Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PUC/SP

Eneias de Almeida Prado

Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática: contribuições para a formação do profissional da Educação Básica

Doutorado em Educação Matemática

São Paulo
2016

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PUC/SP

Eneias de Almeida Prado

Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática: contribuições para a formação do profissional da Educação Básica

Doutorado em Educação Matemática

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em **Educação Matemática** sob a orientação da Prof.(a) Dr.(a) **Barbara Lutaif Bianchini.**

São Paulo
2016

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:________________________________**Local e Data:**____________________

À minha querida avó Guilhermina (*in memorian*), pela paz, alegria e sabedoria, que contagiava a todos!

A meus pais, Antonio e Tereza, exemplos de persistência, amor e fé.

À minha esposa, Livian, simplesmente, por tudo!

Aos meus filhos, Giovanna e Vinícius, presentes recebidos de Deus, que iluminam os meus dias.

AMO MUITO TODOS VOCÊS.

AGRADECIMENTO

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – **CAPES** – pela bolsa concedida, que possibilitou minha dedicação a este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me concedido vida, força, fé e esperança.

À Professora Doutora **Barbara Lutaif Bianchini**, pelos conselhos e direcionamentos, que me possibilitaram crescer profissionalmente.

Aos membros da Banca, Professoras Doutoras **Angela Marta Pereira das Dores Savioli, Bernardete Angelina Gatti, Silvia Dias Alcântara Machado e Sonia Barbosa Camargo Igliori**, que analisaram o texto enviado para a qualificação e apresentaram caminhos para a finalização do trabalho.

À Professora Doutora **Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão**, pelos ensinamentos, principalmente, pelas discussões sobre categorização, na época em que cursei o mestrado.

À Professora Doutora **Célia Maria Carolino Pires**, pelos momentos agradáveis de discussões, quando esta pesquisa ainda era, apenas, um projeto.

Aos professores entrevistados, a colaboração de cada um foi essencial para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos colegas do GPEA, pelo crescimento mútuo em nossas reuniões.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelos momentos de aprendizagem, em sala de aula, nos seminários ou até mesmo nos bate-papos na cantina.

À Professora Mestre **Célia Regina Mistro**, grande amiga, pela paciência e dedicação em nossas horas de trabalho e discussões sobre esta pesquisa.

Ao Colégio Parthenon, representado pela Professora **Simone Pannocchia Tahan**, pela compreensão e carinho nos momentos em que precisei me ausentar para desenvolver certas atividades relacionadas a esta pesquisa.

Aos amigos, Edson Nakamura, Mauricio de Souza Machado e Michele de Souza Machado Ribeiro, companheiros que estiveram presentes durante todo este período e sempre me apararam em relação às atividades e demandas do colégio.

À Faculdade Eniac, representada pela amiga, Professora Mestre **Neide Oliveira Silva**, pela compreensão e auxílio, em momentos essenciais.

Aos meus pais e familiares, pelo apoio, pelas orações e por todo o carinho que têm por mim.

Aos meus sogros, que muito auxiliaram, zelando, principalmente, pelos meus pequenos.

Aos diversos amigos e irmãos na fé, não há como listar o nome de cada um de vocês, mas sei o quanto oraram e sonharam junto comigo, a vitória é nossa!

Em especial:

Aos meus filhos, Giovanna e Vinícius, presentes de Deus. A Giovanna chegou, no primeiro ano do doutorado e, o Vinícius, no terceiro ano. No início, tive receio, pois as responsabilidades aumentaram, mas, depois, percebi a dádiva que é tê-los correndo pela casa. Meus filhos, por divesas vezes, vocês ficaram parados me observando, "lendo comigo", riscando meus materiais e livros, mas, maiores foram os momentos, nos quais não conseguia escrever uma frase se quer, e, vocês, com um sorriso ou um abraço, fizeram com que minhas forças renovassem.

À minha amada, **minha esposa**, **Livian**, por todos os dias, pela paciência, dedicação, amor, carinho, zelo e companhia, pois tê-la ao meu lado é uma experiência única. Com você, eu sinto prova do amor verdadeiro, da fé verdadeira; sem você, certamente, esse sonho não se concretizaria. Meus amores, Livian, Giovanna e Vinícius: o nosso livro está pronto!

EU AMO VOCÊS!

RESUMO

Este estudo teve o objetivo de compreender a Álgebra Linear ensinada para a Licenciatura em Matemática como um saber voltado para a formação do professor de Matemática que atuará na Educação Básica e buscar elementos e possibilidades para ressignificar a Álgebra Linear nessa formação, concebendo um conjunto de conhecimentos em Álgebra Linear, necessário para fundamentar a Álgebra a ser ensinada, na Educação Básica. A relevância da pesquisa reside na necessidade de investigar o papel da Matemática acadêmica na licenciatura e ser, a Álgebra Linear, importante na formação inicial de profissionais na área das Ciências Exatas e afins. As ideias teóricas que embasaram as análises estam relacionadas: à formação inicial do professor, ao ensino e à aprendizagem em Álgebra Linear e ao aporte teórico, Pensamento Matemático Avançado – PMA –, proposto por Dreyfus. Assim, com uma abordagem qualitativa de pesquisa, analisei documentos institucionais de seis universidades e realizei entrevistas com oito professores. Para a análise dos dados usei pressupostos de um estudo por saturação. A análise realizada indica que a Álgebra Linear presente nos documentos institucionais investigados mostra ser planejada, independentemente, das disciplinas que se referem ao ensino e à aprendizagem em Matemática; por outro lado, foi possível evidenciar elementos que podem contribuir com a formação profissional do licenciando: perceber que conceitos estudados por ele, não são conceitos isolados; fazer uso de diferentes representações; explorar o conceito de definição e o papel o qual exerce em Matemática; estabelecer relações com outras disciplinas; explorar o critério de verdade em Matemática; vivenciar diversas formas de validar conjecturas; explorar questões relacionadas ao momento histórico que possibilitou a constituição da disciplina, além de abordar noções de Matemática da Educação Básica à luz do PMA.

Palavras-chave: Educação Algébrica; Formação de Professores; Álgebra Linear; Licenciatura em Matemática; Pensamento Matemático Avançado.

ABSTRACT

This study had intended to understand the Linear Algebra, used for teach the Mathematics graduation, with knowledge for the graduation of Mathematics teacher, that will work in Basic Education, and search for elements and possibilities for attribute a new meaning to Linear Algebra in this graduation area, developing a set of knowledge in Linear Algebra, very important for prove the Algebra will be teaching, in Basic Education. The relevancy of research is in the necessity of research the function of academic Mathematics at graduation and be, the Linear Algebra, important at initial graduation of professionals in Mathematics Science area. The theoretical ideas that had used for make the analyzes is related: The initial graduation of teacher, to teach and to learn Linear Algebra and to theoretical aid, advanced thought mathematics, proposed by Dreyfus. So, with a qualitative approach of research, I have analyzes institutional documents of 6 universities, and I have accomplished interviews with 8 teachers. The analysis accomplished show that the Linear Algebra is in the institutional documents researched show to be, independent, of the subject that refer to teaching and learn in Mathematics; but, was possible show elements that may contribute with the professional formation of graduate: to realize that concept has studied by him, is not isolated concepts; make use of the different representation; to explore the concept of definition and the job that practice in Mathematics; to set up with another subject; to explore the truth in Mathematics; to experience another way to valid opinion; to explore questions about the historic moment the have helped the constitution of subject, and deal with Basic Education the light of PMA.

Keyword: Algebraic Education; Teacher Education; Linear Algebra; Mathematics Teaching Course; Advanced Mathematical Thinking.

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo comprender el algebra lineal que se enseña en la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, desde el punto de vista de la enseñanza destinada a la formación del profesor de matemáticas que actuará en la Educación Básica. Al mismo tiempo busca elementos y posibilidades que den un nuevo significado al algebra lineal en esa formación y que conciban un conjunto de conocimientos suficientes para fundamentar el algebra que será enseñada en la Educación Básica. La relevancia de esta pesquisa se fundamenta en la necesidad de investigar el papel de las matemáticas académicas en la licenciatura y ser, el algebra lineal importante en la formación inicial de los profesionales en el área de las ciencias exactas y áreas afines. Las ideas teóricas que sustentan los análises de este trabajo están relacionados: a la formación inicial del profesor, a la enseñanza y al aprendizaje en Algebra lineal y al aporte teórico y pensamiento matemático avanzado, propuesto por Dreyfus. De esta manera, con un abordaje cualitativo de investigación, fueron analizados documentos institucionales de seis universidades y fueron entrevistados ocho profesores. Para el análisis de los datos, fueros usados presuposiciones de un estudio por saturación. El análisis realizado indica, que el Algebra lineal presente en los documentos institucionales investigados, es planeada, independientemente de las demás materias relacionadas a la enseñanza y aprendizaje en matemáticas; También fueron identificados elementos que pueden contribuir con la formación profesional del licenciado: reconocer que los conceptos estudiados no son conceptos aislados, utilizar diferentes representaciones, explorar el concepto de definición y papel que la matemáticas ejerce, establecer relaciones con otras materias, explorar el criterio de verdad en matemáticas, vivenciar diversas formas de validar conjeturas, explorar cuestiones relacionadas al momento histórico y a la constituición de la materia, fuera de abordar nociones de matemáticas en la Educación Básica a la luz del PMA.

Palabras claves: Educación Algebraica; Formación de Profesores; Algebra Lineal; Licenciatura en Matemáticas; Pensamiento Matemático Avanzado.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A construção histórica das noções elementares em Álgebra Linear perdurou por séculos, tendo um processo de germinação em diferentes áreas da Matemática. Segundo Dorier (1990), no final do século XIX e meados do século XX, com o movimento do formalismo em Matemática, essas noções foram reorganizadas, unificadas e permitiram simplificar o estudo de diferentes áreas, com ferramentas e métodos semelhantes e, conforme Dubinsky (2001), esse fato fez com que a Álgebra Linear assumisse um papel de destaque nas Ciências Exatas e afins.

De acordo com Pires (2006), no Brasil, o estudo das noções matemáticas, abordadas em Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática, é citado pela primeira vez, explicitamente, em 1953, nos conteúdos programáticos da disciplina Complementos de Geometria e Geometria Superior, na Universidade de São Paulo. Para a autora, a disciplina Álgebra Linear passou a compor, oficialmente, a grade curricular desse curso, apenas, em 1968.

Nas Diretrizes Curriculares Nacionais, para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2001b), a Álgebra Linear é apresentada como uma das disciplinas que compõem o núcleo de disciplinas específicas obrigatórias nas Licenciaturas em Matemática, assim como, Cálculo Diferencial e Integral, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica.

No entanto, desde a fundação das primeiras licenciaturas no país, poucas pesquisas têm investigado o papel das disciplinas específicas para a formação do professor de Matemática, que atuará na Educação Básica (RESENDE, 2007a). Moreira (2012), por exemplo, afirma ser necessário e urgente o desenvolvimento de investigações, que permitam compreender quais são as contribuições dessas disciplinas na formação desse profissional.

Em 2012, ao ingressar no doutorado, do Programa de Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP –, incorporei-me ao grupo de pesquisa, *Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica* – GPEA – e iniciei minha pesquisa atrelada ao projeto: *o que se entende por Álgebra do ponto de vista epistemológico e didático nos planos institucional, acadêmico e histórico-epistemológico*, visando discutir sobre a disciplina Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática.

Esta pesquisa foi organizada em seis capítulos, mais as considerações finais, as referências, dois apêndices e os anexos.

No capítulo 1, descrevo a problemática, que me conduziu aos objetivos, ou seja, compreender a Álgebra Linear, ensinada para a Licenciatura em Matemática, como mum saber voltado para a formação do professor de Matemática, que atuará na Educação Básica e buscar elementos e possibilidades para ressignificar a Álgebra Linear na formação do professor de Matemática da Educação Básica, concebendo um conjunto de conhecimentos em Álgebra Linear necessário, para fundamentar a Álgebra a ser ensinada, na Educação Básica.

Esses objetivos são resultados de reflexões sobre as questões: como as instituições de Ensino Superior selecionadas descrevem a disciplina Álgebra Linear nos projetos pedagógicos, já que essa disciplina é uma das que compõem o currículo mínimo obrigatório na Licenciatura em Matemática no Brasil? Como os professores pesquisadores em Álgebra (Educação Matemática), das instituições de ensino selecionadas, concebem a contribuição da Álgebra Linear e o seu ensino, para o licenciando em Matemática? E, qual Álgebra Linear poderia ser concebida, como saber a ensinar, na Licenciatura em Matemática, visando à formação inicial do professor da Educação Básica?

No capítulo 2, com o objetivo de compreender como os documentos oficiais definem as Licenciaturas, em especial, a Licenciatura em Matemática no Brasil, descrevo e analiso as diretrizes nacionais, principalmente, as *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena* (BRASIL, 2001a) *e as* Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2001b), à luz de resultados de pesquisas relacionadas à formação inicial do professor, por exemplo, Gatti e Barreto (2009) e Gatti (2010); e resultados de pesquisas relacionadas à formação inicial do professor de Matemática, por exemplo, Fiorentini (2005), Resende (2007a), Manrique (2009), Pires (2011) e Moreira (2012).

No capítulo 3, apresento elementos que contribuíram para compreender a problemática deste estudo, ou seja, pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear, por exemplo, Dorier (2002) e Stewart (2008); nas considerações apresentadas por Dubinsky (1997), CBMS[1] (2012) e SBEM[2] (2013) sobre o currículo de Álgebra Linear; e nos processos do Pensamento Matemático Avançado – PMA –, evidenciados por Tommy Dreyfus (DREYFUS, 1991).

No capítulo 4, baseado principalmente em Denzin e Lincoln (2010), descrevo a abordagem metodológica adotada nesta pesquisa e apresento os procedimentos utilizados para a coleta de dados. Isto é, optei por desenvolver uma pesquisa qualitativa e a coleta de dados foi efetuada por meio de documentos institucionais e entrevistas.

Foram selecionadas seis instituições de Ensino Superior, das quais analisei, quando disponíveis, o Projeto Pedagógico de Curso – PPC – da Licenciatura em Matemática, a ementa e o plano de ensino, para a disciplina Álgebra Linear, pois tive como objetivo compreender como essas instituições descrevem a disciplina Álgebra Linear, nesses documentos.

As entrevistas, por sua vez, foram organizadas em dois grupos e, analisadas, seguindo os pressupostos de um estudo por saturação, conforme Fontanella et al. (2011). O primeiro grupo me permitiu compreender como os professores pesquisadores em Álgebra (Educação Matemática) das instituições de ensino selecionadas concebem a Álgebra Linear e o seu ensino, pois contou com seis professores, que atuam nas instituições selecionadas.

Já, o segundo grupo, contou com dois professores pesquisadores em Educação Matemática, que possuem tempo de docência, inclusive com atuação em Licenciaturas em Matemática, além de desenvolverem pesquisas em Educação Matemática. Essas entrevistas me permitiram refinar as categorias identificadas, a partir das primeiras entrevistas.

[1] *Conference Board of Mathematical Sciences* (Conselho da Conferência em Ciências Matemáticas). A CBMS é uma organização americana, composta por dezesseis sociedades americanas de profissionais em Matemática, que tem como objetivo fortalecer a cooperação entre essas sociedades, ampliar as investigações e os usos da Matemática e melhorar a educação em seus diferentes níveis. <http://www.cbmsweb.org/>. Todas as traduções apresentadas, no decorrer deste trabalho, são de minha autoria.

[2] SBEM, Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

No capítulo 5, descrevo cada um dos seis cursos de licenciatura investigados, identificando elementos, que permitam caracterizar a instituição e a disciplina Álgebra Linear oferecida. E, ainda, apresento similaridades ou discrepâncias evidenciadas nessa descrição.

No capítulo 6, apresento uma análise dos principais elementos identificados, nas entrevistas dos professores das instituições selecionadas e organizo os extratos dessas entrevistas em categorias, justificadas com argumentos baseados nos resultados de pesquisas apresentados, nos capítulos anteriores. Após a primeira categorização, apresento um refinamento e as complemento com observações das duas outras entrevistas.

Apresento, também, as minhas considerações finais sobre o estudo, as respostas que obtive para minhas questões de pesquisa e as questões e reflexões, que surgiram ao longo da elaboração desse texto.

Na versão impressa, destaco o Anexo 4, nele o leitor terá acesso a um encarte, no qual apresento uma lista ordenada com as referências básicas e complementares indicadas nos documentos das instituições selecionadas, para Álgebra Linear. Assim, ao invocar, ao longo do texto, por meio do uso de parênteses, uma sequência numérica, indico quais são essas obras. Por exemplo, *(1, 3 e 5) – estou indicando que foram citadas as seguintes obras da lista: primeira, terceira e quinta.* Já, na versão digital, o leitor terá o Anexo 2, que contempla a mesma lista.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

[...] eu me pergunto: Será que é a Álgebra Linear? Será que dentre as estruturas, é o espaço vetorial que deveria ser estudado? (HELENA, 2015) [3].

Neste capítulo, apresento a problemática que me conduziu à necessidade de desenvolver este estudo, desde a descrição do problema até a declaração do objetivo da pesquisa.

Motivações para o estudo

O trabalho que apresento visa a discutir sobre a disciplina Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática e está inserido na linha de pesquisa *Matemática na estrutura curricular e formação de professores* do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP –, no âmbito da problemática do Grupo de Pesquisa em *Educação Algébrica* – GPEA – fazendo parte do projeto: O *que se entende por Álgebra do ponto de vista epistemológico e didático nos planos institucional, acadêmico e histórico-epistemológico.*

A disciplina Álgebra Linear tem despertado minha atenção desde o período em que cursava a graduação em Matemática, sendo as dificuldades enfrentadas por mim, enquanto aluno de Álgebra Linear, uma das motivações que me levaram a cursar o Mestrado e, depois, o Doutorado em Educação Matemática.

[3] Extrato da transcrição de uma das entrevistas realizadas no decorrer desta pesquisa. Ressalto, ainda, que ao citar espaço vetorial, faço referência aos espaços vetoriais finitamente gerados sobre o corpo dos números reais, quando não for esse o caso, especifico qual é o espaço tomado.

A importância da Álgebra Linear pode ser observada nas palavras de Anton e Busby (2006) ao afirmarem: "Álgebra Linear é especial na medida em que suas ideias centrais estão encorpadas tanto nos teoremas e em suas provas como nas suas aplicações e nas técnicas de resolução de problemas" (p. ix), ou ainda:

> Álgebra Linear é um assunto estimulante. Como ponto de entrada, conduz aos muitos ramos da Matemática com os quais tem ligações, incluindo Álgebra Abstrata, Matemática Discreta, Cálculo, Equações Diferenciais, Geometria, Estatística, Métodos Numéricos, Pesquisa Operacional e Sistemas Dinâmicos. Ela expõe os estudantes a aspectos teóricos, aspectos aplicados e aspectos numéricos da Matemática e tem aplicações em uma gama variedade de disciplinas (POOLE, 2006, p. xii).

De acordo com Dubinsky (2001) e Nomura (2014), não é apenas a área da Matemática, que se beneficia dos resultados de Álgebra Linear, outras áreas também fazem uso desses resultados, dentre elas: Física, Biologia, Química, Engenharia, Estatística, Economia, Psicologia e Sociologia. Para Nomura (2014), a "Álgebra Linear tem grande influência na formação acadêmica e profissional do estudante, expondo tanto professores como alunos a uma série variada de conceitos e relações entre disciplinas pertinentes à sua formação" (p. 29).

Em particular, Poole (2006) considera que "alunos do curso de Matemática irão beneficiar-se ao estudar Álgebra Linear sobre corpos finitos, já que irão encontrá-los em outros cursos, tais como Matemática Discreta, Álgebra Abstrata e Teoria dos Números" (p. xv).

No relatório da CBMS (2012), sobre Educação Matemática para Professores, McCallum et al. (2012, p. 57) ao citarem a disciplina *Introdução à Álgebra Linear* consideram que:

> depois do Cálculo, Álgebra Linear é a mais poderosa e abrangente teoria que os professores irão encontrar. É um excelente lugar para começar a provar teoremas por causa da natureza computacional de muitas de suas provas, e oferece uma oportunidade para os professores experimentarem a prática da abstração de uma ideia matemática a partir de muitos exemplos[4].

[4] After calculus, linear algebra is the most powerful, comprehensive theory that teachers will encounter. It is an excellent place to begin proving theorems because of the computational nature of many of its proofs, and provides an opportunity for teachers to experience the mathematical practice of abstracting a mathematical idea from many examples.

McCallum et al. (2012) consideram essencial que na formação inicial do professor de Matemática sejam propostas situações, que o permitam desenvolver habilidades relacionadas ao raciocínio matemático, para ele "[...] o que os alunos da faculdade veem é muitas vezes o resultado final desse raciocínio, sem nenhuma ideia sobre como ele foi concebido" (p. 55-56)[5].

De acordo com os autores supracitados, em Matemática, a reflexão sobre os teoremas e definições permite que o estudante estabeleça melhores conexões entre novos conhecimentos e os conhecimentos prévios. Para eles, tal reflexão:

> [...] é especialmente importante para os professores, porque um olhar cuidadoso sobre a Matemática, que é ensinada no ensino médio, revela que muitas vezes foi desenvolvida como uma coleção de fatos não relacionados que nem sempre são justificados ou precisamente formulados (MCCALLUM et al., 2012, p. 55-56)[6].

Por isso, McCallum et al. (2012) consideram necessário quebrar o ciclo que faz com que os estudantes, ao iniciarem a graduação, muitas vezes, não consigam ver a Matemática como "um corpo coerente de resultados conectados (e) derivados de uma coleção parcimoniosa de suposições e definições" (p. 56)[7] e, ainda, afirmam ser um ingrediente importante na quebra desse ciclo para que a próxima geração de professores desenvolva uma visão coerente em relação à Matemática, de forma que possa propor situações que permitam fazer com que seus alunos desenvolvam habilidades relacionadas ao raciocínio matemático.

No relatório há explícitamente a recomendação de que, na formação inicial de professores de Matemática, as definições e teoremas devem ser trabalhados de maneira que os estudantes os identifiquem como formas de organizar e sistematizar as ideias matemáticas e é sugerido que a experiência com provas permeie, nem sempre ao mesmo nível de rigor, todo o período de formação profissional de um professor de Matemática.

Para complementar a discussão iniciada e sem o intuito de tecer longas considerações, recorro às afirmações de Dorier (1990) ao afirmar que a construção

[5] […] what college students see is often the end result of this thinking, with no idea about how it was conceived.

[6] It is especially important for teachers, because a careful look at the mathematics that is taught in high school reveals that it is often developed as a collection of unrelated facts that are not always justified or precisely formulated.

[7] […] a coherent body of connected results derived from a parsimonious collection of assumptions and definitions.

histórica das noções elementares[8] em Álgebra Linear perdurou por séculos e teve um processo de germinação em diferentes áreas da Matemática, com destaque no estudo de sistemas lineares e de Geometria, áreas em que a Álgebra Linear se desenvolveu de maneira implícita e informal.

Para o autor supracitado, a Álgebra impulsionou a teoria dos espaços vetoriais de dimensão finita, já a Geometria, serviu como um laboratório, que permitiu observar e generalizar várias relações. Para Dorier (1997) a Geometria diferentemente da Álgebra "[...] possui um campo 'natural' de representações visuais, potenciais intuições e uma longa tradição de problemas e questões que remontam do berço das Matemáticas ocidentais na Grécia antiga" (p. 35)[9] e, ainda,

> a introdução da Álgebra na Geometria permite pelo método analítico um tratamento mais sistemático das questões, também permite abordar os problemas de formas diferentes [...], além disso, a generalização da Geometria em dimensões superiores a três que antes não era possível em Geometria Analítica, o que certamente não significa que seja esse o início da introdução de métodos analíticos em Geometria (DORIER, 1997, p. 35)[10].

Dorier (1997) considera, também, que essa complementaridade entre Álgebra e Geometria nasceu da busca por um cálculo geométrico intrínseco, que para ele, pesa tanto sobre o desenvolvimento da Álgebra Linear em termos de Geometria. No entanto, foi apenas no final do século XIX e em meados do século XX, com o movimento do formalismo[11] em Matemática, que os conceitos foram reorganizados e fizeram com que a Álgebra Linear não fosse mais o estudo de equações, mas, sim, o estudo de estruturas:

---

[8] Nesta pesquisa a palavra conceito (ou noção) é utilizada, assim como para Sfard (1991), para expressar uma ideia matemática em uso em sua forma 'oficial', ou seja, como uma construção teórica dentro do universo da Matemática. E, uma noção considerada *elementar em Álgebra Linear* não significa ser necessariamente simples, mas, sim, essencial para construir todas as demais noções de Álgebra Linear. Desta forma, ao fazer referência às noções elementares de Álgebra Linear, estarei considerando as seguintes noções: Espaço Vetorial, Combinação linear, Dependência Linear entre vetores, Base e Dimensão de um espaço vetorial.

[9] [...] possède un champ "naturel" de représentations visuelles, un potentiel d'intuitions et une longue tradition de problèmes et de questions qui remonte au berceau des mathématiques occidentale dans la Grèce antique.

[10] L'introduction de la algèbre en géométrie permet par la méthode analytique un traitement plus systématique des questions, elle permet aussi d'aborder les problèmes différemment [...] de plus, la généralisation de la géométrie en dimension supérieure à trois n'était pas envisageable avant la géometrie analytique, ce qui ne veut pas dire cependant qu'elle est allée de soi avec l'introduction des méthodes analytiques en géométrie.

[11] No apêndice 1, abordo a questão do formalismo em Matemática e algumas das escolhas do Grupo Bourbaki e possíveis influências.

> esta unificação é um aspecto de uma transformação geral do edifício das Matemáticas [...] fazendo da Álgebra não mais o estudo de equações, mas o estudo de estruturas. Além disso, as aplicações de espaços de funcões, principalmente os trabalhos de Banach mostraram o interesse teórico de uma abordagem axiomática para contabilizar os conjuntos de resultados da Álgebra Linear em dimensão infinita (DORIER, 1990, p. 88)[12].

Para o autor, o uso de uma teoria axiomática para o estudo dos conceitos e resultados de Álgebra Linear é recente e "[...] essa escolha segue essencialmente uma preocupação organizacional, de unificação e a simplificação do estudo de diferentes áreas com ferramentas e métodos semelhantes" (DORIER, 1990, p. 89)[13]. Por exemplo, Barone Junior (1985), no livro *Introdução à Álgebra Linear,* afirma que "um dos objetivos da Álgebra Linear é o de estudar de uma forma unificada conceitos e propriedades comuns a diversos conjuntos onde estão definidas operações que 'funcionam' de maneira análoga" (p. 11, *grifo do autor*).

Para Dorier et al. (1997, p. 15), "a introdução da teoria dos espaços vetoriais no ensino representou uma das questões mais importantes da reforma da Matemática Moderna"[14], pois "ela perturbou a abordagem dada ao ensino da geometria, que desde sempre foi o emblema das Matemáticas"[15-16], e resistiu ao fim da Matemática Moderna, passando a ser o primeiro contato do estudante do Ensino Superior com a Álgebra Moderna. O autor considera que os fatos apresentados já são suficientes para justificar o seu ensino, no entanto, ressalta:

[12] Cette unification est un des aspects d'une transformation générale de l'édifice des mathématiques [...], faisant de l'algèbre non plus l'étude des équations mais l'étude des structures. Par ailleurs, les applications à des espaces de fonctions, et principalement les travaux de Banach ont montré l'intérêt théorique de l'approche axiomatique pour rendre compte des résulats de l'algèbre linéaire en dimension infinite.

[13] Ce choix obéit essentiellement à un souci d'organisation, l'unification et la simplification de l'etude de différents domaines avec des outils et des méthodes semblables

[14] L'introduction de la théorie des espaces vectoriels dans l'enseignement a représenté l'un des enjeux les plus importants de la réforme des mathématiques modernes.

[15] Elle a bouleversé l'approche de l'enseignement de la géométrie, qui depuis toujours avait été l'emblème des mathématiques.

[16] Pires (2006) afirma que a síntese em relação à Geometria, proposta por Félix Klein em 1871, "como o estudo das propriedades de um espaço que são invariantes sob um grupo dado de transformações" (p. 105) permitiu "[...] uma visão unificada da Geometria, euclidiana ou não euclidiana" (p. 105), de forma que Grupo Bourbaki "na sua organização da Matemática contemporânea, numa redefinição dos objetos e métodos, reduz a Geometria elementar a um simples capítulo da Álgebra Linear" (p. 107).

> a resolução de equações lineares, anté agora pilar da Álgebra Linear, tornou-se nada mais do que uma ferramenta, privilegiada e central, cujo poder teórico foi ultrapassado por um conjunto de conceitos mais formais para tratar de todas as questões lineares, mesmo de dimensão infinita, de maneira unificada e geral. A esses argumentos se acrescenta o fato de que os modelos lineares, tanto em Matemática como em outras ciências, continuam a mostrar seu poder e riqueza (DORIER et al., 1997, p. 15)[17].

Para Dorier (1997, p. 101), o ensino de Álgebra Linear para as novas gerações de matemáticos "[...] assume a responsabilidade de trazer a teoria dos espaços vetoriais como sendo, naturalmente, um bom ponto de vista ao abordar os problemas de linearidade"[18] e, considera que "a utilidade das estruturas algébricas é mais para discutir, como este ponto de vista tem demonstrado a sua eficácia e assim, também, é parte da cultura matemática"[19].

No GPEA, várias pesquisas foram desenvolvidas e evidenciaram as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao construírem noções elementares de Álgebra Linear, por exemplo, têm-se a de Araújo (2002), Padredi (2003), Machado e Martins (2003), Oliveira (2005), Prado (2010), Nomura (2014), entre outras.

Dentre as pesquisas internacionais realizadas por diversos grupos, têm-se: Dorier (1990), Dorier et al. (1997), Dubinsky (1997), Stewart (2008), Parraguez (2009), Thomas et al. (2012), entre outras. Cito algumas das pesquisas realizadas, pois a preocupação com o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear é crescente devido à importância para as Ciências Exatas e afins.

Dubinsky (1997), que tem dedicado sua atenção ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear, iluminou três fontes que acredita causar dificuldades durante o processo de aprendizagem dessa disciplina: os estudantes não serem convidados a compreender o processo de construção das noções matemáticas apresentadas em sala, os estudantes não compreenderem as noções preliminares e a falta de

---

[17] La résolution des équations linéaires, jusqu'alors pilier de l'algèbre lineaire, ne devint plus qu'un outil, certes privilégié et central, mais dont la puissance théorique fut dépassée par un ensemble de concepts plus formels permettant de traiter de toutes les questions linéaires, même en dimension infinite, de façon unifiée et générale. A ces arguments, s'ajoute le fait que les modèles linéaires, tant en mathématiques, que dans les autres scienses, n'ont cessé de montrer leur puissance et leur richesse.

[18] [...] amenées à prendre des reponsabilités dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, la théorie des espaces vectoriels représente tout naturellement le bon point de vue pour aborder les problèmes de linéarité.

[19] L' utilité des structures algébriques n'est plus à discuter, tant ce point de vue a montré son efficacité et tant, aussi, il fait partie de la culture mathématique.

estratégias didáticas que promovam reflexões durante a construção das noções matemáticas envolvidas.

Com isso, Dubinsky, juntamente com seu grupo de pesquisa – RUMEC[20] -, que faz uso das ideais propostas inicialmente por Dubinsky e Lewin (1986) sobre o aporte teórico APOS[21], escreveu um livro em que as noções de Álgebra Linear são construídas pelos estudantes, enquanto elaboram programas computacionais (WELER et al., 2002).

No entanto, antes de uma proposta de intervenção, Dubinsky (1997) afirma ser necessária uma análise teórica das noções elementares. Assim, nos anos conseguintes, foram produzidos trabalhos propondo decomposições genéticas[22] para essas noções de Álgebra Linear.

Em Prado (2010), por exemplo, tive como objetivo identificar qual a concepção[23] que os alunos, ao concluirem uma disciplina sobre Álgebra Linear, têm sobre a noção de base de um espaço vetorial finitamente gerado sobre o corpo dos reais. Esse objetivo foi fruto de reflexões sobre as questões norteadoras do estudo, a saber: qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção de base de um espaço vetorial? Como os alunos concebem a noção de base de um espaço vetorial, ao concluírem uma disciplina sobre Álgebra Linear? Como um aluno correlaciona as noções elementares de Álgebra Linear, após ter concluído, pelo menos uma disciplina sobre o assunto?

Após a construção da decomposição genética para a noção de base de um espaço vetorial considerei que

[20] *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (Comunidade de pesquisa em Educação Matemática Universitária).

[21] De acordo com Asiala et al. (1996), no aporte teórico APOS (*Action* | ação – *Process* | processo – *Object* | objeto – *Schem* | esquema) é considerado que a construção mental de uma noção matemática começa na manipulação de objetos físicos ou mentais em forma de ações. As ações são, então, interiorizadas em processos que são encapsulados em objetos matemáticos. Os objetos podem ser desencapsulados nos processos com base, nos quais, foram formados e, finalmente, as ações, os processos e os objetos podem ser organizados ou reorganizados em esquemas.

[22] Uma *decomposição* genética, segundo Asiala et al. (1996) citado por Prado (2010, p. 31-32), consiste em uma "descrição específica das possíveis construções mentais utilizadas por um aprendiz, a fim de desenvolver sua construção sobre um conceito". Para Dubinsky e Lewin (1986), a decomposição genética não representa necessariamente a forma que um matemático praticante compreende as noções matemáticas, mas, sim, um mapeamento da forma com que os estudantes formulam empiricamente suas compreensões.

[23] O termo *concepção* deve ser entendido no contexto do aporte teórico APOS. Conforme Prado (2010), "ao indivíduo que limita sua compreensão de uma dada noção à realização de ações, diz-se que ele possui uma concepção ação para tal noção" (p.34), "quando um indivíduo, ao resolver problemas, dá indícios de utilizar transformações do tipo processo, diz-se que possui uma concepção processo para a noção matemática em estudo" (p.35) e ao indivíduo que "encapsulou um processo e realiza tais reflexões" (p.36) diz-se que possui uma concepção objeto.

> o indivíduo que demonstra ter uma concepção objeto sobre a noção de base de um espaço vetorial tem construído os objetos conjunto gerador, espaço gerado, dependência linear e pode conceber a base, como sendo: um conjunto minimal gerador, ou um conjunto maximal linearmente independente, ou um conjunto gerador linearmente independente (PRADO, 2010, p. 84-85).

E, ainda,

> o indivíduo que possui uma concepção objeto sobre a noção de dimensão, pode conceber a dimensão como um invariante, ou seja, reconhecer que todas as bases de um mesmo espaço vetorial, possuem o mesmo número de vetores. Além disso, poderá correlacionar a noção de dimensão ou com a de conjunto gerador ou com a de dependência linear, para dizer quantos vetores esses conjuntos deverão possuir para ser uma base (PRADO, 2010, p. 85).

Entrevistei dez estudantes, que participaram de um curso de extensão sobre Álgebra Linear em uma universidade de renome em São Paulo. Dos dez, para apenas um, esse curso tinha sido o seu primeiro contato com Álgebra Linear.

Como resultado, observei que cinco dos entrevistados mostraram ter construído uma concepção objeto sobre a noção de base; dos demais, um mostrou ter construído uma concepção processo, um mostrou ter construído uma concepção ação e três, não terem construído, ao menos, uma concepção ação[24].

Dos entrevistados, que mostraram ter contruído uma concepção objeto sobre a noção de base, "houve indícios que concebam base, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes" (PRADO, 2010, p. 170) e "indícios de não conceberem a noção de base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente e como um conjunto minimal gerador" (PRADO, 2010, p. 170-171).

Destaco o fato dos entrevistados terem mostrado possuir concepções objeto sobre as noções elementares de Álgebra Linear, mas não conseguirem, ao menos, conjecturar a existência de uma equivalência entre o objeto base como sendo um subconjunto maximal linearmente independente e base como sendo um subconjunto minimal gerador.

Além disso, para três desses entrevistados dependerá do contexto em que o problema estiver inserido, para que eles efetivem correlações entre diferentes espaços vetoriais e entre as noções elementares, porque ainda podem existir

[24] Para maiores detalhes sobre concepção ação, concepção processo e concepção objeto, indico a leitura de Prado (2010).

algumas dificuldades. Já os outros dois mostraram utilizar a noção de espaço vetorial de maneira coerente e estabelecendo correlações entre as noções elementares, de forma que conseguem determinar quando a estrutura é aplicável a um problema e quando, não.

Os resultados da minha pesquisa (PRADO, 2010), fizeram-me refletir sobre o papel da Álgebra Linear na formação dos futuros professores de Matemática, sendo várias as questões que surgiram, como: por que ensinar Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática? O que de Álgebra Linear tem sido ensinado nas Licenciaturas? Será que o licenciando compreende a importância dessa disciplina em sua formação profissional?

Eram questões amplas que mereciam ser lapidadas, para isso, ingressei no dourorado e a partir da necessidade de conhecer a estrutura das Licenciaturas em Matemática no Brasil, busquei por documentos que regulamentassem a Licenciatura em Matemática no país, encontrando, assim, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica – DCNFPEB[25] –.

Em um desses documentos, o Parecer CNE/CP 09/2001 (BRASIL, 2001a), que trata da formação do professor da Educação Básica nas diferentes áreas do conhecimento, são apresentadas questões pertinentes à formação do professor de Matemática e é sinalizada a necessidade de repensar os conteúdos específicos na Licenciatura.

E ainda, para os relatores desse parecer (BRASIL, 2001a) e de Brasil (2002) o professor aprende a sua profissão num lugar similar ao que ele a exercerá, na escola, mas numa posição invertida. Esse processo é então caracterizado como sendo uma "simetria invertida", uma vez que o fato de o licenciando ter "a experiência como aluno, não apenas nos cursos de formação docente, mas ao longo de toda a sua trajetória escolar, é constitutiva do papel que exercerá futuramente como docente" (BRASIL, 2001a, p. 30).

Nesse documento, coloca-se que

> nenhum professor consegue criar, planejar, realizar, gerir e avaliar situações didáticas eficazes para a aprendizagem e para o desenvolvimento dos alunos <u>se ele não compreender</u>, com razoável profundidade e com a necessária adequação à situação escolar, os

[25] Parecer CNE/CP 09/2001 aprovado em 08 de maio de 2001 (BRASIL, 2001a) e Resolução CNE/CP 1 aprovada em 18 de fevereiro de 2002 (BRASIL, 2002).

> conteúdos das áreas do conhecimento que serão objeto de sua atuação didática, os contextos em que se inscrevem e as temáticas transversais ao currículo escolar (BRASIL, 2001a, p. 20, grifo meu).

Surge, então, uma nova questão para refletir: em que a Álgebra Linear tem contribuído para atingir uma melhoria na formação do professor de Matemática ou conduzir a isso?

Para Dreyfus (1991), um professor de um típico curso de Matemática, geralmente escolhe um número de teoremas a serem provados e como suas aplicações podem ser desenvolvidas e

> [...] provavelmente distribuirá isso nas várias aulas disponíveis e ensinará durante parte considerável dessas aulas, fazendo uso extensivo de formalismos extraordinariamente convenientes, domínio específico da Matemática envolvida (DREYFUS, 1991, p. 26-27)[26].

Quando não, a abordagem pedagógica adotada é, supostamente, aquela citada por Dubinsky (1997) em que é apresentado um exemplo e os alunos são convidados a realizar uma lista de exercícios similares. No que vem corroborar Dreyfus (1991), ao afirmar que um aspecto muito importante da Matemática se perde quando o professor apresenta somente o produto final, refinado e acabado, pois assim, o aluno não tem consciência das abstrações que permitiram todo o desenvolvimento da Matemática.

Em Álgebra Linear, por exemplo, as noções de espaço vetorial, dependência linear, dimensão, base, transformação linear, entre outras, passaram por um processo longo e acidentado de evolução implícita em diferentes contextos da Matemática ou da Física (PARRAGUEZ, 2009) e, no processo de ensino e aprendizagem, são apresentados somente os produtos finais com o uso de representações intrínsecas a essas noções. Mas, como cita Chaitin (2003), "os matemáticos não raciocinam em linguagens formais" (p. 17). Para ele,

> a única forma de compreender um resultado matemático é sermos nós próprios a demonstrá-lo, encontrarmos a nossa própria demonstração. Quando lutamos por ela, então compreendemo-la! Ler a demonstração de outra pessoa num livro não nos proporciona compreensão (CHAITIN, 2003, p. 56).

[26] [...] probably distribute these into as many class periods as are available and lecture during a considerable part of these class periods, making extensive use of the strikingly convenient formalisms of the specific domain of mathematics concerned.

Vários autores (DREYFUS, 1991; DUBINSKY, 1997; CHAITIN, 2003; MCCALLUM et al., 2012) destacaram a importância de o aluno ter consciência das abstrações que permitiram o desenvolvimento da Matemática e a necessidade de ele compreender o que é o processo de demonstração e vivenciar momentos em que deve provar certos resultados.

McCallum et al. (2012), a esse respeito, afirmam que os graduandos precisam ser participantes ativos no processo de validação dos teoremas, eles devem ser constantemente conduzidos a refletir sobre o raciocínio matemático envolvido, além de fazerem uso dos conhecimentos que trazem da Educação Básica, pois "naturalmente, construir teorias conectadas diretamente à Matemática do Ensino Médio também pode fortalecer e aprofundar o conhecimento sobre o que esses futuros professores vão ensinar" (p. 56)[27].

Já, Dubinsky (1997) afirma

> [...] estar convencido de que os estudantes desenvolvem compreensão conceitual como um resultado da reação a situações-problema, fazendo construções mentais de objetos e processos matemáticos, e usando-os para dar sentido fora do problema e tentando resolvê-lo (p. 5)[28].

O autor também afirma acreditar que existem evidências suficientes para tornar, esse fato, mais do que um ponto de vista plausível e afirma ser

> necessário determinar as construções mentais específicas que um estudante deve realizar, a fim de compreender tais conceitos. Então, devem ser desenvolvidas estratégias pedagógicas que levem os estudantes a fazer estas construções e usá-las para resolver problemas (DUBINSKY, 1997, p. 6)[29].

Apesar dos trabalhos citados se referirem, em grande parte, à década de 1990, em Brasil (2001a, p. 21) os autores ainda descrevem que

[27] Of course, building theories directly connected to high school mathematics can also strengthen and deepen prospective teachers' knowledge of what they will teach.

[28] I am convinced that students develop conceptual understanding as a result of responding to problem situations by making mental constructions of mathematical objects and processes and using them to make sense out of the problem and trying to solve it.

[29] […] is needed to determine the specific mental constructions that a student might make in order to understand these concepts. Then, pedagogical strategies need to be developed that can lead to students making these constructions and using them to solve problems.

> nos cursos atuais de formação de professor, salvo raras exceções, ou se dá grande ênfase à transposição didática dos conteúdos, sem sua necessária ampliação e solidificação – pedagogismo, ou se dá atenção quase que exclusiva a conhecimentos que o estudante deve aprender – conteudismo, sem considerar sua relevância e sua relação com os conteúdos que ele deverá ensinar nas diferentes etapas da Educação Básica.

Essas discussões e apontamentos conduziram-me a muitos outros questionamentos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear, tanto de natureza conceitual, como epistemológica, como metodológica, considerando, principalmente a formação de professores na licenciatura. Quais conteúdos sobre esse tema devem ser ensinados, levando-se em conta os conhecimentos prévios dos licenciandos? Com que objetivos? Qual a importância desses conteúdos na formação desses alunos, considerando o trabalho que eles deverão desenvolver na Educação Básica, com todos os desafios que o ensino de noções relacionadas a esse tema lhes apresenta? Devem esses conteúdos merecerem uma maior ênfase na formação inicial? Que tipos de abordagens devem ser priorizadas?

Um dos projetos do GPEA visa a investigar o que se entende por Álgebra do ponto de vista epistemológico e didático nos planos institucional, acadêmico e histórico-epistemológico, decorrentes das evidências e questionamentos que envolvem a preocupação com a Álgebra a ser ensinada nos diferentes níveis de escolaridade. O trabalho, que proponho, vem discutir sobre uma das álgebras ensinadas na Licenciatura em Matemática, a disciplina Álgebra Linear, pois reconheço, assim como Resende (2007a, p. 16), que

> [...] a discussão da formação inicial do professor de Matemática é complexa, pois envolve olhares, questões e interesses diversos, tanto no âmbito das políticas educacionais, quanto no das comunidades científicas (sociedades, departamentos que congregam matemáticos, educadores matemáticos), quanto no das demandas que o ensino da Matemática impõe num país marcado por uma profunda desigualdade social.

Para Resende (2007a), a problemática sobre a formação de professores é atual e exige pesquisas para fundamentar as discussões e as escolhas curriculares que deverão ser feitas, pois existem muitos estudos sobre formação de professores e Grupos de Trabalhos constituídos em várias associações, inclusive com fóruns específicos, com relação à Licenciatura em Matemática, mas, ainda há insuficiência de produções, especialmente de estudos que tratam dos saberes científicos[30] a serem desenvolvidos nos cursos de formação inicial.

De acordo com Resende (2007b), os saberes científicos podem ser organizados em campo ou áreas que podem ser chamados de disciplinas científicas. Para a autora "a constituição de uma disciplina científica depende de processos argumentativos do grupo proponente, mas também de ações institucionalizantes" (p. 37).

Assim, a problemática desta pesquisa situa-se no campo da formação inicial do professor de Matemática na Licenciatura, mais, especificamente, a Álgebra Linear, como uma disciplina acadêmica universitária[31].

Assumindo que as disciplinas acadêmicas (saberes a ensinar) não são reproduções fiéis das disciplinas científicas, mas, sim,

> [...] um conjunto de conteúdos e práticas frutos de uma transposição didática; finalidades; elementos pedagógicos e outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral; organizadas de modo a manter uma unidade científica e didática (RESENDE, 2007b, p. 38-39),

e, ainda, que "os saberes científicos, tais como são apresentados pela comunidade científica que os produziu, devem sofrer transformações adaptativas" (RESENDE, 2007b, p. 39), tenho como objetivo de investigação a Álgebra Linear como saber a ensinar na Licenciatura em Matemática.

Delimitação do problema

O principal objetivo dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil é o de formar professores para a Educação Básica (BRASIL, 2001b, p. 1). No entanto, Brasil (2001b) considera que as habilidades e competências adquiridas ao longo da formação do matemático (licenciatura ou bacharelado) permitem que esse

[30] Os saberes científicos serão entendidos como sendo "um corpo organizado, sistematizado de conhecimentos, com regras mais rigorosas e específicas de validação compartilhadas por uma comunidade e apresentado numa linguagem própria" (RESENDE, 2007b, p. 36)

[31] Resende (2007b, p. 37) afirma que "as disciplinas científicas devem ser transmitidas às novas gerações" e para que os saberes específicos possam se constituir em objetos de ensino faz necessário "passar por processos de transformação para que sejam compreensíveis por aquele que aprende". Para a autora, uma das instâncias desse processo é, justamente, a constituição da disciplina acadêmica universitária.

profissional seja capaz de “ocupar posições no mercado de trabalho também fora do ambiente acadêmico, em áreas em que o raciocínio abstrato é uma ferramenta indispensável” (p. 1). E ainda, “os estudantes podem estar interessados em se graduar em Matemática por diversas razões e os programas de graduação devem ser bastante flexíveis para acomodar esse largo campo de interesses” (p. 1).

Bittar et al. (2012) investigaram a atuação profissional e a relação existente entre a quantidade de ingressantes e de egressos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus Campo Grande, no período de trinta anos e, dentre os resultados obtidos, um foi o de que “muitos dos que fazem o curso em 4 anos fazem mestrado logo após o término da licenciatura e o caminho natural acaba sendo o Ensino Superior” (p. 15).

Como citado acima, os documentos oficiais apresentam como sendo o principal objetivo da Licenciatura em Matemática o de formar professores para atuarem na Educação Básica, no entanto, não há uma limitação à Educação Básica, ou até mesmo à Educação e mesmo sendo evidente[32] a necessidade de formar professores, “não há garantias de que os poucos egressos assumam a Educação Básica como campo de trabalho profissional” (BITTAR et al., 2012, p. 4), podendo seguir para o Ensino Superior, centros de pesquisa, empresas, indústrias, bancos, empresas de consultorias, entre outros.

Partindo do pressuposto de que é importante ensinar Matemática na Educação Básica, consequentemente, Álgebra, faz-se necessário iluminar qual a Álgebra Linear a ser ensinada, tanto para a definição e implementação dos currículos da Educação Básica, como para os cursos de formação de professores de Matemática.

Entendendo que a importância repousa sobre os argumentos já apresentados, em síntese, a Álgebra Linear pode permitir que os estudantes:

- iniciem o estudo sobre estruturas algébricas, desenvolvam estratégias para compreender definições e teoremas, assim como, construam argumentos que lhes permitam provar teoremas;
- percebam o uso da teoria dos espaços vetoriais ao abordar problemas de linearidade e as ligações dessa disciplina com outras, por exemplo, Álgebra

[32] Gatti e Barreto (2009).

Abstrata, Matemática Discreta, Cálculo, Equações Diferenciais, Geometria, Estatística, Teoria dos Números, entre outras;

- compreendam as necessidades históricas vivenciadas por matemáticos, no final do século XIX e início do século XX, em relação às questões organizacional, de unificação e simplificação de conceitos de diferentes áreas, que fazem uso de ferramentas e métodos semelhantes, assim como, a influência, que o desenvolvimento da Matemática, em um determinado período, teve sobre o ensino de Matemática, sobretudo, na Educação Básica brasileira.

Assim, tenho como **objeto de estudo** o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear nos cursos de Licenciatura em Matemática, orientado pela seguinte questão geradora deste estudo: Qual Álgebra Linear é ou poderia ser ensinada na Licenciatura em Matemática, visando à prática docente na Educação Básica?

Em busca de elementos que me permitam compreender a problemática apresentada, analisarei diferentes fontes, pois o fato da constituição de uma disciplina depender de ações institucionalizantes e de processos argumentativos do grupo proponente e, ainda, o fato das disciplinas acadêmicas serem resultado de transformações adaptativas, surgiram às questões norteadoras desta tese:

- Como os documentos das instituições de Ensino Superior selecionadas, descrevem a disciplina Álgebra Linear nos projetos pedagógicos, já que essa disciplina é uma das que compõem o currículo mínimo obrigatório na Licenciatura em Matemática no Brasil?
- Como os professores pesquisadores em Álgebra (Educação Matemática), das universidades selecionadas, concebem a Álgebra Linear e o seu ensino?
- Qual Álgebra Linear poderia ser concebida como saber a ensinar na Licenciatura em Matemática, visando à formação inicial do professor da Educação Básica?

Essas questões permitiram-me formular os seguintes **objetivos:**

- Compreender a Álgebra Linear ensinada para a Licenciatura em Matemática como um saber voltado para a formação do professor de Matemática que atuará na Educação Básica;
- Buscar elementos e possibilidades para ressignificar a Álgebra Linear na formação do professor de Matemática da Educação Básica, concebendo um conjunto de conhecimentos em Álgebra Linear, necessário para fundamentar a Álgebra a ser ensinada na Educação Básica.

Com as questões postas e objetivos anunciados, no próximo capítulo, apresento os principais documentos que definem a Licenciatura em Matemática no Brasil, assim, como resultados de pesquisas relacionadas ao tema.

CAPÍTULO 2

A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NO BRASIL

> Primeiro, a grande maioria dos professores que atuam nos cursos de licenciatura não leem os documentos, quem se incumbe de estudar os documentos são as pessoas que assumem a coordenação do colegiado e que ficam responsáveis por estruturar o curso, não é? [...] por isso, digo que envolve uma questão de compromisso, compromisso político, mesmo, do que é formar um professor [...] (JÚLIA, 2015) [33].

Neste capítulo tenho como objetivo compreender como os documentos oficiais definem as Licenciaturas, em especial, a Licenciatura em Matemática no Brasil. Para isso, faço uso dos documentos: *Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica, em nível superior, curso de Licenciatura, de graduação plena* (BRASIL, 2001a); *Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*[34]; e *Referenciais Curriculares Nacionais dos cursos de Bacharelado e Licenciatura* (BRASIL, 2010). Assim, como, resultados de pesquisas relacionados ao tema, por exemplo, Fiorentini (2005), Gatti e Barreto (2009), Pires (2011), Moreira (2012), entre outros.

A Licenciatura em Matemática

As licenciaturas, segundo Brasil (2001a), são os únicos cursos autorizados a formar professores para atuar na Educação Básica e, ainda, verifica-se que "os cursos de Licenciatura em Matemática tem como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica" (BRASIL, 2001b, p. 1).

---

[33] Extrato da transcrição de uma das entrevistas realizadas com professores participantes desta pesquisa.

[34] Parecer CNE/CES 1.302/2001 aprovado em 06 de novembro de 2001 (BRASIL, 2001b) e Resolução CNE/CES 3 aprovada em 18 de fevereiro de 2003 (BRASIL, 2003).

Em 2010 foi publicado o documento intitulado Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2010), com o objetivo de sistematizar as denominações atribuídas e estabelecer “uma identidade para cada curso” (p. 3).

Em relação à Licenciatura em Matemática, os autores desse documento utilizaram como referência Brasil (2001a; 2001b) e definiram qual deve ser o perfil do egresso licenciado em Matemática, para eles:

> o licenciado em Matemática é o professor que planeja, organiza e desenvolve atividades e materiais relativos à educação matemática. Sua atribuição central é a docência na Educação Básica, que requer sólidos conhecimentos sobre os fundamentos da Matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas; assim como sobre estratégias para transposição do conhecimento matemático em saber escolar. Além de trabalhar diretamente na sala de aula, o licenciado elabora e analisa materiais didáticos, como livros, textos, vídeos, programas computacionais, ambientes virtuais de aprendizagem, entre outros. Realiza ainda pesquisas em educação matemática, coordena e supervisiona equipes de trabalho. Em sua atuação, prima pelo desenvolvimento do educando, incluindo sua formação ética, a construção de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico (BRASIL, 2010, p. 79).

Sobre as atuações profissionais tem-se que:

> o licenciado em Matemática trabalha como professor em instituições de ensino que oferecem cursos de nível fundamental e médio; em editoras e em órgãos públicos e privados que produzem e avaliam programas e materiais didáticos para o ensino presencial e a distância. Além disso, atua em espaços de educação não-formal, como feiras de divulgação científica e museus; em empresas que demandem sua formação específica e em instituições que desenvolvem pesquisas educacionais. Também pode atuar de forma autônoma, em empresa própria ou prestando consultoria (BRASIL, 2010, p. 79).

Assumindo essas definições em relação à Licenciatura em Matemática, apresento uma discussão com base nos documentos oficiais e em reflexões publicadas por autores que têm se debruçado sobre questões relacionadas à formação de professor, mais especificamente, o professor de Matemática que atuará na Educação Básica.

Para iniciar, Gatti, Barreto e André (2011) afirmam que a formação de professores não deve contar com o improviso. Deve, sim, focar na formação de um profissional que tenha "condições de confrontar-se com problemas complexos e variados, estando capacitado(a) para construir soluções em sua ação, mobilizando seus recursos cognitivos e afetivos" (p. 93).

Para elas, é fundamental que se investigue a formação inicial, pois "ainda carece de muito conhecimento sobre como formar professores competentes para atuar no mundo atual" (GATTI; BARRETO; ANDRÉ, 2011, p. 15). Afinal,

> a formação inicial de professores tem importância ímpar, uma vez que cria as bases sobre as quais esse profissional vem a ter condições de exercer a atividade educativa na escola com as crianças e os jovens que aí adentram, como também, as bases de sua profissionalidade e da constituição de sua profissionalização (GATTI; BARRETO; ANDRÉ, 2011, p. 89).

Apesar da importância de estudar a formação inicial, as autoras fazem uma ressalva, pois os pesquisadores devem atentar-se para não "reforçar uma ideia, corrente no senso comum, de que o(a) professor(a) é o único elemento no qual se deve investir para melhorar a qualidade da educação" (GATTI; BARRETO; ANDRÉ, 2011, p. 15).

Em outra pesquisa, Gatti e Barreto (2009), atendendo à solicitação da UNESCO[35], apresentaram um estudo sobre a formação inicial e continuada e a carreira dos professores no Brasil, cujo objetivo foi o de "oferecer às diversas instâncias da administração educacional do país um exame crítico do quadro vigente, seguido de orientações e recomendações, para servir de subsídio para uma efetiva valorização dos professores" (p. 8).

Nesse trabalho, Gatti e Barreto (2009) descrevem que no Brasil, a preocupação com a formação de professores interessados em atuar no Ensino Secundário (o que corresponde atualmente ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio) teve início no século XX com a criação das universidades, e o modelo seguido era o "3+1", em que o estudante universitário cursava em três anos o bacharelado e com mais um ano de curso adquiria o direito de atuar no, então Ensino Secundário e obtinha o título de licenciado.

Pires (2011), em seu trabalho sobre saberes pedagógicos e saberes específicos na formação de professores, que ensinam Matemática, afirma que

[35] *United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization* – Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura –.

no formato "3+1"

> [...] os saberes matemáticos ensinados aos futuros professores não incorporavam a discussão a respeito de conhecimentos matemáticos que eles viriam a ensinar a seus alunos da Educação Básica. Por sua vez, os saberes pedagógicos eram apresentados de forma teórica e genérica e pouco envolviam os alunos nas discussões de caráter pedagógico, sobre 'o ensinar e aprender Matemática' (p. 32).

Assim, um marco na transição dos processos de formação de professores, segundo Gatti e Barreto (2009), foi a LDBEN[36], pois ao fixar o prazo de dez anos para que os sistemas de ensino fizessem as devidas adequações à nova norma, possibilitou, em 2002, as primeiras adaptações aos currículos das licenciaturas com a promulgação das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores (BRASIL, 2002) que, segundo as autoras, a redação está centrada no desenvolvimento de competências pessoais, sociais e profissionais dos professores.

No Parecer CNE/CP 09/2001 (BRASIL, 2001a), são apresentadas questões relacionadas à formação de professores de forma geral e, um dos pontos em discussão é o fato de os professores formadores nem sempre considerarem durante a elaboração do planejamento e o desenvolvimento da ação pedagógica, o repertório de conhecimento construído pelos licenciandos, enquanto estudantes da Educação Básica. Segundo os relatores, os licenciandos

> [...] têm, muitas vezes, formação insuficiente, em decorrência da baixa qualidade dos cursos da Educação Básica que lhes foram oferecidos. Essas condições reais, nem sempre são levadas em conta pelos formadores, ou seja, raramente são considerados os pontos de partida e as necessidades de aprendizagem desses alunos (BRASIL, 2001a, p. 20).

De acordo com os relatores, é necessário que "os cursos de preparação de futuros professores tomem para si a responsabilidade de suprir as eventuais deficiências de escolarização básica que os futuros professores receberam [...]" (BRASIL, 2001a, p. 20). Afinal,

> ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina nem a constituição de significados que não possui ou a autonomia

[36]Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei n. 9.294/96. (BRASIL, 1996).

> que não teve oportunidade de construir. É, portanto, imprescindível que o professor em preparação para trabalhar na Educação Básica demonstre que desenvolveu ou tenha oportunidade de desenvolver, de modo sólido e pleno, as competências previstas para os egressos da Educação Básica [...] (BRASIL, 2001a, p. 37).

Caso seja necessário, devem ser oferecidas unidades curriculares de complementação e consolidação desses conhecimentos “[...] não podendo ser feita por meio de simples ‘aulas de revisão’, de modo simplificado e sem o devido aprofundamento” (BRASIL, 2001a, p. 37).

Outro ponto em discussão é a falta de definição de quais são os conteúdos que o licenciando necessita aprender “em razão de precisar saber mais do que vai ensinar, e quais os conteúdos que serão objeto de sua atividade de ensino” (BRASIL, 2001a, p. 20). Ainda, sobre esse aspecto

> é frequente colocar-se o foco quase que exclusivamente nos conteúdos específicos das áreas em detrimento de um trabalho mais aprofundado sobre os conteúdos que serão desenvolvidos no Ensino Fundamental e Médio. É preciso indicar com clareza para o aluno qual a relação entre o que está aprendendo na licenciatura e o currículo que ensinará no segundo segmento do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Neste segundo caso, é preciso identificar, entre outros aspectos, obstáculos epistemológicos, obstáculos didáticos, relação desses conteúdos com o mundo real, sua aplicação em outras disciplinas, sua inserção histórica. Esses dois níveis de apropriação do conteúdo devem estar presentes na formação do professor (BRASIL, 2001a, p. 21).

No Parecer CNE/CP 09/2001 (BRASIL, 2001a), também são apresentados princípios norteadores para a reforma curricular dos cursos de formação de professores, são eles: a concepção de competência é nuclear na orientação do curso de formação de professores; é imprescindível que haja coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor; a pesquisa é elemento essencial na formação profissional do professor.

Para os relatores “por formação profissional, entende-se a preparação voltada para o atendimento das demandas de um exercício profissional específico que não seja uma formação genérica e nem apenas acadêmica” (BRASIL, 2001a, p. 29).

Desta forma, consideram que “a aprendizagem por competências permite a articulação entre teoria e prática e supera a tradicional dicotomia entre essas duas dimensões” (BRASIL, 2001a, p. 30), pois “cursos de formação em que teoria e prática são abordadas em momentos diversos, com intenções e abordagens desarticuladas, não favorecem esse processo” (BRASIL, 2001a, p. 30).

Moreira (2012) apresenta uma reflexão sobre esse contexto, para ele as licenciaturas saíram do “3+1”, mas o “3+1” não saiu das licenciaturas. O autor considera que “a lógica subjacente ao ‘3+1’ ainda permanece como a lógica estruturante desses cursos” (p. 1140).

Para ele, após as reflexões propiciadas no início dos anos 2000, mudou-se a composição do grupo de disciplinas referentes ao ensino e à proporção entre as cargas horárias destinadas ao grupo dos conteúdos específicos e o grupo ensino/educação. Mas, a questão crucial permanece intocada. Moreira (2012) considera que as disciplinas de conteúdos específicos são planejadas, independentemente, das disciplinas que se referem ao ensino e à aprendizagem em Matemática. Para o autor,

> [...] parece haver um consenso sobre um ponto que pode ser expresso no seguinte aforismo: se o professor vai ensinar matemática, tem que saber matemática. Essa forma de pensar coloca os matemáticos (os profissionais socialmente reconhecidos como cientistas e especialistas na matéria) na linha de frente do desenho e da execução da formação matemática na licenciatura (MOREIRA, 2012, p. 1140).

Moreira (2012) afirma que é necessário e urgente romper com a lógica da separação “[...] uma vez que na prática docente esses elementos não são separáveis. Se os separamos no processo de formação, não estamos preparando o profissional para a sua prática real” (p. 1142).

Outra observação, que vem complementar, se dá em relação à coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor, pois nos documentos Brasil (2001a; 2001b), os relatores apresentam elementos como a simetria invertida, a concepção de aprendizagem e a concepção de conteúdo. Mas, Fiorentini (2005), por exemplo, afirma que

> a maioria dos professores de Cálculo, de Álgebra, de Análise de Topologia etc. acredita que ensina apenas conceitos e procedimentos matemáticos. Embora alguns professores tenham consciência e busquem deliberadamente desenvolver uma prática que reproduza ou cultive suas crenças e valores, outros – e provavelmente em maior número – não percebem que, além da

> Matemática, ensinam também um jeito de ser pessoa e professor [...] (p. 110).

Manrique (2009, p. 522) também cita que:

> é comum encontrar ainda em cursos de Licenciatura a predominância de uma concepção de professor como aquele que transmite, oralmente e ordenadamente, os conteúdos veiculados pelos livros didáticos e por outras fontes de informação e uma concepção de aluno como agente passivo e individual no processo de aprendizagem. Nessas concepções, a aprendizagem é entendida como um processo que envolve meramente a atenção, a memorização, a fixação de conteúdos e de procedimentos, principalmente por meio de exercícios mecânicos e repetitivos.

Tal fato é preocupante, pois o professor formador[37], que assume a postura supracitada, parece não ter compreendido, por exemplo, a existência da simetria invertida e a necessidade de levá-la em consideração no planejamento. Vale ressaltar que em Brasil (2001a) os relatores já afirmavam que

> a simetria invertida entre situação de formação e de exercício não implica em tornar as situações de aprendizagem dos cursos de formação docente mecanicamente análogas às situações de aprendizagem típicas da criança e do jovem na educação média. Não se trata de infantilizar a educação do professor, mas de torná-la uma experiência análoga à experiência de aprendizagem que ele deve facilitar a seus futuros alunos (BRASIL, 2001a, p. 31).

Afinal, como afirma Fiorentini (2005) "o futuro professor não aprende dele (professor formador) apenas uma Matemática, internaliza também um modo de concebê-la e de tratá-la e avaliar a sua aprendizagem" (p. 111). Neste aspecto, Manrique (2009) afirma que, na formação inicial, um dos principais problemas está justamente relacionado à formação pedagógica do licenciando, para ela é "a desarticulação entre os conhecimentos específicos e os pedagógicos, que são trabalhados de forma descontextualizada, sem significado para os futuros professores" (p. 523) que conduz o licenciando a não compreender a importância das questões pedagógicas em suas futuras atividades docentes.

[37] A partir desse momento, ao citar professor formador estou me referindo ao professor que leciona alguma disciplina para estudantes da licenciatura em Matemática. Assim como, ao citar licenciando ou professor em formação inicial estou me referindo ao estudante regularmente matriculado em uma licenciatura em Matemática.

De acordo com a autora, cabe aos cursos de formação de professores "privilegiar uma formação organizada em torno de um projeto pedagógico que favoreça a articulação entre teoria e prática, de forma contextualizada e inserida ao longo do curso" (MANRIQUE, 2009, p. 532), devendo ocorrer concomitantes entre as áreas específicas e a prática, "propiciando ao educador em sua formação uma visão prática dos conteúdos aprendidos em disciplinas específicas que servirão como referencial em sua atuação" (MANRIQUE, 2009, p. 532).

Segundo Fiorentini (2005), se o professor formador estiver consciente dessa formação implícita e atento ao desafio "de formar professores de Matemática capazes de promover aprendizagens significativas a seus alunos" (p. 111), possivelmente tentará implementar outros modelos de ensino nas disciplinas específicas de Matemática.

Em relação aos conteúdos, os relatores afirmaram que devem ser "definidos para um currículo de formação profissional e o tratamento que a eles devem ser dado assumem papel central, uma vez que é basicamente na aprendizagem de conteúdos que se dá a construção e o desenvolvimento de competências" (BRASIL, 2001a, p. 33). Para os relatores,

> no seu conjunto, o currículo precisa conter os conteúdos necessários ao desenvolvimento das competências exigidas para o exercício profissional e precisa tratá-los nas suas diferentes dimensões: na sua dimensão conceitual – na forma de teorias, informações, conceitos; na sua dimensão procedimental – na forma do saber fazer e na sua dimensão atitudinal – na forma de valores e atitudes que estarão em jogo na atuação profissional e devem estar consagrados no projeto pedagógico da escola (BRASIL, 2001a, p. 33).

E, ainda,

> o que o professor precisa saber para ensinar não é equivalente ao que seu aluno vai aprender: além dos conteúdos definidos para as diferentes etapas da escolaridade nas quais o futuro professor atuará, sua formação deve ir além desses conteúdos, incluindo conhecimentos necessariamente a eles articulados, que compõem um campo de ampliação e aprofundamento da área (BRASIL, 2001a, p. 37).

Além disso, eles afirmam que "é fundamental que ampliação e aprofundamento do conhecimento tenham sentido para o trabalho do futuro professor" (BRASIL, 2001a, p. 37). Assim,

> a inovação exigida para as licenciaturas é a identificação de procedimentos de seleção, organização e tratamento dos conteúdos, de forma diferenciada daquelas utilizadas em cursos de bacharelado; nas licenciaturas, os conteúdos disciplinares específicos da área são eixos articuladores do currículo, que devem articular grande parte do saber pedagógico necessário ao exercício profissional e estarem constantemente referidos ao ensino da disciplina para as faixas etárias e as etapas correspondentes da Educação Básica (BRASIL, 2001a, p. 47).

O conhecimento, como foi apresentado em Brasil (2001a), não é específico à Matemática, mas permite a interpretação na Matemática e é próxima da apresentada por Fiorentini (2005), ao afirmar que o conhecimento matemático pode ser focalizado a partir de três diferentes perspectivas: da prática científica ou acadêmica; da prática escolar; e das práticas cotidianas não formais. Para o autor, todas essas persperctivas interessam à formação do professor, pois "[...] a matemática escolar constitui com feição própria mediante um processo de interlocução com a matemática científica e com a matemática produzida/mobilizada nas diferentes práticas cotidianas" (p. 108). Para ele, o licenciando precisa ainda

> conhecer o processo de como se deu historicamente a produção e a negociação de significados em Matemática, bem como isso também acontece, guardadas as devidas proporções, em sala de aula. Além disso, precisa conhecer e avaliar potencialidades educativas do saber matemático; isso o ajudará a problematizá-lo e mobilizá-lo da forma que seja mais adequada, tendo em vista a realidade escolar onde atuará (FIORENTINI, 2005, p. 109).

Afinal, "a Matemática relevante para a prática docente escolar não se reduz, simplesmente, a um corpo científico de conhecimentos, mas abrange um conjunto de saberes que se mobiliza na (e mobiliza a) ação educativa, e isso faz uma enorme diferença" (MOREIRA, 2012, p. 1145). Para o autor, "[...] a matemática do professor está intrinsecamente ligada à educação escolar, e esta, por sua vez, não pode prescindir dos processos de ensino e de aprendizagem" (MOREIRA, 2012, p. 1145).

Moreira (2012) considera que:

> a matemática do professor não se compõe de uma soma pura e simples de duas parcelas disjuntas: conteúdo e ensino. Pensar o processo de formação do professor a partir dessa separação pode ser muito cômodo para a organização e a execução do currículo da licenciatura, mas tem se mostrado nefasto para uma real preparação para a prática (p. 1145).

Como consequência o autor afirma que o caminho para superar realmente a lógica do “3+1” na licenciatura em Matemática é “reconhecer a especificidade dos saberes matemáticos associados a essa prática profissional, e ousar repensar a matemática da formação na licenciatura a partir da aceitação da existência de uma matemática do professor” (p. 1146).

O ponto em discussão é delicado, pois Nacarato e Passos (2007), que apresentaram uma análise dos cursos de licenciatura em Matemática do estado de São Paulo, afirmam que a promulgação das Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura

> [...] não apenas reforçou a dicotomia bacharelado e licenciatura, como também colocou a licenciatura num plano secundário e de importância menor quanto ao bacharelado. Enquanto o bacharel deve ter uma sólida formação, com base na pesquisa, o licenciando terá algumas ‘visões’ (p. 170-171).

De acordo com os relatores de Brasil (2001b), os currículos dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática devem ser elaborados de maneira a desenvolver as seguintes competências e habilidades:

> a) capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão;
> b) capacidade de trabalhar em equipes multi-disciplinares;
> c) capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas;
> d) capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento;
> e) habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema;
> f) estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento;
> g) conhecimento de questões contemporâneas;
> h) educação abrangente necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social;
> i) participar de programas de formação continuada;
> j) realizar estudos de pós-graduação;

> k) trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber (BRASIL, 2001b, p. 3-4).

Para os relatores (BRASIL, 2001b) “as competências e habilidades próprias do educador matemático” (p. 3) que devem ser desenvolvidas pelos licenciandos, são:

> a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a Educação Básica;
> b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;
> c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a Educação Básica;
> d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
> e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;
> f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica (BRASIL, 2001b, p. 3-4).

Acredito ser necessário romper a ideia bacharelado/licenciatura, pois enquanto as duas formações não forem identificadas como tendo objetivos distintos essa discussão persistirá e não contribuirá com as mudanças necessárias à formação do professor. Nesse sentido, Moreira (2012) considera que

> a matemática relevante para o matemático não é capaz de fornecer ao professor uma mirada profissional específica para a sala de aula da escola, do mesmo modo que a matemática relevante para a sala de aula da escola é incapaz de fornecer ao futuro matemático uma mirada profissional específica para o trabalho de produção de novos resultados na fronteira do conhecimento acadêmico. Duas profissões distintas requerem conhecimentos matemáticos distintos (p. 1144).

Outro ponto apresentado no Parecer CNE/CES 1.302/2001 (BRASIL, 2001b) é que:

> ao chegar à universidade, o aluno já passou por um longo processo de aprendizagem escolar e construiu para si uma imagem dos conceitos matemáticos a que foi exposto, durante o ensino básico. Assim, a formação do matemático demanda o aprofundamento da compreensão dos significados dos conceitos matemáticos, a fim de que ele possa contextualizá-los adequadamente. O mesmo pode-se

> dizer em relação aos processos escolares em geral: o aluno chega ao Ensino Superior com uma vivência e um conjunto de representações construídas. É preciso que estes conhecimentos também sejam considerados ao longo de sua formação como professor (BRASIL, 2001b, p. 4).

De acordo com Nacarato e Passos (2007) e Gatti e Barreto (2009), a maioria dos cursos de licenciaturas está sob responsabilidade de instituições privadas, com no máximo três anos de duração e, ainda, levando-se em consideração as instituições do Estado de São Paulo, tem-se que “[...] a carga horária mínima estabelecida para o curso de licenciatura [...] de 2.800 horas [...] transformou-se em máximo para a maioria das instituições privadas” (NACARATO; PASSOS, 2007, p. 171). Evidencia-se, também, nessas pesquisas, que o tempo destinado à formação inicial tem efeito direto na formação do profissional que irá atuar na Educação Básica.

Outro dado importante presente nas duas pesquisas é que dos jovens que procuram por um curso de licenciatura, a maioria, provém das camadas mais populares da população, ou seja, são jovens que, possivelmente, tiveram acesso a uma Educação Básica mais fragilizada.

Assim, Nacarato e Passos (2007) descrevem que o “perfil do aluno ingressante vem exigindo das instituições de formação adequações nas disciplinas que compõem a grade curricular” (p. 175) e, em muitas instituições, isso é feito visando “[...]‘nivelar’ o aluno para que ele possa acompanhar a matemática superior” (p. 175), observo que o termo ‘nivelar’ permite entender que o conhecimento se dá por acúmulo, o que pode conduzir a propostas de ‘revisões’.

No entanto, Brasil (2001a) alerta para que isso não ocorra, as fragilidades devem ser superadas por meio do desenvolvimento propiciado ao licenciando e não, simplesmente, uma retomada de conteúdos, pois, possivelmente, esse será o primeiro momento em que o licenciando terá contato com determinados conceitos.

Ainda de acordo com o Parecer CNE/CES 1.302/2001 (BRASIL, 2001b) e Brasil (2010), os conteúdos específicos que devem compor os currículos de um curso em Licenciatura em Matemática são: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica.

No entanto, Gatti e Barreto (2009) descreveram que nas estruturas curriculares dos cursos de Licenciaturas em Matemática analisadas foram listados

1.228 títulos diferentes para identificar as disciplinas, sendo 1.128 obrigatórias e 100 optativas, ou seja, uma mesma disciplina pode ser ofertada por instituições de Ensino Superior com nomes diferentes, por exemplo, em uma determinada universidade tem-se a disciplina *Álgebra Linear* em outra *Introdução à Álgebra Linear*.

Para exemplificar a variedade de títulos observados, Gatti e Barreto (2009) apresentam alguns títulos atribuídos às disciplinas que tratam de conhecimentos específicos da Matemática, são eles: “Álgebra Moderna, Análise na Reta, Cálculo Diferencial, Equações Diferenciais Ordinárias, Geometria Diferencial, Introdução à Lógica, Séries Infinitas, Teoria dos Grupos” (p. 139) e das que tratam de conhecimentos específicos da Matemática sendo, também, conteúdos do currículo dirigidos à Educação Básica, destacam-se os exemplos: “Análise Combinatória, Estatística Básica, Fundamentos da Álgebra, Geometria, Probabilidade, Sequências Numéricas” (GATTI; BARRETO, 2009, p. 139).

Há, ainda, aquelas relacionadas “às didáticas específicas, metodologias e práticas de ensino [...], saberes relacionados à tecnologia [...] e aos conhecimentos relativos às modalidades e níveis de ensino específicos” (GATTI; BARRETO, 2009, p. 139). Em algumas ementas foram citadas, também, Física e Química.

Da análise feita pelas autoras, os cursos estudados oferecem os conteúdos considerados comuns a todos os cursos de licenciatura em Matemática, com diferenças nas denominações e quanto ao aprofundamento, pois:

> [...] cerca de 16% dos currículos examinados apresentam conteúdos bastante especializados e de grande aprofundamento, importantes na formação de profissionais matemáticos, porém, não tão importantes para professores da Educação Básica. De outro lado, 45% desses currículos oferecem apenas conceitos básicos introdutórios. Entretanto, alguns dos cursos (21%) também trabalham esses conteúdos em disciplinas ligadas à prática de ensino como componente curricular, ou a conteúdos da Educação Básica (GATTI; BARRETO, 2009, p. 143).

De acordo com as autoras, é nítida a percepção de perfis diferentes na formação desses professores de Matemática nas licenciaturas em Matemática, por exemplo, em alguns casos, a formação matemática norteia o curso e, em outros, a formação pedagógica, no entanto, desconexa da formação específica em Matemática. Para as autoras, nos dois casos apresentados, há a presença de um impasse, no primeiro, esses futuros professores "talvez não se sintam preparados para enfrentar as situações de sala de aula, que não se restringem ao saber matemático" (GATTI; BARRETO, 2009, p. 145) e, no outro, o licenciado é forçado "a encontrar as inter-relações entre esses tipos de formação" (GATTI; BARRETO, 2009, p. 145).

Pires (2002) considera que a formação inicial do professor de Matemática deve contemplar conteúdos da Educação Básica, por meio de uma proposta que permita ao estudante o domínio sobre o campo e a articulação de conhecimentos necessariamente a eles relacionados, assim como, inclua questões de ordem didática. Vale ressaltar que a autora não limita o currículo da formação inicial aos conteúdos a serem ensinados na Educação Básica, mas a necessidade de esses conteúdos serem articulados aos específicos, permitindo a ampliação e aprofundamento da área em questão, assim como Brasil (2001a).

Tecendo considerações sobre os resultados apresentados

Já se passaram pouco mais de oitenta[38] anos desde a instituição do primeiro curso, que visava à formação do professor de Matemática no país. Vários decretos foram publicados e pesquisas foram realizadas, no entanto, a formação do professor de Matemática continua no foco das atenções, devido às dificuldades enfrentadas pelos licenciandos.

Por isso, trago três pontos evidenciados nas discussões apresentadas acima que foram, também, apresentados por Gatti e Barreto (2009) e merecem atenção:

- "há grande dissonância entre os projetos pedagógicos consultados e a estrutura do conjunto de disciplinas e as suas ementas, [...] parecendo que aqueles são documentos que não repercutem na realização dos cursos" (p. 115);
- "não foi observada uma articulação entre as disciplinas de formação específicas (conteúdos da área disciplinar) e a formação pedagógica (conteúdos para a docência)" (p. 116);

[38] Considerando o curso de licenciatura em Matemática da Universidade de São Paulo, fundado em 1934 (PIRES, 2006).

- "fica visível, nas estruturas curriculares, a permanência, na maioria desses cursos, do modelo '3 + 1' de proposição do início do século XX" (p. 116).

Destaco, também, um desafio proposto por Moreira (2012) em relação à Licenciatura em Matemática, para o autor, é necessário "desenvolver estudos fundamentados que permitam entender melhor o papel da matemática acadêmica na formação do professor da escola básica" (p. 1149), pois

> [...] numa nova estruturação do curso, essa importante questão deverá ser tratada a partir da pesquisa, isto é, o papel da matemática acadêmica na formação do professor precisa ser objeto de estudos investigativos e a extensão de sua inclusão ou não no currículo ser resultado de argumentação fundamentada. Não se pode submeter o processo de formação profissional do professor às opiniões pessoais dos matemáticos (que exercem outra profissão), mas, ao mesmo tempo, não se pode desconsiderar, pura e simplesmente, toda a matemática acadêmica, também com base em opiniões (contrárias). Daí a necessidade urgente de estudos e pesquisas que situem melhor o papel e a eventual contribuição da matemática acadêmica para a matemática do professor [...] (p. 1149).

Para Moreira (2012), há, ainda, o seguinte dilema:

> não podemos correr o risco de desprezar, equivocadamente, as possíveis contribuições da matemática acadêmica, mas, ao mesmo tempo, não podemos nos dar ao luxo de ocupar grandes espaços no currículo com algo cuja contribuição efetiva não esteja fundamentada. Afinal, o tempo de formação inicial é finito e inúmeros os conhecimentos e questões vinculados à prática docente escolar a serem tratados. A resolução desse dilema precisa ter uma forma dinâmica, de modo a acompanhar e incorporar o desenvolvimento e a consolidação dessa direção de pesquisa (possíveis contribuições da matemática acadêmica para a formação do professor da escola e eventuais conflitos ou dissonâncias entre a matemática acadêmica e a matemática para o ensino escolar) (p. 1149).

Em síntese, considero importante que, ao pensar na estrutura curricular de uma disciplina a qual trabalhará com conteúdos específicos, seja levado em consideração que:

- o planejamento deve ser consequência de discussões entre professores pesquisadores, que atuem em Educação Matemática, e professores pesquisadores, que atuem em Matemática, ou seja, não deve ser uma produção unilateral;

- as discussões relacionadas às questões do ensino e da aprendizagem devem permear os planos de ensino e as aulas;
- é necessário identificar quais conteúdos da Educação Básica podem ser explorados nas disciplinas específicas, evidenciando o ponto que essa disciplina irá promover reflexões sobre a Educação Básica, assim como, oportunidades de superar eventuais fragilidades da escolarização básica;
- é importante identificar, entre outros aspectos, obstáculos epistemológicos, obstáculos didáticos, relações desses conteúdos com o mundo real, as aplicações em outras disciplinas, as inserções históricas;
- é preciso incluir conteúdos que compõem um campo de ampliação e aprofundamento da área Educação Matemática;

Por fim, em relação à formação de professores, Gatti (2010) afirma:

> é necessária uma verdadeira revolução nas estruturas institucionais formativas e nos currículos da formação. As ementas já são muitas. A fragmentação formativa é clara. É preciso integrar essa formação em currículos articulados e voltados a esse objetivo precípuo. A formação de professores não pode ser pensada a partir das ciências e seus diversos campos disciplinares, como adendo destas áreas, mas a partir da função social própria à escolarização – ensinar às novas gerações o conhecimento acumulado e consolidar valores e práticas coerentes com nossa vida civil (GATTI, 2010, p. 1375).

Assim, após a análise dos documentos oficiais e resultados de pesquisas relacionadas à formação inicial do professor de Matemática, ressalto que no campo curricular há necessidade de considerar o repertório de conhecimentos do licenciando e o tratamento dado aos conteúdos da Educação Básica e específicos à Matemática do Ensino Superior, assim como, de articular o desenvolvimento desses conteúdos às ideias discutidas no âmbito da Educação Matemática.

No próximo capítulo, apresento resultados de pesquisas desenvolvidas em Educação Matemática, que investigaram dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear, assim como, o aporte teórico Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991), que forneceram subsídios às análises.

CAPÍTULO 3

IDEIAS TEÓRICAS QUE EMBASAM AS ANÁLISES

Neste capítulo, tenho o objetivo de apresentar resultados de pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear. São vários os pesquisadores que têm se dedicado em identificar e contribuir para minimizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao cursarem Álgebra Linear: Dubinsky (1997), Dorier (1990; 1997; 2002), Stewart (2008), entre outros.

No GPEA, por exemplo, o estudo sobre as questões que envolvem o ensino e a aprendizagem em Álgebra Linear sempre teve um lugar de destaque, algumas das pesquisas realizadas foram: Araújo (2002), Padredi (2003), Oliveira (2005), Grande (2006), Battaglioli (2008), Nomura (2008), Machado e Bianchini (2009), Prado (2010), Bianchini e Machado (2013), entre outras.

Assim, apresento as contribuições desses estudos e aspectos relacionados aos processos do Pensamento Matemático Avançado – PMA –, evidenciados por Dreyfus (1991) que podem contribuir com esta pesquisa.

Em relação aos aportes teóricos, vários foram utilizados nas pesquisas citadas, em relação aos pesquisadores franceses evidenciam-se, por exemplo, as Alavancas-meta[39] de Dorier et al. (1997) e os três princípios[40] de Harel (1997).

---

[39] O termo recurso-meta passou a ser considerado pelo GPEA, a partir do trabalho de Oliveira (2005), para designar o que o grupo francês coordenado por Jean Luc Dorier chamou, ora de metaconhecimento matemático, ora de metamatemática. Assim, a este termo, recurso-meta, considera-se "[...] as informações ou conhecimentos **sobre** a Matemática a ser aprendida que podem envolver as operações matemáticas, seu uso e a própria aprendizagem da Matemática" (OLIVEIRA, 2005, p.20). Por este motivo, de agora em diante, irei sempre me referir ao termo *metaconhecimento matemático (metamatemática)* como sendo *recurso-meta*, mesmo que o autor citado tenha utilizado o termo metaconhecimento matemático (metamatemática). Quando um recurso-meta pode se tornar uma 'alavanca' para a compreensão de uma noção é denominado alavanca-meta.

[40] Segundo Harel (1997), os três princípios são: concretização, necessidade e generalização. Isto é, o aluno deve reconhecer a noção matemática em estudo, como partindo de algo concreto, ver necessidade intelectual em estudá-la, para então, abstrair e generalizá-la. Um exemplo é a passagem do estudo da noção de base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, para o estudo da noção de base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n, em que n é um inteiro não negativo.

Mas, há outras, como a teoria APOS[41] de Ed Dubinsky e seus colaboradores e a Teoria dos Campos Semânticos[42] de Rômulo Lins.

Álgebra Linear: resultados de pesquisas realizadas pelo GPEA

Identificar qual a Álgebra a ser ensinada na formação de professores é o principal interesse do GPEA. Como a Álgebra Linear é uma das álgebras abordadas na formação de professores, desde 1990, o Grupo desenvolve pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear.

Assim, na busca por respostas, têm sido criados subprojetos, um deles finalizado em 2006, sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial, substituído, em 2007, por um novo subprojeto, que tem como objetivo identificar situações propícias para a aprendizagem de conceitos básicos de Álgebra Linear.

Em 2009, as autoras Machado e Bianchini (2009) apresentaram uma síntese das produções que tiveram como objetivo contribuir com o desenvolvimento desses subprojetos. Elas afirmam que as pesquisas realizadas foram de cunho documental e diagnóstico, sendo agrupadas em quatro modalidades: estado da arte, análise de livros didáticos, análise do papel da Álgebra Linear em diferentes cursos e análise de intervenções didáticas.

Considerações apresentadas por Machado e Bianchini (2009)

No que segue, faço uso dos resultados apresentados por Machado e Bianchini (2009) e quando necessário trago elementos que se acrescentam à análise realizada pelas autoras.

---

[41] A teoria APOS (*action, processes, object e schema* – ação, processo, objeto e esquema), proposta por Ed Dubinsky e seus colaborados, define níveis de concepções relacionados aos conjuntos de representações e articulações expressa pelo indivíduo ao trabalhar com atividades matemáticas. Nesse contexto um indivíduo pode demonstrar ter concepção ação, concepção processo ou concepção objeto, para maiores detalhes ver ASIALA et al. (1996) ou Prado (2010).

[42] Segundo Silva (2003, p.21), que apresenta uma interpretação da Teoria dos Campos Semânticos ao analisar dados relacionados ao ensino e a aprendizagem em Álgebra Linear, quando instituída, a teoria visava a análise dos diferentes significados que poderiam ser produzidos para objetos matemáticos – “aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade” –. No entanto, em sua tese, focou no processo de construção de significados e não nos significados que poderiam ser produzidos.

Para Machado e Bianchini (2009), na categoria *estado da arte,* há o trabalho de Celestino (2000) que, segundo as autoras, apresentou um "panorama" das produções científicas brasileiras sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear da década de 90. Esse panorama revelou que até 1999, apesar de terem sido realizadas poucas pesquisas, a produção brasileira "foi considerável, na medida em que apresentou resultados coerentes com as pesquisas 'mundiais', contribuindo também com resultados inéditos" (p. 5).

Um resultado evidenciado por Celestino (2000) e citado por Machado e Bianchini (2009) é que

> [...] os alunos desenvolvem campos semânticos diferentes daquele que o professor apresenta ao trabalhar com a noção de base, bem como o alerta sobre a importância da flexibilidade cognitiva na articulação entre o ponto de vista cartesiano e o paramétrico na aprendizagem da Álgebra Linear (p. 5).

Na categoria *livros didáticos,* foram apresentados três trabalhos: Araújo (2002), Grande (2006) e Battaglioli (2008).

Na pesquisa desenvolvida por Araújo (2002), o objetivo foi investigar em livros didáticos de Álgebra Linear situações que poderiam ser caracterizadas como recurso didático passível de se tornar alavanca-meta, para alunos de um primeiro curso de Álgebra Linear, quando da construção da noção de base, a autora utilizou três livros didáticos citados nas ementas de universidades de renome em São Paulo.

Segundo Machado e Bianchini (2009), a autora Araújo (2002) após a análise desses livros, escritos há mais de três décadas, concluiu que apesar de os livros apresentarem em seus prefácios indícios da existência de recursos-meta no corpo do texto, são poucos os recursos que apresentam a possibilidade de se tornarem alavanca-meta para o estudante.

Na pesquisa realizada por Grande (2006), o objetivo declarado foi investigar como e quais registros de representação semiótica[43] são explorados na

[43] Duval (2007) caracteriza a atividade Matemática do ponto de vista cognitivo pelo <u>uso</u> frequente de representações semióticas e a grande <u>variedade</u> de representações semióticas utilizadas. Para ele "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação" (DUVAL, 2007, p. 14). O autor assume as representações semióticas como sendo representações externas e conscientes ao sujeito. Para maiores detalhes, veja Machado et al. (2007).

apresentação da noção de dependência linear entre vetores, em livros didáticos de Álgebra Linear.

Para Machado e Bianchini (2009), Grande (2006) em sua pesquisa

> constatou que a epistemologia do conceito de dependência linear evidencia a dificuldade que matemáticos sentiram na utilização e articulação dos registros de representação semiótica. Exemplificando, embora no século XVIII Euler tenha tratado a noção de dependência linear somente no registro simbólico-algébrico, foi Frobenius, um século após, que considerou essa noção no registro de n-uplas o que lhe possibilitou desenvolver a noção de posto (MACHADO; BIANCHINI, 2009, p. 7).

Segundo Machado e Bianchini (2009), nessa pesquisa, Grande (2006) concluiu que os "*livros analisados apresentam poucas opções de conversão entre os registros o que, segundo Duval pode prejudicar a compreensão do aluno sobre o conceito de dependência linear*" (p. 7, itálico das autoras).

Battaglioli (2008) analisou três coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio[44] com o objetivo de investigar os registros de representação semiótica e respectivas conversões na abordagem de sistemas lineares. Segundo Machado e Bianchini (2009), nas considerações finais dessa pesquisa a autora destacou que

> o registro algébrico predomina em todos os livros, tanto na abordagem do conteúdo quanto em exercícios. Quanto ao registro gráfico ele aparece apenas como uma observação sobre sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas em dois dos livros analisados e como exercício de interpretação gráfica do conjunto solução de um sistema linear com três incógnitas em um deles (MACHADO; BIANCHINI, 2009, p. 7).

A próxima categoria, *o papel da Álgebra Linear em diferentes cursos,* é composta pelos trabalhos Silva (2005) e Nomura (2008).

Silva (2005) investigou o uso da noção de base de um espaço vetorial como ferramenta na formação do bacharel em Ciências da Computação. Segundo Machado e Bianchini (2009), no curso analisado pelo autor, a Álgebra Linear é ministrada no segundo ano e de acordo com um dos entrevistados, nesta pesquisa,

[44] A consulta foi realizada por Battaglioli (2008) em dez. de 2007: <ftp://ftp.fnde.gov.br/web/livrodidatico/guia_livro_didatico_pnlem_2006_mg.pdf>

a "Álgebra Linear é importante para ganhar maturidade teórica, formal e matemática" (p. 8).

Já Nomura (2008), em sua pesquisa, investigou os motivos de ensinar Álgebra Linear e como deve ser lecionada a Álgebra Linear na graduação de Engenharia Elétrica. Foram coletados e analisados documentos oficiais vigentes e realizadas entrevistas com cinco professores de cinco cursos de Engenharia Elétrica diferentes.

Machado e Bianchini (2009) relatam que Nomura (2008) pode concluir que:

> a aprendizagem de Álgebra Linear é ferramenta para assuntos específicos de disciplinas da engenharia elétrica como Circuitos elétricos, Modelagem de processamento de sinais, Teoria eletromagnética, Sistemas e sinais, Controle, Projeto e implementação de filtros digitais. Além de auxiliar na formação do engenheiro conceitual e generalista que prima por conhecimentos matemáticos vinculados à pesquisa (MACHADO; BIANCHINI, 2009, p. 9).

Na última categoria, *intervenção didática,* são apresentados os trabalhos de Padredi (2003) e Oliveira (2005). Sobre esses trabalhos, nas próximas seções, segue uma análise mais detalhada, feita por mim.

Nas considerações finais, Machado e Bianchini (2009) destacaram que

> em relação aos diferentes livros didáticos analisados pelos pesquisadores, concluiu-se que há poucos recursos-meta passíveis de se tornar alavancas-meta para a compreensão dos estudantes bem como pouca ênfase na conversão de registros de representação semiótica nos livros de Álgebra Linear. Mesmo em livros do Ensino Médio, os assuntos referentes à Álgebra Linear são tratados de forma inadequada, pois não apresentam situações que possibilitem ao aluno conhecer e converter todos os possíveis registros de representação semiótica (p. 12-13).

Considerações apresentadas por Padredi (2003)

Padredi (2003) investigou, por meio de entrevistas semiestruturadas, quais os recursos-meta sobre a noção de base de um espaço vetorial que são evidenciados no discurso de professores universitários. A seguir, destaco aqueles que penso serem propícios na formação de professores de Matemática.

Um primeiro recurso-meta é evidenciado ao considerar base como sendo um sistema de geradores minimal, pois “pode gerar reflexões dos alunos sobre a vantagem de se conseguir um número mínimo de vetores para gerar o espaço, induzindo-os a compreender a necessidade de serem vetores linearmente independentes” (PADREDI, 2003, p. 117).

Outro recurso-meta é citado ao considerar base de um espaço vetorial como sendo um conjunto maximal de vetores linearmente independentes, pois “pode gerar reflexões sobre a necessidade de se conseguir o maior conjunto linearmente independente que dará origem ao espaço, surgindo daí naturalmente a noção de sistema de geradores” (PADREDI, 2003, p. 117).

De acordo com a autora “tanto uma ideia como outra explicitam uma articulação, entre as duas noções, vetores linearmente independentes e sistema de geradores dando origem ao conceito de base” (PADREDI, 2003, p. 117).

O uso de uma forma coloquial ao iniciar a discussão sobre noções como a de base de um espaço vetorial e outras, intrinsecamente ligadas a essa, também foram evidenciadas nas falas dos entrevistados por Padredi (2003). Um dos professores, ao fazer uma analogia entre o processo de se construir uma parede e as noções de espaço vetorial, base e dimensão, afirma que:

> a noção de base é importante, mas não pode existir sozinha, separada do seu corpo, ou seja, da noção de espaço vetorial e de todas as propriedades, características desse espaço que está sendo construído: ‘Então, a parede para mim é mais importante do que a base. Então, eu olho na parede... o meu propósito de olhar para construir a parede. Eu sei que tenho que fazer com as duas dimensões para construir a parede’ (PADREDI, 2003, p. 105).

Outro aspecto que Padredi (2003) destacou foi “a passagem do antigo para o novo, tendo a Geometria Analítica como o antigo” (p. 118).

Também, surgiu no discurso dos entrevistados, a ideia de antecipar a noção de transformação linear e a de isomorfismo entre espaços vetoriais para criar a necessidade da noção de base.

Por fim, a observação sobre o uso

> [...] do livro didático como um meio de provocar reflexão dos alunos sobre pontos que podem ocasionar erros e generalizações abusivas [...] Por exemplo, o fato de alguns alunos associarem as propriedades conhecidas da adição e multiplicação dos números

> reais com as operações de adição e multiplicação por um escalar de um espaço vetorial qualquer, acarreta o erro de dividir um vetor por outro vetor (PADREDI, 2003, p. 119).

Considerações apresentadas por Oliveira (2005)

Na pesquisa realizada por Oliveira (2005), o autor investigou quais os recursos-meta são passiveis de se tornarem alavancas-meta por um professor de Álgebra Linear ao desenvolver a noção de base de um espaço vetorial. No total foram observadas 13 aulas.

O professor observado, após ter discutido com seus alunos as noções de espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear, conjunto gerador e subespaço gerado, propôs uma lista de exercícios que, segundo Oliveira (2005), permitia que os alunos observassem que um mesmo espaço vetorial poderia ser gerado por diferentes conjuntos geradores. A lista ainda permitia que os alunos refletissem sobre a reversibilidade das noções, isto é, “todo conjunto de vetores gera um subespaço vetorial e, por outro lado, todo subespaço vetorial é gerado por um conjunto de vetores” (OLIVEIRA, 2005, p. 67).

Em outra aula, o professor inicia com uma lista de exercícios em que o enunciado, segundo Oliveira (2005), pretendia despertar nos alunos a ideia de que conjuntos distintos, que são geradores de um mesmo espaço vetorial, possuem alguma relação, no caso, um desses conjuntos possui um elemento a mais do que o outro e, ainda, o elemento “extra” pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto com um número menor de vetores.

Tal atividade proporcionou um diálogo que fez com que os alunos refletissem “sobre as vantagens de um conjunto gerador minimal, sugerindo a ideia de conjunto linearmente independente” (OLIVEIRA, 2005, p. 70).

Em continuidade, o professor, em aula, apresentou aos alunos uma maneira de verificar a dependência linear em um conjunto de vetores, no seguinte comentário:

> [...] um deles como combinação linear dos outros, é uma diferença que eu vou ter que ficar olhando. [...] Essa é uma das características de um conjunto que a gente vai chamar de L.D., ou seja, linearmente dependente. Eu tenho alguém que está dependendo dos outros, lá dentro do meu conjunto (OLIVEIRA, 2005, p. 71).

Segundo Oliveira (2005), o professor propiciou vários momentos de discussão de maneira tal que levou os alunos a conceituarem a noção de dimensão e, ainda, que um conjunto possui infinitas bases. Assim como, conduziu os alunos a associarem as noções de dimensão e de conjunto linearmente independente para se obter a base de um espaço vetorial, ou verificar se um conjunto de vetores é uma base para um determinado espaço.

Considerações apresentadas por Prado (2010)

Prado (2010), à luz do aporte teórico APOS, investigou a concepção que os alunos, os quais concluíram um curso de extensão de Álgebra Linear, têm sobre a noção de base de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial finitamente gerado.

Os participantes da pesquisa foram alunos que concluíram um curso de extensão em Álgebra Linear, em uma universidade de renome em São Paulo, com duração de 120 horas, a qual tem como público-alvo estudantes ou profissionais interessados em complementar sua formação.

Segundo Prado (2010), no curso, foram abordados os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais finitamente gerados, e os exemplos trabalhados, no curso, restringiram-se aos espaços vetoriais: das n-uplas de números reais – $\mathbb{R}^n$ –, dos polinômios de grau menor ou igual a n, com coeficientes reais – $P_n(\mathbb{R})$ –[45], das matrizes com n linhas e m colunas, com os elementos pertencentes aos reais – $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ – e o conjunto dos números complexos – $\mathbb{C}$ –.

De acordo com o autor, além da noção de espaço vetorial, foram abordadas outras noções, que eram apresentadas no título das listas de atividades propostas aos alunos. Os títulos apresentados aos alunos foram, respectivamente:

> Espaços vetoriais; Subespaços vetoriais; Combinações lineares e subespaços gerados; Dependência linear; Bases; Espaços finitamente gerados e dimensão; Sistemas de coordenadas; Transformações lineares; Inversa e núcleo de uma transformação; Transformações lineares e espaços de dimensão finita; Matrizes de transformações lineares, Matriz de mudança de base; O espaço

[45] O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n, $P_n(\mathbb{R})$, com n sendo um número natural, é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais. Portanto, $P_n(\mathbb{R})$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial. Nesta pesquisa, citarei os dois espaços vetorias, o espaço das funções e o espaço dos polinômios, pois cada um deles apresenta características particulares que podem ser exploradas em Álgebra Linear.

> $L(U,V)$[46]; Diagonalização; Produto interno e norma; e Ortogonalização e funcionais lineares versus produto interno. (PRADO, 2010, p. 48).

Na decomposição genética apresentada por Prado (2010), a construção da noção de base de um espaço vetorial foi apresentada sob três pontos de vista, a saber, base, como sendo: a) um conjunto minimal gerador, b) um conjunto maximal de vetores linearmente independentes e c) um conjunto gerador com vetores linearmente independentes; pois o autor considerou que o estudante poderia, assim, refletir sobre a vantagem de empregar uma ou outra abordagem, dependendo da situação.

Nesta pesquisa, foram entrevistados 10 estudantes, seis já haviam concluído ou estavam matriculados em um curso de pós-graduação. Dos quatro restantes, três eram jovens que tinham adentrado à universidade. Sendo que apenas um, na época da entrevista, não havia ainda participado de outra disciplina sobre Álgebra Linear. Os demais, efetivamente, ao serem entrevistados, já haviam participado de, ao menos, duas disciplinas sobre Álgebra Linear.

Conforme apresentado por Prado (2010), o único estudante, que havia participado de apenas uma disciplina de Álgebra Linear, mostrou ter construído uma concepção processo sobre a noção de base de um espaço vetorial. Dos demais, cinco mostraram ter construído uma concepção objeto sobre a noção de base, um mostrou ter construído uma concepção ação e três, não terem construído, ao menos, uma concepção ação.

Considerações apresentadas por Camargo Junior (2010)

Camargo Junior (2010) investigou como os Cadernos do Professor de Matemática, que fazem parte da Proposta Curricular da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo[47], abordam a noção de Matriz. A pesquisa foi motivada, segundo o autor, pois

> como professor do Ensino Médio, sempre abordei o conteúdo de Matrizes segundo o modelo de ensino orientado ao uso de técnicas de algoritmos, de forma estanque e sem conexão com outros

[46] O espaço $L(U,V)$ é o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ das transformações lineares de U em V.
[47] São Paulo (2008a).

> conteúdos, tendo por referência o livro didático que utilizava em minhas aulas. Considerava esse conteúdo fácil de ensinar, mas preocupava-me um questionamento feito pelos alunos do 'para que serve?', demonstrando que esta abordagem não estava sendo significativa para os alunos (p. 12).

Após a análise dos Cadernos do Professor de Matemática de 2008[48] do Ensino Médio, o autor descreveu que "esse material apresenta atividades contextualizadas através de situações-problema, conexões implícitas com outros conteúdos matemáticos e situações que exigem a participação dos alunos na elaboração e resolução das atividades" (CAMARGO JUNIOR, 2010, p. 83). Para ele, "as atividades de aplicações são, de fato, elaboradas e apresentadas em situações-problema que possibilitam a construção do conhecimento pelo próprio aluno sobre o tema estudado" (CAMARGO JUNIOR, 2010, p. 83).

Apesar de o Caderno abordar a noção de matriz, Camargo Junior (2010) descreve que alguns conceitos, tais como matriz transposta, igualdade de matrizes, matriz identidade, entre outros, não foram abordados no Caderno de 2008. Já ao trabalhar sistemas de equações lineares, há ênfase ao método de resolução por escalonamento em detrimento do método de Cramer, o estudo de determinante não apresenta situações contextualizadas, sendo tratado de maneira superficial.

Camargo Junior (2010) apresenta abordagens para se trabalhar com matrizes, por exemplo, no Caderno de 2009[49], reedição do material de 2008, na qual a adição de matrizes pode ser analisada por meio da translação de polígonos no plano cartesiano ou, como sugere, " abordando a manipulação de uma figura por cálculos matriciais, como a reflexão, a escala e a rotação" (p. 85).

Em relação à noção de determinante, no Caderno de 2009, é apresentada uma atividade para calcular a área de polígonos no plano, conferindo um caráter contextualizado e interdisciplinar. E, em relação à resolução de sistemas lineares, foram acrescentados também exercícios contextualizados.

[48] São Paulo (2008b).
[49] São Paulo (2009).

Álgebra Linear: resultados de pesquisas realizadas por diferentes Grupos

Apesar de vários grupos desenvolverem pesquisas relacionadas ao ensino e a aprendizagem em Álgebra Linear, optei em analisar os seguintes trabalhos: Dorier (2002), Stewart (2008), De Vleeschouwer e Gueudet (2011) e Thomas et al. (2012).

A escolha, do artigo de Jean Luc Dorier, deu-se pela produção desse pesquisador em relação ao ensino e aprendizagem em Álgebra Linear, sobretudo, na década de 1990. Já, a escolha, da tese de Sepideh Stewart e o artigo produzido por Martine De Vleeschouwer e Ghislaine Gueudet, deve-se ao fato desses trabalhos abordarem questões relacionadas à Álgebra Linear, ofertada a estudantes, de cursos de Matemática. Por fim, o artigo de Thomas et al. (2012), por ser uma síntese de pesquisas mundiais produzida por diversos pesquisadores, de diferentes países.

Considerações apresentadas por Dorier (2002)

Dorier (2002) descreve que o ensino de Álgebra Linear na universidade acontece, geralmente, em duas abordagens: "uma com o foco no estudo formal dos espaços vetoriais [...] e outra com uma abordagem mais analítica baseada no estudo do $\mathbb{R}^n$ e cálculo com matrizes" (p. 875)[50]. Para o autor, os estudantes de Álgebra Linear apresentam um sentimento parecido com o pouso em um planeta desconhecido, pois são apresentadas novas definições sem conexões com os antigos conceitos já construídos por eles.

Para o autor, os professores de Álgebra Linear também apresentam frustrações, pois considera que esses professores "[...] muitas vezes se sentem [...] desarmados quando confrontados com a inabilidade de seus alunos para lidar com ideias que consideram ser tão simples" (DORIER, 2002, p. 876)[51].

Para ele, o que permite evidenciar parte das dificuldades enfrentadas pelos estudantes é a axiomatização da Álgebra Linear. Esse processo teve início no final do século XIX e se fortaleceu após 1930. Segundo Dorier (2002), a axiomatização da Álgebra Linear se deu com "uma reconstrução teórica dos métodos de resolução

[50] One focuses on the study of formal vector spaces while the other proposes a more analytical approach based on the study of $\mathbb{R}^n$ and matrix calculus.
[51] […]often feel […] disarmed when faced with the inability of their students to cope with ideas that they consider to be so simple.

de problemas lineares, utilizando os conceitos e ferramentas de uma nova teoria central axiomática" (p. 876)[52].

Dorier (2002) cita, ainda, que a abordagem axiomática não era uma necessidade absoluta, mas se tornou uma forma universal de pensar e organizar a Álgebra Linear[53], pois a *generalização* e a *unificação* permitiram a *simplificação* na busca de métodos de resolução de problemas de Matemática.

Uma das dificuldades evidenciadas, por Dorier (2002), está relacionada ao processo de aprendizagem da unificação e generalização de conceitos em Álgebra Linear decorrente dos conceitos prévios, pois o estudante deve analisar esses conceitos de forma crítica, identificando as características comuns e, então, lançar mão da generalização.

De acordo com Dorier (2002), do ponto de vista didático, "a dificuldade é que qualquer problema linear, no alcance de um estudante do primeiro ano universitário, pode ser resolvido sem usar a teoria axiomática" (p. 876)[54]. Por isso, considera que "o ganho em termos de unificação, generalização e simplificação trazida pelo uso da teoria formal só é visível para o especialista" (p. 876)[55].

Dorier (2002) enfatiza que a discussão não é desistir de ensinar a teoria formal dos espaços vetoriais e nem evitar o uso do formalismo, pois considera que "os alunos devem ser apresentados a um certo tipo de reflexão sobre o uso de elementos prévios de conhecimento e competências em relação aos novos conceitos formais" (p. 876)[56] e, assim, construir as formas de pensar e usar a generalização e unificação dos conceitos.

Ainda sobre as dificuldades em aprender Álgebra Linear, o autor cita que podem estar relacionadas à variedade do uso das linguagens, pontos de vista e as definições dos objetos. Para ele, cabe aos estudantes distinguir essas várias formas de representar os objetos, traduzir de uma representação para outra e, ainda, não confundir os objetos com as suas diferentes representações. Para o autor,

[52] […] a theoretical reconstruction of the methods of solving linear problems, using the concepts and tools of a new axiomatic central theory.
[53] Dorier (2002) cita o processo de unificação, generalização e simplificação em Álgebra Linear. Observo que o autor está se referindo aos resultados provindos, sobretudo, do formalismo hilbertiano, veja apêndice 1.
[54] From a didactic point of view, the difficulty is that any linear problem within the reach of a first year university student can be solved without using the axiomatic theory.
[55] The gain in terms of unification, generalization and simplification brought by the use of the formal theory is only visible to the expert.
[56] […] students have to be introduced to a certain type of reflection on the use of their previous elements of knowledge and competencies in relation with new formal concepts.

> as dificuldades dos alunos com o aspecto formal da teoria dos espaços vetoriais não são apenas um problema geral com o formalismo, mas principalmente a dificuldade de entendimento do uso específico de formalismo dentro da teoria dos espaços vetoriais e, da interpretação dos conceitos formais em relação com contextos mais intuitivos, como geometria ou sistemas de equações lineares, em que historicamente surgiu (DORIER, 2002, p. 877)[57].

Considerações apresentadas por Stewart (2008)

Stewart (2008), em sua pesquisa de doutorado, realizada na Universidade de Auckland na Nova Zelândia, investigou o nível de compreensão de conceitos e procedimentos de Álgebra Linear, por estudantes universitários dos primeiros e segundos anos de um curso de Matemática. Os conceitos considerados foram: vetor, multiplicação de um vetor por um escalar, combinação linear, dependência linear entre vetores, conjunto de vetores geradores/espaço gerado, subespaço, base, autovetores e autovalores.

Para definir os níveis de compreensão, a autora correlacionou o aporte teórico APOS com as ideias dos três mundos da Matemática descritos por David Tall[58] e, após as questões de pesquisa serem reformuladas, apresentou elementos para as seguintes questões:

- Qual é o nível de compreensão conceitual e procedimental sobre conceitos de Álgebra Linear por alunos de Matemática, entre o primeiro e segundo ano na Universidade de Auckland?
- Existem causas específicas sobre eventuais dificuldades que os estudantes possam ter, ao estudar conceitos de Álgebra Linear? Se sim, em que áreas as maiores dificuldades ocorrem? Existe um papel para as definições e representações em relação às dificuldades evidenciadas?

Depois de analisar sete estudos de caso (incluindo o piloto), a autora descreve que os estudantes indicaram possuir uma ação simbólica ou processo simbólico, ao trabalhar com os conceitos elementares de Álgebra Linear. E, ainda,

[57] Students' difficulties with the formal aspect of the theory of vector spaces are not just a general problem with formalism but mostly a difficulty of understanding the specific use of formalism within the theory of vector spaces and the interpretation of the formal concepts in relation with more intuitive contexts like geometry or systems of linear equations, in which they historically emerged.

[58] Para maiores detalhes veja Stewart (2008).

que há uma possível ênfase no ensino de operações com matrizes, ao invés de um foco em conceitos.

Stewart (2008) propôs situações em que os entrevistados não necessitavam fazer uso de procedimentos de rotina, mas, sim, estabelecer relações entre os conceitos de Álgebra Linear, para tomar decisões sobre as situações apresentadas. No entanto, alega que, em alguns casos, os entrevistados utilizavam estratégias mais procedimentais, mesmo quando não era necessário. Para ela, ficou evidente que os entrevistados, quando não tinham noção de como proceder, recorriam, inadequadamente, a procedimentos "conhecidos".

Em relação às dificuldades, a autora as relacionou primeiramente aos termos e à simbologia utilizada em Álgebra Linear citando, como exemplo, a confusão existente ao trabalhar com a multiplicação de um vetor por um escalar. Stewart (2008) considera que a palavra 'escalar' fez com que os entrevistados calculassem como se fosse um produto escalar, isto é, eles consideraram o escalar como sendo um vetor[59].

Em relação à combinação linear entre vetores, alguns entrevistados falaram de 'equações lineares', em vez de 'combinações lineares'. Para a autora, os estudantes, ao lerem a palavra 'linear', associaram à ideia de 'equações lineares', o que fez com que os estudantes do primeiro ano tentassem resolver a atividade proposta como se fosse um conjunto de equações lineares.

Os estudantes também indicaram ter dificuldades ao definir subespaços, e a autora justifica o fato com o argumento de o prefixo 'sub' apresentar dois significados: parte e abaixo. Para Stewart (2008), ao definir o termo subespaço, muitos estudantes fazem referência a uma porção de um espaço ou parte de um espaço, ignorando que um subespaço é uma parte do espaço, que deve conter o vetor nulo.

A autora identificou, também, dificuldades relacionadas com problemas não rotineiros e dificuldades com o uso das representações.

> Em resumo, a maioria dos estudantes não foi capaz de reconhecer os conceitos em diferentes representações e suas habilidades em expressar os conceitos em diferentes representações eram muito limitadas. No entanto, os alunos que estavam mais familiarizados

[59] Ao ser dado $k \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ os entrevistados apresentaram $kv = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$, em vez de $kv = (kv_1, kv_2, \cdots, kv_n)$.

> com a mudança entre as representações (nomeadamente os estudantes pesquisadores) se saíram melhor do que aqueles que apenas utilizaram manipulações simbólicas (STEWART, 2008, p. 233)[60].

Outra dificuldade se deu quando os estudantes deveriam estabelecer relações entre conceitos de Álgebra Linear:

> os resultados mostraram que muitos estudantes tinham dificuldades de conectar sua compreensão de um conceito com outros conceitos relacionados (uma visão processo formal). Por exemplo, muitos estudantes não foram capazes de vincular base com independência linear e conjunto gerador, ou o conceito de combinação linear com dependência linear, ou espaço gerado com combinação linear (STEWART, 2008, p. 233)[61].

A autora solicitou, também, que os estudantes explicassem, com suas palavras, as definições de termos como combinação linear, independência linear, entre outros conceitos, com o intuito de avaliar a compreensão das definições, em vez de fazer uso de memorização mecânica de palavras. Como resultado, a autora observou que "para alguns estudantes, é importante conhecer as definições e citá-las, mas, quando se trata de resolver os problemas, as definições não são tão relevantes" (STEWART, 2008, p. 236-237)[62].

Para a autora,

> [...] o estudante do primeiro ano que não tem entendimento prévio do curso pode apenas manter sua cabeça acima da água, pois tem um longo caminho a percorrer antes de ser capaz de ver todo o quadro, uma vez que para a maioria dos estudantes é evidente que ideias e definições introduzidas muito rapidamente e uma falta de ligação com o que já sabem é uma fase do curso muito intensa (STEWART, 2008, p. 41)[63].

[60] In summary, the majority of students were unable to recognise the concepts in different representations and their abilities in expressing the concepts in different representations were very limited. However, those students who were more familiar with shifting between the representations (namely the researcher's students) did better than those who were only used to doing symbolic manipulations.

[61] The results showed that many students had difficulties connecting their understanding of one concept to other related concepts (a process-formal view). For example many students were not able to link basis to linear independence and span, or the concept of linear combination to linear dependence, or span to linear combination.

[62] […] for some students it is important to learn the definitions and quote them but when it comes to solving problems, the definitions are not as relevant.

[63] In other words the first year student who has no prior understanding of the course and can only just keep his head above water, has a long way to go before being able to see the whole picture, since for

Considerações apresentadas por De Vleeschouwer e Gueudet (2011)[64]

De Vleeschouwer e Gueudet (2011) apresentaram um estudo sobre as mudanças nos contratos didático e institucional na transição entre o que é considerado no Brasil como sendo Educação Básica e o Ensino Superior.

Após assumirem a noção de contrato didático como sendo uma partilha de responsabilidade para com o conhecimento entre os alunos e o professor[65], as autoras destacam que os estudos realizados sobre essa transição apresentam características mais amplas e aparentam expectativas institucionais e não as de um conteúdo particular da Matemática. Por exemplo, os alunos precisam ter mais autonomia sobre a construção do seu conhecimento.

Para as autoras[66], a relação se inicia quando um sujeito encontra um determinado conhecimento matemático em uma instituição. A instituição enquadra esse conhecimento como uma organização matemática, ou praxeologia, implicando quatro componentes: um tipo de tarefa, uma técnica para realizar este tipo de tarefa, uma tecnologia, que é um discurso justificando a técnica, e uma teoria.

Assim, De Vleeschouwer e Gueudet (2011) consideram que o contrato pode assumir vários níveis em uma determinada instituição. Ele pode ser independente do conhecimento em jogo, para a Matemática ou para um determinado conteúdo.

Segundo as autoras, em relação à Matemática, as dificuldades[67] inerentes ao processo de transição entre a Educação Básica e a Educação Superior, são: construção de exemplos, trabalho em quadros diferentes, mudança entre diferentes representações e trabalho no nível de tecnologia, que significa produzir um discurso justificando uma técnica.

Para elas, essas dificuldades eram, na Educação Básica, de responsabilidade do professor e, no Ensino Superior, admite-se que o aluno tenha autonomia para enfrentá-las.

most stage one students the course is very intense. Ideas and definitions get introduced very rapidly and a lack of connection with what they already know in mathematics is evident.

[64] Esse artigo é um recorte da pesquisa de doutorado De Vleeschouwer (2010). Martine De Vleeschouwer-Dieudonne é professora pesquisadora na Universidade de Namur (Bélgica) e Ghislaine Gueudet é professora pesquisadora na Universidade de Rennes (França).

[65] As autoras inspiram-se nos trabalhos de Brousseau (1997) e Artigue (2007) ao apresentar o que será considerado por contrato didático.

[66] Ao considerar o trabalho de Chevallard (2005).

[67] Baseadas em Praslon (2000), Bloch (2005), Bosch et al. (2004) e WinslØw (2008).

Em relação à Álgebra Linear, após a análise de livros didáticos, as autoras evidenciaram uma mudança fundamental, pois vários conceitos podem mudar de *status*, de acordo com o contexto. Por exemplo,

> [...] uma matriz pode ser considerada como representando uma função linear, em determinadas bases, mas também pode ser considerada como um elemento de um espaço vetorial. Uma função pode ser vista como um processo para agir sobre determinados objetos, mas também pode ser um elemento de um espaço vetorial (DE VLEESCHOUWER; GUEUDET, 2011, p. 2115)[68].

As autoras descrevem que, na Bélgica, os alunos na Educação Básica já abordam os conceitos matrizes e funções, mas, essas matrizes e funções não são consideradas como elementos de um conjunto. Na universidade, o aluno deve ser capaz de alternar entre o uso do conceito e a percepção de que esse conceito é parte de um conjunto maior com operações bem definidas, uma mudança de *status* que não é explicitamente apresentada para os estudantes universitários.

O ensino experimental teve duração de cinco semanas, na primeira semana, por exemplo, a pesquisadora (responsável pela coleta de dados) apresentou uma atividade, cujo objetivo foi o de fazer com que os estudantes se conscientizassem dos diversos *status* que uma matriz pode ter em Álgebra Linear, por exemplo, elemento de um grupo, um anel, um espaço vetorial, ou representando uma função linear. Nas demais semanas, foram apresentadas atividades relacionadas às formas lineares e dual.

Como resultado, as pesquisadoras declararam que o objetivo não é mudar o contrato, reduzindo a responsabilidade do aluno, mas, sim, discutir e refletir sobre o que está implícito e explícito. Para elas, algumas regras do contrato devem permanecer implícitas, por exemplo, consideram que se deve ensinar, implicitamente, aos alunos que os objetos matemáticos estudados na universidade podem assumir diferentes *status* e que os estudantes devem estar preparados para mudar de *status* de acordo com o contexto.

[68] […] a matrix can be considered as representing a linear function in given bases; it can also be considered as an element of a vector space. A function can be seen as process acting on given objects; it an also be an element of a vector space.

Considerações apresentadas por Thomas et al. (2012)

O artigo *Key Mathematical concepts in the transition from secondary to university*[69] foi apresentado no *International Congress on Mathematical Education* **–** ICME12[70]– que ocorreu na Coreia do Sul no ano de 2012 e teve como objetivo analisar a transição da Matemática da Educação Básica para a do Ensino Superior. Para tal, foi feito um levantamento das pesquisas que abordam questões relacionadas a essa transição pertinentes ao ensino e à aprendizagem de: Cálculo e Análise; Álgebra Abstrata; Álgebra Linear; entre outros. Além da revisão da literatura, foram analisados os pontos de vista sobre a transição das pessoas envolvidas com o ensino em departamentos de Matemática.

Para os autores, várias pesquisas[71] têm documentado dificuldades apresentadas pelos estudantes na transição supracitada, “[...] particularmente, como esses estudantes relacionam o raciocínio intuitivo ou geométrico e o formalismo matemático em Álgebra Linear” (THOMAS et al., 2012, p. 102)[72]. Dessas pesquisas apresento aquelas, que podem contribuir com esta tese, pois apresentam elementos relacionados à Álgebra Linear.

As pesquisas Harel e Kaput (1991), Hillel (2000), Britton e Henderson (2009), Corriveau (2009), Wawro, Sweeney e Rabin (2011) conforme descrito por Thomas et al. (2012), abordaram as dificuldades apresentadas por estudantes em relação às representações em Álgebra Linear.

Na pesquisa realizada por Harel e Kaput (1991), os estudantes deveriam verificar se um dado conjunto era de fato um espaço vetorial sobre os reais. Os autores mostraram que, dos estudantes investigados, os que se relacionavam com o espaço vetorial, como uma ideia conceitual, eram mais capazes de decidir se um dado conjunto era um espaço vetorial sobre os reais, do que aqueles que verificavam os axiomas processualmente.

Como contribuição, a pesquisa de Harel e Kaput (1991) evidenciou, também, que os estudantes em Álgebra Linear demonstram ter dificuldades em separar os símbolos dos conceitos que se destinam a representar. Para eles, o

[69] Conceitos matemáticos fundamentais na transição do secundário para a universidade.
[70] Congresso Internacional em Educação Matemática.
[71] Baseados em Dogan-Dunlap (2010), Gueudet-Chartier (2004) e Harel (1990).
[72] […] particularly as these relate to students’ intuitive or geometric ways of reasoning and the formal mathematics of linear algebra.

"desenvolvimento da compreensão do que um símbolo representa conceitualmente é crucial para a compreensão em Álgebra Linear como um todo" (THOMAS et al., 2012, p. 103)[73].

Já, na pesquisa de Britton e Henderson (2009), as dificuldades apresentadas pelos estudantes estavam relacionadas à transição de um entendimento formal para subespaço e a representação algébrica em que um problema é proposto. Segundo Thomas et al. (2012), "estes autores argumentaram que as dificuldades dos estudantes resultaram de uma compreensão insuficiente dos vários símbolos utilizados nas questões e na definição formal do subespaço" (p. 103) [74].

Em Corriveau (2009), a dificuldade enfrentada pelo estudante se dá

> [...] quando uma nova álgebra (por exemplo, álgebra matricial, etc) é introduzida como uma ferramenta de cálculo para algoritmização de procedimentos e raciocínios através dos cálculos e suas regras, então os alunos têm de aceitar delegação de parte do controle de validade e significado para essa álgebra, levando a uma perda de controle e sentido (THOMAS et al*.,* 2012, p. 102)[75].

Wawro, Sweeney e Rabin (2011) analisaram como estudantes utilizam diferentes modos de representação para dar sentido à noção formal de subespaço. Segundo Thomas et al. (2012), os autores estudaram a relação entre a compreensão dos alunos sobre a definição de subespaço e suas imagens conceituais. Os resultados desse estudo

> [...] sugerem que na geração de explicações para a definição, os alunos contam com suas compreensões intuitivas de subespaço. Essas compreensões intuitivas podem ser problemáticas, como é o caso de ver $\mathbb{R}^2$ como um subespaço do $\mathbb{R}^4$, mas também podem ser muito poderosas para o desenvolvimento de uma compreensão mais abrangente para subespaço (THOMAS et al*.,* 2012, p. 102)[76].

---

[73] […] developing an understanding of what a symbol represents conceptually is crucial to understanding linear algebra as a whole.

[74] These authors argued that student difficulties stemmed from an insufficient understanding of the various symbols used in the questions and in the formal definition of subspace

[75] when a new algebra (e.g., matrix algebra, etc.) is introduced as a tool for calculation for algorithmisation of procedures and reasoning through calculations and their rules, then students have to accept delegation of parts of the control of validity and meaning to this algebra, leading to a loss of control and meaning.

[76] […] suggest that in generating explanations for the definition, students rely on their intuitive understandings of subspace. These intuitive understandings can be problematic, as in the case of seeing $\mathbb{R}^2$ as a subspace of $\mathbb{R}^4$, but they can also be very powerful in developing a more comprehensive understanding of subspace.

Na pesquisa de Dorier et al. (2000), a preocupação estava voltada para o ensino de Álgebra Linear na França, pois para os autores,

> [...] a forte ênfase em conceitos algébricos em Álgebra Linear deixa pouco espaço para a teoria dos conjuntos e lógica elementar. Eles alegam que essa ausência leva à dificuldade em trabalhar com os aspectos formais da Álgebra Linear. Por exemplo, os alunos muitas vezes não conseguem raciocinar com definições e conceitos abstratos (THOMAS et al*.,* 2012, p. 103)[77].

Outros grupos de pesquisadores, baseados em teorias socioculturais[78], na teoria do *design* instrucional de Educação Matemática Realista[79] e pesquisa em *design*[80] estão desenvolvendo, simultaneamente, sequências para o ensino de autovetor e autovalor, dependência linear entre vetores, conjunto gerador e transformação linear. Asssim como, pesquisas, por exemplo, a de Wawro et al. (2011) a qual "desafia algumas das conclusões anteriores de que formas intuitivas de raciocínio são obstáculos para a introdução do formalismo matemático" (THOMAS et al*.,* 2012, p. 105)[81].

Um voo panorâmico sobre os resultados já apresentados

A primeira consideração que apresento é em relação à abordagem adotada em um curso de Álgebra Linear, conforme Dorier (2002), geralmente acontece em duas maneiras: o estudo formal dos espaços vetoriais ou um estudo mais analítico no $\mathbb{R}^n$ e cálculo com matrizes. Stewart (2008), também, cita a questão da abordagem adotada e afirma que observou maior ênfase no ensino de matrizes, em vez dos conceitos próprios dessa disciplina.

Outra consideração é em relação à necessidade de o estudante, ao iniciar o curso de Álgebra Linear, já ter construído uma concepção objeto sobre a noção de

[77] […] the strong emphasis on algebraic concepts in linear algebra leaves little room for set theory and elementary logic. They contend that this absence leads to difficulty in working with the formal aspects of linear algebra. For example, students are often unable to reason with definitions and abstract concepts.
[78] Cobb e Bauersfeld (1995).
[79] Freudenthal (1973).
[80] Kelly, Lesh, e Baek (2008).
[81] [...] challenges some of the earlier findings that students' intuitive ways of reasoning are an obstacle to induction into formal mathematics.

conjunto, subconjunto e pertinência de um elemento a um conjunto[82]. Essa discussão foi apresentada por Parraguez (2009), Prado (2010) e Thomas et al. (2012).

Uma terceira consideração é sobre a aprendizagem em Matemática pressupor a conexão de novas noções a outras noções já estudadas, tal consideração foi apresentada, em Dorier (1997), Araújo (2002), Padredi (2007), Oliveira (2005) e Prado (2010).

Padredi (2003) afirma que as conexões entre as noções novas e as antigas podem ser realizadas com noções já estudadas em Geometria Analítica. Em Prado (2010), por exemplo, o estudante poderá recorrer à Geometria Analítica e retomar os objetos vetores colineares e vetores coplanares para construir a noção de dependência linear entre vetores, no entanto, o interesse não é o vetor com sua representação "geométrica", para Gueudet-Chartier (2000), esta representação poderá ser um obstáculo para o indivíduo, assim como verificou Prado (2010).

Outra consideração evidenciada em vários estudos, por exemplo, Dorier (2002), Grande (2006), Stewart (2008), Prado (2010) e Thomas et al. (2012) é em relação às diferentes representações utilizadas em Álgebra Linear, pois os estudantes têm mostrado dificuldades em reconhecê-las, associá-las corretamente aos conceitos e estabelecer conversões entre diferentes representações.

Uma última consideração é baseada no relatório da CBMS (2012) que recomenda que, na formação inicial de professores de Matemática, as definições e teoremas devem ser trabalhados de maneira que os estudantes os identifiquem como formas de organizar e sistematizar as ideias matemáticas. Nesse sentido, Stewart (2008) mostra que para alguns estudantes, em Álgebra Linear, as definições são tidas como sendo importantes, no entanto, falta estabeler a conexão entre a definição e o seu uso na resolução de problemas.

Apresentadas as considerações em relação aos resultados de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem em Álgebra Linear, no que segue, organizo os resultados em dois grupos: *abordagens e conceitos de Álgebra Linear* e *análise de livros didáticos*.

[82] Prado (2010) define que um indivíduo que mostra ter uma concepção objeto sobre as noções listadas deve "ser capaz de reconhecer os elementos de um conjunto, apresentar exemplos de conjuntos e ter domínio da linguagem da teoria dos conjuntos [...] ser capaz de, por exemplo, dado um conjunto apresentar seus subconjuntos e dado um subconjunto dizer em qual conjunto ele está contido [...] ser capaz de identificar os elementos que pertençam a um dado conjunto" (p. 65).

Sobre os conceitos e as abordagens utilizadas em Álgebra Linear

Vários conceitos de Álgebra Linear foram citados: espaço vetorial, conjunto de vetores geradores, espaço gerado, subespaço vetorial, combinação linear entre vetores, dependência linear entre vetores, base de um espaço vetorial, dimensão, entre outros. A seguir, apresento alguns elementos relacionados a esses conceitos.

Espaço vetorial sobre os reais

Em Álgebra Linear, o estudante é convidado a vivenciar a estrutura algébrica Espaço Vetorial e as suas características (DORIER, 1997), por exemplo, um dos entrevistados de Padredi (2003) compara a noção de espaço vetorial como sendo uma parede: "[...] a parede para mim é mais importante do que a base [...]" (PADREDI, 2003, p.105), pois as noções combinação linear entre vetores, dependência linear entre vetores, base, dimensão, entre outras, são noções intrínsecas à noção de espaço vetorial.

Conjunto de vetores geradores de um espaço vetorial (espaço gerado)

Assim como Oliveira (2005), penso ser importante que o estudante trabalhe com diferentes conjuntos de vetores, que podem gerar um determinado espaço vetorial e, ainda, que o estudante compreenda a reversibilidade das noções, por exemplo, "todo conjunto de vetores gera um subespaço vetorial e, por outro lado, todo subespaço vetorial é gerado por um conjunto de vetores" (OLIVEIRA, 2005, p.67).

Dependência linear entre vetores

Sobre dependência linear, destaco a importância de despertar nos estudantes a ideia de que conjuntos distintos, que são geradores de um mesmo espaço vetorial, possuem alguma relação (OLIVEIRA, 2005) e, por meio de situações planejadas, levar o estudante a perceber que há conjuntos em que um (ou mais) elemento(s) pode(m) ser escrito(s) como combinação linear dos outros, ou seja, esse conjunto é linearmente dependente. Assim como, propiciar reflexões "sobre as vantagens de um conjunto gerador minimal, sugerindo a ideia de conjunto linearmente independente" (OLIVEIRA, 2005, p. 70).

Vale ressaltar que nos livros analisados por Grande (2006), em relação à dependência linear, há poucas situações propostas em que o estudante é convidado a efetuar a conversão entre registros.

Base de um espaço vetorial

Padredi (2003), Oliveira (2005) e Prado (2010) destacam as vantagens em proporcionar aos estudantes momentos de reflexão em relação à noção de base de um espaço vetorial. Um dos entrevistados de Padredi (2003, p. 105) afirmou que "a noção de base é importante, mas não pode existir sozinha, separada do seu corpo, ou seja, da noção de espaço vetorial e de todas as propriedades, características desse espaço que está sendo construído [...]" (PADREDI, 2003, p. 105).

De acordo com Padredi (2003, p. 117), compreender a noção de base de um espaço vetorial como sendo um sistema de geradores minimal "pode gerar reflexões dos alunos sobre a vantagem de se conseguir um número mínimo de vetores para gerar o espaço, induzindo-os a compreender a necessidade de serem vetores linearmente independentes" (PADREDI, 2003, p. 117). Já, conceber base de um espaço vetorial como sendo um conjunto maximal de vetores linearmente independentes "pode gerar reflexões sobre a necessidade de se conseguir o maior conjunto linearmente independente que dará origem ao espaço, surgindo daí naturalmente a noção de sistema de geradores" (PADREDI, 2003, p. 117).

Para a autora, "tanto uma ideia como a outra explicitam uma articulação, entre as duas noções, vetores linearmente independentes e sistema de geradores, dando origem ao conceito de base" (PADREDI, 2003, p. 117).

Há, ainda, a consideração de outro entrevistado: "as noções introduzidas durante um primeiro curso, em especial a de base, vai 'clareando' aos poucos para alguns alunos como, por exemplo, quando trata de transformações lineares, sendo que cada um tem a sua hora certa para compreender essa noção" (PADREDI, 2003, p. 71).

Dimensão

A noção de dimensão poderá ser percebida pelo estudante quando o professor formador lhe apresentar situações em que deverá verificar a dependência linear em um conjunto de vetores. Oliveira (2005), por exemplo, evidenciou ser esse um dos caminhos que permitem que os estudantes conceituem a noção de dimensão e, ainda, que um conjunto possui infinitas bases.

Prado (2010), por sua vez, afirma que

> o indivíduo que possui uma concepção objeto sobre a noção de dimensão, pode conceber a dimensão como um invariante, ou seja, reconhecer que todas as bases de um mesmo espaço vetorial possuem o mesmo número de vetores. Além disso, poderá correlacionar a noção de dimensão ou com a de conjunto gerador ou com a de dependência linear, para dizer quantos vetores esses conjuntos deverão possuir para ser uma base. (PRADO, 2010, p. 85)

Análise de livros didáticos

Quatro pesquisas analisaram livros didáticos, duas delas investigaram livros utilizados na Educação Básica (BATTAGLIOLLI, 2008; CAMARGO JUNIOR, 2010) e, duas, livros utilizados no Ensino Superior (ARAÚJO, 2002; GRANDE, 2006).

Das pesquisas relacionadas aos livros de Álgebra Linear, constata-se que poucos recursos-meta são passíveis de se tornar alavancas-meta para a compreensão dos estudantes, assim como, há pouca ênfase na conversão de registros de representação semiótica.

Das pesquisas com livros do Ensino Médio, sobre as noções de matriz, sistema de equações lineares e determinante, que também estão presentes na disciplina Álgebra Linear, observa-se que são noções abordadas de forma inadequada, pois não apresentam situações que possibilitem ao estudante conhecer e converter todos os possíveis registros de representação semiótica (BATTAGLIOLLI, 2008), assim como, não há situações que explorem a manipulação de uma figura por cálculos matriciais, por exemplo, a reflexão, a escala e a rotação (CAMARGO JUNIOR, 2010).

Moreira (2012) afirma que na formação de professores de Matemática, sobretudo, na Licenciatura em Matemática, os livros usualmente empregados no processo de formação podem não ser os mais apropriados, e ainda, é um desafio organizar materiais de Matemática voltados para a formação de professores na licenciatura. Para o autor,

> é preciso elaborar novos textos didáticos, [...] há uma produção importante no campo da Educação Matemática, nacional e internacional, que pode e deve ser aproveitada, mas resta, ainda, o desafio da produção de sínteses dessa literatura, de modo a adaptá-

> la às condições de trabalho nas diferentes disciplinas de um curso de formação inicial, com ementas, carga horária e programas específicos (MOREIRA, 2012, p. 1149).

Uma forma de usar o livro didático em Álgebra Linear foi evidenciado por Padredi (2003), que descreve o uso do livro didático como "um meio de provocar reflexão dos alunos sobre pontos que podem ocasionar erros e generalizações abusivas" (p.119).

Discussões sobre o currículo de Álgebra Linear

Na seção anterior, apresentei alguns resultados de pesquisas que investigaram questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem em Álgebra Linear. Nesta seção, abordo as considerações apresentadas por Carlson et al. (1993), Dubinsky (1997), CBMS (2012) e SBEM (2013), todos esses trabalhos, de certa forma, apresentam reflexões sobre o currículo de Álgebra Linear.

Sobre o LACSG – Carlson et al. (1993)

O Grupo de Estudo sobre o Currículo de Álgebra Linear – LACSG[83] – foi constituído a partir da percepção, no final da década de 80 e início da década de 90, da emergente necessidade de formação em Álgebra Linear nos cursos de serviços[84], tais como engenharia, ciência da computação, pesquisa operacional, economia e estatística e, as melhorias de *hardware* e *software* em ciência da computação, que potencializaram o uso da Álgebra Linear para resolver problemas.

Para o Grupo, nem sempre a relevância da Álgebra Linear era comunicada aos alunos, assim como, não eram apresentadas situações, em que se poderia fazer uso de computadores em sala de aula, fosse na seleção dos temas abordados ou no modo de apresentação. Assim, essas e outras situações imbricadas ao ensino de Álgebra Linear pautaram as discussões do LACSG e viabilizaram a publicação Carlson et al. (1993).

[83] The Linear Algebra Curriculum Study Group.
[84] Para Howson et al. (1988), a expressão *cursos de serviço* faz referência as disciplinas que abordam conteúdos matemáticos, ministradas por professores do departamento de Matemática, para cursos que não formam matemáticos.

As recomendações do LACSG estão organizadas em cinco momentos de discussão: a necessidade provinda de um curso de serviço; o conceito que deve orientar o programa de Álgebra Linear; apresentação de um programa detalhado dos conceitos que devem ser abordados em uma primeira disciplina, que aborda conteúdos de Álgebra Linear; o uso da tecnologia e a necessidade de uma segunda disciplina de Álgebra Linear.

A primeira recomendação é que a disciplina Álgebra Linear deve suprir as necessidades do curso para o qual será ofertada, sendo necessário que o programa contemple os temas e conceitos essenciais para a maioria dos alunos, por isso,

> passeios entre o uso de generalizações e outras questões devem ser feitos somente se o tempo permitir. No entanto, deve ser possível projetar um programa que inclui tanto os temas essenciais e outros conceitos que tanto servem para enfatizar a posição da Álgebra Linear dentro da Matemática, reflexo da missão única de uma instituição, ou responder aos interesses especiais e às necessidades dos estudantes (CARLSON et al., 1993, p. 42)[85].

Para os autores, as aplicações em Álgebra Linear devem constar do programa, no entanto, "tais aplicações podem ser limitadas pela necessidade de minimizar os jargões técnicos e informações de fora da disciplina". (CARLSON et al., 1993, p. 42)[86].

Em relação ao formato da disciplina, deverão ser consideradas as habilidades dos estudantes, assim como, o uso que eles farão da Álgebra Linear em suas carreiras. Segundo os autores, há "[...] a necessidade de uma disciplina sólida e intelectualmente desafiadora, com definições cuidadosas e demonstrações de teoremas e provas que mostrem relações entre os vários conceitos e aumentem a compreensão" (CARLSON et al., 1990, p. 42)[87].

A segunda recomentação é sobre a abordagem adotada em uma primeira disciplina de Álgebra Linear, para os autores, a disciplina deve ser orientada pelo

---

[85] Excursions into generalizations and other issues should be made only if time permits. However, it should be possible to design a syllabus that includes both the essential topics and other concepts that either serve to emphasize the position of linear algebra within mathematics, reflect the unique mission of an institution, or respond to special interests and needs of the student.

[86] Such applications necessarily will be limited by the need to minimize technical jargon and information from outside the course. A palavra, em inglês, *course*, é traduzida para a língua portuguesa como sendo, curso. No entanto, o autor a utiliza para fazer referênia a disciplina Álgebra Linear. Assim, sempre que esse for o caso, faço uso da palavra disciplina, em vez de curso.

[87] The need for a solid and intellectually challenging course, with careful definitions and statements of theorems, and proofs that show relationships between various concepts and enhance understanding.

uso das matrizes. Segundo Carlson et al. (1993), essa recomenção trata de uma mudança no foco, em vez de uma mudança significativa no conteúdo. E, ainda, para eles, o programa da disciplina Álgebra Linear deve refletir sobre o uso das TIC como ferramenta científica,

> [...] isso implica menos ênfase na abstração e mais ênfase na resolução de problemas e aplicações motivadoras. Isso não implica menos ênfase no rigor ou prova de teoremas, mas, sim, uma mudança no foco, de uma disciplina voltada para dentro, abstrata, a uma disciplina orientada para matrizes, mais prática, que atenda às necessidades dos estudantes, não só de Matemática, mas também os estudantes dos vários cursos de serviço. A primeira disciplina de Álgebra Linear pode e deve ser uma das disciplinas de Matemática mais úteis tomadas por estudantes universitários de Matemática (p. 42)[88].

Após apresentar as recomendações mais gerais, os autores detalharam um programa para a disciplina Álgebra Linear, esse planejamento foi descrito para um período entre 26 e 28 aulas com cinquenta minutos cada. Segundo os autores, o tempo excedente poderá ser usado para incluir temas complementares.

É esperado que o estudante, ao iniciar a disciplina Álgebra Linear pela primeira vez, já tenha desenvolvido uma "[...] maturidade matemática associada com a conclusão bem sucedida de dois semestres de Cálculo" (CARLSON et al., 1993, p. 43)[89]. E, a disciplina tem como objetivo desenvolver com o estudante o domínio de temas centrais, que serão apresentados a seguir, assim como, aumentar a capacidade de resolução de problemas.

O programa está dividido em seis blocos: Adição e multiplicação de matrizes (3 aulas); Sistemas de equações lineares (4 aulas); Determinantes (2 ou 3 aulas); Propriedades do $\mathbb{R}^n$ (7 ou 8 aulas); Autovetor e autovalor (6 aulas); Ortogonalidade (4 aulas).

No primeiro bloco – Adição e multiplicação de matrizes – os autores descrevem que devem ser abordados os temas usuais: adição de matrizes, multiplicação de uma matriz por um escalar, multiplicação de matrizes, matriz

[88] […] This implies less emphasis on abstraction and more emphasis on problem solving and motivating applications. It does not imply less emphasis on rigor or theorem proving, but rather a change of focus from an abstract, inward-looking course to a more practical matrix-oriented course that meets the needs of not only mathematics students but also the students of the various client disciplines. The first course in linear algebra can and should be one of the most useful mathematics courses taken by college mathematics students.

[89] […] mathematical maturity associated with the successful completion of two semesters of calculus.

transposta e as propriedades algébricas, por exemplo, a associatividade na multiplicação de matrizes. Há, ainda, a indicação para que o produto entre duas matrizes seja usado como motivação para o desenvolvimento dos conceitos.

No segundo bloco – Sistemas de Equações Lineares – são apresentados, como necessário desenvolver, os seguintes conceitos: eliminação de Gauss; matrizes elementares; escalonamento e forma escalonada reduzida; existência e unicidade de soluções; matriz inversa; decomposição LU[90].

No bloco – Determinantes – é sugerido apresentar as propriedades elementares dos determinantes, sem fazer as devidas demonstrações. Devem-se, também, abordar os conceitos: cofator, operações com as linhas e a regra de Cramer.

Já no bloco – Propriedades do $\mathbb{R}^n$ – é sugerido que o $\mathbb{R}^n$ seja apresentado aos estudantes como sendo um conjunto de n-uplas e não como um espaço vetorial. Em relação às operações adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar, não há a necessidade de comprovar formalmente todas as propriedades envolvidas. Há, também, a indicação de se dar "forte" ênfase geométrica na apresentação dos conceitos.

Os conceitos que devem ser abordados são: combinação linear, dependência linear entre vetores, bases do $\mathbb{R}^n$, subespaços do $\mathbb{R}^n$, conjunto gerador, dimensão, espaços linha e coluna, espaço nulo, matrizes como transformações lineares, posto de uma matriz, matriz inversa e produto interno.

No bloco - Autovetor e Autovalor – há a indicação para que sejam introduzidos a partir de exemplos geométricos. Os conceitos, que devem ser abordados, são: a equação $Ax = \lambda x$, polinômio característico e identificação de alguns de seus coeficientes (traço, determinante), multiplicidade algébrica dos autovalores, autovalor, multiplicidade geométrica, similaridade e matrizes simétricas (diagonalização ortogonal, formas quadráticas).

No último bloco – Ortogonalidade – é indicado que se inclua os temas com "forte" ênfase geométrica, são eles: projeção ortogonal sobre um subespaço, ortogonalização de Gram-Schmidt e interpretação como uma fatoração QR[91]; e as

[90] A decomposição LU é usada para resolver sistemas lineares do tipo $Ax = B$, isto é, se A é uma matriz invertível, então existe uma fatoração de A na forma $A = LU$ em que L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior (SPERANDIO et al., 2003).

[91] A decomposição QR é usada para resolver sistemas lineares do tipo $Ax = B$, isto é, se A é uma matriz $m \times n$ de posto n, então a solução para o sistema pode ser obtida resolvendo a equação

soluções de mínimos quadrados de sistemas lineares inconsistentes, com aplicações para dados de ajuste.

Após a apresentação desses blocos, os autores descreveram o que consideram como sendo tópicos complementares e afirmam que as escolhas deverão ser influenciadas pelo tempo disponível, necessidades e interesses dos alunos e os objetivos da disciplina. Os conceitos que poderão ser abordados são: espaços vetoriais não elementares, transformações lineares, matrizes positivas, redução de uma matriz simétrica a uma matriz diagonal por congruência, decomposição em valores singulares, normas de matrizes.

Também são citadas algumas aplicações, são elas: cadeias de Markov, modelos de insumo-produto, matrizes de Leslie, o uso de equações diferenciais e programação linear.

Após a apresentação do programa mínimo para a primeira disciplina sobre Álgebra Linear, os autores discutem a terceira recomendação, na qual consideram o fato de a faculdade proponente da disciplina evidenciar as necessidades e interesses dos estudantes: “encorajamos os pesquisadores, incluindo matemáticos, a estudar questões como estratégias de ensino, testes eficazes, abstração, e o papel das aplicações no ensino de Álgebra Linear” (CARLSON et al., 1993, p. 45)[92].

Na próxima recomendação, os autores apresentam que “o uso de computadores ou super calculadoras para a lição de casa e os projetos podem reforçar conceitos de palestras, contribuir para a descoberta de novos conceitos e viabilizar a solução de problemas reais aplicados” (CARLSON et al., 1993, p. 45)[93], por isso, incentivam o uso dessas ferramentas nas aulas de Álgebra Linear.

Por fim, na quinta consideração, declaram que deveria haver pelo menos uma segunda disciplina sobre Álgebra Linear, no qual a abordagem poderia centrar-se em um dos três temas: estudo dos espaços vetoriais, análise de matrizes ou análise numérica.

$QRx = B$, em que Q é ortogonal e R é uma matriz triangular superior de diagonal não-nula. Se A for uma matriz invertível, então a fatoração QR existe e é única (SPERANDIO et al., 2003).

[92] We encourage researchers, including mathematicians, to study issues such as teaching strategies, effective testing, abstraction, and the role of applications, as they apply to the teaching of linear algebra.

[93] […] use of computers or super calculators for homework and projects can reinforce concepts from lectures, contribute to the discovery of new concepts and make feasible the solution of realistic applied problems.

Considerações de Dubinsky (1997) sobre as propostas do LACSG

Dubinsky (1997) teve como objetivo apontar o que considera omisso na discussão apresentada em Carlson et al. (1993) e Carlson (1993), assim como, introduzir alguns pontos de vista diferentes dos defendidos por esse grupo.

O artigo é baseado nas experiências do autor ao trabalhar com cursos de graduação estreitamente relacionados à Álgebra Linear, por isso o próprio autor declara que deve ser entendido como especulações, que são essenciais ao se preparar para fazer um trabalho sério e uma tentativa de experimentar as extensões para Álgebra Linear.

O autor inicia destacando que as recomendações apresentadas pelo LACSG foram importantes, pois colocaram em evidência a necessidade de estudos em Álgebra Linear, a qual não apresenta um currículo bem sucedido em termos do que é aprendido pelos alunos após participarem de uma primeira disciplina sobre o assunto.

Dubinsky (1997) realça a necessidade de se investigar questões de exames e queixas de professores que lecionam a disciplina Álgebra Linear e, também, a necessidade de se documentar as inadequações e de se mostrar possíveis equívocos nessas disciplinas.

Outra declaração apresentada por Dubinsky (1997), ainda na introdução, é sobre a ênfase na representação de coordenadas de vetores e operações com matrizes, pois nos vinte e cinco anos em que realizou investigações em Matemática na área de Análise Funcional, esteve, a maior parte do tempo, preocupado com as representações dos elementos de um espaço vetorial como uma sequência infinita de coordenadas. Para ele,

> [...] este ponto de vista era estético, intuitivo, rico e produtivo. Portanto inicia com muita simpatia ao ponto de vista do LACSG, e é com profunda tristeza que considera que, do ponto de vista pedagógico, a sua abordagem é mal aconselhada (DUBINSKY, 1997, p. 4)[94].

[94] [..] this point of view was aesthetic, intuitive, rich, and productive. Therefore I begin with much sympathy for the point of view of LACSG, and it is with consider able heaviness of heart that I conclude that, from a pedagogical point of view, their approach is ill-advised.

Dubinsky (1997) descreve que Carlson (1993) apresentou os seguintes tópicos, como sendo centrais em Álgebra Linear, sendo os que geram dificuldades para os alunos:

> subespaços, o conjunto gerador de um subespaço, o subespaço gerado por um conjunto de vetores, dependência e independência linear, e vários aspectos de bases e dimensão. Exemplos de dificuldades por alunos também são dados com espaços linha e coluna de uma matriz, posto e nulidade de uma matriz e sua relação com os espaços linhas e colunas e espaços vetoriais de matrizes (e de funções) (p. 4)[95].

O autor acrescenta a esta lista a interpretação geométrica do uso de uma transformação linear e, assim, considera como sendo uma lista coerente.

Dubinsky (1997, p. 5) apresenta uma breve interpretação sobre as quatro razões relacionadas às dificuldades por alunos com subespaços, conjunto gerador/subespaço gerado, dependência linear (independência) entre vetores, apresentadas por Carlson (1993):

> 1) O curso é ministrado cedo demais e os alunos são muito pouco sofisticados. 2) As dificuldades têm a ver com os conceitos e os estudantes têm pouca experiência de aprendizagem com ideias diferentes dos algoritmos procedimentais mais fáceis. 3) Os alunos não têm experiência com o uso - muito menos a determinação - de diferentes algoritmos ao trabalhar com um conceito em diferentes contextos. 4) Conceitos são introduzidos sem ligação particular com os conceitos que os alunos já têm experiência[96].

Para o autor, essas razões são demasiadamente gerais e não permitem identificar caminhos para superar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes. Como exemplo,

> [...] se os alunos são muito pouco sofisticados e o curso deve ser dado mais tarde, não é suficiente apenas esperar? Será que estamos preparados para afirmar que mais um ano de cursos universitários irá melhorar significativamente a sofisticação matemática dos alunos de

[95] subspaces, the spanning set of a subspace, the subspace spanned by a set of vectors, linear dependence and independence, and various aspects of bases and dimension. Examples are also given of student difficulties with row and column spaces of a matrix, rank and nullity of a matrix and their relation to the row and column spaces, and vector spaces of matrices (and of functions).

[96] 1) The course is taught too early and the students are too unsophisticated. 2) The difficulties have to do with concepts and students have little experience with learning ideas as opposed to the less difficult computational algorithms. 3) Students are not experienced with the using - much less the determining – of different algorithms to work with a concept in different settings. 4) Concepts are introduced without substantial connection with students prior experience.

> graduação? [...] O efeito de mais um ano de curso é mais susceptível em conduzir menos alunos para a Matemática e, para aqueles que permanecem, uma convicção mais forte que a Matemática consiste, nas palavras de Ed Moise[97], em um repertório de padrões de comportamento imitativo (DUBINSKY, 1997, p. 5)[98].

Sobre o fato de as dificuldades estarem relacionadas aos conceitos ensinados e a falta de relação com os conhecimentos prévios, o autor afirma ser necessário uma proposta de intervenção a partir de uma análise teórica das noções elementares, que vai além da sugestão de trabalhar arduamente na manipulação de matrizes. Esse é o principal ponto de discordância de Dubinsky (1997), em relação à recomendação do LACSG, pois identifica um pressuposto implícito nessa proposta, o estudo das matrizes, como sendo mais "proveitoso". Para ele, quando

> nossos alunos exigem que o material de uma disciplina seja menos abstrato e mais concreto [...] estão realmente pedindo é para dar-lhes mais procedimentos operacionais que possam ser imitados [...] Nós professores, [...] lhes damos as receitas e as chamamos de aplicações (DUBINSKY, 1997, p. 6)[99].

O autor afirma que essa pode não ter sido a pretensão do LACSG, mas o preocupa o fato de algumas das soluções apresentadas permitirem interpretações indevidas e conduzirem alguns professores a armadilhas.

Para Dubinsky (1997), provavelmente, a intenção é que os procedimentos operacionais sejam usados para ajudar os alunos a compreenderem certas ideias importantes na Álgebra Linear, mas não há nenhuma indicação de como fazer isso acontecer e a abordagem apresentada pode conduzir o estudante, no máximo, a "[...] apreender a executar os procedimentos de manipulação de matrizes e pouco mais. Eu não vejo como as orientações dessas atividades vão ajudar a tornar a disciplina mais aplicada" (p. 7)[100].

[97] O autor faz referência à obra de Moise (1984).

[98] […] if the students are too unsophisticated and the course should be given later, is it enough just to wait? Are we prepared to assert that another year of college courses will significantly improve the mathematical sophistication of undergraduates? The reports we are receiving from national studies suggest otherwise […] The effect of another year of coursework is more likely to lead to fewer students taking mathematics and, for those that remain, a stronger conviction that mathematics consists of, in the words of Ed Moise, a repertoire of imitative behavior patterns.

[99] Our students demand that the material in a course be less abstract and more concrete […] often, what students are really asking is for us to give them more computational procedures they can imitate. […] We, the teachers, […] give them their recipes and call it applications.

[100][…] learn to perform the matrix manipulation procedures and little else. I do not see how these activities are going to help make the course more applications oriented.

Dubinsky (1997) apresenta como sendo grave o caso do estudante que consegue efetuar o produto entre duas matrizes, no qual executa um determinado procedimento, mas não consegue reconhecer a matriz como sendo um elemento pertencente a um determinado conjunto, que por sua vez pode ser manipulado como um número. Para o autor, a incompreensão da matriz como elemento pertencente a um conjunto é tão grave quanto "a dificuldade de ver um exemplo de um conjunto com duas operações binárias que satisfazem uma coleção de axiomas" (p. 7)[101].

Outro exemplo, apresentado pelo autor, é o do estudante que reconhece uma linha ou uma coluna de uma matriz, a compreende como sendo uma lista de números, mas não como um objeto em si, que pode ser considerado conjunto, juntamente com outros objetos.

Em relação ao conceito de dependência linear entre vetores, base de um espaço vetorial, subespaços e as operações com matrizes, Dubinsky (1997, p. 7) afirma que

> [..] há uma enorme lacuna - não matemática, mas pedagógica - [...]. Na minha opinião, não há nenhuma maneira para superar esse abismo pedagógico que não seja por meio da abstração. A proposta de todos esses cálculos apenas varre as dificuldades para debaixo do tapete. O que é necessário são algumas ideias, e não apenas sobre o como ser concreto, mas sobre como fazer os alunos irem do concreto para o abstrato [102].

Dubinsky (1997, p. 8) ressalta, também, que, no programa apresentado, a geometria é pouco abordada:

> [...] as duas únicas frases relevantes são um chamado para 'uma forte ênfase geométrica' e 'sugerindo que as ideias sejam motivadas através de exemplos geométricos'. Essas posições são admiráveis, mas muito gerais e não ajudam muito em sugerir o que deve realmente ser feito [103].

[101] […] the difficulty of seeing an example of a set with two binary operations as satisfying a collection of axioms.

[102] there is a huge gap - not mathematical, but pedagogical – […] In my opinion there is no way to bridge this pedagogical chasm other than through abstraction. Proposing all these calculations just sweeps the difficulties under the rug. What is needed are some ideas, not just about how to be concrete, but about how to get students to go from the concrete to the abstract.

[103] […] the only two relevant phrases are a call for 'a strong geometric emphasis' and suggesting that ideas be 'motivated using geometric examples'. These are admirable positions, but very general and not much help in suggesting what should actually be done.

Além disso, considera que, para, um curso de serviço, as aplicações devem ser incluídas na grade curricular e não apenas no conjunto de tópicos complementares,

> em particular, deve ser incluído mais sobre equações diferenciais. Eu diria que o espaço de solução de sistemas de equações diferenciais lineares são uma das áreas mais importantes de aplicações [...]. Incluindo este tema, seria necessário que fosse dada pelo menos alguma atenção aos espaços vetoriais de dimensão não finita. Além de, [...] aplicações de espaços vetoriais sobre outros corpos, além daquele dos reais, tais como $\mathbb{Z}_p$ (DUBINSKY, 1997, p. 8)[104].

As recomendações do CBMS

No relatório do CBMS (2012), vários autores apresentam considerações que devem sustentar as escolhas dos departamentos responsáveis pelos cursos de formação inicial de professores de Matemática nos Estados Unidos da América. Nos três primeiros capítulos desse relatório, são apresentadas recomendações gerais sobre a formação de professores de Matemática e nos três demais capítulos são apresentadas recomendações específicas à formação de professores para atuar em cada um dos segmentos: *elementary, middle e high school*. No Brasil, esses segmentos correspondem, respectivamente, ao Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Tucker et al. (2012), por exemplo, apresentam um conjunto de recomendações que devem permear a formação inicial desses professores, para eles é necessário explorar os conteúdos matemáticos, que serão objetos de ensino na escola, de forma que o licenciado em Matemática adquira confiança em relação a esses conteúdos e às possibilidades de abordagens que poderão ser usadas na escola.

Outra recomendação está relacionada às experiências com o raciocínio matemático, para Tucker et al. (2012) é fundamental que o licenciando desenvolva habilidades relacionadas à argumentação, à modelagem, à visualização de estruturas e à generalização. Além de o raciocínio matemático deve, também, fazer

[104] In particular, more should be included regarding differential equations. I would argue that solution spaces of systems of linear differential equations are one of the most important areas of applications [...]. Including this topic would require that at least some attention be paid to vector spaces which are not finite dimensional. Also, […] applications of vector spaces over fields other than the real numbers, such as $\mathbb{Z}_p$.

uso de estilos flexíveis e interativos de ensino, pois consideram que o licenciando precisa ir além dos conteúdos, precisa desenvolver habilidades que o permitam trabalhar com diversas estratégias pertinentes a cada conteúdo.

É recomendado, também, que o licenciado vivencie experiências que o permitam crescer profissionalmente após a formação inicial, por exemplo, participar de cursos de pós-graduação.

McCallum et al. (2012) abordam as características relacionadas ao Ensino Médio e às disciplinas que auxiliam na formação do professor, que irá atuar nesse segmento, com destaque à *Introdução à Álgebra Linear* que é uma das disciplinas consideradas pelos autores. Para eles, essa disciplina deve estar ancorada em espaços vetoriais sobre o corpo dos reais, por exemplo, o $\mathbb{R}^n$ e o $P_n(\mathbb{R})$, pois os polinômios permitem discutir questões relacionadas aos operadores lineares, diferenciação e integração.

McCallum et al. (2012) afirmam que também é possível fazer uso de aplicações e cita a regressão linear, o tratamento de imagens e os mecanismos de busca na web.

O currículo de Álgebra Linear deve incluir, também, "[...] operações com vetores e matrizes e a utilização de matrizes para resolver sistemas de equações"[105] (MCCALLUM et al., 2012, p. 57). Para os autores, o estudo de matrizes e o de álgebra matricial representam uma generalização importante do conceito de número e proporcionam uma oportunidade para o licenciando refletir sobre as propriedades das operações como regras gerais para uma manipulação algébrica.

As matrizes podem representar, também, transformações no $\mathbb{R}^3$, permitindo que o licenciando interprete geometricamente a relação entre as representações algébricas e geométricas.

São citados também os conceitos equação e função linear, para McCallum et al. (2012), esses conceitos são pertinentes ao Ensino Médio e podem propiciar momentos em que os licenciandos explorem as interpretações geométricas, assim como, busquem aprofundar a compreensão dessas noções para dimensões superiores.

[105] [...] operations on vectors and matrices and the use of matrices to solve systems of equations.

As recomendações da SBM e SBEM

Após a publicação, em 2010, dos Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2010), a Sociedade Brasileira de Matemática – SBM – e a Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM – produziram o Boletim XXI (SBEM, 2013) para apresentar o documento intitulado “A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/ SBM”.

O trabalho se deu nos anos 2011 e 2012 e teve como objetivo apresentar um panorama da situação das licenciaturas naquele período, além de algumas concepções referentes às relações existentes entre a formação e a prática docente escolar, por exemplo, o conhecimento específico, o perfil do formador e a estrutura do curso.

Os autores iniciam o texto afirmando que na Licenciatura em Matemática “o currículo precisa estar estreitamente articulado, ao longo de todo o processo de formação, com a prática docente escolar, destino profissional do licenciado” (SBEM, 2013, p. 5), por isso “[...] não pode separar o ‘que’ ensina do ‘como’ ensina” (SBEM, 2013, p. 5).

Em relação às disciplinas específicas, os autores afirmam que devem envolver “a aprendizagem de conceitos matemáticos avançados e a ressignificação de conceitos matemáticos elementares, de modo a contemplar tanto uma fundamentação e argumentação matemática, quanto sua prática profissional futura” (SBEM , 2013, p. 11-12). E ainda,

> [...] não basta simplesmente incluir os tópicos da matemática básica dentro do seu currículo a título de revisão conceitual, quando os ingressantes não dominam, em geral, os conceitos e os procedimentos matemáticos. O estudo dos conteúdos da matemática básica é necessário no currículo da licenciatura para suprir as lacunas no corpo de conhecimentos da disciplina que será o cerne da formação profissional de um professor, porém sua abordagem deve ser ampliada para que o futuro professor domine o conteúdo, sob o ponto de vista tanto da Matemática, como de um aluno da escola básica, o qual em suas etapas da escolaridade e amadurecimento deve aprender segundo os objetivos da Educação Básica (SBEM, 2013, p. 17-18).

Em relação ao ensino e à aprendizagem de Álgebra, os autores apresentam diversas considerações, destaco os argumentos relacionados a ideia de estrutura algébrica:

> um ponto de extrema importância no ensino de Álgebra (e no de Matemática em geral) é mostrar a fecundidade da própria ideia de estrutura, isto é, por trás de 'objetos' matemáticos, estão, no fundo, estruturas algébricas. Desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, o avanço da aprendizagem de números e da aritmética se baseia fundamentalmente nas estruturas algébricas dos conjuntos numéricos. É fundamental um aluno de Licenciatura em Matemática, não só saber, mas dominar as propriedades dos anéis, saber dar exemplos, contraexemplos, discuti-los e resolver exercícios com as propriedades pertinentes (SBEM, 2013, p. 26).

Em relação à Álgebra Linear, os autores afirmam que essa disciplina sistematiza a estrutura algébrica espaço vetorial sobre um determinado corpo, mas, tendo em vista o contexto escolar ao abordar os conceitos em Álgebra Linear, deve-se estabelecer, sobretudo, conexões com os conteúdos do Ensino Médio.

SBEM (2013) considera que no Ensino Médio se estudam funções afins e seus gráficos como retas num plano cartesiano, mas poucas vezes é abordado o conceito de linearidade, que pode estar presente ou observado em fenômenos ou experimentos.

Ainda no Ensino Médio, SBEM (2013) considera que os alunos aprendem a escrever a equação de uma reta e a estudar seus elementos, no entanto, poucas vezes "investigam a natureza linear de alguns fenômenos por meio de modelagem por regressão linear ou de erros de aproximação de um ajuste linear, ou ainda atentam para um relacionamento característico de natureza linear entre duas variáveis" (p. 29).

Outro conceito abordado no Ensino Médio, que pode ser explorado em Álgebra Linear, é o conceito matriz:

> poucos professores conhecem o significado da multiplicação de matrizes ou das operações sobre as linhas das matrizes do algoritmo de escalonamento para resolução de sistemas lineares. Os livros didáticos também não esclarecem, em geral, o significado dos determinantes de matrizes 2 x 2 ou 3 x 3 e exploram para além do seu uso na Regra de Cramer ou em alguns exercícios mecanizados (SBEM, 2013, p. 29).

Tanto o conceito de matriz como das transformações lineares, segundo os autores, devem ser abordados fazendo uso de elementos da "tecnologia digital, da robótica, da computação gráfica, etc." (SBEM, 2013, p. 29). Em relação às transformações lineares, devem-se enfatizar "aquelas entre espaços de dimensão finita, com exemplos em dimensões 2 e 3, e matrizes de transformações lineares" (SBEM, 2013, p. 30). Para os autores:

> Transformações como reflexão axial, reflexão pontual, rotação, projeção ortogonal, isometrias e homotetias, estudadas junto com suas matrizes e propriedades geométricas, formam conhecimento essencial do professor no ensino da geometria em nível básico. O professor não irá ensinar Álgebra Linear na escola básica, mas para que as recomendações curriculares sobre este tema não se restrinjam a atividades lúdicas sem interpretações, ele deverá saber os elementos que devem ser destacados nessas transformações e as razões para tal estudo (SBEM, 2013, p. 30).

E, ainda,

> [...] é desejável que a conexão entre a geometria e a álgebra seja contemplada, trazendo significados para os conceitos teóricos da disciplina, de modo a capacitar o professor no tratamento adequado do conteúdo curricular do Ensino Médio. Tópicos como sistemas de equações lineares gerais com interpretação geométrica do espaço de soluções em dimensão baixa, o conceito de espaços vetoriais, os conceitos de base e dimensão no caso finito, mudança de base relacionada com mudança de referencial, especialmente em dimensão baixa, são elementos que constroem uma ponte para o conteúdo escolar (SBEM, 2013, p. 29).

Em relação aos espaços gerados e combinação linear entre vetores, os autores consideram que

> a ideia de espaços gerados por combinações lineares é nova em relação ao currículo do Ensino Médio, mas ela está na base do pensamento sobre a linearidade de conceitos e fenômenos, e deve ser trabalhada de acordo, enfatizando os exemplos em dimensões baixas. Do mesmo modo, um estudo cuidadoso do determinante de uma matriz quadrada e sua interpretação geométrica em dimensões 2 e 3 é parte importante na formação do professor (SBEM, 2013, p. 30).

Já o estudo dos operadores lineares deve ser feito a partir da conexão com a Matemática da Educação Básica, isto é, "especialmente as isometrias e homotetias que dão significado geométrico, por exemplo, ao produto de matrizes no currículo nesse nível de ensino” (SBEM, 2013, p. 30).

Os autovalores, autovetores e diagonalização de operadores, para os autores,

> é um tópico que introduz o futuro professor às aplicações relevantes do mundo atual, com exemplos que podem ser compreendidos em nível de Ensino Médio. Por exemplo, a visualização de eixos ou de planos invariantes no plano ou espaço por transformações, como reflexão ou rotação, pode levar o licenciado a compreender o significado dos autovalores e autovetores de maneira concreta (SBEM, 2013, p. 30).

De acordo com os autores, esse tópico pode ser incluído num currículo da licenciatura por meio de uma abordagem que permita

> além de aplicações básicas na própria Matemática, como nas formas canônicas de cônicas, o trabalho com exemplos simples de aplicação em problemas contextualizados como, por exemplo, no tratamento de dados e informação como pesquisa na *web*, na economia ou nos problemas de engenharia; ou ainda, pode ser motivador para um professor de Ensino Médio saber que a transmissão de sinais por satélite usa o conceito de autovalores (SBEM, 2013, p. 30).

O produto interno, para os autores, “generaliza o produto escalar, e amplia o conceito de distâncias, comprimentos, medida de ângulos, ortogonalidade, projeções ortogonais e bases ortonormais, que possuem aplicação imediata nos problemas elementares de Física e também permitem conhecer outras geometrias não euclidianas” (SBEM, 2013, p. 30).

Os autores concluem afirmando que “a Álgebra Linear é também uma disciplina propícia para explorar o potencial didático das ferramentas tecnológicas e, nesse caso, os aspectos numéricos se tornam relevantes além da estrutura algébrica” (SBEM, 2013, p. 31). Por fim, consideram que

> o conhecimento de Álgebra Linear irá ajudar o professor na sala de aula, ao ensinar conteúdos da própria Matemática sabendo das aplicações em outras áreas, o que abre oportunidades para interação didática interdisciplinar, fundamentada em linguagem matemática (SBEM, 2013, p. 31).

Um segundo voo panorâmico sobre os resultados já apresentados

Nas pesquisas de Carlson et al. (1993), Dubinsky (1997), CBMS (2012) e SBEM (2013) foram apresentadas discussões sobre o currículo de Álgebra Linear. No que segue, evidencio os principais elementos e contribuições de cada uma dessas investigações em relação às noções que devem compor a disciplina Álgebra Linear e possíveis abordagens.

Matrizes

Carlson et al. (1993) afirmam que o desenvolvimento da disciplina Álgebra Linear deve ser orientado pelo uso das matrizes. No entanto, Dorier (2002), Dubinsky (1997) e Stewart (2008) alertam sobre as dificuldades que tal abordagem pode propiciar ao estudante no que se refere à compreensão das noções de Álgebra Linear.

Tal dificuldade não significa que não se devem abordar as questões relacionadas às matrizes, o que deve ser levado em consideração é como tal noção é trabalhada, pois uma abordagem focada estritamente em procedimentos para efetuar cálculos, possivelmente, não permitirá que o estudante desenvolva as ideias conceituais necessárias ao licenciado.

Afinal, nas recomendações do CBMS (2012), consta que o estudo de matrizes e álgebra matricial representam uma generalização importante do conceito de número e proporciona uma oportunidade para o licenciando refletir sobre as propriedades das operações como regras gerais para uma manipulação algébrica, assim como afirmou Dubinsky (1997).

Outro ponto, que penso merecer destaque, é o uso das matrizes para representar outras noções em Álgebra Linear, por exemplo, sistemas de equações lineares e as transformações lineares. Os autores do relatório do CBMS (2012) afirmam ser interessante que o licenciando utilize as matrizes para representar transformações no $\mathbb{R}^3$ de forma que compreenda as representações algébricas e geométricas.

Já, em SBEM (2013), os autores afirmam que o ensino da noção de Matriz deve se dar por meio de elementos da tecnologia digital, da robótica, da computação gráfica etc. Para eles, deve-se aproveitar o estudo das matrizes para explorar com o licenciando o significado da multiplicação de matrizes ou das operações sobre as linhas das matrizes do algoritmo de escalonamento para resolução de sistemas lineares.

Assim, penso que se em Álgebra Linear a noção de matriz fosse abordada não apenas por meio de procedimentos operacionais, mas, sim, como um objeto em si, que possui características intrínsecas, poderia contribuir na formação do professor de Matemática e talvez auxiliar em questões, como a apresentada por Camargo Junior (2010):

> como professor do Ensino Médio, sempre abordei o conteúdo de Matrizes segundo o modelo de ensino orientado ao uso de técnicas de algoritmos, de forma estanque e sem conexão com outros conteúdos, tendo por referência o livro didático que utilizava em minhas aulas. Considerava esse conteúdo fácil de ensinar, mas preocupava-me um questionamento feito pelos alunos do “para que serve?”, demonstrando que esta abordagem não estava sendo significativa para os alunos (p. 12).

Sistemas de equações lineares

Battagliolli (2008) concluiu que a noção de sistemas de equações lineares não é abordada adequadamente em livros didáticos do Ensino Médio, mesmo sendo uma noção que permite que o estudante trabalhe com a conversão de representações semióticas e explore situações problema.

Já, os autores do SBEM (2013) afirmam que a noção de sistemas de equações lineares deve ser abordada na disciplina Álgebra Linear, pois permite que o licenciando explore as representações utilizadas para sistemas de equações lineares homogêneas e estabeleça conexões com noções estudadas em Geometria Analítica e até mesmo noções da Educação Básica, por exemplo, vetores colineares e vetores coplanares (COSTA; CATARINO, 2007).

Além de permitir que o licenciando compreenda o processo de escalonamento de um sistema de equações lineares, por meio do uso de diferentes representações.

Determinante

A noção de determinante é citada por Carlosn et al. (1993) e SBEM (2013). Para os autores do artigo SBEM (2013), os livros didáticos do Ensino Médio não esclarecem, em geral, o significado dos determinantes de matrizes de ordem 2 (ordem 3) e o seu uso é basicamente para aplicar a Regra de Cramer ou em alguns exercícios mecanizados. Para eles, explorar a interpretação geométrica dos determinantes de matrizes de ordem 2 (ordem 3) é parte importante na formação do professor.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Dubinsky (1997) e CBMS (2012) citam a importância desse espaço vetorial em um curso de Álgebra Linear. Dubinsky (1997) afirma estar convencido das vantagens de representar os elementos de um espaço vetorial como uma sequência (in)finita de coordenadas.

Para Carlson et al. (1993), o $\mathbb{R}^n$ deve ser abordado como sendo um conjunto de n-uplas e não como um espaço vetorial. Em relação às operações adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar, não há a necessidade de comprovar formalmente todas as propriedades envolvidas.

No entanto, do conjunto de resultados, penso que abordar o $\mathbb{R}^n$ como espaço vetorial é de fato vantajoso para o licenciando, pois permite que seja discutida a questão da generalização que tem início com conceitos da Educação Básica e passa pela Geometria Analítica. Assim como permite estabelecer conexões entre noções tidas como distintas, por exemplo, a representação do conjunto solução de um sistema de equações lineares por meio de n-uplas.

O espaço vetorial das funções em $\mathbb{R}$

Tanto CBMS (2012), quanto SBEM (2013) consideram que no Ensino Médio se estudam funções afins e seus gráficos como retas num plano cartesiano, mas poucas vezes é abordado o conceito de linearidade, que pode estar presente ou observado em fenômenos ou experimentos.

Ainda, de acordo como SBEM (2013), no Ensino Médio os estudantes aprendem a escrever a equação de uma reta e a estudar seus elementos, no entanto, poucas vezes "investigam a natureza linear de alguns fenômenos por meio de modelagem por regressão linear ou de erros de aproximação de um ajuste linear, ou ainda atentam para um relacionamento característico de natureza linear entre duas variáveis" (p. 29). Para os autores, tais discussões devem estar presentes em Álgebra Linear.

Além disso, é um ambiente propício para explorar os operadores lineares: a diferenciação e a integração (CBMS, 2012).

Transformações Lineares

Dubinsky (1997), CBMS (2012) e SBEM (2013) destacam o estudo das transformações lineares, sobretudo, a interpretação geométrica do uso de uma transformação linear.

Em SBEM (2013), os autores afirmam que ao estudar transformações lineares deve-se enfatizar o uso de espaços de dimensão finita, com exemplos em dimensões 2 e 3, assim como o uso de matrizes para representar transformações lineares. Para eles:

> Transformações como reflexão axial, reflexão pontual, rotação, projeção ortogonal, isometrias e homotetias, estudadas junto com suas matrizes e propriedades geométricas, formam conhecimento essencial do professor no ensino da geometria em nível básico. O professor não irá ensinar Álgebra Linear na escola básica, mas para que as recomendações curriculares sobre este tema não se restrinjam a atividades lúdicas sem interpretações, ele deverá saber os elementos que devem ser destacados nessas transformações e as razões para tal estudo (SBEM, 2013, p. 30).

As noções citadas são algumas das essenciais em Álgebra Linear, outras noções até foram listadas pelos autores, mas não há desdobramentos em relação à abordagem a ser utilizada, por isso, não as apresentei.

O aporte teórico PMA

Nesta seção, destaco os aspectos relacionados ao Pensamento Matemático Avançado – PMA –, evidenciados por Dreyfus (1991), que permitem explorar a problemática apresentada neste trabalho, isto é, o interesse sobre esse referencial está subjacente à possibilidade de analisar as contribuições da disciplina Álgebra Linear, na formação do professor de Matemática da Educação Básica, ao cursar a licenciatura em Matemática.

O Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991)

Ao se discutir a respeito dos processos envolvidos nas construções de conhecimentos matemáticos, observam-se o pensamento matemático elementar e o Pensamento Matemático Avançado. Dreyfus (1991) afirma que a diferença entre esses processos de pensamentos matemáticos é tênue, sendo a complexidade de como se trabalha com a noção matemática, uma das características que os distinguem, pois considera que, embora muitos processos de Pensamento Matemático Avançado já estejam presentes no processo de Pensamento Matemático Elementar, a diferença entre eles pode ser percebida quanto à capacidade do indivíduo em apresentar definições e deduções formais.

Para Dreyfus (1991), construir um conhecimento teórico sobre o que ocorre na mente dos estudantes ao compreenderem um determinado conceito matemático é de suma importância, pois "os processos que o professor espera provocar nos estudantes não acontecem por eles próprios e quando acontecem, os estudantes não têm necessariamente consciência deles" (p. 25)[106]. Por isso, "não é suficiente, por exemplo, definir e exemplificar um conceito abstrato como o de espaço vetorial. Os estudantes precisam construir as propriedades de tal conceito por meio de deduções a partir da definição" (p. 25)[107].

De acordo com o autor, diferentemente dos exercícios 'padrão', refletir sobre sua experiência matemática é de particular importância na solução de problemas não triviais, pois

> [...] não é de se esperar, normalmente, que um estudante de matemática elementar pare, depois de ter resolvido um problema, e pense ou revise como ele resolveu o problema. Gostaríamos, no entanto, de ver isso acontecer com nossos estudantes de cursos mais avançados, em especial, com nossos professores do Ensino Médio (DREYFUS, 1991, p. 25)[108].

De acordo com o autor, em ambos os processos: o de pesquisa ou de aprendizagem,

> [...] o individuo tem que manipular mentalmente, investigar e descobrir mais sobre os objetos, sobre os quais seu conhecimento é muito parcial e fragmentado. Assim, tanto quanto o processo de pesquisa é extremamente complexo, o processo de aprendizagem correspondente também é. Esse processo possui a essência sobre o

[106] The processes the teacher hopes to provoke in the student do not happen by themselves nor, if they happen, are they necessarily conscious on the students part.
[107] It is not sufficient, for example, to define and exemplify an abstract concept such as vector space. Students must then construct the properties of such a concept through deductions from the definition.
[108] We would not usually expect an elementary math student to stop, after having solved a problem, and think or recount how he went about solving this problem. We would, however, definitely like to see much more of this in our advanced students and, in particular, in our high school teachers.

> que é o Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991, p.30)[109].

Assim, Dreyfus (1991) considera que o PMA abrange um grande número de processos que interagem entre si, por exemplo, representar, visualizar, generalizar, classificar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar. Todos esses processos estão presentes no processo de pesquisa de um matemático e precisam ficar evidentes, também, no processo de ensino.

Em relação aos processos relacionados à representação, Dreyfus (1991) apresenta três tipos: visualizar, alternar e interpretar[110] e modelar. Para ele, a representação por símbolos tem uma função importante e indispensável na Matemática moderna, no entanto, as vantagens de seus usos carregam também alguns perigos, pois

> os símbolos envolvem relações entre sinais e significados; eles servem para tornar o conhecimento implícito de alguém – o significado – explícito em termos de símbolos. Deve haver alguns significados associados com a noção antes que um símbolo para essa noção possa ter alguma utilidade; no discurso educacional do ensino de matemática, isso é bastante negligenciado levando ao fenômeno bem conhecido do 'símbolo intrometido' (p. 30) [111].

Um exemplo, em Álgebra Linear, é o do estudante que compreendeu a definição de subespaço vetorial, espaço vetorial gerado e faz uso adequado da notação $[A]$ para representar um subespaço vetorial gerado pelo conjunto A (finito), pois o estudante que não compreendeu bem os conceitos envolvidos, por exemplo, pode apresentar dificuldade no uso dos colchetes, afinal, no Ensino Médio e, até mesmo, em disciplinas como Cálculo, o colchete é um símbolo que, também, pode

[109] [...] in both cases the individual has to mentally manipulate, investigate and find out about objects, about which his knowledge is very partial and fragmented. Thus, just as the research process is extraordinarily complex, so is the corresponding learning process. It contains the gist of what advanced mathematical thinking is all about.

[110] Apesar de Dreyfus (1991) utilizar o termo "*translating*" (traduzindo) o GPEA considera ser esse um processo dinâmico em que o indivíduo deve alternar as representações e interpretar o uso dessas representações. Assim, assumo o termo *traduzir* como sendo *alternar e interpretar* (MACHADO; BIANCHINI, 2013).

[111] […] symbols involve relations between signs and meanings; they serve to make a person's implicit knowledge - the meaning - explicit in terms of symbols. There must be some meaning associated with a notion before a symbol for that notion can possibly be of any use; in the educational discourse of theaching mathematics, this is too often overlooked leading to well know phenomenon of 'symbol pushing'.

ser utilizado para representar intervalos reais, isto é, utiliza-se o mesmo símbolo para representar objetos distintos.

Ainda sobre as representações, o autor discute que, por exemplo, a noção de função que um estudante possui pode estar limitada ao processo (operacional ou aplicação), enquanto a de um professor ensinando integral indefinida pode ser a função que consta da integral como um objeto a ser transformado. Para ele, tais discrepâncias levam facilmente a situações nas quais os estudantes apresentam dificuldades de compreender seus professores.

Assim, Dreyfus (1991) considera insuficiente afirmar que representar um conceito “significa gerar uma instância, um espécime, um exemplo, uma imagem dele” (p. 31)[112], pois “[...] não especifica se a instância gerada é simbólica ou mental, nem indica o que ‘gerar’ significa em termos de processo pelo qual as representações mentais surgem e como elas se desenvolvem” (p. 31)[113]. Para o autor,

> uma representação simbólica é externalizada escrevendo ou falando, em geral com o objetivo de tornar a comunicação do conceito mais fácil. Uma representação mental, por outro lado, se refere a um esquema interno ou estrutura de referência que uma pessoa usa para interagir com o mundo externo (p. 31)[114].

O autor cita, como exemplo, o pensar sobre um espaço vetorial que para alguns pode fazer referência a ‘ver setas’ e ser capaz de lidar com bases, transformações etc. Já, outros, poderiam recorrer as n-uplas de números ou símbolos que satisfazem axiomas.

O processo de visualização

Segundo Dreyfus (1991), a visualização tem um papel essencial no trabalho de muitos matemáticos eminentes, pois é um processo pelo qual as representações podem vir a ser. Para ele, as representações mentais são criadas na mente, sendo

[112] To represent a concept, then, means to generate an instance, specimen, example, image of it.
[113] […] it does not specify whether the generated instance is symbolic or mental, nor does it indicate what 'generate' means in terms of the processes by which mental representations come into existence and how they develop.
[114] A symbolic representation is externally written or spoken, usually with the aim of making communication about the concept easier. A mental representation, on the other hand, refers to internal schemata or frames of reference which a person uses to interact with the external world.

que uma pessoa pode vir a ter uma ou várias representações mentais concorrentes para um mesmo conceito matemático.

Dreyfus (1991) destaca que "várias representações mentais para o mesmo conceito podem complementar uma a outra e eventualmente podem ser integradas em uma única representação desse conceito" (p. 32)[115], estando esse processo de integração relacionado à abstração.

O autor declara ser importante ter muitas representações de um conceito, mas, apenas a existência delas por si próprias não é suficiente para permitir o uso flexível do conceito na resolução de problemas. Para Dreyfus (1991), um processo de representação pode ser considerado bem desenvolvido quando o indivíduo é capaz de articular essas representações fortemente e corretamente, isto é, o indivíduo é capaz de passar de uma representação de um conceito matemático para outra.

Um exemplo pode ser observado nas falas de Daniel, um dos participantes, entrevistados por Prado (2010).

Prado (2010) apresentou aos seus entrevistados um diálogo fictício (Quadro 1) envolvendo um professor e quatro alunos. Nesse diálogo, um dos alunos questiona o professor, que transmite a questão à classe. A, B, C e D são as falas dos alunos e P a do professor.

Quadro 1: roteiro de entrevista

A – Professor, esse conjunto $\{2, 3x, 4x^2\}$ é base do conjunto dos polinômios de grau 2? P – (dirigindo-se à classe) O que vocês acham? B – É sim! Porque é o maior conjunto LI (linearmente independente) de $P_2(\mathbb{R})$. C – É. Porque é o menor conjunto de vetores que gera todo esse espaço. A – O quê? D – É uma base sim, pois é um conjunto de vetores linearmente independentes e gera esse espaço.

Fonte: Prado (2010, p. 92)

[115] Several mental representations for the same concept may complement each other and eventually may be integrated into a single representation of that concept.

Foi solicitado que Daniel avaliasse o diálogo e argumentasse sobre as falas dos alunos e do professor. Prado (2010) conta que Daniel pegou o roteiro com a situação, leu e pensou em cada item e após um bom tempo disse:

> a questão que o aluno fez não me parece pertinente, pois isso aqui (apontando para o conjunto de vetores) não é uma base do polinômio de grau dois [...]. Agora se o aluno tivesse dito ser base de um polinômio de grau menor ou igual a dois, aí sim! (PRADO, 2010, p.142).

Penso que possivelmente Daniel partiu da representação algébrica, fez uso de uma estrutura de referência interna, associou os conceitos espaço vetorial, conjunto gerador e base para, então externalizar que aquele conjunto não poderia ser uma base para o conjunto anunciado.

O processo de alternar e interpretar

Um processo que está relacionado à representação é o de alternar e interpretar, isto é, o ato de passar de uma formulação de uma sentença matemática ou problema para outra(o). Como exemplo, o autor cita os problemas aplicados que exigem a compreensão de um determinado contexto.

Um exemplo de situação, em que o estudante poderá recorrer ao processo alternar e interpretar, é observado, ainda, no recorte de Prado (2010), pois Daniel, após apresentar argumentos sobre a questão levantada pelo estudante, prosseguiu com a análise do diálogo, assumindo que o conjunto dado era uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois:

> o **aluno B** que disse ser uma base, pois é o maior conjunto LI. A resposta está correta, apesar de ele não ter levado em consideração se o conjunto gera ou não o $P_2(\mathbb{R})$. Aparentemente, ele tem implícito o fato de que se um conjunto LI é o maior que ele consegue obter no espaço, vai gerar esse espaço (PRADO, 2010, p. 143).

Daniel continua:

> o **aluno C**, respondeu de maneira parecida ao **aluno B**; no entanto, diferem, pois ele não pensa no maior LI, e, sim, no menor conjunto possível que gera o espaço, ou seja, ele pensou na menor quantidade de elementos necessários para gerar todo esse espaço. O que não deixa de ser uma base! [...] os **alunos B, C e D**, disseram

> noções de base distintas, estando todas corretas. No entanto, a do **aluno D** é a mais comum de se encontrar nos livros de Álgebra Linear [...]. No caso do maior conjunto LI, temos que levar em consideração que o aluno conhece a dimensão, assim, um conjunto de vetores LI que tem a mesma dimensão do espaço, obviamente, é base. A mesma coisa com o **aluno C**, pois no item C, o aluno já tem a ideia de LI; no entanto a ideia de ser o menor gerador possível lhe permite, no caso de ser um conjunto LD, tirar um elemento... Não lembro o nome, mas sei que existe um teorema que garante que se tirarmos um vetor LD, o conjunto de vetores tomado, continuaria gerando o espaço (PRADO, 2010, p. 143).

Penso que Daniel tem construídas várias representações mentais para a noção de base de um espaço vetorial como sendo: um conjunto maximal linearmente independente; um conjunto minimal gerador associado ao conceito de dimensão; um conjunto gerador linearmente independente. Isto é, Daniel dá evidências de ter diferentes representações mentais para o conceito base de um espaço vetorial e, ainda, consegue integrá-las e percebê-las como sendo uma única representação no momento em que precisou argumentar sobre um espaço vetorial que não é elementar.

Outro exemplo é observado em Anton e Busby (2006, p. 549), quando solicita que o estudante "esboce figuras apropriadas para mostrar que uma reta em $\mathbb{R}^2$, que não passa pela origem, não satisfaz nenhum dos axiomas de fechamento de espaço vetorial".

O processo de modelar

Para Dreyfus (1991), o termo modelagem faz referência tipicamente a encontrar uma representação matemática para um objeto ou processo não matemático. Para ele, modelar significa

> construir uma estrutura ou teoria matemática que incorpore as características essenciais do objeto, sistema ou processo a ser descrito. O modelo dessa estrutura ou teoria pode então ser usado para estudar o comportamento do objeto ou processo que foi modelado (p. 34)[116].

[116] [...] constructing mathematical structure or theory which incorporates essential features of the object, system or process to be described. This structure or theory, the model, can then be used in order to study the behavior or the object or process being modelled.

Para o autor, modelar a situação ou o sistema faz referência ao objeto físico e o modelo, ao objeto matemático, isto é, na representação, o objeto a ser representado é uma estrutura matemática e o modelo, uma estrutura mental. Por isso, Dreyfus (1991) considera que

> a representação mental está relacionada ao modelo matemático, como o modelo matemático está relacionado com o sistema físico. Cada um é uma versão parcial do outro. Cada um reflete alguma, mas não todas as propriedades do outro. E cada um aumenta a capacidade da pessoa em manipular mentalmente o sistema sob consideração (p. 34)[117].

Um exemplo, é a Lei de Hooke, na Física, que segundo Anton e Busby (2006), pode ser modelada por progressão direta, pois “segue dessa lei que um peso de x unidades suspenso por uma mola alonga a mola a partir do seu comprimento natural por uma quantidade y que é diretamente proporcional a x” (p. 272).

O processo da abstração

Para Dreyfus (1991), a abstração é um dos processos mais importantes, pois o estudante que desenvolve a habilidade de fazer abstração de situações matemáticas, conscientemente, atinge um nível avançado do PMA; para o autor, “alcançar essa capacidade de abstrair pode bem ser o objetivo único mais importante da educação matemática avançada” (p. 34)[118].

Como exemplo de um processo que envolve a abstração, o autor cita a transição do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ à noção de um espaço vetorial sobre o corpo dos números reias, pois, um indivíduo precisa ser capaz de conceber o objeto "vetor" puramente em termos de suas relações com outros objetos semelhantes ou diferentes (vetores ou escalares), e aceitar que o objeto em si não é especificado por quaisquer propriedades intrínsecas. Desta forma, ao considerar apenas essas relações, o indivíduo poderá tirar conclusões que serão válidas em geral, independentemente das propriedades intrínsecas específicas dos vetores.

---

[117] [...] the mental representation is related to the mathematical model as the mathematical model is related to physical system. Each is a partial rendering of the other. Each reflects some (but not all) properties of the other. And each enhances one's capacity to mentally manipulate the system under consideration.

[118] Achieving this capability to abstract may well be the single most important goal of advanced mathematical education.

Para o autor, o processo de abstração está intimamente ligado à generalização e o uso de sínteses, pois considera que a natureza geral dos resultados que podem ser obtidos e a realização de sínteses são os principais incentivos para a abstração.

O processo de generalização

Generalizar, de acordo com Dreyfus (1991), é com base nas particularidades, o indivíduo poder induzir e estender características comuns a um domínio de validade maior.

Um exemplo é o do estudante que compreende que a $dim(\mathbb{R}) = 1$, $dim\,(\mathbb{R}^2) = 2$ e $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e consegue generalizar e concluir que $dim\,(\mathbb{R}^n) = n$.

O processo de sintetizar

Para Dreyfus (1991), "sintetizar significa combinar ou compor partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade. Esse todo, então, frequentemente corresponde a mais que a soma das partes" (p. 35)[119]. Como exemplo, o autor cita que, em Álgebra Linear, os estudantes aprendem um número de fatos isolados sobre a ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformação de bases, soluções de sistemas de equações lineares etc. E, mais tarde, no processo de aprendizagem, todos esses fatos, antes não relacionados, emergem em uma única figura, na qual eles estão comprimidos e interrelacionados. Esse processo de fusão em uma única figura é uma síntese.

Como exemplo, existem as definições, pois qualquer definição traz as características da síntese. Observe que ao definir a noção transformação linear, o estudante necessita combinar a noção de espaço vetorial e função, isto é, sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma transformação $T: U \to V$ é chamada linear se $\forall u, v \in U$, $T(u + v) = T(u) + T(v)$, e ainda, $\forall u \in U$, $\forall \alpha \in R$ $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Dreyfus (1991) considera que a prática da sala de aula muitas vezes não atribui ênfase ao processo de síntese, pois

> enquanto os detalhes são explicados durante bastante tempo pelo professor e exercitados pelos estudantes, pouca ou nenhuma

[119] [...] synthesize means to combine or compose parts in such a way that they form a whole. This whole then often amounts to more than the sum of its parts.

> atividade é designada para levar o estudante a sintetizar diferentes aspectos de um conceito, e ainda menos de diferentes conceitos em um mesmo domínio ou ainda em diferentes domínios (p. 36)[120].

O autor discute que um professor até apresenta resumos que incluem sínteses nas quais estabelece conexões, relações etc. No entanto, o fato de ter sido feito pelo professor, faz com que o aluno construa a ideia de a síntese ser necessária para “o matemático” e não para o estudante como ferramenta para resolver problemas.

Segundo Dreyfus (1991), para o estudante fica a percepção de não necessitar desse elemento para uma avaliação, isto é, os estudantes,

> [...] especificamente, do Ensino Médio, que ‘vão bem’ em Matemática, acreditam que resolver um problema de Matemática deve levar tipicamente um minuto, e nunca mais que dez; eles também pensam que a memorização é extremamente importante para o sucesso em Matemática e que há muito pouca relação entre as diferentes disciplinas de Matemática [...] Novamente, mesmo que a síntese esteja na mente do professor, ela infelizmente não acontece na do estudante (p. 36)[121].

Dreyfus (1991) afirma que a natureza do processo mental envolvido na abstração é, no entanto, muito diferente da generalização e da síntese. Para ele,

> abstrair é, antes de tudo, um processo *construtivo* – construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Este processo é dependente do isolamento das propriedades adequadas e relações. Requer a capacidade de deslocar a atenção dos próprios objetos para a estrutura de suas propriedades e relações. Essa atividade construtiva mental, por parte do aluno, é fortemente dependente da atenção do aluno, a ser focalizada sobre essas estruturas, que devem fazer parte do conceito abstrato, e desenhadas longe daqueles que são irrelevantes no contexto a que se destinam; a estrutura torna-se importante, enquanto detalhes irrelevantes são

[120] while the details are explained at length by the teacher and exercised by the student, few if any activities are designed to lead the student to synthesize different aspects of a concept, and even less different concepts within a domain or even different domains.

[121] [...] specifically high school students who do well in mathematics, believe that solving a mathematics problem should typically take one minute, and never more than ten; they also think that memorizing is extremely important for success in mathematics and that there is little relationship between the different mathematics courses [...] Again, even if synthesis may be in the teacher's mind, it is sorely lacking from the student's.

> omitidos, reduzindo a complexidade da situação (p. 37, itálico do autor)[122].

Dreyfus (1991) considera que a representação e a abstração são processos complementares, em direções opostas, isto é, “por um lado, um conceito geralmente é abstraído de várias das suas representações, por outro lado, as representações são sempre representações de um conceito mais abstrato” (p. 38)[123]. Para ele,

> [...] o pensamento de muitos matemáticos e estudantes de matemática é reforçado se eles são capazes de se colocarem mentalmente em uma representação particular, por exemplo, uma visual. É ainda mais reforçada, quando eles são capazes de usar várias representações em paralelo. Novamente, há uma complementaridade, dessa vez entre os aspectos matemáticos e cognitivos de representar estruturas matemáticas (p. 39)[124].

Ambas complementaridades, entre uma abstração e a representação e entre as representações mentais e matemáticas, segundo Dreyfus (1991), podem ser e têm sido submetidas à didática nos processos de aprendizagem. Dessa forma, o autor considera que os processos de aprendizagem podem, então, ser vistos como compostos por quatro fases: uso de uma representação única; uso de mais de uma representação em paralelo; estabelecimento de ligações entre as representações paralelas; integração entre representações e mudança flexível entre elas.

Além dos processos já citados, Dreyfus (1991) destaca que eles são somente alguns dentre vários processos que pertencem ao PMA, pois a essa lista devem incluir a intuição, a validação, a descoberta, a prova, a definição e outros.

---

[122] Abstracting is first and foremost a *constructive* process - the building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects. This process is dependent on the isolation of appropriate properties and relationships. It requires the ability to shift attention from the objects themselves to the structure of their properties and relationships. Such constructive mental activity on the part of a student is heavily dependent on the student's attention being focussed on those structures which are to form part of the abstract concept, and drawn away from those which are irrelevant in the intended context; the structure becomes important, while irrelevant details are being omitted thus reducing the complexity of the situation.

[123] […] on the one hand, a concept is often abstracted from several of its representations, on the other hand representations are always representations of some more abstract concept.

[124] The thinking of many mathematicians and mathematics students is enhanced if they are able to place themselves mentally in a particular representation, e. g. a visual one. It is even more enhanced, when they are able to use several representations in parallel. Again, there is a complementarity, this time between the mathematical and the cognitive aspects of representing mathematical structures.

Sobre a intuição, Dreyfus (1991) descreve que é o processo que ocorre "imediatamente da cognição direta, sem evidência de pensamento racional" (p. 40)[125]. Já, a validação é o ato de "utilizar recursos para convencer alguém de que um resultado, de fato, responde corretamente à questão que foi feita. Um caminho útil de verificação é usar um procedimento inverso" (p. 40)[126].

Para Dreyfus (1991),

> comumente, a verificação não é vista pelo estudante como uma parte essencial da atividade matemática. Embora a verificação possa lhe dar muita segurança, a maioria dos estudantes parece não estar muito interessada nessa segurança. Isto pode e deve ser modificado pela transferência de mais responsabilidade pelo processo de aprendizagem do professor para o estudante [...] (p. 40-41) [127].

Tecendo considerações sobre os resultados de pesquisas

As licenciaturas são responsáveis pela formação dos professores da Educação Básica e, assim como fez Gatti, Barreto e André (2011), atribuo às licenciaturas o dever de fornecer condições ao licenciando de "confrontar-se com problemas complexos e variados, estando capacitado(a) para construir soluções em sua ação, mobilizando seus recursos cognitivos e afetivos" (p. 93).

Assim, penso que a disciplina Álgebra Linear pode vir a ser um espaço em que o licenciando articule as noções abordadas dessa disciplina com aquelas da Educação Básica. Não estou limitando o estudo em Álgebra Linear às necessidades da Educação Básica, mas, sim, defendendo que o professor formador proponha situações, as quais permitam que o licenciando desenvolva o pensamento matemático, para que, em sua atuação profissional, tenha condições de correlacionar o saber científico ao saber pedagógico, como sugere Pires (2011).

Por isso, concordo com Dreyfus (1991), quando afirma que o professor da Educação Básica deve, após ter resolvido um problema, parar e refletir ou, até mesmo, revisar as estratégias utilizadas para resolvê-lo, pois essa ação pode

[125] […] by immediate direct cognition without evidence of rational thought.
[126] […] taking actions to convince oneself that a result indeed does answer the question that was asked, and does answer it correctly. One useful way of checking is to use an inverse procedure [...]
[127] All too often, checking is not seen by students as an essential part of mathematical activity. Although checking could give them a lot of security, most students appear not to be very interested in this security. This could and should be changed by transferring more of the responsibility for learning processes from the teacher to the student […].

permitir a compreensão de que o conhecimento construído por ele é, de fato, parcial e fragmentado e o uso dos processos do Pensamento Matemático Avançado pode permitir que concatene esses objetos fragmentados, para obter uma solução do problema.

Penso que o licenciando, ao compreender os processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado, poderá refletir sobre as ações futuras, realizadas por ele, por exemplo, ao planejar situações para estudantes da Educação Básica.

Machado e Bianchini (2013), que investigaram os possíveis aportes do conhecimento sobre os processos do PMA para a reflexão do professor sobre seu próprio saber matemático, descreveram que

> os resultados desta pesquisa fornecem indícios de que o conhecimento dos processos do PMA propicia o aprofundamento da reflexão do professor sobre seu saber matemático. Essa reflexão, por sua vez, pode levar o professor a criar situações nas quais esses processos podem ser desenvolvidos e reconhecidos por seus alunos (p. 603).

A partir dessas considerações, assumo os processos de representação e a abstração, conforme apresentados por Dreyfus (1991), como sendo norteadores em Álgebra Linear e apresento como parte do **objetivo da disciplina, fazer com que o licenciando desenvolva esses processos, ao construir as noções elementares, que sustentam a Álgebra Linear**.

Penso, também, que as disciplinas, as quais envolvem noções específicas de Matemática, assim como afirmou Moreira (2012), devem romper o “3+1”, nesse sentido, concordo com Silva (2011), ao afirmar que disciplinas de formação Matemática da licenciatura como disciplinas de Educação Matemática:

> teriam como característica levar o discente a olhar para os conteúdos matemáticos enquanto elementos que são parte e não o objetivo único da formação do professor, e buscar nesses conteúdos ‘portas” para que os futuros professores desenvolvam certas noções fundamentais e importantes à sua formação matemática (p. 6).

Considero, então, que parte do **objetivo da disciplina Álgebra Linear é fazer com que o licenciando construa as noções matemáticas envolvidas como elementos que são parte e não os únicos a serem abordados na disciplina, isto**

é, o professor formador deve estabelecer conexões entre as noções matemáticas e a interface pedagógica, relacionadas a essas noções.

Sobre a lista das possíveis razões relacionadas às dificuldades por estudantes de Álgebra Linear, comentadas por Dubinsky (1997), destaco o fato de os conceitos ensinados não terem relação com os conhecimentos prévios, estabelecer essa relação é uma das orientações apresentadas em Brasil (2001a) e Brasil (2001b).

Nos dados do Quadro 2, sintetizo as principais dificuldades relacionadas à Álgebra Linear, evidenciadas por Thomas et al. (2012).

Quadro 2: Síntese das dificuldades evidenciadas em Thomas et al. (2012)

Autor(es)	Dificuldades evidenciadas
Harel e Kaput (1991)	- Desenvolver a compreensão do que os símbolos representam conceitualmente é crucial em Álgebra Linear.
Hillel (2000)	- As representações geométricas e algébricas podem ser obstáculos para a compreensão das noções de Álgebra Linear.
Britton e Henderson (2009)	- A transição entre o formalismo e o uso de representações algébricas presentes nos problemas propostos aos estudantes não parece ser natural.
Corriveau (2009)	- A delegação de parte do controle de validade e significado para um processo algoritmo de procedimentos e raciocínios conduz a uma perda de controle e sentido por parte dos estudantes.
Wawro, Sweeney e Rabin (2011)	- O uso da intuição pode vir a ser problemática ou poderosa no desenvolvimento de noções de Álgebra Linear.
Dorier et al. (2000)	- O pouco espaço para a teoria dos conjuntos e lógica elementar conduz a dificuldades ao trabalhar com os aspectos formais da Álgebra Linear.

Fonte: o pesquisador

Em relação às representações

As questões relacionadas às representações utilizadas em Álgebra Linear permeiam todo esse capítulo, para Machado e Bianchini (2013), é justamente por meio de abstrações e uso de representações que o indivíduo “pode se deslocar de um nível de detalhe a outro, conseguindo assim manejar a complexidade” (p. 592). E, ainda, “tais processos são indissociáveis e ocorrem dialeticamente” (p.592).

Por isso, considero que a compreensão do que os símbolos representam conceitualmente é, com efeito, verdadeiramente crucial em Álgebra Linear e ela acontece quando o sujeito utiliza “registros compartilhados como da escrita, do desenho, da fala, dos gestos e outros” (MACHADO; BIANCHINI, 2013, p. 593), pois

> para que um indivíduo tenha sucesso na matemática, é desejável que ele possua uma rica representação mental dos conceitos. Uma representação é rica se ela tem vários aspectos articulados do conceito. Por outro lado, uma representação é pobre, se possui poucos elementos que permitem a flexibilidade na resolução de problemas. (MACHADO; BIANCHINI, 2013, p. 593)

Portanto, **considero fundamental que, em Álgebra Linear, o licenciando faça uso consciente de diversas representações para os objetos. Assim como, faça uso do processo alternar e interpretar essas representações.**

Em relação ao formalismo matemático

A Álgebra Linear, conforme Dorier (1990; 1997; 2002), é uma disciplina que evidencia o movimento da Matemática moderna, por isso, questões relacionadas ao formalismo matemático são tão presentes.

O formalismo vai desde a simbologia utilizada até a apresentação de demonstrações e, como considera CBMS (2012), é importante que o licenciado tenha vivenciado, em sua formação inicial, momentos em que é conduzido a demonstrar a validade de resultados matemáticos, por isso considero que na disciplina Álgebra Linear o licenciando seja apresentado a situações que lhe permitam: **perceber o significado do rigor dedutivo num processo de demonstração, desenvolver habilidades para lidar com sistemas axiomáticos, assim como, empregar procedimentos indutivos em resolução de problemas.**

Ainda nesse sentido, retomo o relatório CBMS (2012) e Dubinsky (1997) que, por exemplo, descrevem ser o estudo de matrizes uma oportunidade para o licenciando refletir sobre as propriedades das operações como regras gerais para uma manipulação algébrica. SBEM (2013) apresentou outro exemplo, isto é, a importância de o licenciando justificar o procedimento utilizado no escalonamento de um sistema de equações lineares.

Assim, considero importante que, em Álgebra Linear, o licenciando **faça uso de princípios indutivos para justificar procedimentos matemáticos utilizados no ensino de Matemática na Educação Básica**, isto é, o licenciando deve ser conduzido a observar as particularidades e, a partir delas, buscar sistematizações e generalizações válidas para um campo mais amplo. Outra consideração importante é que Álgebra Linear **inicia a discussão sobre as estruturas algébricas**, pois a noção de Espaços Vetoriais sustenta toda essa disciplina.

Em relação às noções da Educação Básica

A Álgebra Linear permite que o licenciando **revisite noções da álgebra elementar**, por exemplo, sistema de equações lineares, matriz, determinante e função. E **revisite noções da geometria elementar**, por exemplo, vetor, rotação, reflexão, homotetia, entre outras.

Em síntese, considero que, em Álgebra Linear, o licenciando pode: ao construir as noções elementares de Álgebra Linear, desenvolver processos relacionados ao Pensamento Matemático Avançado; construir as noções matemáticas envolvidas como elementos que são parte e não os únicos a serem abordados na disciplina; fazer uso consciente de diversas representações para os objetos, assim como, fazer uso do processo alternar e interpretar para essas representações; perceber o significado do rigor dedutivo num processo de demonstração, desenvolver habilidades para lidar com sistemas axiomáticos, empregar procedimentos indutivos em resolução de problemas; fazer uso de princípios indutivos para justificar procedimentos matemáticos utilizados no ensino de Matemática na Educação Básica; iniciar a discussão sobre as estruturas algébricas; revisitar noções da álgebra elementar; revisitar noções da geometria elementar.

Com as considerações apresentadas, no próximo capítulo, descrevo a escolha metodológica e os procedimentos adotados nesta pesquisa.

CAPÍTULO 4

ESCOLHAS METODOLÓGICAS

A realidade objetiva nunca pode ser captada. Podemos conhecer algo apenas por meio das suas representações.
(DENZIN; LINCOLN, 2010, p. 19)

Neste capítulo, baseado principalmente em Denzin e Lincoln (2010), tenho como objetivo descrever a abordagem metodológica adotada nesta pesquisa, os métodos de coleta de dados e os procedimentos para a coleta de dados.

Para justificar a escolha da abordagem metodológica adotada, trago os objetivos desta pesquisa, são eles: compreender a Álgebra Linear ensinada para a Licenciatura em Matemática como um saber voltado para a formação do professor de Matemática que atuará na Educação Básica e, buscar elementos e possibilidades para ressignificar a Álgebra Linear na formação inicial desse professor, concebendo um conjunto de conhecimentos, em Álgebra Linear, necessário para fundamentar a Álgebra a ser ensinada na Educação Básica.

A abordagem metodológica adotada

Entendo que, na busca da compreensão e nas escolhas por caminhos que permitam alcançar esses objetivos, será necessário me debruçar sobre diferentes fontes de dados que poderão conter elementos a serem analisados e articulados de forma coerente.

Assim, baseado em Denzin e Lincoln (2010), caracterizo esta pesquisa como sendo uma pesquisa qualitativa, isto é, aquela que "envolve uma abordagem naturalista, interpretativa, para o mundo" (p. 17), no qual os pesquisadores "estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem” (p. 17) e, ainda, ao fato desse campo de pesquisa ser “[...] repleto de criatividade, de entusiasmo, de efervescência intelectual, de influências de outras áreas, de diálogos catalíticos e do predomínio de uma sensação de participação em uma revolução viva” (p. 364).

Nesta pesquisa, o cenário natural pode ser caracterizado devido ao fenômeno investigado ser a Licenciatura em Matemática em sua dinâmica e estrutura, mais especificamente, a disciplina Álgebra Linear, pertencente ao conjunto mínimo obrigatório de disciplinas ofertadas em qualquer Licenciatura em Matemática, devidamente autorizada e reconhecida pelo Ministério da Educação no Brasil (BRASIL, 2003).

Nesse contexto, cabe ao pesquisador identificar quais as fontes e quais os elementos podem ser evidenciados a partir das múltiplas vozes envolvidas, por isso, é, também, uma pesquisa interpretativa.

A tarefa de determinar as variáveis envolvidas neste estudo não é simples, pois ao considerar o currículo de Álgebra Linear no contexto da Licenciatura em Matemática será necessário ter o olhar atento às várias vozes, por exemplo, as diretrizes curriculares, o projeto pedagógico de cada instituição, a ação do professor que leciona a disciplina na licenciatura em Matemática e sua área de atuação, a ementa proposta para a disciplina, o livro didático adotado por esse professor formador, a ação do licenciando durante a formação inicial, sobretudo, enquanto aluno regular na disciplina Álgebra Linear, entre outras.

Somando-se a isso, entendo, também, que, ao assumir a posição de pesquisador qualitativo, será necessário ter uma postura próxima da retratada por Denzin e Lincoln (2010), isto é, o pesquisador dentro da analogia é um *bricoleur* metodológico, ou seja, “[...] um artista, um confeccionador de colchas, um artesão habilidoso, um elaborador de montagens e de colagens” (p. 363) que deve ter a habilidade de “entrevistar, observar a cultura material, pensar dentro dos limites dos métodos visuais e ultrapassando esses limites; [...] fazer investigações com base em textos; construir testemunhos utilizando entrevistas [...]” (p. 364).

No que segue, apresento as escolhas dos métodos de coleta de dados e procedimentos adotados para a análise e apresentação dos resultados.

O método e os procedimentos para a coleta e a análise dos dados

Segundo Yin (2005), para a coleta de dados será necessário “integrar acontecimentos do mundo real às necessidades do plano traçado para a coleta” (p. 97), pois não há um controle rígido das ações do pesquisador. Para o autor é extremamente necessário ter procedimentos de campo explícitos e bem-planejados, que abranjam orientações para enfrentar as adversidades. Assim, para cada uma das questões norteadoras desta investigação, apresento as escolhas feitas.

Primeira questão: *Como as instituições de Ensino Superior selecionadas descrevem a disciplina Álgebra Linear nos projetos pedagógicos, já que essa disciplina é uma das que compõem o currículo mínimo obrigatório na Licenciatura em Matemática no Brasil?*

Compreender como se define a Licenciatura em Matemática no Brasil não é uma tarefa simples, visto o tamanho do país e a quantidade de cursos de Licenciatura em Matemática oferecidos, por isso optei por selecionar pelo menos uma universidade por região do país e com base nos dados obtidos busquei evidências que me permitissem visualizar, ainda que pontualmente, cada uma dessas regiões.

Para tal, fiz uso principalmente de documentos, são eles: Projetos Pedagógicos de Cursos – PPC – de Licenciaturas em Matemática e as ementas[128] da disciplina Álgebra Linear ministrada nas instituições investigadas.

Segundo Castro, Barbosa e Ramirez (2009), o PPC é um documento de orientação acadêmica no qual constam, dentre outros elementos:

> conhecimentos e saberes considerados necessários à formação das competências estabelecidas a partir do perfil do egresso; estrutura e conteúdo curricular; ementário, bibliografias básica e complementar; estratégias de ensino; docentes; recursos materiais, serviços administrativos, serviços de laboratórios e infraestrutura de apoio ao pleno funcionamento do curso (CASTRO; BARBOSA; RAMIREZ, 2009, p. 49).

[128] De acordo com Scarton e Smith (2002), a ementa é uma descrição discursiva que resume o conteúdo conceitual ou conceitual / procedimental de uma disciplina.

Para as autoras, o PPC deve estar em extrema sintonia com as Diretrizes Curriculares Nacionais possibilitando, assim, a construção de planos de ensino – PE – adequados aos acadêmicos com atenção ao perfil do profissional, que se quer formar.

Assim, a estabilidade, principal característica desses documentos, e a possibilidade de contemplarem termos e referências relacionadas à Álgebra Linear, justificam a escolha por analisa-los, pois permitem que o pesquisador os revisitem inúmeras vezes.

No entanto, como alertou Resende (2007a, p. 77):

> a análise das disciplinas, a partir das propostas curriculares, tem os seus limites, pois a maioria dos currículos disponibilizados em catálogos eletrônicos ou impressos são ‘econômicos’, não apresentando todos os elementos importantes para a sua compreensão.

E mais, “a disciplina a ensinar será, ainda, reinterpretada, transformada, por um docente e por um grupo de estudantes que lhes dará vida própria dentro de um contexto pessoal e institucional, num processo de transposição didática interna” (RESENDE, 2007a, p. 77).

A escolha das Instituições de Ensino Superior

A escolha das instituições investigadas, foi uma etapa demorada, afinal, não bastava escolher as instituições, se os documentos[129] não estivessem disponíveis; por isso lancei mão de algumas estratégias: busquei por instituições públicas por acreditar que, em boa parte delas, os cuidados com a formação do professor é mais presente e instituições que ofereciam o curso na modalidade presencial, pois assim limitaria as variáveis envolvidas.

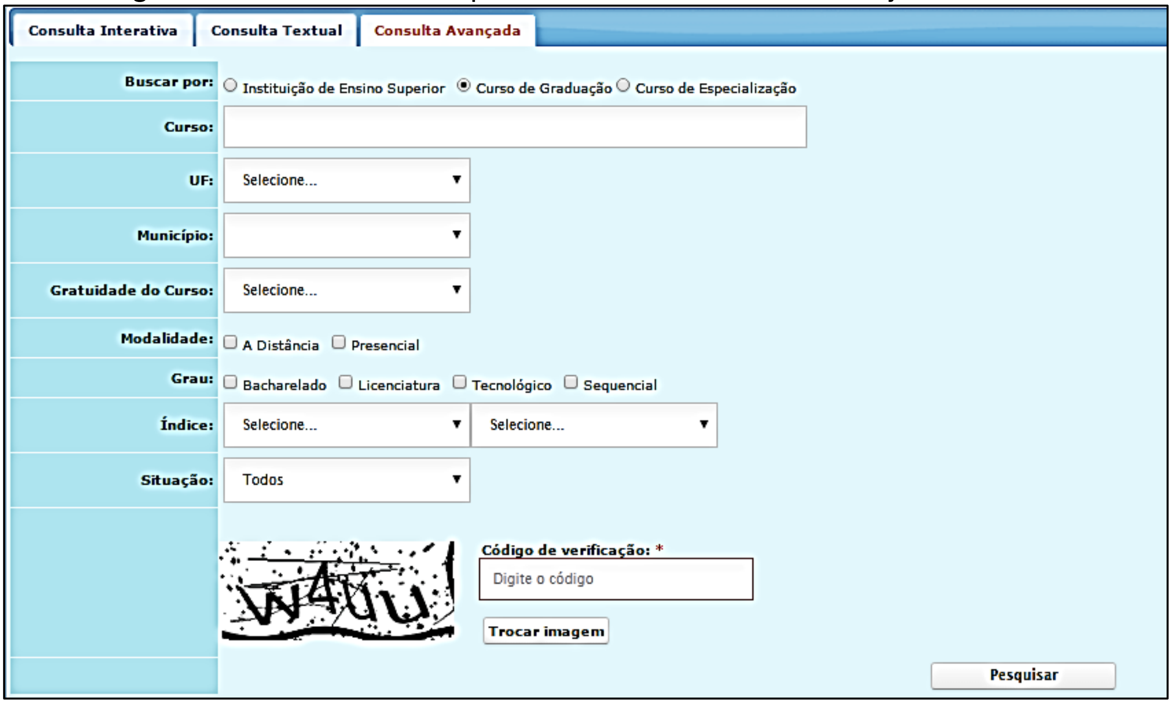
Para selecionar as instituições, resolvi consultar o sítio do Ministério da Educação [130] com a intenção de escolher as instituições de acordo com o *índice geral de curso* [131] – IGC 2012 – e a nota obtida no *exame nacional de desempenho*

[129] Os documentos institucionais que fizeram parte desta busca foram: PPC, ementas e planos de ensino. Observo que nem sempre tive acesso a todos eles.
[130] <http://emec.mec.gov.br>
[131] O IGC é um indicador de qualidade que sintetiza, em um único instrumento, a qualidade dos cursos de graduação em faixas (de 1 a 5) nas quais notas 1 e 2 são consideradas insatisfatórias.

de estudantes [132] – ENADE 2012 –. Montei uma tabela por região e estado das instituições com as maiores notas no ENADE.

Na plataforma *e-mec* há várias formas de busca, optei por usar a consulta avançada, conforme a Figura 1.

Figura 1: Tela de busca da plataforma *e-mec* acessada em julho de 2014



Fonte: http://emec.mec.gov.br

No campo **buscar por** escolhi a opção *curso de graduação*, no campo **curso** digitei *Matemática*, no campo **gratuidade do curso** selecionei *sim*, no campo **modalidade** selecionei *presencial*, no campo **grau** selecionei *licenciatura*, no campo **índice** optei por *ENADE* e no campo **situação** selecionei *em Atividade*.

Iniciei a busca estado por estado e fui organizando todos os dados obtidos em uma única tabela. No total encontrei 416 instituições com as características descritas acima. Dessas 416, algumas apareciam mais de uma vez na tabela, pois têm mais de um campus e todos eles são listados[133].

Um filtro inicial adotado foi que a nota ENADE fosse maior ou igual a 4 pontos. Segue o resultado desse filtro inicial.

[132] O ENADE é um exame obrigatório que avalia o rendimento dos alunos dos cursos de graduação, ingressantes e concluintes, em relação aos conteúdos programáticos dos cursos em que estão matriculados.

[133] Nesta pesquisa, instituições com mais de um campus foram contadas de acordo com o número de vezes que foram citadas, pois campus distintos podem ter os professores e as notas ENADE distintos.

Na região Sudeste, há a maior concentração de cursos com nota ENADE igual a 5, mas a Universidade de São Paulo não é citada em meio a esse grupo, pois os estudantes dessa instituição não participaram dessa avaliação, por isso, das 72 instituições listadas, selecionei as nove com nota ENADE 5 mais a Universidade de São Paulo. Nos dados do Quadro 3, apresento as dez instituições selecionadas:

Quadro 3: Relação de instituições selecionadas na região Sudeste

Região	Estado	Instituição (IES)	ENADE
Sudeste	ES	UFES	5
Sudeste	MG	UFV	5
Sudeste	MG	UNIFAL-MG	5
Sudeste	RJ	UFRJ	5
Sudeste	SP	UFABC	5
Sudeste	SP	IFSP	5
Sudeste	SP	UNESP	5
Sudeste	SP	UNESP	5
Sudeste	SP	UNESP	5
Sudeste	SP	USP	-

Fonte: dados da pesquisa

A região Sul é a segunda com o maior número de instituições com nota ENADE 5, mas em Santa Catarina a maior nota obtida foi a da UFSC, nota ENADE 3. Assim, nos dados do Quadro 4, apresento das 49 instituições listadas, as 13 selecionadas:

Quadro 4: Relação de instituições selecionadas na região Sul

Região	Estado	Instituição(IES)	ENADE
Sul	PR	UTFPR	5
Sul	PR	UFPR	5
Sul	RS	UFPEL	5
Sul	RS	UFSM	5
Sul	RS	UFSM	5
Sul	RS	UFRGS	5
Sul	PR	UNIOESTE	4
Sul	PR	UEL	4
Sul	PR	UNICENTRO	4
Sul	PR	UFPR	4
Sul	PR	UEPG	4
Sul	PR	UNIOESTE	4
Sul	RS	FURG	4

Fonte: dados da pesquisa

Na região Norte, há apenas uma instituição com nota ENADE 5 e três instituições com nota ENADE 4, por isso, mudei o filtro para nota ENADE 3, 4 ou 5.

Nos dados do Quadro 5, apresento das 73 instituições listadas, as 13 selecionadas:

Quadro 5: Relação de instituições selecionadas na região Norte

Região	Estado	Instituição(IES)	ENADE
Norte	AC	UFAC	5
Norte	AM	UFAM	4
Norte	AP	UNIFAP	4
Norte	RO	UNIR	4
Norte	AM	UFAM	3
Norte	AM	UEA	3
Norte	AM	UEA	3
Norte	PA	UEPA	3
Norte	PA	UEPA	3
Norte	PA	IFPA	3
Norte	PA	UFPA	3
Norte	PA	UFPA	3
Norte	RR	UFRR	3

Fonte: dados da pesquisa

Na região Centro-Oeste, também, há apenas uma instituição com nota ENADE 5, mas são listadas seis com nota ENADE 4. Mudei o filtro para nota ENADE 3, 4 ou 5 e percebi que não seria viável por aumentar muito o número de instituições, por isso, das 48 instituições listadas, selecionei apenas 7. Nos dados do Quadro 6, apresento as instituições selecionadas:

Quadro 6: Relação de instituições selecionadas na região Centro-Oeste

Região	Estado	Instituição(IES)	ENADE
Centro-Oeste	GO	UEG	5
Centro-Oeste	DF	UNB	4
Centro-Oeste	DF	UNB	4
Centro-Oeste	MS	UFMS	4
Centro-Oeste	MT	UFMT	4
Centro-Oeste	TO	UFT	4
Centro-Oeste	GO	UEG	4

Fonte: dados da pesquisa

A região Nordeste concentra um grande número de universidades públicas, 171 no total, das 15 selecionadas, 12 são federais. Nos dados do Quadro 7, apresento as instituições selecionadas:

Quadro 7: Relação de instituições selecionadas na região Nordeste

Região	Estado	Instituição(IES)	ENADE
Nordeste	PE	UFPE	5
Nordeste	BA	UFBA	4
Nordeste	BA	UESC	4
Nordeste	BA	UNEB	4
Nordeste	BA	UFBA	4
Nordeste	CE	UECE	4
Nordeste	MA	UFMA	4
Nordeste	PB	UFPB	4
Nordeste	PB	UFCG	4
Nordeste	PB	UFCG	4
Nordeste	PI	UFPI	4
Nordeste	PI	IFPI	4
Nordeste	SE	UFS	4
Nordeste	SE	UFS	4
Nordeste	SE	UFS	4

Fonte: dados da pesquisa

Após essa primeira seleção, na qual reduzi de 416 instituições para 58, fiz um novo filtro: para cada região, no máximo duas representantes por estado, maior nota ENADE, quantidade de campus e relevância no cenário acadêmico.

A quantidade de campus foi escolhida por acreditar que exista uma diretriz da instituição que é desdobrada para cada um dos campus e, ainda, a possível influência da instituição na formação de um número maior de estudantes na região em que atua. Isto é, apesar de haver a possibilidade de ter um grupo distinto de professores, devem possuir alguns elementos em comum.

A relevância no cenário acadêmico foi percebida por mim, quanto à existência de programas de pós-graduação em Matemática ou em Educação Matemática.

Com esse novo filtro, reduzi de 58 instituições para 27. Cinco na região Sudeste, quatro na região Sul, seis na região Norte, cinco na região Centro-oeste e sete na região Nordeste. Nos dados do Quadro 8, apresento todas as 27 instituições selecionadas.

Quadro 8: Relação de instituições selecionadas com o segundo filtro

Região	Estado	Instituição (IES)	ENADE	Quantidade
Sudeste	ES	UFES	5	5 de 72
Sudeste	MG	UFV	5	
Sudeste	RJ	UFRJ	5	
Sudeste	SP	UNESP	5	
Sudeste	SP	USP	-	
Sul	PR	UFPR	5	4 de 49
Sul	RS	UFSM	5	
Sul	RS	UFRGS	5	
Sul	PR	UEL	4	
Norte	AC	UFAC	5	6 de 76
Norte	AM	UFAM	4	
Norte	AP	UNIFAP	4	
Norte	RO	UNIR	4	
Norte	PA	UFPA	3	
Norte	RR	UFRR	3	
Centro-Oeste	GO	UEG	5	5 de 48
Centro-Oeste	DF	UNB	4	
Centro-Oeste	MS	UFMS	4	
Centro-Oeste	MT	UFMT	4	
Centro-Oeste	TO	UFT	4	
Nordeste	PE	UFPE	5	7 de 171
Nordeste	BA	UFBA	4	
Nordeste	CE	UECE	4	
Nordeste	MA	UFMA	4	
Nordeste	PB	UFPB	4	
Nordeste	PI	UFPI	4	
Nordeste	SE	UFS	4	

Fonte: dados da pesquisa

Com as 27 instituições selecionadas, utilizei a plataforma *e-mec* para buscar mais dados sobre cada uma delas, por exemplo, aquelas que têm mais de um campus, qual dos campus deveria estudar?

Após reunir novos elementos, acessei o sítio de cada um dos cursos em busca do Projeto Pedagógico do Curso, no entanto, em vários casos ou não encontrava o arquivo, ou o arquivo disponível estava incompleto. Mudei de estratégia, em vez de ir ao sítio de cada instituição, passei a utilizar a ferramenta de busca do *Google* e as palavras-chave: *PPC Matemática da universidade XX; PPC*

Licenciatura em Matemática XX; projeto pedagógico do curso Licenciatura em Matemática XX, projeto político pedagógico XX, entre outras.

Como resultado da busca encontrei documentos publicados em diferentes datas e diferentes formatos, por exemplo, encontrei arquivos no formato PDF completos e homologados, assim como propostas publicadas no formato de hipertextos no próprio sítio da instituição.

Com os dados coletados, fiz um último filtro, optando pelas instituições, em que o material encontrado estava mais completo, assim, passei a investigar os cursos de Licenciatura em Matemática, na modalidade presencial, ofertados por seis instituições, que podem ser verificados nos dados do Quadro 9.

Quadro 9: Relação de instituições selecionadas – versão final

Região	**Instituição (IES)**[134]
Sudeste	UESE A
Sudeste	UESE B
Sul	UFS
Norte	UFN
Centro-Oeste	UFCO
Nordeste	UFNE

Fonte: dados da pesquisa

Destaco que nos dados do Quadro 9, a sigla utilizada para fazer referência às instituições foi alterada, pois nas etapas, que seguem, descrevo entrevistas com professores dessas instituições e o anonimato de cada um deles deve ser mantido.

Desta forma, após ter escolhido as universidades a serem investigadas e obter os documentos relacionados a cada uma delas, apresentei uma breve descrição do curso evidenciando elementos, que permitam caracterizar a instituição como, por exemplo, a carga horária total do curso, o perfil do egresso, a organização curricular (se está dividida por áreas, ou não), entre outras possíveis análises.

Em seguida, busquei elementos relacionados à disciplina Álgebra Linear, por exemplo: é exigido que o estudante tenha feito uma disciplina antes de Álgebra Linear? Em que momento Álgebra Linear é ofertada? Qual a carga horária destinada? Qual o objetivo anunciado? Quais os conceitos que devem ser

[134] A sigla adotada, para preservar o anonimato, segue a regra: para as universidades estaduais (**U**niversidade **E**stadual da Região **XX**) usei **UEXX** e para as universidades federais (**U**niversidade **F**ederal da Região **XX**) usei **UFXX**.

priorizados? Há uma bibliografia básica? Há uma bibliografia complementar? Há disciplinas optativas relacionadas à Álgebra Linear?

Quando possível, também realizei entrevistas para complementar a análise documental e compreender a licenciatura em Matemática em cada instituição e como esse professor percebe a contribuição da disciplina Álgebra Linear, na formação inicial do professor de Matemática da Educação Básica. Afinal, considero, assim como Yin (2005), que o uso de entrevistas fornece ao pesquisador não apenas percepções e interpretações sob um assunto, sugere, também, “fontes nas quais se podem buscar evidências corroborativas ou contrárias” (p. 117).

Assim, no capítulo 5, apresento a descrição de cada uma das seis Licenciaturas em Matemática investigadas e a primeira análise dos elementos evidenciados nessas descrições, buscando identificar similaridades ou discrepâncias entre esses elementos, iluminando, principalmente, aqueles evidenciados nos projetos pedagógicos dos cursos.

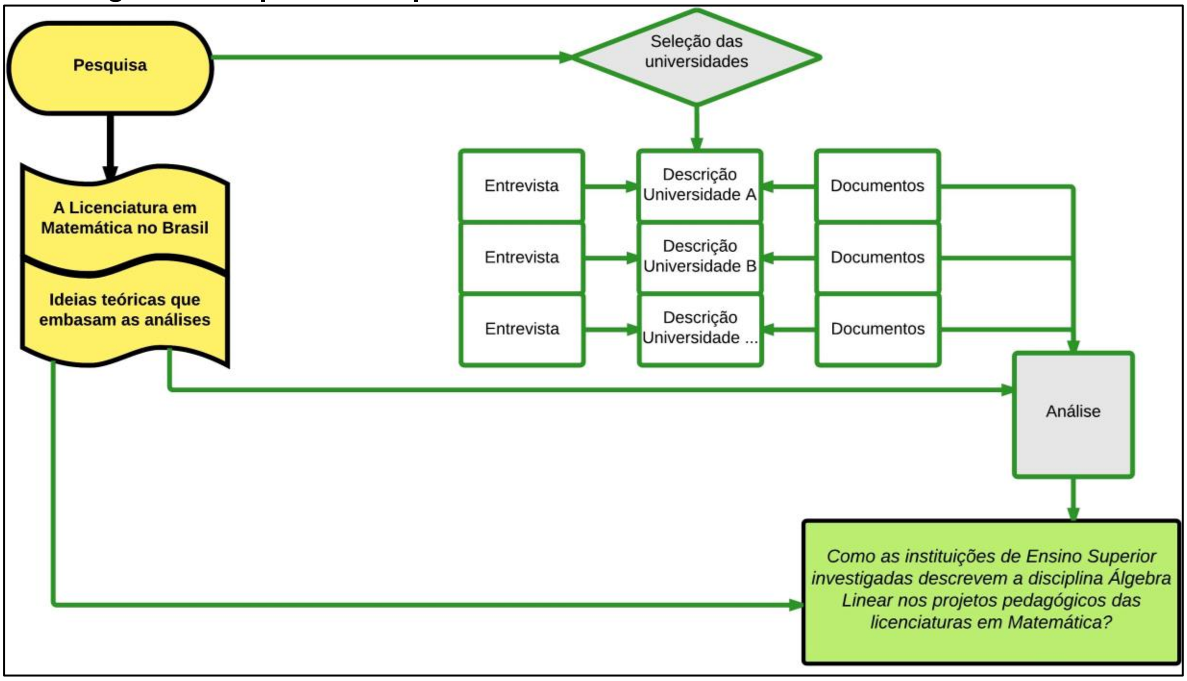
Em relação às entrevistas utilizei um roteiro[135] elaborado com a intenção de descrever o entrevistado de acordo com sua formação acadêmica e atuação profissional, auxiliar na compreensão do curso oferecido na instituição em que atua, além de, identificar como esse sujeito concebe o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, na Licenciatura em Matemática.

Desde as primeiras descrições, organizei as entrevistas aos pares, transcrições integrais dos diálogos gravados e arquivos digitais com as correspondentes gravações de áudio, pois Fontanella et al. (2011) afirmam que tê-las organizadas “facilita um processo pormenorizado de interpretação, pois o suporte auditivo permite perceber elementos de entonação e prosódia e as transcrições possibilitam observações mais reflexivas e detidas sobre alguns trechos” (p. 390).

Na Figura 2, apresento um esquema de como organizei a coleta de materiais e a análise dos dados, nessa etapa.

[135] No apêndice 2, apresento o roteiro utilizado para fazer as estrevistas.

Figura 2: Esquema dos procedimentos – análise documental / entrevistas



Fonte: o pesquisador

As primeiras entrevistas

Considerando que os documentos institucionais nem sempre são produzidos pelo corpo de docentes, mas, sim, por um grupo restrito de docentes de cada instituição e, ainda, como afirmou Resende (2007a), esses documentos são em geral “econômicos” e não retratam o que acontece em sala, optei por entrar em contato com cada uma das instituições para complementar a análise dos documentos.

No primeiro contato, tive como objetivo agendar uma entrevista com o coordenador do curso e uma entrevista com, pelo menos, um professor de Álgebra Linear, que atua na licenciatura em Matemática, pretendendo entrevistar 12 professores.

O coordenador do curso poderia auxiliar na compreensão dos documentos, trazendo mais elementos, assim como, apresentar a forma como ele percebe a contribuição (ou não) da disciplina Álgebra Linear na formação do licenciado em Matemática. Já o professor que ministra a disciplina Álgebra Linear poderia trazer elementos sobre a disciplina Álgebra Linear, que é ministrada na instituição, assim como, contribuir para responder a próxima questão de interesse nesta pesquisa:

Como os professores pesquisadores em Álgebra (Educação Matemática) das instituições de ensino selecionadas concebem a Álgebra Linear e o seu ensino?

Dessa forma, com uma lista com o nome dos coordenadores de cada instituição, os endereços eletrônicos e os números de telefones obtidos por meio da plataforma *e-mec* ou pelo sítio das instituições, no início de 2015, enviei uma mensagem por e-mail para cada um dos coordenadores.

Nenhum coordenador respondeu ao e-mail enviado e em março de 2015 comecei a ligar para os departamentos, quando conseguia algum contato, questionava sobre o nome do coordenador e os nomes dos professores que ministravam a disciplina Álgebra Linear, pois nem sempre os nomes, informados pela secretaria, correspondiam com as informações divulgadas no sítio das instituições.

Apenas em maio de 2015, consegui agendar as primeiras entrevistas, pois as instituições federais estavam em greve e conseguir qualquer tipo de contato não era fácil, o que fez com que alterasse as instituições selecionadas, por exemplo, na região Sul do país, troquei uma instituição federal por uma estadual, na região Nordeste troquei três vezes a instituição e, mesmo assim, não consegui contato com nenhum professor, quando muito, com a secretária do departamento.

Nessa etapa, foram entrevistados três coordenadores e quatro professores de Álgebra. No caso da UES, o professor entrevistado representa as duas funções, pois já atuou como coordenador do curso. Assim, foram realizadas seis entrevistas.

Nos dados do Quadro 10, apresento as instituições investigadas e as entrevistas realizadas.

Quadro 10: Relação de instituições selecionadas e professores entrevistados[136]

Região	Instituição (IES)	Entrevistas realizadas	
		Coordenador	Professor
Sudeste	UESE A	Sim	Sim
Sudeste	UESE B	Sim	Sim
Sul	UES	Sim	Sim
Norte	UFN	Não	Não
Centro-Oeste	UFCO	Não	Sim
Nordeste	UFNE	Não	Não

Fonte: dados da pesquisa

[136] No capítulo 5, apresento mais detalhes sobre os caminhos percorridos em cada região para conseguir os matériais necessários. Alguns coordenadores, por exemplo, já forneceram elementos sobre o PPC durante o primeiro contato telefônico.

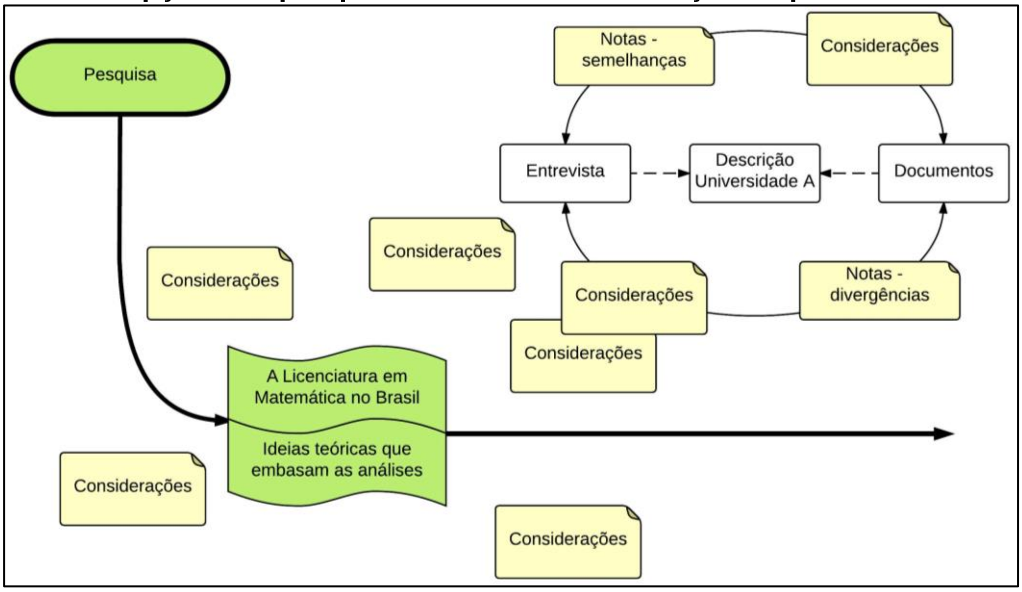
A análise das primeiras entrevistas

Para analisar o conjunto de dados, faço uso de pressupostos de um estudo por saturação[137], que se dá por meio de um processo contínuo de investigação dos dados com início desde o primeiro processo de coleta (FONTANELLA; RICAS; TURATO, 2008). Ressalto que não assumo o termo saturação em relação à quantidade de participantes desta investigação. O interesse repousa apenas sobre os procedimentos utilizados para a coleta e a análise dos dados.

A análise teve início com a construção dos capítulos 2 e 3 desta tese, pois ao investigar os documentos oficiais e os resultados de pesquisas relacionados ao tema, algumas considerações foram apresentadas, pois haviam evidências para tal, outras permaneceram ocultas ao leitor, pois eram “desconfianças” e “intuições” que surgiam naquele momento.

Assim, ao iniciar o estudo dos documentos, sobretudo, do primeiro PPC, procurei estabelecer relações com as diretrizes nacionais, as pesquisas sobre formação de professores e os resultados de pesquisas, na tentativa de eleger as primeiras categorias de análise. No esquema apresentado na Figura 3, exemplifico esse procedimento.

Figura 3: Percepções do pesquisador durante a descrição da primeira universidade



Fonte: o pesquisador

137 “Amostragem por saturação é uma ferramenta conceitual frequentemente empregada nos relatórios de investigações qualitativas em diferentes áreas no campo da Saúde, entre outras. É usada para estabelecer ou fechar o tamanho final de uma amostra em estudo, interrompendo a captação de novos componentes” (FONTANELLA; RICAS; TURATO, 2008, p.17).

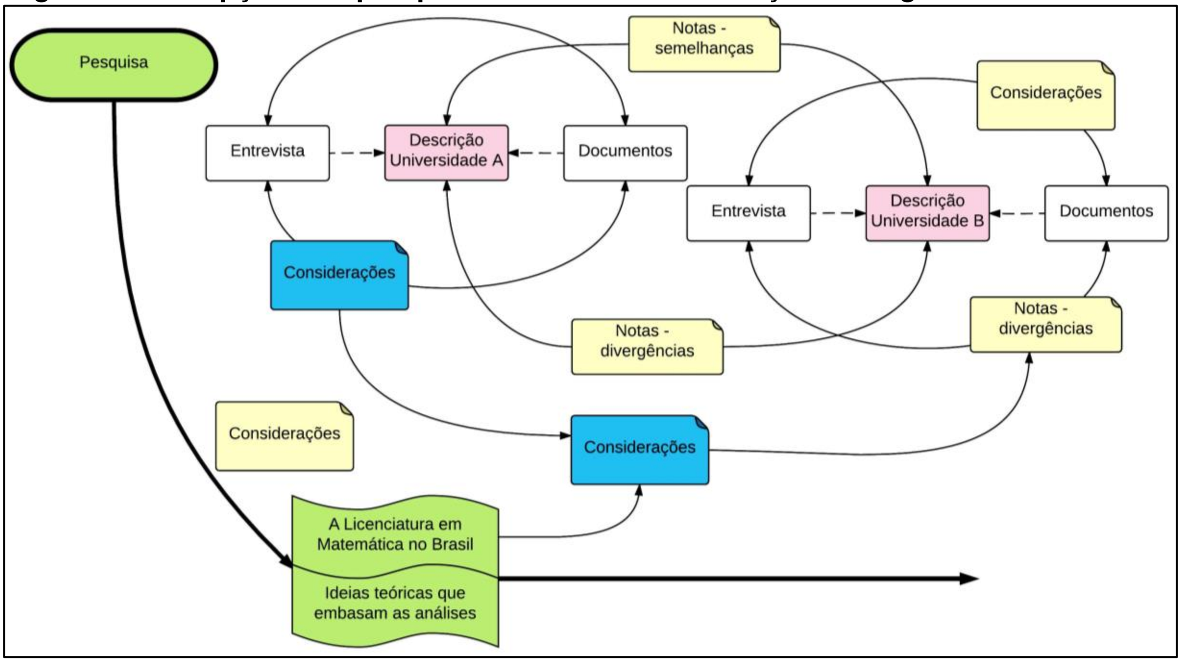
Tal procedimento de estudo dos documentos, permitiu-me perceber que elementos fornecidos pela segunda instituição, terceira e, assim por diante, em parte, já estavam presentes nas anteriores, ou seja, assim como Fontanella, Ricas e Turato (2008) descreveram em sua pesquisa, a cada novo documento (nova instituição) pouco era acrescentado ao material já analisado.

E, enquanto descrevia as Licenciaturas em Matemática em cada instituição, cruzando o estudo do PPC com as falas dos professores, novas considerações saltavam aos olhos, mas prossegui apenas descrevendo e fazendo anotações paralelas, conforme as orientações de Fontanella et al. (2011, p. 390)

> os pesquisadores 'exploram' individualmente cada uma das entrevistas, à medida que estejam disponíveis. Caso se esteja trabalhando com pré-categorias analíticas, os temas e enunciados correspondentes, que cada pesquisador considere importantes para instruí-las, são anotados. Se forem previstas formulações de novas categorias, cada pesquisador também as registra para depois discuti-las com os pares.

Assim, das descrições feitas, para cada universidade investigada, surgiam novas considerações, outras se fundiram, outras deixavam de existir. Um exemplo, desse movimento, pode ser observado no esquema apresentado na Figura 4.

Figura 4: Percepções do pesquisador durante a descrição da segunda universidade



Fonte: o pesquisador

Com os elementos coletados, retomo a segunda questão: *Como os professores pesquisadores em Álgebra (Educação Matemática) das instituições de ensino selecionadas concebem a Álgebra Linear e o seu ensino?*

Segundo Fontanella et al. (2011, p. 390), a criação das categorias deve "representar o conjunto de ideias, valores, sentimentos etc., abarcando as manifestações dos entrevistados que contribuem para compreender melhor o que expressaram". Para os autores, é nesse momento em que se concentra parte do trabalho criativo de pesquisa, "fundamentado em conhecimentos e envolvendo raciocínios indutivos: parte-se do particular (um ou vários enunciados) e chega-se a algo mais abstrato e geral (a nominação deste conjunto)" (p. 390).

De acordo com os autores, atribuir nome para cada conjunto de elementos com características semelhantes "revela as inclinações teórico-ideológicas dos pesquisadores, podendo este procedimento ser revisto continuamente, de acordo com os aprofundamentos conceituais que se processem no estudo adicional e na discussão" (FONTANELLA et al., 2011, p. 390). E, ainda,

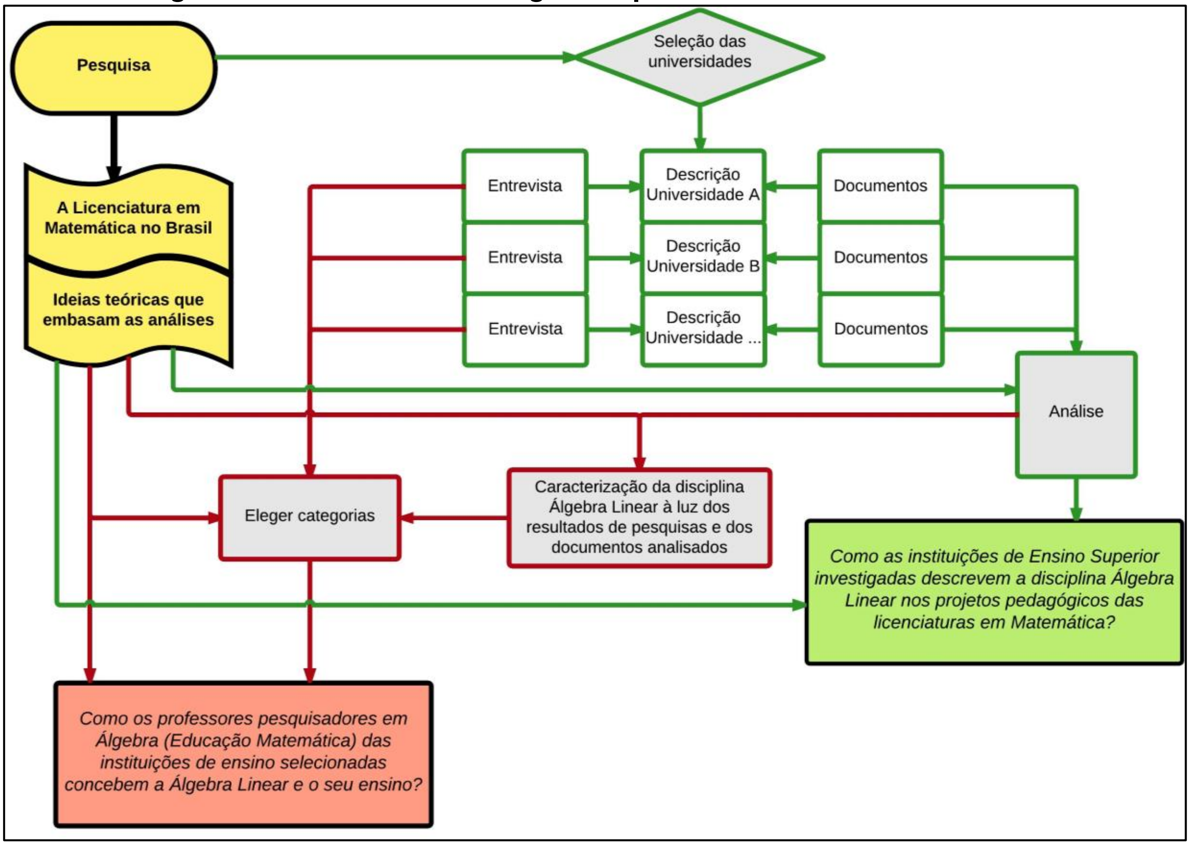
> [...] não se trata de vincular imediatamente a denominação escolhida a determinada teoria. Embora se considere que nomear seja uma atitude expressiva do pensamento, reveladora dos conhecimentos de quem nomeia, mesmo que o pesquisador conheça profundamente certas teorias, poderá mantê-las temporariamente em suspensão [...]. (FONTANELLA et al., 2011, p. 390)

Assim, no capítulo 6, inicio com uma caracterização da disciplina Álgebra Linear à luz de elementos evidenciados nos capítulos 2, 3 e 5 desta pesquisa, esses elementos, foram organizados em um quadro com a intenção de sistematizar e permitir a visualização de algumas das possíveis conexões existentes entre eles.

De imediato, não criei nenhuma categoria, o que havia eram possíveis conexões. Então, resgatava dois extratos das transcrições e procurava relacioná-los, ou estabelecer relações com o quadro síntese, isso foi possível, pois desde a descrição das licenciaturas no capítulo 5, utilizei planilhas para agrupar extratos de acordo com palavras citadas em comum, por exemplo, dois entrevistados que apresentavam considerações sobre demonstração em Álgebra Linear eram sinalizados na planilha.

Na Figura 5 apresento uma imagem representando o esquema utilizado para a análise das entrevistas.

Figura 5: Procedimentos seguidos para a análise das entrevistas



Fonte: o pesquisador

Observo que as setas verdes indicam os caminhos para as análises iniciais, sobretudo, em relação aos documentos das instituições investigadas. Já, as setas vermelhas representam os caminhos seguidos para analisar o conjunto de entrevistas. Os resultados de pesquisas e as ideias teóricas, também, são utilizados em todos os momentos deste estudo.

Por fim, a terceira questão: *Qual Álgebra Linear poderia ser concebida como saber a ensinar na licenciatura em Matemática, visando à formação inicial do professor da Educação Básica?*

Após a descrição de cada uma das licenciaturas envolvidas e a identificação de algumas categorias, selecionei um novo grupo de professores e utilizei essas categorias para analisar a convergência (divergência) nos extratos das transcrições dessas entrevistas, verifiquei se as categorias estavam adequadas às evidências e ao perceber respostas, que não se enquadravam em nenhuma das categorias, buscava por desdobramentos ou criava uma nova categoria.

Critérios de escolha dos "novos" professores a serem entrevistados

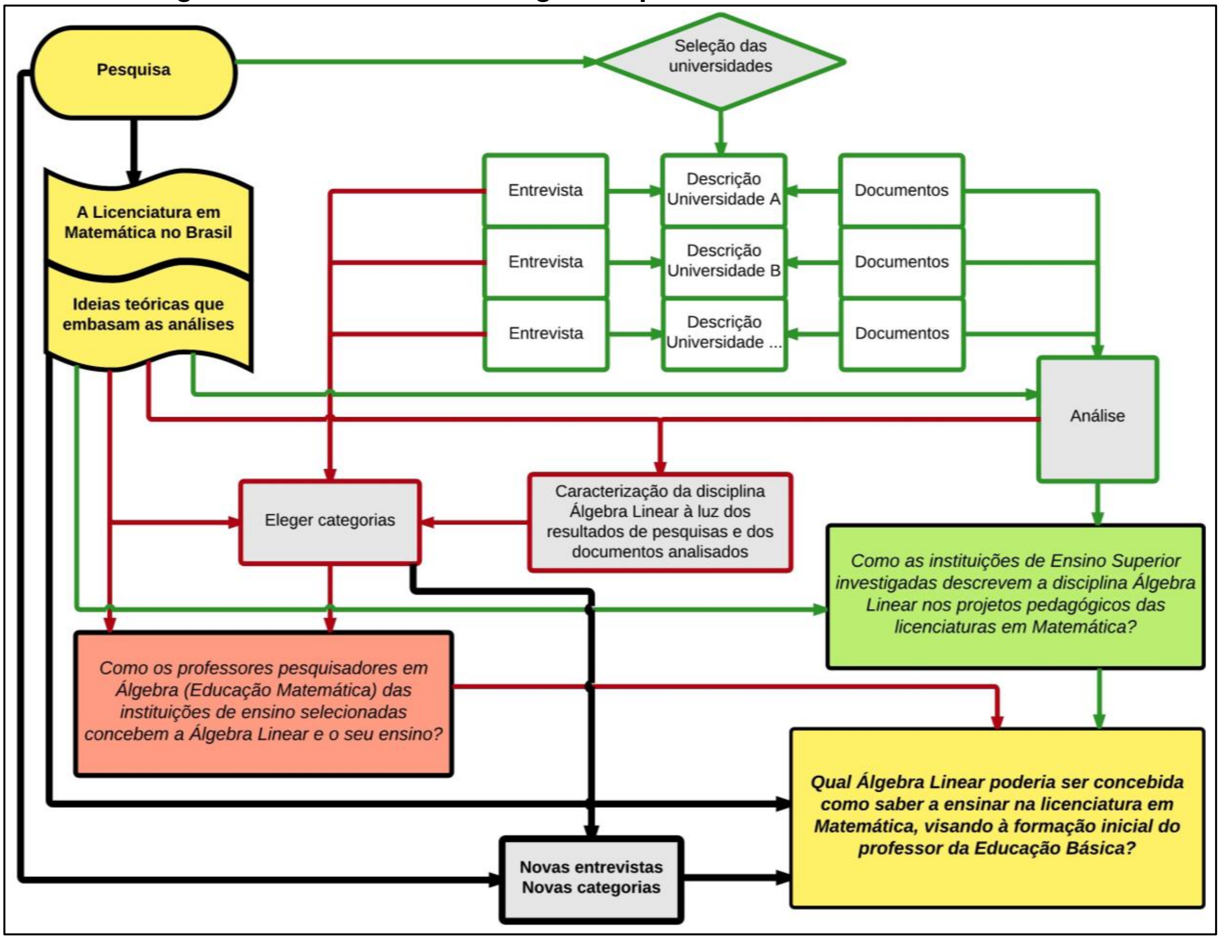
Selecionei dois novos professores para complementar a análise, busquei por pesquisadores influentes em Educação Matemática que possuem tempo de docência, inclusive com atuação nas licenciaturas em Matemática e, ainda, desenvolvem pesquisas em Álgebra ou formação de professores.

Para Yin (2005), quando se tem a oportunidade de utilizar muitas fontes diferentes para a obtenção de evidências, o pesquisador pode utilizar a triangulação dos dados, pois "qualquer descoberta ou conclusão [...] provavelmente será muito mais convincente e acurada se baseada em várias fontes distintas de informação, obedecendo a um estilo corroborativo de pesquisa" (p.126).

Assim, busquei, na triangulação dos dados obtidos nas análises dos documentos oficiais, das entrevistas e resultados de pesquisas, evidências que permitissem responder a essa questão.

Na Figura 6 apresento um esquema para esse procedimento, em que as setas verdes indicam os caminhos para as análises iniciais dos documentos, as setas vermelhas representam os caminhos seguidos para analisar o conjunto de entrevistas e as setas pretas indicam os caminhos para o terceiro conjunto de análises.

Figura 6: Procedimentos seguidos para fechamento das análises.



Fonte: o pesquisador

Destaco que as análises foram se complementando, a cada elemento novo retomei os resultados anteriores e a partir deles apresentei refinamentos, por exemplo, nas categorias de análise utilizadas para as entrevistas. Isto é, apesar de as setas indicarem uma ação direta, no momento de construção dos argumentos isso não ocorreu, exatamente, dessa forma, foi um caminho cheio de idas e vindas.

Em síntese, foram analisados documentos de seis instituições de Ensino Superior e entrevistados oito professores. Todas as entrevistas foram audiogravadas, transcritas e encaminhadas para que o entrevistado avaliasse e autorizasse o uso do material. Além disso, os nomes atribuídos aos entrevistados foram nomes fictícios, preservando, assim, o anonimato de cada um deles. Assim como, foi descrito no projeto apresentado e aprovado pelo Comitê de Ética da PUC-SP, cadastrado na Plataforma Brasil[138].

---

[138] Plataforma Brasil, base nacional e unificada de registros de pesquisas envolvendo seres humanos. <http://aplicacao.saude.gov.br/plataformabrasil/login.jsf>. Acessado em maio de 2014.

Das oito entrevistas, quatro foram realizadas por meio do uso do *Skype*[139] e quatro foram realizadas, presencialmente, nos locais e horários escolhidos pelos entrevistados.

Apresentadas as escolhas metodológicas, no próximo capítulo, descrevo a Licenciatura em Matemática nas instituições selecionadas.

[139] *Software* que permite a comunicação pela Internet por meio de conexões de voz.

CAPÍTULO 5

A ÁLGEBRA LINEAR NAS UNIVERSIDADES SELECIONADAS

"[...] 'triangulação' não é simples. Pessoas diferentes, na realidade, parecem as mesmas, mas, às vezes, parecem diferentes" (FINE et al., 2010, p. 135).

Neste capítulo, apresento e analiso múltiplas vozes, que citam a disciplina Álgebra Linear no contexto das licenciaturas em Matemática no Brasil. As vozes analisadas provêm dos projetos pedagógicos devidamente selecionados, das ementas e planos de ensino de Álgebra Linear disponibilizados por essas instituições e de entrevistas realizadas, presencialmente, ou por meio de videoconferências.

Ao analisar essas vozes, terei de me atentar ao que Fine et al. (2010) alertou, pois essas pessoas (vozes) ou dados podem parecer (ou serem) contraditórios ou desnecessários, mas não devem ser descartados, pois "[...] isso pode nos fazer perder facetas importantes" (p. 135).

Assim, neste capítulo, inicio com a apresentação de cada uma das seis licenciaturas investigadas, evidenciando elementos que permitam caracterizar a instituição e aspectos da disciplina Álgebra Linear oferecida. E, finalizo com considerações sobre o conjunto de elementos observados, sobretudo, nos documentos dessas instituições.

Os elementos analisados foram coletados em diferentes fontes, nos dados do Quadro 11, apresento as instituições selecionadas e os materiais utilizados.

Quadro 11: Relação das instituições selecionadas e materiais utilizados

Região	Instituição (IES)	Documentos			Entrevistas realizadas[140]	
		PPC	Ementa	PE[141]	Coordenador	Professor
Norte	UFN	Sim	Sim	Não	Não	Não
Centro-Oeste	UFCO	Sim	Sim	Não	Não	Sim
Sudeste	UESE A	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Sudeste	UESE B	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Sul	UES	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Nordeste	UFNE	Sim	Sim	Sim	Não	Não

Fonte: o pesquisador

A descrição de cada uma das licenciaturas visa evidenciar elementos que permitam caracterizar a instituição como, por exemplo, a carga horária total do curso, o perfil do egresso, a organização curricular (se está dividida por áreas, ou não), entre outras possíveis análises.

Já a descrição da disciplina Álgebra Linear em cada instituição visa coletar elementos relacionados às questões: é exigido que o estudante tenha feito uma disciplina antes de Álgebra Linear? Em que momento Álgebra Linear é ofertada? Qual a carga horária destinada? Qual o objetivo anunciado? Quais os conceitos que devem ser priorizados? Há uma bibliografia básica? Há uma bibliografia complementar? Há disciplinas optativas relacionadas à Álgebra Linear?[142]

Quando possível, também apresento elementos evidenciados nas entrevistas[143] para complementar a análise documental e compreender a Licenciatura em Matemática em cada instituição.

[140] Para maiores detalhes sobre a formação de cada um desses professores ver anexo 01.
[141] Ao citar o Plano de Ensino de uma instituição usarei **PE** seguido da **sigla da universidade** e **ano de publicação** entre parênteses, por exemplo, PE UESE-A (2014), ou seja, plano de ensino de uma determinada disciplina oferecida pela Universidade Estadual do Sudeste A, publicado em 2014.
[142] Ao descrever e analisar os documentos das instituições selecionadas terei um número grande de referências básicas e complementares, por isso, tanto na versão impressa como na versão digital (Anexo 2), apresento uma lista ordenada com essas referências básicas e complementares. Já, na versão impressa, o leitor poderá utilizar o encarte (Anexo 5) na leitura. Assim, ao invocar ao longo do texto, por meio do uso de parênteses, uma sequência numérica, indico quais são essas obras. Por exemplo, *(1, 3 e 5) – estou indicando que foram citadas as seguintes obras da lista: primeira, terceira e quinta.*
[143] Na transcrição das entrevistas, utilizo alguns símbolos para representar situações vivenciadas, são eles: **[...]** indica que suprimi parte da fala do entrevistado sem perder a essência do que foi dito; **...** indica que o entrevistado fez uma pausa curta em sua fala; **(...)** indica que o entrevistado fez uma pausa longa em sua fala; **(palavra)** quando houver a necessidade de completar a fala do entrevistado.

Na Universidade Federal do Norte

A descrição da Licenciatura em Matemática, oferecida pela Universidade Federal do Norte – UFN –, está baseada no Projeto Pedagógico do Curso aprovado e implantado em 2012 e nas ementas disponíveis no sítio da instituição. No que segue, ao fazer referência a um determinado Projeto Pedagógico do Curso, citarei a sigla PPC seguida da sigla da universidade, no caso, PPC UFN.

Tentei estabelecer contato telefônico e por e-mail com professores da UFN por diversas vezes, no período compreendido entre março e setembro de 2015, mas consegui falar, apenas, com a secretária do curso uma única vez, a qual informou não ser possível contatar os professores, pois a universidade estava em greve. Por isso, a descrição é feita com apenas os documentos supracitados.

O curso na UFN é oferecido desde 1954. De acordo com PPC UFN (2012), o curso tem duração mínima de quatro anos e carga horária total de 3386 horas. O objetivo geral apresentado no PPC UFN (2012) é o mesmo citado no Parecer CNE/CP 1.302/2001 (BRASIL, 2001b), isto é, formar professores de Matemática para a Educação Básica.

Na descrição do perfil dos egressos, são listados nove itens, três comuns ao Parecer e seis itens não contemplados, explicitamente, em Brasil (2001b), são eles:

> • dominar o conhecimento matemático específico e não trivial, tendo consciência da importância desta ciência, assim como, dominar o conhecimento das suas aplicações em diversas áreas e metodologias para ensiná-las;
> • perceber o quanto o domínio de certos conteúdos, habilidades e competências próprias à Matemática importam para o exercício pleno da cidadania;
> • possuir familiaridade e reflexão sobre metodologias e materiais de apoio ao ensino, diversificados, de modo a poder decidir, diante de cada conteúdo específico e cada classe particular de alunos, qual o melhor procedimento pedagógico para favorecer a aprendizagem significativa da Matemática, estando preparado para avaliar os resultados de suas ações por diferentes caminhos e de forma continuada;
> • ser capaz de observar cada aluno, procurando rotas alternativas de ação para levar seus alunos a desenvolver-se plenamente, com base nos resultados de suas avaliações, sendo assim motivador e visando o desenvolvimento da autonomia no seu aluno;
> • dominar a forma lógica, característica do pensamento matemático e, conseguir compreender as potencialidades de raciocínio em cada faixa etária. Em outras palavras, ser capaz de, por um lado, favorecer o desenvolvimento de raciocínio de seus alunos e, por outro lado,

> não extrapolar as exigências de rigor a ponto de gerar insegurança nos discentes em relação à Matemática;
> • trabalhar de forma integrada com os professores de sua área e de outras áreas, no sentido de contribuir efetivamente com a proposta pedagógica de sua Escola e favorecer uma aprendizagem multidisciplinar aos seus alunos (PPC UFN, 2012, p. 22-23).

Dentre os itens citados, destaco dois que podem ser desenvolvidos pelo estudante, em parte, durante um curso de Álgebra Linear, são eles: “[...] dominar o conhecimento matemático específico e não trivial, tendo consciência da importância desta ciência, assim como, dominar o conhecimento das suas aplicações em diversas áreas e metodologias para ensiná-las” (p. 22) e “[...] dominar a forma lógica, característica do pensamento matemático e, conseguir compreender as potencialidades de raciocínio em cada faixa etária [...]” (p. 23).

A organização curricular está dividida em quatro eixos, sendo eles: Comum; Profissional; Práticas e estágios; Atividades de formação complementar.

No eixo comum, foram descritas nove disciplinas, dentre elas, selecionei para a análise da ementa apenas a disciplina *Geometria Analítica e Vetores*. Em relação ao eixo profissional, foram descritas vinte e duas disciplinas, das quais selecionei apenas a disciplina *Álgebra Linear*.

Do Eixo de Práticas e Estágio, selecionei duas disciplinas: *Laboratório de Ensino de Geometria Analítica e Vetores* e *Laboratório de Álgebra Linear*. E, por fim, do Eixo das Atividades de Formação Complementar, escolhi uma disciplina, *Álgebra Linear II*, vale registrar que essa é uma disciplina opcional.

Optei por analisar as ementas das disciplinas *Geometria Analítica e Vetores* e *Laboratório de Ensino de Geometria Analítica e Vetores*, pois tenho como hipótese que disciplinas relacionadas à Geometria Analítica são consideradas como requisitos para um primeiro curso de Álgebra Linear.

Geometria Analítica e Vetores

A disciplina *Geometria Analítica e Vetores,* com 68 horas, é oferecida no primeiro semestre do curso (em um total de oito semestres) e não exige nenhum conhecimento prévio.

Os conteúdos, que devem ser abordados nesta disciplina, tal como apresentados na ementa, são: Sistemas lineares; Vetores, operações; Bases e sistemas de coordenadas $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$; Distância, norma e ângulo; Produtos escalar e vetorial; Retas no plano e no espaço; Planos, posições relativas, intersecções, distâncias e ângulos; Círculo e esfera; Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas; Seções cônicas, classificação; Introdução às quádricas.

De acordo com o PPC UFN (2012), ao longo do curso, os alunos deverão desenvolver algumas habilidades e/ou competências que estão diretamente relacionadas às disciplinas. Em relação à *Geometria Analítica e Vetores* é esperado que os alunos desenvolvam a "capacidade de encaminhar soluções de problemas, explorar situações, fazer relações, conjecturar, argumentar, avaliar, formular e resolver problemas" (p. 30) e, ainda, dominem "[...] os raciocínios algébrico, geométrico e/ou combinatório de modo a poder argumentar com clareza e objetividade dentro destes contextos cognitivos" (p. 30).

Álgebra Linear

A disciplina *Álgebra Linear*, com 68 horas, é oferecida no quarto semestre do curso (em um total de oito semestres) e tem como exigência que o aluno tenha cursado *Geometria Analítica e Vetores*. As referências básicas são (1, 2 e 3) e as complementares (4, 5, 6, 7, 8 e 9).

Os conteúdos que devem ser abordados nesta disciplina são: Sistemas Lineares; Espaços Vetoriais; Base de um Espaço Vetorial; Transformações Lineares; Matriz de uma transformação linear; Espaços com Produto Interno; Autovalores e Autovetores; Diagonalização.

Conforme apresentado no PPC UFN (2012), é esperado que os alunos ao cursarem a disciplina *Álgebra Linear* venham a "dominar os raciocínios algébrico, geométrico e/ou combinatório de modo a poder argumentar com clareza e objetividade dentro destes contextos cognitivos" (p. 30) e, ainda, desenvolvam a

> capacidade de contextualizar e inter-relacionar conceitos e propriedades matemáticas, bem como, utilizá-los em outras áreas do conhecimento e em aplicações variadas. Em especial, poder interpretar matematicamente situações ou fenômenos que emergem de outras áreas do conhecimento ou situações reais (p. 30).

Álgebra Linear II

A disciplina *Álgebra Linear II* é opcional, com 68 horas, e não apresenta nenhuma exigência em relação ao conhecimento prévio. Assim como as demais disciplinas já apresentadas, as referências básicas são (10, 11 e 12) e complementares (13, 14, 15, 16 e 17).

Os conteúdos que devem ser abordados nesta disciplina são: Formas canônicas elementares; As formas racionais e de Jordan; Espaços com produto interno; Teorema da decomposição espectral; Formas bilineares.

As habilidades e/ou competências que podem ser desenvolvidas pelo aluno ao cursar a disciplina *Álgebra Linear II* são as mesmas já apresentadas para a disciplina *Álgebra Linear.*

Laboratório de Ensino

Na grade curricular, são apresentadas onze disciplinas que recebem o título *Laboratório de Ensino*, cada uma com 34 horas, sempre associadas a outra disciplina dessa grade.

As disciplinas *Laboratório de Ensino de Geometria Analítica e Vetores* e *Laboratório de Ensino de Álgebra Linear*, por sua vez, são ofertadas em concomitância às disciplinas *Geometria Analítica e Vetores* e *Álgebra Linear,* respectivamente.

De acordo com o PPC UFN (2012), os conteúdos e as referências destas disciplinas são os mesmos da disciplina correspondente, sendo o professor o responsável em selecionar aqueles que permitam ao estudante exercitar a prática, com vistas à preparação para o magistério na Educação Básica.

Para as disciplinas que recebem o título *Laboratório de Ensino* não há uma distinção das habilidades e/ou competências relacionadas a cada uma das disciplinas que norteia "o laboratório"; mas, sim, um conjunto que vale para todas.

Segundo o PPC UFN (2012), dos alunos, que cursarem uma disciplina que recebe esse título, é esperado que desenvolvam a "capacidade de planejar, elaborar e executar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a Educação Básica e ações Interdisciplinares" (p. 30), a "capacidade de desenvolver projetos, avaliar livros textos, *softwares* e outros materiais didáticos. Capacidade de organizar cursos, planejar ações de ensino e aprendizagem de Matemática" (p. 31), assim como a

> competência para participar da elaboração e/ou avaliação do Projeto Pedagógico da escola, a partir da compreensão dos processos de organização e desenvolvimento curricular, das diretrizes curriculares nacionais da Educação Básica e dos parâmetros e referenciais curriculares nacionais e das normas vigentes (p. 30-31)

e tenham

> [...] a visão histórica e crítica da Matemática, tanto no seu estado atual como nas várias fases da sua evolução que lhe permita selecionar e organizar conteúdos de Matemática de modo a assegurar a aprendizagem dos alunos, bem como, produzir textos matemáticos adequados à Educação Básica (p. 31).

Em síntese, observo que na UFN o curso tem 586 horas a mais do que é exigido para um curso de Licenciatura em Matemática e a disciplina Álgebra Linear com a disciplina Laboratório de Ensino de Álgebra Linear, juntas, apresentam carga-horária igual a 102 horas.

Destaco esse fato, pois no PPC UFN (2012), os autores apresentam a necessidade de se estabelecer uma relação entre a disciplina Álgebra Linear e as necessidades do licenciado que atuará na Educação Básica e, apesar de ser apresentado o que se espera da disciplina *Laboratório de Ensino,* não há indícios de como isso, efetivamente, será realizado em conjunto à *Álgebra Linear*.

Na Universidade Federal do Centro-Oeste

A descrição da Licenciatura em Matemática, oferecida pela Universidade Federal do Centro-Oeste – UFCO –, está baseada no Projeto Pedagógico do Curso aprovado e implantado em 2012, nas ementas disponíveis no sítio da instituição e entrevista realizada com um dos professores que ministram Álgebra Linear para esse curso.

O professor entrevistado será chamado de Pedro para preservar o seu anonimato. Pedro é bacharel licenciado em Matemática e fez o mestrado em Matemática Aplicada. Ele atua no magistério do Ensino Superior desde 2008 e ministra as disciplinas *Álgebra Linear* e *Vetores e Geometria Analítica* na UFCO.

Para agendar essa entrevista, foi necessário ligar e enviar diversos e-mails para os professores e para o departamento de Matemática. O primeiro e-mail foi enviado já no início de 2015, mas apenas em agosto de 2015 consegui conversar por telefone com a coordenadora do curso, pois a instituição estava em greve.

Em agosto, a coordenadora alegou não ter horário para agendarmos uma entrevista, mas indicou o professor Pedro, com o qual consegui, no mesmo dia, estabelecer contato por telefone e agendar uma entrevista.

A entrevista ficou agendada para a semana seguinte ao contato e seria realizada com o auxílio do *Skype*, mas, na véspera da entrevista, Pedro me enviou um e-mail desmarcando-a.

Após um mês da data acordada inicialmente, agendamos uma nova data e novo horário. E, novamente, o Professor Pedro pediu para retomarmos o contato, dessa vez duas horas mais tarde, pois devido à greve estava com algumas pendências que estavam tomando-lhe o tempo.

Por fim, conseguimos estabelecer a conexão por meio do *Skype.* A entrevista com duração de aproximadamente 40 minutos foi audiogravada, transcrita e aprovada por Pedro.

A Licenciatura em Matemática na UFCO

O curso na UFCO é oferecido desde 1981. De acordo com PPC UFCO (2012), tem duração mínima de quatro anos e carga horária total de 2847 horas. O objetivo geral é o de “formar professores de Matemática para atuarem nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio” (p. 60) e pretende “proporcionar, ao futuro professor, conhecimentos sólidos dos conteúdos básicos de Matemática” (p. 60), assim como, “propiciar a formação de um educador crítico e investigador de sua prática, capaz de atuar de forma autônoma e criativa diante dos desafios pedagógicos do mundo contemporâneo” (p. 60).

No PPC UFCO (2012), é descrito que o egresso pode, também, atuar como: avaliador e produtor de materiais e tecnologias para o ensino de Matemática na Educação Básica; prosseguir os estudos em Programas de Pós-Graduação *Strictu Sensu* na área de Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada ou áreas afins; dedicar-se à pesquisa e ao magistério do Ensino Superior. Mas, Bittar et al. (2012) descrevem que muitos dos egressos dessa universidade, que concluem a licenciatura em Matemática em quatro anos, vão em busca de um curso em nível de mestrado logo após o término da graduação e acabam, naturalmente, ingressando na carreia do magistério no Ensino Superior.

De acordo com o PPC UFCO (2012), a licenciatura em Matemática está alicerçada em teorias de aprendizagem com foco na construção do conhecimento pelo aluno e espera-se que o futuro professor seja um profissional reflexivo e transformador. Para isso é investido, por exemplo, "em metodologias e ações que objetivem valorizar: os conhecimentos prévios dos alunos (e) [...] a pesquisa como princípio educativo e científico [...]" (p. 59).

Outro ponto, a ser destacado, é a articulação entre as disciplinas no curso, pois de acordo com o PPC UFCO (2012), a matriz curricular "foi constituída a partir de disciplinas que irão discutir e explorar os conteúdos matemáticos relacionados à álgebra, à geometria, ao campo numérico, à análise matemática" (p. 60), cabendo às disciplinas do primeiro semestre "reconstruir conceitos matemáticos relacionados à Educação Básica, além de introduzir novos conceitos e procedimentos" (p. 59).

Para os autores do projeto pedagógico, no processo de integração ao curso e à profissão, os conceitos da Educação Básica devem ser retomados na "perspectiva de aprender a aprender e aprender a ensinar" (PPC UFCO, 2012, p. 59) e no decorrer do curso, deve-se fazer com que o estudante sempre aprenda os conteúdos de Matemática articulados aos conteúdos pedagógicos da Matemática, assim como, aos conhecimentos da área da educação e da pedagogia.

As articulações entre as disciplinas são descritas no PPC e a Álgebra Linear é mencionada em dois campos: numérico e algébrico e da geometria.

O trabalho no campo numérico e algébrico tem início na disciplina Introdução ao Cálculo, no primeiro semestre do curso e segue com as disciplinas Álgebra I, Álgebra Linear, Álgebra II, Álgebra III, Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações, Álgebra IV, Cálculo Numérico, Análise Real I e Análise Real II.

Já, o trabalho no campo da geometria tem início no primeiro semestre com a disciplina Construções Geométricas e é articulado com o tratamento Vetorial, dado nas disciplinas Vetores e Geometria Analítica e Álgebra Linear. O desenvolvimento desse campo continua com Geometria I e Geometria II, em que será discutida a abordagem axiomática da Geometria Euclidiana, devendo ser apresentado também um modelo de Geometria Não-Euclidiana.

A Álgebra Linear na UFCO

A disciplina Álgebra Linear é ofertada no terceiro semestre, com 68 horas, e aborda os conteúdos: Matrizes; Sistemas de equações lineares; Espaços vetoriais; Transformações lineares; Espaços com produto interno; Diagonalização de operadores. As referências básicas são (2 – 1986, 3 – 2003, 10 – 1976 e 30)[144] e as complementares (4 – 2001, 7 – 1994, 12 – 1996 e 31).

Para o professor Pedro é comum seguir a ementa, pois há a necessidade de atender diferentes cursos: “[...] nessa turma há alunos que não são da Matemática, são da Engenharia Elétrica, as turmas comportam alunos de diversos cursos, por exemplo, neste semestre tenho alunos de Física!”. Além disso, ele contou que procura seguir a organização proposta e adotada pelos colegas da instituição desde quando chegou à universidade, pois eles já utilizavam, principalmente, os livros do Caliolli et al. (1984) e Boldrini et al. (1983). Pedro disse, também, não ter coragem de indicar livros que utilizou no período em que fez sua graduação:

> [...] falando em livros, vou abrir um parêntesis, não tenho coragem nem de mencionar, aqui, livros que eram indicados naturalmente para mim na época da graduação, pois as turmas que pego são turmas de primeiro, segundo e terceiro semestres e são gigantescas, aqueles alunos que acabaram de entrar e não estão habituados com uma leitura mais refinada, por isso utilizo o Caliolli que é um livro com uma linguagem mais acessível, sem perder a essência (PEDRO, 2015).

Sobre a organização do curso, Pedro acredita ser interessante iniciar com matrizes e sistemas de equações lineares, pois considera que, se não fizer assim, será necessário retomar esses conteúdos em algum outro momento, para ele: “[...] é mais proveitoso iniciar com essa retomada de algo que, de certa forma, é familiar e provocá-los para já refletirem sobre os detalhes relacionados a esses conteúdos...”.

Questionei sobre essas possíveis reflexões que relacionariam os conteúdos da Educação Básica com os abordados em Álgebra Linear, Pedro alega que:

> [...] é inegável a necessidade do estudo de sistemas lineares, então é importante que ele (licenciando) tenha na graduação uma oportunidade de rever, aprofundar e refletir sobre o que é um sistema de equações lineares, o que é um conjunto solução, o porquê das

[144] O uso do (2 - 1986) indica que foi utilizada a segunda obra da lista com a edição de 1986.

> técnicas de escalonamento, não é? O que realmente significa a classificação de um sistema em possível determinado, possível indeterminado, impossível? É importante fazer com que o licenciando interprete isso geometricamente, fazer com que ela vá mais fundo... ver, por exemplo, que a solução de um sistema linear homogêneo vai sempre configurar um espaço vetorial e, mais, qual a vantagem de se perceber tal fato? (....) Observe que, se ele tiver a oportunidade de aprofundar isso, estará possivelmente fortalecendo suas escolhas enquanto professor da Educação Básica! (PEDRO, 2015).

Pedro afirma que a Álgebra Linear é importante para o licenciando, por permitir que ele trabalhe conteúdos que serão ensinados na Educação Básica, mas considera que

> [...] existe o outro lado, até mais importante e interessante, penso que nós não aprendemos as coisas apenas para depois ensinar novamente, não dá para estabelecer a relação em que tenho que ver na disciplina exatamente aquilo que vou ensinar depois e de preferência do mesmo jeito, "*control c*" e "*control v*", o que aprendi aqui, vou lá e vou repetir, isso não existe! ... Acredito que a grande importância da Álgebra Linear é ter a oportunidade de olhar para conteúdos já estudados na Educação Básica, mas com um novo olhar, aprofundando a leitura sobre o objeto, buscando compreendê-lo de uma forma mais abrangente que extrapole aquela velha ideia de caixa de conteúdos e, além disso, o mais importante, fortalecer a ideia de estrutura! Assim o professor poderá ter uma visão panorâmica e ao mesmo tempo aprofundada sobre os objetos estudados... (PEDRO, 2015).

Pedro, que também ministra a disciplina *Vetores e Geometria Analítica,* afirmou que sempre procura construir os dois cursos de forma que os estudantes estabeleçam algumas relações. Ele declara:

> em Geometria Analítica, por exemplo, já falo sobre mudança de base, assunto que eles irão estudar depois em Álgebra Linear, no contexto de Geometria Analítica já vou introduzindo algumas ideias porque fica mais natural retomar em Álgebra Linear e generalizar essas ideias.... é interessante você apresentar um conteúdo, dar tempo ao aluno e depois retomar com mais propriedades.... (PEDRO, 2015)

Um exemplo apresentado por ele:

> [...] quando ele (licenciando) estuda produto interno, ele está vendo noções de ortogonalidade, novamente, assunto da Educação Básica que já foi retomado inclusive no curso de Geometria Analítica, mas para espaços vetoriais particulares. Aliás, quando você, em Álgebra

> Linear, introduz o conceito de espaço vetorial, você pode aproveitar para fazer com que o licenciando olhe para conteúdos já conhecidos a partir de um novo ponto de vista ... é um conjunto com operações bem definidas, ou seja, um espaço vetorial ... esse espaço admite uma base, quero dizer, existe um pequeno conjuntinho de elementos que lhe permite gerar todos os outros... e a partir da base vem o conceito de dimensão, que, lá no Ensino Fundamental e Médio, permite analisar os conjuntos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$..., ele precisa perceber que esses conjuntos são espaços vetoriais! (...) Isso é vantajoso, pois estou aprofundando a compreensão que ele terá sobre aquilo, que já estudou, sem ter observado tantas características! (PEDRO, 2015).

Para ele,

> [...] após esse início, retomada de conteúdos essenciais e preparo do terreno para aprofundar algumas ideias, inicio com o conceito espaços vetoriais, mas vou logo contando que eles vão trabalhar com um conceito que vai abraçar uma gama enorme de conjuntos e, mais, vão verificar que existe algo em comum entre esses conjuntos que a princípio podem parecer totalmente desconexos, por exemplo, o conjunto dos polinômios de grau *n* com *n* maior ou igual a 2, o conjunto das matrizes, o conjunto dos números complexos, o conjunto dos números reais... Esse conceito é o de espaço vetorial ... (PEDRO, 2015).

Questionei se o professor Pedro considera necessário que o licenciando tenha feito alguma disciplina antes de Álgebra Linear, ao que respondeu:

> Não vou dizer que é obrigatório, ele pode entrar no primeiro semestre em Álgebra Linear e não vai ter nenhum conceito ali que não tenha visto no Ensino Fundamental e Médio... mas, acho que é um pecado entrar direto em Álgebra Linear, ver aquilo tudo sem antes ter brincado com os vetores em Geometria Analítica (...) Olha! O nome espaço vetorial possivelmente foi inspirado na álgebra dos vetores, é uma coisa conveniente, costumo dizer que foi inspirado em vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, provavelmente (os matemáticos) observaram essas propriedades primeiro nos vetores e depois foram olhar, por exemplo, para os polinômios... e daí observaram que muitos outros conjuntos gozavam dessa mesma propriedade .... acredito que daí vem o nome espaço vetorial, quero dizer conjuntos que algebricamente se comportam como os espaços dos vetores .... sempre falo isso em sala.... (PEDRO, 2015).

Pedro prosseguiu contando que, ao iniciar o estudo dos espaços vetoriais, faz com que os alunos resgatem conceitos discutidos em Geometria Analítica:

> [...] vocês lembram quando estudamos adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar? Então, ter essas duas

> operações bem definidas vai ser essencial para falarmos sobre espaço vetorial... O espaço vetorial vai exigir que você tenha duas operações, a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar, cada uma deverá satisfazer um certo conjunto de axiomas! (PEDRO, 2015).

Para ele "... o grande passo é fazer com que eles (licenciandos) compreendam que uma matriz também é um vetor! Afinal, será necessário extrapolar a noção de vetor que eles têm da Geometria Analítica, não é?" (PEDRO, 2015) e, ainda, afirma acreditar que

> esse momento deve ser cheio de exemplos, para que ele (licenciando) perceba que conjuntos de naturezas diferentes possuem elementos chamados vetores e, mais, quando você consegue definir aquelas duas operações é possível verificar se esse conjunto munido dessas operações se adequa à estrutura de espaço vetorial... essa é a beleza que te falava!

Ele considera que no final do curso de Álgebra Linear acontece o seguinte:

> [...] o estudante entende que uma matriz pode representar uma função e, mais, tem a oportunidade de refletir sobre esse conteúdo tão importante da Educação Básica e extrapolar aquela ideia de função que geralmente tem, pois a função pode ser representada por uma matriz. Observe que ele vai juntar dois conceitos que estão isolados!... E não para por aí, ao estudar diagonalização de operadores, em que ele procura uma base em um espaço tal, e percebe que aquela matriz tem uma configuração diagonal, é um dos momentos em que você pode usar, por exemplo, uma aplicação, aquela que permite discutir a questão da translação e rotação das cônicas que vão sendo geradas (...) Olha! Com a Álgebra Linear você pode proporcionar uma formação em que esse professor tem a oportunidade de refletir mais sobre esses conceitos! (PEDRO, 2015).

Como o curso da UFCO permite que o egresso prossiga os estudos em Programas de Pós-Graduação *Strictu Sensu* na área de Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada ou áreas afins, questionei sobre a importância da Álgebra Linear no desenvolvimento desse estudante em Matemática e Pedro iniciou afirmando que essa é uma das disciplinas que ganhou força com a Mecânica Quântica na Física, mas que também tem muitas aplicações na Mecânica Newtoniana.

Pedro relembrou o período em que cursou o mestrado. Ele relata:

> [...] no meu mestrado em Biomatemática, utilizei equações diferenciais e sofri muita influência da Álgebra Linear!…..no momento em que você estuda uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e encontra um conjunto solução, você acaba tendo a necessidade de mostrar que todo esse conjunto solução pode ser escrito a partir de duas funções linearmente independentes.... para mim o conceito dependência linear entre vetores está no âmago da Álgebra Linear…. (PEDRO, 2015).

Ele contou, também, que colegas, que desenvolveram pesquisas na área de otimização, faziam muito uso de Álgebra Linear: “na área de otimização, por exemplo, é um absurdo... Álgebra Linear o tempo todo! ... Método simplex…. um monte de vetores e era necessário provar se eles eram LI ou LD.... mais uma vez, Álgebra Linear!” (PEDRO, 2015).

Sobre os seus colegas da Física, ele lembrou que ao estudar Mecânica Quântica boa parte do tempo eles estavam

> [...] provando se é ortogonal, se não é ortogonal, produto interno... [...] estavam falando de espaço vetorial de dimensão infinita, [...] Análise Funcional, o estudo de espaços vetoriais de dimensão infinita, consequência direta de Álgebra Linear.... estou falando isso tudo para concluir que nunca duvidei da importância da Álgebra Linear dentro do contexto da Matemática e das Ciências em geral.... estou convencido dessa importância.... (PEDRO, 2015).

Em síntese, dos materiais apresentados, destaco os fatos, que me saltaram aos olhos, no PPC UFCO (2012), está explícito que o licenciando deve aprender os conteúdos de Matemática articulados aos conteúdos pedagógicos da Matemática, assim como, a necessidade de o professor formador estabelecer relações com as questões que irá enfrentar na Educação Básica. No entanto, os grupos que participam da disciplina Álgebra Linear são compostos por estudantes de diferentes cursos, como contou o professor Pedro.

Por isso, considero que mesmo que o professor da disciplina queira implementar as orientações presentes nos projetos pedagógicos, terá dificuldades, afinal, irá atender às demandas de qual dos cursos?

Tal observação é pertinente e está presente, também, em CBMS (2012), ao afirmarem as dificuldades dos departamentos de Matemática em propor disciplinas de Matemática específicas para a formação de professores, devido à quantidade mínima de alunos exigida pelas instituições ao formar as turmas.

Na Universidade Estadual do Sudeste A

A descrição da Licenciatura em Matemática, oferecida pela Universidade Estadual do Sudeste A – UESE-A –, está baseada no Projeto Pedagógico do Curso[145] aprovado e implantado em 2013, nas ementas e planos de ensino disponíveis no sítio da instituição e nas entrevistas realizadas com um dos professores que ministram Álgebra Linear e com uma professora que já atuou como coordenadora do curso.

O professor, que ministra a disciplina *Introdução à Álgebra Linear* para a Licenciatura em Matemática na UESE-A, será chamado de Théo, já a professora será chamada de Ana, garantindo, assim, o anonimato dos dois professores.

Théo é pesquisador em Matemática, especificamente em Teoria dos Anéis e, por diversos semestres, já ministrou a disciplina *Introdução à Álgebra Linear*. Atua no Ensino Superior desde a década 1970 e está na instituição há dezesseis anos.

Ana é pesquisadora em Matemática, mais especificamente em formas espaciais e hipersuperfícies. Ana nunca ministrou a disciplina *Introdução à Álgebra Linear*, mas a escolhi por atuar na instituição há pelo menos dezesseis anos e já ter sido coordenadora da Licenciatura em Matemática, em questão.

As duas entrevistas foram realizadas, presencialmente, em datas, horários e locais previamente acordados entre as partes. Em ambos os casos encaminhei um e-mail em março de 2015 convidando-os, sem resposta, entrei em contato por telefone e agendamos ambas as entrevistas para junho de 2015, período em que os professores alegaram estar com menos atividades na universidade.

Foram entrevistas individuais, audiogravadas, transcritas e aprovadas pelos professores. A entrevista com Théo durou cerca de 20 minutos, já a entrevista com Ana, 30 minutos.

A Licenciatura em Matemática na UESE-A

O curso de Licenciatura em Matemática foi fundado na UESE-A em 1934. De acordo com PPC UESE-A (2013), a licenciatura é ofertada nos períodos diurno (duração mínima de quatro anos) ou noturno (duração mínima de cinco anos),

[145] Tal projeto é fruto de discussões iniciadas na instituição no início da década de 1990 e adequações às legislações vigentes (BRASIL, 1996, 2001a, 2001b, 2002, 2003).

ambas com 3155 horas no mínimo, pois a estrutura curricular permite várias combinações, todas com o objetivo de formar professores de Matemática para atuar na segunda fase do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

É esperado, dentre outras características, que o licenciado domine o conhecimento matemático específico e não trivial e perceba que o conhecimento de certos conteúdos e o desenvolvimento de determinadas habilidades e competências próprias do fazer matemático são relevantes para o exercício pleno da cidadania.

Espera-se também que o licenciando tenha

> [...] maturidade para utilizar adequadamente ou perceber o significado do rigor dedutivo num processo de demonstração, assim como para empregar procedimentos indutivos ou analógicos na criação de Matemática, entendida como uma atividade de resolução de problemas, tanto na sua relação pessoal com a ciência Matemática, quanto na dinâmica de ensino-aprendizagem (PPC UESE-A, 2013, p. 3).

Dentre as habilidades e competências esperadas, destaco duas: o estudante deve desenvolver o pensamento heurístico, isto é, ter a “capacidade de resolver e formular problemas, explorar, estabelecer relações, conjecturar, argumentar e validar soluções” (PPC UESE-A, 2013, p. 4) e, ainda, ter

> [...] domínio dos raciocínios algébrico, geométrico, combinatório e não determinista de modo a poder argumentar com clareza e objetividade dentro destes contextos cognitivos. Ou seja, os alunos devem desenvolver capacidade dedutiva com sistemas axiomáticos, percepção geométrico-espacial, capacidade de empregar ensaio e erro como procedimento de busca de soluções e segurança na abordagem de problemas de contagem, probabilísticos e estatísticos (PPC UESE-A, 2013, p. 4).

A estrutura curricular da Licenciatura em Matemática é composta por disciplinas obrigatórias, optativas eletivas e optativas livres. Para os autores,

> a estrutura permite que o(a) aluno(a) possa escolher áreas de aprofundamento que correspondam ao seu gosto pessoal, seja voltado à área de Educação ou aproximado de um currículo de bacharelado em Matemática, Estatística, Computação ou Física ou abrindo espaços para outras atividades profissionais afins com a Educação Matemática (PPC UESE-A, 2013, p. 4).

As disciplinas obrigatórias contemplam as exigências da legislação federal, Resolução CNE/CES 3 (BRASIL, 2003), sobre os componentes curriculares obrigatórios. Essas disciplinas são organizadas em grandes áreas de conteúdo, são elas: álgebra, geometria, análise matemática, estatística, informática, física, história e fundamentos da matemática, prática como componente curricular, pedagógica e estágio curricular supervisionado.

A álgebra é apresentada da seguinte forma:

> nessa área são discutidas, de um ponto de vista abstrato, a teoria elementar dos números (aritmética) e as propriedades dos anéis de polinômios, bem como tratadas a necessidade de ampliação do corpo dos reais e a introdução dos números complexos. Os objetivos fundamentais são a revisão crítica da álgebra elementar, o cuidado no trato do raciocínio lógico-algébrico, a contextualização histórica destes conteúdos, e a discussão da prática pedagógica dessa área no ensino básico. Alguns aprofundamentos possíveis são na teoria dos números ou sobre tópicos de estruturas algébricas e aplicações (PPC UESE-A, 2013, p. 5).

Não há citações em nenhuma das áreas sobre a disciplina *Introdução à Álgebra Linear*, sendo a única disciplina obrigatória sobre o assunto. No que segue, descrevo a estrutura dessa disciplina, com base no projeto pedagógico, nas ementas, nos planos de ensino, ambos do curso oferecido no período noturno[146] e nas duas entrevistas realizadas com professores da instituição.

A disciplina Introdução à Álgebra Linear na UESE-A

A disciplina *Introdução à Álgebra Linear* é ofertada no segundo semestre do curso, de um total de dez, e tem carga horária de 60 horas. Para o professor Théo, essa carga horária é suficiente, mas se houvesse a possibilidade de aumentar seria interessante: “[...] acho que é mais ou menos suficiente, pelo menos, para dar as coisas principais…” (THÉO, 2015).

Théo contou que na Rússia, onde trabalhou antes de vir ao Brasil, a Álgebra não é separada em disciplinas isoladas, lá “[...] o aluno faz Álgebra..., em um semestre falamos um pouco mais de Álgebra Linear, em outro, outra…. e assim

[146] A escolha pelo curso no período noturno se deu por ser o que representa a realidade das licenciaturas no país (GATTI; BARRETO, 2011).

vai…”, para ele, essa é uma disciplina que deve permear todo o início de uma graduação.

Em relação aos objetivos da disciplina há, no plano de ensino: “familiarizar o estudante com os conceitos de transformação linear e espaço vetorial de dimensão finita através da geometria do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$” e “trabalhar a relação entre matrizes e transformações lineares, bem como a resolução de sistemas lineares de equações” (PE UESE-A, 2014).

Questionei o professor Théo sobre o formato da disciplina em relação aos objetivos apresentados e ele disse que isso dependerá de cada professor, pois “[...] em geral tudo pode ser dado algebricamente, mas sempre é bom dar ideias, mostrar como funciona em duas e três dimensões… trazer exemplos mais geométricos…” (THÉO, 2015). Para ele:

> Usando a Álgebra Linear, pode-se mostrar uma forte relação entre álgebra e geometria: quase todas as definições e teoremas algébricos têm boa interpretação geométrica; por outro lado, vários problemas geométricos podem ser resolvidos de maneira fácil, depois de serem traduzidos na linguagem da Álgebra Linear (THÉO, 2015).

Ao questionar a professora Ana, ela disse imaginar que os professores que atuam na licenciatura devem

> [...] abordar os conteúdos, que muitas vezes não são os conteúdos ensinados lá na escola (Educação Básica), e fazer com que os alunos reflitam sobre o fato de o que eles estão aprendendo na graduação, em Matemática poder, em um determinado momento, em um determinado assunto, auxiliá-los, pois ao saber a Matemática, que está por trás, ficará muito mais simples ensinar lá na escola, não é? (ANA, 2015).

Ana exemplifica com o conceito de matriz, para ela, o professor que atua na licenciatura, ao ensinar esse conceito, deve discutir sobre

> [...] para que serve matriz? Simplesmente para calcular o determinante? Não! Matrizes têm diversas utilidades... Quais tipos de problemas podem ser resolvidos utilizando matrizes? Sistemas de equações, o que significa resolver um sistema de equações? Acredito que ao pensar sobre o que significa ter um sistema, discutir se esse sistema é determinado ou indeterminado, analisar o comportamento de duas retas, então, o que pode acontecer com

> duas retas? [...] Quero dizer: como eu traduzo esse conceito geométrico na álgebra? (ANA, 2015).

No plano de ensino, é apresentado o que o professor deverá abordar sobre a disciplina, a saber:

> A geometria dos vetores no plano e no espaço. Transformações do espaço. Transformações lineares (no plano e no espaço). Somas e composição de transformações lineares. Inversão e sistemas de equações lineares. Determinantes. Autovalores de transformações do plano e do espaço. Matrizes simétricas. Classificação das superfícies cônicas e quádricas. A geometria dos vetores de $\mathbb{R}^m$. Transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Matrizes. Sistemas de equações lineares, homogêneos e não homogêneos. Determinantes. Espaços vetoriais. Bases e dimensão. Existência e unicidade de soluções de um sistema linear. Teorema de Rouché-Capelli. Matriz de uma transformação linear. Espaços vetoriais com produto interno. Bases ortonormais. Projeção ortogonal. Aproximação de funções polinomiais (PE UESE-A, 2014).

E, ainda, sobre a estrutura curricular, nota-se que, para o estudante cursar a disciplina *Introdução à Álgebra Linear,* deve, antes, ter cursado a disciplina Geometria Analítica. O professor Théo considera não haver essa necessidade.

Em relação à bibliografia básica, foram citadas quatro obras (3 – 1977, 27, 28 e 29) e, ainda, o estudante pode optar em fazer um segundo curso de Álgebra Linear, no entanto, irá depender da forma como organizou sua grade curricular.

Na entrevista, Théo afirmou que a Álgebra Linear é fundamental na formação de um professor em Matemática, pois

> [...] tanto na licenciatura, quanto na Matemática (bacharelado), a Álgebra Linear é uma disciplina básica… ela é básica para várias disciplinas, pois para poder seguir no estudo de outras disciplinas é preciso saber Álgebra Linear! … Na Álgebra, [...] Análise Funcional… Equações Diferenciais... tudo, tudo, tudo!… Onde aparecer espaços vetoriais..., praticamente em toda a Matemática, portanto Álgebra Linear é básica... tem que estudar! A Álgebra Linear é mais ou menos como o Cálculo… as duas são disciplinas básicas... Acredito que a Álgebra Linear é ainda mais do que o Cálculo (THÉO, 2015).

Ana também considera importante que o licenciando faça a disciplina Álgebra Linear, para ela,

> [...] quando esses conceitos, esses tópicos são abordados na universidade, tem a parte matemática que o aluno tem que entender, mas deve existir ao longo da disciplina, momentos em que o professor relacione isso com o que acontece lá na escola básica... Não é o que o aluno aprende aqui que ele vai ensinar lá, mas o aluno tem que entender que ele precisa saber muito bem a Matemática, pois em vários momentos na escola básica ele precisará justificar suas escolhas e o próprio argumento matemático utilizado, por isso, ele precisa ter como base essa Matemática estudada aqui... ele tem que pensar que aquele conteúdo que aprendeu aqui (na universidade) justifica... Isso acontece, por exemplo, no momento em que ele vai demonstrar na sala de aula, ele vai fazer com que o seu aluno empiricamente se aproxime do porquê... o aluno (licenciando) não vai ensinar este conteúdo lá, mas o aluno (licenciando) tem que saber o porquê de uma afirmação ser verdadeira! ... Assim, ao trabalhar na escola, saberá trabalhar melhor com os seus alunos (ANA, 2015).

Para entender como o professor Théo concebe o curso de Álgebra Linear, enquanto oportunidade de formação profissional de um professor de Matemática, questionei-o sobre as relações, quando possíveis, existentes entre a Matemática e a pedagogia, e ele respondeu:

> Primeiro, acredito que para ser professor e ensinar Matemática o professor tem que entender Matemática... tem que entender os conceitos matemáticos…, o professor tem que saber as coisas essenciais [...] Se você não sabe uma disciplina bem, fica difícil desenhar um curso (....) O professor tem que saber muito mais do que ele dará aos seus alunos, ele não pode apenas conhecer aquilo que ele está dando, ele tem que ir muito mais fundo (THÉO, 2015).

Neste aspecto, Théo apresenta a Álgebra Linear como sendo um espaço em que é possível propor situações, que permitam fazer com que o licenciando se desenvolva matematicamente. Assim, ele defende que

> [...] a Álgebra Linear tem demonstrações (...) noções muito difíceis, e mais …. conceitos essenciais que permitem entender o que são axiomas ... por exemplo, espaços vetoriais é uma amostra do poder do método axiomático, porque depois que você provou para um espaço vetorial poderá aplicar esse trabalho para exemplos concretos que parecem ser bem diferentes (...) outro exemplo, em Álgebra Linear, é a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Burakovski que tem as suas aplicações em várias situações que parecem não ter nada em comum…. mas ... demonstrar a desigualdade em cada situação é bem difícil... existe uma demonstração geral para qualquer espaço... que depois pode ser aplicada… isso é uma amostra da Matemática (…) é o método axiomático, é importante, pois você

> prova no caso geral e verifica em todos os casos particulares. (THÉO, 2015).

Já, Ana considera que a Álgebra Linear deve ser obrigatória na Licenciatura em Matemática

> [...] mas, diria para sempre tentar fazer a conexão com a escola básica porque no fundo é o que os nossos alunos esperam (...) os licenciandos às vezes falam: por que tenho que aprender se eu não vou ensinar isso? Essa é uma critica que eles fazem com frequência (...) caberá, então, ao professor fazer uma transposição didática e mostrar as relações existentes entre os conteúdos e isso não é fácil de ser feito, não é? Ainda mais que a maioria, a grande maioria, dos professores que dão aulas no curso de licenciatura são matemáticos e alguns deles nunca discutiram as questões relacionadas à educação, por isso, esbarramos em um outro problema... mas, a gente tenta resolver essas questões ... (ANA, 2015).

O professor Théo, por exemplo, declarou desconhecer os documentos que norteiam a Educação Básica no país, mas afirmou que em Álgebra Linear o licenciando tem a oportunidade de explorar conceitos importantes como dependência linear entre vetores e base de um espaço vetorial, para ele:

> [...] questões sobre vetores são estudadas na *escola secundária* ... eles estão estudando vetores em espaços de dimensão 2, 3 e ….sabendo isso como um caso particular, conhecendo no contexto da Álgebra Linear, o professor vai dominar as questões geométricas bem melhor, mais profundamente... A geometria elementar é um caso particular de Álgebra Linear, então entender essas coisas mais profundamente, digamos do ponto de vista da Álgebra Linear, vai ajudar os professores a ensinar melhor essas coisas para os seus alunos … (THÉO, 2015).

Ana, em relação às conexões da Matemática estudada na graduação e a Matemática da Educação Básica, contou que cabem às disciplinas, que possuem uma carga horária destinada às práticas de ensino como componente curricular – PECOC –, pautar as discussões em sala e conduzir os alunos a fazerem trabalhos que relacionam um conteúdo matemático estudado na graduação com o que acontece na sala de aula da Educação Básica. Para ela, “em geral, são os professores, que estão envolvidos com disciplinas que têm (PECOC), que acabam por discutir mais, pois estão mais próximos da realidade da escola e acabam naturalmente fazendo isso em todas as disciplinas que ministram” (ANA, 2015).

A disciplina *Introdução à Álgebra Linear* não tem horas destinadas às PECOC, mas Ana afirma acreditar que nessa disciplina não seja diferente das outras, pois na instituição:

> é bem comum solicitar trabalhos, apresentações nos quais os alunos devem fazer uso, por exemplo, do *Geogebra* ao discutir questões relacionadas ao pensamento geométrico... Nós procuramos criar essa cultura desde o primeiro ano, de forma que os próprios alunos questionem, até mesmo, professores de disciplinas que não têm as práticas.... Na realidade não é perfeito, não é? Mas (...) tudo irá depender da postura do professor... (ANA, 2015).

Assim como Théo, Ana também afirma ser difícil dizer o que realmente ocorre em sala, “pois se tivermos dois professores distintos que ministram a mesma disciplina, eles terão visões diferentes sobre o que é mais importante [...]”, para ela, isso terá impacto direto no trabalho desenvolvido.

Em síntese, há uma preocupação “necessária” em relação aos conceitos matemáticos específicos que o licenciando deve aprender. Mas, há indícios de <u>o estudante</u> na disciplina *Introdução à Álgebra Linear* ser o <u>principal responsável por estabelecer as conexões</u> entre essa Matemática e a Matemática que ensinará na Educação Básica, pois o professor, que ministra a disciplina, reconhece a importância dessa disciplina e estabelece a conexão com diversos conceitos, no entanto, mostra não ter conhecimento das necessidades que o licenciado terá ao atuar na Educação Básica.

A coordenadora, por sua vez, reconhece que alguns professores com formação específica em Matemática “[...] nunca discutiram as questões relacionadas à educação, por isso, esbarramos em um outro problema [...]” (ANA, 2015). Para ela, os professores de “disciplinas específicas”, que não têm uma carga-horária destinada às práticas curriculares, devem também proporcionar tais reflexões com seus alunos e acredita que <u>os licenciandos levarão</u> essa necessidade para a sala de aula.

Na Universidade Estadual do Sudeste B

A descrição da Licenciatura em Matemática, oferecida pela Universidade Estadual do Sudeste B – UESE-B –, está baseada no Projeto Pedagógico do Curso aprovado e implantado em 2015, nas ementas e planos de ensino disponíveis no sítio da instituição e nas entrevistas realizadas com um dos professores, que ministram Álgebra Linear, e com uma professora, que já atuou como coordenadora do curso.

O professor que ministra a disciplina *Álgebra Linear* para a Licenciatura em Matemática na UESE-B será chamado de Felipe, já a professora será chamada de Karina garantindo, assim, o anonimato dos dois professores.

Felipe é bacharel em Matemática, mestre em Matemática Aplicada e Doutor em Agronomia, ministra a disciplina na instituição há vinte anos e tem um livro publicado sobre Álgebra Linear.

Já, Karina é licenciada em Matemática, Mestre e Doutora em Educação Matemática e atua no magistério do Ensino Superior há pelo menos vinte anos, sendo os últimos dez, na UESE-B; atuou, também, como coordenadora do curso em questão e trabalhou apenas uma vez com Álgebra Linear, com estudantes de Engenharia.

Em agosto de 2015 encaminhei um e-mail e telefonei para ambos os professores. Eles prontamente aceitaram o convite e disponibilizaram datas e horários para realizarmos a entrevista.

Foram entrevistas individuais, audiogravadas, transcritas e aprovadas pelos professores. A entrevista com Felipe durou cerca de 50 minutos e a entrevista com Karina, 30 minutos.

A Licenciatura em Matemática na UESE-B

A Licenciatura em Matemática na UESE-B foi criada em 1969. De acordo com o PPC UESE-B (2015) o curso de Licenciatura em Matemática é ofertado no período noturno com 2895 horas e tem como objetivo geral “propiciar a formação de professores de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, compreendendo do 6º ao 9º ano, e do Ensino Médio” (PPC UESE-B, 2015, p. 3) e é esperado que

> o concluinte deve estar apto a articular os conhecimentos de Matemática e Educação, por ele apropriados no decorrer do curso, com os conceitos a serem lecionados na Educação Básica e com o cotidiano das pessoas e de outras áreas do conhecimento. (PPC UESE-B, 2015, p. 3)

Além da atuação em sala de aula, o curso oferecido permite que os concluintes atuem na elaboração de materiais didáticos voltados para o ensino de Matemática, desenvolva pesquisas em nível de pós-graduação e aplique teorias matemáticas na resolução de problemas relacionados a diversas áreas do conhecimento, nas quais o pensamento matemático se faz presente.

No projeto pedagógico, os autores discutem sobre a necessidade de

> [...] romper a divisão estanque entre as chamadas disciplinas de conteúdo específico versus disciplinas pedagógicas, para possibilitar a adequação intelectual entre o conteúdo programático das disciplinas e o universo de conhecimentos do professor, necessários ao bom desenvolvimento do magistério nos Ensinos Fundamental e Médio [...] (PPC UESE-B, 2015, p. 5)

Nesse sentido "as disciplinas de conteúdo Matemático devem também colaborar na produção de conhecimentos dos licenciandos, no tocante aos aspectos relacionados à instrumentalização para o ensino e à construção dos conceitos matemáticos" (PPC UESE-B, 2015, p. 5).

Em relação à formação do professor em Matemática, os autores destacam:

> O professor de Matemática deve dominar os conteúdos que irá ensinar a seus alunos. As disciplinas de conteúdos específicos, das áreas de álgebra, análise, geometria, fundamentos da matemática, estatística, entre outras [...] (sendo) de fundamental importância que o professor domine algoritmos, conceitos e princípios matemáticos de forma significativa e não primar pela retenção do conhecimento de forma arbitrária. Deve haver também uma valorização da transferência dos conteúdos aprendidos para a realidade do Ensino Fundamental e Médio (PPC UESE-B, 2015, p. 31-32).

É esperado que "o encadeamento dos conteúdos" relacionados à formação em Matemática "fundamente-se numa 'teorização em espiral'" (PPC UESE-B, 2015, p. 32). No caso da Álgebra Linear, a ordem a ser seguida é a seguinte: "Matrizes e Cálculo Vetorial → Geometria Analítica → Álgebra Linear →Estruturas Algébricas → Variáveis Complexas" (p. 32).

A professora Karina (2015) contou ter a impressão de que “os estudantes, atualmente, vêm fazer Matemática porque a concorrência é baixa, e ainda, a Matemática era a disciplina do Ensino Médio que eles mais gostavam, que tinham mais facilidade e que não precisavam estudar …”. Nesse contexto, ela considera que a Álgebra Linear

> [...] é uma das disciplinas em que os alunos apresentam mais dificuldade… [...] quando eles iniciam o curso, percebo um grande choque, pois para eles matrizes era aquele conteúdo que envolvia algumas tabelinhas, algumas operações, não é? E eles começam a perceber que não é bem isso que é exigido deles [....] eles são imaturos ao ponto de não perceberem a inversão no olhar, agora eles devem olhar para os conceitos não só como alunos de Matemática, mas como futuros professores de Matemática! (KARINA, 2015).

Segundo ela,

> atualmente, estou me questionando sobre o meu papel nas turmas de primeiro ano. Talvez, nós professores de primeiro ano, precisamos elaborar estratégias que favoreçam aos alunos a aprenderem estudar e a construírem os conteúdos necessários para terem um bom desenvolvimento na continuidade do curso (KARINA, 2015).

Para atender, também, essa necessidade do público, que a universidade tem recebido, é exigido que o estudante faça no primeiro semestre a disciplina Matrizes e Cálculo Vetorial, pois

> essa disciplina cumpre esse papel, dar subsídio para Álgebra Linear e Geometria Analítica … os estudantes estudam matrizes, sistemas lineares, conteúdos que muitas vezes os alunos da licenciatura não tiveram na escola básica, muitos nunca viram matrizes ou viram uma breve introdução e mais nada! Então, vejo que tendo essa disciplina de matrizes o aluno acaba sendo favorecido, pois tem a oportunidade de atribuir significado a esses conteúdos…. (KARINA, 2015).

Felipe também justifica a necessidade da disciplina Matrizes e Cálculo Vetorial com o fato de em Álgebra Linear ser preciso que o estudante tenha certo domínio dos conceitos matriz, sistema de equações lineares e determinantes, para ele,

> [...] se o aluno não tem esta base bem sólida, ou seja, os conteúdos e conceitos que deveriam ser aprendidos no 2º grau, ele terá muitas dificuldades de acompanhar e ter um bom desempenho nas disciplinas iniciais da graduação, aliás, o que já vem ocorrendo há vários anos. Mais ainda, eles serão os futuros professores que vão atuar nas escolas de Ensino Fundamental e Médio e precisam sair com uma boa formação em Matemática, para serem bons educadores e conscientes e, quem sabe, conseguirem mudar a realidade das escolas públicas, mais especificamente no ensino e aprendizagem da Matemática (FELIPE, 2015).

Questionei sobre o formato dessa disciplina, ao que ele colocou que

> [...] muitas vezes é o primeiro contato que esse aluno tem com tais conteúdos, e ainda, a maioria dos nossos alunos vem da escola pública e, infelizmente, algumas escolas públicas não cumprem o conteúdo programático mínimo, não é? Esse curso não pode ser visto como revisão, se não o aluno não vê sentido naquilo e acaba perdendo mais uma oportunidade ...o curso deve fazer com que os estudantes aprendam esse conteúdo e às vezes é necessário que seja de uma maneira um pouco mais formal, fazendo com que o estudante entenda o que funciona... um exemplo muito simples, poderia discutir sobre as operações com matrizes, esse deve ser ao mesmo tempo um momento de aprendizado e aprofundamento dos conteúdos (FELIPE, 2015).

Felipe considera que essa disciplina tem o papel de resgatar e aprofundar os conceitos e conta como isso acontece na instituição:

> A forma que isso acontece é através de uma avaliação diagnóstica no início da disciplina para saber qual o nível de aprendizado eles possuem. Rever todos os conceitos, propriedades, aplicações e interligação com outras disciplinas. Geralmente aulas expositivas iniciais com resolução de exercícios e trabalhos de pesquisa sobre estes conteúdos, como por exemplo, pesquisar vários livros didáticos 'revisão bibliográfica' e apresentar uma aula 'seminário' sobre determinado conteúdo. Usamos também listas de exercícios para serem resolvidas e discutidas em sala de aula. Não só para aprenderem a mecanização dos conceitos, mas refletirem e discutirem a menor solução e soluções alternativas (FELIPE, 2015).

A Álgebra Linear na UESE-B

A Álgebra Linear é oferecida no terceiro semestre do curso, o que para Karina tem sido bom; para ela, os estudantes ganham com as discussões já realizadas no primeiro ano. Felipe (2015) também concorda: "temos percebido que está adequado, acho que está bom… principalmente pelo fato de no primeiro ano termos colocado a disciplina de Matrizes e Cálculo Vetorial, parece que a nossa estrutura ficou boa …”.

Na ementa, a disciplina Álgebra Linear é apresentada com carga horária de 60 horas. Felipe considera que, apesar de a disciplina Matrizes e Cálculo Vetorial auxiliar em alguns aspetos, sessenta horas ainda não é suficiente,

> pois quando você pega os alunos com dificuldades, sem bagagem sobre demonstração e quer trabalhar com conceitos, como acontece na Álgebra Linear…. para eles fica muito abstrato, por que Álgebra Linear não tem cálculo! Ela é baseada em conceitos fundamentais... e toda hora é um teorema, resultados …. e, eles (estudantes) estranham muito esse tipo de disciplina, principalmente quando você exige ou faz a demonstração de alguma coisa, quando você passa para espaços vetoriais que não permitem uma visão geométrica, somente analítica... eles têm uma dificuldade muito grande, então sessenta horas acaba sendo pouco, quando você pega uma clientela que tem muita dificuldade, você tem que ir devagar, você tem que parar bastante, explicar passo a passo, isso toma um tempo que acaba comprometendo o conteúdo… (FELIPE, 2015).

Para Felipe, o ideal seriam noventa horas, no entanto, considera ser difícil que isso aconteça, pois contou que o grupo teve que fazer malabarismos para montar a grade do curso na última reestruturação.

Nesse sentido, Karina (2015) comentou que foi complicado aprovar “a nova grade na qual há essa discussão da formação do professor, que o curso tem que ser voltado para o professor”, para ela “[...] era preciso a todo instante lidar com as forças das áreas atuando para manter ou não, certas disciplinas…”.

Karina (2015) contou que

> [...] enquanto área de pesquisa, existe uma força, uma pressão para que determinados assuntos (disciplinas) continuem e a Álgebra Linear tem uma certa importância, pois ela permite direcionamentos específicos, por exemplo, na Matemática Aplicada ao tratar de programação linear … ela (a Álgebra Linear) é uma disciplina que serve de suporte para várias áreas de pesquisa em Matemática....

Felipe também considera importante manter a disciplina Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática,

> [...] primeiramente pelo estudo e tudo o que é possível desenvolver com a teoria de matrizes, determinantes e sistemas lineares, os quais são utilizados de alguma forma em todas as outras disciplinas.

> Poderíamos aqui detalhar os conceitos da Álgebra Linear que são utilizados nas outras disciplinas, mas prefiro apenas exemplificar com o estudo das Transformações Lineares, um tipo particular de função, muito utilizada na própria construção do Cálculo Diferencial e Integral; a noção de estrutura quando estudamos as Estruturas Algébricas, na disciplina de Teoria dos Conjuntos, também quando fazemos um *link* com os conceitos da Álgebra Linear que foram aprendidos na disciplina de Geometria Analítica. Então, eles passam a entender que o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$ são casos particulares de Espaços Vetoriais. Além disso, os conceitos e aplicações de matriz de uma transformação e autovetores e autovalores, muito úteis nas disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias, Cálculo Numérico e Otimização Computacional (FELIPE, 2015).

Felipe (2015) contou que na disciplina Geometria Analítica, ministrada antes de Álgebra Linear,

> [...] é introduzido o plano geométrico $\mathbb{R}^2$ e o espaço geométrico $\mathbb{R}^3$ apenas como regiões geométricas, nas quais serão realizados os estudos e representações do Cálculo Vetorial e a Geometria Analítica, como os estudos da reta, plano, ângulos, distâncias, as cônicas, coordenadas polares, translação e rotação dos eixos coordenados. Isso é muito natural, pois são esses os dois únicos espaços, o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$, que nos permitem a interpretação e a representação geométrica daquilo que está sendo aprendido analiticamente.

Mas, considera que é justamente em Álgebra Linear que:

> [...] é introduzido o principal conceito que são os Espaços Vetoriais, quando os alunos percebem que na verdade não existem somente o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$, mas uma infinidade de outros espaços que são tão 'bons', ou têm a mesma 'estrutura' do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$, porém sem a visão ou representação geométrica, mas, analiticamente, são espaços vetoriais também. Então, ao listarmos todos os espaços vetoriais reais mais estudados que são: os espaços do tipo $\mathbb{R}^n$, as matrizes, os polinômios, as funções e o próprio conjunto dos complexos, os alunos percebem que na verdade todos os conteúdos estudados por eles, até o momento, não são conteúdos isolados, mas fazem parte de algum espaço vetorial (FELIPE, 2015).

Felipe ressalta a importância de o professor, principalmente o que irá atuar no Ensino Médio, perceber "as ligações que a Álgebra Linear tem com as outras disciplinas" da graduação, e ainda, afirma que

> um professor, que vai ser um professor de Matemática, principalmente aquele que atua no Ensino Médio, é muito importante

> que tenham essa visão, que esses conteúdos (matriz, função, conjunto dos números complexos, (...) não são conteúdos isolados, mas, sim, que existem estruturas de mesma natureza! ...Principalmente, quando a gente fala de isomorfismo. Na Álgebra Linear é possível mostrar que conteúdos que eles (licenciandos) imaginam isolados, não estão! Matrizes, funções, polinômios próprios, números complexos, não são conteúdos isolados, são conteúdos de mesma natureza ... tudo se encaixa … Na verdade, acho que o mais importante para um curso de licenciatura é essa visão de estrutura. Acho que essa visão de estrutura é fundamental na formação de professores em um curso de licenciatura (FELIPE, 2015).

No plano de ensino de Álgebra Linear, o objetivo apresentado para a disciplina Álgebra Linear é:

> Ao término da disciplina, o aluno deverá ser capaz de: - reconhecer os espaços vetoriais e seus subespaços, bem como determinar bases e dimensões para eles; - compreender as transformações lineares; - identificar os espaços vetoriais isomorfos; - determinar autovalores e autovetores e aplicações destes; - construir bases ortogonais (PPC UESE-B, 2015, p. 68).

Na ementa relacionada, os autores descrevem que devem ser abordados os seguintes conteúdos: “Espaços vetoriais; Base e dimensão; Transformações lineares; Espaços com produto interno; Auto-valores e auto-vetores; Diagonalização de operadores” (PPC UESE-B, 2015, p. 22). As referências básicas são (2 – 1986, 3 – 2000, 4, 19 e 32) e as complementares (8, 13 – 2004, 10, 20, 24 e 26). Sobre os conteúdos, Felipe afirmou que o conceito espaço vetorial e transformações lineares são fundamentais, pois considera que transformações lineares,

> em Álgebra Linear, é como se fosse o estudo de funções... eu sempre falo: vocês (licenciandos) já estudaram funções, as funções elementares, não é? Construíram gráficos, fizeram as operações... então, a gente poderia imaginar que agora com esses espaços vetoriais, seria um capítulo de funções específicas para esses espaços vetoriais… Aí, chamo bastante a atenção deles para o fato de, nas transformações lineares, ser possível definir uma função entre dois espaços teóricos e completamente diferentes, pois, até então, eles só constroem funções dos reais nos reais ou, no máximo, de uma parte dos reais nos reais, nunca imaginaram por exemplo, ser possível construir uma função que leva vetores do $\mathbb{R}^3$ em polinômios, ou matrizes em polinômios (…) para isso, você precisa definir um tipo particular de função que são as transformações lineares, que precisam satisfazer as propriedades... O conceito núcleo... quando você define núcleo e imagem… também é possível fazer uma ligação com o que eles já aprenderam sobre função… O

> que significa núcleo e imagem para uma transformação? (…) Podemos mostrar que tem tudo a ver com a ação de determinar os zeros para uma função... (FELIPE, 2015).

Felipe cita, também, matriz mudança de base, dimensão e base de um espaço vetorial. Sobre isomorfismos ele conta que os licenciandos

> [...] surpreendem-se com o fato de você conseguir jogar um espaço dentro do outro de uma maneira tão perfeita, que se encaixam, quando existe o isomorfismo, não é? E, mesmo se não existir, a gente consegue 'enfiar' um espaço dentro do outro… (risos) ... Não vai ser injetora, ou não vai ser sobrejetora, mas você consegue apertado ou folgado você consegue! … (risos) … Então, eles ficam muito interessados nessa parte, porque percebem essa possibilidade de relacionar espaços que, até então, não conheciam como sendo uma estrutura. Na verdade, lá no segundo grau o próprio professor não está com essa preocupação, acho que nem deve colocar isso dessa forma, mas ele, como professor, tem que saber que esses conteúdos têm uma estrutura e não são conteúdos isolados!… (FELIPE, 2015).

Para ele, uma oportunidade em Álgebra Linear se dá ao abordar

> a matriz de uma transformação linear, você mostra para ele que existe uma matriz que representa aquela transformação, então, você poderia trabalhar com a forma matricial em vez da transformação. Por isso, também, vejo a importância de dominar o conceito de matriz, pois em vários momentos a representação matricial da transformação é mais útil do que trabalhar com a própria expressão …. os autovalores e autovetores... e aí vai…(FELIPE, 2015)

Sobre produto interno:

> Produto interno também é 'bacana', porque você pode abordar os conceitos de métrica, módulo, distância e ângulo, mesmo que não tenha uma representação geométrica. O que é um ângulo entre duas matrizes? Dá para calcular, mas não tem uma interpretação geométrica (…) Eu acho 'bacana' porque eles têm a possibilidade de trabalhar com vários conceitos … de uma maneira mais estruturada e não de uma maneira isolada (FELIPE, 2015).

Felipe (2015) descreve que os licenciandos têm a impressão de que em Álgebra Linear os conhecimentos estudados são muito específicos e isolados, para ele, se isso passar sem a devida discussão, o licenciado provavelmente, em sua atuação na Educação Básica, acabará "[...] olhando para o plano de ensino como conteúdos isolados que seus alunos precisam aprender”, pois “ele mesmo não faz o *link* com o que aprendeu, na verdade, todo esse conteúdo se entrelaça se interrrelaciona, pois tem a mesma estrutura, são espaços vetorias...”.

Ele contou que:

> eu coloco para os meus alunos quais são os principais espaços vetoriais…. dou a definição e começo a montar na lousa….eu coloco também os principais espaços vetoriais que a gente trabalha $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$, as funções, polinômios e as matrizes... deixo tudo na lousa e mostro para ele (licenciando)… olha! Tudo o que você aprendeu até hoje em sua formação matemática está aqui na lousa... encaixe esses conteúdos dentro desses espaços vetoriais... ou é $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ou são funções, são polinômios, são matrizes... está tudo aqui dentro, não é? Por isso esses conjuntos são importantes, eles têm a sua atuação em todos os campos… (FELIPE, 2015)

Para Felipe (2015), “o que é praticado lá no Ensino Fundamental e Ensino Médio tem muito, sim, da Álgebra Linear e ela é, sim, um campo propício para o desenvolvimento desses conteúdos ou da pesquisa científica….”, por isso, considera que a Álgebra Linear é fundamental para formação do professor como um todo.

Karina (2015) também defende a permanência da disciplina Álgebra Linear na Licenciatura, para ela “como há as matérias de formação didático-pedagógicas, precisamos ter, também, matérias que permitam desenvolver o pensamento matemático de nível superior”, pois “em Álgebra Linear você tem as questões relacionadas às estruturas algébricas…. [...] ele (licenciando) precisa ter uma ideia do que é a Matemática no nível superior …”. No entanto, considera que as disciplinas poderiam ser mais integradas.

Para Karina (2015),

> [...] as forças políticas dentro do departamento podem ser uma coisa a ser questionada … Tivemos alguns cortes na parte da Álgebra… nas estruturas algébricas, mas a gente não cortou Álgebra Linear… [...] foi agora, nesses últimos tempos da jornada, que percebi que alguns conteúdos são intocáveis, se eles vão servir efetivamente para a formação do professor é uma outra questão!

Karina ressalta a importância da Álgebra Linear, mas diz acreditar ser necessário rever como as disciplinas efetivamente dialogam entre si e a sua contribuição, na formação do professor de Matemática. Para ela,

> no Projeto Político Pedagógico, que terminamos recentemente de construir, isso ficou bastante forte, principalmente nessas disciplinas, pois a gente precisou colocar as práticas como componente curricular … nós colocamos 20 horas de prática para fazer uso de *softwares* com Matemática Dinâmica, explorar situações de investigação, por exemplo, com matrizes, propriedades e cálculo vetorial… elaboração de atividades com uso de metodologias diferenciadas voltadas para a prática no Ensino Fundamental II e Ensino Médio … Assim, ficou entendido que o professor que irá trabalhar isso deve ter esse olhar voltado para a formação do professor de Matemática, e, ainda, aquelas disciplinas que não têm essa carga horária como obrigatória, devem também proporcionar momentos de reflexão nesse sentido, mas é como lhe falei: uma coisa é o documento e outra é se isso se efetiva na prática, espero que sim! (KARINA, 2015).

Em síntese, na UESE-B o curso contempla duas disciplinas: Álgebra Linear e Matrizes e Cálculo Vetorial, ambas com carga-horária igual a 60 horas.

Na disciplina Matrizes e Cálculo Vetorial, 20 horas devem ser dedicadas à prática como componente curricular e é esperado que o professor articule “três dimensões da formação do professor de matemática: formação em Educação, formação em Matemática e formação em Educação Matemática”, assim, como “a teoria e a prática desejada, dos conteúdos matemáticos específicos e dos metodológicos que favorecerão a atuação do profissional” (PPC UESE-B, 2015, p. 35).

Destaco esse fato, pois o professor e a coordenadora alegam que essa disciplina tem dado conta de algumas das necessidades dos estudantes, no entanto, os professores descrevem ainda existirem outras que merecem a atenção, por exemplo, Karina citou que o licenciando precisa mudar a forma de estudar, de “olhar” para os conceitos e Felipe cita questões relacionadas ao trabalho com demonstrações.

Na Universidade Estadual do Sul

A descrição da Licenciatura em Matemática, oferecida pela Universidade Estadual do Sul – UES –, está baseada no Projeto Pedagógico do Curso aprovado em 2009 e implantado em 2010 (PPC UES, 2009), na deliberação de 2013, da Câmara de Graduação da UES sobre as adequações curriculares no curso de Graduação em Matemática habilitação licenciatura (UES, 2013), no plano de ensino da disciplina Álgebra Linear (PE UES, 2015), disponibilizado por e-mail pela coordenadora e uma entrevista realizada com um professor pesquisador em Álgebra e em Educação Matemática que já atuou como coordenador desse curso.

O professor entrevistado será chamado de Lucas, garantindo, assim, o anonimato. Lucas é bacharel em Matemática, Mestre e Doutor em Matemática Pura, desenvolveu várias pesquisas em Álgebra e atualmente tem investigado questões relacionadas ao pensamento algébrico. É professor da instituição há pouco mais de 20 anos.

Como foi necessário alterar a instituição que representaria a região Sul do país, entrei em contato com Lucas, por e-mail, no final de setembro de 2015. O professor, prontamente, respondeu ao e-mail e agendamos data e horário para realizarmos a entrevista fazendo uso do *Skype*.

Na data e horário acordados, tivemos alguns problemas em relação à conexão do *software*, por isso, iniciamos a entrevista com cerca de 20 minutos de atraso.

Após estabelecermos a conexão, iniciei a entrevista que foi audiogravada, transcrita e aprovada pelo professor. A entrevista durou cerca de 25 minutos.

A Licenciatura em Matemática na UES

A Licenciatura em Matemática na UES foi criada em 1970. De acordo com o PPC UES (2009), esse curso é ofertado no período noturno com 2825 horas (distribuídas em 4 anos) e tem como objetivo geral

> a formação de um profissional em Matemática apto para o exercício do magistério no Ensino Fundamental e Médio, capaz de exercer uma liderança intelectual, social e política e, a partir do conhecimento da nossa realidade social, econômica e cultural e da área de Matemática, nos seus aspectos histórico, filosófico, político, didático e pedagógico, possa atuar efetivamente no sentido de melhorar as condições de ensino e aprendizagem vigentes, visando ao desenvolvimento de princípios éticos e de solidariedade para o exercício pleno da cidadania (p. 2).

O curso está organizado por eixos de conhecimentos: conhecimentos matemáticos; conhecimentos pedagógicos; conhecimentos da Educação Matemática; conhecimentos de áreas afins.

Os conhecimentos matemáticos, 46,9 % da carga horária total do curso, de acordo com o PPC UES (2009), devem ser

> [...] tratados de modo que o futuro profissional seja capaz de explorar situações-problema, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica, comunicar-se matematicamente por meio de diferentes linguagens, conceber que a validade de uma afirmação está relacionada à consistência da argumentação, compreender noções de conjectura, teorema, demonstração, examinar consequências do uso de diferentes definições, analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas, ter confiança pessoal em desenvolver atividades matemáticas e apreciar a estrutura abstrata que está presente na Matemática e sua função social (p. 4).

E, ainda, as disciplinas que compõem esse eixo devem contemplar

> [...] tanto enfoques pedagógicos, de linguagem e simbologia matemática, isto é, o saber se expressar em matemática – escrever para o leitor –, assim como a utilização de tecnologias de informação e comunicação, cujo domínio é importante para a formação profissional, para a docência e para as demais dimensões da vida (PPC UES, 2009, p. 6).

Em relação à contribuição à formação do estudante, espera-se que as disciplinas oportunizem situações nas quais o licenciando adquira domínio de conteúdos matemáticos, desde o ponto de vista elementar até o avançado e, ainda, nos múltiplos aspectos: conceitual, procedimental e atitudinal.

Para os autores, conteúdos elementares são “aqueles adequados para o Ensino Fundamental e Médio, visando-se à aquisição de sólida base nesta matemática elementar” (PPC UES, 2009, p.16) e conteúdos avançados, são aqueles que “[...] fornecem uma visão da importância da Matemática quer como ferramenta na resolução de problemas nas diversas áreas do conhecimento, quer como sistema abstrato de ideias, refletindo generalizações e regularidades” (PPC UES, 2009, p.16).

Cabem, também, às “disciplinas avançadas” fazer com que o licenciando desenvolva “[...] a compreensão e a capacidade de estabelecer nexos entre os vários temas da matemática escolar; aprenda a tratar com maior cuidado os processos dedutivos, as definições e as formalizações, de um modo geral” (PPC UES, 2009, p. 16).

O eixo conhecimentos matemáticos está dividido em três grupos: cálculo e análise; álgebra; geometria. Em relação à álgebra, espera-se as seguintes contribuições em relação à formação do estudante:

> compreender, abstrair e representar, com formalismo, aspectos estruturais da Matemática; analisar as diferentes formas de argumentação, as diversas maneiras de encadeamento do raciocínio; sintetizar, aliada à capacidade de compreender e expressar-se; desafiar a curiosidade, tendo em vista o desenvolvimento de um raciocínio independente; percepção das várias estruturas matemáticas (PPC UES, 2009, p. 17).

A Álgebra Linear na UES

A disciplina Álgebra Linear, com 60 horas-aula, é ofertada no segundo semestre do curso e tem como objetivo específico:

> estudar os conceitos básicos de Álgebra Linear necessários para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, das Equações Diferenciais e demais disciplinas da Matemática. Capacitar os alunos para a aquisição de uma compreensão integrada dos conceitos e resultados fundamentais da Matemática (PE UES, 2015).

O professor Lucas, ao justificar a permanência da disciplina Álgebra Linear na licenciatura, apresenta argumentos semelhantes ao apresentado no plano de curso, pois considera que essa disciplina permite "trabalhar com funções que atendem certos axiomas em espaços vetoriais diferentes…", para ele,

> na Educação Básica e no Cálculo, eles (os licenciandos) estão acostumados a trabalhar com funções reais e em Álgebra Linear temos a possibilidade de explorar funções no $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e até em outros espaços vetoriais… além de explorar a parte geométrica, matrizes e sistemas lineares…. (LUCAS, 2015).

E, ainda,

> o fato de os estudantes retomarem, por exemplo, matrizes, as operações com matrizes, sistemas lineares… [...] permite que o aluno (licenciando) reflita um pouco sobre conteúdos que ele vai trabalhar no Ensino Fundamental e Ensino Médio, permitindo que fundamente mais esses conteúdos (LUCAS, 2015).

No plano de ensino, a disciplina está organizada em três momentos: introdução à Álgebra Linear; transformações lineares; diagonalização de operadores lineares.

Na primeira parte devem ser abordados: “Sistemas lineares. Sistemas escalonados. Determinantes. Matrizes inversas. Espaços vetoriais. Subespaços vetoriais. Combinações lineares. Espaços vetoriais finitamente gerados. Dependência linear. Base de um espaço vetorial. Dimensão” (PE UES, 2015, p. 1).

Na segunda parte, transformações lineares, devem ser abordados: “Noções sobre operadores. Transformações lineares. Núcleo e imagem de uma transformação linear. Operações com transformações lineares. Matriz de uma transformação linear” (PE UES, 2015, p.1).

Por fim, diagonalização de operadores lineares, devem ser abordados: “Autovalores e autovetores. Polinômio característico. Base de autovetores. Polinômio minimal. Operadores e matrizes diagonalizáveis” (PE UES, 2015, p. 1).

Lucas, também, considera os conteúdos apresentados no plano de ensino, para ele, pode-se trabalhar com sistemas de equações lineares, matrizes, “[...] um pouco com a ideia do bidimencional e tridimencional..., discutir bem as operações que definem o espaço vetorial [...], vetores, soma de vetores…” (LUCAS, 2015).

Ele, também, considera importante “trazer mais exemplos, novos exemplos de espaços vetoriais, mas não muito elaborados…”, “[...] discutir bem questões envolvendo a dependência linear entre vetores, combinação linear e base, pois vai permitir, também, a discussão sobre questões relacionadas ao conjunto gerador e dimensão de um espaço vetorial…”, assim como, “[...] diagonalização e, se der tempo, autovalor e autovetor.” (LUCAS, 2015).

No PPC UES (2015), não é exigido que o licenciando tenha cursado nenhuma disciplina específica antes de cursar Álgebra Linear, mas, para o professor Lucas, é interessante que o estudante já tenha cursado a disciplina Geometria Analítica, pois “a Geometria Analítica trabalha com alguns espaços vetoriais, não é? Esses espaços vão servir de exemplos em Álgebra Linear… depois fica mais fácil para você trabalhar com esses exemplos …o $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ …” (LUCAS, 2015).

As demonstrações de teoremas também foram consideradas por Lucas, para ele, são momentos em que o estudante pode ser convidado a refletir:

> [...] você deve apresentar as demonstrações dos teoremas de Álgebra Linear e eles (licenciandos) são convidados a entenderem aquela demonstração, justificar os argumentos utilizados ... você faz com que eles peguem a demonstração do livro e vão estudando passo, a passo... eles devem ir estudando passo a passo o que está acontecendo ali... Às vezes, no livro, está escrito, logo no começo, que é uma combinação linear e os estudantes não entendem o porquê! Acho que o aluno deve ser provocado a pensar nesse porquê (….) Para eles, eu tenho que igualar aquela soma a zero! Eles acham que tudo é igual a zero, porque é uma combinação linear... eles associam muito com as regras para verificar se é linearmente independente … usam um monte de regras para resolver exercícios, e quando precisam ler uma demonstração não entendem o que está acontecendo e, mais uma vez, acabam decorando! …. Nas demonstrações, você trabalha um pouco mais com a reflexão, olha mais profundo, volta, dá exemplos, contraexemplos… vai e volta... (LUCAS, 2015).

Ao solicitar que Lucas apresentasse algumas sugestões para um professor que fosse ministrar essa disciplina, ele afirmou:

> diria para que enfatizasse essa parte, o trabalho com matrizes, sistemas lineares, determinantes… sempre trazendo exemplos e contraexemplos… diria, também, para que ele começasse com exemplos mais próximos dos alunos ao falar dos espaços vetoriais e transformações lineares, por exemplo, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, essa parte mais vetorial… discutir a adição de vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ antes de entrar em outros espaços… Já, nas transformações, trabalhar no $\mathbb{R}^2$; aquelas transformações... reflexão ... rotação … isso é bem interessante e às vezes passa despercebido! (LUCAS, 2015).

No plano de ensino, as referências básicas citadas são (7 – 1984 e 8) e as complementares (12 e 30 – 2005). Lucas, no entanto, considera interessante trabalhar com o livro Boldrini et al. (1983). Para ele:

> o (livro do) Boldrini é mais didático… mais tranquilo, traz exemplos de Física, ele começa os capítulos com alguma abordagem mais aplicada do conteúdo que será trabalhado, certo? Ele não vai direto, ele abre algumas possibilidades para reflexões, inclusive os exercícios, também, apresentam essa característica… (LUCAS, 2015).

Em síntese, no PPC UES (2009), atribui-se ao grupo de disciplinas, que abordam os conhecimentos matemáticos, o dever de propiciar momentos em que os estudantes desenvolvam habilidades que lhes permitam, por exemplo, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, comunicar-se matematicamente por meio de diferentes linguagens, examinar consequências do uso de diferentes definições, entre outras.

Dreyfus (1991) descreve a importância de o estudante desenvolver cada uma dessas habilidades, mas, também, deixa um alerta: cabe ao professor criar situações que permitam aos estudantes construir as definições, buscar argumentos que validem certas propriedades e teoremas, não basta o professor apresentar tais resultados.

No PPC UES (2009), os autores afirmam, também, que as disciplinas de Matemática devem trazer para as aulas discussões relacionadas às questões pedagógicas, de linguagem e simbologia matemática, o uso de tecnologias de informação e comunicação, assim como, estabelecerem relações entre os vários temas da Matemática escolar, o que pode ser observado em algumas das falas de Lucas.

Das contribuições da Álgebra, apresentadas no PPC UES (2009), observo a presença de vários processos relacionados ao PMA (DREYFUS, 1991), por exemplo, representar, visualizar, generalizar, classificar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar. Destaco esse fato, pois Dreyfus (1991) afirma esperar que licenciandos em Matemática desenvolvam o domínio do uso desses processos, conforme descrito no capítulo 3 desta pesquisa.

Observo, ainda, que apesar de ser possível, no PPC UES (2009), identificar a presença de vários processos do Pensamento Matemático Avançado, isso não ocorre em relação ao PE (2015). Afinal, o objetivo apresentado para a disciplina Álgebra Linear nesse último documento, dá indícios de a Álgebra Linear ser necessária, apenas por permitir o desenvolvimento de conceitos necessários paraoutras disciplinas.

Na Universidade Federal do Nordeste

A descrição da Licenciatura em Matemática, oferecida pela Universidade Federal do Nordeste – UFNE –, está baseada no Projeto Pedagógico do Curso aprovado e implantado em 2009 e nas ementas disponíveis no sítio da instituição.

Tentei estabelecer contato telefônico e por e-mail com professores da UFNE por diversas vezes no período compreendido entre maio e setembro de 2015, mas não tive sucesso. Liguei na secretaria geral da universidade e fui informado que os professores e os funcionários administrativos estavam em greve.

A Licenciatura em Matemática na UFNE

O curso na UFNE é oferecido desde 1972. De acordo com PPC UFNE (2014), o curso tem duração mínima de três anos e carga horária total de 3045 horas e apresenta como objetivo geral o de

> a) formar professores de Matemática para a segunda fase do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio; b) possibilitar reflexões sobre o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, sobre metodologias de ensino de Matemática e sobre pedagogia em geral, e, c) preparar o futuro professor para desenvolver iniciativas para atualização e aprofundamento constante de seus conhecimentos para que possa acompanhar as rápidas mudanças na área (PPC UFNE, 2009, p. 1).

E, como objetivos específicos:

> a) desenvolver a capacidade de formulação e interpretação de modelos matemáticos; b) promover o aprofundamento do conhecimento matemático, no que diz respeito às suas teorias, métodos e aplicações; c) desenvolver habilidades de raciocínio lógico e abstrato, o espírito crítico e criativo; d) desenvolver a capacidade de relacionar assuntos e áreas, assim como inserir temas em contextos mais amplos; e) desenvolver competências para adaptação às mudanças e a busca do novo com responsabilidade e competências necessárias à iniciação científica, e, f) propiciar os conhecimentos e habilidades necessárias à utilização das novas tecnologias de informação e comunicação, assim como sua integração nas atividades de ensino e na comunidade escolar da qual o professor-aluno participa (PPC UFNE, 2009, p. 1-2).

Entre outras características, é esperado que o licenciado em Matemática deve ter o domínio da “[...] forma lógica característica do pensamento matemático e ter conhecimentos do raciocínio lógico, intuição, imaginação, iniciativa, criatividade e percepção crítica” (PPC UFNE, 2009, p. 2).

A Álgebra Linear na UFNE

O licenciando deve cursar duas disciplinas sobre Álgebra Linear. A primeira, *Álgebra Linear I*, é ofertada no segundo semestre e a segunda, *Álgebra Linear II,* no terceiro semestre, ambas com carga-horária igual a 60 horas.

Álgebra Linear I

Para cursar a disciplina *Álgebra Linear I,* o licenciando já deverá ter cursado a disciplina *Vetores e Geometria* Analítica. Os conteúdos que devem ser abordados em *Álgebra Linear I*, tal como apresentados na ementa, são: Sistemas lineares e noções sobre determinantes; Espaços vetoriais; Aplicações lineares; Matrizes e aplicações lineares; Autovalores e autovetores; Operadores diagonalizáveis.

No plano de ensino disponível no sítio da instituição o objetivo apresentado para a disciplina é o de que “ao final do curso o aluno deverá ser capaz de estabelecer o conceito e propriedades de espaços vetoriais de dimensão finita e identificar a relação entre transformações lineares e matrizes” (PE UFNE, 2015).

As bibliografias básicas citadas no plano de ensino são (4 e 13) e as bibliografias complementares (2 – 1986, 3, 7 – 2004, 10 – 1971, 12, 14, 20 e 33).

Álgebra Linear II

A disciplina *Álgebra Linear II* exige como pré-requisito a disciplina *Álgebra Linear I*. Os conteúdos que devem ser abordados nessa disciplina, tal como apresentados na ementa, são: Forma canônica de Jordan; Espaços com produto interno; Teoria espectral; Formas bilineares.

No plano de ensino disponível no sítio da instituição o objetivo apresentado para a disciplina é o de que “ao final da disciplina o aluno deverá ser capaz de estabelecer a forma de Jordan de um operador linear bem como enunciar os principais resultados da teoria espectral de operadores lineares sobre espaços de dimensão finita” (PE UFNE, 2015).

As bibliografias básicas citadas no plano de ensino são (10 – 1971 e 4) e as bibliografias complementares: (7 – 2004, 12 e 14).

Em síntese, observo que o PPC UFNE (2009) apresenta uma lista com elementos relacionados às necessidades de uma licenciatura, mas não relaciona esses elementos com as disciplinas. E, ainda, nos planos de ensino das disciplinas, Álgebra Linear I e Álgebra Linear II, os autores repetem o mesmo texto sobre as competências e habilidades, que devem ser desenvolvidas pelos licenciandos, apresentado no PPC UFNE (2009). Aliás, o texto apresentado é semelhante ao proposto em PPC UESE-A (2013).

Nos dados do Quadro 12, apresento alguns exemplos dessa semelhança:

Quadro 12: Semelhanças nos projetos pedagógicos de duas universidades

PPC UFNE (2009, p. 2)	PPC UESE-A (2013, p. 4)
Pensamento heurístico competente: capacidade de encaminhar solução de problemas e explorar situações, fazer relações, conjecturar, argumentar e avaliar.	Pensamento heurístico: capacidade de resolver e formular problemas, explorar, estabelecer relações, conjecturar, argumentar e validar soluções.
Capacidade de desenvolver projetos, avaliar livros textos, softwares educacionais e outros materiais didáticos.	Capacidade de desenvolver projetos, avaliar livros textos, softwares educacionais e outros materiais didáticos e analisar currículos da escola básica;
Capacidade de organizar cursos, planejar ações de ensino e aprendizagem de Matemática.	Capacidade de organizar cursos, planejar ações de ensino e aprendizagem de Matemática.
Domínio dos raciocínios algébrico, geométrico e combinatório de modo a poder argumentar com clareza e objetividade dentro destes contextos cognitivos.	Domínio dos raciocínios algébrico, geométrico, combinatório e não determinista de modo a poder argumentar com clareza e objetividade dentro destes contextos cognitivos [...].
Capacidade de contextualizar e inter-relacionar conceitos e propriedades matemáticas, bem como de utilizá-los em outras áreas do conhecimento e em aplicações variadas.	Capacidade de contextualizar e inter-relacionar conceitos e propriedades matemáticas, bem como utilizá-los em outras áreas do conhecimento e em aplicações variadas.

Fonte: dados da pesquisa

Ressalto que o PPC UESE-A (2013) é um documento mais antigo do que o PPC UFNE (2009), 2013 foi o ano em que os autores apresentaram a última revisão do projeto.

Tecendo considerações sobre os projetos pedagógicos

Na primeira parte deste capítulo, apresentei os elementos evidenciados para cada uma das seis instituições selecionadas. Agora, viso identificar similaridades ou discrepâncias entre esses elementos.

Nos dados do Quadro 13, destaco o resumo dos elementos que caracterizam essas licenciaturas.

Quadro 13: Características das universidades investigadas

Universidade	Licenciatura em Matemática				Álgebra Linear		
	Criado em	PPC implantado em	Carga-horária total	Número de semestres	Carga-horária	Semestre em que é ofertada	Comparação da carga-horária em relação ao curso
UFN	1954	2012	3386	8	102	4	3,01%
UFCO	1981	2012	2847	8	68	3	2,39%
UESE-A	1934	2013	3155	10	60	2	1,90%
UESE-B	1969	2015	2895	8	60	3	2,07%
UES	1970	2009	2825	8	60	2	2,12%
UFNE	1972	2009	3045	6	120	2 e 3	3,94%

Fonte: dados da pesquisa

Observo que as universidades investigadas oferecem o curso de Licenciatura em Matemática há pelo menos 30 anos, uma delas já completou 81 anos (UESE-A), ou seja, vivenciaram várias mudanças, que ocorreram em relação às licenciaturas no país.

A UESE-B teve o projeto pedagógico implantado em 2015, a UESE-A, em 2013, duas outras (UFN; UFCO), em 2012 e as demais (UES; UFNE), em 2009. Em todos os projetos pedagógicos descritos, há afirmações indicando estarem de acordo com as diretrizes nacionais (BRASIL, 1996; 2001a; 2001b; 2002; 2003).

Em relação à carga-horária mínima, destaco a UFN com 21% (586 horas) e a UESE-A com 13% (355 horas) de horas a mais que o mínimo exigido, em Brasil (2001b), 2800 horas.

Nacarato e Passos (2007) e Gatti e Barreto (2009) evidenciaram que o tempo mínimo de 3 anos de permanência do licenciando na universidade é o mais comum de ser observado nas licenciaturas brasileiras, salvo algumas exceções, por exemplo, universidades públicas que tendem a propor cursos com duração mínima de 4 ou até 5 anos.

Observo que das universidades investigadas, todas públicas, três estaduais e três federais, para apenas uma, o curso pode ser concluído em 3 anos, a UFNE.

Outro ponto é em relação aos nomes atribuídos às disciplinas, pois conforme Gatti e Barreto (2009), há disciplinas que abordam os mesmos conceitos, mas recebem nomes diferentes de acordo com as escolhas das universidades. Com a

Álgebra Linear não foi diferente, os nomes atribuídos a essa disciplina, pelas universidades investigadas, são: *Álgebra Linear, Introdução à Álgebra Linear, Álgebra Linear* I e *Álgebra Linear II.*

Em relação ao semestre do curso em que a disciplina Álgebra Lienar é oferecida, observo que sempre acontece nos dois primeiros anos, geralmente, segundo ou terceiro semestre.

Já a carga-horária da disciplina Álgebra Linear é mais frequente ser oferecida com cerca de 60 horas. Observo algumas variações, por exemplo, na UFN considerei 102 horas, pois são oferecidas duas disciplinas concomitantemente, Álgebra Linear (68 horas) e Laboratório de Álgebra Linear (34 horas). Outro exemplo é o da UFNE, única universidade que oferece duas disciplinas obrigatórias sobre Álgebra Linear, cada uma delas com 60 horas.

Ressalto que em duas univerdades, há a possibilidade de o licenciando escolher a segunda disciplina sobre o assunto, como disciplina opcional (UFN, UESE-A).

Na UESE-B, apesar de serem oferecidas duas disciplinas: *Matriz e Cálculo Vetorial* e *Álgebra Linear*, considerei apenas uma, pois os conceitos abordados na disciplina *Matriz e Cálculo Vetorial* são aqueles abordados em Álgebra Linear, mas que deveriam ter sido trabalhados na Educação Básica.

Por fim, observo que a disciplina Álgebra Linear representa, com maior frequência, cerca de 2% da carga-horária total do curso.

Outra consideração é sobre a necessidade de o licenciando já ter cursado alguma disciplina, a fim de se inscrever na disciplina Álgebra Linear. No projeto pedagógico de três universidades, é citado que o licenciando deve ter sido aprovado na disciplina *Geometria Analítica* para se inscrever em Álgebra Linear, pois a consideram como “pré-requisito”. Na UESE-B, o estudante deve ter sido aprovado na disciplina *Matriz e Cálculo Vetorial.* E, nas universidades UFCO e UES não há nenhuma exigência.

Destaco o caso da UFNE, pois para cursar *Álgebra Linear I*, o licenciando já deve ter sido aprovado em *Geometria Analítica* e, para cursar *Álgebra Linear II,* deve ter sido aprovado em *Álgebra Linear I*.

Nos dados do Quadro 14, apresento uma síntese do que foi observado.

Quadro 14: Exigências para cursar Álgebra Linear

Universidade	Pré-requisito
UFN	Geometria Analítica e Vetores
UFCO	-
UESE-A	Geometria Analítica
UESE-B	Matriz e Cálculo Vetorial
UES	-
UFNE	Vetores e Geometria Analítica
	Álgebra Linear I

Fonte: dados da pesquisa

Nos dados do Quadro 15, sintetizei os objetivos apresentados em relação à disciplina Álgebra Linear. Dentre os resultados, apenas um objetivo não foi possível ser analisado, o da UFCO, pois nos documentos disponíveis não havia tal informação.

Quadro 15: Objetivos anunciados em relação à Álgebra Linear

Universidade	Objetivo
UFN	dominar os raciocínios algébrico, geométrico de modo a poder argumentar com clareza e objetividade dentro deste contexto cognitivo e desenvolver a capacidade de contextualizar e inter-relacionar conceitos e propriedades Matemáticas, bem como, utilizá-los em outras áreas do conhecimento e em aplicações variadas. Em especial, poder interpretar matematicamente situações ou fenômenos que emergem de outras áreas do conhecimento ou situações reais (PPC UFN, 2012).
UESE-A	**familiarizar** o estudante com os conceitos de transformação linear e espaço vetorial de dimensão finita através da geometria do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$ e **trabalhar** a relação entre matrizes e transformações lineares, bem como a resolução de sistemas lineares de equações (PE UESE-A, 2014).
UESE-B	[...] ser capaz de: **reconhecer** os espaços vetoriais e seus subespaços, bem como **determinar** bases e dimensões para eles; **compreender** as transformações lineares; **identificar** os espaços vetoriais isomorfos; determinar autovalores e autovetores e aplicações destes; construir bases ortogonais (PE UESE-B, 2015) .
UES	**estudar** os conceitos básicos de Álgebra Linear necessários para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, das Equações Diferenciais e demais disciplinas da Matemática. **Capacitar** os alunos para a aquisição de uma compreensão integrada dos conceitos e resultados fundamentais da Matemática (PE UES, 2015).
UFNE	[...] ser capaz de **estabelecer** o conceito e propriedades de espaços vetoriais de dimensão finita e **identificar** a relação entre transformações lineares e matrizes (PE UFNE, 2015).
	[...] ser capaz de **estabelecer** a forma de Jordan de um operador linear, bem como enunciar os principais resultados da teoria espectral de operadores lineares sobre espaços de dimensão finita (PE UFNE, 2015).

Fonte: dados da pesquisa

Observo que o texto apresentado em PPC UFN (2012) como objetivo para a disciplina Álgebra Linear é genérico, não evidenciando as especificidades da disciplina e, ainda, é semelhante ao já exposto na página 168 desta pesquisa sobre a UFNE (2009) e UESE-A (2013).

Ressalto que não é de interesse desta pesquisa buscar esse tipo de semelhança, mas destaco que, ao investigar os documentos, observei em diversos momentos, vários trechos semelhantes, às vezes, a diferença era apenas a ordem com que os argumentos eram apresentados. Questiono: que tipo de reflexão e compromisso tiveram os professores ao proporem esses documentos?

Em relação à UES, observo que o objetivo apresentado dá indícios de a disciplina ser importante apenas como desenvolvimento de uma ferramenta para outras disciplinas: "estudar os conceitos básicos de Álgebra Linear necessários para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, das Equações Diferenciais e demais disciplinas da Matemática". E, ainda, o que significa "capacitar os alunos para a aquisição de uma compreensão integrada dos conceitos e resultados fundamentais da Matemática"?

Já, os objetivos apresentados pelas universidades UESE-A, UESE-B e UFNE iluminam conceitos abordados em Álgebra Linear: espaços vetoriais, transformações lineares; autovalores e autovetores; forma de Jordan de um operador linear; entre outros, mas não evidenciam o que se espera da disciplina em relação às necessidades do licenciando em Matemática, assim como afirmaram Manrique (2009) e Moreira (2012).

Nos dados do Quadro 16, apresento as três referências bibliográficas básicas mais citadas para a disciplina Álgebra Linear nos documentos das universidades investigadas.

Quadro 16: Referências Básicas com maior número de indicações

OBRA	UFN	UFCO	UESE A	UESE B	UES	UFNE	Indicações
CALLIOLI, C. A. et al. **Álgebra Linear e aplicações**. São Paulo: Atual, 1984.	X	X	X	X			**4**
BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harper e Row do Brasil,1983.	X	X		X			**3**
COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. 2ed. São Paulo: EdUSP, 2005.				X		X	**2**

Fonte: dados da pesquisa

Já, nos dados do Quadro 17, apresento as referências bibliográficas complementares mais citadas para a disciplina Álgebra Linear nos documentos das universidades investigadas.

Quadro 17: Referências Complementares com maior número de indicações

OBRA	UFN	UFCO	UESE A	UESE B	UES	UFNE	Indicações
LIMA, E. **Álgebra Linear.** 7ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.		X			X	X	**3**
LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. São Paulo: MacGraw-Hill do Brasil, 1980.	X	X				X	**3**
COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. 2ed. São Paulo: EdUSP, 2005.	X	X					**2**
HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1979.				X		X	**2**
STEINBRUCH A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2ed., São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.	X			X			**2**
LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 2ed. Editora: LTC, 1999.				X		X	**2**

Fonte: dados da pesquisa

Nas duas situações, não levei em consideração as referências relacionadas às disciplinas *Matriz e Cálculo Vetorial* e *Álgebra Linear II.*

Observo que, das referências presentes nos dados dos Quadros 16 e 17, a única que foi citada em ambos os quadros foi Coelho e Lourenço (2005). E, ainda, as duas mais citadas Caliolli et al. (1984) e Boldrini et al. (1983) são obras que tiveram a primeira versão publicada há mais de 40 anos, cujas edições comercializadas sofreram mínimas modificações. Tal fato foi evidenciado, também, por Araújo (2002).

Sobre os conteúdos, nos dados do Quadro 18, apresento uma síntese dos que foram evidenciados durante a investigação.

Quadro 18: Conteúdos citados nos documentos das universidades investigadas[147]

Noções	Conteúdos	UFN	UFCO	UESE-A	UESE-B	UES	UFNE
Educação Básica	Matriz		X	X	MC	X	ALI
	Sistemas de equações lineares	X	X	X	MC	X	ALI
	Determinantes			X	MC	X	ALI
	Vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$			X	MC		
	Teorema de Rouché-Capelli			X			
Elementares de Álgebra Linear	Espaços Vetorias	X	X	X	X	X	ALI
	Subespaços vetoriais					X	
	Combinação linear entre vetores					X	
	Dependência linear entre vetores					X	
	Base de um espaço vetorial	X		X	X	X	
	Dimensão			X	X	X	
	Somas diretas						
Transformação Linear	Transformações Lineares	X	X	X	X	X	ALI
	Matriz de uma transformação linear	X		X		X	
	Transformações no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$			X			
	Isomorfismo						
Espaços Vetoriais com Produto Interno	Espaços vetorias com produto interno	X	X	X	X		ALII
	Bases ortonormais			X			
	Projeção ortogonal			X			
	Aproximação de funções polinomiais			X			
	Forma Canônica de Jordan						ALII
	Teoria Espectral						ALII
	Formas Bilineares						ALII
Diagonalização de Operadores	Autovetores e autovalores	X		X	X	X	ALI
	Diagonalização de operadores	X	X		X	X	ALI
	Polinômio Minimal					X	
	Cônicas e quádricas			X			

Fonte: dados da pesquisa

No primeiro grupo, *noções da Educação Básica*, foram citados os seguintes conteúdos: matriz (4 em 6), sistemas de equações lineares (5 em 6), determinantes

[147] A sigla MC indica conteúdos que devem ser abordados na disciplina *Matriz e Cálculo Vetorial*. ALI e ALII indicam, respectivamente, conteúdos que devem ser abordados nas disciplinas *Álgebra Linear I* e *Álgebra Linear II*.

(3 em 6), vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (1 em 6) e Teorema de Rouché-Capelli (1 em 6). Observo que na universidade UESE-B esses conteúdos são abordados na disciplina Matriz e Cálculo Vetorial, por isso, não foram contados junto a esse grupo.

No segundo grupo, *noções elementares de Álgebra Linea*r, foram citados os seguintes conteúdos: espaços vetoriais (6 em 6), subespaços vetoriais (1 em 6), combinação linear entre vetores (1 em 6), dependência linear entre vetores (1 em 6), base de um espaço vetorial (4 em 6) e dimensão (3 em 6).

No próximo grupo, *transformações lineares*, foram citados os conteúdos: transformações lineares no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (1 em 6), transformações lineares (6 em 6) e matriz de uma transformação linear (3 em 6). Já, no grupo, *Espaços vetoriais com produto interno*, foram citados os conteúdos: Espaços vetoriais com produto interno (4 em 6), bases ortonormais (1 em 6), projeção ortogonal (1 em 6) e aproximação de funções polinomiais (1 em 6).

E, por último, no grupo, *diagonalização de operadores*, foram citados os seguintes conteúdos: autovalores e autovetores (4 em 6), diagonalização de operadores (4 em 6), polinômio minimal (1 em 6) e cônicas e quadricas (1 em 6).

Os relatores, em Brasil (2001a), afirmam que os conteúdos, em um curso de formação de professores, devem assumir papel principal, pois consideram ser "[...] basicamente na aprendizagem de conteúdos que se dá a construção e o desenvolvimento de competências" (p. 33). E, ainda, os conteúdos devem ser tratados em diferentes dimensões: conceitual, procedimental e atitudinal, isto é, "devem articular grande parte do saber pedagógico necessário ao exercício profissional [...]" (p. 47).

No entanto, considero a partir dos conteúdos listados, dos objetivos anunciados e das escolhas bibliográficas feitas que a Álgebra Linear apresentada nos documentos das universidades investigadas mostra ser planejada independentemente das disciplinas que se referem ao ensino e à aprendizagem em Matemática, articulação necessária para a formação profissional do licenciado (MOREIRA, 2012).

No próximo capítulo, apresento uma análise dos principais elementos evidenciados nas entrevistas dos professores das instituições selecionadas e organizo os extratos dessas entrevistas em categorias. Assim como, apresento elementos observados nas duas outras entrevistas.

CAPÍTULO 6

A ÁLGEBRA LINEAR NA VOZ DOS PROFESSORES

No capítulo anterior, apresentei a Licenciatura em Matemática e a disciplina Álgebra Linear em seis universidades brasileiras, para isso, fiz uso de entrevistas, dos projetos pedagógicos, das ementas e planos de ensino de Álgebra Linear disponibilizadas por essas universidades.

Ressalto que, apesar de ter utilizado algumas entrevistas para completar a descrição do curso oferecido por cada universidade, as considerações apresentadas foram baseadas exclusivamente na análise dos documentos.

Assim, neste capítulo, apresento a síntese dos principais elementos evidenciados nas entrevistas, pois, como uma rede, pretendo amarrar esses elementos com aqueles evidenciados no capítulo 2, capítulo 3 e capítulo 5, desta pesquisa.

Um olhar panorâmico das entrevistas: caracterização dos participantes

Para tecer as considerações, o primeiro passo é conhecer algumas particularidades dos indivíduos que foram entrevistados, pois dos seis professores, apenas um não atua em cursos de pós-graduação, Professor Pedro da UFCO.

Nos dados do Quadro 19, apresento uma síntese da formação desses professores e o tempo de atuação no Ensino Superior.

Quadro 19: Formação dos professores entrevistados

Prof(a.)	Formação[148]	Atua no Ens. Sup. desde
Pedro	Bacharelado e licenciatura em Matemática (2006) e mestrado em Matemática Aplicada (2010). **Professor de Álgebra Linear.**	2008
Felipe	Bacharelado em Matemática (1982), mestrado em Matemática Aplicada (1996) e doutorado em Agronomia (2001). Pesquisador em Matemática Aplicada – Lógica de Fuzzy. Autor de livro sobre Álgebra Linear. **Professor de Álgebra Linear.**	1987
Théo	Mestrado (1970), doutorado (1973) e livre docência em Matemática Pura (1978). Pesquisador em Matemática – Álgebra. **Professor de Álgebra Linear.**	1970
Ana	Licenciatura em Matemática (1996), mestrado (1999) e doutorado em Matemática Pura (2004). Pesquisadora em Matemática – Geometria e topologia *Coordenadora de uma licenciatura.*	2006
Lucas	Graduação em Matemática (1990), mestrado (1993) e doutorado em Matemática Pura (2000). Pesquisador em Edu. Mat. – Pensamento Algébrico *Coordenador de uma licenciatura.* Professor de Álgebra Abstrata.	1993
Karina	Licenciatura em Matemática (1992), mestrado (1996) e doutorado em Educação Matemática (2003). Pesquisadora em Edu. Mat. – História Oral *Coordenadora de uma licenciatura.*	1997

Fonte: dados da pesquisa

Observo que dos seis entrevistados, dois atuam na área de Matemática Aplicada, dois, na área de Matemática Pura e dois, na área de Educação Matemática.

[148] O ano entre parênteses é o ano da conclusão da formação realizada pelo professor.

Desse grupo, três são professores de Álgebra Linear, sendo um deles, Felipe, autor de um livro para essa disciplina. Dos outros três que já atuaram na coordenação, destaco Lucas, formado em Matemática Pura e que atualmente desenvolve pesquisas em Educação Matemática, mais precisamente, pensamento algébrico e pensamento matemático avançado.

Um olhar panorâmico das entrevistas: as primeiras categorias de análise

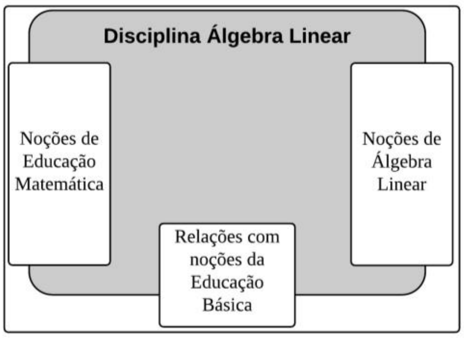
Inicio essa construção com elementos evidenciados no capítulo 2, *a licenciatura em Matemática no Brasil*, para a qual considero que o desenvolvimento de uma estrutura curricular para uma disciplina de conteúdo específico deve contemplar discussões entre professores pesquisadores, que atuem em Educação Matemática, e professores pesquisadores, que atuem em Matemática, nunca deve ser uma produção unilateral.

Outro ponto importante evidenciado são as discussões relacionadas às questões do ensino e da aprendizagem, que devem permear os planos de ensino e as aulas, até mesmo, porque as disciplinas específicas devem abordar, também, conteúdos da Educação Básica, tanto no sentido de propiciar reflexões sobre possíveis desdobramentos relacionados a eles na atuação profissional, como oportunidades de superar eventuais fragilidades da escolarização básica.

Um terceiro ponto é sobre a importância de identificar, entre outros aspectos, obstáculos epistemológicos, obstáculos didáticos, relações desses conteúdos com o mundo real, as aplicações em outras disciplinas e as inserções históricas.

No Quadro 20, apresento um esquema que ilustra a disciplina Álgebra Linear ancorada em três pontos: noções de Educação Matemática, noções de Álgebra Linear e noções da Educação Básica.

Quadro 20: Caracterização da disciplina Álgebra Linear



Fonte: o pesquisador

Considero que os três pontos, que delimitam as discussões em Álgebra Linear, devem permitir conexões entre si. Assim, trago elementos apresentados no capítulo 3, *ideias teóricas que embasam as análise*s, sobre oportunidades relacionadas à Álgebra Linear visando ao desenvolvimento profissional do licenciado em Matemática.

Primeiramente, considero que há a necessidade de fazer com que o licenciando construa as noções matemáticas envolvidas como elementos, que são parte e não os únicos, a serem abordados na disciplina.

Em segundo lugar, considero que, em Álgebra Linear, o professor formador deve propor situações, que permitam que o licenciando ao trabalhar com noções elementares em Álgebra Linear, desenvolva, também, processos relacionados ao Pensamento Matemático Avançado, faça uso consciente de diversas representações para um mesmo objeto, assim como, faça uso do processo alternar e interpretar.

Outro ponto é em relação às demonstrações, pois é esperado que o licenciando vivencie o processo de demonstração de tal forma, que perceba o significado do rigor dedutivo, desenvolva habilidades para lidar com sistemas axiomáticos e saiba justificar procedimentos matemáticos utilizados no ensino de Matemática na Educação Básica.

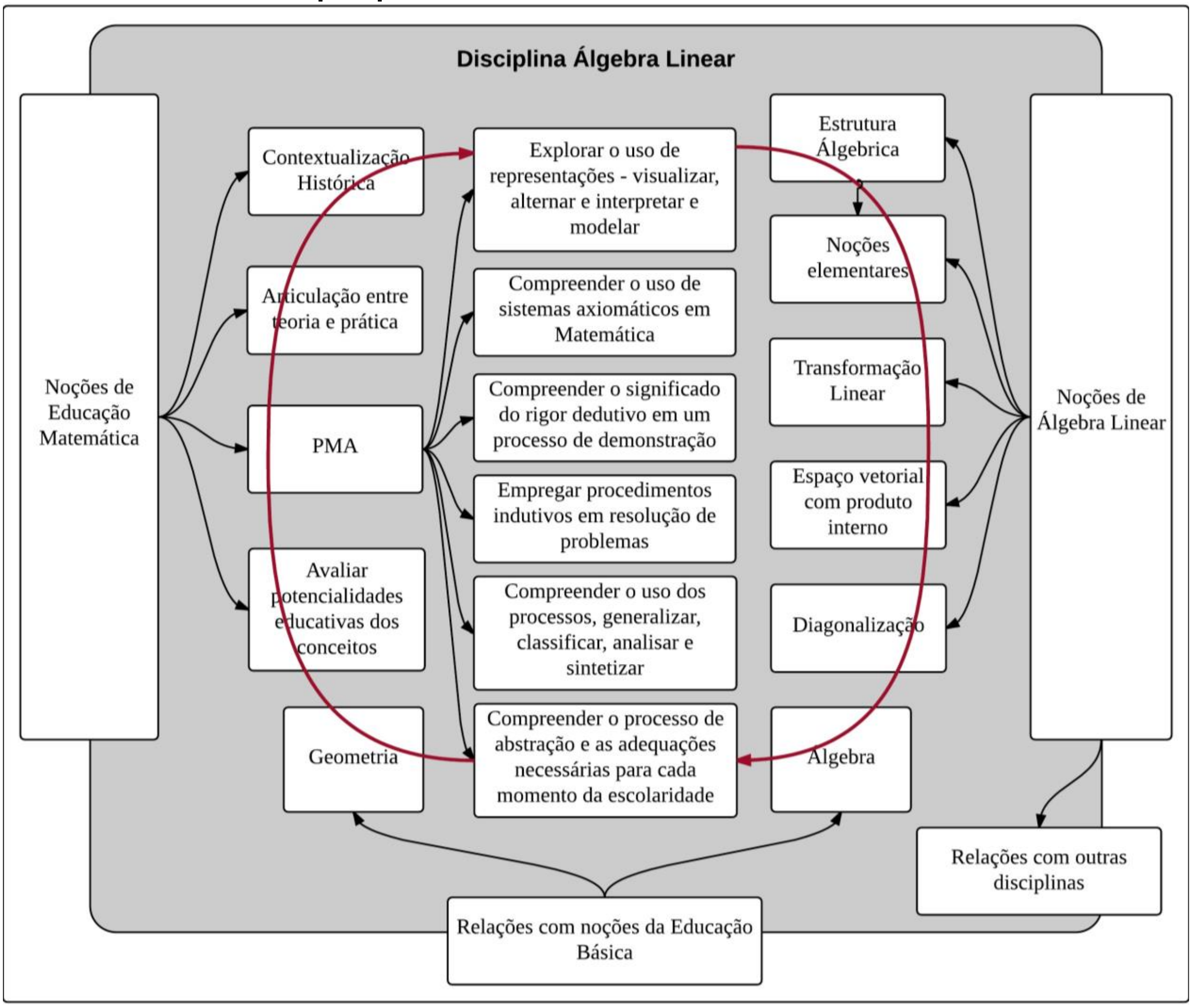
E, ainda, o licenciando possa iniciar a discussão sobre as estruturas algébricas e revisitar noções de álgebra elementar e de geometria elementar.

Do capítulo 5, *a Álgebra Linear nas universidades*, destaco elementos evidenciados nos documentos das universidades, sobre as habilidades e as competências, que são esperadas de um licenciado em Matemática, que podem, em parte, ser desenvolvidas pelo licenciando em Álgebra Linear.

Por fim, organizo esse conjunto de elementos e os represento sistematicamente no Quadro 21, no qual estabeleço algumas das possíveis conexões entre eles, por exemplo, as setas em vermelho indicam que todos os elementos estão entrelaçados e não devem ser abordados isoladamente.

A partir do Quadro 21, retomo as entrevistas e vou descrevendo as primeiras categorias, que serão acompanhadas de extratos de transcrições dessas entrevistas. Nessa etapa, foi fundamental organizar os elementos em tabelas, para poder visualizar os elementos com os quais trabalhava, conforme descrito no capítulo 4.

Quadro 21: Caracterização da disciplina Álgebra Linear à luz dos resultados de pesquisas e dos documentos analisados



Fonte: o pesquisador

A primeira categoria identificada faz referência às demonstrações em Álgebra Linear:

C1) o licenciando pode perceber o significado do rigor dedutivo em um processo de demonstração, desenvolver a capacidade dedutiva com sistemas axiomáticos e empregar procedimentos indutivos ou analógicos na criação da Matemática como atividade de resolução de problemas.

Essa categoria além de ter sido evidenciada nos resultados de pesquisas sobre Álgebra Linear, também pode ser observada na apresentação das habilidades e competências presentes nos projetos pedagógicos analisados. Tucker et al.

(2012), por exemplo, afirmam ser fundamental que o licenciando desenvolva habilidades relacionadas à argumentação e à generalização.

Nos dados do Quadro 22, apresento extratos das transcrições de dois entrevistados que ilustram essa categoria:

Quadro 22: comentários relacionados à C1

[...] Álgebra Linear tem **demonstrações**... [...] e mais….conceitos essenciais que permitem entender o que são axiomas [...] por exemplo, espaços vetoriais é uma amostra do poder do método axiomático … porque depois que você provou para um espaço vetorial poderá **aplicar** esse trabalho para exemplos concretos que parecem ser bem diferentes... [...] o método axiomático, é importante, pois você **prova** no caso geral e **verifica** em todos os casos particulares. (THÉO, 2015).
Álgebra Linear não tem cálculo! Ela é baseada em conceitos fundamentais... e toda hora é um teorema, resultados …. e, eles (estudantes) estranham muito esse tipo de disciplina, principalmente quando você exige ou faz a demonstração de alguma coisa [...] (FELIPE, 2015)

Fonte: dados da pesquisa

Vale ressaltar que o licenciando deve vivenciar o processo de demonstração, nesse sentido, Fiorentini e Oliveira (2013) afirmam que:

> o professor precisa saber que uma demonstração não deve ser, necessariamente, sempre formal e fazer parte de um sistema axiomático. [...] Há diversos modos de construir provas ou justificativas para as conjeturas. Alunos do Ensino Fundamental podem fazer pequenas demonstrações - isto é, construir justificativas e argumentações não formais e que podem ser aceitas como válidas no contexto de uma comunidade de aprendizagem matemática de sala de aula do Ensino Fundamental. Mas não é suficiente o futuro professor conhecer teoricamente, ou a partir da didática da matemática, como podem ser e funcionar as demonstrações em um ambiente exploratório-investigativo com a matemática. É preciso que ele possa experienciar o processo de exploração e investigação nas disciplinas matemáticas da licenciatura, tais como: teoria dos números, cálculo diferencial e integral, álgebra, análise, geometria, fractais, teoria dos grafos etc (p. 925).

Lucas apresenta uma possível forma de explorar o uso das demonstrações na formação do licenciando, em Álgebra Linear:

> [...] você deve apresentar as demonstrações dos teoremas de Álgebra Linear e eles (licenciandos) são convidados a **entenderem**

> aquela demonstração, **justificar os argumentos** utilizados ... você faz com que eles peguem a demonstração do livro e vão **estudando passo, a passo**... eles devem ir estudando passo a passo o que está acontecendo ali [...] Acho que o aluno deve ser **provocado a pensar** nesse porquê [...] usam um monte de regras para resolver exercícios, e quando precisam **ler uma demonstração** não entendem o que está acontecendo e, mais uma vez, acabam decorando! …. Nas demonstrações você trabalha um pouco mais com a **reflexão**, olha mais profundo, volta, dá exemplos, **contraexemplos**… **vai e volta**... (LUCAS, 2015)

Observo que o licenciando, ao analisar uma demonstração feita por outra pessoa, tem a oportunidade de trabalhar com vários processos do Pensamento Matemático Avançado, pois como afirmou Lucas: o licenciando, quando necessita compreender as etapas necessárias em uma demonstração, deve, antes, duvidar da validade de cada uma delas e, assim, buscar em seu repertório elementos que lhe permitam validá-las, por exemplo, fazer uso da intuição, de representações e de abstrações, entre outros processos descritos por Dreyfus (1991).

Machado e Nogueira (2005, p. 70) afirmam que nos cursos de Matemática “os alunos retêm apenas o discurso do professor e reproduzem por imitação suas técnicas e maneiras de demonstração” e, ainda, consideram que o uso do critério de verdade em Matemática é um ponto conflitante para o estudante, pois conduz a duas confusões epistemológicas: uma relacionada ao silogismo utilizado e outra por considerar verdade um fato, que apresenta um grande número de ocorrências, descartando uma das regras fundamentais da Matemática: o uso de contraexemplos.

Assim, considero fundamental que as demonstrações sejam abordadas na formação do licenciando e a disciplina Álgebra Linear pode ser um dos momentos em que o licenciando discute as questões relacionadas ao critério de verdade em Matemática, faz uso de contraexemplos e dos processos relacionados ao PMA. É importante citar que o licenciando sempre será o ator principal na construção dos argumentos que validam (ou não) os resultados matemáticos em discussão.

A segunda categoria também foi evidenciada nos resultados de pesquisas sobre Álgebra Linear e nos projetos pedagógicos analisados:

C2) em Álgebra Linear o licenciando pode ser conduzido a perceber os procedimentos indutivos ou analógicos na dinâmica de ensino e aprendizagem

e, ainda, a construir estratégias que lhe permitam justificar os procedimentos matemáticos utilizados no ensino de Matemática na Educação Básica.

Nos dados do Quadro 23, seguem extratos das transcrições de um entrevistado, que ilustram essa categoria:

Quadro 23: comentários relacionados à C2

[...] em vários momentos na escola básica ele (licenciado) precisará **justificar** suas escolhas e o próprio argumento matemático utilizado, [...] por exemplo, no momento em que ele vai demonstrar na sala de aula, ele vai fazer com que o seu aluno empiricamente se aproxime do porquê... o aluno (licenciando) não vai ensinar este conteúdo lá, mas o aluno (licenciando) tem que saber o porquê de uma afirmação ser verdadeira! (ANA, 2015). [...] fazer com que os alunos **reflitam** sobre o fato de o que eles estão aprendendo na graduação em Matemática poder, em um determinado momento, em um determinado assunto, **auxiliá-los**, pois ao saber a Matemática, que está por trás, ficará muito mais simples ensinar lá na escola, não é? (ANA, 2015).

Fonte: dados da pesquisa

A terceira categoria pode ser observada nas falas dos professores entrevistados e nas orientações propostas em SBEM (2013).

C3) O estudo da estrutura algébrica Espaço Vetorial.

Nos dados do Quadro 24, apresento extratos das transcrições de três entrevistas que ilustram essa categoria.

Quadro 24: comentários relacionados à C3

Álgebra Linear é ter a oportunidade de olhar para conteúdos já estudados na Educação Básica, mas com um **novo olhar**, **aprofundando a leitura** sobre o objeto, buscando **compreendê-lo** de uma forma mais abrangente que **extrapole** aquela velha ideia de caixa de conteúdos e, além disso, o mais importante, fortalecer a ideia de estrutura! Assim o professor poderá ter uma **visão panorâmica e** ao mesmo tempo **aprofundada** sobre os objetos estudados [...] ver, por exemplo, que a solução de um sistema linear homogêneo vai sempre configurar um espaço vetorial e, mais, qual a **vantagem** de se perceber tal fato? (...) Observe que, se ele tiver a oportunidade de aprofundar isso, estará possivelmente fortalecendo suas escolhas enquanto professor da Educação Básica! (PEDRO, 2015)

(Continuação)

[...] é introduzido o principal conceito que são os Espaços Vetoriais, quando os alunos percebem que na verdade não existem somente o $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, mas uma infinidade de outros espaços que são tão 'bons', ou têm a mesma 'estrutura' do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$, porém sem a **visão** ou **representação** geométrica [...] ao listarmos todos os espaços vetoriais reais mais estudados que são: os espaços do tipo $\mathbb{R}^n$, as matrizes, os polinômios, as funções e o próprio conjunto dos complexos, os alunos percebem que na verdade todos os conteúdos estudados por eles, até o momento, não são conteúdos isolados, mas fazem parte de algum espaço vetorial [...], principalmente, quando a gente fala de isomorfismo, na Álgebra Linear é possível mostrar que conteúdos que eles imaginam isolados, não estão! [...] são conteúdos de mesma natureza ... tudo se encaixa … Na verdade, acho que o mais importante para um curso de licenciatura é essa visão de estrutura.[...] Acho que essa visão de estrutura é fundamental na formação de professores em um curso de licenciatura. (FELIPE, 2015).
[...] em Álgebra Linear você tem as questões relacionadas às estruturas algébricas [...] ele (licenciando) precisa ter uma **ideia do que é** a Matemática no nível superior … (KARINA, 2015).

Fonte: dados da pesquisa

Para os autores, "não só é importante, mas fundamental o ensino de estruturas algébricas em um curso de licenciatura em Matemática" (SBEM, 2013, p. 24), pois

> a Álgebra Linear constitui não apenas uma das ideias e ferramentas básicas da Matemática, mas sistematiza uma estrutura algébrica que está presente em muitas aplicações dentro e fora da Matemática, por exemplo, em problemas contextualizados em áreas distintas como das ciências exatas, biológicas, sociais ou da economia (SBEM, 2013, p .29)

As próximas três categorias servem de exemplos de noções, com as quais o licenciando pode ter a oportunidade de refletir sobre as justificativas de procedimentos matemáticos utilizados no ensino de Matemática na Educação Básica. Conforme Fiorentini e Oliveira (2013):

> os professores precisam ampliar e melhorar a sua compreensão da matemática para poder ensiná-la bem, isto é, não basta saber fazer matemática ou resolver exercícios e problemas para ensiná-la, é necessário, também, ter um saber *sobre* esse conhecimento (p. 929, *itálico dos autores*).

C4) Noções de álgebra estudadas na Educação Básica que podem ser trabalhadas em Álgebra Linear: Sistemas de equações lineares, Matrizes e Determinantes.

Nos dados do Quadro 25, apresento extratos das transcrições de dois entrevistados, que ilustram essa categoria.

Quadro 25: comentários relacionados à C4

[...] **para que serve** matriz? Simplesmente para calcular o determinante? Não! Matrizes têm diversas utilidades... Quais tipos de problemas podem ser resolvidos utilizando matrizes? Sistemas de equações, **o que significa** resolver um sistema de equações?(ANA, 2015).
[...] o fato de os estudantes **retomarem**, por exemplo, matrizes, as operações com matrizes, sistemas lineares… [...] permite que o aluno (licenciando) **reflita** um pouco sobre conteúdos que ele vai trabalhar no Ensino Fundamental e Ensino Médio, permitindo que ele **fundamente** mais esses conteúdos (LUCAS, 2015).

Fonte: dados da pesquisa

Sobre essas noções, os autores, em Brasil (2006), apresentam as seguintes orientações aos professores de Matemática que atuam no Ensino Médio:

> a resolução de sistemas 2 X 3 ou 3 X 3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3 X 3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (p. 78).

Vale ressaltar o que os autores em SBEM (2013, p. 29) afirmaram: “poucos professores conhecem o significado da multiplicação de matrizes ou das operações sobre as linhas das matrizes do algoritmo de escalonamento para resolução de sistemas lineares” e, ainda, “os livros didáticos também não esclarecem, em geral, o significado dos determinantes de matrizes 2 x 2 ou 3 x 3 e exploram para além do seu uso na Regra de Cramer ou em alguns exercícios mecanizados”.

Portanto, considero, assim como, Mccallum et al. (2012), que o estudo de matrizes e de álgebra matricial representa uma generalização importante do conceito de número e proporciona uma oportunidade para o licenciando refletir sobre as propriedades das operações como regras gerais para uma manipulação algébrica, já, o estudo dos determinantes parece não contribuir com as necessidades dos licenciados.

C5) Noções de geometria estudadas na Educação Básica que podem ser trabalhadas em Álgebra Linear: vetores no plano e no espaço, reflexão e rotação de figuras no plano.

Nos dados do Quadro 26, seguem extratos das transcrições de duas entrevistas, que ilustram essa categoria:

Quadro 26: comentários relacionados à C5

[...] questões sobre vetores são estudadas na escola secundária ... eles estão estudando vetores em espaços de dimensão 2, 3 e ….sabendo isso como um caso particular, conhecendo no contexto da Álgebra Linear, o professor vai dominar as questões geométricas bem melhor, mais profundamente... A geometria elementar é um caso particular de Álgebra Linear, então entender essas coisas mais profundamente, digamos do ponto de vista da Álgebra Linear, vai ajudar os professores a ensinar melhor essas coisas para os seus alunos … (THÉO, 2015).
[...] nas transformações, trabalhar no $\mathbb{R}^2$; aquelas transformações... reflexão ... rotação … isso é bem interessante e às vezes passa despercebido! (LUCAS, 2015).

Fonte: dados da pesquisa

A noção de vetor é apresentada nas orientações curriculares para o Ensino Médio, Brasil (2006). Para os autores “a inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no Ensino Médio somente nas aulas de Física” (BRASIL, 2006, p. 77).

Em SBEM (2013), essa noção é tida como “[...] importante generalização em nível superior, quando um vetor é elemento de uma estrutura algébrica, um Espaço Vetorial, e base para outras generalizações” (p. 28). Sendo esperado do professor do Ensino Médio que:

> aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico (BRASIL, 2006, p. 77).

Os autores (SBEM, 2013, p. 30) também citaram as "transformações como reflexão axial, reflexão pontual, rotação, projeção ortogonal, isometrias e homotetias, estudadas junto com suas matrizes e propriedades geométricas", para eles, essas noções "formam conhecimento essencial do professor no ensino da geometria em nível básico".

Na categoria seguinte, recorro à afirmação do professor Théo sobre a existência em Álgebra Linear de uma "forte **relação entre álgebra e geometria**". Para ele, "quase todas as definições e teoremas algébricos têm boa interpretação geométrica; por outro lado, vários problemas geométricos podem ser resolvidos de maneira fácil depois de serem **traduzidos na linguagem** da Álgebra Linear". (THÉO, 2015).

Assim, nesta categoria, concentro argumentos em que a Álgebra Linear é descrita como uma disciplina em que:

C6) o licenciando pode alternar e interpretar representações geométricas e algébricas de noções estudadas na Educação Básica, assim como, generalizar certas propriedades associadas a essas noções, por exemplo, sistemas de equações lineares, matriz e função.

Seguem extratos das transcrições de dois entrevistados, que ilustram essa categoria:

Quadro 27: comentários relacionados à C6

Acredito que ao **pensar sobre o que significa** ter um sistema, **discutir** se esse sistema é determinado ou indeterminado, **analisar** o comportamento de duas retas, então, o que pode acontecer com duas retas? [...] Quero dizer: como eu **traduzo** esse conceito geométrico na álgebra? (ANA, 2015).

(Continuação)

Uma matriz pode **representar** uma função e, mais, (o licenciando) tem a oportunidade de **refletir** sobre esse conteúdo tão importante da Educação Básica e extrapolar aquela ideia de função que geralmente tem, pois a função **pode ser representada** por uma matriz; Observe ele vai juntar dois conceitos que estão isolados! (PEDRO, 2015). [...] é inegável a necessidade do estudo de sistemas lineares, então é importante que ele (licenciando) tenha na graduação uma oportunidade de **rever, aprofundar e refletir** sobre o que é um sistema de equações lineares, o que é um conjunto solução, o porquê das técnicas de escalonamento, não é? O que realmente significa a **classificação** de um sistema em possível determinado, possível indeterminado, impossível? É importante fazer com que o licenciando **interprete isso geometricamente**, fazer com que ela vá mais fundo... (PEDRO, 2015).

Fonte: dados da pesquisa

Destaco o fato citado por Dreyfus (1991) ao afirmar que não basta o indivíduo ter construído várias representações para uma determinada noção matemática, ele precisa, também, articular essas representações "fortemente" e "corretamente". Nos trechos apresentados há, ainda, evidências de outros processos: analisar e classificar.

Já, ao considerar as orientações curriculares para o Ensino Médio, observa-se:

> No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2 X 2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas (BRASIL, 2006, p. 77-78).

Em SBEM (2013), por exemplo, em Álgebra Linear "[...] é desejável que a conexão entre a geometria e a álgebra seja contemplada, trazendo significados para os conceitos teóricos da disciplina, de modo a capacitar o professor no tratamento adequado do conteúdo curricular do Ensino Médio" (p. 29).

Assim, a partir dos elementos evidenciados nessas três categorias, destaco existir em Álgebra Linear a oportunidade de propiciar momentos, em que o licenciando possa estabelecer relações e problematizações com a Matemática da

Educação Básica, com uma perspectiva didático-pedagógica[149], assim como, indicaram Fiorentini e Oliveira (2013).

Outra oportunidade para estabelecer conexões entre noções matemáticas pode ser observada na categoria **C7**.

C7) Em Álgebra Linear, o licenciando pode analisar, sintetizar e generalizar noções estudadas na Educação Básica e em Geometria Analítica.

Nos dados do Quadro 28, seguem extratos das transcrições de três entrevistados, que ilustram essa categoria:

Quadro 28: comentários relacionados à C7

(Em Geometria Analítica) é introduzido o plano geométrico $\mathbb{R}^2$ e o espaço geométrico $\mathbb{R}^3$ apenas como regiões geométricas, nas quais serão realizados os estudos e **representações** do Cálculo Vetorial e a Geometria Analítica, como os estudos da reta, plano, ângulos, distâncias, as cônicas, coordenadas polares, translação e rotação dos eixos coordenados. Isso é muito natural, pois são esses os dois únicos espaços, o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$, que nos permitem **a interpretação e a representação** geométrica daquilo que está sendo aprendido analiticamente (FELIPE, 2015). Produto interno também é 'bacana', porque você pode abordar os conceitos de métrica, módulo, distância e ângulo, mesmo que não tenha uma **representação** geométrica. O que é um ângulo entre duas matrizes? Dá para calcular, mas não tem uma interpretação geométrica (…) Eu acho 'bacana' porque eles têm a possibilidade de trabalhar com vários conceitos … de uma maneira mais estruturada e não de uma maneira isolada (FELIPE, 2015).
A Geometria Analítica trabalha com alguns espaços vetoriais, não é? Esses espaços vão **servir de exemplos** em Álgebra Linear… depois fica mais fácil para você trabalhar com esses exemplos …o $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ … (LUCAS, 2015).

[149] O termo didático-pedagógica foi utilizado por Fiorentini (2005, p.108) ao fazer referência à junção de duas palavras, didática que "busca explorar as relações professor-aluno-conteúdo (como enfatiza a didática francesa) e centra o foco no processo de ensinar e aprender um conteúdo e, também, no que antecede essa prática (planejamento) e a sucede (avaliação)" e pedagógica que, por sua vez, "preocupa-se com as consequências da ação didática, sobretudo o que esta pode promover em termos de formação e desenvolvimento humano do sujeito". Para o autor, "a Pedagogia, portanto, governa e vetoriza a ação didática, pois dá sentido à ação didática, preocupando-se com questões tais como: por que, para que e para quem ensinamos?"

(Continuação)

[...] quando ele (licenciando) estuda produto interno, ele está vendo noções de ortogonalidade, novamente, assunto da Educação Básica que já foi retomado inclusive no curso de Geometria Analítica, mas para espaços vetoriais particulares. Aliás, quando você, em Álgebra Linear, introduz o conceito de espaço vetorial, você pode aproveitar para fazer com que o licenciando **olhe** para conteúdos já conhecidos **a partir de um novo ponto de vista** [...] Isso é vantajoso, pois estou **aprofundando a compreensão** que ele terá sobre aquilo que já estudou, sem ter **observado tantas características**! (PEDRO, 2015) ... o grande passo é fazer com que eles (licenciandos) compreendam que uma matriz também é um vetor! Afinal, será necessário **extrapolar** a noção de vetor que eles têm da Geometria Analítica, não é? (PEDRO, 2015).

Fonte: dados da pesquisa

O uso de recursos provindos da Geometria Analítica para o desenvolvimento das noções de Álgebra Linear foi apresentado, entre outros: por Aráujo (2002), em relação aos livros didáticos; por Padredi (2003), nas entrevistas realizadas com professores; por Costa e Catarino (2007), ao afirmarem existir uma descontinuidade entre a noção de dependência linear estudada no Ensino Superior e a noção de colinearidade estudada na Educação Básica, descontinuidade que pode ocorrer por mudança de símbolos, mudanças de configurações e de significados.

Assim, considero que o professor formador pode explorar e problematizar as descontinuidades existentes entre a Educação Básica e o Ensino Superior, inclusive discutindo sobre momentos, em que essa “passagem” não pode ser entendida como uma “extensão natural”, conforme alertou Gueudet-Chartier (2000), ao tratar da generalização necessária ao abordar a noção de base de um espaço vetorial.

Outra contribuição em Álgebra Linear pode ser observada na categoria C8.

C8) Estudo das transformações lineares.

Nos dados do Quadro 29, seguem extratos das transcrições de três entrevistados, que ilustram essa categoria:

Quadro 29: comentários relacionados à C8

Transformçaões lineares em Álgebra Linear é como se fosse o estudo de funções... eu sempre falo: vocês (licenciandos) já estudaram funções, as funções elementares, não é? **Construíram gráficos**, fizeram as operações... então a gente poderia **imaginar** que agora com esses espaços vetoriais, seria um capítulo de funções específicas para esses espaços vetoriais….Aí chamo bastante a atenção deles para o fato de, nas transformações lineares, ser possível **definir** uma função entre dois espaços teóricos e completamente diferentes, pois, até então, eles só constroem funções dos reais nos reais ou, no máximo, de uma parte dos reais nos reais, nunca imaginaram por exemplo, ser possível construir uma função que leva vetores do $\mathbb{R}^3$ em polinômios, ou matrizes em polinômios (…) para isso, você precisa definir um tipo particular de função que são as transformações lineares, que precisam **satisfazer as propriedades**... [...] O conceito núcleo... quando você define núcleo e imagem… também é possível fazer uma **ligação** com o que eles já aprenderam sobre função… o que significa núcleo e imagem para uma transformação? …. podemos mostrar que tem tudo a ver com a ação de determinar os zeros para uma função... (FELIPE, 2015)
[...] na Educação Básica e no Cálculo eles (os licenciandos) estão acostumados a trabalhar com funções reais e em Álgebra Linear temos a possibilidade de explorar funções no $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e até em outros espaços vetoriais… além de **explorar a parte geométrica**, matrizes e sistemas lineares…. (LUCAS, 2015)
[...] diagonalização de operadores, em que ele (licenciando) procura uma base em um espaço tal e percebe que aquela matriz tem uma configuração diagonal, é um dos momentos em que você pode usar, por exemplo, uma **aplicação**, aquela que permite discutir a questão da translação e rotação das cônicas que vão sendo geradas... (PEDRO, 2015)

Fonte: dados da pesquisa

Dos trechos citados, observo que o estudo da noção de transformação linear é importante na formação do licenciando em Matemática, pois como Dubinsky (1997), CBMS (2012), SBEM (2013) e Marins (2014) destacaram que a relevância dessa noção repousa sobre as possibilidades de se estabelecer relações com outras disciplinas como Cálculo e Análise, com noções da Educação Básica e, ainda, diversas aplicações nas Ciências exatas e afins, sobretudo, quando há a interpretação geométrica do uso de uma transformação linear.

Em SBEM (2013), os autores afirmam que, em relação às transformações lineares, deve-se enfatizar o uso de espaços de dimensão finita, com exemplos em dimensões 2 e 3, o uso de matrizes para representar transformações lineares. Assim como, discutir a noção de linearidade que pode estar presente ou ser observada em fenômenos ou experimentos.

C9) Outras noções de Álgebra Linear citadas.

Nos dados do Quadro 30, seguem extratos das transcrições de três entrevistados, que ilustram essa categoria.

Quadro 30: comentários relacionados à C9

... é um conjunto com operações bem definidas, ou seja, um espaço vetorial ... esse espaço admite uma base, quero dizer, existe um pequeno conjuntinho de elementos que lhe permite gerar todos os outros... e a partir da base vem o conceito de dimensão, que, lá no Ensino Fundamental e Médio permite **analisar** os conjuntos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$..., ele (licenciando) precisa perceber que esses conjuntos são espaços vetoriais! (PEDRO, 2015).
Quando você entra na parte de isomorfismos, eles (licenciandos) se surpreendem com o fato de você conseguir jogar um espaço dentro do outro de uma maneira tão perfeita, que se encaixam, quando existe o isomorfismo, não é? E, mesmo se não existir, a gente consegue ‘enfiar’ um espaço dentro do outro… (risos) ... Não vai ser injetora, ou não vai ser sobrejetora, mas você consegue apertado ou folgado você consegue! … (risos)… Então, eles ficam muito interessados nessa parte porque eles percebem essa **possibilidade de relacionar** espaços que, até então, não conheciam como sendo uma estrutura (FELIPE, 2015).
[...] **trazer mais exemplos, novos exemplos** de espaços vetoriais, mas não muito elaborados [...] discutir bem questões envolvendo a dependência linear entre vetores, combinação linear e base, pois vai permitir, também, a discussão sobre questões relacionadas ao conjunto gerador e dimensão de um espaço vetorial…, assim como, [...] diagonalização e, se der tempo, autovalor e autovetor” (LUCAS, 2015).

Fonte: dados da pesquisa

Em Prado (2010), apresentei caminhos que um estudante pode trilhar ao construir a noção de base de um espaço vetorial, possíveis correlações entre as noções elementares em Álgebra Linear e o uso dos processos intuição e verificação para construir “a noção de base como sendo uma justaposição entre um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal linearmente independente” (p. 168-169).

Em relação à dimensão, Parraguez (2009) afirma ser uma importante noção, pois é necessária durante a construção das noções elementares em Álgebra Linear e permitirá ao estudante caracterizar um espaço vetorial.

Os autores em SBEM (2013), em relação aos autovalores, autovetores e diagonalização de operadores, afirmam ser uma oportunidade para introduzir o licenciando às aplicações relevantes, inclusive com exemplos relacionados ao

Ensino Médio: “a visualização de eixos ou de planos invariantes no plano ou espaço por transformações, como reflexão ou rotação, pode levar o licenciado a compreender o significado dos autovalores e autovetores de maneira concreta” (SBEM, 2013, p. 30).

C10) Considerações não específicas às noções de Álgebra Linear.

Nos dados do Quadro 31, seguem extratos das transcrições de dois entrevistados, que ilustram essa categoria:

Quadro 31: comentários relacionados à C10

[...] como há as matérias de formação didático-pedagógica, precisamos ter, também, matérias que permitam desenvolver o pensamento matemático de nível superior [...] em Álgebra Linear você tem as questões relacionadas às estruturas algébricas…. [...] ele (licenciando) precisa ter uma ideia do que é a Matemática no nível superior [...] **essas disciplinas poderiam ser mais integradas** (KARINA, 2015). [...] quando eles iniciam o curso, percebo um grande choque [....] **eles são imaturos** ao ponto de **não perceberem a inversão no olhar**, agora eles devem olhar para os conceitos **não só como alunos de Matemática, mas como futuros professores de Matemática**! [...] precisamos elaborar estratégias que favoreçam aos alunos a aprenderem estudar e a construírem os conteúdos necessários para terem um bom desenvolvimento na continuidade do curso (KARINA, 2015).
[...] existe o outro lado até mais importante e interessante, penso que nós não aprendemos as coisas apenas para depois ensinar novamente, não dá para estabelecer a relação em que tenho que ver na disciplina exatamente aquilo que vou ensinar depois e de preferência do mesmo jeito, **‘control c’ e ‘control v’**, o que aprendi aqui, vou lá e vou repetir, isso **não existe!** ... (PEDRO, 2015).

Fonte: dados da pesquisa

Observo a presença de duas áreas distintas que não dialogam, Karina até propõe uma integração entre o que chamou de disciplinas que tratam de questões didático-pedagógicas e disciplinas que envolvem o pensamento matemático. Para Moreira (2012, p. 1142):

> Não podemos continuar separando conteúdo e ensino na formação do professor, uma vez que na prática docente esses elementos não são separáveis. Se os separamos no processo de formação, não estamos preparando o profissional para a sua prática real.

C11) Contribuições e relações com outras disciplinas.

Nos dados do Quadro 32, seguem extratos das transcrições de três entrevistados, que ilustram essa categoria:

Quadro 32: comentários relacionados à C11

Poderíamos aqui detalhar os conceitos da Álgebra Linear que são utilizados nas outras disciplinas, mas prefiro apenas exemplificar com o estudo das Transformações Lineares, um tipo particular de função, muito utilizada na própria construção do **Cálculo Diferencial e Integral**; a noção de estrutura quando estudamos as Estruturas Algébricas, na disciplina de **Teoria dos Conjuntos**, também quando fazemos um 'link' com os conceitos da Álgebra Linear que foram aprendidos na disciplina de **Geometria Analítica**. Então, eles passam a entender que o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$ são casos particulares de Espaços Vetoriais (FELIPE, 2015).
[...] no meu mestrado em **Biomatemática**, utilizei equações diferenciais e sofri muita influência da Álgebra Linear!…..no momento em que você estuda uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e encontra um conjunto solução, você acaba tendo a necessidade de mostrar que todo esse conjunto solução pode ser escrito a partir de duas funções linearmente independentes.... para mim o conceito dependência linear entre vetores está no âmago da Álgebra Linear…[...] na área de **otimização**, por exemplo, é um absurdo... Álgebra Linear o tempo todo! ... Método simplex…. um monte de vetores e era necessário provar se eles eram LI ou LD.... mais uma vez, Álgebra Linear! [...] ao estudar **Mecânica Quântica**, boa parte do tempo eles (colegas da Física) estavam [...] provando se é ortogonal, se não é ortogonal, produto interno... [...] estavam falando de espaço vetorial de dimensão infinita, [...] Análise Funcional, o estudo de espaços vetoriais de dimensão infinita, consequência direta de Álgebra Linear ... (PEDRO, 2015).
[...] tanto na licenciatura, quanto na Matemática (bacharelado), a Álgebra Linear é uma disciplina básica… ela é básica para várias disciplinas, pois, para poder seguir no estudo de outras disciplinas, é preciso saber Álgebra Linear! … Na **Álgebra**, [...] **Análise Funcional**… **Equações Diferenciais**... tudo, tudo, tudo!… Onde aparecer espaços vetoriais..., praticamente em toda a Matemática, portanto Álgebra Linear é básica... tem que estudar! A Álgebra Linear é mais ou menos como o Cálculo… as duas são disciplinas básicas... Acredito que a Álgebra Linear é ainda mais do que o Cálculo. (THÉO, 2015)

Fonte: dados da pesquisa

As falas citadas apenas confirmam o papel importante que a Álgebra Linear tem em Matemática (DUBINSKY, 2001). A questão é: qual deve ser a Álgebra Linear na licenciatura em Matemática visando a atuação do licenciado na Educação Básica?

Um olhar panorâmico das entrevistas: uma síntese

Na seção anterior, organizei os dados evidenciados nas análises das seis entrevistas, em onze categorias. Para cada uma delas apresentei argumentos provindos de resultados de pesquisas, que as justificavam, e extratos de entrevistas aderentes. Assim, as categorias evidenciam como os professores entrevistados percebem a contribuição da Álgebra Linear na formação do licenciando em Matemática. Em síntese, dessas categorias, a Álgebra Linear permite a:

- compreensão do significado do rigor dedutivo em um processo de demonstração, desenvolvimento da capacidade dedutiva com sistemas axiomáticos e percepção do emprego de procedimentos indutivos ou analógicos na criação da Matemática, como atividade de resolução de problemas;
- compreensão dos procedimentos indutivos ou analógicos na dinâmica de ensino e aprendizagem e, ainda, na construção de estratégias que lhes permitam justificar os procedimentos matemáticos utilizados no ensino de Matemática na Educação Básica;
- compreensão da noção de estrutura algébrica Espaço Vetorial;
- preparação profissional em relação às noções de álgebra estudadas na Educação Básica: Sistemas de equações lineares, Matrizes e Determinantes;
- preparação profissional em relação às noções de geometria estudadas na Educação Básica: vetores no plano e no espaço, reflexão e rotação de figuras no plano;
- percepção e uso do processo alternar e interpretar representações geométricas e algébricas, em relação a noções estudadas na Educação Básica, assim como, o papel da generalização em relação às propriedades associadas a essas noções, por exemplo, sistemas de equações lineares, matriz e função;
- percepção e uso dos processos: analisar, sintetizar e generalizar ao abordar noções estudadas na Educação Básica e em Geometria Analítica;
- compreensão da noção de transformação linear;

- compreensão de outras noções de Álgebra Linear.

Além dessas contribuições, também, identifiquei duas outras categorias que evidenciaram *contribuições não específicas às noções de Álgebra Linear* e *contribuições e relações com outras disciplinas*.

Refinando as categorias, novas entrevistas: caracterização dos participantes

Após a descrição de cada uma das licenciaturas envolvidas e a identificação das categorias preliminares, selecionei duas novas professoras, pois viso investigar a existência de convergência ou divergência, nos extratos das transcrições dessas entrevistas, assim como, identificar a possibilidade de um refinamento (ou não) das categorias já eleitas. Ressalto, que as duas pesquisadoras selecionadas são influentes em Educação Matemática e possuem tempo de docência, inclusive com atuação nas licenciaturas em Matemática e, ainda, desenvolvem pesquisas em educação algébrica ou formação de professores, podendo assim, contribuir com esta pesquisaOs nomes atribuídos a essas professoras são fictícios, Júlia e Helena, preservando o anonimato de cada uma delas.

Júlia é licenciada em Matemática, fez mestrado em Educação Matemática, doutorado em Educação e dois pós-doutoramentos em Educação Matemática. Atua no Ensino Superior desde 1989 e na pós-graduação desde 1998. Foi coordenadora da licenciatura em Matemática, coordenadora do programa de pós-graduação em que atua, entre outras funções administrativas.

A entrevista com Júlia foi realizada, presencialmente, na data em que a professora veio a São Paulo, para realizar uma palestra em um evento de Educação Matemática, sobre formação de professores. Após o evento a acompanhei até o hotel, onde estava hospedada, e, em um local tranquilo, realizei a entrevista que durou cerca de 30 minutos. A entrevista foi audiogravada, transcrita e encaminhada para a professora.

Já, Helena é graduada em Serviço Social, bacharel e licenciada em Matemática, fez especialização em Álgebra, mestrado e doutorado em Matemática Pura e dois pós-doutoramentos em Educação Matemática.

Helena atua no Ensino Superior desde 1979, na pós-graduação desde 1989 e com o ensino e a aprendizagem em Álgebra Linear há mais de 35 anos. Além disso, já foi coordenadora da licenciatura em Matemática, chefe do departamento de Matemática, coordenadora do programa de pós-graduação, em que atua, entre outras atividades administrativas.

A entrevista foi realizada na universidade em que Helena trabalha, na data e horário acordados. Ao chegar e encontrar com a professora, dirigimo-nos a uma sala, em que não houvesse interrupções e iniciamos a audiogravação. A entrevista que durou cerca de 35 minutos foi transcrita e aprovada pela professora.

Refinando as categorias com novas entrevistas: tecendo considerações

No total, foram entrevistados 8 professores e para 7 deles a Álgebra Linear deve compor a grade curricular da licenciatura em Matemática. A única, entre os entrevistados, que questiona a permanência dessa disciplina é Helena, para ela, o que está em jogo é a formação do professor formador:

> [...] hoje me questiono muito sobre isso, pois em muitas licenciaturas, os professores que dão aulas ou são professores que fizeram uma licenciatura em Matemática, ou são professores que fizeram um curso de bacharelado em Matemática [...] então, eu posso responder assim: currículo mínimo! Acho que no currículo mínimo não deveria constar Álgebra Linear, pois os professores que atuam nas licenciaturas não têm aprofundamento em Matemática, os que dão a Matemática nas licenciaturas, muitas vezes, dão apenas algoritmos e definições sem sentido… [...] Isso, porque o professor que foi mais fundo em Álgebra Linear não é o professor que fez uma licenciatura em Matemática… embora, ele possa se aprofundar depois em especializações etc... Mas..., esse não é o professor comum!…. (HELENA, 2015).

Júlia, por sua vez, concorda com a permanência da disciplina, mas, também, cita a formação do professor formador, para ela, muitas vezes:

> [...] o professor que vai dar aula de Álgebra Linear fez o bacharelado em Matemática, um mestrado em Matemática Pura ou Matemática Aplicada e não teve, em momento algum, uma discussão sobre o que é formar um professor!... Essa é uma questão que discutimos lá no nosso programa, pois as questões relacionadas à formação do professor tinham que estar presentes, também, no curso de bacharelado... nós já temos a presença da história da Matemática e da filosofia da Matemática, mas a filosofia, por exemplo, não aborda as questões sobre o que é construir em Matemática, o que é epistemologia da Matemática e tudo mais... [...] Estou falando da eficiência do formador de professores, da pessoa que forma o

> professor... se ele não vivenciou esse tipo de formação e não se propõe a buscar, fica difícil!... (JÚLIA, 2015).

Nesse sentido, Moreira (2012) afirma ser necessário repensar a formação dos professores formadores:

> nesses setenta anos de licenciatura no Brasil, sob a lógica do '3+1', manteve-se basicamente o processo de formação dividido em segmentos estanques: a formação de conteúdo e a formação pedagógica. Correspondentemente, os formadores atuais, de modo geral, não estão qualificados adequadamente para operar o diálogo necessário entre o pedagógico e o matemático, nas ações de formação segundo essa lógica alternativa, em que o trabalho com a matemática do professor demanda um trânsito permanente e contínuo entre esses campos, apagando as fronteiras que os separam, reconstituindo-os num campo único e original. Assim, colocam-se novos parâmetros de desenvolvimento profissional para os formadores, exigindo-se um tipo de envolvimento especial destes com a problemática da formação e do saber profissional docente escolar: não basta ter competência como matemático profissional para ter competência para formar professores de matemática. Analogamente, não basta o conhecimento pedagógico para *complementar* a formação matemática que vem separada no tempo ou no espaço ou em ambos (p. 1148-1149, *itálico do autor*).

Observo que a reflexão apresentada por Moreira (2012) é pertinente, pois um professor, que deseja atuar na licenciatura em Matemática, deve assumir o compromisso de estudar as questões relacionadas ao conhecimento Matemático, assim como, estudar as questões didático-pedagógicas relacionadas a essa disciplina, de forma que haja uma "integração intrínseca entre matemática e educação/ensino/aprendizagem escolar" (MOREIRA, 2012, p. 1146).

Helena, por exemplo, apresenta a seguinte condição para que a disciplina Álgebra Linear contribua na formação do licenciando em Matemática:

> se esse professor (formador) for um que estudou os problemas da Álgebra Linear, que viu como os alunos interpretam aquilo que foi trabalhado, etc., ele vai poder, sim, direcionar a atenção para o que é importante: como você compreende uma estrutura algébrica, seja ela anel, grupo, corpo, ou um espaço vetorial, entende? E, o professor faz com que o licenciando aprenda a enxergar a estrutura, então tudo bem! (HELENA, 2015).

Ao questionar os 6 professores das universidades selecionadas, sobre o uso que é feito das Orientações Curriculares, para a Educação Básica (por exemplo, BRASIL, 2006) nas atividades propostas em Álgebra Linear, percebi que dos três que ministram a disciplina, nenhum faz uso de elementos presentes nessas orientações, sendo que dois deles afirmaram conhecer e não usar (Pedro e Felipe), e o terceiro, Théo, alegou nem conhecer. Dos demais entrevistados, os três conhecem as orientações e alegaram fazer uso, conforme as atividades que desenvolvem, por exemplo, Karina contou usar em projetos de pesquisa.

Questionei Júlia sobre o uso que os professores formadores poderiam fazer das Orientações Curriculares para a Educação Básica e segundo ela:

> Primeiro, a grande maioria dos professores que atuam nos cursos de licenciatura não leem os documentos (BRASIL, 2006, 2001b), quem se incumbe de estudar os documentos, são as pessoas que assumem a coordenação do colegiado e que ficam responsáveis por estruturar o curso, não é? [...] isso envolve uma questão de compromisso, compromisso político, mesmo! ... Do que é formar um professor [...] Penso que esses professores deveriam se envolver no estudo desses documentos, se envolver com as pesquisas atuais que fazem essa relação da matemática acadêmica com a matemática escolar... penso que falta essa iniciativa! (JÚLIA, 2015).

E, ainda,

> [...] acho que isso teria que ser um compromisso dos professores que trabalham na formação inicial e penso que nós, também, temos a responsabilidade, enquanto sociedade... SBEM, SBM, SBMAC[150]... de elaborar materiais que subsidiem esse trabalho do professor em sala de aula [...], porque há algumas pessoas, por exemplo, que defendem que o Cálculo tem que ser igual para todo mundo, que a Álgebra Linear tem que ser igual para todo mundo. O que eu estou chamando de igual para todo mundo? Para quem vai ser engenheiro? Para quem vai ser professor? É tudo igual? Não é! São cursos diferentes... Os documentos avançaram tanto! As resoluções... esta última, sobre a manutenção da prática como componente curricular, aliás, é na qual acredito que possa se estabelecer a articulação entre a universidade e a escola, mas o que a gente tem visto, na maioria dos cursos, é que essa prática, como componente curricular, acaba virando listas de exercícios! Na aula de prática, o licenciando vai resolver listas de exercícios e a relação com a escola não acontece! (JÚLIA, 2015).

Em relação à categorização já apresentada, trago argumentos evidenciados nas entrevistas realizadas com Júlia e Helena no sentido de refinar tais categorias.

[150] Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Helena inicia criticando os professores que usam a disciplina Álgebra Linear ao abordar:

> [...] matrizes sem relação com o que os licenciandos vão trabalhar..., eles (professores formadores) até justificam o ensino de sistemas de equações, pois transformam em matrizes para depois brincarem com operações entre matrizes, mas fica por isso mesmo, ou seja, não tem significado! [...] Às vezes penso que é pior você trabalhar com alguma coisa, fingindo que está dando Álgebra Linear e, está trabalhando, na verdade, com sistemas de equações, etc… A Álgebra Linear usa sistemas de equações, matrizes, mas outras áreas, inclusive da álgebra, também usam! Então, não são assuntos que são próprios da Álgebra Linear… (HELENA, 2015).

A professora continua sua argumentação e apresenta elementos relacionados à categoria **estudo da estrutura algébrica Espaço Vetorial**:

> Agora, as ideias relacionadas à Álgebra Linear, essas sim, considero que seriam muito interessantes de serem trabalhadas com o futuro professor... são as ideias relacionadas à estrutura! Mas…, o que a gente percebe é que não se trabalha com as ideias de estrutura, que é direcionar o olhar do futuro professor para o que caracteriza, por exemplo, o objeto matemático espaço vetorial, pois compreender o porquê e saber estudar as estruturas algébricas força o estudante a pensar sobre as propriedades dos números de outra forma e desenvolver nele um olhar matemático, pois se ele não tem um olhar matemático para a Matemática, se ele tem um olhar mais algorítmico, fica preso ao 'eu tenho que saber trabalhar com o algoritmo', vai ser um curso vazio…. (HELENA, 2015).

Para ela:

> [...] espaço vetorial é uma das estruturas que seriam interessantes para o licenciando em Matemática entender bem, mas, se ele entender como estrutura, o que é esse conceito, reconhecer mais do que um registro de representação semiótica para um espaço vetorial, entende? Porque ali ele tem apenas o nome do espaço vetorial e ele nem entende o que é essencial daquele conceito, afinal isso nem sempre é enfatizado [...] (HELENA, 2015).

Sobre as representações em Matemática, mais especificamente, em Álgebra Linear, várias pesquisas têm sido desenvolvidas, por exemplo, Stewart (2008) afirma que os estudantes, que participaram do seu estudo, deram indícios de não reconhecerem os conceitos em diferentes representações, assim como, apresentaram dificuldades ao trabalhar com diferentes representações para o mesmo conceito.

Nesse sentido, destaco o que Machado e Bianchini (2013) afirmaram, pois "se, por um lado, um sujeito abstrai um conceito a partir de suas várias representações, por outro, essas representações são, por sua vez, sempre representações de um conceito abstrato" (p. 592). Assim, ao querer que o licenciando compreenda a noção de espaço vetorial, é imprescindível que sejam abordadas diferentes representações para os espaços vetoriais em questão.

Helena afirma, ainda, que:

> enfatizar a questão de estrutura desde o começo, o que é um espaço vetorial, quais espaços eles (licenciandos) conhecem… Tudo dependerá do que ele já trabalhou, por exemplo, se ele trabalhou com a Teoria dos Números, que para mim é essencial, pois tenho algumas prioridades, o estudo mais profundo da Teoria dos Números é importantíssimo… Então,… tendo em vista que ele já estudou isso, trabalharia um pouco com exemplos de espaços vetoriais mais usuais e que fazem uma correlação com a Teoria dos Números, por exemplo, o $\mathbb{Z}_n$, entende? Faria com que eles pensassem nisso, como seria esse espaço vetorial? Será que seria um espaço vetorial? … iria correlacionar essas ideias e trabalhar a definição além da definição, como conceito… Eu não passaria por cima da definição, pois senão o estudante vai olhar para o espaço vetorial e fazer todas aquelas confusões… (HELENA, 2015).

A compreensão de definições também foi citada por Stewart (2008), pois para alguns dos estudantes é importante conhecê-las e citá-las, mas, no momento de usar as definições na resolução de problemas, os estudantes não conseguem perceber o papel que elas exercem em Matemática.

Por isso, considero as definições em Matemática como resultado da combinação entre processos do PMA, a generalização e a síntese, que de arcordo com Machado e Bianchini (2013), são processos indissociáveis. Assim, o licenciando ao experenciar a definição, como sendo um objeto matemático, construído por meio da articulação de processos, pode, também, ser provocado a compreender o papel da definição na Matemática e, consequentemente, na Educação Básica.

Outro ponto citado por Helena faz referência à disciplina Teoria dos Números[151], observo que tal recomendação exige toda uma reorganização na

[151] Para maiores detalhes indico a leitura de Resende (2007a).

estrutura curricular, pois, como mostrei, a disciplina Álgebra Linear é ofertada (pelo menos nas universidades investigadas) nos dois primeiros anos da licenciatura.

Assim, concordo com Helena:

> [...] as disciplinas que vão mais profundo na Matemática, disciplinas mais formativas que tenham uma relação com a Matemática e, daí, Álgebra Linear, deve ser mais ou menos no terceiro ou quarto ano, pois acredito que o licenciando terá mais maturidade para trabalhar… Acredito que, antes disso, ele não consiga perceber muitas coisas, acho que a primeira disciplina a ser estudada deveria estar relacionada à ideia de estrutura mesmo, …. enfim… aprofundar no conjunto dos números inteiros, conjunto dos números racionais, em um curso de Teoria dos Números, para depois utilizar isso como exemplo ou contraexemplo e, então, entrar na questão do que é um espaço vetorial … (HELENA, 2015).

Por fim, sobre espaços vetoriais, deixo em aberto uma questão apresentada por Helena:

> [...] eu me pergunto: Será que é a Álgebra Linear? Será que dentre as estruturas, é o espaço vetorial que deveria ser estudado? Todas as estruturas deveriam ser estudadas?... Todas não, porque existe um número imenso, mas, enfim… quais estruturas deveriam ser estudadas? E, o quê, dessas estruturas? Entendeu?... (HELENA, 2015).

Outra categoria evidenciada é sobre **o estudo das transformações lineares**, para Helena:

> Eu colocaria um pouco de espaço vetorial, a estrutura em si e sempre as transformações, porque é isso que importa … ficar somente no estudo da estrutura, vamos dizer, base, dimensão… e não partir para a correlação entre dois espaços vetoriais, não há sentido nenhum, não é?…. O que importa é aquilo que modeliza, que é sempre uma ação e, para ter ação, tem que ser uma transformação, seja ela linear, ou um homomorfismo, ou qualquer coisa assim, não é?

Em outro momento,

> [...] a estrutura tinha que ficar clara! Tudo o que é básico ... Não é apenas uma base!... São infinitas bases... e o fato de ser ter tantas, você pode até provocar para as transformações lineares e falar assim: se as bases vão gerar o mesmo espaço vetorial, quais as relações de uma com a outra? Daí você pode falar da transformação

> de uma base na outra…. e entrar na transformação linear… Entrando na transformação linear, ele entende que se pode transformar a base, então posso usar qualquer base...mas, eu sempre tentaria colocar aqueles exemplos de transformações lineares de mudança de base… (HELENA, 2015).

De acordo com Dreyfus (1991, p. 30), tanto o processo de pesquisa quanto o de aprendizagem exigem que o indivíduo manipule, investigue e descubra mais sobre os objetos, "sobre os quais seu conhecimento é parcial e fragmentado".

Por isso, destaco, mais uma vez, a oportunidade de o estudante explorar a presença dos processos do PMA, na busca por uma compreensão do objeto matemático transformações lineares, pois será necessário fazer uso de diversas representações, alternando e interpretando-as[152], nas palavras de Bianchini e Machado (2015) *alternar*, pois "é necessário que essas representações estejam conectadas, articuladas, dando condições ao sujeito de transitar de uma representação para outra, sempre que a outra seja mais eficiente para o próximo passo" (p. 34), *interpretar* para que seja possível "passar de uma formulação matemática de uma afirmação ou problema para outro" (p. 34) e, ainda, será necessário abstrair a partir dessas representações e representar a partir da abstração sobre o objeto.

Acrescento, também, a oportunidade de propor situações que o licenciando seja conduzido a modelar, por exemplo:

> O que acontece com as fotos que vêm dos satélites ou da Soyus[153], por exemplo? Sei lá, qualquer coisa que está em outro lugar e quero trazer para cá e, para isso, sofre modificações... que é mudança de base… sabe, eu acho que a gente tem que estabelecer essas conexões com o que é utilizado, pois o próprio professor não sabe dessas coisas… (HELENA, 2015).

Ou, ainda,

> [...] falar muito mais das aplicações que a gente convive o tempo todo, por exemplo, as procuras no *Google*…. (risos) … não é? Como isso funciona? Qual é a Álgebra Linear usada, não é? (…) Valorizaria isso, pois acho que minimamente tem que tocar em algumas coisas … as coisas que estão sendo faladas, por exemplo, os fractais... alguma coisa assim devia ser falado, sabe?… (HELENA, 2015).

[152] Para as autoras, *alternar e interpretar* é um único processo, pois são ações indissociáveis.
[153] Nave espacial Russa.

Continuando, Helena cita:

> [...] mostrar os homomorfismo das coisas… mas, eu não iria tão fundo, tão fundo, tão fundo, quanto falar de núcleo, imagem... poderia até tocar, porque tem relação com a transformação ser injetora, sobrejetora ..., mas eu não ia tocar muito nisso... eu faria somente a essência … discutiria mais o porquê é linear, se isso tem a ver com a geometria...Eu buscaria, em alguns tópicos, a essência, não mais do que isso...eu discutiria um pouco até essa primeira parte que a gente dá de espaço vetorial e, depois, iria para o início dos homomorfismos entre espaços vetoriais e etc… se é linear, se não é… e isso está muito ligado... a linearidade está muito ligada ao que dá estrutura de espaço vetorial ao conjunto... que são as operações... eu acho isso bem interessante, porque o estudante pode rever a necessidade das operações ….(HELENA, 2015).

Já, as noções de matemática, que são ensinadas na Educação Básica e que podem ser abordadas em Álgebra Linear, foram organizadas em três categorias, as quais permitiam intersecções. No entanto, após algumas reflexões, considero haver apenas uma categoria: **noções de Matemática, que são ensinadas na Educação Básica e podem ser abordadas em Álgebra Linear à luz do PMA**.

Primeiramente, apresento extratos das entrevistas realizadas com Júlia e Helena e depois defendo o porquê dessa alteração.

Helena inicia argumentando que as licenciaturas no país têm, geralmente, três anos de duração, são poucas com quatro anos, fato evidenciado por diversos pesquisadores já citados ao longo desta pesquisa.

Após essa consideração, Helena afirma que as noções abordadas em Álgebra Linear poderiam ser abordadas em outras disciplinas, mesmo assim, sobre a relação dos estágios obrigatórios e a Álgebra Linear, declarou que:

> [...] realmente tem a ver um pouquinho, quando você ensina resolução de sistemas de equações lineares e matrizes no Ensino Médio, mas em geral o professor (formador) não aborda o para que serve, como serve, onde é usado... (HELENA, 2015).

Helena argumentou sobre a abordagem dada, por exemplo, à noção de matriz:

> [...] se fala em matrizes reais, mas os exemplos que os professores (formadores) dão são de matrizes naturais... (risos) [...] Em geral, as

> matrizes são apresentadas apenas com números positivos …. e eles não sabem para que serve aquilo! No entanto, no mundo da computação, as matrizes são essenciais! …. então, ele enquanto professor (licenciado) vai ter contato com a palavra matriz e se quiser fazer alguma conexão, alguma atividade, ele poderá até trabalhar, mas a segurança, ao elaborar uma atividade, que chegue em uma matriz, se dará apenas se conhecer o que é matriz!… Matriz não é só uma tabela com números definidos … O conjunto das matrizes tem uma estrutura interessante, então eu acho que o licenciando somente terá maturidade para conhecer, um pouco mais tarde, quando ele já está no terceiro ano, para fazer um estágio no Ensino Médio, você entende? (HELENA, 2015).

Ressalto a necessidade de "incomodar" o licenciando sobre o que é esse objeto matemático matriz, pois não se pode admitir, como citou Karina: "[...] para eles matrizes era aquele conteúdo que envolvia algumas tabelinhas, algumas operações, não é?". Novamente, o licenciando deve ter consciência do processo de generalização que envolve essa noção e a noção de número (MCCALLUM et al., 2012) e, ainda, explorar as propriedades das operações com matrizes (SBEM, 2013).

Júlia, assim como outros entrevistados, também afirma:

> [...] penso que em Álgebra Linear vários conteúdos permitem discussões que vão além do conteúdo em si... um exemplo, trabalhar os sistemas lineares de diferentes modos, explorar as formas de obter as soluções, mostrar a relação entre sistemas lineares e determinantes... (JÚLIA, 2015).

Já, Helena:

> [...] em relação à conexão... ao resolver um sistema, em vez de obter as soluções por determinante, etc… deveria obter por escalonamento justificando as etapas, pois tem a ver com equações que são ... são combinações lineares, isso faz sentido!… isso faz sentido para mim! (HELENA, 2015).

As discussões relacionadas ao ensino do determinante na Educação Básica já estão em pauta, por exemplo, em Brasil (2006). Para Júlia, vale discutir:

> O que é o determinante? O determinante... tem uma função que relaciona uma matriz a um número, então, dá para discutir outras perspectivas sobre o mesmo conteúdo matemático e buscar quais são as relações com a matemática escolar (...) Olha, o determinante é uma função que associa uma matriz a um número e isso não é

> discutido no Ensino Médio! Muitas vezes porque os próprios professores quando estudaram Álgebra Linear não fizeram esse tipo de discussão e, ainda, como essa discussão poderia ser levada para a sala de aula (JÚLIA, 2015).

Helena, ao contrário, é bem incisiva ao argumentar:

> [...] olho o que eles estão fazendo lá (na Educação Básica)… porque eu fico irritada quando eles estão trabalhando o tema determinante, não tem sentido! Não quer dizer nada para eles! Agora, eles aprenderam sistemas de equações, por que não trabalhar com escalonamento justificado?... Se eu tenho duas equações que são equivalentes, não preciso usar as duas, elas estão falando a mesma coisa, sabe?… Transformar aquilo! Dar sentido para aquilo! (HELENA, 2015)

Em Brasil (2006) e SBEM (2013), os autores afirmam que a resolução de sistemas de equações lineares deve ser obtida por meio do processo de escalonamento e dispensam o ensino do determinante.

Para Helena,

> [...] quando se trabalha com o determinante, que sou contra, não se deveria trabalhar com determinante, mas, sim, trabalhar sempre com escalonamento, pois eles (licenciandos) não sabem o que é um determinante, eles aprendem somente um algoritmo para matrizes dois por dois e depois eles não aplicam para o resto... [...] Determinante é uma forma multilinear e a Álgebra Linear, em uma licenciatura, nunca vai chegar numa forma multilinear porque não dá e nem precisa saber determinante, não é? … Então, quero dizer: O professor deveria fazer essa discussão sobre não dar determinante e sim discutir o método do escalonamento para o qual os argumentos matemáticos são mais acessíveis aos alunos, e não aparecem como uma mágica sem sentido (HELENA, 2015).

Após essa descrição, justifico o porquê da escolha por agrupar todas essas noções em uma única categoria e rotular como noções de Matemática que são ensinadas na Educação Básica e podem ser abordadas em Álgebra Linear à luz do PMA.

Para iniciar, uso as palavras de Moreira (2012): “o médico possui um olhar profissional específico para o seu paciente, o arquiteto examina um projeto com um olhar específico, diferente do olhar do engenheiro etc” (p. 1145). E, o professor precisa ter esse olhar profissional! Segundo o autor, “para o professor da escola, o conhecimento matemático está, irremediável e inextricavelmente, associado aos alunos, aos educandos, ao ensino, à aprendizagem" (MOREIRA, 2012, p. 1145).

Assim, escolhi o Pensamento Matemático Avançado para "instrumentalizar" parte dessa construção profissional a partir das noções de Álgebra Linear, pois baseado em Bianchini e Machado (2015) "[...] o conhecimento explícito dos processos do PMA pode auxiliar o professor a elaborar atividades que visem à apropriação desses processos por seus alunos" (p. 29). E, ainda,

> o conhecimento sobre os processos do PMA possibilita ao professor de matemática avaliar, tanto as dificuldades inerentes aos conceitos e ideias que deseja desenvolver com seus alunos, como também aquelas apresentadas pela falta de hábito dos alunos com a utilização dos processos do PMA requeridos na construção de tais conhecimentos (BIANCHINI; MACHADO, 2015, p. 29).

Para as autoras, é:

> essencial criar condições para que o professor seja levado de uma reflexão geralmente restrita aos procedimentos algorítmicos exigidos na resolução de uma atividade matemática, a uma reflexão mais ampla e profunda que abranja aspectos dos processos do pensamento matemático utilizados para essa resolução (BIANCHINI; MACHADO, 2015, p. 30).

O que está em discussão é o desenvolvimento profissional do licenciando em Matemática, pois ao compreender quais e como os processos envolvidos na construção de uma noção matemática, por um indivíduo, podem se articular, se organizar, possivelmente, esse professor de Matemática terá condições de refletir sobre as ações necessárias, para que seus alunos, diante das dificuldades enfrentadas, possam aprender a estudar Matemática e aprendê-la.

Continuando, a professora Júlia apresenta argumentos relacionados à categoria, em que Álgebra Linear é considerada como uma disciplina, que permite conduzir o licenciando a **perceber os procedimentos indutivos ou analógicos na dinâmica de ensino e aprendizagem e, ainda, a construir estratégias que lhe permitam justificar os procedimentos matemáticos utilizados no ensino de Matemática na Educação Básica.**

Júlia inicia com um exemplo,

> [...] trabalhando com a construção dos conjuntos numéricos ... tenho lá os axiomas de Peano e vou construir o conjunto dos números naturais, depois dos inteiros... consigo provar o porquê do produto de dois números negativos ser um número positivo, mas não vou poder utilizar essa argumentação na Educação Básica ... O que eu posso utilizar de argumentação, na Educação Básica, não precisa, necessariamente, ser uma demonstração, mas tenho que justificar de algum modo!... Então, o que eu posso utilizar para argumentar de acordo com a idade do aluno lá na escola?... Há professores que fazem horrores ao falar que menos com menos dá mais... desde o inimigo do meu inimigo é meu amigo e tudo mais... (risos) [...] Agora, do ponto de vista matemático, como que eu posso usar argumentos adequados, por exemplo, à própria construção dos elementos matemáticos? (JÚLIA, 2015).

Júlia contou que foi construído um material com base em operações com segmentos de reta, contextualizado historicamente:

> [...] fizemos com que o aluno enxergasse a multiplicação e o que está por trás, ou seja, toda a noção de proporcionalidade... [...] Assim, penso que o professor que atua na licenciatura com conteúdos matemáticos só vai ter condições de fazer isso, se ele estudar o desenvolvimento histórico e epistemológico desse conceito e pensar como isso pode ser viabilizado para a sala de aula... o que não dá é continuarmos decorando definições, propriedades, fazendo demonstrações totalmente desvinculadas do que o licenciando vai usar em sua atuação profissional (JÚLIA, 2015).

Outros elementos relacionados às questões históricas foram citados:

> Trazendo um pouco para o que defendo nas disciplinas, na formação do professor, por exemplo, no Cálculo, na Álgebra Linear e em outras, deveria ter questões envolvendo a história, porque uma coisa é como os conteúdos matemáticos se desenvolveram historicamente, outra, como oportunizo situações para fazer essa transposição didática para a sala de aula, não é? [...] Não vou citar conteúdos específicos, mas vou falar da dinâmica, pois penso que para um futuro professor os aspectos relacionados à história tem que estar presentes, então, olhar um pouco para o desenvolvimento histórico e epistemológico dos conceitos que forem sendo trabalhados e estabelecer a relação entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, o que essa matemática acadêmica tem a ver com aquilo que ele vai ter que ensinar na escola...(JÚLIA, 2015)

Helena, por sua vez,

> [...] iria, também, falar da Álgebra Linear que se desenvolveu, principalmente, no século XX, com o advento da Ciências da Computação…. para a construção de programas, preciso disso…. (HELENA, 2015)

Fiorentini e Oliveira (2013), por exemplo, afirmam ser importante que o licenciado em Matemática saiba justificar matematicamente os procedimentos utilizados em sala, assim como, conheça outros procedimentos “histórico-culturalmente produzidos, conheça os conceitos e ideias atuais, bem como a evolução histórica dos mesmos” (p. 925).

Assim, acrescento uma nova categoria: propor situações em Álgebra Linear que permitam fazer com que o licenciando **perceba parte da evolução histórico-epistemológica que influenciaram a constituição dessa disciplina**, por exemplo, discutir alguns aspectos sobre o formalismo matemático, citado no apêndice 1, que repercutiu na Educação Básica.

Outra categoria evidenciada foi: **fazer uso dos processos analisar, sintetizar e generalizar ao abordar noções estudadas na Educação Básica e em Geometria Analítica**. Para Helena, não é necessário abordar a noção de produto interno, “[...] pois eles trabalharam em Geometria Analítica, não é? Considero Geometria Analítica importante porque é a que liga diretamente a geometria com a álgebra e eles vão ter tudo isso!” (HELENA, 2015).

Sobre a categoria: **contribuições e relações com outras disciplinas**, Helena apresenta vários elementos para que o licenciando faça a disciplina Teoria dos Números antes de cursar a disciplina Álgebra Linear, para ela:

> [...] também mostraria anel, sabe? Mostrar no mínimo uma, duas ou três estruturas e faria com que eles investigassem no que elas diferem e no que são iguais, pois assim penso que eles entenderiam o porquê da estrutura… (HELENA, 2015)

Observo que Helena apresenta o estudo sobre as estruturas algébricas no centro das discussões propiciadas em Álgebra Linear e, ainda,

> [...] para mim um curso de Álgebra Linear obrigatório não serve para nada, pois se não estabelecer relações, não dará um chão firme para o professor, porque depois dissocia do resto…. então … quão mais

> você interligar as matérias de Matemática, pelo menos essas, pelo menos essas... (risos)….eles estudaram um pouquinho de equações diferenciais, então falar da Álgebra Linear presente ali… nas equações diferenciais lineares… ela dá conta!… tanto que você vai falar também sobre os operadores, mas uma coisa bem 'light', mostrando algumas coisas… assim ele dará sentido àquilo... ele precisa saber que a matemática é toda ligada…(HELENA, 2015).

Na categoria: **considerações não específicas às noções de Álgebra Linear**, Júlia afirma que:

> [...] tem que existir as questões teóricas da disciplina, mas também, o como é que isso vai se desdobrar lá na escola... Algumas pessoas diriam assim: eu não tenho que ensinar o que ele vai ter que trabalhar na escola. E não é isso que estou falando, estou falando da relação que há dessa matemática acadêmica com a matemática da escola, evidenciar como que o livro didático faz esse diálogo e como esses conteúdos podem ajudar a fazer escolhas frente às dificuldades apresentadas pelos alunos lá da escola... (JÚLIA, 2015).

Explorar os materiais didáticos, pode contribuir com a formação do licenciando em Álgebra Linear, por exemplo, se o licenciando investigar quais representações são utilizadas nos livros do Ensino Médio ao abordar certas noções matemáticas, ou ainda, investigar quais os processos do PMA podem ser identificados nas justificativas que envolvem o processo de escalonamento nos livros didáticos do Ensino Médio, entre outras possibilidades.

Uma nova categoria pode ser identificada: **como lidar com as dificuldades apresentadas pelos licenciandos? Criar um novo curso?** Helena, por exemplo, apresenta argumentos sobre as dificuldades relacionadas ao vocabulário específico utilizado em Álgebra Linear:

> [...] eles (licenciandos) falam que Álgebra Linear é uma coisa muito abstrata… a Matemática é toda abstrata! A Álgebra Linear não é mais, nem menos, a única coisa é que tem aquele vocabulário muito especifico que é muito grande, que é difícil você assimilar… são muitos nomes,.... mas, isso 'a gente tira de letra', você não precisa dar questões sem explicar o que é!… Esse vocabulário vai mudando de um conjunto para outro…. não é importante que ele fique brigando com isso… [...] (HELENA, 2015).

Vleeschouwer e Gueudet (2011) afirmaram, por exemplo, haver em Álgebra Linear uma mudança de *status* dependendo do conceito, para elas, isso faz parte do contrato didático, mas cabe discutir e refletir sobre o que está implícito e explícito nesse contrato, pois consideram que algumas regras devem permanecer implícitas, mas outras poderiam ser, inclusive, objetos de estudo.

Outra dificuldade apresentada foi:

> A gente vê alguns professores enfatizando muito a dificuldade que o aluno tem com transformações lineares…, para mim, os alunos têm dificuldades com transformações lineares porque não entenderam bem o que é função e o estudo de funções não faz parte da Álgebra Linear, é um assunto que o licenciando vem estudando desde a Educação Básica… (HELENA, 2015).

Helena continua:

> [...] eu gostaria muito que os professores saíssem da licenciatura sabendo o que é um número racional! Estou horrorizada com o que tenho visto!... [...] Se saltar para os espaços vetoriais sobre os reais e eles não sabem bem o que são números reais e, você sabe bem que eles não sabem, não é? Então, veja tudo o que você pula, porque o espaço vetorial depende dos corpos e eles não sabem!… Se eles, ao menos, conhecessem os racionais. Os racionais, eu acho que de alguma forma, eles conhecem… mas, eles não conhecem os irracionais…Tenho questionado professores e solicitado que me deem exemplos de irracionais, é inacreditável, gente que está fazendo pós-graduação fala: π e $\sqrt{2}$…. Eles não chegam a falar raiz quadrada de um número primo, eles não falam! Eles não chegam a falar no $\sqrt{p}$ (p um número primo)….quero dizer: como você vai trabalhar com um corpo se ao perguntar para eles se dentro dos reais têm mais irracionais ou racionais e a resposta é racionais! É claro, eles vão falar que há muito mais racionais, pois só conhecem três ou quatro irracionais! … (risos)...(HELENA, 2015).

Para ela:

> Eu continuaria batalhando muito nessa parte mais básica, pois se eles entenderem essas noções (dependência linear entre vetores, combinação linear entre vetores, conjunto gerador,...) (...) Eles terão um ganho, pois eles compreendem como os números foram construídos, eu acho! ... Tem tudo a ver com isso … números... ou outros conjuntos, ou conjuntos de números … todos os exemplos de espaço vetorial que a gente pode trabalhar… sabendo, que hoje em dia, se eu fosse dar, eu ia discutir o que é um conjunto numérico, eu ia fazer eles definirem e, se eles definissem, o conceito que eles têm, eu ia 'cair para cima' dessa questão, pois não está dissociado! Isso é importantíssimo que eles aprendam …. mas, isso também pode ser explorado na Teoria dos Números ...eu ficaria "tampando buraco" em tudo o que a Álgebra Linear me permitisse!….(HELENA, 2015).

Destaco a afirmação “eu ficaria ‘tampando buraco’ em tudo o que a Álgebra Linear me permitisse!”, pois Júlia também argumenta nessa direção:

> Não acredito em disciplinas como, por exemplo, Pré-Cálculo, Pré-Álgebra, porque é um pré, algo que vem como um pré-requisito... não acredito nesse formato! Porque, por mais que você tente resgatar, aquilo que as pessoas chamam de fazer uma revisão, nunca vai ser suficiente, então, prefiro trabalhar com a ementa normal da disciplina e, conforme essas dificuldades forem surgindo, você faz um trabalho paralelo à ementa, então, você para e aborda os conteúdos necessários para o aluno... não acredito nessa modalidade do rever coisas, rever matrizes, rever determinantes, para depois entrar efetivamente na Álgebra Linear! Acredito que você deve lidar com as dificuldades conforme elas vão surgindo, se não, daqui a pouco onde você estará? [...] quando o aluno vai resolver um sistema linear e cai numa operação com frações, ele vê que não sabe operar com frações, então, você vai ter fazer uma disciplina para rever fração? Entendeu? Você vai voltar, voltar, voltar, não é? [...] Isso (revisão) não é suficiente e nem eficiente, apareceu o problema dentro da disciplina, delimita o problema e lida com ele! Aliás, lidar com ele não é repetir o que já foi feito e que esse aluno não aprendeu? O professor tem que ver outras estratégias para que o aluno aprenda...(JÚLIA, 2015).

Considero que várias dificuldades em relação à Álgebra Linear já foram investigadas; veja, por exemplo, as citadas no capítulo 3 desta pesquisa. Assim, cabe ao professor formador estudar os resultados apresentados nessas pesquisas e propor situações que permitam que os estudantes as superem.

Já, para as noções ainda não investigadas, identifico dois caminhos: o primeiro, investigar as causas e propor soluções (a médio e longo prazo) e, o segundo, como Júlia afirmou: “apareceu o problema dentro da disciplina, delimita o problema e lida com ele!” (a curto prazo), inclusive, pode-se aproveitar o problema e inserir os licenciandos na busca por estratégias para superá-las.

Para finalizar, nas considerações finais, devo me atentar aos argumentos de Júlia sobre propor:

> [...] orientações mínimas, porque quando falo em ementa fico preocupada, porque sempre quando você fala na reestruturação de um curso de licenciatura os professores correm na grade e correm nas ementas para listar conteúdos, se você pensar na ementa como uma lista de conteúdos, me preocupo! Penso que deveriam existir

> orientações curriculares nacionais, que dissessem que tipos de ideias matemáticas deveriam estar presentes nas disciplinas [...] se você pensar na ementa, como um conjunto de ideias matemáticas a serem veiculadas naquelas disciplinas, penso que teríamos condições de construir algo que fosse comum para qualquer curso de licenciatura ... a ideia não vai ser a de formatar [...] (JÚLIA, 2015).

No próximo capítulo, resgato as questões que nortearam o desenvolvimento desta pesquisa, as escolhas metodológicas, os elementos evidenciados e as sínteses apresentadas, pois é o momento de tecer as considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na literatura, não há dúvidas sobre as contribuições do estudo das noções de Álgebra Linear na formação profissional e acadêmica de estudantes das mais variadas áreas, por exemplo, Física, Engenharia, Ciências da Computação, entre outras (DUBINSKY, 2001; NOMURA, 2014).

No entanto, se por um lado, no curso de Matemática, Álgebra Linear é considerada importante, pois permite o estudo dos espaços vetoriais ao abordar problemas de linearidade (DORIER, 1997), por permitir a aplicação em outras disciplinas (POOLE, 2006) e, ainda, permitir o estudo de situações que desenvolvam habilidades relacionadas ao raciocínio matemático (MCCALLUM et al., 2012). Por outro lado, Moreira (2012) considera que, em relação à Licenciatura em Matemática, ainda é necessário "desenvolver estudos fundamentados que permitam entender melhor o papel da matemática acadêmica na formação do professor da escola básica" (p. 1149), pois profissões distintas requerem conhecimentos matemáticos distintos, assim, "[...] o papel da matemática acadêmica na formação do professor precisa ser objeto de estudos investigativos e a extensão de sua inclusão ou não no currículo ser resultado de argumentação fundamentada" (p. 1149).

Nesta pesquisa, os objetivos anunciados foram:

- ✓ compreender a Álgebra Linear ensinada, para a Licenciatura em Matemática, como um saber voltado para a formação do professor de Matemática que atuará na Educação Básica;
- ✓ e, buscar elementos e possibilidades para ressignificar a Álgebra Linear na formação do professor de Matemática da Educação Básica, concebendo um conjunto de conhecimentos em Álgebra Linear, necessário para fundamentar a Álgebra, a ser ensinada na Educação Básica.

Os objetivos são frutos de reflexões sobre a questão geradora, a saber: Qual Álgebra Linear é ou poderia ser ensinada na Licenciatura em Matemática, visando à prática docente na Educação Básica? Essa questão foi desdobrada em outras, que nortearam toda a pesquisa, são elas:

- ✓ como as instituições de Ensino Superior selecionadas descrevem a disciplina Álgebra Linear nos projetos pedagógicos, já que essa disciplina é uma das que compõem o currículo mínimo obrigatório na Licenciatura em Matemática no Brasil?
- ✓ como os professores pesquisadores em Álgebra (Educação Matemática), das instituições de ensino selecionadas, concebem a contribuição da Álgebra Linear e o seu ensino para o licenciando em Matemática?
- ✓ qual Álgebra Linear poderia ser concebida, como saber a ensinar na Licenciatura em Matemática, visando à formação inicial do professor da Educação Básica?

Na busca da compreensão e nas escolhas por caminhos que permitissem alcançar os objetivos desta pesquisa, foi necessário me debruçar sobre diferentes fontes de dados. Assim, baseado em Denzin e Lincoln (2010), a pesquisa foi caracterizada como sendo uma pesquisa qualitativa.

E, para compreender como se define a Licenciatura em Matemática no Brasil, mais precisamente, a Álgebra Linear ministrada nessas licenciaturas, optei por selecionar pelo menos uma universidade por região do país e com base nos dados obtidos busquei evidências que me permitissem visualizar, pontualmente, cada uma dessas regiões.

No total, foram selecionadas seis universidades, duas na região Sudeste e uma, para cada outra região do país, das quais analisei os projetos pedagógicos e, quando disponíveis, as ementas e planos de ensino de Álgebra Linear.

Fiz uso, também, de entrevistas, que seguiram um roteiro elaborado com a intenção de descrever o entrevistado de acordo com sua formação acadêmica e sua atuação profissional, de auxiliar na compreensão do curso oferecido na instituição em que atua, além de identificar como esse sujeito concebe o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, na Licenciatura em Matemática. Nessa etapa, foram entrevistados seis professores que ministravam a disciplina Álgebra Linear nas instituições selecionas, ou já haviam atuado como coordenadores do curso em questão.

As descrições das Licenciaturas em Matemática foram baseadas nos documentos dessas instituições e nas entrevistas realizadas. Ressalto que desde as primeiras análises das entrevistas, segui as orientações de Fontanella et al. (2011), organizando as entrevistas aos pares, com transcrições integrais dos diálogos gravados e arquivos digitais com as correspondentes gravações de áudio.

A análise do conjunto de dados foi construída com base nos pressupostos de um estudo por saturação (FONTANELLA et al., 2011), não assumo o termo saturação em relação à quantidade de participantes desta investigação, mas, sim, em relação aos procedimentos utilizados para a coleta e a análise dos dados.

Após a descrição de cada uma das licenciaturas envolvidas e a identificação de algumas categorias, selecionei dois novos professores e utilizei essas categorias para analisar a convergência ou divergência, nos extratos das transcrições dessas entrevistas.

Em síntese, foram analisados documentos de seis instituições de Ensino Superior e entrevistados oito professores. Todas as entrevistas foram audiogravadas, transcritas e encaminhadas para que o entrevistado avaliasse e autorizasse o uso do material. Além disso, os nomes atribuídos aos entrevistados e às universidades investigadas foram fictícios, preservando, assim, o anonimato de cada um deles.

Em relação às ideias teóricas escolhidas, para analisar os elementos coletados e responder a essas questões, busquei por documentos oficiais, que apresentam diretrizes para as licenciaturas em Matemática no Brasil (BRASIL, 1996; 2001a; 2001b; 2010), resultados de pesquisas relacionadas: à formação inicial do professor (GATTI; BARRETO, 2009; GATTI, 2010), à formação inicial do professor de Matemática (FIORENTINI, 2005; RESENDE, 2007a; MANRIQUE, 2009; PIRES, 2011; MOREIRA, 2012), ao ensino e à aprendizagem em Álgebra Linear (MACHADO; BIANCHINI, 2009; DORIER, 2002; THOMAS et al., 2012). Além do aporte teórico PMA proposto por Dreyfus (1991). Cito os principais referenciais, pois, no decorrer da pesquisa, fiz uso de vários outros.

Respondendo às questões de pesquisas

A primeira questão de pesquisa: **Como as instituições de Ensino Superior selecionadas descrevem a disciplina Álgebra Linear nos projetos pedagógicos, já que essa disciplina é uma das que compõem o currículo mínimo obrigatório na Licenciatura em Matemática no Brasil?** Pode ser respondida, com auxílio dos projetos pedagógicos e documentos pertencentes a essas instituições, que complementaram as análises.

Das seis instituições selecionadas, três são universidades estaduais e três, federais. Nessas universidades, o curso de Licenciatura em Matemática é oferecido há pelo menos 30 anos, uma delas já completou mais de 80 anos (UESE-A), isto é, todas vivenciaram mudanças, que ocorreram em relação às licenciaturas no país.

Em relação aos projetos pedagógicos analisados, há aqueles mais antigos, que foram implantados em 2009 (dois, UES e UFNE), mas há, também, um que foi implantado em 2015 (UESE-B), assim, todos os projetos pedagógicos analisados apresentam elementos descritos nos documentos oficiais (BRASIL, 1996; 2001a; 2001b; 2002; 2003).

Em relação à carga-horária mínima para os cursos de Licenciatura em Matemática, 2800 horas distribuídas em 3 anos, Nacarato e Passos (2007) e Gatti e Barreto (2009) observaram que tem-se mostrado ser a mais comum, nas licenciaturas brasileiras, salvo algumas exceções, por exemplo, universidades públicas que tendem a propor cursos com duração mínima de 4 ou até de 5 anos.

Das universidades investigadas, por exemplo, na UFNE, o curso pode ser concluído em 3 anos, na UESE-A, em no mínimo 5 anos e, nas demais, 4 anos. Destaco duas universidades (UFN e UESE-A), que apresentam cursos com, respectivamente, 21% (586 horas) e 13% (355 horas) de horas a mais que o mínimo exigido em Brasil (2001b; 2010).

Outro ponto é em relação aos nomes atribuídos às disciplinas, pois mesmo abordando os mesmos conceitos, elas recebem nomes diferentes de acordo com as escolhas das universidades (GATTI; BARRETO, 2009). Em relação à Álgebra Linear não foi diferente, os nomes atribuídos a essa disciplina, pelas universidades investigadas, são: *Álgebra Linear, Introdução à Álgebra Linear, Álgebra Linear* I e *Álgebra Linear II.*

Essas disciplinas, geralmente, são oferecidas nos dois primeiros anos, segundo ou terceiro semestres, com a carga-horária de aproximadamente 60 horas, que representa com maior frequência (4 em 6), cerca de 2% da carga-horária total do curso.

Observo algumas variações, por exemplo, na UFN (102 horas), pois são oferecidas duas disciplinas concomitantemente (*Álgebra Linear* com 68 horas e *Laboratório de Álgebra Linear*, com 34 horas). Outro exemplo é o da UFNE, única universidade que tem duas disciplinas obrigatórias sobre Álgebra Linear, cada uma delas com 60 horas.

Dependendo da universidade, há a possibilidade de o licenciando escolher a segunda disciplina sobre o assunto, como disciplina opcional (UFN, UESE-A), e, ainda, há uma universidade (UESE-B), que oferece uma disciplina chamada *Matriz e Cálculo Vetorial*, inclusive a aprovação, nessa disciplina, é condição necessária para que o estudante faça a matrícula em *Álgebra Linear*.

Em outras instituições, também há a necessidade de o licenciando ter sido aprovado em alguma disciplina para se inscrever na de Álgebra Linear, por exemplo, em três universidades é citado que o licenciando deve ter sido aprovado na disciplina *Geometria Analítica* para se inscrever em Álgebra Linear, pois a consideram como “pré-requisito”. Em outras duas (UFCO e UES), não há nenhuma exigência.

Investiguei, também, os objetivos apresentados em relação à disciplina Álgebra Linear para cinco das seis universidades, pois a UFCO não disponibilizou nenhum documento com essa informação.

Nas análises, observei que para uma delas (UFN) o objetivo é genérico, não evidenciando as especificidades da disciplina e, ainda, é semelhante ao que as universidades UFNE e UESE-A propõem como competências e habilidades esperadas para o licenciado.

Já, a UES dá indícios de a disciplina ser importante apenas como desenvolvimento de uma ferramenta para outras disciplinas: “estudar os conceitos básicos de Álgebra Linear necessários para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, das Equações Diferenciais e demais disciplinas da Matemática” (PE UES, 2015). E, as universidades UESE-A, UESE-B e UFNE listam conceitos abordados em Álgebra Linear.

Considero que as instituições investigadas não evidenciam o que se espera da disciplina, em relação às necessidades do licenciando em Matemática, por exemplo, não há referências às questões histórico-culturais, ao exercício da investigação matemática e à percepção da importância das conjecturas, ações consideradas essenciais na formação do licenciando (RESENDE, 2007a; MANRIQUE, 2009; MOREIRA, 2012).

Em relação às referências, considerei apenas a bibliografia relacionada à primeira disciplina sobre Álgebra Linear e, em relação ao ano da obra, considerei o ano no qual era citado na obra pela primeira vez, ou seja, contei quantas vezes a obra foi citada independente do ano de publicação adotado, nos documentos das universidades.

Assim, as três referências bibliográficas básicas mais citadas foram Callioli et al. (1984), com 4 citações em 6, Boldrini et al. (1983), com 3 citações em 6 e Coelho e Lourenço (2005), com 2 citações em 6. Já, em relação às referências bibliográficas complementares, as três mais citadas foram Lima (2004), com 4 citações em 6, Lipschutz (1980), com 3 citações em 6 e Coelho e Lourenço (2005), com 2 citações em 6.

Observo que, com exceção de Coelho e Lourenço (2005), citada nos dois grupos, as duas outras obras com maior número de citações, Caliolli et al. (1984) e Boldrini et al. (1983), são as que tiveram a primeira versão publicada há mais de 40 anos, cujas edições comercializadas sofreram mínimas modificações. Tal fato foi evidenciado, também, por Araújo (2002).

Com relação aos conteúdos, investiguei quais eram listados nas ementas dessas universidades e os organizei em cinco grupos: noções da Educação Básica, noções elementares de Álgebra Linear, transformação linear, espaços vetoriais com produto interno e diagonalização de operadores.

Em relação aos conteúdos, apesar de haver um núcleo comum aos currículos investigados, percebo uma diversidade nos tópicos listados, não permitindo identificar a ênfase dada na disciplina, por exemplo, a instituição que elege a noção espaço vetorial e não elege as noções elementares (pelo menos, explicitamente). Outro ponto é a extensão de alguns currículos, pois vários conteúdos matemáticos são listados e o como isso será desdobrado em sala não é evidenciado, “o que pode dificultar atividades que exijam uma participação maior do aluno, como protagonista do processo de ensino, o que, certamente, demanda um tempo maior" (RESENDE, 2007a, p. 223).

Assim, considero que a partir dos conteúdos listados, dos objetivos anunciados e das escolhas bibliográficas feitas, a Álgebra Linear apresentada nos documentos das universidades investigadas mostra ser planejada, independentemente, das disciplinas que se referem ao ensino e à aprendizagem em Matemática, articulação necessária para a formação profissional do licenciando (MOREIRA, 2012).

A segunda questão: **Como os professores pesquisadores em Álgebra (Educação Matemática), das instituições de ensino selecionadas, concebem a contribuição da Álgebra Linear e o seu ensino para o licenciando em Matemática?** Também, pode ser respondida.

Foram entrevistados seis professores e os nomes atribuídos foram: Pedro, Felipe, Théo, Ana, Lucas e Karina.

Dois atuam na área de Matemática Aplicada (Pedro e Felipe), dois, na área de Matemática Pura (Théo e Ana) e dois, na área de Educação Matemática (Lucas e Karina). Dentre eles, três são professores de Álgebra Linear (Pedro, Felipe e Théo) e três já foram coordenadores de uma Licenciatura em Matemática (Ana, Karina e Lucas).

Destaco, também, que Felipe é autor de um livro sobre Álgebra Linear e que Lucas é formado em Matemática Pura (mestrado e doutorado), desenvolveu pesquisas em Álgebra e, atualmente, dedica-se às questões relacionadas à Educação Matemática, mais precisamente, sobre o Pensamento Matemático Avançado e pensamento algébrico.

Outro dado é sobre o tempo de atuação no magistério no Ensino Superior, dois deles atuam há menos de 15 anos (Pedro e Ana), outros três estão entre 20 e 30 anos de atuação (Felipe, Karina e Lucas) e, Théo, há mais de 45 anos. Observo, ainda, que dos seis professores, apenas um não atua em cursos de pós-graduação (Pedro).

Destaco que para todos eles: <u>a Álgebra Linear assume papel importante na formação do licenciando em Matemática</u>, por exemplo, Théo afirma que: "[...] tanto na licenciatura, quanto na Matemática (bacharelado), a Álgebra Linear é uma disciplina básica… ela é básica para várias disciplinas, pois para poder seguir no estudo de outras disciplinas é preciso saber Álgebra Linear!". E, à luz das ideias teóricas e dos resultados de pesquisas sobre as Licenciaturas em Matemática no Brasil, foram eleitas onze categorias em relação ao conjunto das entrevistas.

Em duas delas as contribuições da Álgebra Linear, na formação do licenciando em Matemática, estão associadas ao uso de demonstrações, seguem as categorias nas quais se considera que a Álgebra Linear permite a *C1) compreensão do significado do rigor dedutivo em um processo de demonstração, o desenvolvimento da capacidade dedutiva com sistemas axiomáticos e a percepção do emprego de procedimentos indutivos ou analógicos na criação da Matemática como atividade de resolução de problemas* e, ainda, a *C2) compreensão dos procedimentos indutivos ou analógicos na dinâmica de ensino e aprendizagem, assim como, a construção de estratégias que lhe permita justificar os procedimentos matemáticos utilizados no ensino de Matemática, na Educação Básica*.

Outras três categorias fazem referência às noções de Álgebra Linear, são elas: *C3) compreensão da noção de estrutura algébrica espaço vetorial, C8) compreensão da noção de transformação linear* e *C9) compreensão de outras noções*, por exemplo, base de um espaço vetorial, dependência linear entre vetores e isomorfismos entre espaços vetoriais.

Três outras categorias apresentam a Álgebra Linear como um espaço propício para o tratamento de noções matemáticas abordadas na Educação Básica, são elas: *C4) preparação profissional em relação às noções de álgebra estudadas na Educação Básica (Sistemas de equações lineares, Matrizes e Determinantes)*, *C5) preparação profissional em relação às noções de geometria estudadas na Educação Básica (vetores no plano e no espaço, reflexão e rotação de figuras no plano)* e *C6) percepção e uso do processo 'alternar e interpretar' representações geométricas e algébricas em relação às noções estudadas na Educação Básica, assim como, o papel da generalização em relação às propriedades associadas a essas noções, por exemplo, sistemas de equações lineares, matriz e função*.

Em uma categoria, há extratos de entrevistas em que a Álgebra Linear permite que o estudante desenvolva a *C7) percepção e uso dos processos analisar, sintetizar e generalizar, ao abordar noções estudadas na Educação Básica e em Geometria Analítica*.

E, por fim, duas categorias, uma com *C10) contribuições não específicas às noções de Álgebra Linear* e, outra, com *C11) contribuições e relações com outras disciplinas de Matemática.*

A última questão: **Qual Álgebra Linear poderia ser concebida como saber a ensinar na Licenciatura em Matemática, visando à formação inicial do professor da Educação Básica?** Pode, também, ser respondida, pois como uma rede, cruzei os elementos evidenciados nos resultados de pesquisas, nas descrições dos projetos pedagógicos e nas análises das 8 entrevistas realizadas, seis já citadas, mais duas, Júlia e Helena.

Ressalto que não tenho a pretensão de prescrever o que ou o como deve ser ministrada a disciplina Álgebra Linear. Apenas, apresento possíveis contribuições da disciplina Álgebra Linear na formação do licenciando em Matemática, visando à atuação na Educação Básica.

<u>1ª Consideração: estudo da estrutura algébrica espaço vetorial</u>

Em SBEM (2013), o estudo de estruturas algébricas é tido como sendo fundamental em um curso de Licenciatura em Matemática. Para Dorier (1997), é essencial que o estudante perceba a utilidade do uso das estruturas algébricas, assim como, compreenda-as como parte da cultura matemática.

Em relação aos espaços vetoriais, SBEM (2013) descrevem que é importante que o licenciando perceba sua presença em muitas aplicações dentro e fora da Matemática, assim como, o uso dos modelos lineares, tanto em Matemática, como em outras ciências (DORIER, 1997).

Nesse sentido, considero importante que, ao estudar a estrutura espaço vetorial, o licenciando tenha o olhar direcionado para o que caracteriza o objeto, nas palavras de Helena: “*compreender o porquê e saber estudar as estruturas algébricas força o estudante a pensar sobre as propriedades dos números de outra forma e desenvolve nele, um olhar matemático*”.

Também, identifico, como sendo importante, que o professor formador proporcione situações em que o licenciando perceba que certos conceitos estudados por ele, até o momento, não são conceitos isolados, pois podem configurar espaços vetoriais. Para Parraguez (2009), por exemplo, os espaços vetoriais se enquadram em uma categoria de noções matemáticas que têm o papel de unificar e generalizar diferentes métodos, ferramentas e objetos que se encontram isolados em diferentes contextos, por exemplo, na geometria, nos sistemas de equações lineares e nas equações diferenciais.

Felipe ilustra essa situação: "*[...] na verdade, não existem somente o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$, mas uma infinidade de outros espaços que são tão 'bons', ou têm a mesma 'estrutura' do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$, porém sem a visão ou representação geométrica*", assim, *"[...] os espaços do tipo $\mathbb{R}^n$, as matrizes, os polinômios, as funções e o próprio conjunto dos complexos, [...], não são conteúdos isolados, mas fazem parte de algum espaço vetorial*".

Destaco, também, que, ao querer que o licenciando compreenda a noção de espaço vetorial, é imprescindível que sejam abordadas diferentes representações para os espaços vetoriais em questão, assim como, a definição seja explorada de forma que o licenciando perceba o papel que as definições exercem em Matemática, ou seja, uma oportunidade de explorar os processos do PMA (DREYFUS, 1991), pois, ao considerar as definições em Matemática como resultado da combinação entre os processos, generalização e síntese, o licenciando pode experenciar a definição, como sendo um objeto matemático, construído por meio da articulação desses processos e, não, como um produto, pronto e acabado.

2ª Consideração: estudo das transformações lineares

Considero que o estudo da noção de transformação linear é importante na formação do licenciado em Matemática, pois como Dubinsky (1997), CBMS (2012), SBEM (2013) e Marins (2014) destacaram: a relevância dessa noção repousa sobre as possibilidades de se estabelecer relações com outras disciplinas, como Cálculo e Análise, com noções da Educação Básica e, ainda, as diversas aplicações nas Ciências exatas e afins, sobretudo, quando há a interpretação geométrica do uso de uma transformação linear.

Considero, também, que o licenciando, assim como indicou Felipe, defina "*uma função entre dois espaços [...] completamente diferentes, [...] uma função que leva vetores do $\mathbb{R}^3$ em polinômios, ou matrizes em polinômios*" e perceba que "*para isso você precisa definir um tipo particular de função, que são as transformações lineares, que precisam satisfazer as propriedades...*". E, nessa dinâmica, explore a presença dos processos do PMA. Afinal, será necessário que o licenciando faça uso de diversas representações, alternando-as e interpretando-as, assim como, abstraia a partir dessas representações e represente a partir da abstração sobre o objeto (BIANCHINI; MACHADO, 2015). E, ainda, explore situações em que seja conduzido a modelar.

Em relação às noções de núcleo e imagem de uma transformação linear, considero interessante estabelecer relações com as noções de função injetora, função sobrejetora, com procedimentos para encontrar os zeros de uma função, mas, concordo com Helena: "*eu não ia tocar muito nisso [...] discutiria mais o porquê é linear, se isso tem a ver com a geometria...*".

Em SBEM (2013), por exemplo, os autores afirmam que "o conteúdo curricular de Ensino Médio inclui funções afins e seus gráficos como retas num plano cartesiano, mas raramente trabalha o conceito de linearidade que pode estar presente ou observado em fenômenos ou experimentos" (p. 29).

Por fim, considero que o professor pode aproveitar para abordar os homomorfismos entre espaços vetoriais, para Helena, deve-se verificar: "*se é linear, se não é… e isso está muito ligado... a linearidade, está muito ligado ao que dá estrutura de espaço vetorial ao conjunto... que são as operações... eu acho isso bem interessante*".

<u>3ª Consideração: o estudo do processo de demonstração</u>

Considero que, em Álgebra Linear, o licenciando tem a oportunidade de vivenciar o uso do rigor dedutivo em um processo de demonstração, mas, deve ser feito, tendo o estudante como protagonista e, ainda, quando possível, explorando questões relacionadas ao momento histórico que possibilitou a constituição da disciplina. Até mesmo, porque é importante que o licenciando em Matemática saiba justificar, matematicamente, os procedimentos utilizados em sala, assim como, conheça a evolução histórica dos mesmos.

Uma forma de explorar uma demonstração foi apresentada por Lucas, em que o licenciando, ao analisar uma demonstração feita por outra pessoa, tem a oportunidade de trabalhar com vários processos do PMA, por exemplo, fazer uso da intuição, de representações e abstrações, entre outros processos. Além de discutir as questões relacionadas ao critério de verdade em Matemática e poder explorar, sobretudo, o uso de contraexemplos (MACHADO; MARTINS, 2005).

Ressalto que "o professor precisa saber que uma demonstração não deve ser, necessariamente, sempre formal e fazer parte de um sistema axiomático"

(FIORENTINI; OLIVEIRA, p. 925). Por isso, em Álgebra Linear os estudantes podem vivenciar diversas formas de validar (ou não) conjecturas.

4ª Consideração: relações com outras disciplinas

A relação que a disciplina Álgebra Linear tem com outras do currículo foi evidenciada em diversos momentos, por exemplo, na Álgebra, na Análise Funcional, nas Equações Diferenciais, na Teoria dos Conjuntos, entre outras (THÉO; FELIPE).

Assim, ao assumir que a Álgebra Linear é uma das disciplinas que permitem que o licenciando aborde noções que têm o papel de unificar e generalizar[154] diferentes métodos, ferramentas e objetos que se encontram isolados em diferentes contextos, considero que deveria ser ofertada no terceiro ou quarto ano da licenciatura, pois permitiria aprofundar as discussões sobre esse caráter implícito e poderia propiciar oportunidades de fazer uso de diferentes situações, em que o licenciando seria conduzido a articular noções estudadas em outras disciplinas.

Assim, destaco a importância de que os professores da licenciatura estabeleçam essas relações, na afirmação de Helena, "*[...] se não estabelecer relações, não dará um chão firme para o professor, porque depois dissocia do resto [...] ele precisa saber que a matemática é toda ligada*".

Por exemplo, considero que o professor pode fazer uso de recursos provindos da Geometria Analítica para o desenvolvimento das noções de Álgebra Linear, pois o professor pode propor situações, em que o licenciando deva analisar livros didáticos da Educação Básica ou, até mesmo, do Ensino Superior, em busca de descontinuidades entre noções já estudadas, como Costa e Catarino (2007), que afirmaram existir uma descontinuidade entre a noção de dependência linear, estudada no Ensino Superior, e a noção de colinearidade, estudada na Educação Básica.

Observo que o olhar do professor, ao participar desse tipo de situação, pode se desenvolver, como sendo um olhar profissional, evidenciando descontinuidades por mudança de símbolos, mudanças de configurações e de significados. Assim, considero que ao explorar e problematizar essas descontinuidades existentes entre a Educação Básica e o Ensino Superior, pode-se, inclusive, discutir sobre momentos em que essa "passagem" não deve ser entendida como uma "extensão natural",

[154] Assumo, nesse momento, os termos unificar e generalizar, conforme apresentado por Dorier (1997), que faz referência ao movimento que ocorreu na Matemática – Apêndice 1.

conforme alertou Gueudet-Chartier (2000), ao tratar da generalização necessária, ao abordar a noção de base de um espaço vetorial. E, ainda, abordar essas noções permite que o licenciando faça uso dos processos do PMA: analisar, sintetizar e generalizar.

Ressalto que a proposta é a de uma articulação entre duas ou mais disciplinas de Matemática, com questões, também, didático-pedagógicas, que são discutidas, muitas vezes, separadamente nas disciplinas de Educação Matemática, ou que estão associadas apenas às noções da Educação Básica.

Júlia, por exemplo, afirma que “*[...] tem que haver as questões teóricas da disciplina, mas também tem que haver o como é que isso vai se desdobrar lá na escola... algumas pessoas diriam assim: eu não tenho que ensinar o que ele vai ter que trabalhar na escola*” e não é isso, para ela, é sobre a “*[...] relação que há entre essa matemática acadêmica com a matemática da escola [...] e como esses conteúdos podem ajudar a fazer escolhas frente às dificuldades apresentadas pelos alunos lá da escola...*”.

Por isso, concordo com Moreira (2012, p. 1142) ao afirmar:

> Não podemos continuar separando conteúdo e ensino na formação do professor, uma vez que na prática docente esses elementos não são separáveis. Se os separamos no processo de formação, não estamos preparando o profissional para a sua prática real.

Em relação às estruturas algébricas, o licenciando em Álgebra Linear deve ser desafiado a comparar a estrutura espaço vetorial com outras, por exemplo, anel. E, ainda, ressaltar que o corpo é, também, uma estrutura algébrica!

Por fim, se o licenciando já cursou a disciplina Teoria dos Números (conforme RESENDE, 2007a), possívelmente, participou de diversas discussões sobre questões pertinentes, também, em Álgebra Linear, por exemplo, o trabalho com demonstrações.

<u>5ª Consideração: noções de Matemática que são ensinadas na Educação Básica e podem ser abordadas à luz do PMA</u>

Em busca de um olhar profissional do professor (MOREIRA, 2012), identifiquei o Pensamento Matemático Avançado, como sendo uma possível referência para "instrumentalizar" parte dessa construção profissional, a partir das noções de Álgebra Linear.

Em vários momentos, foi possível observar a presença, ora implícita, ora explícita, dos processos do PMA, ao abordar as noções em Álgebra Linear.

Assim, partindo do pressuposto que

> o conhecimento sobre os processos do PMA possibilita ao professor de matemática avaliar, tanto as dificuldades inerentes aos conceitos e ideias que deseja desenvolver com seus alunos, como também aquelas apresentadas pela falta de hábito dos alunos com a utilização dos processos do PMA requeridos na construção de tais conhecimentos (BIANCHINI; MACHADO, 2015, p. 29),

considero que o licenciando, ao explorar conscientemente os processos do PMA, pode se desenvolver profissionalmente, pois ao compreender quais e como os processos estão presentes na construção de uma noção matemática, por um indivíduo e, ainda, como se articulam, se organizam, possivelmente, terá condições de refletir sobre as ações necessárias para que seus alunos, diante das dificuldades enfrentadas, possam aprender a estudar Matemática e, aprendê-la.

Algumas das noções, que são ensinadas na Educação Básica e podem ser exploradas em Álgebra Linear, são: conjuntos numéricos, matriz, sistemas de equações lineares, função, vetores e transformações no plano e no espaço.

Por exemplo, a resolução de sistemas lineares deve ser feita por meio de operações elementares, escalonamento, que deve ser justificado! E, quando possível, fazer uso de representações geométricas e *softwares* de geometria dinâmica para visualizar o efeito de cada operação sobre a solução do sistema. Além de permitir explorar outros processos do PMA, como: analisar e classificar.

Matriz é outra noção matemática, que assume diversos *status* em Álgebra Linear (DE VLEESCHOUWER; GUEUDET, 2011), pois representa uma generalização importante do conceito de número (MCCALLUM et al.,2012) e proporciona uma oportunidade para o licenciando refletir sobre as propriedades das operações (SBEM, 2013).

Já, o estudo de vetores em Álgebra Linear é uma "[...] importante generalização em nível superior, quando um vetor é elemento de uma estrutura algébrica, um Espaço Vetorial, e base para outras generalizações" (SBEM, 2013, p. 28).

Em relação à noção de determinante, considero, assim como em Brasil (2006) e SBEM (2013), que não deve ser abordada na Educação Básica e, tampouco, deve ocupar o tempo em Álgebra Linear, pois como Helena afirmou "*determinante é uma forma multilinear e a Álgebra Linear, em uma licenciatura, nunca vai chegar numa forma multilinear [...]*", mais uma vez, o tempo destinado à formação inicial é restrito, por isso, faz-se necessário direcioná-lo para as necessidades do licenciando, sobretudo, tendo-o como protagonista nas ações em sala de aula.

Por fim, as escolhas metodológicas e teóricas me permitiram responder às questões de pesquisa e, assim, alcançar os objetivos que foram: *compreender a Álgebra Linear ensinada para a Licenciatura em Matemática como um saber voltado para a formação do professor de Matemática que atuará na Educação Básica e buscar elementos e possibilidades para ressignificar a Álgebra Linear na formação do professor de Matemática da Educação Básica, concebendo um conjunto de conhecimentos, em Álgebra Linear, necessário para fundamentar a Álgebra a ser ensinada na Educação Básica*.

Assim, espero que essa pesquisa possa contribuir com o GPEA na compreensão da Álgebra a ser ensinada na formação do professor de Matemática, pontuando que essa é a primeira reflexão sobre a Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática, portanto, as portas para novas investigações e reflexões estão abertas e novos estudos já se fazem necessários, seguem algumas observações finais.

Destaco a primeira observação sobre a formação do professor formador. Em geral, os professores entrevistados, que já atuaram na coordenação de um curso de Licenciatura em Matemática, apresentaram elementos sobre a formação do professor formador; Helena, por exemplo, cita a falta de uma compreensão matemática das noções estudadas em Álgebra Linear, por outro lado, Júlia cita a falta de uma formação que evidencie questões didático-pegagógicas. Nesse sentido, Moreira (2012) afirma ser necessário repensar a formação dos formadores, pois considera que "[...] os formadores atuais, de modo geral, não estão qualificados adequadamente para operar o diálogo necessário entre o pedagógico e o matemático nas ações de formação [...]" (p. 1148).

Assim, considero que os professores, que desejam atuar na Licenciatura em Matemática, devem assumir os compromissos de estudar as questões relacionadas ao conhecimento Matemático e as didático-pedagógicas relacionadas à disciplina, e de fazer uso constante das orientações curriculares para a Educação Básica (por exemplo, BRASIL, 2006), ao planejar as aulas.

Uma segunda observação é em relação à produção de materiais, para Júlia, *“[...] temos a responsabilidade, enquanto sociedade... SBEM, SBM, SBMAC..., de elaborar materiais, que subsidiem esse trabalho do professor em sala de aula [...]*”. Para Moreira (2012), a produção de materiais para disciplinas de conteúdos específicos ministrados nas licenciaturas em Matemática é um desafio, que deve ser enfrentado.

A terceira observação: como lidar com as dificuldades apresentadas pelos licenciandos? Criar um novo curso? Helena e Júlia apresentaram vários argumentos e, as duas concordam no aspecto de que o professor formador deve assumir a responsabilidade por esse aprendizado, Júlia afirma: “*apareceu o problema dentro da disciplina, delimita-o e lida com ele!*”. Para ela, “*[...] lidar com ele não é repetir o que já foi feito e que esse aluno não aprendeu? O professor tem que ver outras estratégias para que o aluno aprenda...*”. Afinal, “*você deve lidar com as dificuldades conforme elas vão surgindo, se não, daqui a pouco, onde você estará?*”.

Uma quarta observação surgiu ao analisar a entrevista com Pedro e parece repousar no fato de as disciplinas de Álgebra Linear, oferecidas nas universidades, serem comuns a vários cursos, assim, como promover reflexões aos licenciandos em Matemática, se na sala de aula há, por exemplo, alunos de Engenharia?

Cada uma dessas observações merece a atenção dos pesquisadores em Educação Matemática e professores educadores matemáticos para ministrar a disciplina, assim como, é urgente a necessidade de reestruturação de disciplinas, que abordem conceitos específicos de Matemática, pois é preciso estabelecer articulações entre as noções de Educação Matemática, noções de Matemática e noções matemáticas ensinadas na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Tradução por: DOERING, Claus I. Porto Alegre: Bookman, 2006. 610 p.

ARAÚJO, Cláudia C. V. B. **A Matemática no Livro Didático de Álgebra Linear**. São Paulo, 2002. 110 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ARTIGUE, Michèle. **Teaching and learning mathematics at university level**, *In*: *CONFERENCE THE FUTURE OF MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE*, Lisboa, 2007.

ASIALA, Mark.; BROWN, Anne; DEVRIES, David. J.; DUBINSKY, Ed; MATHEWS, David.; THOMAS, Karen. *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. *In:* KAPUT, J., SHOENFELD A. H.; DUBINSKY, E. (Eds) **Research in Collegiate Mathematics education**. Editora: American Mathematical Society. 1996. 2.v, p. 1-32. Disponível em: <http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf>. Acesso em: Nov. 2014.

BARONE JÚNIOR, Mário. **Álgebra Linear: capítulos 1,2 e 3 (com exercícios)**. São Paulo. Sem Editora, 1985. 210 p.

BATTAGLIOLI, Carla dos S. M. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos**. São Paulo, 2008. 113 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BIANCHINI, Barbara. L.; MACHADO, Silvia. D. A. *Concepção de base de um espaço vetorial real propiciada por um curso de álgebra linear em EAD*. *In:* FROTA, Maria C.; BIANCHINI, Barbara L.; CARVALHO; Ana M. F. T. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. 1ed.Campinas: Papirus Editora, 2013, 1.v., p. 143-163.

BIANCHINI, Barbara. L.; MACHADO, Silvia. D. A. *Em busca de elementos que propiciem ao professor de Matemática a reflexão sobre seu saber*. In: **Acta Scientiae**, Rio Grande do Sul, 17.v, n.1, 2015, p. 28-39.

BIANCHINI, Barbara. L.; MACHADO, Silvia. D. A. *Em busca de elementos que propiciem ao professor de Matemática a reflexão sobre seu saber*. In: **Acta Scientiae**, Rio Grande do Sul, 17.v, n.1, 2015, p. 28-39.

BITTAR, Marilena et al. *A evasão em um curso de Matemática em 30 anos. In:* **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Pernambuco, 3.v, n.1, 2012, p. 1-17.

BLOCH, Isabelle. **Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.** Grenoble 1 - França, 2005. 122 p. Tese (Doutorado em Didactique dês Mathematiques). Didactique Des Mathématiques, Université Paris-Diderot.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo. Harper e Row do Brasil,1983.

BOSCH, Marianna; FONSECA, Cecilio; GASCON, Josep P. *Incompletud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares*.*In*: **Recherches en Didactique des Mathématiques**. 24.v, n.2-3, 2004, p. 205-250.

BRASIL. *Lei nº 9.394*, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**. Brasília: Casa Civil da Presidência da República, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 25 Out. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CP n.º 9, de 8 de maio de 2001. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena*. Brasília: **MEC/CNE**, 2001a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf>. Acesso em: 25 Out. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CP n.º 1302, de 6 de novembro de 2001. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília: **MEC/CNE**, 2001b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 25 Out. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP n.º 1, de 18 de fevereiro de 2002. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena*. Brasília: **MEC/CNE**, 2002. Disponível em: <http://portal. mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf>. Acesso em: 25 Out. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP n.º 3, de 18 de fevereiro de 2003. Estabelece as *Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática*. Brasília: **MEC/CNE**, 2003. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/ces032003.pdf>. Acesso em: 25 Out. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. O*rientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília: **MEC/SEB**, 2006. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 25 Out. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Superior. *Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura.* Brasília: **MEC/SES**, 2010.

BRITTON, Sandra; HENDERSON, Jennifer. *Linear Algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties*. *In:* **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. 40.v., 2009, p. 963-974.

BROUSSEAU, Guy. **Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathemátiques, 1970-1990**. Dordrecht, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997.

CAFEZEIRO, Isabel; HAEUSLER, Edward H.; CUKIERMAN, Henrique L.; MARQUES, Ivan da C. *Recontando a computabilidade. In:* **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, 3.v, n.2, 2010, p. 231-251.

CALLIOLI, C. A. et al. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Atual, 1984.

CAMARGO JÚNIOR, Lauro de. **Um estudo sobre a abordagem de matrizes no caderno do professor do programa "São Paulo faz Escola"**. São Paulo, 2010. 95 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CARLSON, David. *Teaching linear algebra: must the fog always roll in? In.:* **The College Mathematics Journal**, 24.v., n.1, 1993. p. 29-40.

CARLSON, David; JOHNSON, Charles R.; LAY, David C.; PORTER, Duane A. *The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. In:* **The College Mathematics Journal**, 24.v., n.1, 1993. p. 41-46.

CASTRO, Vera L. C. de; BARBOSA, Loiraci L.; RAMIREZ, Vera L. *A construção da proposta pedagógica em instituições de educação superior. In:* **Díalogos**, Rio Grande do Sul, n.15, 2009, p. 43-58.

CBMS, **The Mathematical Education of Teachers II**.*Conference Board of the Mathematical Sciences: Issues in Mathematics Education.* Estados Unidos da América: 17.v, 2012. 86 p. Disponível em < http://cbmsweb.org/MET2/met2.pdf>. Acesso em: Jul. 2015.

CELESTINO, Marcos R. **Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. São Paulo, 2000. 113 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CHAITIN, Gregory J. **Conversas com um matemático: Matemática, Arte, Ciência e os Limites da Razão**. Tradução por: MOREIRA, L. Portugal: Gradativa, 2003. 170p.

CHEVALLARD, Yves. **Steps towards a new epistemology in mathematics education.** *In.:* BOSCH, Marianna (ed.) *PROCEEDINGS OF THE FOURTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, CERME 4*, Espanha, 2005.

COBB, Paul A.; BAUERSFELD, Heinrich. *The coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education. In.:* COBB, Paul A.; BAUERSFELD, Heinrich (Eds.), **The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.** Nova Jérsia: Lawrence Erlbaum Associates, 1995.

COELHO, Flávio U.; LOURENÇO, Mary L. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP, 2005.

CORRIVEAU, Claudia. *Formalisme et démonstration en algèbre linéaire*. *In.:* **Grupo de trabalho 7 Espace mathématique francophone.** Senegal, 2009, p. 1002-1017.
COSTA, Cecília; CATARINO, Paula. *Da colinearidade no ensino secundário à dependência linear no ensino superior: que descontinuidades? In:* **Quadrante**, Portugal, 16.v, n.1, 2007, p. 147-159.

DE VLEESCHOUWE, Martine. **Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique. Le cas de la dualité en algèbre linéaire.** Grenoble 1 - França, 2010. 204 p. Tese (Doutorado em Didactique dês Mathematiques). Departement de Mathematique, Université Namur, Bélgica.

DE VLEESCHOUWE, Martine; GUEUDET, Ghislaine. **Secondary-tertiary transition and evolution of didactic contract : the example of duality in linear algebra**. *In*: PYTLAK, Marta; ROWLAND, Tim; SWOBODA, Ewa (Ed) *PROCEEDINGS OF THE FOURTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION*, CERME 7. Polônia, 2011, p. 2113-2122.

DENZIN, Norman K; LINCOLN, Yvonna S. **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. Tradução por: NETZ, Sandra R. Porto Alegre: Artmed, 2010. 432 p.

DOGAN-DUNLAP, Hamide. *Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. In:* **Linear Algebra and its Applications.** 432.v, 2010, p. 2141-2159.

DORIER, Jean-Luc. *Analyse historique de l'emergence des concepts elementaires d'algebra lineaire*. França: **Cahier de DIDIREM**, 7.v, 1990. 96 p.

DORIER, Jean-Luc. *Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels*. *In:* DORIER, Jean-Luc *et al*. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question**. França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, p. 27-102.

DORIER, Jean-Luc et al. **L'enseignement de l'algèbre linéaire em question.** França: La Pensée Sauvage Editions, 1997. 331 p.

DORIER, Jean-Luc et al. *On a research program concerning the teaching and learning of linear algebra in the first-year of a French science university. In:* **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, n.31, 2000, p. 27-35.

DORIER, Jean-Luc. **Teaching linear algebra at university**. *In. PROCEEDINGS OF THE 13TH ICMI STUDY CONFERENCE*: 2002, 3.v. p. 875-884.

DREYFUS, Tommy. *Advanced Mathematical Thinking Processes*. *In:* TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

DUBINSKY, Ed e LEWIN, Philip. *Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness*. *In:* **Journal of Mathematical Behavior**, 5.v., n.1. 1986. p. 55-92. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/RAMED.pdf>. Acesso em: Nov. 2014.

DUBINSKY, Ed. **Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at the College Level**. 1997. 24 p. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/LinearAlgebra.pdf>. Acesso em: Nov. 2009.

DUBINSKY, Ed. **Teaching and Learning Abstract Algebra and Linear Algebra: A Unified Approach**. *In: PROCEEDINGS OF THE 12TH ICMI STUDY CONFERENCE.* 1, 2, 3.v, Melbourne: Melbourne University, 2001, p. 705-712.

DUVAL, Raymond. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática*. *In:* MACHADO, Silvia D. A. et al. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. São Paulo: Ed. Papirus, 2007, p. 11-33.

FINE, Michele et al. *Para quem? Pesquisa qualitativa, representações e responsabilidades sociais. In:* DENZIN, Norman K; LINCOLN, Yvonna S. **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. Tradução por: NETZ, Sandra R. Porto Alegre: Artmed, 2010. p. 115-140.

FIORENTINI, Dario. *A formação Matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. In:* **Revista de Educação PUC-Campinas**, São Paulo, n.18, 2005, p.107-115.

FIORENTINI, Dario; OLIVEIRA, ANA T. de C. C. de. *O lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? In:* **BOLEMA**, São Paulo, 27.v., n.47, 2013, p. 917-938.

FONTANELLA, Bruno. J. B.; RICAS, Janete, TURATO, Egberto R.. *Amostragem por saturação em pesquisas qualitativas em saúde: contribuições teóricas. In:* **Caderno Saúde Pública**, Rio de Janeiro, 1v., n.24, 2008, p. 17-28.

FONTANELLA, Bruno. J. B., et al. *Amostragem em pesquisas qualitativas: proposta de procedimentos para constatar saturação teórica. In:* **Caderno Saúde Pública**, Rio de Janeiro, 2.v., n.27, 2011, p. 389-394.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel, 1973.

GATTI, Bernardete. A.; BARRETO, Elba S. de S. **Professores do Brasil: impasses e desafios**. Brasília: UNESCO, 2009. 294 p.

GATTI, Bernardete. A. *Formação de professores do Brasil: características e problemas. In.* **Educação e Sociedade**. Campinas, 31.v, n.113. 2010, p. 1355-1379.

GATTI, Bernardete. A.; BARRETO, Elba S. de S; ANDRÉ, Marli E. de. D. A. **Políticas docentes no Brasil: um estado da arte***.* Brasília: UNESCO, 2011. 300 p.

GRANDE, André L. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear**. São Paulo, 2006. 208 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

GUEUDET-CHARTIER, Ghislaine. **Rôle Du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire.** Grenoble 1 – França, 2000. 347 p. Tese (Doutorado em Didactique dês Mathematiques). Didactique Des Mathématiques, Laboratoire Leibniz – IMAG, Université Joseph Fourier.

HAREL, Guershon, KAPUT, James J. *The role of conceptual entities in building advanced mathematical concepts and their symbols. In:* TALL, David . O (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht, Holanda, 1991, p. 82-94.

HAREL, Guershon. *Sur Trois Principes D'aprentissage et D'enseignement: Le Cas de L'algèbre Linéaire*. *In:* DORIER, Jean-Luc *et al*. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question***.* França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, p. 215-230.

HILLEL, Joel. *Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In*: DORIER, Jean-Luc (Ed.), **On the Teaching of Linear Algebra**. Springer: Holanda, 2000, 23.v, p. 191-207.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1979.
HOWSON, A. G. et al. *Mathematics as a service subject. In:* **Selected papers on the teaching of mathematics a service subject**. CLEMENTS, R. R. et al. (eds.) Springer-Verlag, New York, 1988, p. 1-16.

KELLY, Anthony. E.; LESH, Richard A.; BAEK, John Y.. (Eds.) **Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching***.* Nova York: Routledge. 2008.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 2e. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LIMA, E. **Álgebra Linear**. 7e. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. São Paulo: MacGraw-Hill do Brasil, 1980.

MACHADO, Silvia. D. A.; MARTINS, José. G. **Após um primeiro curso de Álgebra Linear, como o licenciando concebe um espaço vetorial?** *In*: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2003, Santos: PROEM, 1 v., p. 1-17.

MACHADO, Silvia D. A.; NOGUEIRA, Maria. T. de L. C. *A lógica elementar da matemática e o ensino superior. In:* **Educação Matemática Pesquisa***,* São Paulo, 7. v., n.1, 2005, p.63-80.

MACHADO, Silvia D. A. et al. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. São Paulo: Ed. Papirus, 2007. 160p.

MACHADO, Silvia D. A.; BIANCHINI, Barbara L. **Noções básicas de Álgebra Linear: o que revelam as pesquisas do GPEA?** *In*: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Goiás.

MACHADO, Silvia. D.; BIANCHINI, Barbara. L. A. *Aportes dos processos do Pensamento Matemático Avançado para a reflexão do professor sobre sua 'forma' de pensar a Matemática. In.:* **Educação Matemática Pesquisa (Online)**, 15.v, 2013, p. 590-605.

MANRIQUE, Ana L. *Licenciatura em Matemática: formação para a docência x formação específica. In:* **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, 11.v., n.3, 2009, p. 515-534.

MARINS, Alessandra Senes. **Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo Transformações Lineares**. 2014. 169 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2014.

MCCALLUM, William et al. *High School Teachers. In*: CBMS, **The Mathematical Education of Teachers II***.* Estados Unidos da América: 17v., 2012. p. 53-69 Disponível em < http://cbmsweb.org/MET2/met2.pdf>. Acesso em: Jul. 2015.

MOISE, Ed. **Mathematics, computation, and psychic intelligence**. *In*.: HANSEN, V.P.; ZWENG, M.J. (Eds.), *COMPUTERS IN MATHEMATICS EDUCATION, NCTM*, 1984, p. 35-42.

MOREIRA, Plínio C. *3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). In:* **BOLEMA**, São Paulo, 26.v., n.44, 2012, p. 1137-1150.

MOREIRA, Plínio C., CURY, Helena N., VIANNA, Carlos R. *Por que Análise Real na Licenciatura? In:* **Zetetiké**, São Paulo, 23.v., 2005, p.11-42.

NACARATO, Adair M.; PASSOS, Cármen. L. B. *As licenciaturas em matemática no estado de São Paulo. In:* **Horizontes**, 25.v, n.2, 2007, p. 169-179.

NOMURA, Joelma I. **Como sobrevivem as diferentes noções de álgebra linear nos cursos de engenharia elétrica e nas instituições**. São Paulo, 2008. 138 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

NOMURA, Joelma I. **Esquemas cognitivos e mente matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro**. São Paulo, 2014. 349 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

OLIVEIRA, Luis C. B. de **Como funcionam os recurso-meta em aula de álgebra linear?** São Paulo, 2005. 123 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PADREDI, Zoraide do N. **As “Alavancas Metas” no discurso do professor de Álgebra Linear**. São Paulo, 2003. 179 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PARRAGUEZ, Marcela G. **Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial**. Distrito Federal - México, 2009. 166 p. Tese (Doutorado en Matemática Educativa). Centro de Investigación y en Ciencia Aplicada y Tecnologia Avanzada, Instituto Politécnico Nacional.

PIRES, Célia M. C. *Reflexões sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. In:* **Revista Educação Matemática em Revista**. SBEM. 2002, p. 44-56.

PIRES, Célia. M. C. *Saberes pedagógicos e saberes específicos na formação de professores que ensinam Matemática. In:* **Unión revista iberoamericana de educación matemática**, n.25, 2011, p. 31-42.

PIRES, Rute da C. **A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo**. São Paulo, 2006. 369 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo. Thomson, 2006. 712 p.

PRADO, Eneias de A. **Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial**. São Paulo, 2010. 185 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PRASLON, Frédéric. **Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse: le cas de la notion de dérivée et son environnement.** Grenoble 1 - França, 2000. 542 p. Tese (Doutorado em Didactique dês Mathematiques). Didactique Des Mathématiques, Université Paris-Diderot.

RESENDE, Marilene R. **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do Professor de Matemática na Licenciatura**. São Paulo, 2007a. 240 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

RESENDE, Marilene R. *Saber científico – conhecimento específico – saber escolar e a formação de professores. In:* **Série-Estudos – Periódicos do Mestrado em Educação da UCDB**, Mato Grosso do Sul, n.24, 2007b, p.35-53.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática (Ensino Fundamental- Ciclo II e Médio)*. São Paulo, **SEE**, 2008a.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do Professor – Matemática do 2º ano do Ensino Médio. 2º bimestre de 2008*. São Paulo, **SEE**, 2008b.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do Professor – Matemática do 2º ano do Ensino Médio. 2º bimestre de 2009*. São Paulo, **SEE**, 2009.

SBEM, **A formação do professor de Matemática no curso de Licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBM/SBEM**. *BOLETIM SBEM.* Brasília: n.21, 2013. 42 p. Disponível em < http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf>. Acesso em: Jul. 2015.

SCARTON, G.; SMITH, M. M. **Manual de redação**. Porto Alegre: PUCRS, FALE/GWEB/PROGRAD, 2002. Disponível em: < http://www.pucrs.br/manualred >. Acesso em: dez 2015.

SFARD, Anna. *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. In:* **Journal Educational Studies in Mathematics**. Ed. Springer Netherlands, 22.v., n.1,1991, p. 1-36.

SILVA, Amarildo M. **Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática**. Rio Claro, 2003. 244 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

SILVA, Amarildo M. **Um curso de serviço para a licenciatura em matemática***. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*. Recife, 2011. p.1-7.

SILVA, Carlos E. **A noção de base de um espaço vetorial é trabalhada como “ferramenta explicita” para os assuntos de ciência da computação?** São Paulo, 2005. 93 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João T.; SILVA, Luiz H. M. **Cálculo Númerico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003, 354p.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2ed., São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

STEWART, Sepideh. **Understanding Linear Algebra Concepts Through the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking**. Nova Zelândia, 2008. 279 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade de Auckland.

THOMAS, Mike et al. **Survey team 4: key mathematical concepts in the transition from secondary to university**. *In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION 12*, Coreia do Sul, 2012, p. 90-136.

TUCKER, Alan et al. *School Mathematics and Teachers' Mathematics. In*: CBMS, **The Mathematical Education of Teachers II***.* Estados Unidos da América: 17v., 2012. p.1-23 Disponível em < http://cbmsweb.org/MET2/met2.pdf>. Acesso em: Jul. 2015.

WAWRO, Megan; SWEENEY, George F.; RABIN, Jeffrey M. *Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition. In:* **Educational Studies in Mathematics**. Springer, 2011, p.1-19.

WAWRO, Megan, et al. **Using the emergent model heuristic to describe the evolution of student reasoning regarding span and linear independence***. In: 14TH CONFERENCE ON RESEARCH IN UNDERGRADUATE MATHEMATICS EDUCATION*, Oregon, 2011, p. 185-189.

WELLER, K.; *et al.* **Learning Linear Algebra with ISETL**. 2002. 389 p. Disponível em: <http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf >. Acesso em Nov. 2014.

WINSLØW, Carl. (2008). *Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle*. *In.:* ROUCHIER, André; BLOCH, Isabelle. (eds.) **Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIIIième école d'été de didactique des mathématiques**, 2008, p. 1-10.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Tradução por: GRASSI, D. 3ªEd. Porto Alegre: Bookman, 2005. 212 p.

APÊNDICES

APÊNDICE 1: O FORMALISMO E A ESTRUTURA ALGÉBRICA

O formalismo foi um movimento, protagonizado por David Hilbert, que teve início no últimos anos do século XIX, como "consequência do esforço em explicar certas incompreensões a respeito da própria Matemática" (CAFEZEIRO et al., 2010, p. 235).

Para os autores, Cafezeiro et al. (2010), a abordagem formalista é caracterizada por ser:

> [...] um movimento em que se concebia a Matemática como sistema puramente formal, consistindo de símbolos desprovidos de significado ou interpretação, cuja manipulação através de regras precisas e mecanismos finitários conduziria à prova da veracidade ou falsidade de todas as expressões que pudessem ser formuladas em tal sistema (p. 235).

Sendo assim, o termo finitário é entendido como "mecanismos que conduzem a um objetivo em tempo finito, em um número finito de passos" (CAFEZEIRO et al., 2010, p. 235).

Para Cafezeiro et al. (2010), experiências bem sucedidas nas quais se buscavam "traduzir formalmente conceitos matemáticos em outros mais simples" (p. 241), indicavam o caminho a ser trilhado pelos formalistas, para os quais "os objetos matemáticos são meramente cadeias de símbolos: sua existência consiste na sua própria representação, sem o apelo a interpretações, percepções humanas e noções de domínios de objetos matemáticos" (p. 241).

Segundo Cafezeira et al. (2010) "os formalistas se colocavam como porta-vozes da natureza" (p. 242) e "[...] atribuíam à Matemática o papel de linguagem da natureza, capaz de estabelecer a ponte entre pensamento e observação" (p. 242).

Esse movimento teve seu declínio em 1931, "quando Kurt Gödel demonstrou os teoremas da incompletude, que apontam a existência de proposições formalizadas em certos sistemas, cuja prova não se obtém no próprio sistema" (CAFEZEIRO et al., 2010, p. 235).

O declínio descrito pelos autores se dá em relação à abordagem formalista como corrente de fundamentação da Matemática nos termos propostos por Hilbert. Para Cafezeiro et al. (2010) na Educação Matemática "o formalismo tomou um rumo diverso, fortalecendo-se a partir da obra de Bourbaki e estendendo-se pelo século XX no movimento da Matemática Moderna" (p. 250).

Segundo Pires (2006):

> o teorema de Gödel mostrou sobre o plano técnico, os limites internos do formalismo, sem entretanto colocar em risco os métodos formalistas os quais a eficácia em numerosos domínios da matemática, em particular, na álgebra moderna, não poderá ser contestada, eficácia que de certo modo se situa fora da problemática da não contradição (p. 108).

O Grupo Bourbaki

Para apresentar, em síntese, os princípios adotados pelo grupo Bourbaki[155] faço uso da tese de Rute da Cunha Pires, Pires (2006), que por sua vez recorre, sobretudo, aos trabalhos de Jean Alexandre Eugéne Dieudonné[156].

Para Dieudonné, os matemáticos formalistas não fazem questão de definir as palavras, eles consideram que essas são interpretações "de um sistema de signos submissos a uma sintaxe rigorosa independente de toda interpretação que se queira lhes dar" (PIRES, 2006, p. 92). Para Dieudonné, Hilbert, em 1989, apresentou uma construção axiomática da geometria e a renúncia "a qualquer empirismo, a qualquer intuição, a eliminação de representações mentais e por consequência qualquer outro sentido e o seu apego às operações técnicas que se efetuam sobre os objetos matemáticos, reduziram tudo em apenas signos" (PIRES, 2006, p. 107).

[155] Para maiores detalhes sobre a história do Grupo de Matemáticos Nicolas Bourbaki veja Pires (2006, p.14-44)

[156] Jean Alexandre Eugéne Dieudonné (1906-1992), um dos membros do Bourbaki que permaneceu no grupo no período de 1934 a 1956, foi para o grupo "uma de suas locomotivas por seu temperamento intempestivo, seu largo conhecimento, sua grande memória, sua imensa capacidade de trabalho e redação" (PIRES, 2006, p. 46), pois além de "autor de inúmeros textos onde exprime sua visão da matemática pelo ponto de vista bourbakista, de livros didáticos e de história da matemática" (PIRES, 2006, p. 46), foi editor chefe de boa parte das produções do grupo e atuou como professor da Universidade de São Paulo nos anos 1946 e 1947.

Dieudonné, nesse contexto, afirma que uma demonstração se apoia apenas em “axiomas, às proposições anteriormente demonstradas e às regras lógicas, o que implica na colocação de uma gramática explícita de regras lógicas e é esta necessidade gramatical que conduzirá às linguagens formalizadas” (PIRES, 2006, p. 108). Segundo Dieudonné, “na axiomática hilbertiana não se pode falar de verdade de um enunciado, somente de sua validade no interior de um sistema axiomático” (PIRES, 2006, p. 108).

Assim, Pires (2006) descreve que para organizar a Matemática, o grupo Bourbaki faz três escolhas importantes: a estrutura matemática, o método axiomático e a unidade matemática. Na qual a organização centrada em quatro ramos (aritmética, álgebra, geometria e análise) não mais se justificava.

Para o Grupo Bourbaki “[...] há de se buscar no método axiomático as ideias comuns sepultadas sob o aparato exterior do detalhe de cada uma das teorias consideradas, discernindo-as e iluminando-as” (PIRES, 2006, p. 142), pois consideram que o método axiomático realiza uma considerável economia de pensamento.

Sobre a noção de *estrutura*, Dieudonné afirma ser necessário compreender que para objetos matemáticos diferentes o essencial é buscar as relações que eles mantêm entre si e não levar em conta a “aparência” do objeto:

> pouco a pouco, desenha-se uma ideia geral que será precisada no século XX, a de *estrutura* na base de uma teoria matemática; é a consequência da constatação de que aquilo que desempenha o papel primordial numa teoria são as relações entre os objectos matemáticos que aí figuram, antes da *natureza* destes objectos, e que, em duas teorias diferentes, pode acontecer que haja relações que se exprimem da mesma maneira nas duas teorias; o sistema destas relações e as suas <correspondências> é uma estrutura <subjacente> às duas teorias (DIEUDONNÉ, 1990, p. 118 apud PIRES, 2006, p. 114) .

E, ainda,

> [...] uma estrutura será determinada por um certo número de tais relações <primitivas> submetidas a um sistema de axiomas; a teoria de uma tal estrutura será o desenvovimento das propriedades que são consequências dos seus axiomas, e não depedem da natureza dos objectos matemáticos que podem verificar estes axiomas [...] (DIEUDONNÉ, 1990, p. 149-150 apud PIRES, 2006, p. 123).

O grupo considera as estruturas como sendo ferramentas para o matemático, tais que "o princípio ordenador será a concepção de uma *hierarquia de estruturas*, que vai do simples ao complexo, do geral para o particular" (PIRES, 2006, p. 145). As estruturas mães são: as algébricas, as de ordem e as topológicas.

A influência de Bourbaki e a Álgebra Linear na USP

No Brasil, os cursos de formação de professores tiveram início na Universidade de São Paulo, em 1934, período em que houve a necessidade de contratar professores estrangeiros para a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. De acordo com Pires (2006), inicialmente o departamento de Matemática contou com a presença de dois professores italianos e, posteriormente, aconteceu a vinda de membros do grupo Bourbaki para a formação de pesquisadores e professores no país.

Pires (2006) relata que nos documentos datados de 1945 já foi possível perceber a influência desse grupo nas escolhas da instituição e nos programas que teve acesso. Essa influência se torna explícita a partir de 1953, quando Pires (2006) observou as primeiras manifestações da adoção dessa perspectiva estruturalista, pois, ao analisar os conteúdos programáticos, identificou a presença da Álgebra (moderna), Álgebra Linear, Teoria dos Conjuntos e Topologia. A Álgebra Linear não apareceu como uma disciplina, foi na disciplina Complementos de Geometria e Geometria Superior que a autora percebeu:

> [...] embora não esteja explicitado no programa, trata-se de Álgebra Linear. São contemplados no conteúdo programático: espaço vetorial, transformações lineares sobre um espaço vetorial, matrizes, determinantes, espaço vetorial normado, álgebra de Grasmmann e suas aplicações ao estudo dos sub-espaços de um espaço vetorial, entre outros (PIRES, 2006, p. 340).

Em 1968, com uma nova organização do curso, a Álgebra Linear passa a compor oficialmente o quadro de disciplinas do curso, no qual "estão contemplados os espaços vetoriais, aplicações lineares, matrizes, dualidade, redução à forma diagonal e espaços unitários e euclidianos" (PIRES, 2006, p. 346)

APÊNDICE 2: O ROTEIRO UTILIZADO PARA AS ENTREVISTAS

Neste apêndice, apresento o roteiro utilizado para as entrevistas, o qual foi elaborado seguindo os pressupostos descritos por Yin (2005), ou seja, nas entrevistas é preciso: estabelecer uma conversa espontânea, mas que seja guiada por questões que permitam o fluxo fluido, no lugar de rígido, fazer uso de questões de uma forma não tendenciosa atendendo às necessidades da investigação, usar a entrevista para compreender as percepções e interpretações sobre um assunto e, ainda, identificar novas fontes.

Nesta pesquisa, mais especificamente, cada entrevista realizada, com os professores das instituições selecionadas, deve contribuir para complementar a análise documental da instituição, assim como, trazer elementos que permitam identificar a concepção que professores pesquisadores em Álgebra (Educação Matemática) mostram possuir sobre o ensino de Álgebra Linear, nas licenciaturas em Matemática.

Para isso, o roteiro está organizado em duas fases. Na primeira, com duas questões, cujos objetivos são: identificar as características do entrevistado em relação à trajetória acadêmica e profissional, assim como, iniciar uma relação favorável para o desenvolvimento da entrevista.

Na segunda, a intenção é coletar elementos para compreender a Álgebra Linear ensinada para a licenciatura em Matemática, como um saber voltado para a formação do professor de Matemática, que atuará na Educação Básica, assim como, para buscar elementos e possibilidades para ressignificar a Álgebra Linear na formação do professor de Matemática, da Educação Básica. A estrutura das questões que compõem essa parte foi inspirada no roteiro apresentado por Moreira, Cury e Vianna (2005) que tinham como questão: Por que Análise real na Licenciatura?

O tempo previsto para a realização de cada entrevista individual foi de, aproximadamente, 30 minutos. E, ainda, o roteiro permitiu ao pesquisador adaptar e reformular o percurso da entrevista durante seu desenvolvimento conforme os desdobramentos necessários.

Segue o roteiro utilizado na íntegra.

I PARTE: Apresentação e “quebra-gelo”

1. Solicitar que o entrevistado assine o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido[157] e a autorização para audiogravar a entrevista.
2. Solicitar que o entrevistado comente sobre sua formação acadêmica e profissional.
3. Solicitar que o entrevistado comente sobre a proximidade entre suas pesquisas e a Álgebra Linear

II PARTE: Identificar a concepção de professores e coordenadores que atuam em licenciaturas em Matemática sobre as características da disciplina Álgebra Linear a ser ofertada para a licenciatura em Matemática

1. A Álgebra Linear é um dos poucos assuntos da Matemática desenvolvido entre os séculos XIX e XX que passou a integrar os currículos do Ensino Superior por volta de 1950. Supondo que você tenha que estruturar um curso de licenciatura em Matemática, com duração de três anos, com disciplinas ofertadas semestralmente e esteja no momento em que irá descrever a disciplina Álgebra Linear:

- comente sobre a exigência (ou não) de o licenciando cursar uma disciplina antes de Álgebra Linear. No caso de considerar necessário, quais seriam essas disciplinas?
- conte-me, em que momento do curso, você considera que a disciplina Álgebra Linear deva ser ofertada e qual a carga horária mais adequada, para essa disciplina.
- Qual o objetivo você apresentaria para a disciplina Álgebra Linear?
- Quais os conceitos que deveriam ser priorizados?

[157] Veja, Anexo 3.

- Quais livros você escolheria para compor a bibliografia básica? E a complementar?

2. Nos últimos anos, vários documentos norteadores, para a Educação Básica, foram produzidos no âmbito nacional e nos estaduais. Como exemplos, as Diretrizes Curriculares para a Educação Básica e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Você as conhece? Em caso positivo, conte-me como considera os elementos apresentados nesses documentos ao preparar suas aulas de Álgebra Linear para a licenciatura.

No caso dos coordenadores: você considera que os professores que atuam nas Licenciaturas em Matemática devem fazer uso desses documentos ao preparar suas aulas? Que tipo de uso poderia ser feito?

3. Ao considerar o contexto da licenciatura em Matemática e os resultados de pesquisas relacionadas à formação inicial do professor de Matemática tem-se que os conteúdos da Educação Básica devem ser contemplados, por meio de uma proposta, que permita ao estudante o domínio sobre o campo, a articulação de conhecimentos necessariamente a eles relacionados e, ainda, que inclua questões de ordem didática, de forma a permitir a ampliação e o aprofundamento da área em questão.

- A Álgebra Linear pode consolidar e ampliar conteúdos com os quais os licenciados irão trabalhar na Educação Básica? Como?
- Quais conteúdos de Álgebra Linear permitem tal construção?
- E ainda, quais as articulações necessárias entre esses conteúdos e a sua didática?
- (Para os coordenadores) Caso fosse apresentar uma orientação para o professor que ministraria a disciplina, qual seria a sua orientação?

4. Para finalizarmos, pense na disciplina Álgebra Linear com uma ementa dada, aproximadamente, pelos tópicos já listados e uma abordagem semelhante à da bibliografia relacionada anteriormente. Na sua opinião, todo curso de Licenciatura em Matemática deveria ter essa disciplina como obrigatória, ou não? Justifique suas

razões tanto pela inclusão, como pela exclusão de Álgebra Linear, no curso de Licenciatura em Matemática.

ANEXOS

ANEXO 1: FORMAÇÃO DOS ENTREVISTADOS

Quadro 33: formação acadêmica dos professores entrevistados

Univ.	Prof(a).	Formação	E.S. desde	Atua na pós-graduação?
UFCO	Pedro	Bacharelado e licenciatura em Matemática (2006) e mestrado em Matemática Aplicada (2010). **Professor de Álgebra Linear.**	2008	NÃO
UESE-B	Felipe	Bacharelado em Matemática (1982), mestrado em Matemática Aplicada (1996) e doutorado em Agronomia (2001). Pesquisador em Mat. Apl. – Lógica de Fuzzy. Autor de livro sobre Álgebra Linear. **Professor de Álgebra Linear.**	1987	SIM
UESE-A	Théo	Mestrado (1970), doutorado (1973) e livre docência em Matemática Pura (1978). Pesquisador em Matemática – Álgebra. **Professor de Álgebra Linear.**	1970	SIM
UESE-A	Ana	Licenciatura em Matemática (1996), mestrado (1999) e doutorado em Matemática Pura (2004). Pesquisadora em Matemática – Geometria e topologia *Coordenadora de uma licenciatura.*	2006	SIM
UES	Lucas	Graduação em Matemática (1990), mestrado (1993) e doutorado em Matemática Pura (2000). Pesquisador em Edu. Mat. – Pensamento Algébrico *Coordenador de uma licenciatura.* Professor de Álgebra Abstrata.	1993	SIM
--	Helena	Graduação em Serviço Social (1964), bacharelado e licenciatura em Matemática (1975), especialização em Álgebra (1978), mestrado (1981) e doutorado (1986) em Matemática Pura, e dois pós-doutorados em Educação Matemática (1991).	1979	SIM
UESE-B	Karina	Licenciatura em Matemática (1992), mestrado (1996) e doutorado em Educação Matemática (2003). Pesquisadora em Edu. Mat. – História Oral *Coordenadora de uma licenciatura.*	1997	SIM
--	Júlia	Graduação em Matemática (1988), mestrado em Educação Matemática (1997), doutorado em Educação (2003), dois pós doutorado em Educação Matemática (2008; 2013)	1989	SIM

Fonte: dados da pesquisa

ANEXO 2: OBRAS CITADAS NOS DOCUMENTOS ANALISADOS

Quadro 34: Obras citadas nos documentos analisados

Nº	OBRA
1	ANTON, H. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Campus, 1982.
2	BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harper e Row do Brasil,1983.
3	CALLIOLI, C. A. et al. **Álgebra Linear e aplicações**. São Paulo: Atual, 1984.
4	COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. 2ed. São Paulo: EdUSP, 2005.
5	FIGUEIREDO, L. M.; CUNHA, M. O. da. **Álgebra Linear I.** 2ed. Fundação Cicierj, 1.v, 2005.
6	LIMA, E. L. **Álgebra linear.** Rio de Janeiro: IMPA, 1995.
7	LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. São Paulo: MacGraw-Hill do Brasil, 1980.
8	STEINBRUCH A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2. ed., São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.
9	TERRY, L. **Álgebra linear**. Edgar Blücher Ltda, 1997.
10	HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1979.
11	KAHN, P. J. **Introduction to linear algebra**. Herper & Row, Publischer, 1967.
12	LIMA, E. **Álgebra Linear**. 7ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
13	ANTON, H.; RORRES, C.. **Álgebra linear com aplicações**. 8ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
14	BUENO, H. P. **Álgebra linear: um segundo curso**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
15	HERSTEIN, I. N. **Topics in algebra**. 2ed. John Wiley & Sons, Inc., 1975.
16	JACOBSON, N. **Lectures in abstract álgebra – linear algebra**. USA: Springer-Verlag, 1975.
17	LANG, S. **Álgebra linear**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.
18	KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 8.Ed. LTC, 2006.
19	CRUZ, L. F.; CHUEIRI, V. M.M.; GONÇALVES, E. M. **Introdução ao Estudo da Álgebra Linear**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.
20	LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2ª edição. LTC, 1999.
21	SANTOS, N.M. **Vetores e Matrizes uma Introdução à Álgebra Linear**. Thomson Learning. São Paulo, 2007.
22	SHOKRANIAN, S. **Uma Introdução à Álgebra Linear**. Ciência Moderna, 2009.
23	TEIXEIRA, R. C. **Álgebra Linear - exercícios e soluções**. Coleção Matemática Universitária. IMPA/ SBM, ?.
24	POOLE, D. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004
25	CARVALHO, J. P. **Álgebra Linear**. 2ed. Brasília: LTC, ?.
26	NOBLE, B.; DANIEL, J. W. **Álgebra Linear**. 2ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1986.
27	BARONE JÚNIOR, M., **Álgebra Linear**, 3ed., IME-USP, São Paulo, 1988.
28	CARAKUSHANSKY, G. L. P., **Introdução à Álgebra Linear**. McGraw-Hill, São Paulo, 1976.
29	BANCHOFF, J.; WERMER, **Linear Algebra Through Geometry**. 2ed. Springer, 1992.
30	LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2001.
31	JOHNSON, E. **Linear Algebra with MAPLEV**. Broks/Cole Publishing Company, 1993.
32	LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear: Teoria e Problemas**. 3ed. São Paulo: Makron Books, 1994.
33	STRANG, G. **Álgebra Linear e suas aplicações**. Cengage Learning, 2010.

Fonte: dados da pesquisa

ANEXO 3: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO[158]

Convidamos o Sr para participar da pesquisa intitulada "Ressignificando a Álgebra Linear na licenciatura em Matemática", sob a responsabilidade do pesquisador Eneias de Almeida Prado, com o objetivo de investigar o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear nos cursos de licenciatura em Matemática, orientado pela seguinte questão: Qual Álgebra Linear é ou poderia ser ensinada na licenciatura em Matemática, visando à prática docente na Educação Básica?

Sua participação é voluntária e se dará por meio de entrevistas, sendo que não há riscos decorrentes de sua participação na pesquisa.

Se depois de consentir em sua participação, o Sr desistir de continuar participando, tem o direito e a liberdade de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, seja antes ou depois da coleta de dados, independente do motivo e sem nenhum prejuízo a sua pessoa. O Sr não terá nenhuma despesa e, também, não receberá nenhuma remuneração. Os resultados serão analisados e publicados, mas sua identidade não será divulgada, sendo guardada em sigilo.

Consentimento Pós-Informação

Eu, ____, fui informado sobre o que o pesquisador quer fazer e por que precisa da minha colaboração e entendi a explicação. Por isso, eu concordo em participar do projeto, sabendo que não vou ganhar nada e que posso sair quando quiser. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

Assinatura do participante _______________________ Data: ____/____/____

Assinatura do pesquisador responsável_________________________

[158] Título provisório, apresentado no documento encaminhado ao Comitê de Ética da PUC-SP. Número do Parecer: 886.077. Data da relatoria: 09/11/2014. Aprovado por Edgard de Assis Carvalho em 26/11/2014.

ANEXO 4: ENCARTE COM AS OBRAS CITADAS