela dupla III na tarefa 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos poderiam justificar a técnica utilizada inicialmente recorrendo a duas das propriedades institucionalizadas: *"Se um quadrilátero possui dois lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo"*, para concluir que *ABCD* é um paralelogramo, e *"Se ABCD é um paralelogramo, então seus lados opostos são congruentes"*, para concluir que *AB* = *CD*. Como os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ foram construídos congruentes, podemos concluir que *CD* = *AB* = *BC* = *AD*. Logo, *ABCD* é um losango. Ou utilizar a propriedade de que o quadrilátero construído é um paralelogramo com dois lados consecutivos congruentes, sendo, portanto, um losango.

Embora na primeira técnica utilizada pelo grupo haja uma congruência semântica entre o que se quer provar e seu registro figural, a coordenação entre as apreensões perceptiva e discursiva necessária para utilização das propriedades institucionalizadas não foi mobilizada pelos alunos neste caso. Concordamos com Almouloud e Mello (2000) quando afirmam que o desenvolvimento da capacidade de raciocinar logicamente requer um trabalho de longo prazo.

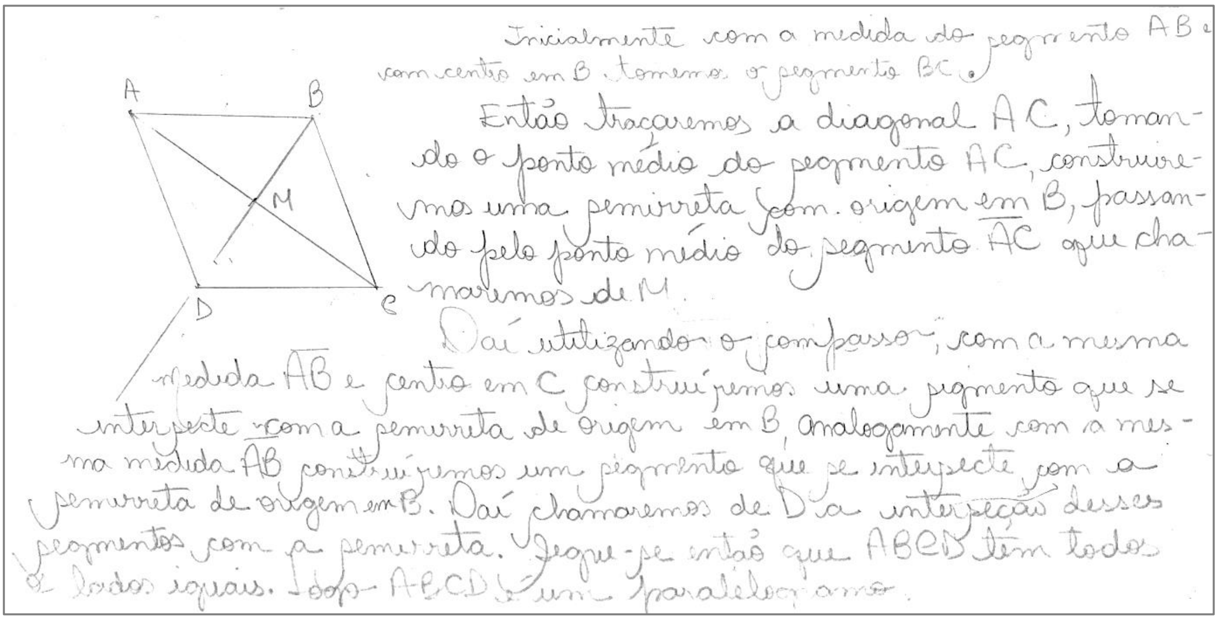
Em uma segunda tentativa, os alunos recorrem a outra técnica e, a princípio, a representação utilizada pelos mesmos não permite visualizar a reconfiguração que possibilitaria notar que os lados do quadrilátero construído são todos raios de mesma medida. A construção das circunferências foi necessária para que estes pudessem visualizar que os lados do quadrilátero eram congruentes.

Pudemos observar que, após representar no registro figural todas as circunferências que auxiliaram na construção do losango, os alunos que recorreram a esta técnica não tiveram dificuldade em perceber a reconfiguração intermediária pertinente. A possibilidade de ocorrer dificuldade nesse caso, citada por Duval (2012), se dá pelo fato de uma parte elementar entrar simultaneamente em dois reagrupamentos que deverão ser comparados – o lado $\overline{AB}$, por exemplo, entra simultaneamente em dois reagrupamentos, pois $\overline{AB}$ é raio da circunferência de centro *A* e é também raio da circunferência de centro *B*. Continuaremos a observar se este fator, que Duval (2012, p. 132) chama de "obstáculo da duplicidade de objetos", influenciará a visualização da reconfiguração pelos alunos nas próximas tarefas.

Além da técnica apresentada, foram utilizadas duas outras não previstas em nossa análise *a priori*. Vamos examiná-las simultaneamente por haver semelhanças entre elas e pela discussão gerada ao socializá-las.

Os dois grupos iniciaram a realização da tarefa com a construção de um segmento *BC* consecutivo ao segmento *AB* dado, sendo *AB* = *BC*, e ligaram os pontos *A* e *C* obtendo um triângulo *ABC*. Ambos obtiveram o ponto médio *M* do lado *AC* do triângulo *ABC*. A partir desse ponto, os grupos diferenciaram a técnica. Apresentaremos abaixo a produção de cada um dos grupos e suas respectivas análises.

Figura 68. Construção e justificativa apresentada pela dupla II.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na construção apresentada pelo grupo II (Figura 68), os alunos traçaram uma semirreta de origem *B* passando por *M*, obtiveram um ponto $D \in \overrightarrow{BM}$ tal que $CD = CB$ e ligaram os pontos *D* e *A*, afirmando que $AB = BC = CD = DA$ e, portanto, que *ABCD* seria losango. No entanto, não ofereceram justificativa matemática ou por meio de instrumentos de desenho geométrico para a congruência do lado $\overline{DA}$ com os demais lados. Neste caso, não houve demonstração nem nenhum tipo de prova. O que foi apresentado no texto dos alunos foram os passos da construção, sendo mobilizada a apreensão sequencial guiada pela apreensão perceptiva.

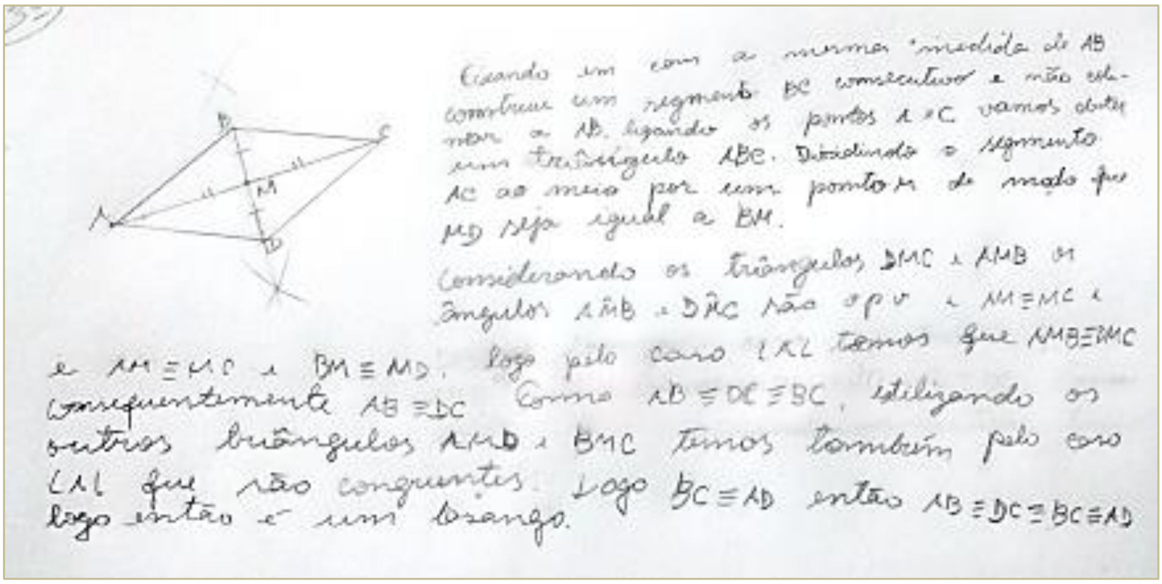
Na atividade de demonstração, segundo Duval (2012), a apreensão discursiva da figura é exigida e a verdadeira representação correspondente a essa atividade não é a figura, mas uma rede semântica de propriedades e objetos. O que é sucessivamente obtido com o traçado por instrumentos se transforma em hipóteses. Na produção do grupo II, temos como hipóteses obtidas da construção que *M* é ponto médio de $\overline{AC}$ e que $AB = BC = AD$. Para validar a técnica, os alunos deveriam demonstrar que o lado $\overline{AD}$ do quadrilátero *ABCD* é congruente aos demais lados a partir dessas hipóteses.

Diante da construção apresentada, temos como hipóteses que *AB* = *BC* = *CD* e *AM* = *MC*. Como $\overline{BM}$ é mediana relativa à base $\overline{AC}$ do triângulo isósceles *ABC*, então $\overrightarrow{BM}$ também é bissetriz relativa ao ângulo $A\hat{B}C$, ou seja, $A\hat{B}M \equiv M\hat{B}C$. Podemos afirmar também que $D\hat{B}C \equiv C\hat{D}B$, pois *DBC* é isósceles de base $\overline{BD}$. Diante dessas afirmações, podemos concluir que $A\hat{B}D \equiv A\hat{B}M \equiv M\hat{B}C \equiv D\hat{B}C \equiv C\hat{D}B \Longrightarrow A\hat{B}D \equiv B\hat{D}C \Longrightarrow \overline{AB}\,//\,\overline{DC}$.
Se $\overline{AB}\,//\,\overline{DC}$ e *AB* = *DC*, então *ABCD* é um paralelogramo e seus lados opostos são congruentes. Logo, $\overline{AD}$ é congruente aos demais lados do quadrilátero *ABCD* e, portanto, este é um losango.

Observamos que a técnica apresentada pelo grupo é válida e sua justificativa matemática necessitou de conhecimentos que não foram contemplados em nossos encontros, o que demandou revisar tais propriedades.

A dupla I construiu o segmento $\overline{BD}$ passando por *M*, tal que *BM* = *MD*, e justificou por meio de congruência de triângulos (caso LAL) que o quadrilátero *ABCD* obtido era um losango

Figura 69. Construção e justificativa apresentada pela dupla I.



Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar da falta de rigor, o texto apresentado pelos alunos (Figura 69), corresponde a uma prova conceitual, visto que foram utilizados argumentos matematicamente válidos baseados em deduções lógicas. Não recorreram às propriedades institucionalizadas, mas validaram corretamente a construção utilizando a congruência de triângulos. Uma vez que no quadrilátero apresentado pelo grupo as diagonais se interceptam em seus pontos médios, podemos afirmar que o quadrilátero é um paralelogramo. Podemos concluir que o quadrilátero construído é um losango, já que ele é um paralelogramo que tem dois lados consecutivos congruentes. Percebemos certa dificuldade dos alunos em utilizar as propriedades de paralelogramo institucionalizadas. Discutimos que o uso das propriedades possibilita economia de tratamento e, consequentemente, economia de tempo.

A socialização das atividades gerou a seguinte discussão:

***Marina**: Agora, assim... Eu tentei traçar o losango aleatoriamente, assim... Só construí um quadrilátero com os lados congruentes e não deu certo. Eu pensei: tem um problema aí. Eu me perguntei: e a questão do ângulo?*

***Gustavo**: Não dá certo, não, porque tem que ver o ângulo.*

***Marina**: Aí para a gente amadurecer tem que ter um meio de saída, alguma via para resolver o problema.*

***Gustavo**: A gente consegue construir, livre, dois lados, mas não dá para construir os quatro, não. Nem sempre fecha.*

***Marina**: [Dirigindo-se à dupla I.] Para ele fazer isso, primeiro ele já sabia...*

***Jadson**: Não! Eu construí com base no ponto médio, mas não disse que era losango.*

***Marina**: Não, mas eu estou dizendo você não usou esse argumento pra dizer... Mas você já sabia que elas se interceptam no ponto médio, entendeu? Agora você usou a congruência de triângulo pra mostrar. É isso.*

***Bruna**: Não. Mas no caso... Ele pode ter criado ali $\overline{BM}$ e $\overline{MD}$ iguais para depois já usar a congruência, mas não sabendo que em todo losango as diagonais se interceptam no ponto médio.*

***Marina**: Mas assim, quando você tomou... Você construiu o primeiro triângulo, certo? Você poderia ter construído o primeiro triângulo e ter prolongado a semirreta...*

***Jadson**: Eu primeiro construí um triângulo ABC. Aí oposto eu tenho que construir outro triângulo igual a esse. Depois juntar os triângulos de modo a construir um losango. Então eu fiz isso. Então $\overline{BM}$ eu prolonguei, entendeu? Pra tornar iguais os triângulos. Mas não foi com sentido do ponto médio no início, entendeu?*

***Marina**: Tá, entendi, entendi. Eu já conhecia essa propriedade do ponto médio. Aí eu achei que ele tinha usado isso para poder induzir para chegar no losango.*

Podemos observar nessa discussão as conjecturas que levaram os dois grupos a chegarem à técnica utilizada, bem como um avanço no registro escrito. Os alunos, porém, ainda validam resultados por meio da apreensão perceptiva.

Cabe destacar também que os alunos passam a ter cuidado em não utilizar a tese para demonstrá-la. No diálogo dos alunos, percebemos que um deles deixa claro que não poderia utilizar como hipótese que o quadrilátero construído seria um losango: "*Para ele fazer isso, primeiro ele já sabia...*"; *"Não! Eu construí com base no ponto médio, mas não disse que era losango".*

Finalizamos esta atividade discutindo e validando as técnicas que não foram justificadas matematicamente pelos grupos e institucionalizando as propriedades derivadas destas técnicas.

Considerações sobre a atividade 3

Das técnicas previstas, apenas uma foi contemplada. No entanto, duas técnicas não previstas em nossas análises *a priori* foram empregadas pelos alunos, as quais permitiram a institucionalização de duas propriedades do losango:

- *Se um quadrilátero apresenta dois lados consecutivos congruentes e diagonais que se interceptam no ponto médio de ambas, então esse quadrilátero é um losango*. Esta propriedade é equivalente a: *Todo paralelogramo com dois lados consecutivos congruentes é um losango.*
- *Se um quadrilátero possui três lados congruentes e uma das diagonais contém o ponto médio da outra, então esse quadrilátero é um losango*.

Notamos indícios de que alguns alunos confundem demonstração e construção. Um dos grupos justificou sua construção apresentando uma lista de instruções. Duval (2012, p. 135) aponta que "do ponto de vista cognitivo existe uma diferença importante entre a redação de uma lista de instruções para a construção de uma figura e a redação de uma demonstração".

Com relação à forma de validar seus resultados, observamos ainda uma subordinação da apreensão discursiva à apreensão perceptiva e uma aparente independência dos processos de visualização, construção de configurações e raciocínio. Isso se revela no fato de os alunos não recorrerem às propriedades institucionalizadas para validar suas técnicas. Duval *apud* ALMOULOUD, 2004) afirma que estes processos estão entrelaçados e sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência em geometria.

Tarefa 4: Construir um losango sendo dada uma diagonal.

Construir um losango a partir de uma diagonal $\overline{AC}$ adotando os seguintes passos:

a) Crie dois pontos, *A* e *C*.

b) Construa uma circunferência *c* de centro A e de raio *a* maior que $\overline{AC}/2$.

c) Construa uma circunferência c' de mesmo raio que *c* e de centro *C*. As circunferências *c* e c' interceptam-se nos pontos *B* e *D*. A reta $\overline{BD}$ é mediatriz do segmento $\overline{AC}$.

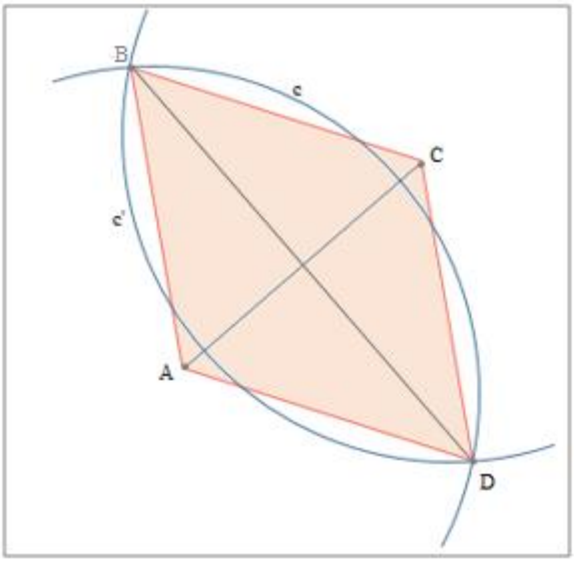
d) Construa o quadrilátero *ABCD* e demonstre que *ABCD* é um losango.

Análise *a priori* da Tarefa 4

Nesta tarefa os alunos deverão recorrer à apreensão sequencial, interpretar os passos fornecidos para a construção e converter esses passos em registro figural. Em seguida deverão justificar matematicamente que o quadrilátero construído é um losango. A Figura 70 corresponde à representação figural referente à tarefa 4.

Técnica 1: Utilizar régua e compasso para a construção e a propriedade da mediatriz para a demonstração.

Figura 70. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 4.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

Esta construção pode ser validada considerando-se o fato de que *B* é o simétrico de *D* em relação ao segmento $\overline{AC}$, a definição de mediatriz (reta que passa pelo ponto médio de um segmento e é perpendicular a ele) e o caso lado-ângulo-lado de congruência de triângulos para demonstrar que *ABCD* é um losango. Outra possibilidade é utilizar o fato de a reta $\overline{BD}$ ser mediatriz do segmento $\overline{AC}$ e *B* ser o simétrico de *D* em relação ao segmento $\overline{AC}$. Assim, *B* e *D* são equidistantes de *A* e de *C*, enquanto *A* e *C* são equidistantes de *B* e de *D*. Logo, $AB = BC = CD = DA$ e, portanto, *ABCD* é um losango. Com qualquer um destes argumentos a validação será alcançada.

Essa situação tem potencial para possibilitar aos alunos formularem condições necessárias e suficientes sobre as diagonais de um quadrilátero para que este seja um losango.

Com a escolha feita nesta tarefa – construir o losango partindo de sua diagonal – pretendemos criar condições para o aluno formular e validar para o caso geral as propriedades relativas às diagonais do losango. Para isso deverá mobilizar conhecimentos sobre mediatriz de um segmento e congruência de triângulos.

Após vivenciarem momentos de ação e formulação, esperamos que os alunos percebam a necessidade da demonstração e que as conclusões institucionalizadas na tarefa anterior tenham lhes proporcionado experiências que possam levá-los a validar sua construção.

Institucionalizaremos com a seguinte condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja um losango, explicitando a quais condições adicionais o paralelogramo deve satisfazer para que seja um losango: *Um paralelogramo é um losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares*.

Bloco tecnológico-teórico: Definições de losango, diagonal e mediatriz; propriedade da mediatriz; congruência de triângulos; condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja um losango. Para dar início à resolução da tarefa 4, o aluno precisa ter domínio do que vêm a ser losango e diagonal de um quadrilátero. Acreditamos que a tarefa 3 tenha esclarecido os conceitos dos objetos geométricos descritos. A justificativa da construção envolverá congruência de triângulos.

Experimentação e análise *a posteriori* da tarefa 4

Esta tarefa se distingue das demais por fornecer os passos da construção, enquanto as anteriores solicitavam que os alunos construíssem a figura, fornecessem os passos da construção e justificassem cada construção matematicamente. Observamos que todos os grupos conseguiram interpretar os passos e construir a figura.

Após todos construírem a figura, percebemos que partiram para a realização da demonstração. Nesse momento percebemos que os alunos não estavam certos da definição de mediatriz, como mostra este diálogo:

***Marina**: Mediatriz é aquela que é perpendicular, não é? É um segmento perpendicular, não é? Mediana e mediatriz eu não consigo gravar. Eu sempre me atrapalho.*

***Fábio**: Mediatriz? O que é isso?*

***Marina**: Eu acho que é a perpendicular.*

***Fábio**: Que parte sempre no meio.*

***Bruna**: E é perpendicular.*

***Fábio**: Sei, mediatriz, parte sempre, divide a reta no meio. Mediatriz... Mede sempre 90º e parte a reta no meio.*

***Bruna**: Mediana é ponto médio e mediatriz é perpendicular.*

***Gustavo**: Mediatriz divide o segmento ao meio.*

***Fábio**: É... Divide o segmento ao meio. Então AM = MC.*

***Marina**: E mediana faz o que?*

***Gustavo**: Mediana é o ângulo eu acho.*

***Marina**: E quem faz 90º é mediana ou mediatriz?*
***Fábio**: Quem é perpendicular?*
***Marina**: Tem um dos dois que faz 90º.*
***Gustavo**: Professora, aqui tem como dizer que o cruzamento dos ângulos é 90º?*
***Marina**: Que um ângulo com o outro forma um ângulo de 90º?*
***Fábio**: Eu acho que divide o segmento ao meio.*
***Marina**: Eu acho que forma com a outra... É perpendicular.*

Observamos no diálogo que os alunos têm dificuldade em empregar termos próprios da geometria, expressando equívocos como *"divide a reta ao meio"*; *"tem um dos dois que faz 90º"*; *"cruzamento dos ângulos é 90º"; "um ângulo com o outro, forma um ângulo de 90º".* Maioli (2001), que identificou expressões semelhantes nos textos redigidos pelos professores que participaram de sua pesquisa, acredita que essa dificuldade pode estar mais relacionada com pouco contato com o registro em língua natural que com falhas conceituais. Observaremos ao longo desta tarefa se as dificuldades apresentadas pelos alunos na expressão verbal também ocorrem no registro escrito e tentaremos avaliar se a origem do problema é consequência de falhas conceituais.

A forma como os alunos se referem aos objetos 'mediana' e 'mediatriz' dá sinais de que esses objetos não foram bem apropriados: *"Mediana e mediatriz eu não consigo gravar. Eu sempre me atrapalho"*; *"mediana é ponto médio e mediatriz é perpendicular"*. Percebemos que essa dificuldade impediu os alunos de avançarem na realização da tarefa. Almouloud e Mello (2000, p. 15) observaram que a falta de conhecimento dos termos geométricos "prejudica a elaboração da figura, bem como o entendimento das hipóteses e conclusão". Nesse caso, para que a continuidade da tarefa não fosse comprometida, abrimos um espaço para definir mediatriz e discutir sua propriedade: todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades desse segmento. Em seguida os alunos passaram a discutir entre grupos a demonstração, como mostra este trecho:

***Gustavo**: Então já tá provado aqui.*
***Fábio**: $\overleftrightarrow{AC}$ é mediatriz de $\overline{BD}$. Então já tá provado. Caso lado-ângulo-lado. Que fácil.*
***Gustavo**: Já provei. Nem vai precisar discutir esse.*
***Fábio**: Pela definição de mediatriz.*
***Marina**: Como $\overleftrightarrow{BD}$ é mediatriz, ela corta no ponto médio e é perpendicular. Como $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ são raios da circunferência c, temos que AB = AD. Do mesmo modo que $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são raios... Aí a gente tem esse segmento igual a esse [AM = MC], esse ângulo... [ângulo formado entre a mediatriz e o segmento $\overline{AC}$].*
***Fábio**: Esquentou!*
***Marina**: É...*

***Fábio**: A gente só tem que AB = AD e BC = CD. Agora a gente tem que igualar um lado de cá ao lado de lá [refere-se a um raio da circunferência c e a um raio da circunferência c': $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$].*

***Gustavo**: Eu já provei tudo, já.*

***Fábio**: A gente tá buscando a congruência de triângulo.*

***Gustavo**: É congruência de triângulos.*

***Marina**: Eu não sei por que eu comecei escrevendo raio. Não tem nenhum sentido...*

***Fábio**: Ah, não! Serve: o raio $\overline{AB}$ é igual ao raio $\overline{AD}$; o raio $\overline{CB}$ é igual ao raio $\overline{CD}$.*

***Marina**: Eu comecei escrevendo isso.*

***Gustavo**: Ó como eu coloquei: $\overleftrightarrow{BD}$ é mediatriz, não é? Do segmento $\overline{AC}$. Logo, AM = MC. OK. $\overline{BD}$ é perpendicular a $\overline{AC}$, pela definição de mediatriz. A partir daí teremos que AB = AD, pois são raios da mesma circunferência. Logo, podemos afirmar que os triângulos AMD e AMB são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado, pois AB = AD, $\overline{AM}$ é lado comum aos dois triângulos e os dois possuem um ângulo de 90º porque $\overline{BD}$ é perpendicular a $\overline{AC}$. Agora, pronto. Se a gente provou que os dois triângulos são congruentes* [*ABM* e *ADM*], *a gente provou também que BM = MD.*

***Marina**: BM = MD?*

***Gustavo**: Se os triângulos são congruentes!*

***Fábio**: Sim.*

***Marina**: Ah... Tem que achar, não é assim tão de cara, não.*

***Gustavo**: BM = MD, agora a gente prova o outro, porque...*

***Fábio**: Porque já tem AM = MC [referem-se aos triângulos AMD e BMC].*

***Gustavo**: E também a gente tem os ângulos opostos pelo vértice.*

***Fábio**, **Marina**: É.*

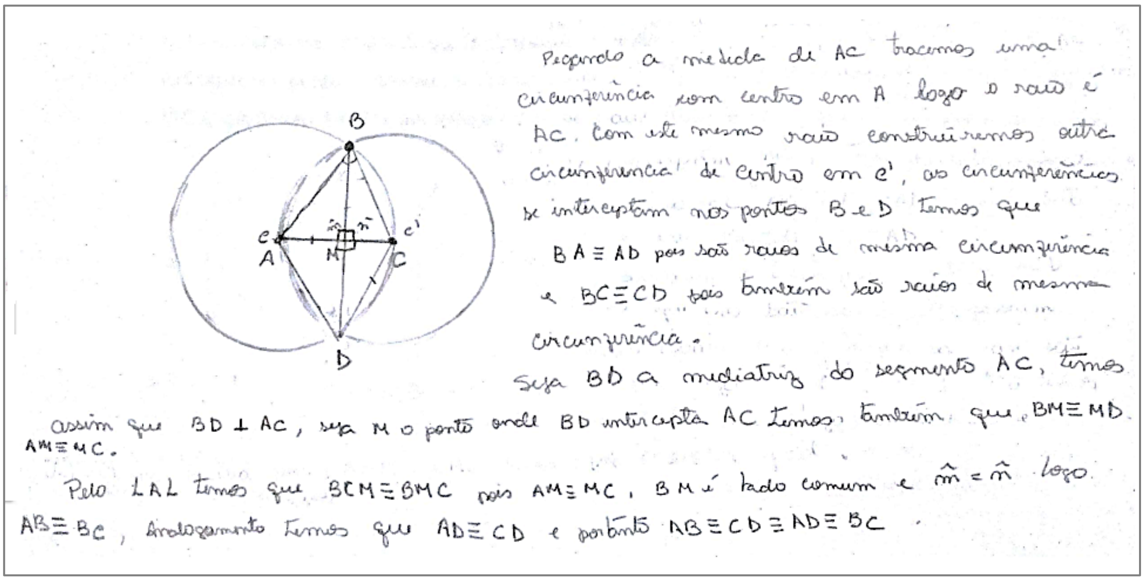
***Gustavo**: A gente tem que provar que primeiro que BMC é congruente a AMD.*

***Fábio**: E depois concluir que...*

Gustavo observou que inicialmente deveria demonstrar a congruência dos segmentos $\overline{BM}$ e $\overline{MD}$, a congruência que faltava para completar a demonstração iniciada por Fábio e Marina. Em seguida todos evidenciaram ter conhecimento da necessidade de demonstrar a congruência de $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ para concluírem sobre a congruência dos lados do losango.

Apresentaremos as provas realizadas pelas duplas com os respectivos comentários. A Figura 71 corresponde à construção e a demonstração realizada pela dupla Bruna e Camila.

Figura 71. Produção da dupla Bruna e Camila.



Pegando a medida de AC traçamos uma circunferência com centro em A logo o raio é AC. Com este mesmo raio construiremos outra circunferência de centro em c', as circunferências se interceptam nos pontos B e D temos que

BA ≡ AD pois são raios da mesma circunferência

e BC ≡ CD pois também são raios da mesma circunferência.

Seja BD a mediatriz do segmento AC, temos assim que BD ⊥ AC, seja M o ponto onde BD intercepta AC temos também que BM ≡ MD. AM ≡ MC.

Pelo LAL temos que BCM ≡ BMC pois AM ≡ MC, BM é lado comum e $\hat{m} = \hat{n}$ logo AB ≡ BC, Analogamente temos que AD ≡ CD e portanto AB ≡ CD ≡ AD ≡ BC.

Fonte: Dados da pesquisa.

As alunas justificaram a congruência dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ e dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ utilizando o fato de $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ serem raios da circunferência *c* e $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ serem raios da circunferência *c'*. Na justificativa da congruência dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, essas alunas provaram corretamente a congruência dos triângulos *BCM* e *AMB*.

Notamos também, no texto apresentado, indícios de dificuldade em organizar as hipóteses para utilizar a propriedade transitiva na conclusão da congruência dos lados, pois as alunas indicaram no texto a necessidade de utilizar mais uma vez congruência de triângulos para justificar que *AD = CD*. Observamos ainda que as alunas não utilizaram a propriedade da mediatriz para provar que *AB* = *BC*.

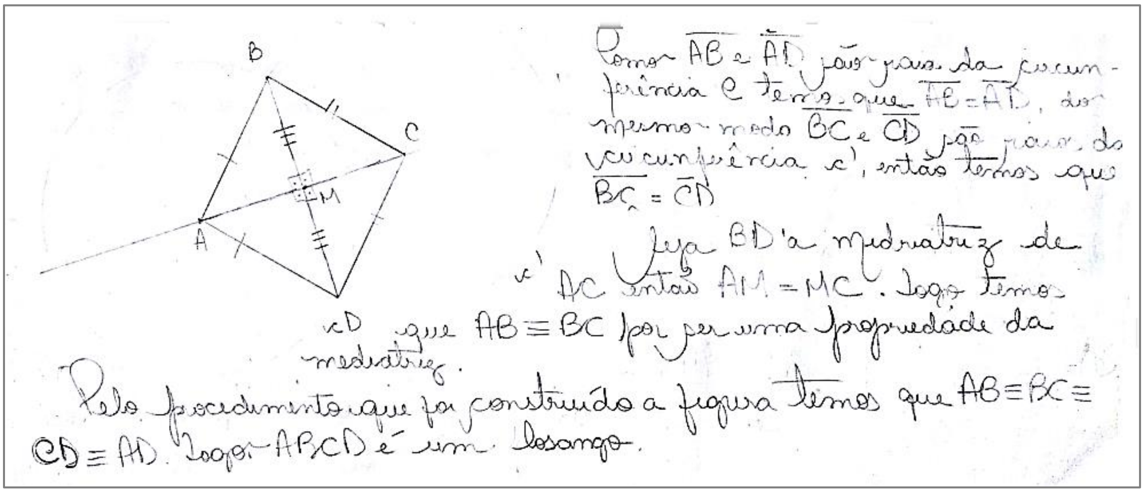
Apesar de não ter utilizado na prova apresentada a propriedade da mediatriz de um segmento, afirmaram que $\overline{BM} \equiv \overline{MD}$, atribuindo a esta congruência o fato de $\overleftrightarrow{BD}$ ser mediatriz do segmento $\overline{AC}$. Esta conclusão pode ter sido apoiada em apreensão perceptiva.

Pudemos observar também no texto e na construção que as alunas consideraram o raio das circunferências *c* e *c'* com medidas iguais à do segmento $\overline{AC}$, incidindo em um caso particular em que uma das diagonais do losango é congruente aos lados deste, isto é, o losango é formado por dois triângulos equiláteros, embora isso não afetasse a generalidade do método, uma vez que não foi utilizado como hipótese o fato de $\overline{AC}$ ser congruente aos lados do quadrilátero construído.

Apesar dos problemas destacados, observamos avanços no texto redigido pelas alunas, o que tem características de demonstração, uma vez que utilizaram atributos da mediatriz como argumentos matemáticos para justificar a congruência dos triângulos e consequentemente a congruência dos lados do losango. Apesar do excesso de argumentos, já se baseiam em regras de inferências lógicas para justificar suas afirmações e distinguem hipótese e tese.

A Figura 72 corresponde à construção e demonstração da dupla ***Fábio*** e ***Marina***.

Figura 72. Produção da dupla Fábio e Marina.



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla ***Fábio*** e ***Marina*** utilizou o mesmo argumento da dupla ***Bruna*** e ***Camila*** para justificar a congruência dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, $\overline{CD}$. Para justificar a congruência entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, os alunos afirmaram ter utilizado a propriedade da mediatriz, mas não deixaram claro sua utilização.

A discussão da dupla revela que os alunos perceberam a necessidade de justificar que *AB = BC,* e para isso pretendiam utilizar congruência de triângulos:

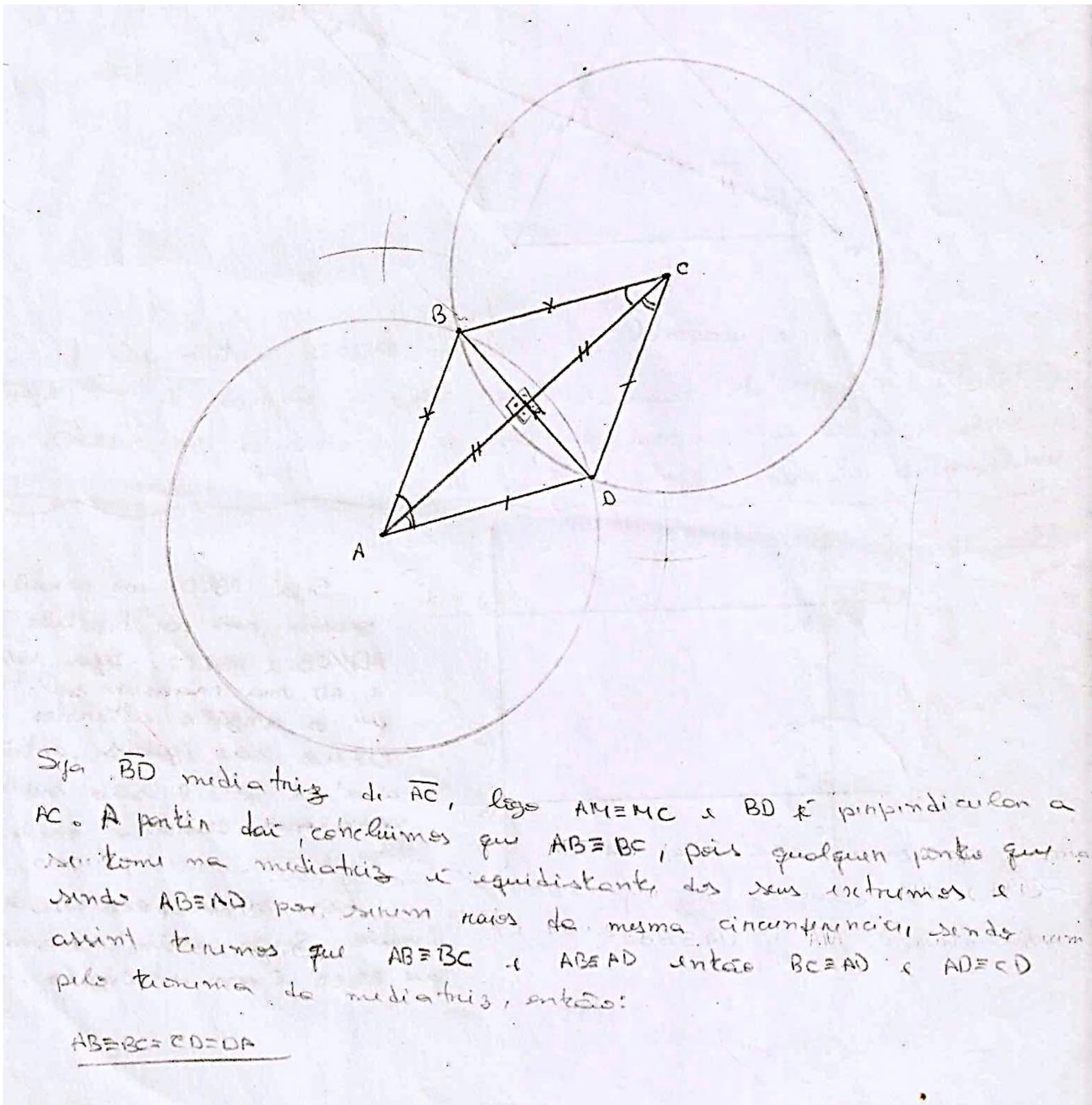
Marina*: Como $\overleftrightarrow{BD}$ é mediatriz, ela corta no ponto médio e é perpendicular. Como $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ são raios da circunferência c, temos que AB = AD. Do mesmo modo que $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são raios... Aí a gente tem esse segmento igual a esse [AM = MC], esse ângulo... [Ângulo formado pela mediatriz e o segmento $\overline{AC}$.]*

No entanto, na redação, justificaram a congruência de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ utilizando a propriedade da mediatriz. Apesar de utilizar argumentos corretos, a dupla concluiu sua prova recorrendo à forma como a figura foi construída: *"Pelo procedimento que foi construída a figura temos que $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{AD}$"*, não indicando no texto haverem recorrido à transitividade da relação de congruência. Neste caso, o texto apresentado pela dupla tem indícios de uma prova conceitual e finaliza com aspectos de uma prova pragmática, pois não utilizou as conclusões anteriores para justificar a tese.

A dupla ***Gustavo*** e ***Hugo*** (Figura 73), por sua vez, utilizou argumentos corretos e alcançou a validação da construção. Embora durante a discussão esses alunos tenham indicado que utilizariam a congruência de triângulos, recorreram à propriedade da mediatriz para validar a construção.

O texto que redigiram pode ser considerado o de uma demonstração, segundo Balacheff (2000), visto que as afirmações foram justificadas por meio de argumentos matematicamente válidos, ou seja, utilizaram propriedades da mediatriz para justificar a congruência de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, consideraram o fato de $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ serem raios da mesma circunferência para justificar a congruências destes segmentos e organizaram corretamente esses argumentos na construção da demonstração.

Figura 73. Produção de Gustavo e Hugo.



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a redação da demonstração, utilizando a congruência dos raios e a propriedade da mediatriz, ***Hugo*** voltou a discutir sobre outra forma de validar a construção:

Hugo*: BMC já é congruente a AMD, não é não?*

Gustavo*: É, sim!*

Hugo*: Se usasse que esses lados têm mesma medida [BC e CD], eles são raios da mesma circunferência, têm mesma medida... Então... se cada lado são os raios, então... Pode usar... Se esses lados são os raios...*

Marina*: Você tem duas circunferências...*

Gustavo*: ...de mesmo raio...*

Hugo*: Então! Se eu falar que tem mesmo raio, e os raios são lados do losango, então...*

Ao socializar as produções das duplas, observamos que o argumento utilizado por ***Hugo*** é válido, visto que a congruência dos raios das circunferências *c* e *c*' foi afirmada no enunciado.

Colocamos em discussão a demonstração debatida entre os grupos e também confirmamos que alcançaram a validação da construção, embora a dupla ***Bruna*** e ***Camila*** e a dupla ***Fábio*** e ***Marina*** incorresse em equívocos na redação da demonstração.

Passamos a fazer a institucionalização das propriedades demonstradas e questionamos sobre as características das diagonais do losango construído. Todos concordaram que as diagonais se interceptavam em seus pontos médios, e desse modo o quadrilátero construído era um paralelogramo. Além disso, elas eram perpendiculares. Institucionalizamos que *se um paralelogramo possui diagonais perpendiculares, então ele é um losango*. Questionamos se essa propriedade era comum a todos os losangos, isto é, se a recíproca da propriedade institucionalizada era verdadeira. Os alunos responderam positivamente, apoiando-se na apreensão perceptiva, realizando uma prova pragmática.

Seguem trechos da discussão que antecedeu a demonstração da propriedade que afirma que se um paralelogramo é losango, então suas diagonais são perpendiculares.

Pesquisadora*: Em todo losango as diagonais são perpendiculares e se interceptam no ponto médio de ambas?*

Gustavo*: Sim, porque ele tem os lados todos iguais.*

Pesquisadora*: E se ele possui os lados todos congruentes, então as diagonais serão perpendiculares e se interceptarão nos pontos médios?*

Fábio*: Sim, porque os ângulos opostos a esses lados são iguais.*

Pesquisadora*: Por quê?*

Fábio*: Porque têm a mesma abertura.*

Gustavo*: Porque quando você traçar a diagonal, a outra diagonal vai ser perpendicular a ela.*

Marina*: Porque os ângulos entre as diagonais são suplementares.*

Hugo*: O triângulo é isósceles e tem um teorema que diz que se um segmento é mediana, então ele também é altura e bissetriz.*

Bruna*: Se é bissetriz os ângulos também são iguais não é? [Refere-se aos ângulos divididos pelas diagonais.]*

Passamos a explicar a afirmação de ***Hugo***, a qual deriva da congruência de triângulos, e enunciamos a condição necessária e suficiente sobre as diagonais de um quadrilátero para que este seja um losango. Esta discussão evidencia que os alunos ainda recorrem a apreensão perceptiva para validar suas afirmações. Estimulamos uma discussão com o objetivo de observar como eles interpretam as condições necessárias e suficientes sobre as diagonais do losango e introduzir a noção de contraexemplo, o que provocou o seguinte debate:

Pesquisadora*: Provamos que em todo losango as diagonais são perpendiculares. E a recíproca é verdadeira?*

Marina*: Nesse caso aí foi. [Refere-se à construção que acabaram de fazer.]*

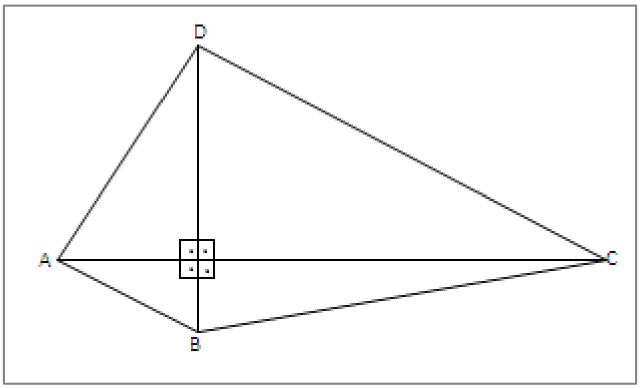
Hugo*: Para ser losango tem duas condições e não considerou a outra condição.*

Fábio*: Então não é suficiente.*

Marina*: Então se as diagonais são perpendiculares, não necessariamente esse quadrilátero é um losango.*

O aluno ***Hugo*** desenhou no quadro um quadrilátero com diagonais perpendiculares e que não era losango (Figura 74).

Figura 74. Quadrilátero com diagonais perpendiculares e que não é losango.



Fonte: Dados da pesquisa.

Fábio*: Mas no quadrilátero que ele desenhou as diagonais não se cortam no ponto médio, não.*

Esclarecemos *existir* quadrilátero com diagonais perpendiculares que é um losango, mas não podemos afirmar que *qualquer* quadrilátero que possui diagonais perpendiculares é um losango – isto é, ter diagonais perpendiculares é uma condição necessária, mas não suficiente, para que um quadrilátero seja losango.

Este exemplo, além de permitir discutir o significado de uma condição necessária e suficiente, possibilitou introduzir a noção de contraexemplo. A afirmação de que *nem todo quadrilátero que possui diagonais perpendiculares é um losango* pode ser validada por meio de um contraexemplo. Esclarecemos para os alunos que o contraexemplo é a única forma de validação empírica que permite rejeitar uma conjectura. Balachef (2000) afirma que a legitimidade dessa forma de validação deve ser esclarecida, uma vez que até os alunos de níveis mais elevados têm problemas em compreendê-la e utilizá-la. O autor justifica a importância desse esclarecimento, dada a possibilidade de o aluno acreditar que sua conjectura está baseada em um empirismo ingênuo, ou ter dúvidas de quando se pode utilizar um exemplo para validar uma conjectura.

Considerações sobre a tarefa 4

Previmos para validação desta tarefa o uso da definição da mediatriz ou o fato de que os pontos B e D da mediatriz do segmento $\overline{AC}$ são equidistantes dos extremos do segmento *AC*.

Todos os alunos visualizaram e aplicaram corretamente a reconfiguração que permite provar a congruência dos lados do losango, por serem raios da mesma circunferência. O fato de se haver utilizado esta reconfiguração na tarefa 3 pode ter influenciado seu uso em outras tarefas. Conjecturamos que, além da função de explicação, a prova teve como função consolidar os conhecimentos dos alunos, o que confirma a ideia de Hanna e Barbeau (2008), quando afirma que as provas são portadoras de conhecimentos matemáticos em sala de aula e que a importância da prova não é atestar uma verdade matemática, mas sim fornecer novos métodos, estratégias e conceitos que permitam resolver problemas.

As discussões evidenciam que os alunos já começam a perceber que não podem provar conjecturas apoiados unicamente na apreensão perceptiva:

Marina*: BM = MD?*
Gustavo*: Se os triângulos são congruentes!*
Marina*: Ah... Tem que achar, não é assim tão de cara, não.*

Os alunos já tentam provar suas conjecturas por meio de argumentos matematicamente válidos, articulando melhor suas ideias. Percebemos esse avanço nos textos produzidos nesta tarefa, em que os alunos conseguiram utilizar algumas das características de mediatriz de um segmento em argumentos matemáticos que lhes permitiram provar suas conjecturas. Isso evidencia que coordenaram as apreensões perceptiva e discursiva, e alguns (dupla ***Bruna*** e ***Camila***; dupla ***Gustavo*** e ***Hugo***) já produziram provas com características de demonstração, segundo a concepção de Balacheff (2000), uma vez que os textos apresentados estão organizados de acordo com um conjunto bem definido de regras, utilizando argumentos matematicamente válidos.

Observamos no diálogo que os alunos têm dificuldade em empregar termos próprios da geometria. Como já apontamos em nossos comentários sobre as produções desses alunos, Maioli (2001) identificou o mesmo problema em textos produzidos por professores e conjecturou que essa dificuldade pode estar mais relacionada ao pouco contato com o registro em língua natural que com falhas conceituais. Analisamos os textos apresentados pelos alunos e observamos que os problemas ocorridos na expressão verbal não ocorrem no registro escrito, o que nos permite concluir que estes não decorrem necessariamente de falhas conceituais, mas sim da falta de cuidado ao se expressarem verbalmente.

Nesta tarefa as duplas se envolveram e abriram a discussão expondo suas ideias, sem que para isso a pesquisadora precisasse intervir. Mais uma vez identificamos momentos de ação, formulação e validação e a escolha feita nesta tarefa (construir um losango a partir de uma de suas diagonais) permitiu a mobilização de conhecimentos sobre definição e propriedade da mediatriz de um segmento e congruência de triângulos, propiciando condições para institucionalizar a seguinte caracterização de losango:

(1) *Um quadrilátero é losango se, e somente se, possui diagonais perpendiculares que se interceptam no ponto médio de ambas*. Ou equivalentemente: *Um paralelogramo é losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares*.

Apesar de não estar previsto para esse momento, os alunos observaram uma propriedade (*"Se é bissetriz os ângulos também são iguais, não é?"*) e por isso a institucionalizamos também:

(2) *Se um quadrilátero é losango, então as diagonais estão contidas nas bissetrizes de seus ângulos*.

Pretendemos institucionalizar a recíproca dessa propriedade na tarefa 5.

Análise *a priori* da tarefa 5

Tarefa 5: Construir um losango, dados um lado e a direção de uma diagonal.

Construir um losango a partir de um lado e a direção de uma diagonal.

a) Crie um segmento $\overline{AB}$ e a semirreta *Am*, suporte da diagonal $\overline{AC}$.

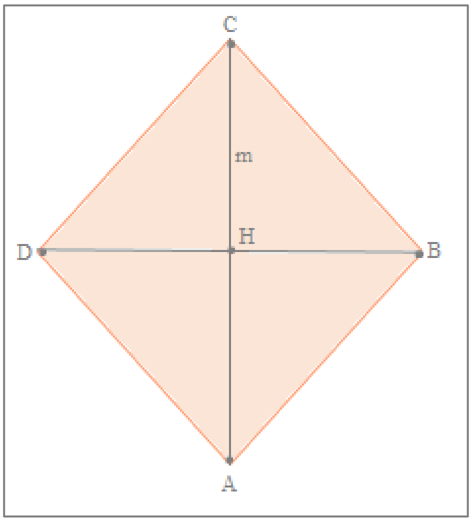
b) Construa o losango *ABCD*. Justifique sua construção.

O problema fornece um dos lados do losango e a direção de uma das diagonais. A busca pelos três lados possibilitará a mobilização de conhecimentos referentes a simetria axial e congruência de triângulos, e esperamos institucionalizar as propriedades referentes aos ângulos formados pelas semirretas-suporte das diagonais e dos lados do losango.

Previmos uma técnica para a realização desta tarefa:

Técnica 1. Obter um ponto *D*, simétrico de *B* em relação à semirreta *Am*, e um ponto *C* da semirreta *Am*, simétrico de *A* em relação ao segmento $\overline{BD}$.

Figura 75. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 5.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

A validação desta construção será alcançada com a seguinte demonstração: Como *D* é simétrico de *B* em relação à semirreta *Am*, então $\overline{AC}$ é mediatriz do segmento $\overline{BD}$ e *A* e *C* são equidistantes de *B* e de *D*, isto é, *AB* = *AD* e *CB* = *CD*. Como *C* é simétrico de *A* em relação ao segmento $\overline{BD}$, então *B* e *D* pertencem à mediatriz de $\overline{AC}$ e, portanto, são equidistantes de *A* e *C*, isto é, *BA* = *BC* e *DA* = *DC*. Logo, *AB* = *BC* = *CD* = *DA* e *ABCD* é um losango.

Esperamos que os alunos utilizem a condição necessária e suficiente enunciada e validada na tarefa anterior relativa às diagonais do losango para justificar a construção solicitada nesta tarefa.

Com as tarefas 3 e 4, os alunos já terão utilizado a definição e algumas das propriedades de mediatriz de um segmento, a congruência de triângulos, e já terá sido institucionalizada a condição necessária e suficiente, referente às diagonais, para que um paralelogramo seja losango, isto é, *um paralelogramo é losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares* ou, equivalentemente, *um quadrilátero é losango se, e somente se, as diagonais são perpendiculares e se interceptam em seus pontos médios.* Esperamos que estes conhecimentos já tenham sido consolidados e que os alunos consigam deles fazer uso de modo a alcançarem a construção mental da demonstração. Pretendemos neste momento investigar se já conseguem escrevê-la.

Institucionalizaremos a seguinte propriedade referente aos ângulos do losango: *As retas-suporte das diagonais de um losango são bissetrizes de seus ângulos*.

Bloco tecnológico-teórico: Para iniciar a construção, o aluno deverá conhecer as definições de losango, diagonal, segmento de reta e semirreta. Para justificar a construção, será necessário conhecer: propriedade da mediatriz, congruência de triângulos e condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja um losango. Acreditamos que as tarefas 3 e 4 esclareceram os conceitos dos objetos geométricos descritos.

Experimentação e análise *a posteriori* da tarefa 5

O bloco teórico-tecnológico que previmos para a realização da tarefa 5 não foi suficiente. Não previmos que a definição de semirreta-suporte constituiria um empecilho para que os alunos iniciassem a construção, como mostram os seguintes comentários:

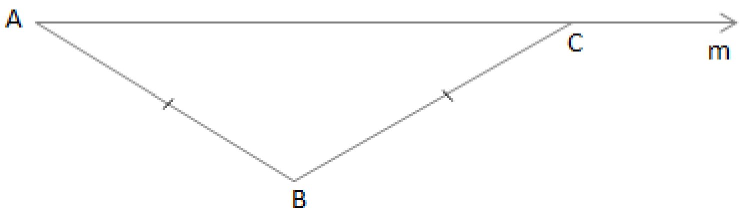
***Gustavo**: Não entendi muito bem, não.*
***Marina**: Suporte da diagonal AC?*
***Bruna**: Você entendeu?*
***Marina**: Eu não entendi, não.*
***Fábio**: Eu também não.*
***Gustavo**: Tem alguma coisa errada.*
***Bruna**: O que é semirreta-suporte?*
***Marina**: Como é que a gente vai construir diagonal assim? Suporte é o que sustenta? De suportar?*

Uma vez esclarecido o significado de semirreta, os alunos partiram para a construção do losango solicitado.

Os três grupos iniciaram a tarefa construindo o triângulo isósceles *ABC*

Figura (Figura 76). Todos os grupos construíram outro triângulo *ADC* simétrico a *ABC* em relação à semirreta *Am*. Nenhum dos grupos utilizou a simetria axial para construir o losango. Apenas um grupo utilizou explicitamente a propriedade das diagonais institucionalizada na tarefa anterior para justificar a construção.

Figura 76. Início da construção do losango solicitado na tarefa 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

As técnicas utilizadas para construir o triângulo *ADC* que completaria o losango *ABCD* foram distintas nos três grupos. Todos buscaram intuitivamente construir um triângulo simétrico de *ABC* em relação à semirreta *Am*. Apresentaremos as três construções, com suas respectivas justificativas, bem como trechos das discussões ocorridas durante a construção e as hipóteses que podemos estabelecer diante dessas discussões.

Marina*: O segmento AC, a gente vai construir em cima dele. [Refere-se à semirreta-suporte Am.]*

Fábio*: Exato. É a reta-suporte. O que a gente pode fazer agora? Eu estava pensando em ir pelo lado da transferência de segmentos. Mas a gente vai transladar até aonde?*

Marina*: E se a gente fizesse assim: pegasse essa mesma medida e traçasse aqui para essa suporte? [Refere-se a traçar um segmento BC congruente a* $\overline{AB}$*.]*

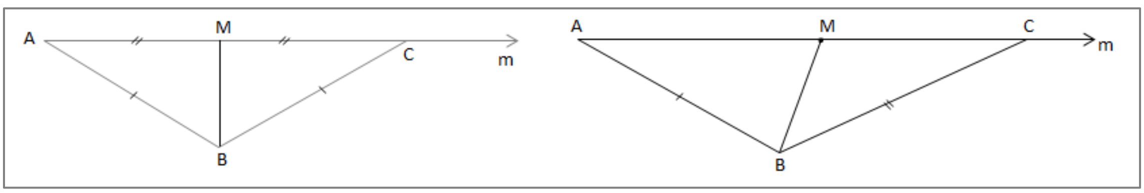
Fábio*: Mas é isso que eu tô falando. Se a gente for fazer a transferência de segmentos, a gente não tem como explicar porque colocar esse segmento aqui. Seria aleatório. Aí não tem como a gente ligar. Tem que fazer uma coisa que sirva para todos. Aí eu pensei em construir assim: prolongar primeiro Am criando o ponto C de modo que AM seja igual a MC. Aí a gente liga, entendeu? Divide e vai por congruência de triângulos. Porque a gente vai ter, ó, esse lado igual a esse. Esses lados são congruentes.*

Marina*: A gente não pode vir com mesma medida da diagonal, porque quem são iguais são os lados e não a diagonal. A gente vai ter que construir então um AM menor ou igual a AB.*

Fábio*: Na verdade vai ser menor, porque uma diagonal não pode ser menor que um lado. [Refere-se à metade da diagonal.]*

Por meio da apreensão perceptiva, o aluno acredita que o seu procedimento permite construir um triângulo isósceles. Porém, dependendo do ponto *M* tomado, o triângulo construído pode não ser isósceles. A Figura 77 corresponde às possibilidades de construções associadas à técnica sugerida por ***Fábio***.

Figura 77. Conjecturas da dupla Fábio e Marina referentes à tarefa 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Conjecturamos que as tentativas de obtenção do ponto M possibilitaram aos alunos observar que, por esse caminho, a mediana $\overline{BM}$ não seria necessariamente perpendicular a $\overline{AC}$, isto é, o triângulo não seria necessariamente isósceles. As próximas falas evidenciam que os alunos percebem que devem obter um ponto M em $\overline{AC}$ tal que $\overleftrightarrow{BM}$ seja mediatriz de $\overline{AC}$.

Marina*: Não. O segmento que a gente vai tomar aqui está preso nessa semirreta, entendeu? Agora o que a gente vai construir,* $\overline{AC}$*, tem que ser perpendicular, não é? Tem que ser perpendicular.*

Marina*: E se a gente pegar com essa medida aqui, ó? [Refere-se à medida de* $\overline{AB}$*.]*

Fábio*: Ah! Então a gente vai pegar a medida de* $\overline{AB}$*, fixando em B, e transferir essa medida de modo que se interseccione com...*

Marina*: Com a semirreta Am. Aí, pronto, agora...*

Fábio*: É isso mesmo. Mas isso aqui eu coloquei aleatório. A gente fez um triângulo isósceles. Os ângulos da base são iguais.*

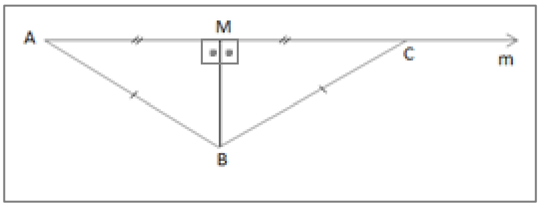
Os alunos continuam tentando construir o losango levando em consideração a congruência dos lados. No decorrer da discussão, percebemos que, intuitivamente, eles percebem a necessidade de construir um segmento *BM* que é perpendicular à reta *AC*, mas não fazem referência às caracterizações do losango que foram institucionalizadas.

Marina*: Aí você divide esse segmento [o segmento AC].*

Fábio*: A sua altura é perpendicular à base, que é considerada também... Espere aí... É isso mesmo. Preste atenção. Aqui é um triângulo isósceles. Ele tem os ângulos da base iguais, a altura é perpendicular à base e é também bissetriz, não é isso? E, então, esse ângulo vai ser igual a esse, esse é igual a esse e esse é igual a esse [refere-se aos ângulos da base* $\hat{A}$ *e* $\hat{C}$ *do triângulo isósceles ABC, aos ângulos retos formados pela pelo segmento BM com o lado* $\overline{AC}$ *do losango e com os ângulos que BM forma com os lados do losango]. E já pode provar que esses triângulos são iguais. Agora a gente constrói um triângulo em cima desse.*

A situação a que os alunos se referem está representada na Figura 78.

Figura 78. Conjecturas da dupla Fábio e Marina referentes à tarefa 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

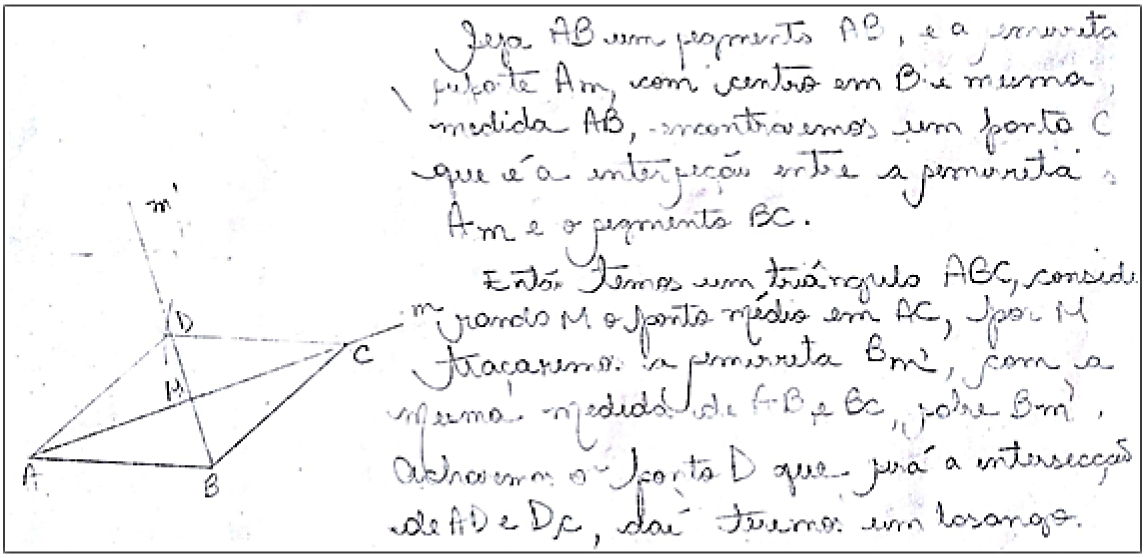
O diálogo dos alunos nos permite afirmar que pretendiam concluir sobre a congruência entre os triângulos *ABM* e *BMC* utilizando equivocadamente a congruência dos ângulos. No entanto, abandonam esse raciocínio. Como o lado $\overline{BC}$ foi construído congruente a $\overline{AB}$, a demonstração dessa congruência é desnecessária.

Os alunos partem para a construção do triângulo *ADC*, simétrico de *ABC* em relação à semirreta *AC*. Durante a discussão, evidenciam que utilizariam a propriedade da mediatriz de um segmento para justificar sua construção:

***Marina**: Tomando essa reta aqui [mediatriz de $\overline{AC}$] já é uma mediatriz, não é?*
***Fábio**: É. A gente vai falar aqui do ponto médio. Então ligando o ponto médio [de $\overline{AC}$], já é perpendicular.*
***Marina**: Tem várias formas de provar.*

No entanto, ao redigirem, os alunos não utilizam as propriedades da mediatriz como argumentos para construir uma demonstração, como constatamos na justificativa representada na Figura 79.

Figura 79. Produção da dupla Fábio e Marina referente à tarefa 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos afirmam, recorrendo à apreensão perceptiva, que o ponto *D* obtido da interseção dos arcos construídos com centros em *A* e *C*, respectivamente, e raio de medida igual à medida de $\overline{AB}$ está sobre a mediatriz $\overleftrightarrow{BM}$. Eles não recorrem à propriedade da mediatriz para fazer a justificativa. Como foi utilizado um argumento baseado na apreensão perceptiva, não podemos considerar a prova dos alunos como uma demonstração, e sim como uma prova pragmática.

O relato dos alunos com relação à construção do triângulo *ADC* durante a socialização confirma nossa análise:

***Fábio**: A gente traçou uma semirreta de origem em B passando pelo ponto médio de AC. Pegamos o compasso fixando em A, de medida AB e fizemos um semiarco de modo a interceptar a semirreta-suporte Bm. Do mesmo jeito tomamos o compasso com centro em C e* *fizemos um semiarco. A interseção deu o ponto D. A gente justificou pela definição de losango que todos os lados são congruentes. Logo, é um losango.*

No texto e na socialização da tarefa, os alunos mostram ter validado sua construção por meio de argumentos empíricos, ao passo que na discussão utilizam a propriedade da mediatriz para justificar sua construção. Comparando as falas desses alunos com o texto e a socialização que realizamos, observamos que, embora a técnica de construção utilizada seja válida, os alunos não acham necessário justificar o que está aparentemente evidente na representação figural e nos passos da construção. Esta constatação reforça os resultados de pesquisas como as de Duval (2012), Jahnke (2008) e De Villiers (2001), que constataram que os alunos não sentem necessidade de justificar aquilo que fica evidente na representação figural.

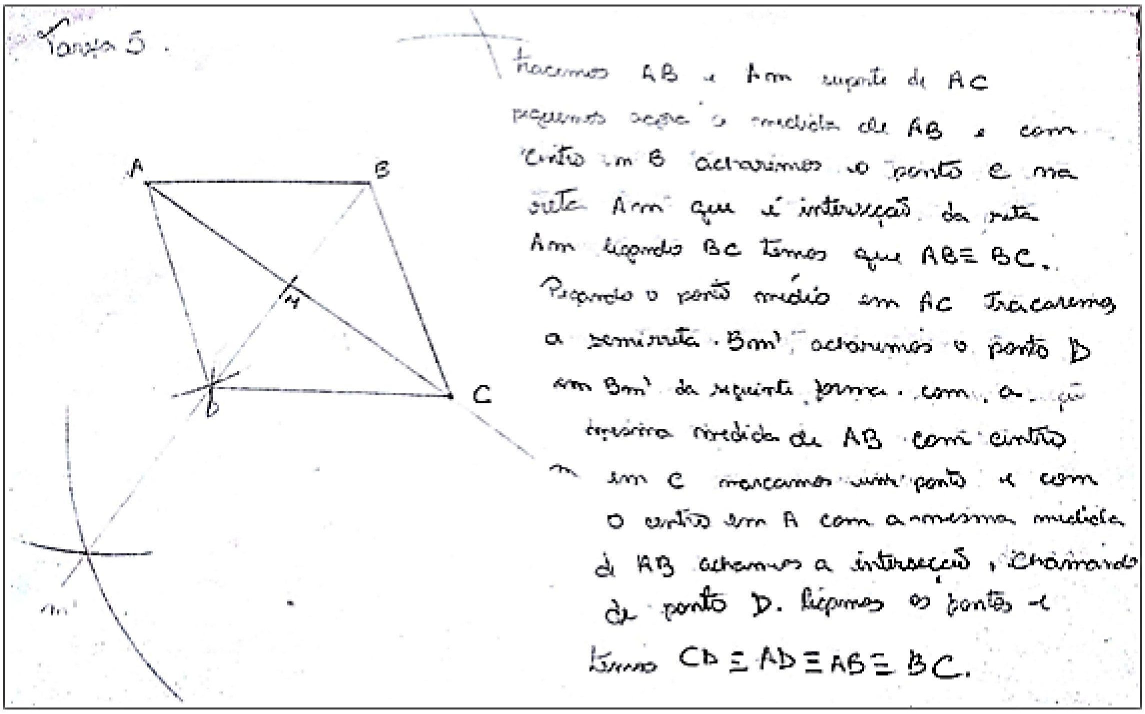
Notamos no diálogo que a função de explicação proposta por De Villiers (2001) foi contemplada na prova de ***Marina*** e ***Fábio*** e que esta dupla, apesar de utilizar argumentos empíricos em seu texto, busca generalizar sua técnica. Nossa afirmação é reforçada pelo discurso do aluno: *"A gente não tem como explicar porque colocar esse segmento aqui. Seria aleatório. Aí não tem como a gente ligar. Tem que fazer uma coisa que sirva para todos".*

A dupla ***Bruna*** e ***Camila*** empregou uma técnica semelhante à utilizada pela dupla ***Marina*** e ***Fábio***. Analisemos um trecho da discussão e o texto apresentado pela dupla:

Bruna*: A gente não tem que mostrar que é losango?*
Camila*: É.*
Bruna*: Se a gente quer mostrar que é um losango, os lados têm que ser iguais. Mas se isso daqui também for mediatriz – não é isso? –, aí a gente sabe que esses pontos daqui são equidistantes, aí a gente já mostra que esses dois lados são iguais também.*
Camila*: Agora a gente tem que escrever...*

O diálogo das alunas apresenta indícios de que a dupla mobilizou conhecimentos sobre a propriedade da mediatriz para validar sua construção. Analisaremos o texto apresentado (Figura 80), para verificar se a dupla transformou as características da mediatriz em argumentos para validar sua técnica.

Figura 80. Produção da dupla Camila e Bruna.



Fonte: Dados da pesquisa.

Embora a dupla tenha se referido à mediatriz na discussão, não cita este objeto e não apresenta nenhuma justificativa matemática, mas sim passos da construção, como se estes, associados à figura, fossem suficientes para justificar a técnica utilizada. Podemos observar no registro escrito (Figura 80) e na fala de ***Bruna*** que a dupla, embora tenha intuitivamente utilizado a caracterização de losango institucionalizada na tarefa anterior (relativa às diagonais) para construir o losango, fundamentou sua justificativa na congruência dos lados deste quadrilátero.

A redação feita pela dupla ***Camila*** e ***Bruna*** (Figura 80) evidencia que a apreensão sequencial, guiada pela apreensão perceptiva, foi mobilizada. A representação figural fornecida pela dupla não explicita nenhuma característica das diagonais do losango (diagonais perpendiculares e que se interceptam em seus pontos médios), embora as alunas tenham utilizado essa propriedade na construção, como evidencia o diálogo apresentado. O conhecimento sobre simetria axial ou as características de mediatriz não foram convertidos em argumentos para generalizar a técnica utilizada. Consequentemente, o texto apresentado não é uma demonstração. Como há uma conclusão de que os lados da figura construída são congruentes por meio de um único exemplo, podemos classificar a validação proposta como uma prova pragmática.

Constatamos a função de explicação, segundo De Villiers (2001), quando a dupla justifica verbalmente sua construção. No entanto, ao comunicar sua justificativa em registro escrito, observamos apenas uma tentativa de convencer o interlocutor por meio de argumentos empíricos, como se estes fossem mais convincentes que os argumentos matemáticos. De Villiers (2001) afirma que, em alguns casos, um alto grau de convicção pode ser atingido sem que a demonstração seja realizada e que essa convicção pode ser alcançada com verificações empíricas. Observamos que a dupla recorreu à propriedade da mediatriz como uma técnica para construir o losango, mas o convencimento foi alcançado com a congruência dos lados obtida por instrumentos de construção geométrica.

A dupla ***Gustavo*** e ***Hugo***, por sua vez, apresentou duas construções, cada uma utilizando uma técnica distinta. Semelhantemente às outras duplas, esses alunos iniciaram construindo um triângulo isósceles *ABC*. Segue-se o trecho em que é explicitada a construção de *ACD*:

Gustavo*: Se AB = BC... Como no triângulo isósceles a mediatriz é altura do triângulo e é a bissetriz dos ângulos, aí o que foi que eu fiz? Eu peguei o ângulo BAM e coloquei do lado de fora, porque no losango a diagonal tem esse papel da bissetriz...*

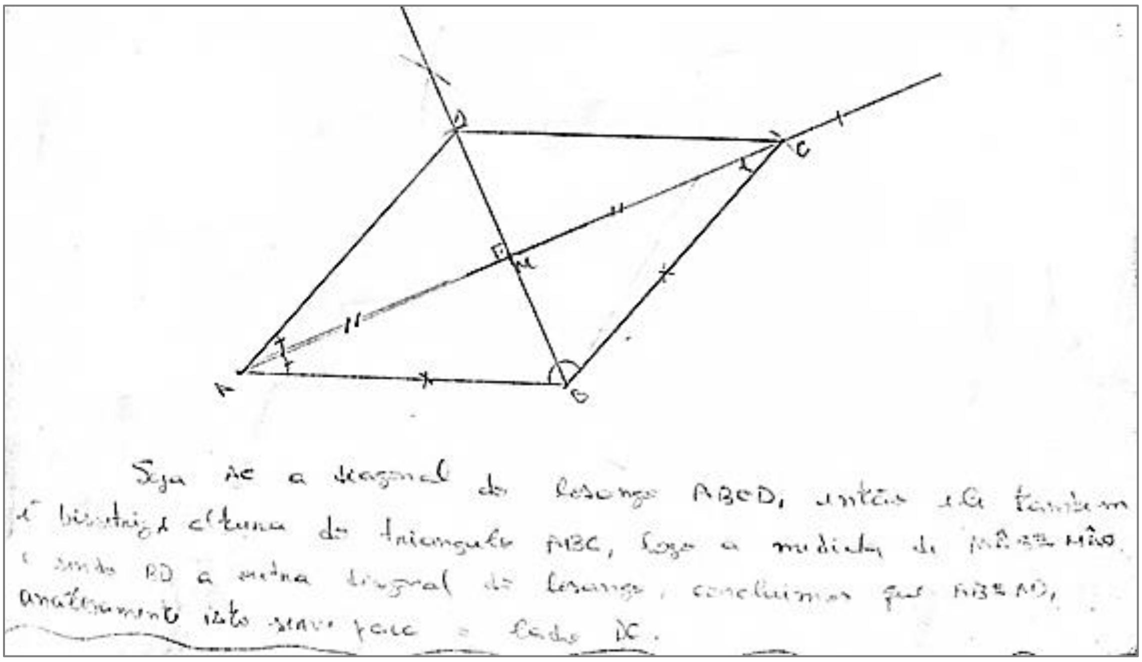
Hugo*: Eu fiz pela mediatriz.*

Gustavo: *A gente tem o triângulo ABC. A gente tem que tentar fazer um outro triângulo igual a esse, só que do lado de cá. Como a diagonal do losango ela dividiu o losango em dois triângulos, faz a mediatriz do segmento AC, depois constrói um ponto D tal que BM é igual a MD...*

A Figura 81 mostra a construção feita pela dupla utilizando a técnica de ***Gustavo***.

No registro escrito apresentado por ***Gustavo*** (Figura 81) para a construção do triângulo *ADC* consta que se as diagonais de um quadrilátero estão contidas nas bissetrizes de seus ângulos, então esse quadrilátero é um losango. No entanto, a propriedade institucionalizada na atividade anterior foi que se um quadrilátero é um losango, então as diagonais estão contidas nas bissetrizes de seus ângulos e, para a construção, foi considerada a sua recíproca.

Figura 81. Construção apresentada pela dupla Gustavo e Hugo.[11]



Fonte: Dados da pesquisa.

Outro equívoco identificado foi o uso da tese como hipótese: o aluno inicia o texto afirmando que o quadrilátero construído já é um losango, que era o que pretendia provar.

Heinze, Cheng e Ufer (2008, p. 3) listam quatro condições que consideram fundamentais ao redigir uma demonstração, entre elas: (1) *compreender a informação dada* e (2) *reconhecer os elementos cruciais (argumento, premissa, conclusão) que associam as propriedades necessárias para a dedução*. No texto apresentado por ***Gustavo*** (Figura 81), esses aspectos não foram contemplados: o aluno teve dificuldade em interpretar as condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja losango e utilizou a tese (o fato de *ABCD* ser um losango) para provar a própria tese. Logo, o texto apresentado não é uma demonstração.

Quanto ao registro figural, podemos observar que, na reconfiguração apresentada, o objeto matemático mediatriz foi utilizado na construção, mas os alunos não recorreram a esse objeto para justificá-la matematicamente, não havendo coordenação entre o registro figural e o texto apresentado. Desse modo, há indícios de que o texto produzido não foi apoiado na interpretação discursiva da figura apresentada.

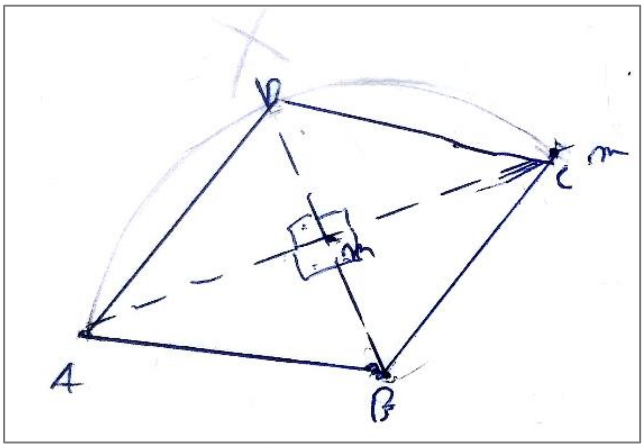
---

[11] Transcrição:
Seja AC a diagonal do losango ABCD, então ele também é bissetriz e altura do triângulo ABC, logo a medida de MÂB ≡ MÂD e sendo BD a outra diagonal do losango, concluímos que AB = AD, analogamente isto serve para o lado DC.

Embora o aluno não tenha obtido sucesso na validação da técnica empregada, sua construção nos permitiu discutir a validade da técnica, interpretar condições necessária e suficiente e conjecturar sobre a validade da recíproca da propriedade institucionalizada na tarefa 4 (as semirretas-suporte das diagonais do losango são bissetrizes de seus ângulos). A mobilização desses conhecimentos foi induzida pela escolha feita nesta tarefa (construir um losango a partir de um lado e a semirreta-suporte de uma diagonal).

A dupla ***Gustavo*** e ***Hugo*** apresentou a segunda construção (Figura 82), segundo a técnica utilizada por este último, mas não redigiu nenhum tipo de texto. ***Hugo*** apresentou verbalmente a técnica utilizada no momento da socialização.

Figura 82. Segunda construção apresentada pela dupla Gustavo e Hugo.



Fonte: Dados da pesquisa.

Observemos o relato apresentado por ***Hugo***:

Hugo*: Com centro em B e com mesmo raio AB, traça uma circunferência e o ponto de interseção dela com a semirreta é o ponto C. Depois, traça uma mediatriz de* $\overline{AC}$ *de modo que a interseção da mediatriz com a circunferência é o ponto D.*

Pesquisadora*: Como você justifica que ABCD é um losango?*

Hugo*: Porque tomei BM na mesma semirreta [a mediatriz] igual a MD. Então são iguais [refere-se aos segmentos obtidos pelo ponto médio nas diagonais] e são perpendiculares.*

A fala mostra que o aluno considerou, para sua construção, que se um quadrilátero possui diagonais perpendiculares que se interceptam em seus pontos médios, então esse quadrilátero é losango. No entanto, não estava certo da obtenção do ponto *D*. Para que pudéssemos compreender como este ponto foi obtido, questionamos:

Pesquisadora*: Inicialmente você disse que o ponto D seria a interseção da mediatriz de* $\overline{AC}$ *com a circunferência, agora você tomou um ponto D na mediatriz de* $\overline{AC}$ *tal que BM = MD. Dos dois modos obteremos o mesmo ponto D?*

Hugo*: Vai coincidir... Isso... Mas eu fiz desse modo: BM = MD. Mas coincide.*

***Pesquisadora**: Vamos ver se coincide?*
***Hugo**: Coincide porque o ponto D é equidistante de A e C.*

Por meio de conjecturas, o aluno percebeu que todos os pontos da mediatriz são equidistantes de *A* e *C*, e não apenas o ponto *D*, quarto vértice do losango. Portanto, esta justificativa não valida que *AD* = *AB*.

O problema forneceu um segmento *AB* e uma semirreta *Am*, suporte da diagonal $\overline{AC}$. Observamos que na representação feita pelo aluno, a medida do ângulo formado por *Am* e $\overline{AC}$ foi de 30º, o que conduziu a construção a um caso particular em que o losango é obtido a partir de dois triângulos equiláteros, ou seja, uma das diagonais do losango tem a mesma medida do lado. Desse modo, *AB* = *BD* = *AC*, pois são raios da circunferência e, portanto, o ponto *D* coincide nas duas construções. Esse caso, porém, não é geral. Uma vez que a justificativa foi baseada em um caso particular, o relato corresponde a uma prova pragmática.

A outra forma de obtenção do ponto *D* apresentada pelo aluno nos permite concluir que, ao realizar a construção, o vértice *D* foi obtido de modo a ser equidistante de *B* em relação ao ponto *M* e $\overline{BD}$ ser perpendicular a $\overline{AC}$. Logo, o aluno construiu um paralelogramo de diagonais perpendiculares e, pela caracterização de losango institucionalizada na tarefa 4, *ABCD* é um losango.

Não foi contemplada a função de comunicação, segundo De Villiers (2001). Conjecturamos que a falta do registro escrito para comunicar sua justificativa pode ter contribuído para que o aluno tirasse conclusões a partir da apreensão perceptiva. Ao observar a figura, o aluno não estava certo da obtenção do ponto *D*. Como apontado por Duval (2012), uma mesma figura pode ilustrar situações geométricas diferentes. Na construção de ***Hugo***, cada forma de obtenção do ponto *D* induz a uma situação geométrica diferente e, consequentemente, deverão ser consideradas hipóteses diferentes. Uma forma de obtenção implica uma prova pragmática, enquanto a outra valida a construção.

Considerações sobre a tarefa 5

Em nossa análise *a priori*, previmos que os alunos poderiam recorrer às propriedades institucionalizadas para justificar sua construção e que poderiam utilizar a congruência de triângulos e a propriedade da mediatriz. Embora as construções apresentadas não utilizassem explicitamente as condições necessárias e suficientes sobre as diagonais do losango em suas justificativas, as discussões indicaram que intuitivamente os alunos buscavam o ponto médio e a perpendicularidade entre as diagonais para construírem o losango.

Observamos que o significado de semirreta foi uma das dificuldades dos alunos para iniciar a construção. Este conceito necessitou de esclarecimento para que eles realizassem a tarefa.

A análise das produções mostra que as funções de explicação e de verificação/convencimento (DE VILLIERS, 2001) foram observadas nos diálogos e registros escritos.

Identificamos também que os alunos utilizam termos inadequados ao expressar oralmente suas ideias, o que acontece menos frequentemente nos registros escritos.

Outro fato que merece destaque é a ausência de utilização de técnicas envolvendo simetria axial. Em nenhum momento os alunos recorrem a propriedades de simetria axial para justificar suas construções, embora a utilizem em alguns casos intuitivamente, como na construção do triângulo *ADC* simétrico de *ABC* em relação à semirreta *Am*. Neste caso, um aluno afirma que *"Agora a gente constrói um triângulo em cima desse..."*. A não utilização das propriedades de simetria axial provavelmente se deve à não incorporação desse tema no currículo e nas práticas docentes. Nossa afirmação é reforçada por Nasser e Tinoco (2008) quando afirmam que, até pouco tempo, o estudo das isometrias, de modo geral, não fazia parte do currículo do ensino fundamental e as pesquisas em educação matemática têm contribuído para mudar esse quadro.

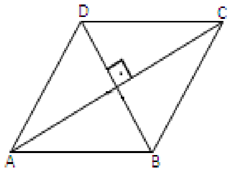
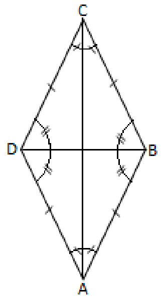
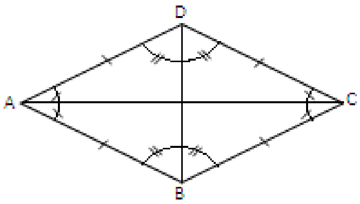
Alguns avanços observados na tarefa 4, como a redação de uma demonstração e a interpretação correta da hipótese e da tese, não foram observados na tarefa 5.

. Os diálogos e as produções dos alunos comprovam que as fases da teoria das situações (ação, formulação e validação) foram vivenciadas. A escolha feita (construção do losango a partir de um lado e uma diagonal) provocou a mobilização de conhecimentos sobre mediatriz de um segmento, congruência de triângulos, triângulo isósceles e propriedade das diagonais do losango.

Encerramos esta atividade corrigindo os equívocos e institucionalizando a seguinte caracterização do losango: *Um quadrilátero é losango se, e somente se, suas diagonais estão contidas nas bissetrizes de seus ângulos.*

O Quadro 22 apresenta nos três registros de representação uma caracterização do losango e as propriedades institucionalizadas.

Quadro 22. Propriedades institucionalizadas nas tarefas 3, 4 e 5.

REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL	REGISTRO FIGURAL	REGISTRO SIMBÓLICO
Um paralelogramo é losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares.		*ABCD* é losango ⇔ *ABCD* é paralelogramo e $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
Se um quadrilátero é losango, então suas diagonais estão contidas nas bissetrizes de seus ângulos.		*ABCD* é losango ⇒ $D\hat{C}A \equiv A\hat{C}B, C\hat{B}D \equiv D\hat{B}A, B\hat{A}C \equiv C\hat{A}D$ e $A\hat{D}B \equiv B\hat{D}C$
Se as diagonais de um quadrilátero estão contidas nas bissetrizes de seus ângulos, então esse quadrilátero é losango.		*ABCD* quadrilátero e $D\hat{C}A \equiv A\hat{C}B, C\hat{B}D \equiv D\hat{B}A, B\hat{A}C \equiv C\hat{A}D$ e $A\hat{D}B \equiv B\hat{D}C$ ⇒ *ABCD* é losango.

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao finalizar as tarefas 3, 4 e 5, observamos que os objetivos para elas estabelecidos foram cumpridos. Os alunos recorreram à apreensão sequencial para a construção da figura que representa o losango solicitado e para validar suas construções. Percebemos também avanços na redação das demonstrações exigidas nas diferentes situações. Em alguns casos foram necessários esclarecimentos de alguns elementos geométricos, como semirreta-suporte e mediatriz de um segmento.

As escolhas feitas permitiram mobilizar conhecimentos sobre congruência e mediatriz de um segmento e foram imprescindíveis para institucionalizar as principais propriedades previstas em nossa análise *a priori*.

Destacamos que a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica provocou um avanço no processo de apropriação de conhecimentos/saberes sobre o objeto matemático em jogo. Os alunos confundiam o losango com sua representação, o que se reflete nas seguintes falas: *"O losango é que nem o quadrado com medidas iguais"*; *"Só que oblíquo"*; *"Onde tem uma diagonal maior e uma menor"*. Isso ocorre, segundo Duval (2011), quando não há coordenação entre os registros.

As definições e propriedades dos quadriláteros institucionalizadas até o momento foram representadas nos três registros de representação: em língua natural, simbólico e figural. Há indícios de que isso contribuiu para que os alunos não recorressem às características de um exemplo particular de losango como *uma diagonal maior e outra menor* para identificar este quadrilátero. Em nenhuma das tarefas referentes a losango os alunos construíram uma figura que representasse um losango quadrado. Para validar suas construções, recorreram a atributos que caracterizam um losango qualquer, como lados congruentes e diagonais perpendiculares que se interceptam em seus pontos médios.

Tarefa 6

Com esta tarefa, objetivamos construir uma figura que representa um retângulo utilizando instrumentos de construção geométrica.

Visamos que o aluno perceba a relação que existe entre o paralelogramo, o retângulo e o quadrado a partir de seus processos de construção. Fizemos escolhas que devem interferir nos processos de construção das figuras que representam esses objetos matemáticos. Por exemplo, a forma de construção de uma figura que representa um retângulo é uma variável didática local que deverá ser controlada de modo a induzir os alunos a utilizarem estratégias convenientes que lhes possibilitem perceber e justificar suas construções.

A seguir apresentaremos a tarefa e, na análise *a priori*, as consequências de nossas escolhas.

Tarefa 6. Construir um retângulo.

Construir uma figura que representa um retângulo adotando os seguintes passos:

a) Crie um segmento $\overline{AB}$.

b) Construa a reta *r*, perpendicular a $\overline{AB}$ passando por *A*. Crie um ponto *D* na reta *r*.

c) Construa a reta *s* passando por *D* e paralela à reta $\overline{AB}$.

d) Construa a reta *t* passando por *B* e paralela à reta $\overline{AD}$.

e) Construa o ponto *C*, intersecção das retas *s* e *t*.

f) O quadrilátero *ABCD* é um retângulo? Justifique sua resposta.

Análise *a priori* da Tarefa 6

Nesta tarefa foram fornecidos os passos para a construção do retângulo e solicitou-se a justificativa de que a figura construída representa um retângulo. Pensamos na seguinte técnica para a construção solicitada:

Técnica. Utilizar par de esquadros ou régua e compasso e justificar utilizando o teorema da existência da reta perpendicular e o teorema das paralelas.

Na Figura 83, representamos o retângulo construído seguindo a técnica utilizada.

Figura 83. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 6.

Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

Análise *a priori* da tarefa 6

A validação de que o quadrilátero *ABCD* é um retângulo poderá ser alcançada ao justificar que, por construção esse quadrilátero é um paralelogramo ($t//r$ e $s//\overleftrightarrow{AB}$) que possui um ângulo reto ($r\perp\overleftrightarrow{AB}$). O aluno também poderá validar sua construção adotando os seguintes argumentos: ao construir a reta *r*, perpendicular a $\overline{AB}$ por A (existência e unicidade da perpendicular), garantimos que $\overline{AD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e Â é reto; ao construir a reta *s*, paralela a $\overline{AB}$ e passando por D (axioma das paralelas), garantimos que o ângulo $\widehat{D}$ é reto (teorema das paralelas); a paralela *t*, passando por *B* tal que *t* é paralela a $\overline{AD}$, garante que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos retos (teorema das paralelas). Logo, *ABCD* é um quadrilátero com quatro ângulos retos; portanto, um retângulo.

Pelo passo *b* do enunciado da tarefa, temos que $r\perp\overleftrightarrow{AB}$, o que garante que o ângulo $\hat{A}$ é reto.

Caso os alunos relacionem os passos da construção (hipóteses do problema) com a figura, percebendo a possibilidade do uso do teorema das paralelas, ou expliquem que *ABCD* é um paralelogramo que possui um ângulo reto, realizarão a interpretação discursiva da figura e estarão validando o caso geral.

Existe a possibilidade de tomar o ponto D tal que $DA = AB$ Neste caso, o quadrilátero construído será um quadrado e os alunos poderão conjecturar que o quadrado é um retângulo. Além da relação entre o quadrado e o retângulo, pretendemos provocar uma discussão que leve o aluno a validar as relações entre o retângulo e o paralelogramo (que todo retângulo é um paralelogramo) já conjecturadas na primeira etapa da sequência.

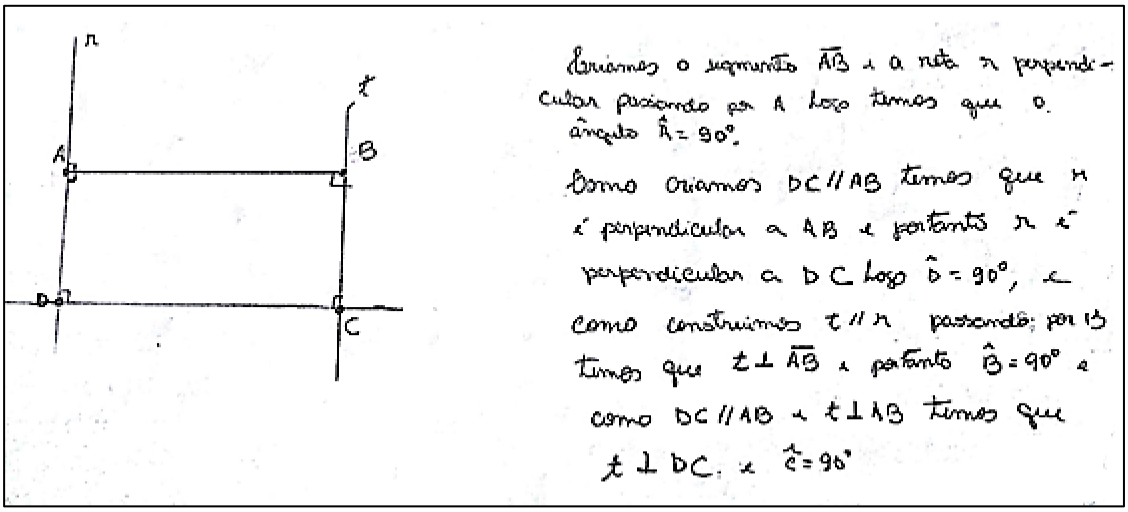
Institucionalizaremos que todo retângulo é paralelogramo e todo quadrado é retângulo.

Bloco tecnológico-teórico: Definições de retas paralelas, retas perpendiculares e retângulos; axioma das paralelas; teorema da existência da perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado; teorema das paralelas. Para que o aluno possa dar início à resolução da tarefa 6, precisará apenas seguir os passos contidos no enunciado do problema. Para a justificativa, poderá utilizar o teorema da existência e unicidade da perpendicular e o teorema das paralelas.

Experimentação e análise *a posteriori* da tarefa 6

Esta tarefa não apresentou nenhum tipo de empecilho e, portanto, não gerou muitas discussões. Apresentaremos as produções das duplas e suas respectivas análises.

Figura 84. Produção de Camila e Bruna referente à tarefa 6.



Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 84 mostra a construção feita pela dupla ***Camila*** e ***Bruna***. As alunas justificaram a perpendicularidade das retas-suporte dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ recorrendo ao paralelismo de $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ e ao fato de r ser perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. No entanto, as alunas não deixaram claro se estavam utilizando o teorema das paralelas. Seu diálogo evidencia que não estavam seguras de como concluíram sobre a perpendicularidade das retas.

Camila*: Só sabemos a definição de retângulo, que tem que ser 90º. Deu um ângulo de 90º. Agora a gente tem que provar.*

Bruna*: Deu a hipótese de que r é perpendicular a AB. Como AB é paralela a CD, então r é perpendicular a CB... E é?*

Camila*: É.*

Bruna*: Mas tem que escrever. Mas não é isso mesmo?*

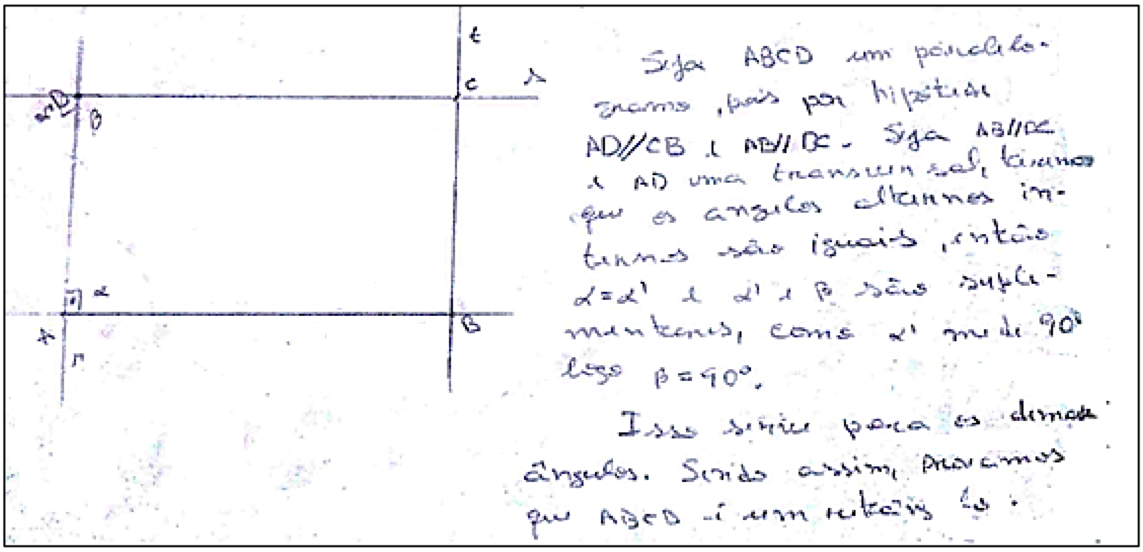
As alunas estavam certas de que teriam que demonstrar a perpendicularidade entre os lados do quadrilátero *ABCD* e estavam seguras de suas hipóteses: a perpendicularidade entre a reta *r* e o segmento *AB* e o paralelismo entre os segmentos *AB* e *CD*. Apesar de não revelarem segurança em suas conclusões, que foram conduzidas pela apreensão perceptiva, as alunas concluíram sobre a perpendicularidade entre a reta *r* e o segmento *CB*. Desse modo, a prova apresentada pela dupla pode ser classificada como pragmática.

Outras pesquisas, como a de Mello (1999), relatam a influência exercida pela aparente posição de retas horizontais e verticais que sugerem um ângulo reto. Neste caso, o ângulo é, de fato, um ângulo reto, mas esperávamos que os alunos recorressem à apreensão discursiva para justificar sua afirmação.

Os demais grupos apresentaram uma justificativa matemática para a construção. Para tanto, conforme previmos na análise *a priori*, recorreram ao teorema das paralelas. A existência da perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado não foi justificada, o que também estava previsto. Todos os alunos recorreram à apreensão perceptiva e não sentiram necessidade de justificar essa construção.

Nas figuras a seguir apresentamos os registros escritos das demais duplas.

Figura 85. Produção de Gustavo e Hugo referente à tarefa 6.

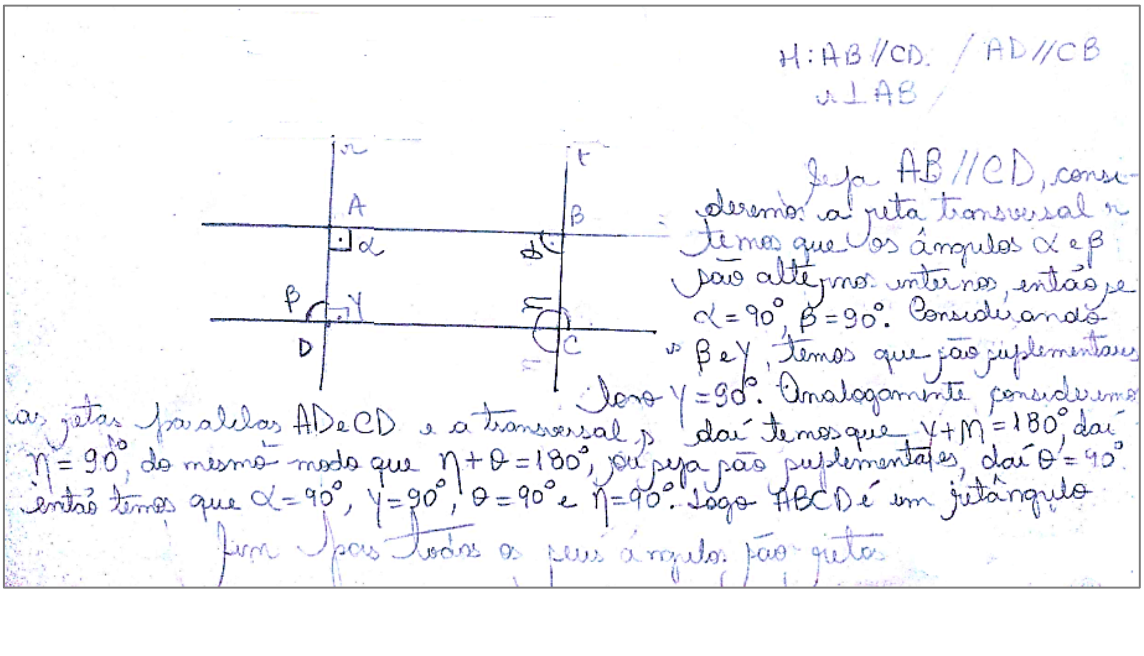


Fonte: Dados da pesquisa.

Destacamos que na demonstração apresentada na Figura 85, o registro escrito permite afirmar que o quadrilátero *ABCD* é um paralelogramo que possui um ângulo reto. Estes argumentos seriam suficientes para que os alunos concluíssem que a figura construída representa um retângulo. Entretanto, a dupla utilizou reconfigurações pertinentes, aplicou o teorema das paralelas e conseguiu produzir uma demonstração.

A dupla ***Fábio*** e ***Marina*** apresentou a construção (Figura 86) e a justificou matematicamente utilizando também o teorema das paralelas. Os alunos também perceberam e aplicaram a reconfiguração que possibilitou aplicar o teorema das paralelas e concluir que o paralelogramo construído é retângulo.

Figura 86. Produção da dupla Fábio e Marina referente à tarefa 6.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nos registros apresentados, além da função de verificação, foram contempladas as funções de explicação, sistematização e comunicação, propostas por De Villiers (2001), visto que duas demonstrações explicaram por que o quadrilátero é retângulo, sistematizaram logicamente suas ideias e apresentaram registros escritos.

Considerações sobre a Tarefa 6

Na realização desta tarefa, os alunos evidenciaram ter o conhecimento de retas paralelas, de retas perpendiculares e de retângulo. Nenhum dos grupos mostrou dificuldade em seguir os passos para a construção do retângulo e todos responderam corretamente que o quadrilátero *ABCD* construído era um retângulo.

Quanto às justificativas apresentadas, um grupo recorreu à apreensão perceptiva para concluir sobre a perpendicularidade entre os lados do quadrilátero *ABCD*, realizando assim uma prova pragmática. Duval (2012, p. 120) afirma que "a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado" e, na figura construída, as retas horizontais e verticais se destacam formando ângulos retos, o que pode fazer com que a apreensão perceptiva sobrepuje a apreensão discursiva.

Dois grupos realizaram a demonstração que validou a afirmação de que *ABCD* representava um retângulo. Notamos que os alunos articularam as apreensões perceptiva e discursiva e acreditamos que a congruência semântica entre o que se pretendia demonstrar e o registro figural pode ter colaborado para o êxito dessa tarefa.

Observamos também um avanço na redação da demonstração, uma vez que nenhuma dupla utilizou a tese como hipótese do problema, duas duplas fundamentaram suas justificativas com argumentos matematicamente válidos e organizados logicamente.

Observamos também avanço com relação aos conhecimentos geométricos. Baseamos nossa afirmação no fato de que na primeira etapa alguns alunos confundiam o retângulo com sua apresentação.

Institucionalizamos a tarefa reafirmando a relação entre retângulo e paralelogramo: *Todo retângulo é paralelogramo*

Tarefas 7, 8 e 9

Objetivos: Com as tarefas 7, 8 e 9, objetivamos construir uma figura que representa um quadrado utilizando instrumentos de construção geométrica e discutir as condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja quadrado e as condições para que o losango e o retângulo sejam quadrados, a partir das estratégias utilizadas pelos alunos em sua construção.

Para a tarefa 7, escolhemos que a figura que representa o quadrado fosse construída a partir de um de seus lados; na tarefa 8, a construção da figura que representa o quadrado é feita a partir de um de seus lados inscrito em uma circunferência; na tarefa 9, a escolha feita foi construir a figura que representa o quadrado a partir de uma das diagonais, sendo fornecido um procedimento para sua construção.

Cada valor atribuído à variável local determinará de modo único um quadrado, mas induzirá à utilização de diferentes estratégias de construção e, consequentemente, à mobilização de diferentes conhecimentos para justificar matematicamente a técnica utilizada.

Tarefa 7: Construção de um quadrado a partir de um lado.

Construir um quadrado adotando os seguintes passos:

a) Crie um segmento $\overline{AB}$.

b) Construa a reta *m* perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e passando por B.

c) Construa a circunferência *c* de centro *B* e passando por *A*. Nomeie como *D* uma das intersecções de *m* e *c*.

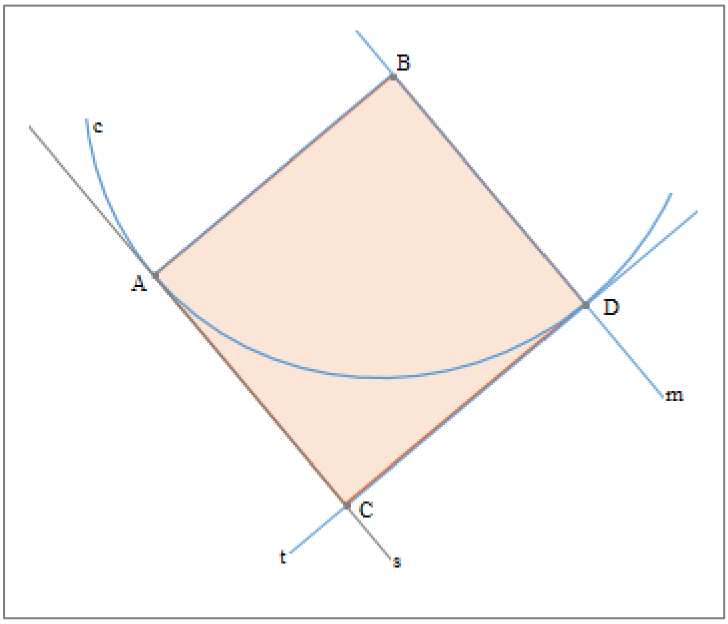
d) Construa as retas *s* e *t* passando por *A* e *D*, respectivamente perpendiculares ao segmento $\overline{AB}$ e à reta *m*. Nomeie como *C* a intersecção de *s* e *t*.

e) *ABDC* representa um quadrado de lado $\overline{AB}$? Justifique.

Análise *a priori* da Tarefa 7

Ao representar o lado do quadrado, os alunos deverão construir os demais lados desse quadrilátero. Apoiados na apreensão sequencial, os alunos deverão interpretar os passos fornecidos e construir o retângulo aplicando a seguinte técnica: acompanhar o roteiro de construção descrito no enunciado, que permite a construção aqui mostrada na Figura 87.

Figura 87. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 7.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

Análise *a priori* da tarefa 7

Ao traçar as perpendiculares ($m \perp \overline{AB}$, $s \perp \overline{AB}$ e $t \perp m$), os alunos poderão concluir que os ângulos $\hat{B}$, $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são retos. Nesse caso, recorrerão à soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero ou ao teorema das paralelas para concluir que $A\hat{C}D$ é reto.

Ao observar que *ABCD* é um retângulo com dois lados consecutivos congruentes, ficará provado que este é um quadrado. Pelo processo de construção, os alunos poderão perceber que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ do quadrilátero *ABCD* são congruentes por se tratar de raios da mesma circunferência.

Cada conclusão alcançada pelos alunos por meio da figura pode ou não evoluir para a apreensão conceitual. Acreditamos que as tarefas já executadas induzirão os alunos a observar as hipóteses do problema relacionando-as com a figura e chegar a uma prova conceitual.

Bloco tecnológico-teórico: Definições de reta perpendicular, de circunferência, de raio, de quadrado e de retângulo; teorema da existência da perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado; teorema das paralelas; propriedades dos lados opostos do retângulo. Estes objetos e propriedades geométricos já foram contemplados em outras tarefas, o que nos faz crer que os alunos já os dominam.

Experimentação e análise *a posteriori* da tarefa 7

Todos os alunos seguiram os passos fornecidos e responderam, por meio de apreensão perceptiva, que o quadrilátero *ABCD* é um quadrado.

Ao iniciar a construção, observamos que uma das alunas percebeu a maneira de representar o quadrado com o lado paralelo à margem do papel e fez o seguinte comentário: *"Ah, eu não vou traçar o segmento AB assim, não, viu Fábio? Por isso que a professora falou que a gente procura o conforto... E os meninos só querem desenhar o quadrado nessa posição, certinho... Mas eu vou desenhar assim mesmo..."*.

Sobre esse comportamento, Nasser e Tinoco (2008) afirmam que o hábito de representar as figuras geométricas sempre regulares e simétricas, com lados paralelos às bordas do papel, pode contribuir para que seja formada uma imagem incompleta de determinado conceito. Notamos que a aluna já reflete sobre esse hábito.

Nas falas, assim como nos textos redigidos, já podemos perceber indícios dessas mudanças, como mostra este diálogo:

Marina*: A hipótese que a gente tem é que esse é perpendicular a esse. A gente não tem nada de paralelismo.*
Fábio*: É. A gente tem que provar.*
Marina*: Tem que esse e esse são perpendiculares [m e AB]. Logo, tem que esse é 90º [refere-se ao ângulo B].*
Fábio*: A gente sabe que esse [o ângulo A] também é 90º, não é? E* $med(\widehat{D})$ *também é 90º.*
Marina*: Sim.*
Fábio*: A gente só não sabe* $\hat{C}$*. Mas como a soma deles é 360º ...*
Marina*: Mas a gente não provou isso.*

Percebemos nessas falas uma preocupação em não validar suas afirmações por meio da apreensão perceptiva e de não fazer uso de teoremas que não foram demonstrados durante os encontros. Percebemos que foi uma falha não termos acrescentado em nossa caixa de ferramentas o teorema referente à soma dos ângulos internos do quadrilátero. Esse fato, associado ao destaque das retas vertical e horizontal, pode ter contribuído para que duas das demonstrações apresentadas não justificassem matematicamente o quarto ângulo reto do quadrado, e, para isso, ter recorrido à apreensão perceptiva, como podemos observar na colocação: "*Construa as retas s e t passando por A e D e respectivamente perpendiculares ao segmento AB e à reta m. Então aqui também é em pé. Aqui é perpendicular, não é*? [refere-se às retas *s* e *t*]*?"*.

Os relatos nos permitem verificar que os alunos tomam decisões, abandonam estratégias baseadas na apreensão perceptiva e tentam uma articulação com a apreensão discursiva. Notamos isso nas discussões geradas ao tentarem demonstrar a congruência dos lados do quadrilátero:

***Marina**: Então, esses já são iguais porque são raios da mesma circunferência (AB e BD). Então no caso, por semelhança de triângulos... [A aluna confunde os termos ‘congruência’ e ‘semelhança’.]*

***Fábio**: A gente tem que mostrar que AC é igual a CD.*

***Marina**: Mas como é que a gente vai mostrar que eles têm a mesma medida do raio também?*

***Fábio**: Aí é que tá...*

***Marina**: A gente não pode usar paralelismo também, não?*

***Fábio**: A gente tem que essa aqui é paralela a essa [r e m].*

***Marina**: Pode ir por semelhança de triângulos.*

***Fábio**: Só que a gente não tem nada!*

***Marina**: Tem, sim!*

***Fábio**: Como? Só os ângulos... As diagonais do quadrado são bissetrizes também?*

***Marina**: Não. Porque você não vai dizer que ele é um quadrado. Você quer provar que ele é um quadrado de lado* $\overline{AB}$.

Após sucessivas fases de ação e formulação, os alunos encontram um caminho para validar sua construção, como podemos notar neste diálogo:

***Fábio**: Quando a gente tem um quadrilátero com lados paralelos dois a dois, nós sabemos que é um paralelogramo, não é? Então a gente já sabe que é um paralelogramo. Agora, o que diferencia o quadrado? Os lados iguais e os lados perpendiculares... Os ângulos todos de* 90^o.

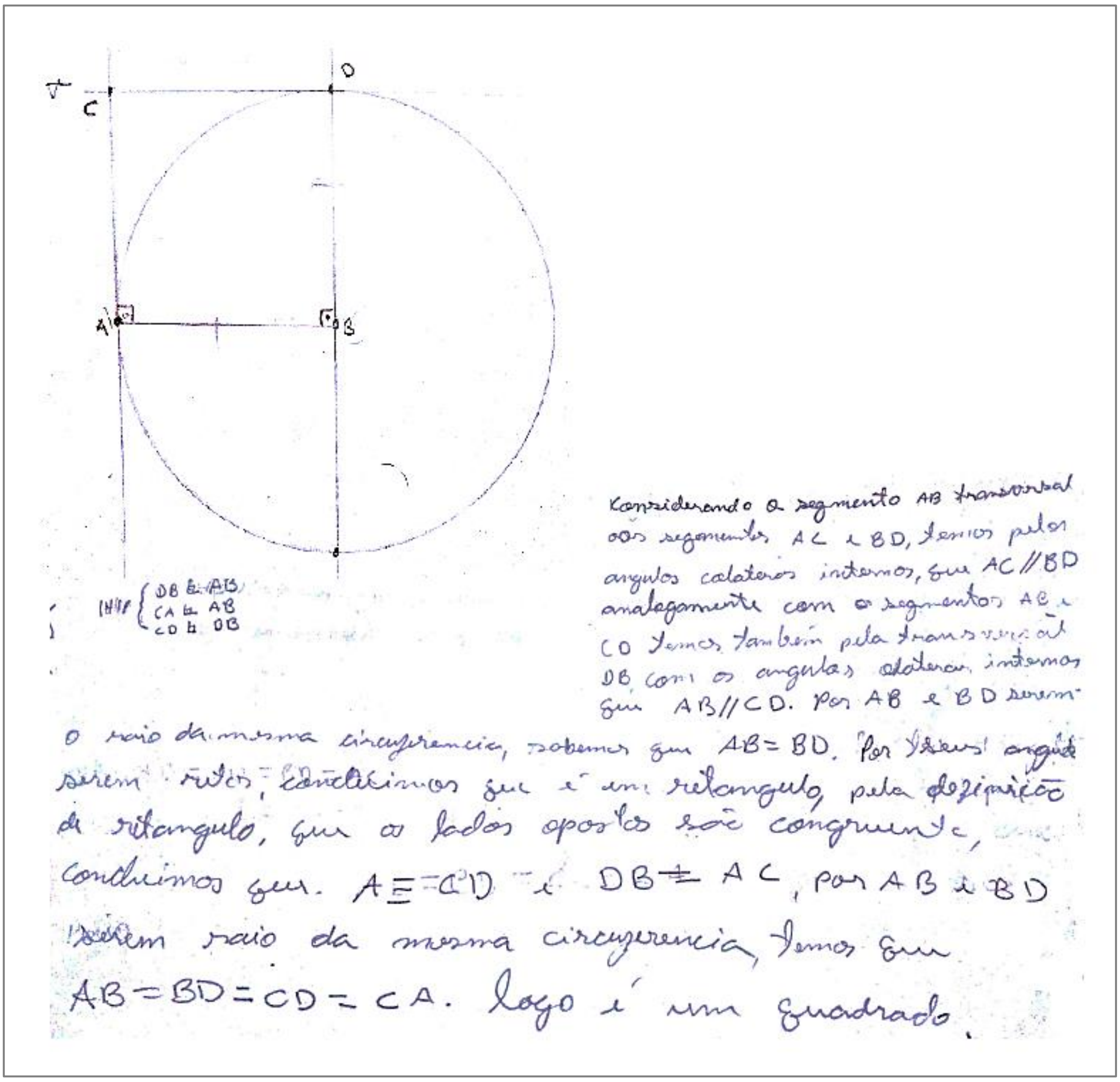
***Marina**: Mas a gente tem que mostrar que os quatro entre si são iguais.*

***Fábio**: Eu já mostrei que* $\overline{AB}$ *é paralelo a* $\overline{CD}$ *e que* $\overline{AC}$ *é paralelo a* $\overline{BD}$.

A discussão evidencia que os alunos reconhecem a relação entre paralelogramo e quadrado e que este último apesenta atributos adicionais que o diferenciam do paralelogramo.

A Figura 88 mostra a construção do quadrado e a demonstração apresentada pela dupla ***Marina*** e ***Fábio***.

Figura 88. Produção da dupla Marina e Fábio referente à tarefa 7.



Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos no texto que ***Fábio*** e ***Marina*** não identificaram a medida do ângulo $\hat{C}$, quarto ângulo reto do quadrado. O fato de não termos demonstrado a propriedade da soma dos ângulos internos do quadrilátero parece ter induzido os alunos a não utilizar esta propriedade. Pudemos constatar isso nestas falas:

Fábio*: A gente só não sabe C. Mas como a soma deles é 360º...*
Marina*: Mas a gente não provou isso.*

Os alunos poderiam utilizar o teorema das paralelas para determinar a medida do ângulo $\hat{C}$, uma vez que provaram que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas.

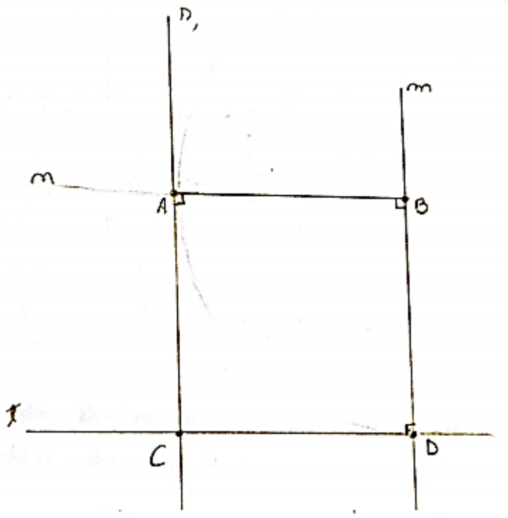
No texto também observamos que os alunos reconhecem a relação entre paralelogramo, retângulo e quadrado, pois se referiram ao retângulo como um paralelogramo com ângulos retos.

Apesar de não apresentarem no texto a justificativa de o ângulo $\hat{C}$ ser reto, o diálogo evidencia que os alunos não recorreram à apreensão perceptiva para determiná-lo. Podemos afirmar, então, que ***Marina*** e ***Fábio*** organizaram logicamente suas ideias, baseando-se em argumentos matematicamente válidos e redigindo um texto que explica por que o quadrilátero construído é um quadrado. Diante destas constatações, podemos afirmar que a prova apresentada possui características de uma demonstração, segundo Balacheff (2000).

A dupla ***Bruna*** e ***Camila*** justificou a medida do ângulo $\hat{C}$ (90º) utilizando a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero, utilizou o recíproco do teorema das paralelas para validar o paralelismo dos lados opostos do quadrilátero construído e empregou a propriedade dos lados opostos congruentes de um paralelogramo.

A Figura 89 mostra a construção e o texto feitos pela dupla ***Bruna*** e ***Camila***.

Figura 89. Produção da dupla Camila e Bruna referente à tarefa 7.



Temos que $\hat{A}=\hat{B}=\hat{D}=90°$ e $AB = BD$ pois ambos são raios da circunferência e como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360 e já temos $A=B=D=90$ logo $\hat{C}=90°$.

Considerando as retas m e s, e a reta n que contém o segmento AB sendo a transversal, temos que n é perpendicular as retas m e s logo temos assim ângulos internos colaterais iguais a 90° portanto essas retas são paralelas ou seja m//s de modo análogo mostramos que n//t temos aí que AB//CD e AC//BD e portanto $AB \equiv CD$ e $AC \equiv BD$ como $AB \equiv BD$ temos $AB \equiv CD \equiv BD \equiv AC$ definindo assim o quadrilátero ABCD como um quadrado pois seus lados são iguais e seus ângulos internos são todos de 90°.

Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos observar no texto dessas alunas que, embora os argumentos utilizados para validar a construção sejam matematicamente válidos, o caminho apresentado no texto não foi o primeiro percorrido pela dupla para essa validação, como evidencia a seguinte discussão, quando a dupla comunica sua técnica a ***Gustavo***:

Bruna*: Se a gente traçar uma reta dividindo o ângulo exatamente ao meio, a gente pode usar ALA.*

Gustavo*: Você tá indo pela bissetriz, mas como você mostrou que a bissetriz coincide com a diagonal?*

Camila*: Não, mas a gente traçou a bissetriz dos dois triângulos. [Refere-se aos dois triângulos obtidos pela divisão do quadrilátero ABCD por uma de suas diagonais.]*

Gustavo*: Não. Mas eu estou dizendo: como você tem certeza de que a bissetriz de um ângulo vai encontrar a bissetriz do ângulo oposto?*

Bruna*: Ah! É mesmo! Eu tinha esquecido dessa parte!*

Camila*: É, não vai por aí, não.*

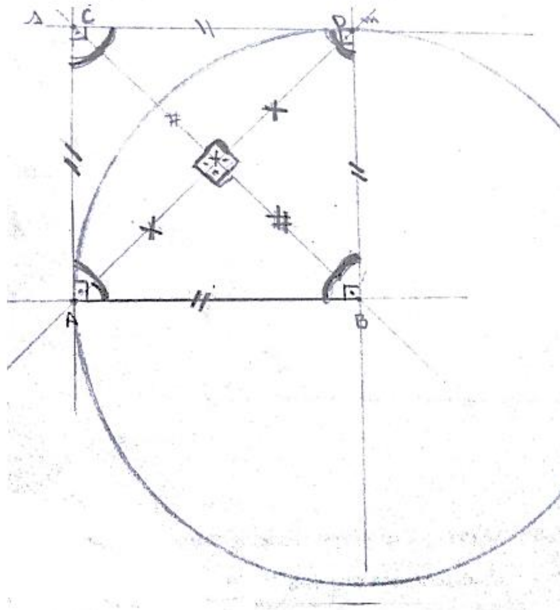
***Bruna**: Mas se a gente mostrar que AC é igual a BD e aí esse já é igual a esse [AB = BD], esses três já são iguais. Aí falta mostrar...*

Nesse diálogo, podemos notar que ***Gustavo*** não se convenceu pela apreensão perceptiva quando questiona: *"Mas eu estou dizendo: como você tem certeza de que a bissetriz de um ângulo vai encontrar a bissetriz do ângulo oposto?"*. Podemos notar também que os alunos vivenciaram momentos de ação, formulação e validação quando construíram a figura, formularam uma justificativa, abandonaram estratégias falhas, buscaram novos caminhos e justificaram matematicamente sua construção.

O texto redigido pela dupla ***Camila*** e ***Bruna*** evidencia que estas alunas conseguiram transformar as informações contidas nos passos da construção em hipóteses do problema. Percebemos isso quando elas justificaram corretamente a congruência dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ por serem raios da mesma circunferência e recorreram à propriedade dos lados opostos do paralelogramo e à transitividade da relação de congruência para justificar a congruência dos lados do quadrado. Uma vez que se basearam em argumentos matematicamente válidos, organizados logicamente, podemos dizer que o texto que apresentaram corresponde a uma demonstração, conforme Balacheff (2000).

A dupla ***Gustavo*** e ***Hugo*** justificou a medida do ângulo $\hat{C}$ utilizando a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero. Para justificar a congruência dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, foi utilizado o fato de esses dois segmentos serem raios da mesma circunferência e o recíproco do teorema das paralelas justificou o paralelismo dos lados opostos. Com isso, os alunos já poderiam concluir a demonstração, uma vez que estes argumentos são suficientes para afirmar que o quadrilátero construído possui os quatro ângulos retos e é um paralelogramo com dois lados consecutivos congruentes; logo possui os quatro lados congruentes. Porém o segundo parágrafo da demonstração apresentada evidencia que os alunos recorreram a novos argumentos para justificar a congruência dos lados do quadrilátero, sem sucesso (Figura 90).

Figura 90. Produção de Hugo e Gustavo referente à tarefa 7.



Seja $\underline{m}$ perpendicular a $\overline{AB}$, $\underline{s}$ perpendicular a $\overline{BD}$ e t perpendicular a $\overline{AB}$, teremos também que $\underline{t}$ e $\underline{m}$ são perpendiculares a $\overline{CD}$, sendo assim, $A\hat{C}D$ mede $90°$ pois a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero mede $360°$. Temos que $AB \equiv BD$ pois são raios da mesma circunferência. Seja CD e AB duas retas cortadas pela trasversal CA, teremos que $CD // AB$ pois possuem ângulos colaterais internos suplementares e iguais, o mesmo vale para os lados AC e DB, então $AB // CD$ e $AC // BD$.

Traçando a diagonal BC teremos dois triângulos ABC e BCD que possuem o lado BC em comum e os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{D}B$ congruente e teremos também que os ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{C}B$ são congruentes pelo teorema do paralelismo. Sendo assim os triângulos são congruentes. Então $AC \equiv CD$ que será congruente aos outros dois lados pelo caso de paralelismo e por seus ângulos internos terem

Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos observar no texto apresentado que os alunos não percebem ser suficiente a congruência dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ já provada. Usam a congruência de triângulos (utilizando o caso lado – ângulo adjacente – ângulo oposto) e concluem, de forma equivocada, haver congruência entre os lados consecutivos $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$.

Durante a socialização da atividade, a dupla percebeu que a congruência de triângulos levou à congruência do par de lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e do par $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Corrigimos esses equívocos.

Alguns alunos não se preocuparam apenas em realizar as atividades, mas também em descobrir e validar novas propriedades dos quadriláteros construídos. Confirmamos esta observação ao perguntarmos sobre a construção da diagonal $\overline{AD}$, pois esta não foi envolvida na demonstração realizada.

Gustavo: *Eu tracei porque eu queria provar o resto das coisas... As outras propriedades do quadrado.*

Observamos que na representação apresentada na Figura 90 a dupla ***Hugo*** e ***Gustavo*** indica que as diagonais são perpendiculares, interceptando-se em seus pontos médios. Estas propriedades não foram citadas na demonstração feita pela dupla.

Gustavo e ***Hugo*** não validaram corretamente a construção, mas não utilizaram argumentos empíricos em sua prova e não empregaram a tese como hipótese em sua redação, o que nos permite afirmar que houve evolução em seus conhecimentos sobre demonstração.

Considerações sobre a tarefa 7.

Todos os alunos seguiram os passos fornecidos na tarefa e construíram o quadrado solicitado. Além das sucessivas fases de ação e formulação, alguns alunos já alcançaram a de validação e escreveram corretamente suas demonstrações, conforme previmos em nossa análise *a priori*.

Identificamos alguns problemas conceituais, como a confusão entre congruência e semelhança, e falta de cuidado com as expressões utilizadas nos textos, como a confusão entre definição e propriedade.

Os alunos já recorrem a experiências vivenciadas em outras atividades para validar suas afirmações, como o teorema das paralelas e identificação de raios de uma mesma circunferência, e procuram utilizar teoremas da caixa de ferramentas, como o da congruência dos lados opostos do paralelogramo. Nem sempre, porém, se sentem seguros sobre quais conhecimentos, trazidos de experiências anteriores mas não constantes na caixa de ferramentas, podem ser utilizados.

Durante a realização da tarefa, os alunos evidenciaram ter conhecimento das relações entre quadrado, paralelogramo e retângulo, como mostram estas falas: *“Quando a gente tem um quadrilátero com lados paralelos dois a dois, nós sabemos que é um paralelogramo, não é? Então a gente já sabe que é um paralelogramo. Agora, o que diferencia o quadrado? Os lados iguais e os lados perpendiculares... Os ângulos todos de 90^o”* e *“Por seus ângulos retos concluímos que é um retângulo”.*

As provas apresentadas possuem características de demonstração, conforme Balacheff (2000). Nesta tarefa, a figura desempenhou seu papel heurístico, visto que os alunos conseguiram visualizar e aplicar as reconfigurações convenientes e a demonstração foi construída por meio de uma série de propriedades, e não por apreensão perceptiva da figura.

As funções de explicação, sistematização e comunicação propostas por De Villiers (2001) foram contempladas nesta tarefa. As demonstrações apresentadas explicam por que o quadrilátero construído é um quadrado, e os alunos sistematizaram as ideias e redigiram o texto.

Encerramos a tarefa institucionalizando as relações de duas maneiras:

1) *Todo quadrado é paralelogramo*, o que é equivalente a *Se ABCD é um quadrado, então ABCD é um paralelogramo*.

2) *Todo quadrado é retângulo*, o que é equivalente a: *Se ABCD é um quadrado, então ABCD é um retângulo*.

Na tarefa seguinte, solicitaremos a construção de um quadrado, mas desta vez a partir do lado inscrito em uma circunferência.

Tarefa 8: Construção de um quadrado a partir de um lado e da circunferência circunscrita.

Descreva um procedimento que permita construir um quadrado, dados um lado $\overline{AB}$ e a circunferência circunscrita a esse quadrado. Justifique sua construção.

Análise *a priori* da tarefa 8

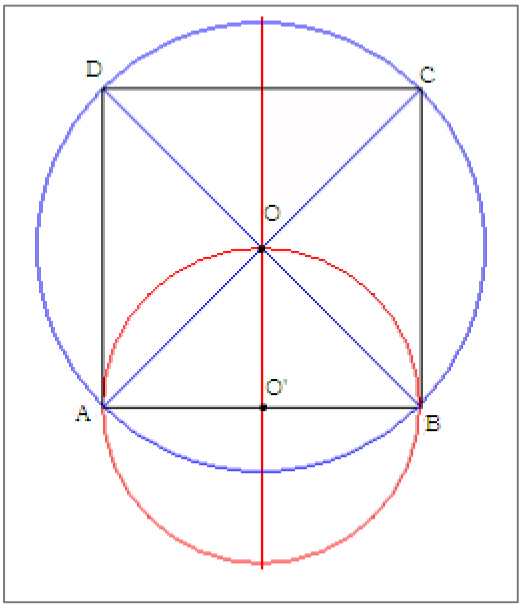
Esta tarefa também solicita a construção de um quadrado partindo de seu lado. Entretanto, ela se distingue da anterior por fornecer um lado inscrito em uma circunferência.

Esta escolha visa induzir o aluno a mobilizar conhecimentos sobre as diagonais do quadrado e permitir institucionalizá-los.

Seguem as técnicas previstas para a tarefa e suas respectivas justificativas.

Técnica 1. Criamos um segmento $\overline{AB}$ e construímos a mediatriz *m* de $\overline{AB}$. A circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ intercepta *m* no ponto *O*, que é centro da circunferência circunscrita ao quadrado. Para achar os dois outros vértices, procede-se como segue: Pelo ponto *A*, construímos a reta *r*, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. Nomeamos como *D* o ponto de intersecção da reta *r* com a circunferência circunscrita ao quadrado. Pelo ponto *B*, construímos a reta *s*, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. Nomeamos como *C* o ponto de intersecção da reta *s* com a circunferência circunscrita ao quadrado. Desse modo, obtemos o quadrado *ABCD* (Figura 91).

Figura 91. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 8.



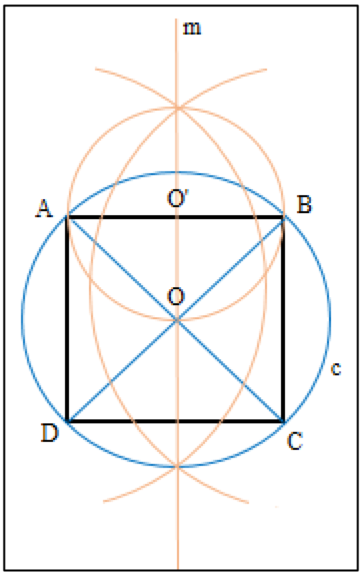
Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

A construção pode ser justificada da seguinte forma: Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos, pois $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares a $\overline{AB}$. Além disso, *O* é centro da circunferência c e *AO* = *OB* = *OC* = *OD* são raios da circunferência. Então *ABCD* é um quadrilátero cujas diagonais se bisseccionam; logo, é um paralelogramo com dois ângulos retos e diagonais perpendiculares. Daí segue-se que *ABCD* representa um losango com dois ângulos retos; portanto, é um quadrado.

Técnica 2. Usando régua e compasso, construímos a circunferência de centro *A* e passando por *B* e traçamos a circunferência de centro *B* e passando por *A*. A reta *m* que passa pelas intersecções das duas circunferências é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. O centro do quadrado é um dos pontos de intersecção da mediatriz e da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e centro *O'*. A circunferência *c* de centro *O*, passando por *A*, é a circunferência circunscrita ao quadrado.

O vértice *C* é o segundo ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{AO}$ com a circunferência circunscrita *c*. Igualmente, o ponto *D* é a intersecção da reta $\overleftrightarrow{BO}$ e da circunferência *c*. Este processo de construção gera a Figura 92.

Figura 92. Figura-suporte da técnica 2 referente à tarefa 8.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

Justificamos esse processo de construção como segue: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diâmetros da circunferência *c* e diagonais do quadrilátero *ABCD*. Além disso, *AO* = *OB* = *OC* = *OD* são raios da circunferência *c*. A reta *m* é mediatriz de $\overline{AB}$ e contém o segmento $\overline{OO}$'; logo, $\overline{OO}$' é perpendicular a $\overline{AB}$. $\overline{O'O}$ e $\overline{O'B}$ são raios da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e centro *O*'. Então o triângulo *OO'B* é retângulo e isósceles. Segue-se que o ângulo $O'\hat{O}B$ mede 45º. Analogamente, $A\hat{O}O$' mede 45º. Então $A\hat{O}B$ mede 90º. Temos então que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do quadrilátero *ABCD* são perpendiculares, congruentes e se bisseccionam. Logo, *ABCD* é um quadrado.

As duas técnicas diferem ao determinar os vértices *C* e *D* do quadrado *ABCD*. Tal diferença traz uma mudança na justificativa matemática para a construção. Com a primeira técnica, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos por construção. Ao utilizar a segunda técnica, temos que justificar a perpendicularidade entre os lados.

Os alunos poderão ter dificuldade em validar a primeira técnica, pois ela depende da visualização das diagonais do quadrado (diâmetros da circunferência), que não estão visíveis na construção. Para validar a congruência entre os lados, os alunos deverão efetuar uma reconfiguração conveniente (traçar as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, diâmetros da circunferência) e perceber que *ABCD* é um quadrilátero que possui diagonais congruentes que se interceptam em seus pontos médios e são perpendiculares. Para chegar a essas conclusões, os alunos deverão perceber que os triângulos *O'OB* e *AOO*' são isósceles, pois $\overline{O'A}$, $\overline{OO}$' e $\overline{O'B}$ são raios da mesma circunferência. Outra dificuldade relacionada a essa validação é que os raios da circunferência *c'* não se destacam sobre a figura e, segundo Duval (2012), pela lei da continuidade, os alunos tendem a se apegar à apreensão perceptiva, que dificulta a visualização da figura por meio das hipóteses apresentadas no enunciado (neste caso, da construção). Além dessa constatação, é provável ainda que os alunos apresentem dificuldades na validação desta técnica, uma vez que deverão recorrer a partes intermediárias auxiliares, e esse é, segundo Duval (2012), um dos fatores que diminuem a visibilidade da operação de reconfiguração intermediária.

Esta tarefa também solicita a construção de um quadrado, distinguindo-se da anterior pelo fato de não apresentar os passos da construção e solicitar a construção de um quadrado inscrito em uma circunferência. A necessidade de inscrição do quadrado vai propiciar aos alunos vivenciarem momentos de ação em que irão fazer conjecturas, bem como momentos de formulação ao recorrerem a uma das técnicas previstas.

Diante das experiências vivenciadas com as tarefas anteriores, esperamos que os alunos reconheçam a necessidade de validar para o caso geral a técnica utilizada. No entanto, reconhecemos que as justificativas matemáticas dessas técnicas empregam argumentos ainda não utilizados em tarefas anteriores. Esperamos que, mesmo que os alunos apresentem dificuldade em validar sua técnica, não recorram mais a argumentos empíricos para justificá-la.

Institucionalizaremos enunciando a condição necessária e suficiente sobre as diagonais de um paralelogramo para que este seja um quadrado: *Um paralelogramo é quadrado se, e somente se, suas diagonais são congruentes e perpendiculares.*

Bloco tecnológico-teórico: Definições de quadrado, circunferência, raio, diâmetro, diagonal, retas perpendiculares, mediatriz, triângulo isósceles, triângulo retângulo; propriedade dos ângulos da base do triângulo isósceles.

Experimentação e análise *a posteriori* da tarefa 8

Para a tarefa 8, alguns alunos necessitaram de esclarecimento quanto aos termos ‘inscrito’ e ‘circunscrito’. O enunciado desta tarefa não ficou claro para os alunos. Ao lerem “dados um lado $\overline{AB}$ e a circunferência circunscrita a esse quadrado”, interpretaram que iniciariam a construção do quadrado a partir do segmento *AB* inscrito em uma circunferência, sendo este certamente o lado de um quadrado – ou seja, representaram arbitrariamente uma circunferência com um segmento inscrito, sem justificativa quanto ao fato de este ser lado de um quadrado e seguiram com a construção.

Seguem-se trechos das discussões que ratificam nossa constatação:

***Bruna**: Gente, me explique uma coisa: aqui é para a gente descrever como fazer um quadrado ou provar que é um quadrado?*

***Fábio**: A gente vai ter que descrever como fazer o quadrado, mas também a gente tem que provar que é um quadrado.*

***Bruna**: Mas... Não! A gente tem aqui, ó: "Descreva um procedimento que permita construir um quadrado". Se o lado já tem, que é AB, e a gente já sabe que os lados são todos iguais e os ângulos são retos... Aí já constrói o quadrado. Não precisa explicar nada. É isso que eu estou pensando.*

***Fábio**: Não! A gente tem que mostrar um procedimento que fique correto.*

A aluna imaginou que, de posse do lado do quadrado inscrito, bastaria construir os demais lados congruentes e os ângulos retos. Logo em seguida abandonaram esta técnica e recorreram a outra, partindo também de um segmento *AB* inscrito na circunferência.

***Bruna**: Traça uma perpendicular ao lado AB.*

***Camila**: Primeiro traça a diagonal.*

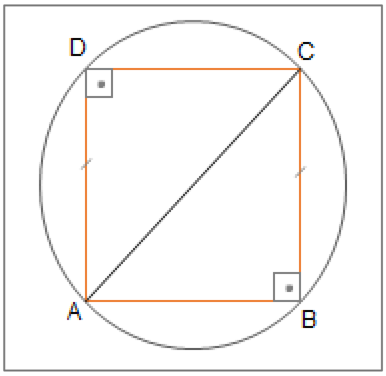
***Bruna**: Então preste atenção: o quadrado não são dois triângulos? E a circunferência está circunscrita a esse triângulo aqui [ABC]. Aí depois mostra que é realmente um quadrado.*

***Camila**: Por que esse lado é igual a esse? [AB e CD.]*

***Bruna**: Porque a gente já constrói eles iguais, entendeu? Pega essa medida exatamente no meio. [Refere-se a uma semicircunferência.]*

A Figura 93 corresponde à conjectura da dupla ***Bruna*** e ***Camila*** em uma situação de ação.

Figura 93. Primeira conjectura da dupla Bruna e Camila.



Fonte: Dados da pesquisa.

A discussão evidencia que os triângulos *ABC* e *ACD* foram construídos inscritos na semicircunferência, o que garante que são triângulos retângulos, ainda que as alunas não justificassem esse fato. Os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ foram construídos congruentes. Podemos concluir então que os triângulos *ABC* e *ACD* são congruentes, pelo caso especial de congruência de triângulos (cateto–hipotenusa). Segue-se então que o quadrilátero *ABCD* possui os lados opostos congruentes, ou seja, é um paralelogramo com um ângulo reto. Logo, *ABCD* é um retângulo. No entanto, nada garante que este possui dois lados consecutivos congruentes.

O diálogo das alunas evidencia que, apesar de na primeira tentativa utilizarem uma técnica que não trará sucesso na construção do quadrado inscrito (a menos que ocorra uma coincidência), elas percebem a necessidade de uma justificativa matemática que valide sua construção. Nossa afirmação é reforçada pela seguinte fala: *"Então preste atenção: o quadrado não são dois triângulos? E a circunferência está circunscrita a esse triângulo aqui* [*ABC*]. *Aí depois mostra que é realmente um quadrado*", e também pelo seguinte questionamento da aluna: *"Por que esse lado é igual a esse?"*.

As alunas continuam a construção e observamos que desta vez percebem intuitivamente que ao construírem um quadrilátero com diagonais congruentes, perpendiculares e que se interceptam em seus pontos médios, obtêm um quadrilátero que é um quadrado.

Camila*: Ô, Bruna, por que a gente não faz assim? Primeiro constrói a circunferência, liga A para B e constrói o diâmetro.*

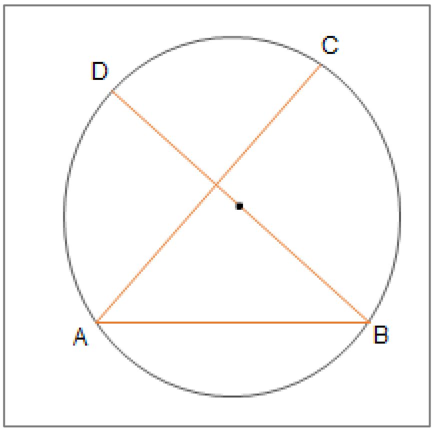
Bruna*: Gostei da sua ideia. A gente traça uma circunferência de raio qualquer, traça o diâmetro que vai ser* $\overline{BD}$. *Não é isso?*

Camila*: Agora, o que a gente faz?... Perpendicular ao ponto médio de* $\overline{BD}$*... Traçar uma perpendicular ao ponto médio de* $\overline{BD}$.

Bruna*: Que vai ser a outra diagonal. As diagonais têm mesma medida.*

A Figura 94 corresponde à segunda conjectura da dupla ***Bruna*** e ***Camila*** em um segundo momento de ação.

Figura 94. Segunda conjectura da dupla Bruna e Camila.



Fonte: Dados da pesquisa.

As alunas percebem que, ao traçarem a perpendicular $\overleftrightarrow{AC}$ ao diâmetro $\overline{BD}$, esta não coincidiu com o diâmetro com uma extremidade em *A*, ou seja, o segmento perpendicular à diagonal $\overline{BD}$ não poderia ser congruente e passar pelo ponto médio de $\overline{BD}$ (centro da circunferência). Este problema ocorreu porque o lado $\overline{AB}$ foi construído de forma arbitrária. Elas retornam à técnica anterior iniciando com a construção de um triângulo retângulo, desta vez isósceles, o que pode observado na descrição feita por ***Bruna***: "*A gente constrói um segmento AB, depois um segmento AD perpendicular e congruente a $\overline{AB}$. Traça a mediatriz de $\overline{BD}$ que corta esse segmento [$\overline{BD}$] no ponto M, médio de $\overline{BD}$. Com centro em M e raio AM traça uma circunferência circunscrita ao triângulo ABD*".

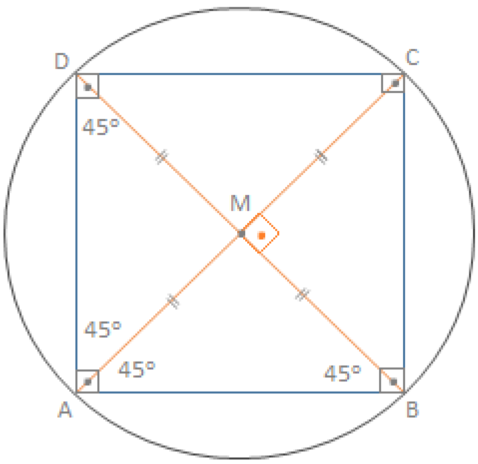
Ao socializar a construção, perguntamos por que M foi centro da circunferência circunscrita, e se isso ocorreria sempre nas condições impostas pela construção da dupla. O aluno ***Gustavo*** respondeu: *"Sim, porque $\overleftrightarrow{AM}$ é mediatriz e tem um teorema que diz que qualquer ponto tomado na mediatriz é equidistante dos outros dois"*.

Apesar de o aluno não enunciar corretamente o teorema, percebe-se que os dois pontos citados são B e D, extremos do segmento $\overline{BD}$, do qual $\overleftrightarrow{AM}$ é mediatriz. O aluno tenta (apoiando-se na Figura 95) demonstrar a congruência dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$, o que não faz sentido, pois é um dado do problema. Na realidade, o que foi solicitado é a congruência dos segmentos $\overline{MD}$, $\overline{MB}$ e $\overline{MA}$. Podemos observar essa contradição neste diálogo entre Bruna e Gustavo:

Bruna: Porque aí, no caso, quando prolongasse vai ser a outra diagonal do quadrado.

Gustavo: Para mim é porque o triângulo é isósceles e se $\overleftrightarrow{AM}$ é uma mediatriz, então $\overline{AM}$ é altura e bissetriz. Como esse ângulo é de 90º, então vai ser 45º, 45º. Os de baixo, da base, também vão ser 45º, 45º, porque ABD é isósceles. Agora nós temos dois triângulos congruentes.

Figura 95. Figura-suporte da construção feita pela dupla Camila e Bruna.



Fonte: Dados da pesquisa.

Frente a esse fato, questionamento a justificativa da dupla:

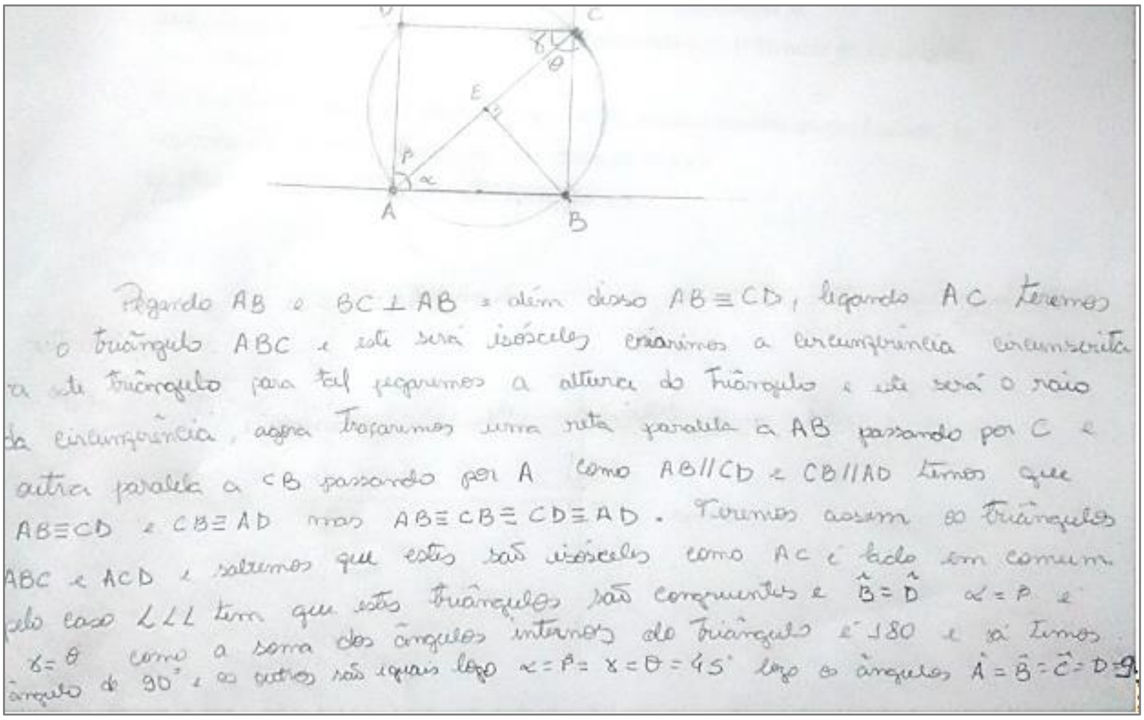
***Pesquisadora**: Nós precisamos utilizar congruência de triângulos? Vocês encontraram os ângulos $A\widehat{D}B$ e $A\widehat{B}D$ que medem 45º porque o triângulo ABD é isósceles e agora temos que os triângulos ABM e AMD possuem dois ângulos congruentes cada.*

***Bruna**: Então os triângulos são isósceles!*

***Gustavo**: É a recíproca!*

Uma vez justificado que *M* é centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*, notamos que as alunas mudaram de estratégia para finalizar a construção. Em seu texto (Figura 96) observamos que elas construíram o triângulo simétrico ao triângulo *ABD* utilizando o paralelismo dos lados opostos. Ao socializarem sua construção, parecem ter percebido que poderiam finalizar a construção prolongando $\overleftrightarrow{AM}$ até interceptar a circunferência e obter o vértice *C* do quadrado. Utilizaram depois disso, corretamente, a congruência de triângulos para justificar que *ABCD* é um quadrado (Figura 96).

Figura 96. Produção da dupla Bruna e Camila referente à tarefa 8.

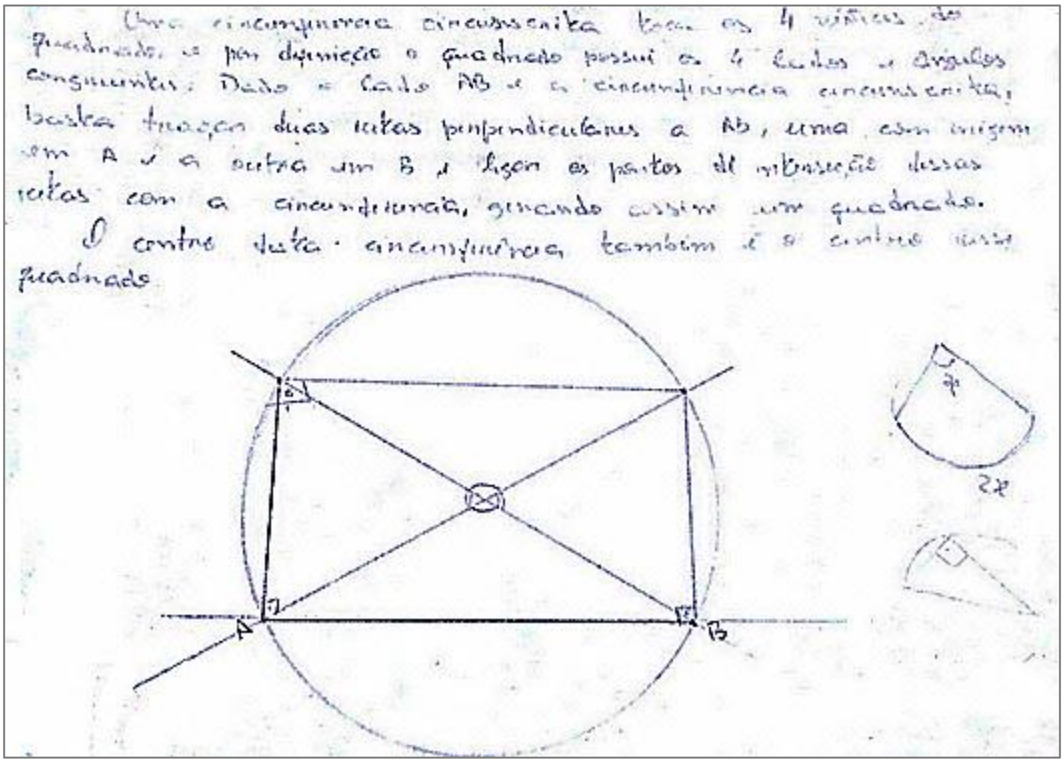


Fonte: Dados da pesquisa.

Uma análise da produção desses alunos mostra que eles não justificaram o fato de que o ponto *E* é centro da circunferência e não utilizaram as diagonais do quadrado para finalizar a construção, e sim a construção do segundo triângulo utilizando o paralelismo dos lados opostos.

Gustavo e ***Hugo*** admitiram que o lado $\overline{AB}$ foi dado e não conseguiram completar sua construção. Ao construírem $\overline{AB}$ de forma arbitrária, o quadrilátero obtido foi um retângulo não quadrado (Figura 97).

Figura 97. Produção da dupla Gustavo e Hugo referente à tarefa 8.[12]



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao questionarmos sobre o modo de obter o lado $\overline{AB}$ e falarmos sobre a necessidade de uma técnica que permitisse garantir que $\overline{AB}$ é lado de um quadrado, o aluno afirmou:

Gustavo*: É, o meu nem um retângulo aí não deu.*

Pesquisadora*: Por que você acha que não é um retângulo?*

Gustavo*: Porque eu estou com a impressão que esse lado é menor que esse. Bom... Se essa é paralela a essa, é um retângulo.*

Pesquisadora*: Esse segmento é um diâmetro?*

Gustavo*: É. Porque aqui é o centro.*

Pesquisadora*: Se é realmente um diâmetro, quanto mede esse ângulo? [Um dos ângulos do quadrilátero construído.]*

---

12 Transcrição:

Uma circunferência circunscrita toca os 4 vértices do quadrado e por definição o quadrado possui os 4 lados e ângulos congruentes. Dado o lado AB e a circunferência circunscrita, basta traçar duas retas perpendiculares a AB, uma com origem em A e a outra em B e liga os pontos de interseção dessas retas com a circunferência gerando assim um quadrado.

O centro dessa circunferência também é centro do quadrado.

Gustavo*: Não sei.*

Revisamos a definição de ângulo inscrito em uma circunferência e sua propriedade e o aluno compreendeu que os triângulos construídos eram retângulos. Mas, para chegar a essa conclusão, sua construção deveria garantir que o segmento construído passasse pelo centro da circunferência.

A construção dessa dupla evidencia que os alunos ainda validam algumas afirmações baseados na apreensão perceptiva. Isso fica evidente quando o aluno diz : *"Porque eu estou com a impressão que esse lado é menor que esse"*, e ao determinar o centro da circunferência.

A dupla ***Fábio*** e ***Marina*** também iniciou sua construção partindo de um segmento *AB* inscrito em uma circunferência, construindo esse segmento de forma arbitrária.

Considerações sobre a tarefa 8

Observamos que intuitivamente os alunos recorreram, para a construção do quadrado, às diagonais perpendiculares, congruentes e que se interceptaram no ponto médio de ambas. Quanto à validação desta técnica, optaram por utilizar a congruência de triângulos, em vez de usar as propriedades institucionalizadas, mesmo ficando evidente que reconhecem as relações entre quadrado e losango e entre quadrado e retângulo. Conjecturamos que isso advém de uma tendência a repetir técnicas utilizadas e da dificuldade em estabelecer relações lógicas que propiciem o uso das propriedades. Heinze, Cheng e Ufer (2008) afirmam que a inabilidade na manipulação de argumentos é um dos fatores que contribuem para que o aluno tenha dificuldade em realizar demonstrações. Nesse caso, a função de sistematização deve ser desenvolvida. Quanto à função de explicação, as discussões e redações evidenciam que os alunos estão buscando explicar suas afirmações. Embora não tenham sido bem-sucedidos na redação da demonstração, comunicaram suas justificativas.

Observamos que as tentativas de realizar as construções, bem como de validá-las, parecem ter criado condições para que os alunos vivenciassem momentos de ação e formulação: conjecturaram, iniciaram técnicas, mudaram de estratégias, recorreram a novas técnicas, formularam justificativas e tentaram validar suas técnicas.

Em alguns momentos, percebemos que o aluno não utiliza um caso particular para validar o caso geral. Um exemplo: *"Não! Eu tenho só a circunferência; eu tenho esse raio AB. Ela quer que eu pegue a medida AD perpendicular a* $\overleftrightarrow{AB}$. *Mas eu tô falando que não tem como a gente provar que ela vai ficar dentro da circunferência maior... Entenda! Que ela vai ficar aqui no ponto... Que ela vai se interceptar..."*. Isso dá indícios de que os alunos não estão se convencendo pela apreensão perceptiva e estão evoluindo de provas pragmáticas para provas conceituais, conforme Balacheff (2000).

A tarefa foi finalizada discutindo-se cada técnica apresentada, desfazendo-se os equívocos, apresentando-se técnicas válidas, satisfazendo-se as condições do problema e institucionalizando-se a caracterização do quadrado relativa à diagonal e a relação deste quadrilátero com os outros paralelogramos.

Apesar dos equívocos na interpretação do enunciado, as escolhas feitas provocaram conjecturas, mobilizaram conhecimentos sobre triângulo isósceles, triângulo inscrito em uma circunferência e mediana relativa à hipotenusa e geraram discussões que permitiram a institucionalização das propriedades que foram previstas na análise *a priori*.

Tarefa 9. Construção de um quadrado, dada uma diagonal.

Enunciado da tarefa: Descreva um procedimento que permita construir um quadrado *ABCD*, dada sua diagonal $\overline{AC}$. Justifique sua construção.

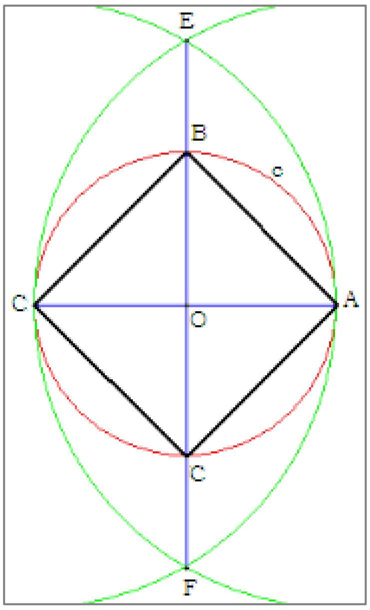
Análise *a priori* da tarefa 9

Esta tarefa solicita a construção de um quadrado partindo de sua diagonal. Tal escolha visa induzir o aluno a mobilizar conhecimentos sobre as diagonais do quadrado e, caso não as tenhamos institucionalizado na tarefa anterior, teremos a oportunidade de enuncia-las e demonstrá-las.

A seguinte técnica foi prevista para esta tarefa.

Técnica. Criamos o segmento $\overline{AC}$ e construímos seu ponto médio *O*. A mediatriz *d* de $\overline{AC}$ intercepta a circunferência *c* de diâmetro $\overline{AC}$ em *B* e em *D*. *ABCD* representa o quadrado procurado (Figura 98).

Figura 98. Figura-suporte da técnica 1 referente à tarefa 9.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

A **justificativa** dessa construção pode ser feita da seguinte forma: Os pontos *B* e *D* estão a igual distância de *A* e de *C*; portanto, *AB* = *BC* = *CD* = *DA*. O triângulo *ABC* é retângulo, pois está inscrito em uma semicircunferência. Portanto, *ABCD* representa um quadrado, pois é um losango que tem um ângulo reto.

Para a validação dessa construção, os alunos deverão perceber que *ABCD* é um losango e justificar essa afirmação utilizando a propriedade das diagonais que foi já institucionalizada em outras tarefas. Poderão também apoiar-se na propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles para validar a perpendicularidade entre os lados do quadrado. Esta opção se justifica pelo fato de os triângulos *OAB*, *OBC*, *OCD* e *OAD* se destacarem mais na figura que a semicircunferência.

Esta tarefa permite evidenciar as relações entre o quadrado e outros quadriláteros e também conteúdos que ainda não haviam sido abordados nas tarefas anteriores, como as propriedades dos ângulos inscritos em uma circunferência.

Bloco tecnológico-teórico: Definições de mediatriz, circunferência, raio, diagonais, quadrado, losango; propriedades das diagonais de um losango; propriedade de ângulo inscrito em uma circunferência; propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles; soma dos ângulos internos de um triângulo. Se necessário, revisaremos para os alunos os conteúdos ainda não utilizados em tarefas anteriores.

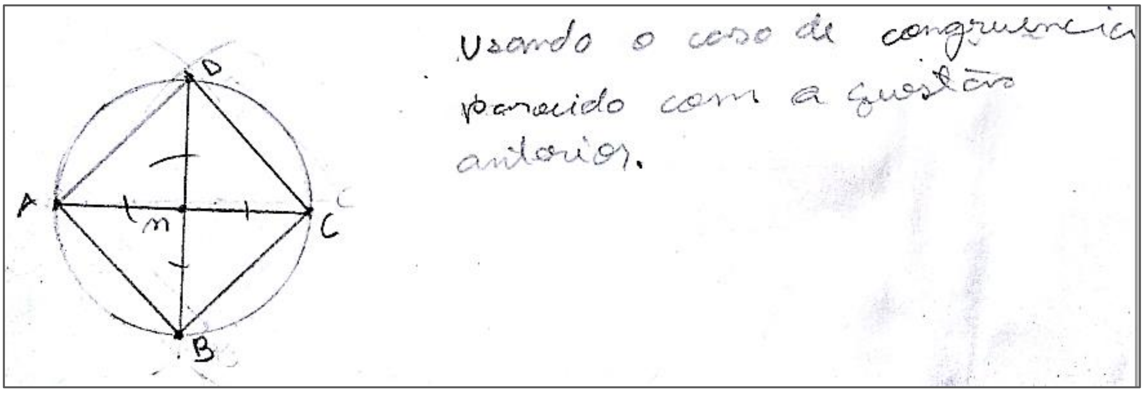
Experimentação e Análise *a posteriori* da tarefa 9

Esta tarefa não despertou discussões, uma vez que, diante do equívoco provocado pela tarefa anterior, os alunos realizaram a tarefa 8 utilizando a técnica prevista na tarefa 9. Desse modo, repetiram a técnica empregada na tarefa anterior.

Fábio*: Com a diagonal ficou fácil. A gente pega o ponto médio de AC, com o compasso centrado em C. Se aqui já é a diagonal, pega o ponto médio M de AC e traça a circunferência de raio MA e MC, que são iguais... Traça a perpendicular a AC, ou então a gente escreve "passando a mediatriz", porque aí já tá dizendo que ela corta no meio e é perpendicular. Aí, ligando os pontos, já é um quadrado.*

A Figura 99 mostra a construção feita pela dupla ***Fábio*** e ***Marina***.

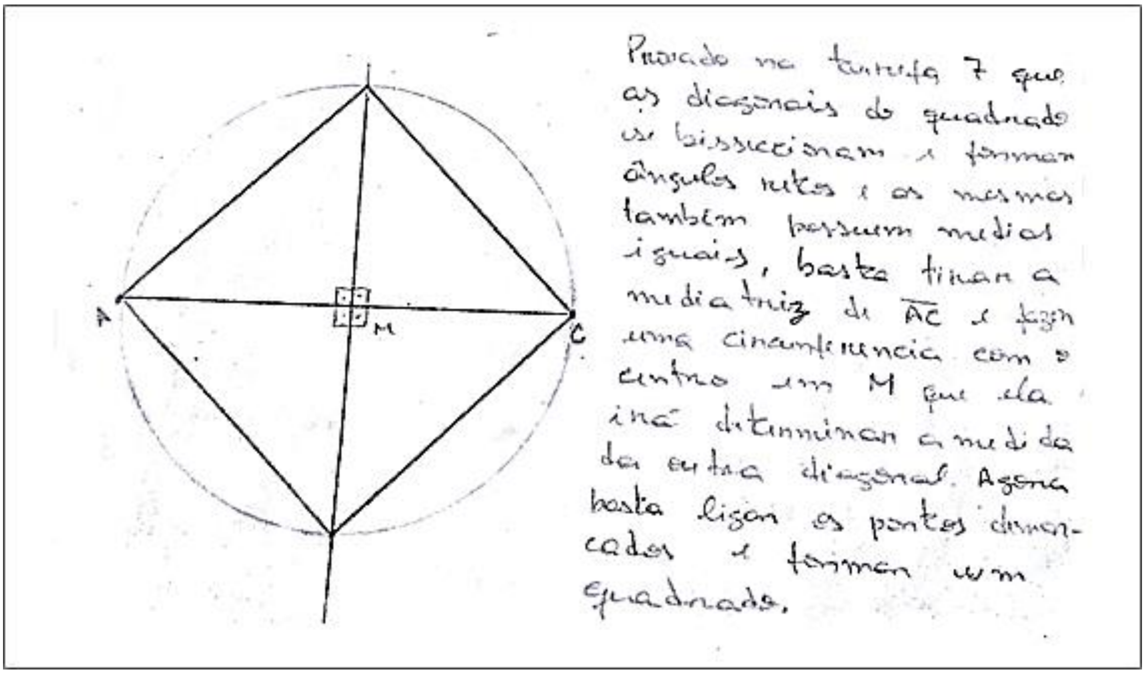
Figura 99. Produção de Fábio e Marina relativa à tarefa 9.



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla ***Hugo*** e ***Gustavo*** utilizou a mesma técnica que ***Fábio*** e ***Marina*** e recorreu à propriedade institucionalizada na tarefa anterior, porém percebemos problemas ao expressarem em texto a utilização das condições necessárias e suficientes sobre as diagonais do quadrado.

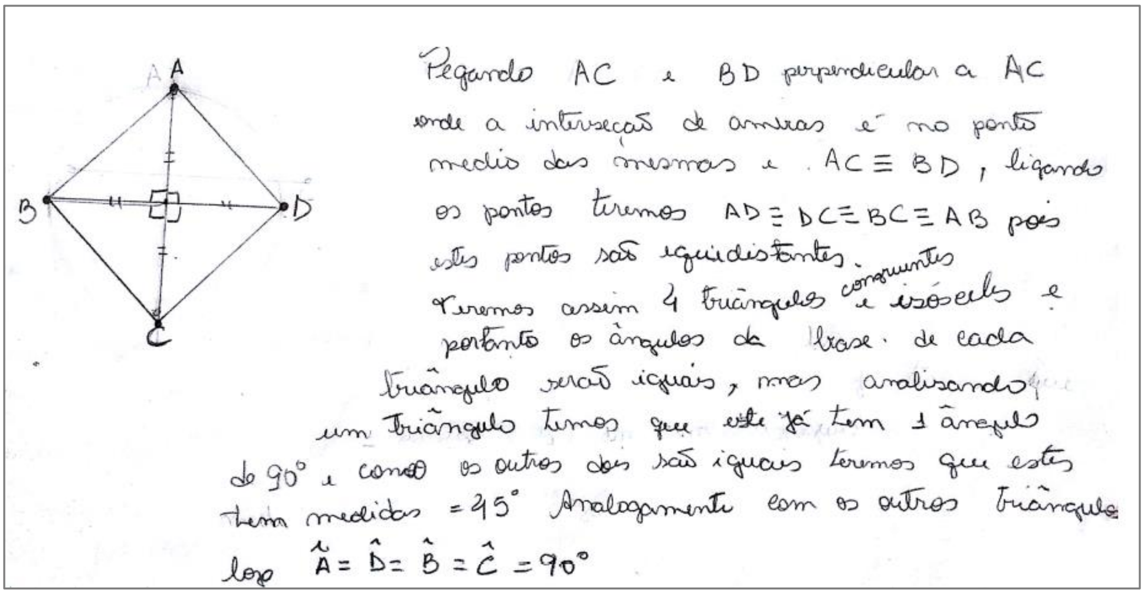
Figura 100. Produção da dupla Gustavo e Hugo referente à tarefa 9.



Fonte: Dados da pesquisa.

As alunas ***Bruna*** e ***Camila*** utilizaram a mesma técnica. Tal como a dupla ***Marina*** e ***Fábio***, valeram-se das propriedades das diagonais do quadrado para a construção, porém não as utilizaram para justificar a técnica, como podemos observar na Figura 101.

Figura 101. Produção da dupla Bruna e Camila referente à tarefa 9.



Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos notar na Figura 101 que a dupla recorreu à propriedade da mediatriz de um segmento e à soma das medidas dos ângulos internos do triângulo para justificar matematicamente sua técnica. Uma dificuldade dessa dupla ainda reside na redação de suas justificativas, como podemos perceber quando escrevem *“AD ≡ DC ≡ BC ≡ AB, pois estes pontos são equidistantes”*.

Considerações sobre a tarefa 9

Para a construção solicitada na tarefa 9, as três duplas utilizaram as propriedades das diagonais do quadrado, mas apenas uma dupla utilizou essas propriedades para validar sua construção.

Conforme previsto em nossa análise *a priori*, uma dupla apoiou-se na propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles e na soma das medidas dos ângulos internos do triângulo para justificar a perpendicularidade dos lados do quadrado. Essa dupla não deixou legível a circunferência utilizada na construção das diagonais congruentes, o que dificultou a utilização da propriedade do triângulo inscrito em uma semicircunferência.

As propriedades relativas às diagonais do quadrado que previmos serem institucionalizadas nesta tarefa foram abordadas na tarefa anterior. Isso ocorreu pelo fato de os alunos não compreenderem o enunciado da tarefa 8 e terem recorrido às propriedades das diagonais para a executarem, o que permitiu que estas propriedades fossem institucionalizadas e utilizadas na tarefa 9.

A forma que os alunos realizaram a tarefa 8 possibilitou que a tarefa 9 fosse justificada apenas utilizando as condições impostas sobre as diagonais de um quadrilátero para que este fosse um quadrado e, no entanto, notamos que os alunos parecem não se satisfazer com a utilização de propriedades ao justificar matematicamente suas construções, como se estas fossem insuficientes e necessitassem ser demonstradas novamente.

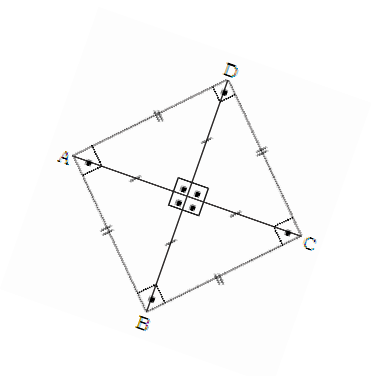
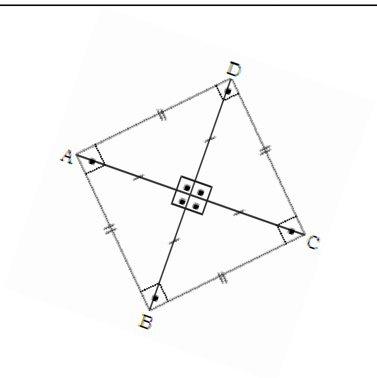
Apenas uma dupla (***Bruna*** e ***Camila***) apresentou uma prova conceitual. ***Fábio*** expressou verbalmente sua justificativa, mas a função de comunicação não foi contemplada, uma vez que o texto não foi apresentado. No texto de ***Gustavo*** e ***Hugo***, a função de sistematização ficou ausente, e eles não obtiveram sucesso em sua justificativa.

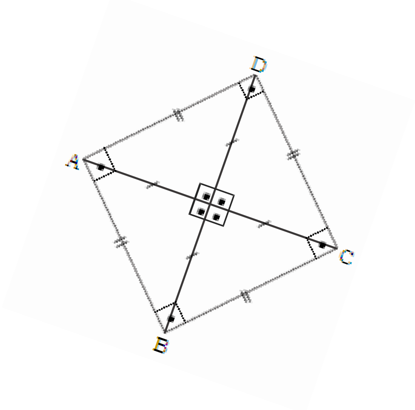
Um fato observado foi que as representações dos quadrados das três duplas foram apresentadas sem que um dos lados do quadrado estivesse paralelo à margem do papel. Os alunos se preocuparam em representar um losango com diagonais congruentes. Isso evidencia um avanço em termos de conhecimentos (quando comparado com a primeira etapa), uma vez que construíram a figura que representa o quadrado utilizando sua caracterização, e não a apreensão perceptiva. Há indícios de que os alunos já não confundem o objeto com sua representação.

As escolhas feitas nas tarefas 7, 8 e 9 induziram os alunos a utilizar estratégias que possibilitaram a mobilização de conhecimentos sobre mediatriz de um segmento, congruência de triângulos e triângulos isósceles e relacioná-los com outros paralelogramos. Portanto, acreditamos que os objetivos propostos para essas tarefas foram cumpridos.

As relações entre o quadrado e os paralelogramos foram expressas nos três registros de representação (Quadro 23).

Quadro 23. Institucionalizações das tarefas 7, 8 e 9.

REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL	REGISTRO FIGURAL	REGISTRO SIMBÓLICO
Um paralelogramo é quadrado se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares e congruentes.		O paralelogramo *ABCD* é quadrado $\Leftrightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.
Um retângulo é quadrado se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares.		O retângulo *ABCD* é quadrado $\Leftrightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Se as diagonais de um quadrilátero estão contidas nas bissetrizes de seus ângulos, então esse quadrilátero é losango.		O losango *ABCD* é quadrado $\Leftrightarrow \overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

A tarefa 10 não foi desenvolvida, pois não houve disponibilidade do grupo para mais um encontro necessário para aplicá-la. Seu enunciado e sua análise *a priori* encontram-se no Apêndice A.

Apresentaremos em seguida as tarefas correspondentes à terceira etapa.

3.ª etapa:

As tarefas desta etapa contemplam aplicações das propriedades dos quadriláteros que foram institucionalizadas na 3.ª etapa. Foram adaptadas do livro *Geometria*, do professor Saddo Almouloud, ainda não publicado.

As tarefas que serão apresentadas têm o potencial de possibilitar ao aluno a utilização das definições dos quadriláteros e perceber a aplicação das propriedades que foram institucionalizadas nas tarefas correspondentes às etapas anteriores, assim como descobrir novas propriedades ainda não abordadas. Além disso, são propostas situações que deveriam permitir ao aluno trabalhar condições necessárias e suficientes, destacar hipótese e tese de um teorema e trabalhar teorema recíproco, assim como explorar a redação de um teorema.

As situações propostas nesta etapa, assim como na 3.ª, requerem dos alunos a conversão do registro em língua natural para o figural. Na validação, serão conduzidos a utilizar o registro simbólico e língua natural.

As tarefas desta etapa são constituídas de subtarefas, que representaremos pelo número e letra correspondentes. Por exemplo, tarefa 1, letra *a*, será representada por T_{1a} e a técnica correspondente será $t_i(T_{1a})$, em que *i* designa o número da técnica.

As tarefas desta etapa foram propostas para serem realizadas em casa. Nem todos os alunos as devolveram e, em algumas delas, a análise será restrita ao que o aluno registrou por escrito, uma vez que a escassez de tempo não permitiu a discussão de todas.

Seguem-se as tarefas com suas respectivas análises.

TAREFAS – 3.ª ETAPA

Tarefa 11

Escreva para cada uma das seguintes frases sua recíproca e diga se a frase inicial é verdadeira, bem como se sua recíproca o é:

a) Se $\overline{AB} // \overline{CD}$, então *ABCD* é um trapézio.

b) Se um quadrilátero é um paralelogramo, então suas diagonais interceptam-se.

c) Se as diagonais de quadriláteros interceptam-se em seus pontos médios, então esse quadrilátero é um losango.

d) Se os quatros lados de um quadrilátero têm a mesma medida, então esse quadrilátero é um losango.

e) Se um quadrilátero tem suas diagonais perpendiculares, então é um losango.

f) Se $AB = EF$ e se $\overline{AB} // \overline{EF}$, então *AEBF* é um paralelogramo.

Análise *a priori* da tarefa 11

Com esta tarefa esperamos que as propriedades institucionalizadas nas tarefas anteriores sirvam de ferramentas nas demonstrações e justificativas solicitadas, mas também que os alunos entendam o que significa a recíproca de uma propriedade, enunciem-na e reflitam sobre sua validade.

Apresentaremos a seguir as tarefas que consideramos importantes nesta situação.

(T_{11a}) *Se* $\overline{AB} // \overline{CD}$*, então ABCD é um trapézio.*

Pela definição adotada na primeira etapa desta sequência, a condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja um trapézio é que possua um par de lados paralelos. Logo, a afirmativa é verdadeira.

<u>Recíproca</u>: *Se ABCD é um trapézio, então* $\overline{AB} // \overline{CD}$.

Esta afirmativa é falsa, uma vez que não estamos certos de quais lados são as bases desse trapézio.

(T_{11b}) *Se um quadrilátero é um paralelogramo, então suas diagonais interceptam-se.*

Nesta tarefa esperamos que os alunos, por meio de conjecturas, observem que em todo quadrilátero convexo as diagonais se interceptam. Como o paralelogramo é um quadrilátero convexo, então as diagonais desse tipo de quadrilátero sempre se interceptam.

Recíproca: *Se as diagonais de um quadrilátero se interceptam, então esse quadrilátero é um paralelogramo*.

Esperamos que os alunos percebam que essa afirmação é falsa, pois em todo quadrilátero convexo as diagonais se interceptam.

(T_{11c}) *Se as diagonais de quadriláteros interceptam-se em seus pontos médios, então esse quadrilátero é um losango*.

É esperado que as propriedades relativas às diagonais do paralelogramo e do losango tenham sido aprendidas nas tarefas correspondentes às atividades de construção. Em caso afirmativo, esperamos que os alunos percebam que esta afirmação é falsa. Eles podem também concluir sobre a falsidade da afirmação por meio de conjecturas, observando que para um quadrilátero ser um losango é preciso que as diagonais se interceptem em seus pontos médios e sejam perpendiculares. As diagonais se interceptarem em seus respectivos pontos médios é condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja apenas um paralelogramo.

Recíproca: *Se um quadrilátero é um losango, então suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios*.

Os alunos responderão corretamente caso afirmem que a recíproca é verdadeira, pois o losango é um paralelogramo.

Poderão recorrer à propriedade das diagonais do paralelogramo e ao fato de o losango ser um paralelogramo, ou à apreensão perceptiva, uma vez que na primeira etapa da sequência os alunos tiveram contato com a representação figural do losango.

(T_{11d}) *Se os quatro lados de um quadrilátero têm a mesma medida, então esse quadrilátero é um losango*.

Os alunos responderão corretamente se afirmarem que a frase é verdadeira, uma vez que um quadrilátero é um losango se, e somente se, possui quatro lados congruentes.

Recíproca: *Se um quadrilátero é um losango, então seus quatro lados têm a mesma medida.*

Esperamos que os alunos respondam corretamente que a afirmação é verdadeira, uma vez que a definição de losango foi discutida na primeira etapa da sequência.

(T_{11e}) *Se um quadrilátero tem suas diagonais perpendiculares, então é um losango*.

Os alunos responderão corretamente caso declarem que a afirmação é falsa, uma vez que ter diagonais perpendiculares é condição necessária, embora não suficiente, para que um quadrilátero seja losango.

Recíproca: *Se um quadrilátero é losango, então suas diagonais são perpendiculares*.

Os alunos responderão corretamente caso declarem que a afirmação é verdadeira.

(T_{11f}) Se $AB = EF$ e se $\overline{AB} // \overline{EF}$, então *ABEF* é um paralelogramo.

Os alunos responderão corretamente caso declarem que a afirmação é verdadeira. Esperamos que eles percebam que esta é a propriedade institucionalizada na tarefa 1 da segunda etapa, isto é, que se um quadrilátero possui um par de lados congruentes e paralelos, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

Recíproca: *Se ABEF é um paralelogramo, então* $AB = EF$ *e* $\overline{AB} // \overline{EF}$.

Os alunos responderão corretamente caso declarem verdadeira a afirmação. Esperamos que recorram à definição de paralelogramo e às propriedades dos lados opostos e respondam de forma correta a afirmação.

Nas tarefas correspondentes às atividades de construções geométricas foram formuladas, entre outras propriedades, condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja um paralelogramo ou losango. Pretendemos que os alunos recorram a essas propriedades para realizar a tarefa 11.

Buscamos consolidar os conhecimentos já contemplados nas atividades de construção e também trabalhar condições necessárias e suficientes e o recíproco de um teorema, bem como provocar conjecturas, e acreditamos que esta tarefa tem potencial para contemplar esses objetivos, uma vez que, para avaliar o valor lógico das afirmativas, os alunos poderão recorrer às propriedades e caracterizações dos quadriláteros institucionalizadas nas tarefas das etapas anteriores.

Para esta atividade, os alunos deverão fazer uso das definições de trapézio, paralelogramo e losango e conhecer os elementos desses quadriláteros e as notações que os representam.

Diferentemente das tarefas de construção geométrica, as figuras que auxiliarão esta tarefa podem ser construídas de forma livre, desde que estas sejam associadas às hipóteses apresentadas no problema.

Ao conjecturar sobre as figuras e discutir no grupo sobre a veracidade ou não da afirmativa, os alunos vivenciarão momentos de ação e formulação, porém não ocorrerá necessariamente situação de validação, pois a tarefa não solicita justificativa.

Quanto às recíprocas das afirmações, esperamos que os alunos consigam escrevê-las corretamente.

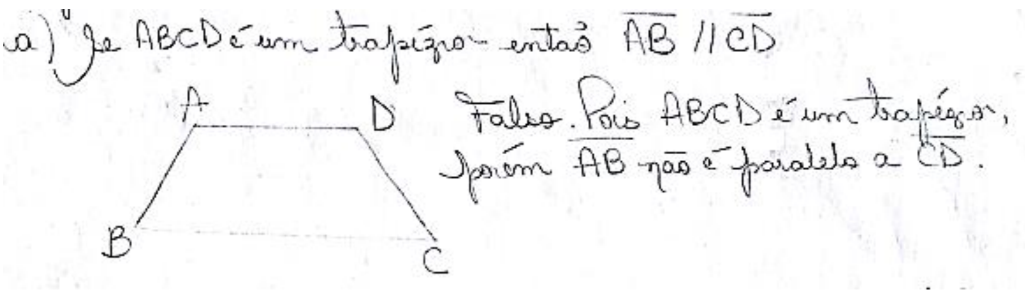
Experimentação e análise da tarefa 11

Apenas três alunos realizaram esta tarefa: ***Hugo***, ***Marina*** e ***Bruna***. Apesar de nossas cobranças exaustivas, as demandas do curso não permitiram que alguns devolvessem as atividades.

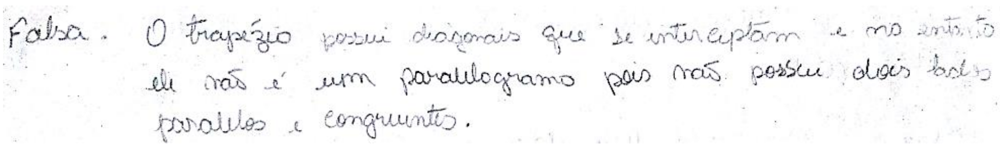
Não houve discussão em torno desta tarefa, uma vez que foi respondida fora dos momentos de encontro. Vamos analisar o material escrito pelos três alunos que apresentaram tarefas respondidas.

(a) Todos responderam corretamente que a frase é verdadeira e enunciaram corretamente a recíproca, como previmos em nossa análise *a priori*.

A noção de contraexemplo foi compreendida pelo aluno que avaliou como falsa a recíproca e justificou com um contraexemplo em que coordenou as apreensões figural e discursiva:

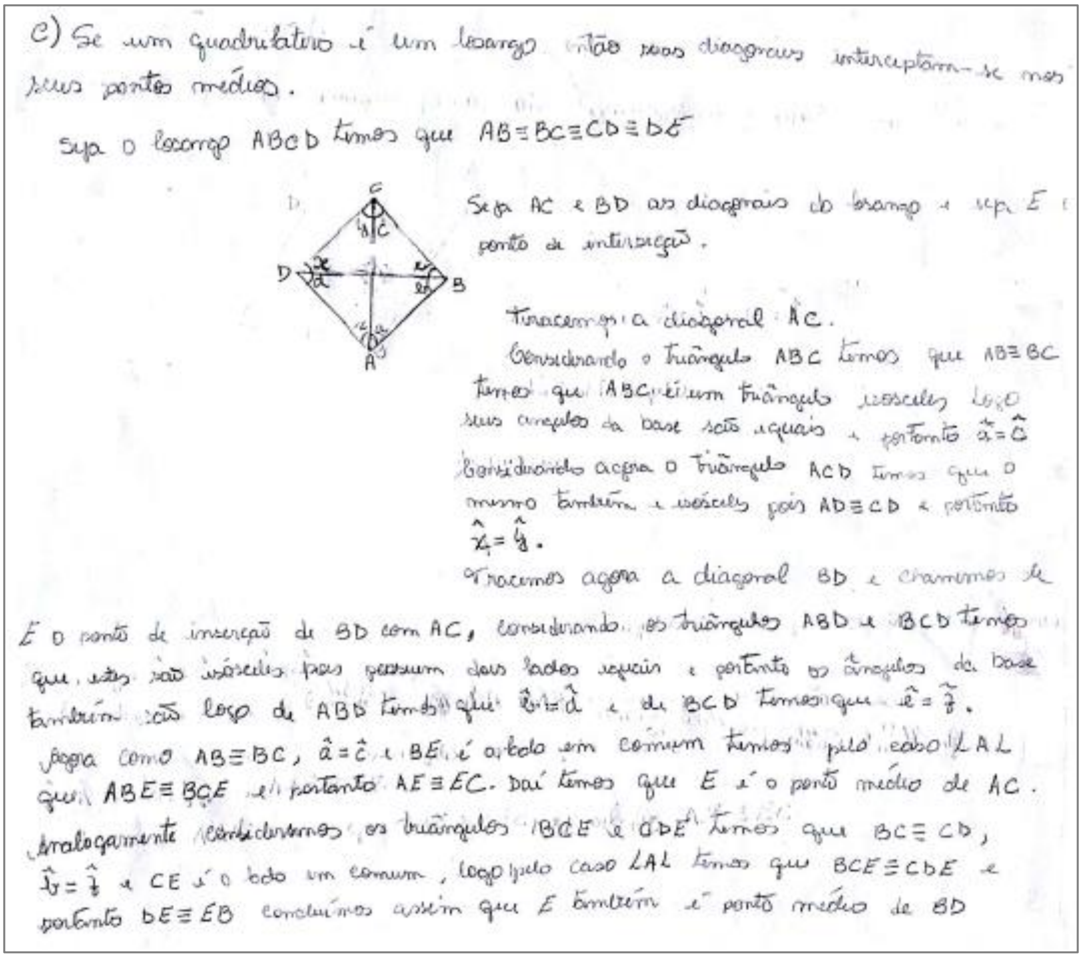


(b) Os três alunos que responderam a tarefa afirmaram que a frase inicial é verdadeira. Quanto à recíproca, os três afirmaram que é falsa e apresentaram um contraexemplo:



c) Todos enunciaram a recíproca e apenas uma aluna apresentou uma prova para validá-la, sem recorrer ao fato de o losango ser um paralelogramo. Ela mobilizou conhecimentos sobre propriedade do triângulo isósceles e congruência de triângulos e realizou uma demonstração (Figura 102).

Figura 102. Solução da tarefa T_{12c} pela aluna Bruna.



c) Se um quadrilátero é um losango então suas diagonais interceptam-se nos seus pontos médios.

Seja o losango ABCD temos que $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$

Seja AC e BD as diagonais do losango e seja E o ponto de interseção.

Traçamos a diagonal AC.

Considerando o triângulo ABC temos que $AB \equiv BC$ temos que ABC é um triângulo isósceles logo seus ângulos da base são iguais e portanto $\hat{a} = \hat{c}$

Considerando agora o triângulo ACD temos que o mesmo também é isósceles pois $AD \equiv CD$ e portanto $\hat{x} = \hat{y}$.

Traçamos agora a diagonal BD e chamemos de E o ponto de interseção de BD com AC, considerando os triângulos ABD e BCD temos que estes são isósceles pois possuem dois lados iguais e portanto os ângulos da base também são logo de ABD temos que $\hat{b} = \hat{d}$ e de BCD temos que $\hat{e} = \hat{f}$.

Agora como $AB \equiv BC$, $\hat{a} = \hat{c}$ e BE é o lado em comum temos pelo caso LAL que $ABE \equiv BCE$ e portanto $AE \equiv EC$. Daí temos que E é o ponto médio de AC.

Analogamente consideramos os triângulos BCE e CDE temos que $BC \equiv CD$, $\hat{v} = \hat{z}$ e CE é o lado em comum, logo pelo caso LAL temos que $BCE \equiv CDE$ e portanto $DE \equiv EB$ concluímos assim que E também é ponto médio de BD

Fonte: Dados da pesquisa.

O texto da Figura 102 revela que a aluna percebeu as reconfigurações convenientes (ao visualizar os elementos que permitiram provar as congruências dos triângulos) e aplicou essas reconfigurações corretamente.

Não foram utilizados argumentos empíricos para validar as afirmações, e as ideias estão organizadas logicamente, o que nos permite classificar o texto (Figura 102) da aluna como uma demonstração, segundo Balacheff (2000). Podemos observar ainda que, além de validar a afirmação, foram contempladas as funções de comunicação, sistematização e explicação, segundo De Villiers (2001), visto que a aluna apresentou um texto comunicando suas ideias, no qual as afirmações estão relacionadas logicamente, com explicações sobre a razão de cada afirmação ser verdadeira.

d) Todos afirmaram que a frase inicial é verdadeira, bem como sua recíproca, sem apresentarem justificativas para essas afirmações.

e) Apenas ***Marina*** afirmou ser verdadeira a frase inicial. A aluna não atentou para o fato de que haver diagonais perpendiculares é condição necessária, embora não suficiente, para que um quadrilátero seja losango.

Bruna enunciou a recíproca, mas não lhe atribuiu nenhum valor. ***Hugo*** não respondeu este item.

f) Apenas ***Marina*** respondeu corretamente esse item e ***Bruna*** apenas enunciou a recíproca.

Considerações sobre a tarefa 11

A tarefa 11 solicitou apenas a recíproca de cada afirmação e seu valor lógico, bem como o da frase inicial.

Dentre os alunos que realizaram a tarefa 11, todos efetuaram corretamente a conversão dos enunciados para o registro figural e todos enunciaram as recíprocas das afirmações.

Pudemos notar que em alguns itens os alunos justificaram corretamente, exibindo contraexemplos corretos, o que nos permite conjecturar que compreenderam a noção de contraexemplo.

Na pesquisa de Maioli (2001), os participantes evidenciaram ter dúvidas sobre a possibilidade de a recíproca de uma afirmação ser falsa. Em nossa pesquisa, essa dúvida não foi evidenciada. Mesmo que a tarefa não tenha sido submetida a uma discussão, os contraexemplos apresentados nos permitem afirmar que os alunos reconhecem que a recíproca de uma afirmação pode ser falsa.

Previmos que os alunos enunciariam corretamente as recíprocas das afirmações e, em nossas análises preliminares, não apresentariam dificuldade em enunciar as recíprocas de frases enunciadas nesta estrutura.

Nesta atividade, não houve justificativas utilizando provas pragmáticas. Foram contempladas as funções de explicação, comunicação e sistematização, de acordo com De Villiers (2001).

Pretendíamos verificar se os alunos conseguiriam aplicar corretamente as propriedades do losango e paralelogramo para atribuir e justificar o valor lógico das afirmações. Observamos que na maior parte dos itens os alunos evidenciam reconhecer as propriedades, o que dá indícios de avanço em relação aos conhecimentos geométricos. Observaremos nas próximas atividades se passarão a utilizar as propriedades dos quadriláteros em suas justificativas.

Tarefa 12

Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo. Se for verdadeira, prove-a. Se for falsa, mostre um contraexemplo.

a) Todo quadrilátero tem os lados opostos paralelos.

b) Todo quadrado é um losango.

c) Todo quadrilátero tem os lados opostos congruentes.

d) Num paralelogramo $RSTU$, a diagonal $\overline{RT}$ é a bissetriz do ângulo $U\hat{R}S$.

e) As bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são perpendiculares.

f) Todo quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares é um losango.

g) Todo quadrilátero cujas diagonais são congruentes é um quadrado.

Análise *a priori* da tarefa 12

Os objetivos visados são os mesmos da atividade 11. Apresentamos as tarefas importantes desta situação:

(T_{12a}) *Todo quadrilátero tem os lados opostos paralelos*.

O aluno responderá corretamente esta tarefa ao afirmar que o raciocínio não está correto e apresentar como contraexemplo um quadrilátero não paralelogramo, isto é, que não possui lados opostos paralelos.

(T_{12b}) *Todo quadrado é um losango*.

O aluno responderá corretamente esta tarefa caso afirme que o raciocínio está correto. A prova se dá pelas definições de losango e quadrado: para que um quadrilátero seja losango, deve ter os quatro lados congruentes. Como o quadrado possui os quatro lados congruentes, podemos afirmar que o quadrado é um losango.

(T_{12c}) *Todo quadrilátero tem os lados opostos congruentes*.

O aluno responderá corretamente a tarefa caso declare que a afirmação está incorreta, exibindo como contraexemplo um quadrilátero com lados opostos não congruentes.

(T_{12d}) *Num paralelogramo RSTU, a diagonal $\overline{RT}$ está contida na bissetriz do ângulo $U\hat{R}S$*.

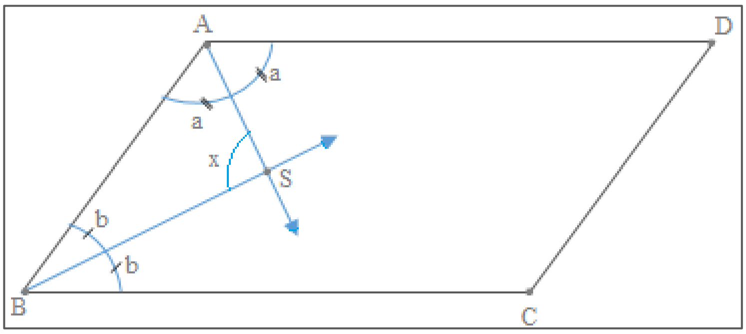
O aluno responderá corretamente esta tarefa se declarar que a afirmação é falsa e exibir como contraexemplo um paralelogramo não losango.

Para que o aluno apresente corretamente um contraexemplo correspondente a esta afirmativa, deverá conhecer propriedades dos ângulos opostos e ângulos consecutivos de um paralelogramo, que podem não ter sido institucionalizadas nas tarefas anteriores. Esta será uma oportunidade de conjecturar sobre essas propriedades, formulá-las e validá-las.

(T_{12e}) *As bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são perpendiculares*.

O aluno responderá corretamente à afirmativa se a considerar verdadeira e fizer a demonstração (prova conceitual) mostrada na Figura 103.

Figura 103. Figura-suporte da tarefa 12.



Fonte: Dados da pesquisa.

Demonstração:

Como $\overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{BS}$ são bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ respectivamente, temos que $D\hat{A}S \equiv S\hat{A}B$ e $A\hat{B}S \equiv S\hat{B}C$.

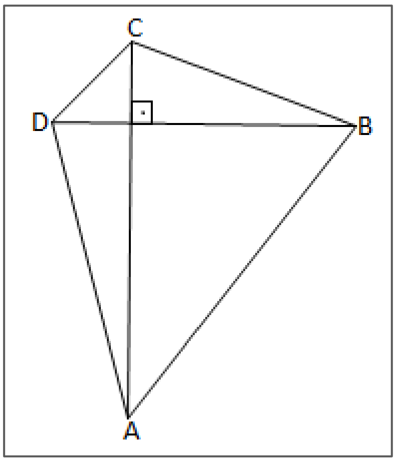
$2a + 2b = 180º \Rightarrow a + b = 90º$ (I) (pois *ABCD* é um paralelogramo) e $a + b + x = 180º$ (II) (pois *ASB* é um triângulo). Substituindo I em II, temos: $90º + x = 180º \Rightarrow x = 90º$. Logo, $\overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{BS}$ são perpendiculares.

Os alunos poderão conjecturar sobre esta afirmação atribuindo valores aos ângulos do paralelogramo e encontrando o valor de 90º para cada ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos consecutivos do paralelogramo. Para isto é necessário que conheçam as propriedades referentes aos ângulos do paralelogramo, isto é, ângulos opostos congruentes e ângulos consecutivos suplementares.

(T_{12f}) *Todo quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares é um losango*.

Os alunos responderão corretamente a esta afirmação caso declarem que é falsa e apresentem um contraexemplo em que um quadrilátero tenha diagonais perpendiculares (Figura 104) e que não se interceptem em seus pontos médios.

Figura 104. Figura-suporte da tarefa T_{12f}.



Fonte: Dados da pesquisa.

Acreditamos que os alunos alcançarão a resposta correta a esta afirmação, já que estas condições já foram abordadas na tarefa T_{11d}.

(T_{12g}) *Todo quadrilátero cujas diagonais são congruentes é um quadrado*.

Os alunos alcançarão a resposta correta caso declarem que a afirmação é falsa, exibindo como contraexemplo um retângulo não quadrado.

A tarefa T_{12}, além de exigir do aluno o conhecimento do paralelogramo, do losango, do retângulo e do quadrado, solicita-lhe que conheça as propriedades desses quadriláteros.

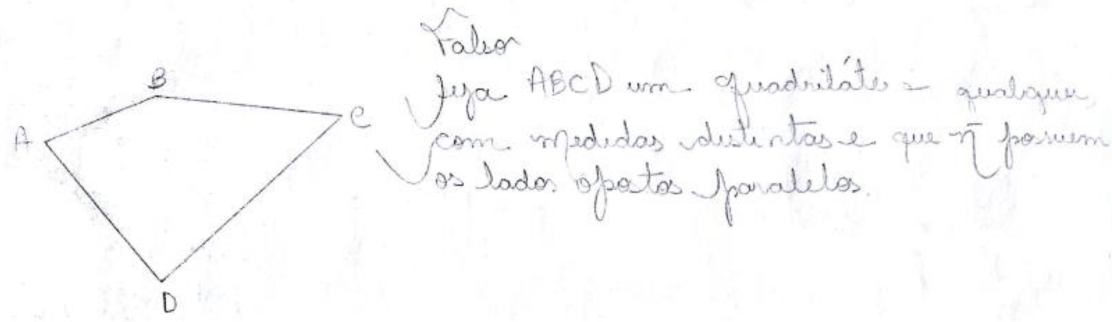
Experimentação e análise da tarefa 12

Esta atividade foi desenvolvida durante o encontro. Assim, todos a discutiram e dela participaram. Os alunos realizaram a tarefa em duplas, mas houve momentos de discussões intergrupais.

a) Todos responderam que a afirmação é falsa e exibiram contraexemplos para justificar suas respostas, dando indícios de que essa noção foi compreendida pelos alunos.

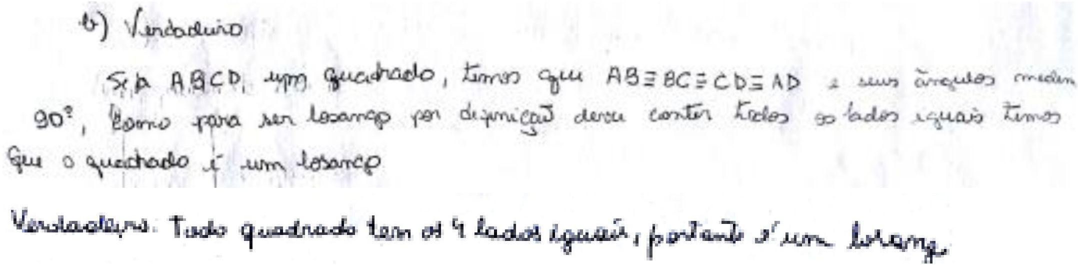
Falso. Contra-exemplo. Trapézio

Falso. O trapézio pode possuir apenas um par de lados paralelos.



Duas respostas apresentaram trapézios como contraexemplos; uma apresentou um quadrilátero qualquer.

b) Todos afirmaram que a afirmação é verdadeira e a justificaram corretamente, utilizando as definições de quadrado e losango, sem recorrer a um caso particular. Isso dá indícios de que os alunos estão evoluindo do empírico para o dedutivo.



c) Todos afirmaram que a sentença é falsa e exibiram contraexemplos semelhantes ao do item *a*.

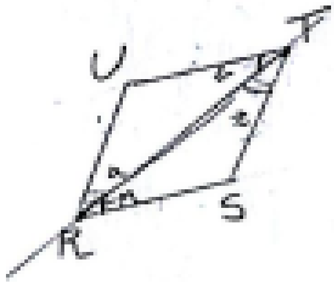
d) Este item provocou discussão e conjecturas, uma vez que os alunos não estavam certos de suas respostas. Seguem-se trechos da discussão que levou à solução:

***Gustavo**: Mas depende do paralelogramo.*

***Fábio**: Mas tem que valer para todos.*

***Bruna**: Mas esses dois ângulos, eu ainda não enxerguei isso, sabia? Porque aqui no caso... Esses dois aqui... São iguais... Esses dois aqui também são iguais... Vai ser a mesma coisa.*

Os alunos referem-se aos ângulos formados entre essas diagonais e os lados.



***Bruna**: Não. Porque eu posso ter esses dois iguais, entendeu?*

***Fábio**: Só no caso do paralelogramo retângulo. Mas só que a gente tá generalizando. Não é Hugo?*

***Hugo**: No retângulo a diagonal não é bissetriz. Pode dividir 90º em 60º e 30º.*

***Gustavo**: Eu coloquei assim: num paralelogramo, quando os lados não têm a mesma medida, então as diagonais não são bissetrizes.*

***Pesquisadora**: Vocês chegaram a alguma conclusão se a afirmação é verdadeira ou falsa?*

Todos responderam que é falsa.

***Pesquisadora**: E vocês estão querendo demonstrar uma afirmação falsa?*

***Fábio**: É que a gente quer mostrar em quais casos daria falso.*

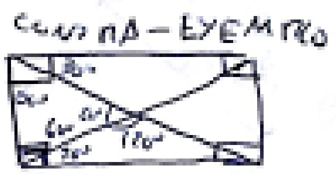
***Marina**: Vamos usar o retângulo, que a gente já sabe que é falso.*

***Fábio**: Mas no retângulo vai dar igual.*

***Marina**: Não vai, não.*

***Fábio**: É. No retângulo a diagonal não é bissetriz, não, e ele é um paralelogramo. É só pegar dois ângulos complementares.*

***Bruna**: É só colocar então: o retângulo é um paralelogramo e suas diagonais não são bissetrizes.*



Os alunos exibiram o retângulo como contraexemplo e concluíram a tarefa. Observaram que em alguns casos as diagonais do paralelogramo não estão contidas nas bissetrizes de seus ângulos e chegaram a conjecturar que isso ocorre em paralelogramos com lados congruentes, mas a discussão não prosseguiu.

e) Este item também gerou bastante discussão, pois os alunos não estavam certos de suas respostas.

***Fábio**: É verdadeira ou falsa? Tem que procurar um paralelogramo que dê falsa. Já fiz com o quadrado, dá certo; com o retângulo, dá certo. No trapézio será que dá certo? Mas o trapézio não é um paralelogramo.*

***Marina**: São as bissetrizes.*

***Fábio**: No retângulo forma, no quadrado forma, no losango forma. Será que não é verdadeiro, não?*

***Bruna**: Eu acho que não.*

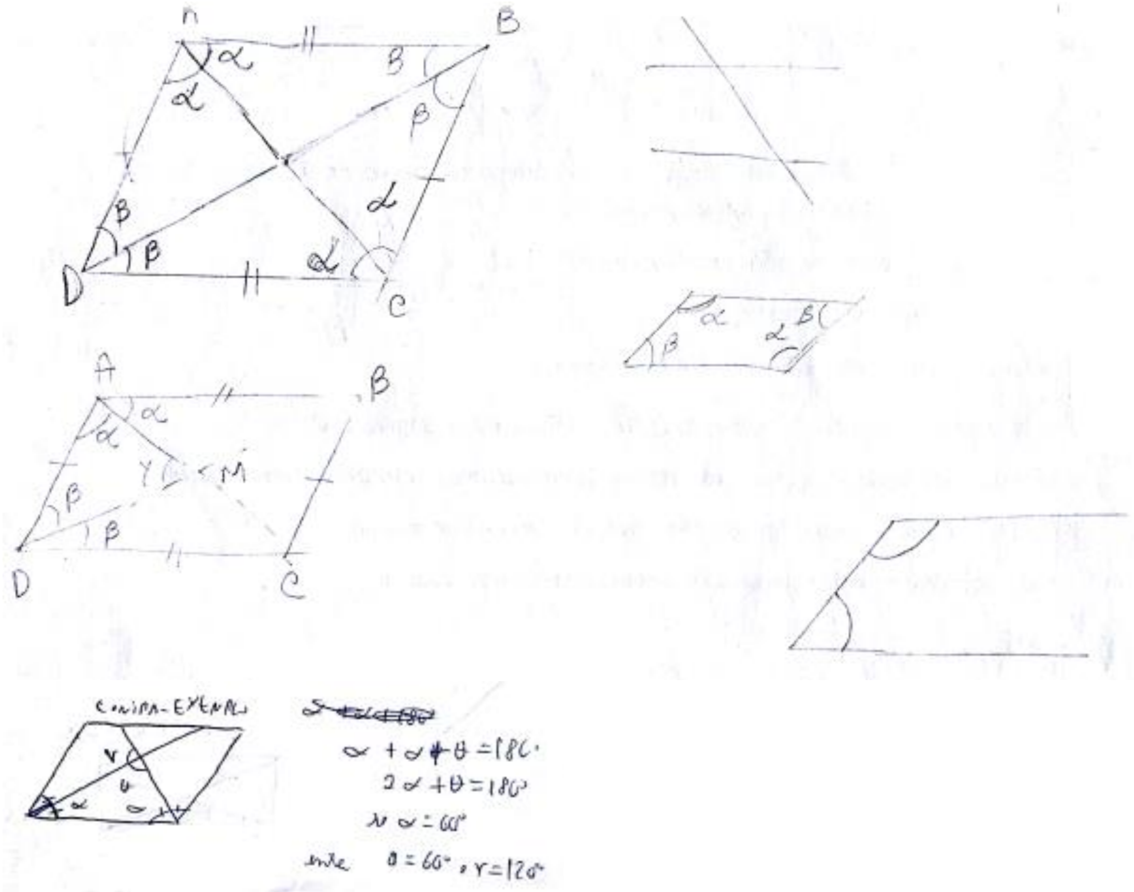
***Marina**: Eu acho que não. Porque no paralelogramo vai dar um triângulo com dois ângulos de 90º, não é não?*

***Fábio**: É a interseção das bissetrizes.*

***Bruna**: No quadrado e no retângulo também dá.*

Marina entendeu que procura os ângulos que as bissetrizes formam com os lados do paralelogramo.

***Fábio**: É esse, ó, formado pelas bissetrizes.*
***Marina**: Ah! Tá... Mas aí vocês estão fazendo com a diagonal, não?*
***Fábio**: É com as bissetrizes que dividem o ângulo ao meio.*
***Marina**: A bissetriz não é isso aqui?*
***Fábio**: A gente estava fazendo errado mesmo. A gente estava fazendo com a diagonal. A diagonal não divide o ângulo ao meio.*
***Bruna**: Agora a gente tem que procurar um que não dê certo.*
***Fábio**: O paralelogramo normal, mas eu acho que vai dar certo com todos.*

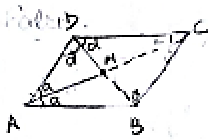


***Bruna**: Do mesmo jeito que você falou, pegando um ângulo de 60º.*
***Marina**: Então aqui é 120º porque a soma tem que dar 360º.*

Os alunos efetuaram os cálculos e observaram que no exemplo as diagonais são perpendiculares. Convenceram-se de que a afirmativa é verdadeira.

***Marina**: Vai ter que provar.*
***Fábio**: Vai ter que generalizar agora. A gente não pode dar mais medidas aos ângulos.*
***Marina**: Chama α, α, β, β. Tem que ser medida arbitrária.*

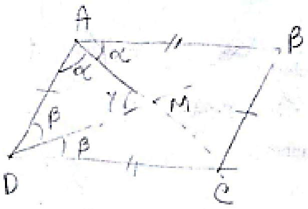
Os alunos realizaram a seguinte demonstração:



Como ABCD é um paralelogramo temos que AB // DC e AD // CD sendo AD a transversal cortando DC e AB, temos que seus ângulos colaterais são suplementares logo $2d + 2a = 180° \Rightarrow d + a = 90°$.

Seja M a interseção das bissetrizes de A e D temos daí um triângulo e como sabemos a soma dos ângulos internos mede 180° logo $d + d + m = 180° \Rightarrow 90° + m = 180 \Rightarrow m = 180 - 90 \Rightarrow m = 90°$

Logo as bissetrizes de um paralelogramo são perpendiculares



$$2\alpha + 2\beta = 180$$
$$2(\alpha + \beta) = 180°$$
$$\alpha + \beta = \frac{180°}{2}$$
$$\alpha + \beta = 90°$$

Seja AMD um triângulo, tais que α, β, γ são ângulos desse triângulo, se $\alpha + \beta = 90°$, daí $\gamma = 90°$

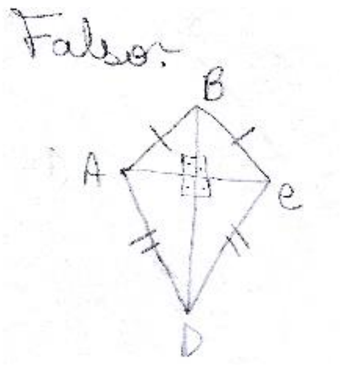
$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$
$$90 + \gamma = 180$$
$$\gamma = 180 - 90$$
$$\gamma = 90$$

Esta tarefa provocou comentários e conjecturas e culminou em uma demonstração. Os alunos tiveram que interpretar o enunciado, convertê-lo ao registro figural e conjecturar para decidir sobre o valor lógico da afirmação, o que os levou a vivenciar momentos de ação, formulação e validação.

Até chegarem ao resultado final, os alunos cometeram equívocos, mudaram de estratégia e apenas partiram para a demonstração quando estavam certos de que a proposição era verdadeira. De Villiers (2001) afirma que só partimos para uma demonstração quando sabemos que a propriedade que queremos demonstrar é válida. Portanto, a função de validação da demonstração não motiva o aluno a partir para uma prova e sim a busca de por que está correta.

Além das funções de validação e explicação, identificamos funções de comunicação e sistematização, pois os alunos sistematizaram suas ideias logicamente e redigiram a demonstração.

f) Os alunos responderam que a afirmação é falsa e exibiram um contraexemplo.



***Marina**: Todo quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares é um losango?*

***Fábio**: Eu coloquei falso.*

***Gustavo**: Essa daí eu coloquei verdade. Quando fui dar um exemplo me deparei com uma falsidade. Aí eu automaticamente mudei. Você vai ter diagonais perpendiculares e não quer dizer que é um losango.*

As colocações dos alunos evidenciam momentos de ação, formulação e validação, ao conjecturarem sobre o problema, fazerem descobertas, formular respostas, comunicá-las e validá-las.

A colocação de ***Gustavo*** evidencia a função de descoberta, embora este exemplo já tenha sido trabalhado em outro momento: *"Eu coloquei verdade. Quando fui dar um exemplo me deparei com uma falsidade. Aí eu automaticamente mudei"*.

g) Os alunos responderam corretamente que a afirmativa é falsa e apresentaram o retângulo como contraexemplo uma vez que o retângulo possui diagonais congruentes e não é um quadrado. Questionamos sobre a recíproca da afirmação:

Todos, exceto ***Hugo***, responderam que a recíproca é verdadeira.

***Hugo**: Não é verdade.*

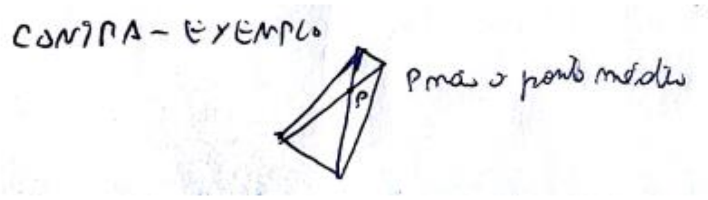
Passaram a conjecturar:

***Gustavo**: Professora, as diagonais têm que ser iguais, mas podem se interceptar de qualquer jeito, não é? Então não vale a recíproca.*

***Pesquisadora**: A única condição que estamos impondo é que as diagonais devem ser congruentes.*

***Marina** e **Fábio**: Então não precisam se interceptar no ponto médio, não.*

***Gustavo**: Então se forem mais ou menos assim... Isso quer dizer que a recíproca não vale. Porque as diagonais são iguais, mas não formam um retângulo.*



***Pesquisadora**: Gustavo iniciou sua construção partindo de diagonais congruentes. Por que antes de concluir a construção vocês já estavam certos de que o quadrilátero representado não era um retângulo?*

***Hugo**: O ponto médio.*

***Pesquisadora**: Realmente. As diagonais não se interceptam no ponto médio, então não é um paralelogramo e, portanto, não é um retângulo.*

Concluímos que ter diagonais congruentes é uma condição necessária, mas não suficiente, para que um quadrilátero seja retângulo. Finalizamos a atividade evidenciando a importância da conjectura, frisando que apenas a demonstração valida o caso geral, ao passo que o contraexemplo justifica uma afirmativa falsa.

Considerações sobre a tarefa 12

Conforme previmos em nossa análise *a priori*, a tarefa 12 se mostrou fértil para que os alunos pudessem utilizar propriedades institucionalizadas em tarefas anteriores. Também tiveram a oportunidade de conjecturar sobre a figura, utilizar contraexemplo e ainda trabalhar com demonstração.

Os momentos de discussão e os registros escritos nos permitiram afirmar que os alunos vivenciaram momentos de ação, formulação e validação, quando conjecturaram sobre o problema, fizeram descobertas e formularam respostas, comunicando-as e validando-as. Observamos que efetuaram conversões dos registros de representação em língua natural e simbólica para o registro figural. Percebemos uma melhor articulação das propriedades e na redação de algumas demonstrações.

Foram contempladas as funções de explicação, sistematização, comunicação e descoberta, de acordo com De Villiers (2001), e as conjecturas foram validadas por meio de demonstrações.

Para esta etapa foram previstas 10 tarefas. As oito restantes foram entregues aos alunos, mas não foram devolvidas. Além disso, não houve disponibilidade dos participantes para que pudéssemos marcar outro encontro para discuti-las. Por isso não apresentaremos a análise *a posteriori* das oito atividades restantes. Essas tarefas e suas respectivas análises *a priori* encontram-se no Apêndice A.

CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, faremos uma reflexão a respeito das contribuições da revisão de literatura, do alcance do referencial teórico e metodológico, dos principais resultados obtidos e da forma como este trabalho contribuirá para a área de educação matemática. Apresentaremos também suas perspectivas futuras.

Este estudo trata de demonstrações geométricas com alunos de um curso de licenciatura em matemática. A escolha foi motivada por inquietações nascidas de minha prática como professora em um curso de licenciatura em matemática, somadas a minha trajetória como estudante e por acreditar na importância da prática das demonstrações, uma vez que todo professor de matemática deve possuir conhecimento mais aprofundado dessa área de e de seus métodos de construção de conhecimento.

O principal objetivo deste trabalho foi elaborar, aplicar e analisar uma organização didática que permitisse minimizar as dificuldades dos alunos de licenciatura em matemática em compreender demonstrações em geometria.

Para cumprir esse objetivo, o primeiro passo foi fazer um levantamento das pesquisas desenvolvidas sobre o tema, o que nos levou a detectar um número reduzido de estudos envolvendo demonstrações geométricas com alunos de licenciatura em matemática. As pesquisas nesse nível de ensino nos apresentaram alguns resultados:

- A forma em que as demonstrações são trabalhadas na formação inicial reflete-se na atuação do futuro professor.
- A formação inicial não está dando conta de formar um professor com autonomia para ensinar demonstrações a seus futuros alunos.
- Alunos de todos os níveis, inclusive de 3.º grau, têm dificuldades na passagem do empírico para o dedutivo.
- Alunos de licenciatura em matemática acreditam que validações empíricas podem generalizar conjecturas.
- Alunos de licenciatura em matemática praticam provas exclusivamente com função de validação.
- Os alunos chegam à graduação com defasagem em relação aos conteúdos geométricos e sem experiência com relação à prática da demonstração.

A revisão de literatura foi fundamental para tomarmos conhecimento do quadro atual de ensino e aprendizagem de demonstrações e para ampliar nossa visão sobre o tema provas e demonstração, permitindo-nos fazer nossas escolhas, definir um problema de pesquisa, captar ideias para investigação, definir um referencial teórico e metodológico e construir nossa organização didática.

Buscamos os pressupostos da teoria das situações didáticas para a elaboração e experimentação de nossa sequência, bem como na análise didática da situação de ensino. Essa escolha foi fundamental, uma vez que em nossa proposta pretendíamos colocar o aluno diante de tarefas que lhe permitissem participar do processo de construção de demonstrações.

Apoiando-nos nessa teoria, desenvolvemos uma organização didática que permitiu proporcionar aos alunos a simulação de um ambiente científico em que tiveram a oportunidade de participar ativamente da construção das demonstrações. Apresentamos aos alunos tarefas de construção geométrica que lhes exigiram justificar matematicamente as técnicas que utilizaram

. Para tanto, testaram conjecturas, formularam e validaram suas hipóteses e socializaram e comunicaram seus resultados, mobilizando conhecimentos anteriores, como congruência de triângulos, teorema das paralelas e mediatriz de um segmento para reconstruir conhecimentos sobre quadriláteros. Desse modo reafirmamos a pertinência dessa teoria para nosso trabalho.

Para a análise cognitiva das produções dos alunos, utilizamos a teoria dos registros de representação semiótica, de Duval. Para apresentar as tarefas que compuseram nossa organização, utilizamos registro em língua natural. Para realizá-las, os alunos articularam apreensões sequencial e perceptiva para interpretar ou fornecer os passos da construção e valeram-se das apreensões operatória, perceptiva e discursiva para justificar matematicamente a validade da técnica utilizada.

A articulação entre os registros de representação (tratamento e conversão) nos permitiu analisar se o conhecimento dos alunos sobre quadriláteros se baseava na apreensão perceptiva, isto é, se confundiam os quadriláteros notáveis com sua representação. Com base nas apreensões da figura, verificamos se os alunos estavam conscientes do estatuto da figura geométrica. Portanto, julgamos pertinente o respaldo da teoria dos registros de representação semiótica, uma vez que possibilitou simultaneamente analisar e minimizar os problemas de aprendizagem sobre quadriláteros.

A teoria antropológica do didático nos forneceu elementos para proceder à análise de livros didáticos e modelar nossa situação de ensino.

Por ser um trabalho realizado no âmbito da educação matemática, julgamos pertinente distinguir os termos ‘prova’ e ‘demonstração’, e para isso consideramos a concepção de

Balacheff (2000). Essa distinção também visa minimizar problemas na interpretação do termo ‘prova’ ao socializarmos os resultados deste trabalho. Utilizamos também os níveis de prova segundo o mesmo autor, que foram fundamentais para classificar os tipos de provas realizados pelos alunos.

Ainda com relação às produções dos alunos, analisamos quais funções da demonstração, segundo De Villiers (2001), foram contempladas. Nas análises preliminares identificamos que os alunos praticavam demonstrações com a exclusiva função de verificação/convencimento, o que pode levá-los a utilizar argumentos empíricos. Dessa forma, buscamos estimular os alunos a considerar outras funções da demonstração, principalmente a função de explicação, uma vez que, segundo este autor, saber o porquê de uma afirmação ser verdadeira pode estimular o aluno a praticar a demonstração.

Visto que nosso objetivo de pesquisa gira em torno da realização de uma intervenção didática baseada em um trabalho experimental, elegemos a engenharia didática, de Artigue (1996), como metodologia de pesquisa. Nos estudos preliminares de nossa engenharia, além da revisão de literatura e da definição do referencial teórico, fizemos a análise das concepções dos alunos do curso pesquisado sobre provas e demonstrações, além de analisar os principais livros de geometria utilizados nesse curso.

Nas análises preliminares obtivemos alguns resultados prévios que foram fundamentais na elaboração da organização:

- Verificamos, com o estudo das concepções, que os alunos investigados, em sua maioria, tiveram o primeiro contato com demonstrações na graduação, praticando-a exclusivamente com a função de validação segundo as funções da demonstração propostas por De Villiers (2001). Para a maioria desses alunos, o papel da demonstração se reduz a validar uma afirmação e consideram que os termos ‘prova’ e ‘demonstração’ têm em matemática o mesmo significado.
- Apesar de verificarmos que os alunos praticaram provas formais, eles mostraram fragilidade no desenvolvimento de uma demonstração e apresentaram deficiências em articular propriedades e conceitos geométricos.
- Verificamos que os livros abordam quadriláteros de maneira direta, no sentido da formalização para a resolução de problemas. A organização didática do tópico quadrilátero não parece ter potencial para permitir ao aluno participar da construção da teoria, mas apenas compreender o que foi feito por outro.

- Quanto às tarefas propostas para o aluno, nos três livros analisados estas têm potencial para induzir os alunos a elaborar conjecturas, pensar sobre a figura, fazer conversões entre registros e evoluir da apreensão perceptiva para a discursiva. No entanto, as obras analisadas não exploram suficientemente esse potencial para que o aluno adentre os processos de provas e demonstrações.

Na fase experimental da engenharia, após identificar, nas dimensões epistemológica, cognitiva e didática, os problemas que influenciam a manutenção do quadro atual de ensino e aprendizagem de demonstrações, decidimos quais variáveis globais e seus valores fundamentariam a construção de nossa sequência. Com base nessas variáveis, organizamos e aplicamos nossa sequência de ensino de modo a:

- fazer com que a abordagem das tarefas seguisse a ordem inversa da proposta nos livros analisados. As tarefas aplicadas têm o intuito de permitir aos alunos vivenciar momentos de ação, formulação e validação, assumindo papel ativo diante das situações, para culminar na institucionalização, como propõe Brousseau (2008).
- proporcionar aos alunos tarefas em que pudessem efetuar a coordenação entre os registros de representação e entre as apreensões da figura, conforme Duval (2011, 2012), de modo a não confundirem um objeto geométrico com sua representação e a reconhecerem o estatuto das figuras geométricas, dos axiomas, dos teoremas e das definições.
- solicitar justificativas matemáticas das construções, demandando que os alunos praticassem a demonstração considerando, além da função validação, outras funções da demonstração, como explicação, sistematização, comunicação e descoberta, conforme De Villiers (2001).

Na análise *a priori*, estabelecemos os objetivos de cada tarefa, definimos e manipulamos nossas variáveis locais de modo a cumprir os objetivos estabelecidos e levantamos hipóteses que foram validadas ou refutadas na análise *a posteriori*.

A seguir, vamos fazer a validação – última fase da engenharia didática – comparando as análises *a priori* e *a posteriori* e apresentando os principais resultados de nossa pesquisa.

Principais resultados

A organização didática proposta neste trabalho constou de três partes. Apresentaremos os principais resultados de cada etapa e concluiremos com as contribuições desta pesquisa para a educação matemática.

Na primeira, as tarefas envolvem definições de quadriláteros e a relação entre eles, utilizando simultaneamente os três registros de representação semiótica: a língua natural, o registro simbólico e o registro figural.

Nesta etapa, evidenciamos dificuldades conceituais relativas à caraterização de quadriláteros notáveis e às relações entre eles. Algumas dessas dificuldades estão relacionadas com o foco dado à apreensão perceptiva quanto às justificativas propostas pelos alunos. Esse fato é reforçado por Duval (2009a, b) quando afirma que a limitação da representação de um objeto matemático a um único registro pode provocar confusão entre o objeto e sua representação. Além disso, a apreensão perceptiva é o primeiro olhar do aluno sobre a figura e pode bloquear as outras apreensões.

Constatamos também que a experiência que os alunos vivenciaram até o momento com a geometria se restringe à geometria intuitiva (conhecimentos baseados em experiências empíricas) e à característica de uma geometria científica (evidenciada no momento em que se afirma que a melhor maneira de dar início à geometria é pelas noções primitivas). A análise do perfil dos alunos e de suas concepções sobre o ensino de geometria dá indícios de que os alunos não vivenciaram em sua formação momentos favoráveis à construção de conhecimentos/saberes geométricos.

Quanto a essa primeira etapa, observamos que houve uma aceitação da tarefa e as discussões apresentadas evidenciam que os sujeitos desta pesquisa puderam vivenciar momentos de ação, com indícios de mudanças de concepções e conscientização da necessidade da coordenação entre os registros e da participação do aluno na construção do conhecimento para uma real aprendizagem e autonomia em sua prática futura.

Os resultados obtidos na primeira etapa da sequência se assemelham aos obtidos na pesquisa de Maioli (2001), especialmente quanto à autoridade dada aos livros didáticos, à ênfase atribuída ao registro figural e à dificuldade relacionada à geometria.

A segunda etapa foi composta de dez tarefas envolvendo construções geométricas em um ambiente papel-lápis que solicitam provas e demonstrações.

Pediu-se que os alunos construíssem quadriláteros notáveis e apresentassem a justificativa matemática de cada construção. Essa configuração parece ter-lhes possibilitado conjecturar e validar propriedades dos quadriláteros.

As escolhas das variáveis e os valores a elas atribuídos permitiram aos alunos mobilizar diferentes conhecimentos, uma vez que cada escolha levou a diferentes estratégias de construção e, consequentemente, requereu uma justificativa matemática correspondente.

As escolhas feitas permitiram a institucionalização das principais propriedades dos quadriláteros notáveis.

A terceira etapa constou de 10 tarefas, das quais apenas duas foram aplicadas. Essa etapa teve como objetivo permitir ao aluno a utilização das definições dos quadriláteros e a aplicação das propriedades que foram institucionalizadas em etapas anteriores, e também trabalhar condições necessárias e suficientes, destacar hipótese e tese de um teorema e trabalhar teorema recíproco, assim como explorar a redação de um teorema.

As situações propostas nessa etapa permitiram aos alunos efetuar conversões do registro em língua natural para o figural, e na validação foram conduzidos a utilizar o registro simbólico e em língua natural.

Com os resultados das tarefas das duas últimas etapas, constatamos que:

- Houve um avanço em termos de aprendizagem em relação aos conhecimentos geométricos, uma vez que ao final da terceira etapa os alunos já mobilizavam conhecimentos de mediatriz de um segmento, teorema das paralelas, congruência de triângulos, propriedades de quadriláteros, bissetriz e triângulo isósceles na validação da técnica utilizada.
- Em nenhum momento os alunos recorrem a propriedades de simetria axial para justificar suas construções. Atribuímos essa ausência ao fato de o aluno procurar outras alternativas para validar suas técnicas.
- Os alunos tenderam a repetir modelos de demonstração, recorrendo sempre à congruência de triângulos para validar suas técnicas e evitando aplicar as propriedades institucionalizadas.
- Houve redução no uso de argumentos empíricos para validação das técnicas.
- Os alunos parecem ter tomado consciência das limitações da apreensão perceptiva, passando a realizar interpretação discursiva da figura, o que evidencia a tomada de consciência do estatuto das figuras geométricas, dos axiomas, dos teoremas e das definições.
- Há indícios de que os alunos compreenderam a noção de contraexemplo já que estes o utilizaram corretamente.
- A análise das produções dos alunos mostra que houve uma evolução de provas pragmáticas para provas conceituais (BALACHEFF, 2000).
- Os alunos evoluíram na escrita da demonstração, já realizando algumas demonstrações bem estruturadas.

- Observamos nas justificativas dos alunos outras funções da demonstração, além da função de validação, como as de explicação, sistematização e comunicação, propostas por De Villiers (2001);

Diante das constatações apresentadas, acreditamos dispor de elementos para responder nossa questão de pesquisa: Situações de formação que articulam provas e demonstrações em geometria, mais especificamente em quadriláteros, permitem a alunos de licenciatura em matemática a (re)construção de saberes/conhecimentos relativamente a esse conteúdo?

As reflexões apresentadas nas análises e os resultados expostos neste capítulo permitem afirmar que as tarefas propostas, articulando provas e demonstrações, se mostraram férteis para que os alunos pudessem vivenciar as fases da teoria das situações didáticas (BROUSSEAU, 2008), efetuar conversões de registros de representação semiótica e tratamentos e coordenar as apreensões da figura, contribuindo assim para a (re)construção dos saberes/conhecimentos relativamente a quadriláteros, prova e demonstração.

Elaboramos, aplicamos e analisamos uma organização didática que parece ter minimizado as dificuldades de alunos de um curso de licenciatura em matemática em compreender demonstrações em geometria, cumprindo assim nosso objetivo geral. Podemos afirmar também que os objetivos específicos foram cumpridos, uma vez que:

- investigamos as concepções dos alunos a respeito de provas e demonstrações;
- analisamos as organizações didáticas e matemáticas dos livros de Geometria adotados em cursos de licenciatura em matemática;
- proporcionamos aos alunos tarefas que articulam provas e demonstrações geométricas;
- proporcionamos aos alunos tarefas que contemplam mudanças e coordenação de registros de representação.

Embora os resultados desta tese constituam produto de uma experiência realizada com uma pequena amostra, esperamos ter contribuído para uma reflexão sobre a metodologia adotada na disciplina ‘Geometria plana’ dos cursos de licenciatura em matemática de nosso país e, portanto, para a formação de professores.

Pessoalmente, vivencio a certeza de que os novos conhecimentos adquiridos ao longo desta pesquisa de doutorado foram determinantes para que houvesse uma reflexão quanto a minha prática como pesquisadora e formadora de professores.

Finalizo esta investigação confessando os desafios enfrentados, como professora com formação até então em matemática pura, em aplicar uma sequência de ensino fundamentada nos pressupostos da teoria das situações didáticas, a qual, por fim, permitiu minimizar as dificuldades dos alunos em compreender demonstrações em geometria.

Deixamos para pesquisas futuras duas questões:

1. Qual seria a influência deste estudo sobre as futuras práticas docentes desses alunos que participaram desta intervenção?
2. Qual seria a influência da prática de professores sem formação em educação matemática sobre o ensino e a aprendizagem de geometria nos cursos de licenciatura? Mais especialmente, como lidam com problemas que envolvem provas e demonstrações, no sentido adotado por Balacheff (2000)?

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A. Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: **Reunião anual da Anped**, Caxambu, MG, n. 30, p. 1-18. 2007. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2012.

ALMOULOUD, S.A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2010.

ALMOULOUD, S. A. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. **Educar em Revista**, n. especial 1/2011, p. 191-210, 2011.

ALMOULOUD, S.A.; MELLO, E.G.S. Iniciação à demonstração: apreendendo conceitos geométricos. In: **Reunião anual da ANPED**, Caxambu-MG, n.23, p. 1-18. 2000. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/23/trabtit2.htm#gt19>. Acesso em: 15 jan. 2012.

ALMOULOUD, S.A.; SILVA, M.F.; FUSCO, C.A.S. Provar e demonstrar: um espinho nos processos de ensino e aprendizagem da matemática. **RPEM**, Campo Mourão, v. 1, n. 1, 2012.

ALMOULOUD, S.A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA. M. J.F.; CAMPOS, T.M.M.A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, set – out – nov – dez, n. 027. Associação Nacional de Pós – graduação e Pesquisa em Educação, pp. 94 – 108, São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf. Acesso 28/08/2015>.

AMORIM, M.C. **Argumentação e prova:** uma situação experimental sobre quadriláteros e suas propriedades. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). 144p. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

ANNETTE, B.M. Evolution des conceptions et de l'argumentation en geometrie chez les eleves: paradigmes et niveaux de Van Hiele a l'articulation CM2– 6$^{\text{ème}}$. 595 f. Tese (Doutorado) - Universite Paris, Paris, 2008. Disponível em https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/429763/filename/these.pdf. Acesso em 25/08/2014.

ARSAC, G., Origin of Mathematical Proof: History and Epistemology. In Boero, P. (org.) **Theorems in School:** from History, Epistemology and Cognition to classroom practice, Rotterdam: Sense Publishers, p. 27-42, 2007. Disponível em: <https://www.sensepublishers.com/media/1175-theorems-in-school.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2013.

ARTIGUE, M. Ingéniere didactique. In: BRUN, J. (org) **Didactique des Mathématiques. Lousanne**, Paris, p.243-274, 1996 Disponível em: <http://www.kleio.ch/HEP_VS/hepvsvideo/8_INGENIERIE_DIDACTIQUE_ARTIGUE.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2014.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). **Mathematics Teachers and Children**. London: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas** (Trad. Pedro Gómez). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 2000. Disponível em <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf>. Data do acesso: 12 de Janeiro de 2013.

BALACHEFF, N. **The researcher epistemology:** a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, n. 109, Grenoble, 2004. Disponível em: < http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/>. Data do acesso: 12 de janeiro de 2013

BALACHEFF, N. Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), **Explanation and Proof in Mathematics.** Philosophical and Educational Perspectives (pp. 115-136). New York: Springer, 2010. Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-0576-5_9#page-2>. Acesso em 12 de janeiro de 2013.

BARBOSA, J.L.M. **Geometria Euclidiana Plana**. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

BONGIOVANNI, V. As diferentes definições dos quadriláteros notáveis. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: IME-USP, n. 55, p. 29-32, 2004.

BONGIOVANNI, V. Sobre definições de trapézio isósceles. **Revista do professor de Matemática**, São Paulo: IME-USP, n. 72, p. 9-10, 2010.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. 2. Ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blüncher ltda,1996

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: Ministério da Educação, 1997.

BROUSSEAU, G. Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique de Mathématique**, Vol. 7, n. 2, pp. 33 – 115, La pensée sauvage. Grenoble. 1986.

BROUSSEAU, G. **La Theorie des Situations Didactiques**. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. 1997 Disponível em <http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf >. Acesso em 22 de março de 2014.

BROUSSEAU, G. **Les erreurs des élèves en mathématiques**: étude dans le cadre de La thérorie des situations didactiques**,** n.57, pp. 5-30, 2000-2001. Disponível em http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/57/57x1.pdf Acesso em 25 de março de 2014.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2008.

BUSQUINI, J.A. **O significado da demonstração geométrica em um curso de licenciatura em matemática**: um estudo de caso. Dissertação (Mestrado em Ciências e Práticas Educativas), Franca, São Paulo: Universidade de Franca, 124 p., 2003.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique** – Du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée sauvage, Grenoble, deuxième édition augmentée, 1991.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n.2, p. 221-266, 1999.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes**: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na construção desse conhecimento. 2004. 278f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, São Paulo, 2004

DAMM, R.F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010, p.167-188.

DE VILLIERS, M.D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Shetchpad. Tradução de Eduardo Veloso**. Educação e Matemática**, n. 62, p. 31-36, 2001. Disponível em < http://www.apm.pt/apm/revista/educ63/Para-este-numero.pdf>. Data de acesso: 20 de janeiro de 2013.

DE VILLIERS, M.D. **Por uma compreensão dos diferentes papeis da demonstração em Geometria Dinâmica**. Tradução de Rita Bastos, 2002. Disponível em < http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat2.pdf>. Data de acesso: 20 de janeiro de 2013.

DIAS, M.S.S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática**: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. 214 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7 ed. v. 9. São Paulo: Atual, 2009.

DOMINGUES, H.H. A **Demonstração ao longo dos séculos**. Bolema, Rio Claro, ano 15, n.18, p.46-55, 2002.

DORO, A. T**., Argumentação e Prova: Análise de Argumentos Geométricos de Alunos da Educação Básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). 125p. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DUARTE, V.F. **Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), 237p. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007

DUVAL, R. Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. **Petit x**, n. 31, p. 37-61, 1992.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2009a. p. 11-33.

DUVAL, R., **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais. Coleção Contexto da Ciência. São Paulo: Livraria Editora da Física, 2009b.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar**:** os registros de representação semióticas. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti, **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem**. ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012.

FERREIRA, F.A. **Demonstrações em geometria euclidiana:** o uso da sequência didática como recurso metodológico em um curso de licenciatura de matemática**.** 2008. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Belo Horizonte, 2008.

FERREIRA FILHO, J.L. **Um estudo sobre Argumentação e Prova envolvendo o Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). 189f. 2007. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FETISSOV, A.I. **A demonstração em Geometria**. Tradução: Hygino Domingues, Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo; atual, 1995.

FLORES, C.R.; MORETTI, M.T. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V 5 1.1, p. 5 -13, UFSC: 2006. Disponível em: file:///C:/Users/lab/Downloads/12986-40040-1-PB%20(1).pdf. Acesso em 28/08/2015.

FONSECA, C.; BOSCH, M.; GASCÓN, J El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinômios **Educación Matemática**, vol. 22, n. 2, 2010, p. 5-34

GARNICA, A.V.M. As demonstrações em educação matemática: Um ensaio. **Bolema**, n.18, p. 91-122, 2002.

GATTI, B.A.; BARRETTO, E.S.S. **Professores do Brasil**: impasses e desafios, Brasília: UNESCO, 2009. 294 p. ISBN: 978-85-7652-108-2. Relatório de Pesquisa, DF:UNESCO, 2009.

GRAVINA, M.A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético- dedutivo**. 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2001.

GRINKRAUT, M.L. **Formação de professores envolvendo a Prova Matemática:** Um olhar sobre o desenvolvimento Profissional. 2009. 348f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

HANNA, G., Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in mathematics**, 44 (1-2), p. 5-23, 2000.

HANNA, G.; BARBEAU, E. Proofs as bears of mathematics knowledge. **ZDM.** The International Journal on Mathematics Education,n. 40, p. 345-353, 2008.

HANNA, G.; JAHNKE, H.N.; PULTE, H. **Explanation and proof in mathematics**. London: Springer Science Business Media, 2010.

HEINZE, A.; CHENG, Y-H.; UFER, S. Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. **ZDM**, Heidelberg: Springer Berlin**,** v. 40, n. 03, p.443-453, 30 abr. 2008.

HILBERT, D. **Fundamentos da Geometria**. Tradução de Paulino Lima Fontes, A. J. Franco de Oliveira, Gradativa Publicações, Ltda. 1.ed. Lisboa, 2003.

ICMI STUDY CONFERENCE, 19. Proof and proving in mathematics education. **Proceedings**... The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan, 2009. v. 1.

JAHN, A.P.; HEALY, L.; PITTA COELHO, S. Concepções de professores de Matemática sobre Prova e seu Ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In **Reunião da ANPED**, 30, Caxambú, ANAIS ELETRÔNICOS. Caxambú: 2007. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/concepcoes.pdf> Acesso em: 14 nov. 2013.

JAHNKE, H.N. Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. **ZDM**, Essen, Germany, v. 40, n. 3, p. 363-371, 2008.

JONES, K. Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, 18(1&2), p. 29-34. University of London, London, 1998.

KNIPPING, C. A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. **ZDM**, NS - Canadá, v. 40, n. 03, p.427-441, 2008.

KNUT, E.J. Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 95, n. 7, p. 61–88, 2002.

LEANDRO, E.J. **Saberes mobilizados por professores quando o foco são as provas matemáticas: Um estudo de caso**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). 208p. 2012. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, Blumenau, n. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

MAIOLI, M. **Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros**, 2002, 162f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

MARIOTTI, M.A. Proof and Proving in Mathematics Education. **Handbook of research on the psychology of mathematics education:** Past, present and future, p.173-204, 2006.

MAZIERO, L.M., **Quadriláteros: Construções geométricas com o uso de régua e compasso**, 2011, 88f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

MELLO, Elizabeth G. S. da. **Demonstração**: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino de geometri". Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), 187p, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

NASSER, L.; TINOCO, L.A. **Argumentação e prova no ensino de matemática**. Instituto de Matemática (Projeto Fundão), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

NASSER, L.; TINOCO, L.A., **Curso Básico de Geometria – Enfoque didático**. Módulo II – Visão Dinâmica da congruência de figuras. UFRJ. Instituto de Matemática. Projeto Fundão. 3.ed. Rio de Janeiro, 2008.

NUNES, J.M.V. **A prática da Argumentação como Método de Ensino**: O Caso dos Conceitos de Área e Perímetro de Figuras Planas. Tese (Doutorado), 220p. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana**: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de matemática em Moçambique. Tese (Doutorado) 325p. – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

PAIS, L. C. In: MACHADO, S.D.A. **Educação matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010.

PAVANELLO, R.M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, ano 1,n. 1, p. 7-17, set. 1993.

PASINI, M.F. **Argumentação e Prova: Exploração a pertir da análise de uma coleção didática** 2007. 225f. Dissertação(Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

PERRENOUD, P. Formar professores em contextos sociais em mudança: prática reflexiva e participação crítica. Tradução de Denice Bárbara Catani. **Revista Brasileira de Educação**. n.12, p.5-21, 1999. Disponível em: http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1999/1999_34.htm> . Data do acesso: janeiro, 2014.

PIETROPAOLO, R.C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática**. 2005, 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PONTE, J. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. Matos e J. Ponte (Coords.), **Educação Matemática** (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992.

REID, D.A.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Edication:** Research, Learning and teaching. Acadia University, Wolfville, Canada. Cap. 1. pp. 3 – 24, 2010.

REZENDE, E.Q.; QUEIROZ, M.L.B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas: Editora Unicamp, 2008.

ROQUE, T. M. História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro, Zahar, 2012.

SADOVSKY, P. **Teoría de las situaciones didácticas**: um marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. 2005. Disponível em: <https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2015.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica?** São Paulo: Brasiliense, 1983.

SANTOS, R.C. **Conteúdos Matemáticos na Educação Básica e sua abordagem em cursos de Licenciatura em Matemática**, 2005, 234f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

SERRALHEIRO**,** T.D. **Formação de Professores:** conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, Alvesmar Ferreira da. **Desenvolvimento de uma sequência didática sobre quadriláteros e suas propriedades**: contribuições de um grupo colaborativo. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), 93p, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SOUZA, M.E.C.O. **A questão da Argumentação e Prova na Matemática escolar:** o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. 2009. 115f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários. **Revista Brasileira de Educação**, v. 1, n. 13, p. 5-24, 2000. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/pdf/rbedu/n13/n13a02.pdf>. Acesso em: 03 de novembro de. 2013.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA**. Projeto Político-Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. Disponível em: <http://www.uneb.br/prograd/files/2014/07/Matematica-Licenciatura-Alagoinhas-Campus-II.pdf>. Acesso em 5 Mar. 2012

VIEIRA, W.Z.V. **Argumentação e Prova**: uma Experiência em Geometria Espacial no Ensino Médio. 2007. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

WALLE, J.A. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6ª Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Tradução de Paulo Henrique Colonese.

SÍTIOS PESQUISADOS

Bancos de teses e dissertações da Capes e dos Programas de Doutorado/Mestrado em Educação e/ou Educação Matemática:

Universidade Federal do Pará: https://mestrado.prpg.ufg.br/

Unesp: http://www.athena.biblioteca.unesp.br/F?func=findb&request=unesp&find_code=wnv&local_base=T89

PUC Minas: http://www.sistemas.pucminas.br/BDP/SilverStream/Pages/pg_BDPPrincipal.html

USP: http://www.teses.usp.br/index.php?option=com_jumi&fileid=11&Itemid=76&lang=pt-br&filtro=geometria&pagina=38

Universidade de Londrina: http://www.uel.br/pos/mecem/dissertacoes.htm

Universidade Federal de Ouro Preto: http://ipe.ufop.br/tede/

Universidade Federal de Santa Catarina: http://ppgect.ufsc.br/

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Centro de Ciências humanas e Sociais – Programa de Pós Graduação em Educação.: https://sistemas.ufms.br/sigpos/portal/trabalhos/listar

Rio de Janeiro – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/

PUC-SP: http://www.pucsp.br/pos-graduacao/mestrado-e-doutorado/educacao-matematica#dissertacoes-e-teses-defendidas

Capes: http://bancodeteses.capes.gov.br/#0

https://tel.archives-ouvertes.fr/

http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/theses/recentes/

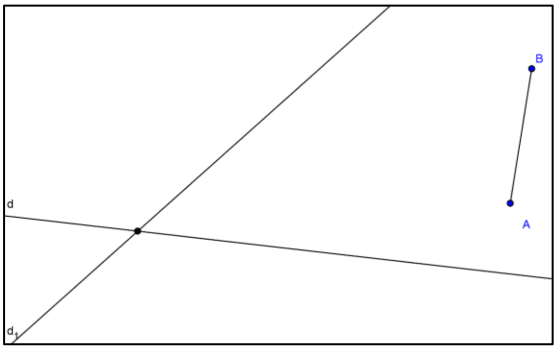
APÊNDICE A

Apresentamos neste apêndice as tarefas que não conseguimos experimentar.

Tarefa 10: Construir um paralelogramo em que dois vértices pertencem a duas retas concorrentes.

Consideram-se dois pontos *A* e *B* e duas retas *d* e d_1 concorrentes e diferentes de $\overleftrightarrow{AB}$. Existe um ponto *C* sobre d_1 e um ponto *D* sobre *d* tal que o quadrilátero *ABCD* seja um paralelogramo? Justifique.

Figura 105. Figura suporte da Tarefa 10.

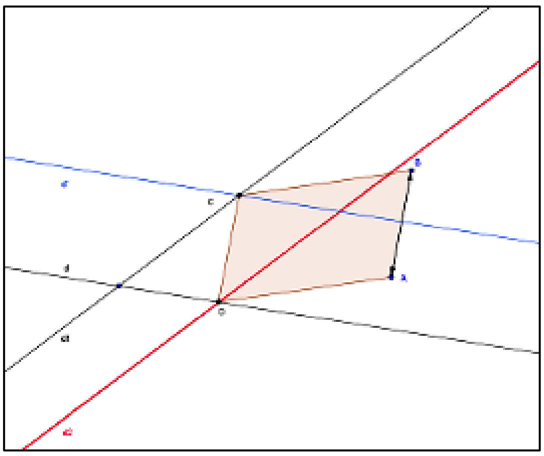


Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

Análise *a priori* da tarefa 10.

Técnica 1. Construímos a imagem da reta d pela translação de vetor $\overrightarrow{AB}$. As retas d' e d_1 interceptam-se no ponto C. Depois construímos a imagem d_2 da reta d_1 pela translação de vetor $\overrightarrow{BA}$. As retas d_2 e d interceptam-se no ponto D. Como *CD* = *BA*, o paralelogramo *ABCD* é a solução do problema.

Figura 106. Figura-suporte da Técnica 1, referente à tarefa 10.



Fonte: Dados da pesquisa, com base em Maziero (2011).

A descrição da técnica justifica a validação matemática da construção.

Uma das técnicas de construção da tarefa 1 foi a utilização da translação de vetores. Acreditamos que a utilização dessa técnica poderá facilitar a construção solicitada na tarefa 10, uma vez que os alunos já terão vivido as fases de ação, formulação e validação e presumimos que tenha ocorrido aprendizagem.

Bloco tecnológico-teórico: O processo de construção deve ser justificado apoiando-se nas seguintes propriedades geométricas: Translação de vetores; definição de paralelogramo; propriedade do paralelogramo. Todos já contemplados em tarefas anteriores.

Tarefa 13

O seguinte raciocínio está correto? Por quê? Se não o corrija.

a) *ABCD* é um paralelogramo, pois ele tem dois lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos.

b) *ABCD* é um paralelogramo, pois suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ têm um ponto comum.

c) *MNPQ* é um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares: é um losango.

d) Um retângulo é um paralelogramo particular.

Análise *a priori* da tarefa 13.

Com esta tarefa objetivamos que o aluno:

- Apliquem corretamente as propriedades dos quadriláteros institucionalizadas;
- Atentem para o enunciado de um problema.
- Caracterizem os quadriláteros notáveis: paralelogramo, losango e retângulo.

(T_{13a}) *ABCD é um paralelogramo, pois ele tem dois lados* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *paralelos*.

O aluno alcançará a resposta correta caso ele afirme que o raciocínio não está correto, pois um par de lados paralelos não é suficiente para garantir que um quadrilátero é um paralelogramo. Utilizando uma das caracterizações do paralelogramo que já foi institucionalizada, o aluno deverá corrigir a afirmação da seguinte forma:

ABCD é um paralelogramo, pois ele tem dois lados $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *paralelos e congruentes.*

É provável também que os alunos corrijam a afirmação, utilizando a definição de paralelogramo, da seguinte forma:

ABCD é um paralelogramo, pois ele tem dois pares de lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *e* $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ *paralelos.*

(T_{13b}) *ABCD é um paralelogramo, pois suas diagonais* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *têm um ponto comum*.

O aluno alcançará a resposta correta caso ele afirme que o raciocínio não está correto, pois ter diagonais que se interceptem em um ponto não é suficiente para garantir que um quadrilátero é um paralelogramo. Utilizando a propriedade referente às diagonais de um paralelogramo o aluno poderá corrigir a afirmação da seguinte forma:

ABCD é um paralelogramo, pois suas diagonais $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *se interceptam nos seus pontos médios.*

(T_{13c}) *MNPQ é um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares: é um losango*.

O aluno alcançará a resposta correta caso ele afirme que o raciocínio não está correto, pois ter diagonais perpendiculares não é suficiente para garantir que um quadrilátero seja um losango. Utilizando a propriedade referente às diagonais de um losango o aluno poderá corrigir a afirmação da seguinte forma:

MNPQ é um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares e se interceptam em seus pontos médios: é um losango.

Como esta propriedade já foi abordada em outras tarefas desta sequência acreditamos que os alunos a responderão corretamente.

(T_{13d}) *Um retângulo é um paralelogramo particular*.

O aluno responderá corretamente esta tarefa caso ele afirme que o raciocínio está correto. Uma vez que o retângulo satisfaz a definição de paralelogramo.

(T_{13}) é mais uma tarefa que permite consolidar as propriedades dos quadriláteros notáveis institucionalizadas. Acreditamos que os alunos serão bem sucedidos na execução desta tarefa uma vez que estas propriedades já terão sido discutidas em tarefas anteriores.

Tarefa 14

a) Explique como você construiria um quadrilátero plano *UVWZ* que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes. Faça a construção.

b) Que quadrilátero é esse?

c) Construa as diagonais de *UVWZ*. Elas são perpendiculares? Elas são congruentes? Demonstre sua resposta.

d) Explique como você construiria um paralelogramo *RSTU* cujas diagonais são perpendiculares e congruentes. Faça a construção. *RSTU* é um losango? É um quadrado? Por quê?

Análise *a priori* da tarefa 14.

Com esta tarefa objetivamos que o aluno:

- Utilize a língua natural para descrever um procedimento para a construção geométrica de um quadrado;
- Relacionar o quadrado com o paralelogramo, o retângulo e o losango.

(T_{14a}, T_{14b}) *Explique como você construiria um quadrilátero plano UVWZ que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes. Faça a construção. Que quadrilátero é esse*?

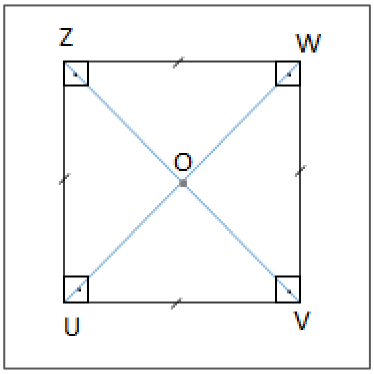
Ao realizar esta tarefa o aluno provavelmente já reconhece o quadrilátero que possui os quatro lados e os quatro ângulos congruentes como um quadrado. Portanto, esperamos que este recorra à descrição dos passos da tarefa 7 a qual solicita a construção de um quadrado a partir de um lado.

O aluno também poderá utilizar o par de esquadros para construir retas paralelas e perpendiculares de modo que o quadrilátero construído seja um quadrado.

(T_{14c}) *Construa as diagonais de UVWZ. Elas são perpendiculares? Elas são congruentes? Demonstre sua resposta*.

Nesta tarefa o aluno poderá recorrer à figura, isto é, a apreensão perceptiva para formular sua resposta. Esperamos que os mesmos respondam que a única forma de garantir a generalidade da afirmação é por meio da demonstração.

Figura 107. Figura suporte da tarefa (T_{14b}).



Fonte: Dados da pesquisa.

Os triângulos *UWZ* e *ZWV* são congruentes pelo caso LAL (Lados e ângulos congruentes do quadrado). Logo, *ZV* é congruente a *UW*.

Porém pretendemos que os alunos articulem os seguintes argumentos: O quadrado possui os quatro ângulos retos, logo o quadrado é um retângulo. Como o retângulo possui diagonais congruentes, então o quadrado possui diagonais congruentes, Para demonstrar que o quadrado possui diagonais perpendiculares o aluno poderá demonstrar da seguinte forma: como o quadrado possui os lados iguais, então possui também os lados opostos iguais. Logo, *UVWZ* é um paralelogramo e, portanto, suas diagonais se interceptam nos seus respectivos pontos médios.

Temos assim que $\overline{WO}$ é mediana relativa à base $\overline{ZV}$ do triângulo isósceles *ZWV* e, portanto, $\overline{WO}$ também é altura relativa a $\overline{ZV}$. Desse modo podemos afirmar que o ângulo formado pelas diagonais $\overline{ZV}$ e $\overline{UW}$ do quadrilátero *UVWZ* é reto. Logo, as diagonais desse quadrilátero são perpendiculares.

Outro argumento que poderá ser utilizado pelos alunos é que se *UVWZ* é um quadrilátero de lados congruentes, então esse quadrilátero é um losango e o losango possui diagonais perpendiculares. Logo, as diagonais do quadrado são perpendiculares.

(T_{14d}) *Explique como você construiria um paralelogramo RSTU cujas diagonais são perpendiculares e congruentes. Faça a construção. RSTU é um losango? É um quadrado*? *Por quê*?

Esperamos que os alunos afirmem que basta construir dois segmentos congruentes, perpendiculares e que se interceptem em seus respectivos pontos médios. Pois ter diagonais que se interceptem em seus respectivos pontos médios é uma condição necessária a suficiente para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

Já foi abordado em tarefas anteriores que para um quadrilátero ser um losango basta que este possua diagonais perpendiculares que se interceptem em seus respectivos pontos médios. Nesta tarefa pretendemos que o aluno observe que temos agora um paralelogramo com diagonais perpendiculares. O fato de *RSTU* ser um paralelogramo implica que suas diagonais se interceptam nos pontos médios de ambas. Logo, este paralelogramo é um losango.

RSTU é um paralelogramo de diagonais congruentes, então esse paralelogramo é um retângulo.

Se *RSTU* é um losango (possui todos os lados congruentes) e um retângulo (possui todos os ângulos retos), então *RESU* é um quadrado.

Com esta tarefa o aluno poderá estabelecer as relações entre os quadriláteros notáveis, articular argumentos exercitando a construção de uma demonstração e estabelecer condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja um quadrado.

Com esta tarefa retornamos às construções geométricas, porém em um sentido inverso. Isto é, as construções podem ser livres, sendo garantidas pelas propriedades já institucionalizadas. Desse modo, esta tarefa tem potencial para articular as apreensões perceptiva e discursiva.

Tarefa 15

Justifique as afirmações:

Para demonstrar que um quadrilátero é um:

a) **Retângulo**, basta mostrar que é um paralelogramo que tem um ângulo reto.

b) **Losango**, basta mostrar que um paralelogramo que tem dois lados consecutivos congruentes.

c) **Quadrado**, basta mostrar que é um losango com um ângulo reto.

Análise *a priori* da tarefa 15.

Com esta tarefa objetivamos que o aluno fixe os conceitos e propriedades do retângulo, do losango e do quadrado.

(T_{15a}) *Para demonstrar que um quadrilátero é um **Retângulo**, basta mostrar que é um paralelogramo que tem um ângulo reto.*

Como em um paralelogramo os ângulos consecutivos são suplementares e os ângulos opostos são congruentes, então se um paralelogramo possui um ângulo reto os demais também serão retos. Logo, um paralelogramo com um ângulo reto é um retângulo.

(T_{15b}) *Para demonstrar que um quadrilátero é um **Losango**, basta mostrar que um paralelogramo que tem dois lados consecutivos congruentes*.

Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, então um paralelogramo com dois lados consecutivos congruentes terá todos os lados congruentes. Logo esse paralelogramo será um losango.

(T_{15c}) *Para demonstrar que um quadrilátero é um **Quadrado**, basta mostrar que é um losango com um ângulo reto*.

Como o losango é um paralelogramo, ele possui os ângulos opostos congruentes e os ângulos consecutivos suplementares. Então se o losango possui um ângulo reto, os outros ângulos também serão retos. Um losango com os quatro ângulos congruentes é um quadrado.

Esta tarefa possibilita o aluno a retornar às propriedades relativas aos ângulos dos quadriláteros notáveis e aos conceitos desses quadriláteros.

Tarefa 16

Nos teoremas seguintes, temos mais hipóteses que necessário. Suprima-as.

a) Um paralelogramo cujas diagonais têm mesma medida e interceptam-se nos seus pontos médios é um retângulo.

b) Um quadrilátero cujas diagonais têm mesmo ponto médio, mesma medida e são mediatrizes uma para outra, é um quadrado.

c) Se *O* é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, $OA = OB = OC = OD$ e $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam no ponto *O*, então *ABCD* é um retângulo.

Análise *a priori* da tarefa 16.

Com esta tarefa objetivamos que o aluno compreenda que existem condições mínimas que caracterizam um objeto matemático.

(T_{16a}) *Um paralelogramo cujas diagonais têm mesma medida e interceptam-se nos seus pontos médios é um retângulo*.

Esperamos que os alunos respondam que para que um paralelogramo seja um retângulo é necessário e suficiente que possua diagonais congruentes. Pois o fato de o quadrilátero ser um paralelogramo já o obriga a ter diagonais que se interceptam nos seus pontos médios. Dessa forma suprimindo as hipóteses desnecessárias o teorema pode ser redigido da seguinte forma:

Um paralelogramo cujas diagonais têm mesma medida é um retângulo.

(T_{16b}) *Um quadrilátero cujas diagonais têm mesmo ponto médio, mesma medida e são mediatrizes uma para outra, é um quadrado*.

Nesta tarefa o aluno deverá conhecer a definição de mediatriz e observar que o fato de já haver uma hipótese que diz respeito ao ponto médio implica que bastaria acrescentar a hipótese que as diagonais são perpendiculares. Então teremos duas formas equivalentes de escrever o teorema:

Um quadrilátero cujas diagonais têm mesmo ponto médio, mesma medida e são perpendiculares entre si, é um quadrado.

ou

Um quadrilátero cujas diagonais têm mesma medida e são mediatrizes uma para outra, é um quadrado.

(T_{16c}) *Se O é ponto médio de* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$, $OA = OB = OC = OD$ *e* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *se interceptam no ponto O, então ABCD é um retângulo.*

A informação desnecessária nesta tarefa é que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam no ponto *O*. Pois se *O* é ponto médio destes segmentos, então necessariamente eles se interceptam em

O. Quanto às igualdades $OA = OB = OC = OD$, elas são necessárias para garantir as congruências das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do retângulo. Desse modo, esperamos que os alunos redijam o teorema da seguinte forma:

Se O é ponto médio de $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ e *OA = OB = OC = OD, então ABCD é um retângulo*.

Tarefa 17

Sabe-se de um quadrilátero que ele tem três lados de mesmo comprimento.

Henrique diz: "*Basta que suas diagonais se interceptem nos seus pontos médios para que ele seja um losango*".

Magalhães argumentou: "*Basta que tivesse com um ângulo reto para que ele seja um quadrado*".

Malan: *"Basta que o quarto lado seja o dobro de um dos três lados para que ele seja um trapézio".*

Quem acertou? Quem errou? Por quê?

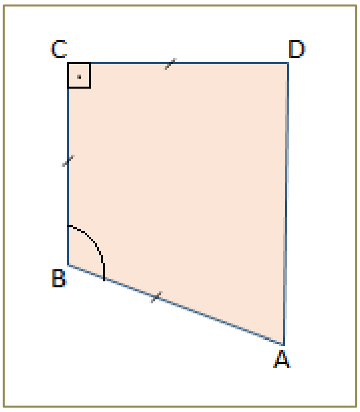
Análise *a priori* da tarefa 17.

Com esta tarefa objetivamos que o aluno tenha a oportunidade de conjecturar sobre situações ainda não vivenciadas, de modo a procurar contraexemplos ou aplicar propriedades institucionalizadas para justificar sua resposta. Neste momento esperamos que os alunos já reconheçam o estatuto da figura e não seja conduzido a uma resposta apenas pela apreensão perceptiva.

Segundo a afirmação de Henrique, teríamos um quadrilátero convexo, já que as diagonais se intersectam, e esse quadrilátero é um paralelogramo, uma vez que as diagonais se interceptam nos pontos médios de ambas. Como um paralelogramo possui os lados opostos congruentes e o quadrilátero a que a tarefa se refere tem três lados congruentes, podemos afirmar que seus quatro lados são congruentes, e, de fato, esse quadrilátero é um losango. Portanto a afirmação de **Henrique** está correta.

A afirmação de **Magalhães** não está correta. O aluno poderá apresentar o seguinte contraexemplo:

Figura 1: Figura suporte da tarefa 17

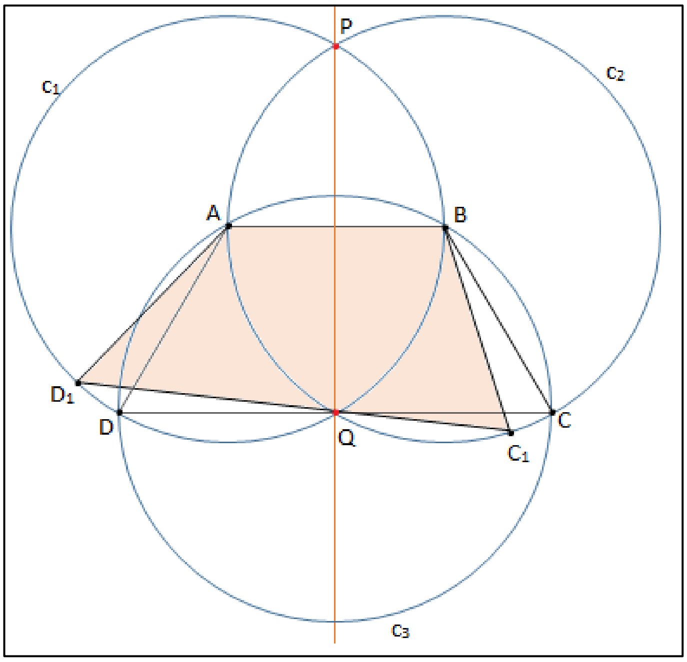


Fonte: Dados da pesquisa.

O quadrilátero *ABCD* tem *AB* = *BC* = *CD*, o ângulo $B\hat{C}D$ reto e o ângulo $A\hat{B}C$ não reto. Ao construir um quadrilátero em que um dos ângulos consecutivos a $B\hat{C}D$ tenha medida diferente de 90º, garantimos que esse quadrilátero não é um paralelogramo, consequentemente não é um quadrado.

A afirmação de **Malan** também não está correta. O aluno poderá apresentar a seguinte construção como contraexemplo:

Figura 108. Figura suporte da tarefa 17.



Fonte: a autora deste trabalho

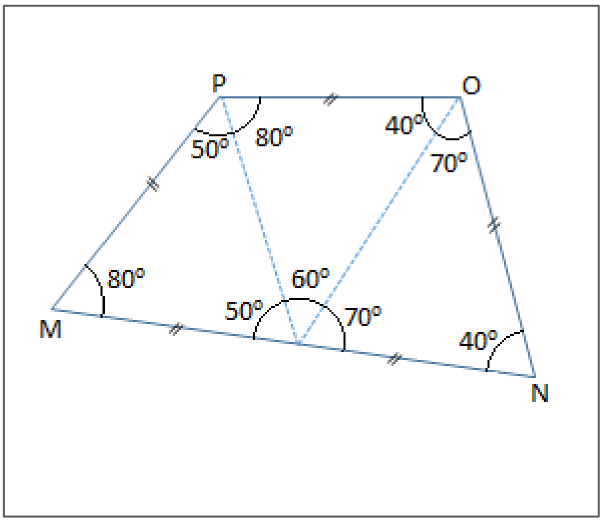
Considerar o segmento $\overline{AB}$. Traçar duas circunferências c_1 e c_2 de raios *AB*, com centros *A* e *B* respectivamente. Marque os pontos *P* e *Q*, interseções de c_1 com c_2.

Com centro em Q (A construção seria análoga, caso escolhêssemos P), traçar uma circunferência c_3 de raio QB. Marque os pontos C e D, interseções de c_3 com c_2 e c_1, respectivamente. O quadrilátero $ABCD$ é tal que $CB = BA = AD$ e CD medindo o dobro de um dos lados.

Tomando agora um ponto $D_1 \neq D$ em c_1 construa um segmento D_1C_1 de medida igual a CD tal que $C_1 \neq$ C pertença a c_2. O quadrilátero ABC_1D_1 é tal que $D_1A = AB = BC_1$, e D_1C_1 mede o dobro de um dos outros lados do quadrilátero. Como $D_1C_1 \neq CD$ e $\overline{D_1C_1}$ e $\overline{CD}$ são concorrentes, então um deles não é paralelo a $\overline{AB}$. Além disso $\overline{AD_1}$ não é paralelo a $\overline{BC_1}$ e $\overline{AD}$ não é paralelo a $\overline{BC}$, pois, caso contrário, teríamos $D_1C_1= DC = AB$ o que contrariaria a hipótese de que $\overline{D_1C_1}$ e $\overline{DC}$ medem, cada um, o dobro de $\overline{AB}$. Logo, ou $ABCD$ não é um trapézio ou ABC_1D_1 não é um trapézio.

O aluno pode apresentar também como contraexemplo o seguinte quadrilátero:

Figura 109. Figura suporte da tarefa 17.



Fonte: Dados da pesquisa.

Como dois ângulos consecutivos do quadrilátero *MNOP* não são suplementares, então este quadrilátero não é um trapézio.

Tarefa 18

ABCD é um quadrilátero plano convexo. Os pontos *I*, *J*, *K*, *L* são os pontos médios respectivos de $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}\, e\, \overline{DA}$.

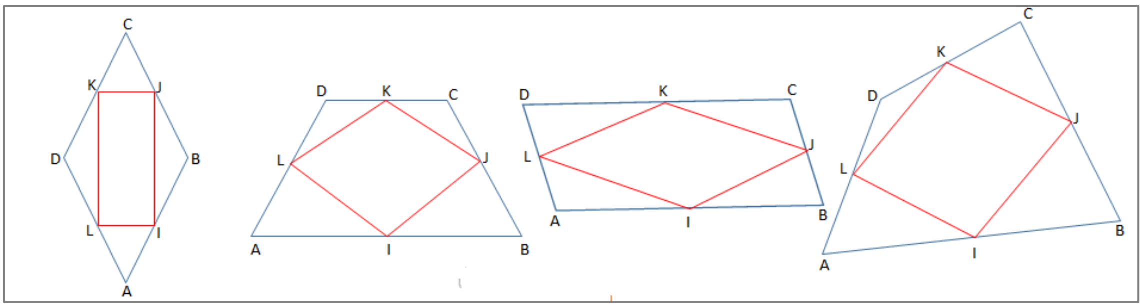
a) Os segmentos $\overline{IJ}$ e $\overline{KL}$ são paralelos? Por quê?

b) *IJKL* é um paralelogramo? Por quê?

Análise *a priori* da tarefa 18

Com esta tarefa objetivamos introduzir a definição e a propriedade de base média do triângulo.

Figura 110. Figura suporte da tarefa T_{19}.



Fonte: Dados da pesquisa.

Acreditamos que, com esta tarefa, o aluno irá conjecturar sobre a figura e vai acreditar que o quadrilátero construído ao ligar os pontos médios de *ABCD* é, de fato, um paralelogramo. Porém, neste momento, acreditamos que o aluno já sinta a necessidade de investigar o porquê deste fato. A esta altura é provável que o aluno já busque a prova não apenas com a função de validação, mas também com a função de explicação.

O quadrilátero *ABCD* a que a tarefa se refere é um quadrilátero qualquer, porém, as conjecturas que poderão ser apresentadas por parte dos alunos, podem nos fornecer subsídios para questionar sobre casos particulares, como por exemplo, sob quais condições o quadrilátero obtido pela união dos pontos médios é um losango, ou um retângulo, ou ainda um quadrado? Devemos impor condições sobre os lados? Sobre as diagonais? Neste momento os alunos poderão vivenciar sucessivas fases de ação e formulação.

O tratamento que deverá ser feito na figura para que o aluno possa associar com a apreensão discursiva e validar o que será observado durante as conjecturas exige uma reconfiguração que é não congruente ao que é solicitado no enunciado. Isto é, o aluno deverá demonstrar que o quadrilátero obtido pela união dos pontos médios é um paralelogramo e o que o aluno deverá fazer para realizar a demonstração é construir diagonais do quadrilátero primitivo e visualizar os triângulos obtidos ao traçar as diagonais.

Não esperamos que o aluno realize a demonstração da propriedade da base média do triângulo, porém esta tarefa é propícia para provocar conjecturas por parte dos alunos para que estes percebam esta propriedade por meio da apreensão perceptiva e sintam-se motivados a desejar saber o porquê desta propriedade. Neste momento institucionalizaremos a propriedade da base média do triângulo com sua respectiva demonstração.

Tarefa 19

Seja *ABCD* um retângulo tal que *AB* = *2BC*, *I* ponto médio do segmento *CD* e *K* o do segmento *AB*.

a) *KI* = *KA* = *KB*? Demonstre a sua resposta.

b) As retas *AI* e *BI* são perpendiculares? Por quê?

c) *J* e *L* são os pontos médios respectivos dos segmentos *IB* e *AI*. *IJKL* é um quadrado? Por quê?

d) A reta *JL* é paralela às retas *AB* e *CD*? Demonstre a sua afirmação.

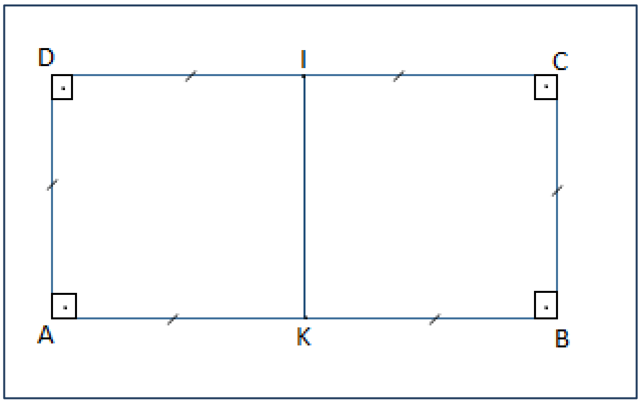
Análise *a priori* da tarefa 19

Com esta tarefa objetivamos que o aluno:

- Conjecturar sobre a figura;
- Aplicar a propriedade da base média do triângulo
- Associar as apreensões perceptiva e discursiva;
- Construir demonstrações geométricas;

(T_{19a}) *KI* = *KA* = *KB*? *Demonstre a sua resposta*.

Figura 111. Figura suporte da tarefa T_{19a}.

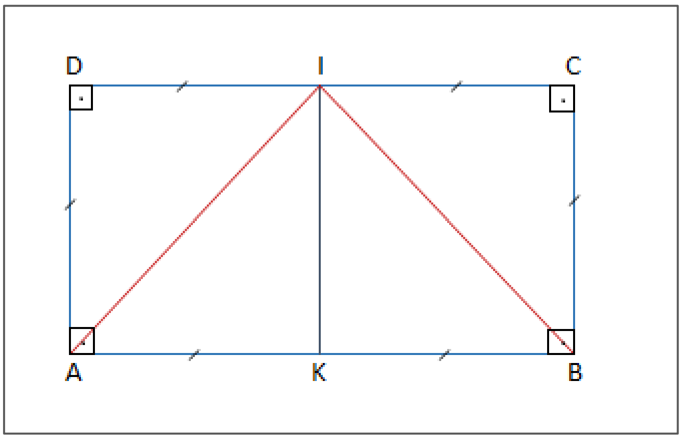


Fonte: Dados da pesquisa.

Como *ABCD* é um retângulo, temos que $\overline{AB}//\overline{CD}$ e, então $\overline{AK}//\overline{DI}$. Podemos afirmar também que $\overline{AK} \equiv \overline{DI}$ pois *K* e *I* são pontos médios de $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ respectivamente. Logo, *AKID* é um paralelogramo com dois ângulos retos e, portanto, um retângulo. Podemos concluir então que *KI* = *KA*. Como *K* é ponto médio de $\overline{AB}$, então *KA* = *KB* = *KI*.

(T_{19b}) *As retas AI e BI são perpendiculares? Por quê?*

Figura 112. Figura suporte da tarefa T_{19b}.



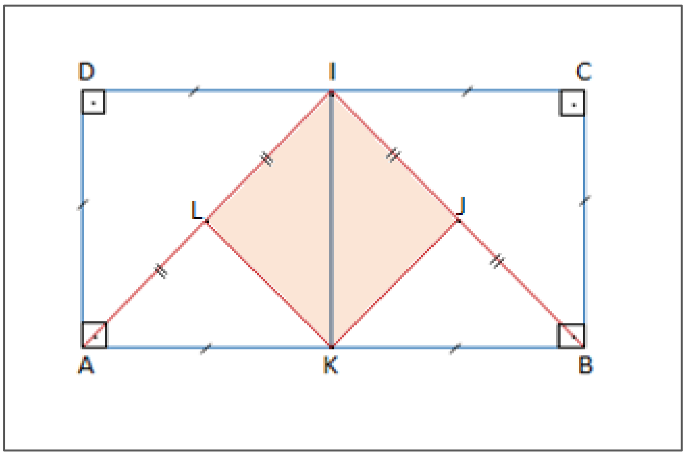
Fonte: Dados da pesquisa.

AKID e *KBCI* são retângulos com dois ângulos retos. Logo, são quadrados e *AI* e *IB* são diagonais de *AKID* e *KBCI* respectivamente. Assim podemos afirmar que:

$A\hat{I}K = K\hat{I}B = 45^{\circ} \Longrightarrow A\hat{I}K + K\hat{I}B = 90^{\circ} \Longrightarrow A\hat{I}B = 90^{\circ} \Longrightarrow \overline{AI} \perp \overline{IB}$.

(T_{19c}) *J e L são os pontos médios respectivos dos segmentos IB e AI. IJKL é um quadrado*? *Por quê*?

Figura 113. Figura suporte da tarefa T_{19c}.

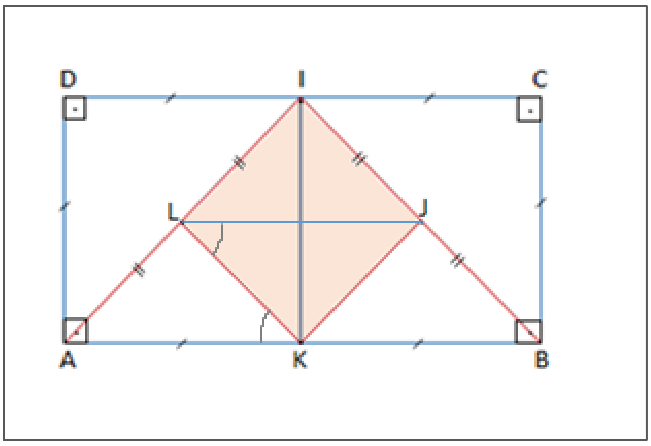


Fonte: Dados da pesquisa.

AKID e *AKBC* são quadrados congruentes, então *AL* = *LI* =*LK* = *IJ* = *JB* = *JK* (diagonais do quadrado são congruentes e se interceptam nos respectivos pontos médios). Logo, o quadrilátero *KLIJ* é um losango. Além disso, foi provado na tarefa (T_{19b}) que $A\hat{I}B = 90^{\circ}$. Temos que *KLIJ* é um losango com um ângulo reto; portanto, *KLIJ* é quadrado.

(T_{19d}) *A reta JL é paralela às retas AB e CD? Demonstre a sua afirmação.*

Figura 114. Figura suporte da tarefa T_{19d}.



Fonte: Dados da pesquisa.

Esta tarefa pode ser realizada utilizando base média do triângulo. Isto é, $\overline{LJ}$ é base média do triângulo *AIB*, logo, $\overline{LJ}//\overline{AB}$.

O aluno também poderá utilizar o fato de que $J\hat{L}K \equiv L\hat{K}A$, pois ambos medem 45º. Esta congruência implica no paralelismo das retas *LJ* e *AB*. Temos também que as retas *AB* e *CD* são paralelas, pois são retas suporte dos lados do retângulo *ABCD*. Logo, pela transitividade da relação de paralelismo, temos que as retas *LJ*, *AB* e *CD* são paralelas.

Esta tarefa além de oportunizar o aluno de conjecturar, pensar sobre a figura e associar as apreensões perceptiva e discursiva, pode nos dar a oportunidade de introduzir a definição e a propriedade da base média do triângulo.

Tarefa 20

Seja *ABCD* um quadrado cujas diagonais interceptam-se no ponto *O* e *E* o ponto médio do segmento *BC*.

a) Construa o quadrado *CEFG* externo. Explique o seu algoritmo de construção.

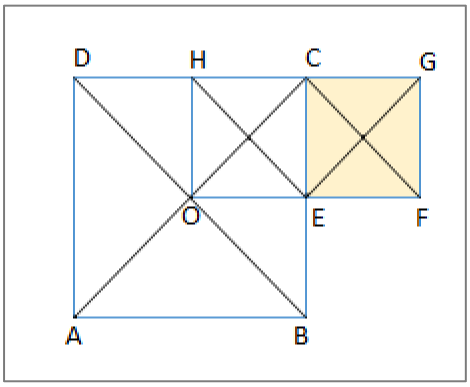
b) *OBFC* é um quadrado? Por quê?

Análise *a priori* da tarefa 20

Objetivamos com esta tarefa, que o aluno possa utilizar as condições necessárias e suficientes sobre as diagonais de um quadrilátero para que este seja um quadrado, como forma de construí-lo.

(T_{20a}) *Construa o quadrado CEFG externo. Explique o seu algoritmo de construção*.

Figura 115. Figura suporte da tarefa T_{20a}.

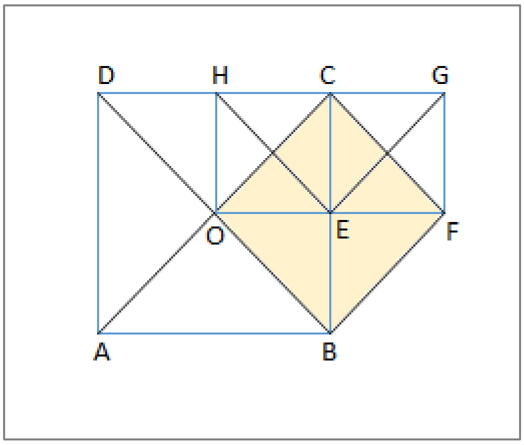


Fonte: Dados da pesquisa.

Seja *H* o ponto médio do lado *CD* do quadrado *ABCD*. Como *EC* = *CH* = *HO* = *OE* (*HOE* e *HCE* são triângulos retângulos, isósceles e congruentes) e $H\hat{C}E$ é reto, então *HCEO* é um quadrado. Desejamos construir um quadrado externo de lado *EC*, então o quadrado que buscamos é congruente a *HCEO*. Tracemos agora os segmentos *CF* e *EG*, congruentes ao segmento *CO*, e tais que $\overline{CF}$ e $\overline{EG}$ sejam congruentes, sejam perpendiculares e se interseccionem no ponto médio de ambos. Unindo os pontos *E*, *F*, *G* e *C*, vamos obter o quadrado externo *EFGC.*

(T_{20b}) *OBFC é um quadrado*? *Por quê*?

Figura 116. Figura suporte da tarefa T_{20b}.



Fonte: Dados da pesquisa.

Esperamos que os alunos utilizem a condição necessária e suficiente sobre as diagonais do quadrado para chegar à seguinte conclusão: o quadrilátero *OCFB* é tal que *EO* = *EC* = *EF* = *EB*, pois *E* é ponto médio do segmento *BC* e os quadrados *OECH* e *CEFG* são congruentes. Além disso, o ângulo $C\hat{E}F$ é reto, ainda pelo fato de *CEFG* ser quadrado. Logo, $\overline{BC}$ e $\overline{OF}$ são congruentes, se interceptam no ponto médio de ambas e são perpendiculares. Portanto, *OBFC* é um quadrado.

Pode ocorrer também de o aluno utilizar as congruências dos triângulos *EOC, EFC, OEB* e *EBF* e concluir que o quadrilátero *OBFC* possui os lados e os ângulos congruentes.

Com esta tarefa o aluno deverá demonstrar que dois quadriláteros são quadrados, sendo que estes estão apresentados em posições distintas. Esperamos que, ao aplicar esta tarefa, o aluno já tenha compreendido o estatuto de uma figura e não se apegue mais à apreensão perceptiva para classificar uma figura geométrica. Ou seja, esperamos que o aluno não classifique o quadrilátero *OBFC* como um losango não quadrado orientado pela apreensão perceptiva.

APÊNDICE B

Universidades e Bibliografia básica

UNIVERSIDADE	NOME DO COMPONENTE CURRICULAR	BIBLIOGRAFIA BÁSICA
Universidade Federal de Tocantins	Geometria Euclidiana Plana	BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar. 7 ed. v. 9. São Paulo: Atual, 2003. REZENDE, E. Q.; QEIROZ, M. L. B. Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. Campinas: Editora Unicamp, 2000.
IFSP – Instituto Federal de São Paulo	Geometria 1	REZENDE, E. Q. F. E OUTRA. Geometria Euclidiana Plana. Segunda edição. Editora Unicamp. Campinas, SP. 2008. DOLCE, O. e outro. Fundamentos de Matemática elementar, geometria plana. Editora Atual. Volume 9. Última edição. 2009. BONJORNO, J. R.; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES Ayrton. *Matemática:* fazendo a diferença. São Paulo: FTD, 2006.
Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Geometria I	DOLCE, Osvaldo; POMPEO, Jose Nicolau - Fundamentos de matemática elementar: geometria plana - Editora Atual (ISBN: 853570552X; 9788535705522) REZENDE, E. - Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas – Editora unicamp (ISBN: 85-2680504-5) WAGNER, Eduardo – Construcoes geométricas - Editora SBM (ISBN: 9788524400841)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná	Geometria 1	BARBOSA, J.L.M. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática, SBM,2006. DOLCE, O, POMPEO, J. N. Geometria Plana. Fundamentos da Matemática Elementar. Volume 09, 8ª edição, Atual editora, 2008. LIMA, E.L. Medida e Forma em Geometria. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1991.
Universidade Federal de Santa Maria – Rio Grande do Sul	Geometria Plana e Desenho Geométrico	BARBOSA, J.L.M. Geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 1995. PENEIREIRO, J.B. e SILVA, M.F. da. Introdução à geometria euclidiana no plano. Caderno didático. Santa Maria: Gráfica da UFSM, 2000.
Universidade do Estado da Bahia	Geometria Plana	BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana: Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. DOLCE, O. e POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana, Vol. 9, São Paulo, Atual Editora Ltda. FETISSOV, A. I. A Demonstração em Geometria. Trad.: Hygino H. Domingues. Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando, São Paulo, Atual Editora, 1994. GENTIL, Nelson, SANTOS, Carlos Alberto Marcondes, GRECO, Antonio Carlos, FILHO, Antonio Bellotto, GRECO, Sergio Emílio. Matemática para o

		Ensino Médio. Vol. 2, Editora Ática, São Paulo.
Universidade Estadual de Alagoas	Geometria Euclidiana Plana	BARBOSA, J. L. M., Geometria Euclidiana Plana, 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. REZENDE, Eliane Q. F.; QUEIROZ, Maria L. B. de. Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas. 2.ed. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008.
Universidade Federal de São Carlos – São Paulo	Geometria Euclidiana	BARBOSA, João Lucas. Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2003. CARVALHO, Paulo César Pinto. Introdução à Geometria Espacial. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2003 LIMA, E.L. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Impa/Vitae, 1992.
Universidade Federal de Uberlândia – Minas Gerais	Geometria Euclidiana Plana e Desenho Geométrico	REZENDE, E. Q., Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas, Editora da Unicamp, Campinas, 2.000. MOISE, E. E DOWNS F. JR., Geometria Moderna vols. 1 e 2, Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1.971. WAGNER, E., Construções Geométricas, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1.993. GIONGO, A. R., Curso de Desenho Geométrico, Livraria Nobel, São Paulo, 1.984. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Publicação quadrimestral da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. (Mais de 50 números publicados).
Universidade Federal do Pará	Ensino de Geometria Aplicada ao Ensino Fundamental	BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana, Coleção do professor de matemática, SBM, 1997. CASTRUCCI, B., Lições de Geometria Plana, Editora Nobel, 1976. IEZZI, G. Murakami, C. e Machado, N. J. Fundamentos de Matemática Elementar, vol 9; Editora Atual, 1993. LIMA, E. L. Medida e Forma (Coleção Professor de Matemática), SBM, 1991. MOISE, E.E, E DOWNS, F.L. Geometria Moderna, vol. I-II, Editora Edgard Blücher, São Paulo,1971. REZENDE, Eliane Quelho Frota. Geometria Euclidiana plana e construções geométricas, 2ª edição, Unicamp. 2008. SANTOS, Alex Alves Magalhães dos. Geometria euclidiana. Editora Ciência moderna, 2008.
	Ensino de Geometria Aplicada ao Ensino Médio	CARVALHO, P. C. P. Introdução à Geometria Espacial. Coleção do professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro - RJ, 2005. IEZZI, Gelson, Murakami, C. e Machado, N. J. Fundamentos da Matemática Elementar, vol 10, 6ª ed. Editora Atual, 2005. MACHADO, A. S. M. Matemática, Temas e Metas. Áreas e Volumes. Vol 4 editora Ática, 1988. LIMA, E.L. CARVALHO, P.C.P. WAGNER & MACHADO, A.C. A Matemática do Ensino Médio (3 vol), vol. 2, 4ª edição. Rio de janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática (coleção Professor de Matemática), 2002.
Universidade Federal do Piauí	Geometria Euclidiana	BARBOSA, João Lucas Marques; Geometria Euclidiana Plana; Coleção Fundamentos da Matemática Elementar; Sociedade Brasileira de Matemática; Rio de

		Janeiro; 1985. CARVALHO, P.C., Introdução à Geometria Espacial; Coleção Professor de Matemática; SBM. MOISE, Edwin E., Geometria Moderna. Editora Edgard Blucher Ltda; vols. I e II. KEDDY, Mervin L.; Geometry a Modern Introduction. Editora Wesley Publishing, CD, Inc, 1965.
Universidade Federal de Campina Grande - Paraíba	Fundamentos da Geometria Euclidiana Plana	BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2003. DOLCE, Osvaldo e POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana, 1 ed. São Paulo: Atual, 1995.
Universidade Estadual de Santa Cruz	Geometria Euclidiana Plana	DOLCE, Osvaldo. POMPEO, Osvaldo. Fundamentos de Matemática Elementar, Vol.9, Ed. Atual. BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática – SBM.1994. NIVEN, Ivan. Números Racionais e Irracionais – SBM; Revistas do Professor de Matemática-Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Universidade Federal do Vale do Jequitinhonha e Mucuri	Geometria Euclidiana Plana	REZENDE, E. Q., Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas, Editora da Unicamp, Campinas, 2.000. MOISE, E. E DOWNS F. JR., Geometria Moderna vols. 1 e 2, Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1.971. WAGNER, E., Construções Geométricas, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1.993. GIONGO, A. R., Curso de Desenho Geométrico, Livraria Nobel, São Paulo, 1.984. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Publicação quadrimestral da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. (mais de 50 números publicados). DOLCE, O & POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9: Geometria Plana. 4a. ed. São Paulo: Atual Editora. 1985.
UNESP	Fundamentos de Geometria	BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana.Coleção do Professor de Matemática, n. 11. Rio de Janeiro: SBM, 1995. DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Geometria Plana.Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, v. 9. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Geometria Espacial. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. v. 10. 5. ed. São Paulo: Atual, 1993. LIMA, E. L. Áreas e volumes. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico e Científico, 1973. MOISE, E. E. Geometria Moderna. Vols. 1 e 2. São Paulo: Edgar Blucher, 1971. REZENDE, E. Q. F, QUEIROZ, M. L. B.de.Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. Campinas: Editora da Unicamp, 2000. PIRES, C. M. C.; CURÍ, E.; CAMPOS, T. M. M. Espaço & Forma. 1. ed. São Paulo PROEM, 2000. PAVANELLO, R. M. O abandono da geometria no Brasil: causas e consequências. In: Revista Zetetiké,

		n.1, p.7-17. Unicamp: Campinas, 1993. KOBAYASHI, M. do C. M. A construção da geometria pela criança. Bauru: EDUSC, 2001. BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. 2. ed. Brasília: MEC/SEEF, 1998. 148 p. SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs.) Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. 203 p.
Federal do Espírito Santo	Geometria Plana- Revisão do ensino médio	DOLCE, Osvaldo ; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar, vol 9 (Geometria Plana), Atual Editora. IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, vol 7 (Geometria Analítica), Atual Editora. LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar P.; WAGNER, Eduardo; Morgado, Augusto C. A Matemática do Ensino Médio, vol 2(Geometria Espacial), SBM.
	Geometria Axiomática	BARBOSA, João Lucas Marques Barbosa. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática/SBM. Rio de Janeiro: SBM, 2006. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Introdução à Geometria Espacial. Coleção do Professor de Matemática/SBM. Rio de Janeiro: SBM. LIMA, Elon Lages et al. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2. Coleção do Professor de Matemática/SBM. Rio de Janeiro: SBM, 2000. MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. Um convite à Matemática: fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades. 1. ed. Campina Grande: EDUFCG, 2006. BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Hiperbólica. Publicações Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
Federal-Rio de Janeiro	Fundamentos de Geometria	CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Introdução à Geometria Espacial. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002. LIMA, Elon Lages. – Medida e Forma em Geometria, Coleção Professor de Matemática, SBM. Livros didáticos utilizados nas escolas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.
	Geometria Euclidiana	BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Introdução à Geometria Espacial. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002. GREENBERG, Marvin Jay. Euclidean & Non Euclidean Geometry. 3. ed. WH Freeman & Co.: 1993. HILBERT, D., Cohn-Vossen, S. Geometry And The Imagination. AMS Chelsea Publishing: 1999. MOISE, Edwin. Elementary Geometry From An Advanced Standpoint. 3. ed. Addison-Wesley: 1990
If_rio	Geometria Plana	REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. 2a. edição. Campinas. Editora UNICAMP, 2008. DOLCE, O. e POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar Volume 9: Geometria Plana. 8ª Edição. São Paulo: Atual Editora, 2005. WAGNER, E. Construções Geométricas. Coleção Professor de Matemática. 4a edição. Rio de Janeiro: SBM, 2001

Universidade Federal do Recôncavo Baiano	Geometria Plana	BARBOSA, João L Marques. Geometria euclidiana plana. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004. IEZZI, G.: Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, Atual Editora. MOISE, Edwin: Geometria Moderna, Vol. I e II, Editora Edgar Blücher, 1975.
Universidade Federal da Bahia	Geometria Euclidiana Plana	BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana (Coleção do Professor de Matemática). 10ª Edição, Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Rio de Janeiro, 2006. REZENDE, Eliane Q. F.; QUEIROZ, Maria L. B.. Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. 2ª Edição, Editora Unicamp, Campinas, 2008.
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul	Geometria 1	GIONGO, R. A., Curso de Desenho Geométrico. Livraria Nobel S.A., 1984. FIORANO, C. J., Estudo Dirigido de Desenho. São Paulo, Editora Discubra, Vol. 1, 2. IEZZI, G. (et. al.), Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana. Vol. 9, São Paulo, Atual Editora, 1991. IEZZI, G. (et. Al.), Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial. Vol. 10, São Paulo, Atual Editora, 1985. NETO, A. A., Geometria, Vol. 5 , São Paulo, Editora Moderna, 1982. LIMA, E. L., Áreas e Volumes: Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. SBM, Rio de Janeiro. MACHADO, A. S., Matemática, temas e Debates: Áreas e Volumes. Vol. 4, São Paulo, Atual Editora, 1988.

Fonte: Dados da pesquisa.

Referências dos livros de Geometria Plana adotados nos cursos de Licenciatura em Matemática

BIBLIOGRAFIA	Nº DE VEZES
BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.	14
BONJORNO, J. R.; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES Ayrton. **Matemática: fazendo a diferença**. São Paulo: FTD, 2006.	1
CARVALHO, Paulo César Pinto. **Introdução à Geometria Espacial.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2003	5
CASTRUCCI, B., **Lições de Geometria Plana**, Editora Nobel, 1976.	1
DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar.** 7 ed. v. 9. São Paulo: Atual, 2009.	12
FETISSOV, A. I. **A Demonstração em Geometria**. Trad.: Hygino H. Domingues._Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando, São Paulo, Atual Editora, 1994.	2
FIORANO, C. J., Estudo Dirigido de Desenho. São Paulo, Editora Discubra, Vol. 1, 2.	1
GENTIL, Nelson, SANTOS, Carlos Alberto Marcondes, GRECO, Antonio Carlos, FILHO, Antonio Bellotto, GRECO, Sergio Emílio. **Matemática para o Ensino Médio**. Vol. 2, Editora Ática, São Paulo.	1
GIONGO, A. R., **Curso de Desenho Geométrico**, Livraria Nobel, São Paulo, 1.984.	3
IEZZI, G. (et. al.), Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana. Vol. 9, São Paulo, Atual Editora, 1991. 30	5
KEDDY, Mervin L.; **Geometry a Modern Introduction**. Editora Wesley Publishing, CD, Inc, 1965.	1

LIMA, E. L. **Áreas e volumes.** Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico e Científico, 1973.	2
LIMA, E.L. **Medida e Forma em Geometria**. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1992.	5
LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E. e MORGADO, A.C. A **Matemática do Ensino Médio**. Volume 2. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.	3
MACHADO, A. S., Matemática, temas e Debates: Áreas e Volumes. Vol. 4, São Paulo, Atual Editora, 1988	1
MOISE, E.E, E DOWNS, F.L**. Geometria Moderna**, vol. I-II, Editora Edgard Blücher, São Paulo,1971.	7
NETO, A. A., Geometria, Vol. 5 , São Paulo, Editora Moderna, 1982.	1
PAVANELLO, R. M. **O abandono da geometria no Brasil: causas e consequências**. In: Revista Zetetiké, n.1, p.7-17. Unicamp: Campinas, 1993.	1
PENEIREIRO, J.B. e SILVA, M.F. da. **Introdução à geometria euclidiana no plano**. Caderno didático. Santa Maria: Gráfica da UFSM, 2000.	1
PIRES, C. M. C.; CURÍ, E.; CAMPOS, T. M. M. **Espaço & Forma**. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2000.	1
REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Publicação quadrimestral da SBM – **Sociedade Brasileira de Matemática**. Rio de Janeiro. (Mais de 50 números publicados).	3
REZENDE, E. Q.; QEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas: Editora Unicamp, 2008.	10
WAGNER, E., **Construções Geométricas**, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2000.	4

Fonte: Dados da pesquisa.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado para participar da pesquisa intitulada **"Ensino e aprendizagem de provas e demonstrações em Geometria Plana em um curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado da Bahia".** Sua participação não é obrigatória. A qualquer momento você pode desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador ou com a Universidade. O objetivo deste estudo é desenvolver uma organização didática que permita minimizar as dificuldades dos alunos de Licenciatura em Matemática em compreender demonstrações geométricas bem como criar condições para que estes futuros professores desenvolvam competências no sentido de fortalecer o raciocínio dedutivo de seus alunos, buscando responder as seguintes questões de pesquisas: Quais fatores contribuem para as dificuldades relacionadas a provas e demonstrações no curso de Licenciatura em matemática? E quais ações podem ser efetivadas para minimizar as dificuldades dos alunos de Licenciatura em Matemática para compreender provas e demonstrações geométricas, no intuito de criar condições para que estes futuros professores sejam capazes de desenvolver o raciocínio dedutivo de seus alunos?
Sua participação nesta pesquisa consistirá em participar da aplicação da sequência didática. Os riscos relacionados com sua participação não existem. Os benefícios relacionados com a sua participação vão refletir sobre a formação inicial de professores de matemática, em cursos de Licenciatura no que se refere a minimizar as dificuldades relacionadas às demonstrações geométricas, bem como aumentar a autonomia em ensinar demonstrações a seus futuros alunos. As informações obtidas através dessa pesquisa serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre sua participação. Os dados não serão divulgados de forma a possibilitar sua identificação nos questionários. Você receberá uma cópia deste termo onde consta o telefone e o endereço institucional do pesquisador principal e do CEP, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

____

MARIDETE BRITO CUNHA FERREIRA
PESQUISADORA

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

____

Sujeito da pesquisa