

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC - SP

AMARILDO APARECIDO DOS SANTOS

**CONSTRUÇÃO E MEDIDA DE VOLUME DOS POLIEDROS
REGULARES CONVEXOS COM O *CABRI 3D*: uma possível
transposição didática**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2016

AMARILDO APARECIDO DOS SANTOS

**CONSTRUÇÃO E MEDIDA DE VOLUME DOS POLIEDROS
REGULARES CONVEXOS COM O *CABRI 3D*: uma possível
transposição didática**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática sob a orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.

PUC-SP

2016

Banca Examinadora

O presente projeto se adere ao projeto maior “*Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos Pea- Mat/Dimat*”, aprovado pela FAPESP processo 2013/23228-7, desenvolvido atualmente em parceria entre a PUC-SP e a PUC-PERU, pelo grupo de pesquisa PEA-MAT. Este tem por objetivo analisar tanto do ponto de vista teórico, quanto prático, questões relativas à complexidade da inserção de ferramentas tecnológicas para o ensino e aprendizagem da Matemática tanto na Escola Básica, quanto na Universidade. Os dois grupos de pesquisa tentarão responder, principalmente, às seguintes questões: *quais fatores influenciam o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática com a utilização de recursos alternativos como ambientes tecnológicos, tanto no Brasil como no Perú? Como os processos de aprendizagem se caracterizam em ambientes tecnológicos? Quais são as alternativas metodológicas para investigarmos os processos de aprendizagem nesses ambientes?*

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processo de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

A minha esposa Rosângela Alves da Cruz dos Santos e
ao meu filho João Albino da Cruz dos Santos.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por permitir o ingresso no programa de Doutorado em Educação Matemática na PUC-SP, oportunidade muito desejada por mim. Agradeço a DEUS por todas as bênçãos recebidas.

A minha esposa Rosângela Alves da Cruz dos Santos que sempre manteve a chama acesa com incentivo, apoio, compreensão e companheirismo em todos os momentos.

Ao meu filho João Albino da Cruz dos Santos pela paciência e compreensão pela falta de atenção a ele durante a produção dessa pesquisa.

A minha orientadora, professora Doutora Maria José Ferreira da Silva por ter aceitado o desafio da orientação com empenho, preocupação e compreensão dos meus anseios, por acreditar em mim e por conduzir meu trabalho até o final.

Ao professor Doutor Saddo Ag Almouloud, coordenador do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática por participar da examinadora e pelas contribuições que enriqueceram meu trabalho.

Aos Professores Doutores Gabriel Loureiro de Lima, Verilda Speridião Kluth, José Carlos Pinto Leivas por fazerem parte da banca examinadora, pelas valorosas contribuições que ajudaram a organizar meu trabalho após a qualificação.

A amiga de todas as horas, professora Doutora Elizabete Marcon Mello, pelo apoio irrestrito durante todo o curso de Doutorado, contribuindo sempre com muita dedicação e compreensão das minhas dificuldades, compartilhando conhecimentos e incentivando para que pudesse concluir este trabalho.

A amiga professora Doutora Ana Rebeca Miranda Castillo que me apoiou com os ajustes desse trabalho com muita paciência e dedicação, compreendendo minhas ansiedades, compartilhando conhecimentos e harmonizando as argumentações para que pudesse chegar ao final.

Aos professores doutores do Programa de Pós-graduados em Educação Matemática pelos ensinamentos e incentivos à realização da pesquisa durante o curso em suas disciplinas.

Aos colegas do curso de doutorado que colaboraram de uma forma ou de outra para o meu empenho nesse trabalho.

À Secretaria de Educação do Estado São Paulo por ter concedido a bolsa Doutorado para a realização deste trabalho.

À equipe da direção e aos professores da E. E. Professora Inah de Mello pela compreensão de minhas ausências e ansiedades.

À Equipe da direção e aos professores do Colégio Clóvis Bevilácqua por acompanhar todo o trajeto do curso incentivando sempre.

Aos colegas professores de outras áreas que torceram pela minha insistência em concluir este trabalho.

Ao professor doutor Vincenzo Bongiovanni que desde o final da defesa do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática incentivou a dedicar ao Doutorado em Educação Matemática. Agradeço sua importante contribuição nas dúvidas sobre interpretação do Livro VIII de Euclides.

O AUTOR.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo explorar a construção dos poliedros regulares convexos, no Cabri-3D como uma possível transposição didática interna da construção de superfícies poliédricas desenvolvidas por Euclides (300 a.C), transformado suas orientações para uma linguagem atual, e verificando se essa construção apresenta as relações necessárias para o desenvolvimento de fórmulas para o cálculo da medida do volume desses poliedros. Nos orientamos pela seguinte questão de pesquisa: *a construção de poliedros regulares pelo método de Euclides propicia o cálculo da medida de seus volumes bem como a composição e decomposição do dodecaedro e do icosaedro?* O referencial teórico está baseado na noção de Transposição Didática e a Problemática Ecológica de Yves Chevallard e nos Registro de Representação Semiótica de Duval especificamente nas apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva, além das quatro maneiras de ver (olhar) as figuras em função do papel que elas desempenham nas atividades de geometria: o botânico, o topógrafo geômetra, o construtor e o inventor-marceneiro. A pesquisa é de natureza qualitativa do tipo documental porque está baseada na leitura, análise e interpretação do livro XIII, de *Elementos* de Euclides que aborda as construções do tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e do icosaedro regular. Os procedimentos são desenvolvidos em três partes. Na primeira parte exploramos as construções propostas por Euclides e as adaptamos para que pudessem ser construídas com as ferramentas do ambiente de representação dinâmica Cabri-3D, e constatamos que todos os poliedros regulares convexos podem ser construídos nesse ambiente. Na segunda parte exploramos as construções realizadas e buscamos relações e medidas que permitiram deduzir fórmulas para o cálculo da medida do volume desses poliedros, tanto em função da medida de suas arestas, quanto em função da medida do diâmetro das esferas que os circunscrevem. O dinamismo do *software* favoreceu a visualização dessas relações e medidas. Na terceira parte buscamos as condições necessárias para determinar se uma pirâmide de base regular pentagonal pode ou não fazer parte de um dodecaedro regular, bem como as condições para que um tetraedro possa compor ou não um icosaedro regular. A partir da determinação dessas condições pudemos propor a construção desses dois poliedros, por composição no Cabri-3D e deduzir uma fórmula para o cálculo da medida de seu volume a partir da medida do volume de uma das pirâmides que o compõe. Assim, consideramos que nossa questão foi respondida e as hipóteses levantadas durante o trabalho foram validadas nos conduzindo a desenvolver, futuramente, uma sequência para seu ensino.

Palavras-chave: Poliedros regulares convexos. Construção Geométrica. Medida de volume.

ABSTRACT

This research aims to explore the construction of regular convex polyhedra in Cabri-3D as a possible didactic transposition on the construction of polyhedral surfaces developed by Euclid (300 BC), transformed to a current language, and verifying if this construction presents the necessary relations for the development of formulas for the volume measure calculation of these polyhedra. We oriented ourselves by the following question of research: *Does the construction of regular polyhedra by Euclid method propitiate the measure calculation of their volumes as well as the composition and decomposition of dodecahedron and the icosahedron?* The theoretical referential is based on the notion of Didactic Transposition and the Ecological Problematic of Yves Chevallard and the Registry of Durval's Semiotics Representation specifically on the sequential, perceptive, operative and discursive apprehensions, in addition to the four ways of seeing (to look) the pictures in function of the roles that they perform in the activities of geometry: the botanical, the topographer geometer, the constructor and inventor-woodworker. The research is of qualitative nature of documental type because it is based on the reading, analysis and interpretation of Book XIII, the Elements of Euclid, that approach the construction of the regular tetrahedron, regular hexahedron, regular octahedron, regular dodecahedron and the regular icosahedron. The procedures are developed in three parts. On the first part we explored the constructions proposed by Euclid and we adapted them so that they could be constructed with the tools in the environment of Cabri-3D dynamic representation, and we noted that every regular convex polyhedra can be constructed in this environment. On the second part we explored the constructions accomplished and search relations and measures that allow to deduce formulas for the volume measure calculation of these polyhedra, in function of the measure of their edges, as much as in function of spheres diameter measure that circumscribe them. The dynamism of the software favoured the visualization of these relations and measures. On the third part we searched the necessary conditions to determine if the pentagon based pyramid can or cannot be part of a regular dodecahedron, as well as the conditions for a tetrahedron can or cannot compound a regular icosahedron. From the determination of these conditions we could propose the construction of these two polyhedron by composition in Cabri-3D and deduct a formula for the volume measure calculation by the volume measure of one of the pyramids that compose it. Thus, we believe that our question was answered and the hypothesis raised during the research were validated, conducting ourselves to develop, futurely, a sequel for its education.

Keywords: Regular convex polyhedra. Construction. Volume Measure

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI – NOÇÃO INTUITIVA.....	25
FIGURA 2 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI - GENERALIZAÇÃO.....	26
FIGURA 3 – VOLUME DE UM PRISMA	26
FIGURA 4 – DECOMPOSIÇÃO DE UM PRISMA TRIANGULAR EM TRÊS PIRÂMIDES	27
FIGURA 5 – VOLUME DE UM TETRAEDRO E DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER	28
FIGURA 6 – CINCO POLIEDROS REGULARES CONVEXOS – LIVRO 1	38
FIGURA 7 – RELAÇÃO DE EULER – LIVRO 1	39
FIGURA 8 – MEDIDA DO VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO – LIVRO 1.....	40
FIGURA 9 – TRISSECÇÃO DE UM PRISMA EM TRÊS PIRÂMIDES – LIVRO 1	40
FIGURA 10 – PIRÂMIDE QUALQUER – LIVRO 1	41
FIGURA 11 – FÓRMULA PARA O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER – LIVRO 1	41
FIGURA 12 – MEDIDA DO VOLUME DO DE UM TETRAEDRO REGULAR – LIVRO 1	42
FIGURA 13 – MEDIDA DO VOLUME DE UM OCTAEDRO REGULAR – LIVRO 1.....	42
FIGURA 14 – RELAÇÃO DE EULER E POLIEDROS REGULARES – LIVRO 2.....	43
FIGURA 15 – CINCO POLIEDROS REGULARES – LIVRO 2	44
FIGURA 16 – VOLUME DO PARALELEPÍPEDO E DO CUBO – LIVRO 2.....	44
FIGURA 17 – TRISSECÇÃO DO PRISMA EM TRÊS PIRÂMIDES – LIVRO 2	45
FIGURA 18 – VOLUME DA PIRÂMIDE – LIVRO 2	45
FIGURA 19 – DEFINIÇÃO DE POLIEDRO – LIVRO 3	46
FIGURA 20 – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL – LIVRO 3	46
FIGURA 21 – CINCO POLIEDROS REGULARES – LIVRO 3	47
FIGURA 22 – VOLUME DE PARALELEPÍPEDO E DO CUBO – LIVRO 3	47
FIGURA 23 – TRISSECÇÃO DO PRISMA – LIVRO 3	48
FIGURA 24 – VOLUME DE UMA PIRÂMIDE – LIVRO 3.....	48
FIGURA 25 – VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER – LIVRO 3	49
FIGURA 26 – OCTAEDRO REGULAR – LIVRO 3	50
FIGURA 27 – VOLUME DO PRISMA – LIVRO 4.....	50
FIGURA 28 – VOLUME DO CUBO – LIVRO 4	51
FIGURA 29 – VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER – LIVRO 4	51
FIGURA 30 – VOLUME DO OCTAEDRO REGULAR – LIVRO 4	52
FIGURA 31 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI – LIVRO 4.....	52
FIGURA 32 – TRISSECÇÃO DO PRISMA E VOLUME DE PIRÂMIDE – LIVRO 4.....	53
FIGURA 33 – POLIEDROS REGULARES – LIVRO 4	54
FIGURA 34 – VOLUME DO PARALELEPÍPEDO – LIVRO 5	55
FIGURA 35 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI – LIVRO 5.....	55
FIGURA 36 - VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO – LIVRO 5	56
FIGURA 37 – TRISSECÇÃO DO PRISMA DE BASE TRIANGULAR – LIVRO 5	57

FIGURA 38 – VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER – LIVRO 5.....	58
FIGURA 39 – OS CINCO POLIEDROS REGULARES CONVEXOS – LIVRO 6.....	58
FIGURA 40 – PLANIFICAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DO DODECAEDRO E DO ICOSAEDRO REGULARES – LIVRO 6	59
FIGURA 41 – VOLUME DE UM CUBO – LIVRO 6	59
FIGURA 42 – VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO – LIVRO 6.....	60
FIGURA 43 – INTRODUÇÃO AO PRINCÍPIO DE CAVALIERI – LIVRO 6.....	60
FIGURA 44 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI – LIVRO 6	61
FIGURA 45 – TRISSECÇÃO DE UM PRISMA TRIANGULAR – LIVRO 6	62
FIGURA 46 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI – LIVRO 7	63
FIGURA 47 – TRISSECÇÃO DO PRISMA TRIANGULAR – LIVRO 7	63
FIGURA 48 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI – LIVRO 8	64
FIGURA 49 – TRISSECÇÃO DO PRISMA TRIANGULAR E VOLUME DE PIRÂMIDE QUALQUER – LIVRO 8.....	64
FIGURA 50 – VOLUME DA UMA PIRÂMIDE QUALQUER – LIVRO 8	65
FIGURA 51 – POLIEDROS REGULARES – LIVRO 9	66
FIGURA 52 – POLIEDRO PLATÔNICO E NÃO PLATÔNICO – LIVRO 9	67
FIGURA 53 – VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO – LIVRO 10.....	67
FIGURA 54 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI – LIVRO 10	68
FIGURA 55 – VOLUME DA PIRÂMIDE TRIANGULAR E DA PIRÂMIDE QUALQUER – LIVRO 10.....	69
FIGURA 56 – TRISSECÇÃO DO PRISMA TRIANGULAR – LIVRO 10	70
FIGURA 57 – POLIEDROS REGULARES CONVEXOS – LIVRO 11	71
FIGURA 58 – VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO – LIVRO 11.....	71
FIGURA 59 – PRINCÍPIO DE CAVALIERI – LIVRO 11	72
FIGURA 60 – TRISSECÇÃO DO PRISMA – LIVRO 11	72
FIGURA 61 – POLIEDROS REGULARES CONVEXOS – LIVRO 12	73
FIGURA 62 – VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO – LIVRO 12.....	74
FIGURA 63 – TRISSECÇÃO DO PRISMA, VOLUME DA PIRÂMIDE – LIVRO 12	74
FIGURA 64 – VOLUME DO TETRAEDRO REGULAR – LIVRO 12	75
FIGURA 65 – POLIEDROS REGULARES CONVEXOS – LIVRO 13	76
FIGURA 66 – VOLUME DO PARALELEPÍPEDO E DO CUBO – LIVRO 13	77
FIGURA 67 – VOLUME DE UM PRISMA QUALQUER – LIVRO 13	77
FIGURA 68 – VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER – LIVRO 13.....	78
FIGURA 69 – DOBRADURA PARA OBTER UMA FACE TRIANGULAR	80
FIGURA 70 – SUPERFÍCIE POLIÉDRICA DO TETRAEDRO, OCTAEDRO E ICOSAEDRO	80
FIGURA 71 – DOBRADURA EM UM QUADRADO PARA OBTER UMA FACE DO CUBO	81
FIGURA 72 – RELAÇÃO DOS POLIEDROS REGULARES COM OS DEDOS DE UMA MÃO	82
FIGURA 73 – ICOSAEDRO REGULAR A PARTIR DA JUNÇÃO DE CINCO TRIÂNGULOS	82
FIGURA 74 – DODECAEDRO REGULAR A PARTIR DA JUNÇÃO DE TRÊS PENTÁGONOS	83
FIGURA 75 – REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA DIDÁTICO DE CHEVALLARD	91

FIGURA 76 - REPRESENTAÇÃO DE UMA FACE DO DODECAEDRO FEITA POR EUCLIDES	93
FIGURA 77 - CONSTRUÇÃO DE UM DODECAEDRO A PARTIR DE UM CUBO	93
FIGURA 78 – CONVERSÃO DE REGISTRO FIGURAL PARA REGISTRO DA LÍNGUA NATURAL	94
FIGURA 79 – APREENSÃO SEQUENCIAL PARA A CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO.....	95
FIGURA 80 - OUTRA APREENSÃO SEQUENCIAL PARA A CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO	96
FIGURA 81 – APREENSÃO PERCEPTIVA DE UM TETRAEDRO INSCRITO EM UMA ESFERA DADO POR EUCLIDES	96
FIGURA 82 – APREENSÃO OPERATÓRIA EM UM OCTAEDRO POR UMA MODIFICAÇÃO MEREOLÓGICA.....	97
FIGURA 83 – APREENSÃO OPERATÓRIA EM UM OCTAEDRO POR UMA MODIFICAÇÃO POSICIONAL	97
FIGURA 84 – APREENSÃO OPERATÓRIA DE UMA PIRÂMIDE POR UMA MODIFICAÇÃO ÓTICA	98
FIGURA 85 – TRANSLAÇÃO POR VETOR DE UMA PIRÂMIDE CONTIDA EM UM DODECAEDRO REGULAR	101
FIGURA 86 – TETRAEDRO REGULAR INSCRITO EM UMA ESFERA POR EUCLIDES	102
FIGURA 87 – CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA	103
FIGURA 88 – CONSTRUÇÃO DE UMA PIRÂMIDE CONTIDA EM UMA ESFERA APRESENTADA POR EUCLIDES.....	104
FIGURA 89 – CONSTRUÇÃO DO TETRAEDRO REGULAR INSCRITO EM UMA ESFERA	105
FIGURA 90 – MOSTRANDO QUE O TRIÂNGULO EFK É EQUILÁTERO.....	106
FIGURA 91 – TETRAEDRO REGULAR INSCRITO NA ESFERA.....	106
FIGURA 92 – CONSTRUÇÃO DE EUCLIDES PARA O CUBO	107
FIGURA 93 – CONSTRUÇÃO DO QUADRADO PARA FORMAR O CUBO.....	108
FIGURA 94 – CONSTRUÇÃO DO CUBO A PARTIR DO SEGMENTO EF	109
FIGURA 95 – DIAGONAL DO TRIÂNGULO RETÂNGULO GEK, RETÂNGULO EM E	109
FIGURA 96 – HIPOTENUSA DO TRIÂNGULO GMK, RETÂNGULO EM M	110
FIGURA 97 – CUBO CIRCUNSCRITO EM UMA ESFERA.....	110
FIGURA 98 – CONSTRUÇÃO APRESENTADA POR EUCLIDES, DO OCTAEDRO REGULAR INSCRITO NA ESFERA.....	111
FIGURA 99 – CONSTRUÇÃO DO OCTAEDRO REGULAR.....	112
FIGURA 100- OUTRA CONSTRUÇÃO PARA O OCTAEDRO REGULAR	113
FIGURA 101 – CONSTRUÇÃO DE EUCLIDES DE UMA FACE DO DODECAEDRO REGULAR	114
FIGURA 102 – DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO	114
FIGURA 103 - DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO – OUTRA CONSTRUÇÃO	115
FIGURA 104 – DIVISÃO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO DOS SEGMENTOS ON, OJ E PH	116
FIGURA 105 – CONSTRUÇÃO DE PERPENDICULARES ÀS FACES DO CUBO	116
FIGURA 106 – CONSTRUÇÃO DE UMA FACE DO DODECAEDRO	117
FIGURA 107 – CONSTRUÇÃO DOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS OBSERVADOS POR EUCLIDES	117
FIGURA 108 – PENTÁGONO REGULAR, MEDIDA DOS ÂNGULOS INTERNOS	118
FIGURA 109 – CONSTRUÇÃO DO DODECAEDRO A PARTIR DO CUBO	118
FIGURA 110 – MEDIDA DO RAIO DA ESFERA CIRCUNSCRITA NO DODECAEDRO	119
FIGURA 111 – DODECAEDRO INSCRITO EM UMA ESFERA	120
FIGURA 112 – PIRÂMIDE PENTAGONAL COM BASE EM UMA FACE DO DODECAEDRO	120
FIGURA 113 – CONSTRUÇÃO APRESENTADA POR EUCLIDES, DO ICOSAEDRO REGULAR INSCRITO NA ESFERA	121

FIGURA 114 – PRIMEIRO PENTÁGONO PARA CONSTRUIR O ICOSAEDRO REGULAR	122
FIGURA 115 – SEGUNDO PENTÁGONO PARA A CONSTRUÇÃO DO ICOSAEDRO REGULAR.....	123
FIGURA 116 – PENTÁGONOS SEPARADOS PARA COMPOR UMA PARTE DO ICOSAEDRO	123
FIGURA 117 – CONSTRUINDO O ICOSAEDRO. DEZ TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS ENTRE OS PENTÁGONOS.....	124
FIGURA 118 – TRIÂNGULOS RETÂNGULO PEO E YKO.....	124
FIGURA 119 – MAIS ALGUMAS FACES DO ICOSAEDRO.....	125
FIGURA 120 – ICOSAEDRO CONSTRUÍDO	125
FIGURA 121 – SEMICIRCUNFERÊNCIAS VPZ E VLZ PARA DETERMINAR O DIÂMETRO DA ESFERA.....	126
FIGURA 122 – ESFERA CIRCUNSCRITA NO ICOSAEDRO REGULAR	127
FIGURA 123 – TRIÂNGULO.....	127
FIGURA 124 – TETRAEDRO REGULAR E A ESFERA CIRCUNSCRITA	132
FIGURA 125 – HEXAEDRO REGULAR E A ESFERA CIRCUNSCRITA	133
FIGURA 126 – OCTAEDRO REGULAR E A ESFERA CIRCUNSCRITA.....	134
FIGURA 127 – DODECAEDRO REGULAR, A ESFERA CIRCUNSCRITA E UMA PIRÂMIDE	135
FIGURA 128 – PIRÂMIDE PENTAGONAL DO DODECAEDRO.....	136
FIGURA 129 – FIGURA SUPORTE PARA O CÁLCULO DA TANGENTE DE 36°	136
FIGURA 130 – SUPORTE PARA O CÁLCULO DA MEDIDA DA ÁREA DO PENTÁGONO	137
FIGURA 131 – DODECAEDRO, UMA PIRÂMIDE E A ESFERA CIRCUNSCRITA	138
FIGURA 132 – SUPORTE PARA O CÁLCULO DA MEDIDA DO VOLUME DO ICOSAEDRO	140
FIGURA 133 – ICOSAEDRO REGULAR E UMA PIRÂMIDE	140
FIGURA 134 – ICOSAEDRO REGULAR E A ESFERA CIRCUNSCRITA	141
FIGURA 135 – SUPORTE PARA A COMPOSIÇÃO DE UM DODECAEDRO REGULAR	143
FIGURA 136 – ESFERA CIRCUNSCRITA EM UM POSSÍVEL DODECAEDRO	143
FIGURA 137 – PIRÂMIDE DE BASE PENTAGONAL	144
FIGURA 138 – ALTURA GZ DA PIRÂMIDE DE BASE PENTAGONAL	145
FIGURA 139 – CONSTRUÇÃO DA BASE DE UMA PIRÂMIDE PENTAGONAL	145
FIGURA 140 – CONSTRUÇÃO DE UMA PIRÂMIDE PARA COMPOR O DODECAEDRO REGULAR	146
FIGURA 141 – ESFERA CIRCUNSCRITA EM UM POSSÍVEL DODECAEDRO	146
FIGURA 142 – ESFERA CIRCUNSCRITA EM UM POSSÍVEL DODECAEDRO	147
FIGURA 143 – TETRAEDRO QUE COMPÕE UM ICOSAEDRO REGULAR	147
FIGURA 144 – RETÂNGULO ÁUREO	148
FIGURA 145 – CONSTRUÇÃO DA BASE DE UM TETRAEDRO PARA COMPOR UM ICOSAEDRO REGULAR	148
FIGURA 146 – CONSTRUÇÃO DA ALTURA DE UM TETRAEDRO PARA COMPOR UM ICOSAEDRO REGULAR.....	149
FIGURA 147 – CONSTRUÇÃO UM ICOSAEDRO REGULAR A PARTIR DE UM TETRAEDRO	149
FIGURA 148 – CONSTRUÇÃO UM ICOSAEDRO REGULAR A PARTIR DE UM TETRAEDRO	150

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – RELAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS PESQUISADOS	37
QUADRO 2 – RESULTADOS DA MEDIDA DO VOLUME DOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS	79

QUADRO 3 – ESTRUTURA DO LIVRO ELEMENTOS DE EUCLIDES..... 100

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	19
2 PROBLEMÁTICA.....	23
2.1 POLIEDROS REGULARES CONVEXOS	23
2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	29
2.3 BREVE ESTUDO DE LIVROS DIDÁTICOS	35
2.4 LIVROS PARADIDÁTICOS	80
2.5 DOCUMENTOS OFICIAIS DA SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO.....	83
2.6 JUSTIFICATIVA	85
2.7 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	87
2.8 METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS	88
3 REFERENCIAL TEÓRICO	91
3.1 A NOÇÃO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E A PROBLEMÁTICA ECOLÓGICA	91
3.2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	93
4 OS POLIEDROS REGULARES E SUAS CONSTRUÇÕES POR EUCLIDES.....	99
4.1 OS <i>ELEMENTOS</i> DE EUCLIDES.....	99
4.2 <i>CABRI-3D</i>	100
4.3 TETRAEDRO REGULAR	102
4.4 HEXAEDRO REGULAR.....	107
4.5 OCTAEDRO REGULAR.....	111
4.6 DODECAEDRO REGULAR	113
4.7 ICOSAEDRO REGULAR	121
5 A MEDIDA DE VOLUME DOS POLIEDROS REGULARES.....	131
5.1 A MEDIDA DO VOLUME DE UM TETRAEDRO REGULAR.....	131
5.2 A MEDIDA DO VOLUME DE UM HEXAEDRO.....	133
5.3 A MEDIDA DO VOLUME DE UM OCTAEDRO REGULAR.....	133
5.4 A MEDIDA DO VOLUME DO DODECAEDRO REGULAR.....	135
5.5 A MEDIDA DO VOLUME DO ICOSAEDRO REGULAR	139
5.6 A COMPOSIÇÃO DO DODECAEDRO E DO ICOSAEDRO REGULARES	142
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	151
REFERÊNCIAS	155
ANEXO A: ORIENTAÇÕES PARA CONSTRUÇÃO DO TETRAEDRO REGULAR POR EUCLIDES	161
APÊNDICE A – COMPOSIÇÃO DO DODECAEDRO A PARTIR DE UMA PIRÂMIDE	163
ANEXO B – COMPOSIÇÃO DO ICOSAEDRO REGULAR A PARTIR DE UM TETRAEDRO	165

1 INTRODUÇÃO

Nossa trajetória profissional como educador matemático foi construída pelo trabalho desenvolvido a cada ano em cada uma das séries do Ensino Fundamental e Médio. Tive tendência em considerar o estudo de geometria com mais dedicação, o que me levou a desenvolver novos pontos de vista; e com empenho reformulei ideias, ampliei minha percepção de representações geométricas e entendi que a capacidade de compreensão evolui à medida que trabalhamos com construções geométricas. Isso me levou a trabalhar com construções de figuras geométricas planas, utilizando régua e compasso, com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental (12-13 anos), por acreditar que dessa forma conseguiria incentivá-los a compreender as construções geométricas representadas e suas propriedades.

Acreditamos que a geometria deve ser trabalhada na escola básica desde as séries iniciais com adequação para cada série, mas é no Ensino Médio que na geometria espacial se apresenta mais possibilidades de explorar os conhecimentos adquiridos ao longo das séries anteriores. A maior concentração desse conteúdo está no segundo ano do Ensino Médio e, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012), deve ser iniciado por poliedros convexos, explorando o número de vértices, número de faces e número de arestas. Posteriormente, deve ser abordada a medida de área de superfícies planas e regulares para em seguida a medida do volume que é tratada apenas com prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Procuramos então documentos oficiais para consultar as orientações a respeito da maneira de se abordar a geometria no Ensino Médio.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2000) orientam os professores para o desenvolvimento da capacidade de compreender e construir modelos para a resolução de questões de matemática por meio da utilização de forma geométrica para representar ou visualizar partes do mundo real. O documento aponta para a necessidade de desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções de problemas e, ainda, quais conhecimentos a respeito de perímetros, áreas e volumes devem ser aplicados na resolução de problemas. Acrescenta que composição e decomposição de figuras devem ser utilizadas para o cálculo de medidas de comprimentos, áreas e volumes relacionados a figuras planas e espaciais. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais + - PCN+ (BRASIL, 2002) encontramos essas mesmas sugestões.

No entanto, Silva (2012) destaca que o estudo de geometria espacial acontece de forma bastante precária, baseada em poliedros como prismas e pirâmides, às vezes esfera, mas

totalmente voltado para a medida de volumes com a disponibilização de fórmulas. Os poliedros regulares são apenas definidos e os alunos são orientados a memorizarem que “todo poliedro regular é de Platão”. Eventualmente, os professores entregam a planificação de alguma superfície para que os alunos construam um modelo em papel cartão.

Então, acreditamos que o uso de *softwares* educacionais para estudo da geometria espacial contribuiria para o desenvolvimento e compreensão no estudo dos poliedros regulares e pudesse contribuir para o desenvolvimento das propostas encontradas no PCNEM, encontramos o *software* Cabri-3D, ambiente de representação dinâmica que possibilita a construção de superfícies poliédricas e poderia favorecer o estudo da medida do volume de poliedros regulares convexos.

Partindo de nossa experiência docente, transcorrendo pelas consultas em livros didáticos e por meio da revisão bibliográfica que aponta alguns trabalhos que utilizam o Cabri-3D como um facilitador da construção de conhecimentos, encontramos no livro XIII de Euclides (300 a.C) a descrição da construção da superfície de uma face de cada um dos poliedros regulares. Definimos então que nossa pesquisa teria como objetivo verificar a possibilidade de construir essas superfícies pelo método de Euclides no ambiente Cabri 3D e a partir da noção de decomposição e composição em pirâmides do icosaedro e o dodecaedro regulares desenvolver uma fórmula para o cálculo da medida de seus volumes.

Dessa forma, utilizamos como referencial teórico a Teoria de Transposição Didática de Chevallard (1998) e os Registros de Representação Semiótica, visão e visualização propostos por Duval (1995, 1999, 2004, 2005), que nos ajudou a direcionar nossa investigação.

Esta tese possui cinco capítulos. Após a introdução, no segundo capítulo, apresentamos a revisão bibliográfica de trabalhos que envolvem o tema geometria espacial e as construções geométricas com o Cabri-3D; um breve estudo de alguns livros didáticos que envolvem o tema, destacando a forma com que abordaram a geometria espacial para a obtenção da medida do volume dos poliedros regulares convexos; o trabalho desenvolvido em livros paradidáticos sobre geometria e, finalmente, a justificativa da escolha e delimitação do problema e os procedimentos metodológicos adotados em nossa pesquisa, ou seja, construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri-3D.

No terceiro capítulo, abordamos nosso embasamento teórico com a noção de Transposição Didática de Chevallard, que trata da problemática ecológica e ainda a teoria de Duval a respeito dos Registros de Representação Semiótica.

No quarto capítulo apresentamos a análise didática do livro XIII de Euclides (300 a.C.) adaptando para uma linguagem atual, a construção do tetraedro, do hexaedro, do octaedro, do dodecaedro e do icosaedro, todos conhecidos como poliedros regulares e convexos. Utilizamos o *software* Cabri-3D, como recurso para auxiliar a interpretação das construções realizadas por Euclides.

No quinto capítulo realizamos os procedimentos de interpretação didática das construções dos poliedros convexos regulares, conversão do processo utilizado por Euclides para uma linguagem atual e o desenvolvimento e generalização do raciocínio que conduz ao cálculo da medida do volume de cada um desses poliedros por decomposição e composição em pirâmides. Para cada um desses poliedros apresentamos algumas aplicações dos procedimentos desenvolvidos, com o uso do Cabri-3D, para facilitar a compreensão e visualização, e ampliar a compreensão do aluno a respeito da medida do volume. Finalmente, em nossas considerações finais confrontamos os dados obtidos em nossa investigação, com nosso objetivo e questão de pesquisa, e também propomos sugestões que possam contribuir com o estudo dos poliedros regulares convexos.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos, inicialmente, as definições que adotaremos neste trabalho a respeito dos poliedros regulares convexos, em seguida nossa revisão bibliográfica a partir do levantamento de pesquisas que envolvem geometria espacial, em especial, o estudo de volume de poliedros. Além disso, faremos um breve estudo de como alguns livros didáticos e paradidáticos abordam geometria espacial; para então apresentar a justificativa desta pesquisa, bem como a questão de pesquisa e seus objetivos, e a metodologia de pesquisa juntamente com os procedimentos metodológicos realizados.

2.1 Poliedros regulares convexos

Como estamos desenvolvendo nossa pesquisa com poliedros para o cálculo da medida de seu volume, mais precisamente, os poliedros regulares convexos, apresentamos algumas definições que serão adotadas neste trabalho.

Baseada em Moreira Baltar (1994-1995), Anwandter-Cuellar (2013) distingue, entre outras, três concepções para volume: **volume-número** que se relaciona diretamente às formulas para calcular o volume; **volume-medida** pode-se definir o volume como o número de unidades necessárias para recobrir um sólido, segundo a autora “escolhida a unidade de medida, se coloca a questão de saber quantas unidades são necessárias para preencher o sólido” (p. 59); **volume-grandeza** “O volume é uma grandeza, quer dizer, [o volume] é uma característica comum aos sólidos que podemos medir.” (p. 59)

Para Moraes (2013, p. 32-33) podemos distinguir então três quadros associados à noção de volume: o quadro geométrico composto por figuras geométricas espaciais; quadro numérico composto por números reais positivos e o quadro das grandezas constituído de classes de equivalência de sólidos de mesmo volume. Assim, “sólidos diferentes podem ter mesmo volume e uma mudança da unidade de medida provoca uma mudança nos valores numéricos sem alterar a grandeza. Ao variar a unidade de medida, a medida do volume muda, mas o volume é o mesmo”.

Baseado em Dolce e Pompeo (1993, p. 123) adotaremos a seguinte definição de poliedros convexos: “Considerando um número finito, maior ou igual a 4, de superfícies poligonais convexas tais que: duas superfícies poligonais não estão em um mesmo plano, cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos; o plano de cada superfície poligonal

deixa as demais em um mesmo semiespaço.” Assim, se a intersecção desses semiespaços determina a superfície de um poliedro convexo, em que as superfícies poligonais são as faces, os lados dos polígonos que delimitam essas superfícies são suas arestas e seus vértices são os vértices do poliedro convexo.

“Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$, em que V é o número de vértices, A é o número de aresta e F é o número de faces do poliedro”. (DOLCE e POMPEO 1993, p.124). Ilustraram essa relação a partir de exemplos com superfícies poliédricas convexas e não convexas e acrescentam que os poliedros para os quais é válida a relação de Euler, são chamados de eulerianos e enunciaram que “*todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo*”. (DOLCE e POMPEO, 1993, p.127).

Na sequência, os autores definem que um poliedro convexo é de Platão se são verificadas as seguintes condições: “a) todas as faces têm o mesmo número de arestas; b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas e c) vale a relação de Euler”. (IBID, p.132). Demonstram então que existem cinco, e somente cinco classes de Poliedros de Platão, ou seja, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Um poliedro convexo é regular se, e somente se, suas faces são polígonos regulares e congruentes e seus ângulos poliédricos são congruentes, com isso enunciaram que “todo poliedro regular é de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é regular” (DOLCE e POMPEO, 1993, p.133). Por meio de exemplos os autores representaram poliedros regulares convexas e não convexas em que é válida a relação de Euler. Em nosso trabalho, quando nos referirmos aos poliedros regulares convexas, os chamaremos somente por poliedros regulares.

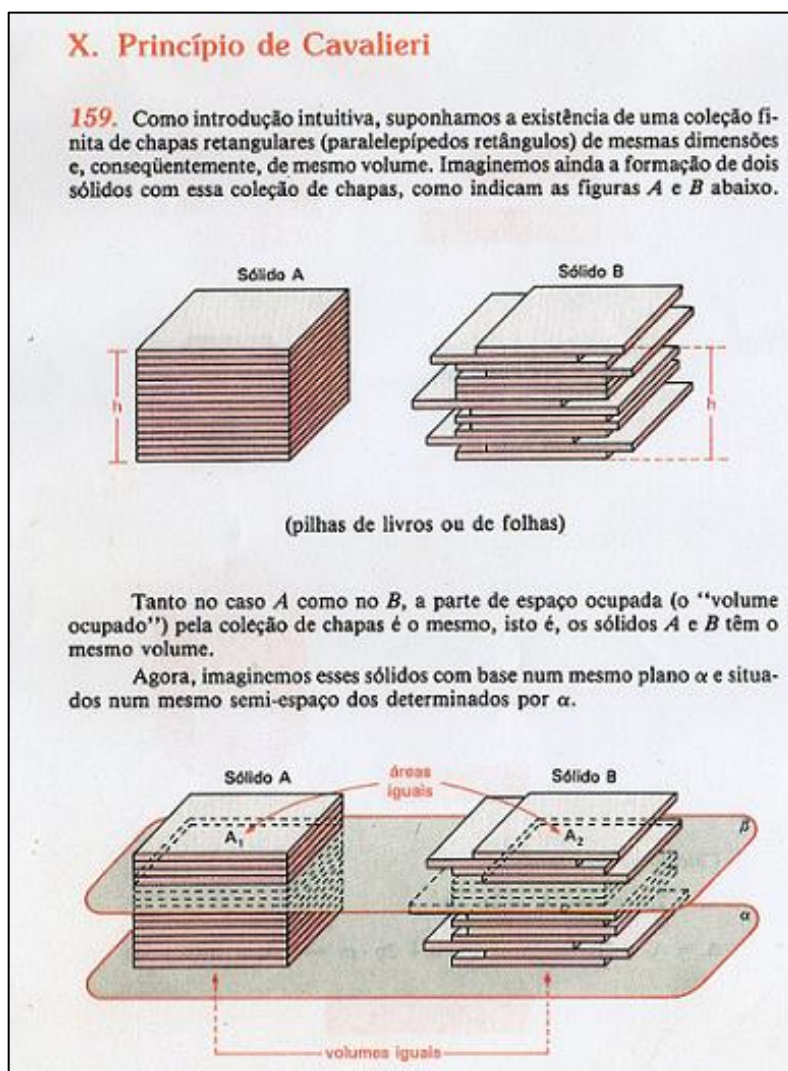
O interesse pelo cálculo da medida de volume de poliedros é antigo. Segundo Bongiovanni (2005), Arquimedes (287 a.C – 212 a.C) se preocupou em encontrar a medida do volume de um sólido em forma de cone. Em seu livro *O Método*, para determinar a medida da área de uma figura ou a medida do volume de um sólido, Arquimedes usa um processo mecânico que consiste em considerar uma figura plana como uma soma de segmentos e um sólido como uma soma de secções planas, suspendendo-as por uma alavanca, de modo a estabelecer o equilíbrio com uma figura de medida de área conhecida ou com um sólido de medida de volume conhecido. As superfícies eram vistas por Arquimedes como reunião de segmentos e os corpos como reunião de superfícies o que confrontava as dificuldades com a ideia de infinito da época. Como uma soma infinita de superfícies pode resultar num volume

finito? É por isso que após utilizar o método mecânico, Arquimedes provou o resultado pelo método de exaustão de Eudoxo (dupla redução ao absurdo).

No entanto, esse método heurístico utilizado por Arquimedes para o cálculo de medidas de áreas e de volumes se aproxima do procedimento desenvolvido mais tarde por Cavalieri, que considerava um contínuo, em geral, como a soma de uma infinidade de indivisíveis no cálculo da medida de volume de sólidos geométricos.

Assim, para descrever a medida de volume de sólidos Dolce e Pompeo (1993) apresentam, inicialmente, uma noção intuitiva para o princípio de Cavalieri (Figura 1) a partir da composição de sólidos por placas retangulares.

Figura 1 – Princípio de Cavalieri – noção intuitiva

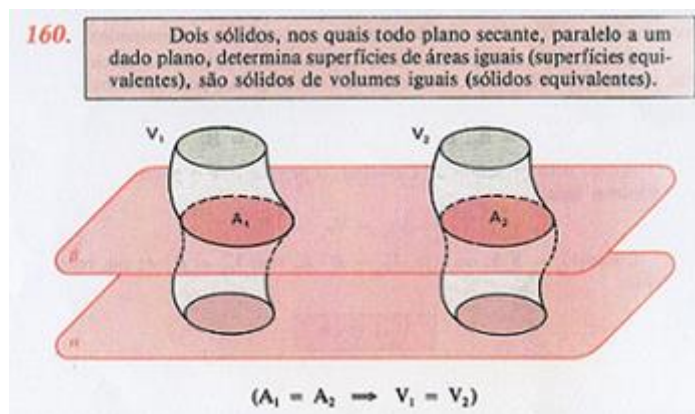


Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.164)

Os autores mostram que a alteração na posição das placas não altera o seu volume e preparam o aluno para a compreensão do Princípio de Cavalieri a partir da observação de que

as duas pilhas de placa estão apoiadas em um mesmo plano e que poderiam ser interceptadas por um outro plano paralelo ao plano de base. Na sequência (Figura 2) os autores enunciam o Princípio.

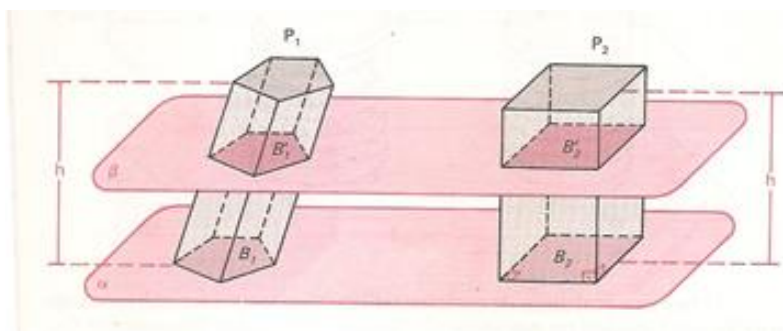
Figura 2 – Princípio de Cavalieri - generalização



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.165)

A partir do Princípio de Cavalieri, os autores apresentaram o volume do prisma (Figura 3) considerando um prisma P_1 , de altura de medida h e medida de área da base $B_1 = B$ e um paralelepípedo retângulo P_2 , de altura de medida h e medida de área da base $B_2 = B$, ambos sobre um plano α . Qualquer outro plano β paralelo a α , que secciona P_1 também secciona P_2 , e as secções B'_1 e B'_2 têm mesma área, pois são congruentes às respectivas bases. Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 têm volumes de mesma medida, $V = B \cdot h$, então concluíram que a medida do volume de um prisma pode ser obtida pelo produto da medida da área da base pela medida da altura.

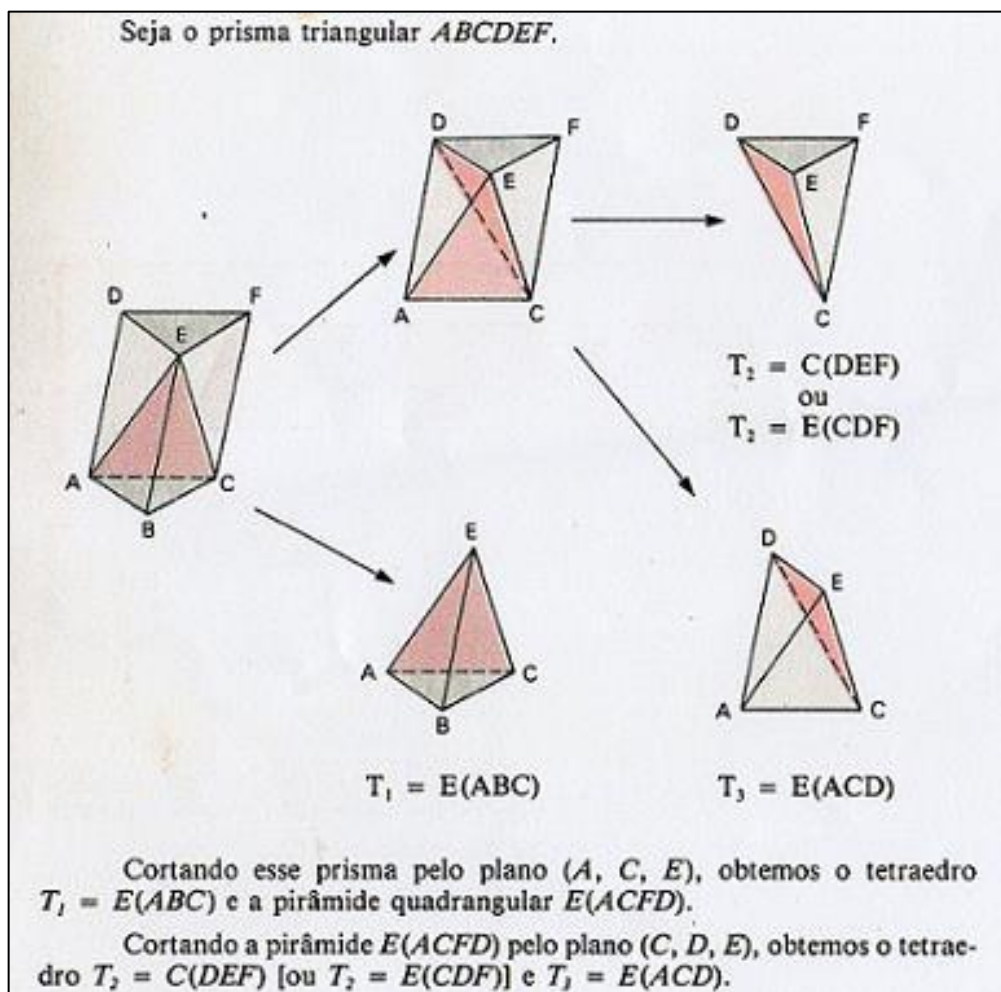
Figura 3 – Volume de um prisma



Fonte: Dolce e Pompeo 1993, p. 166

Com a definição da medida do volume de um prisma qualquer os autores apresentam a trisseção de um prisma de base triangular (figura 4) para definir a medida do volume de uma pirâmide e enunciam que: “*todo prisma triangular é a soma de três pirâmides triangulares (tetraedros) equivalentes entre si (volumes iguais)*”. (DOLCE e POMPEO, 1993, p. 191).

Figura 4 – Decomposição de um prisma triangular em três pirâmides



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p.192)

Os autores mostram que as três pirâmides de base triangular têm mesmo volume, justificando que $T_1 = E(ABC)$ pirâmide de base ABC e vértice E , $T_2 = C(DEF)$ pirâmide de base DEF e vértice C e $T_3 = E(ACD)$ pirâmide de base ACD e vértice E têm o mesmo volume, então $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}$

Encontramos no livro de Euclides, uma referência à trisseção de um prisma de base triangular onde afirma que: “todo prisma, tendo um triângulo como base, é dividido em três pirâmides iguais entre si, tendo triângulos como base” (BICUDO, 2009, P.539).

Com a decomposição do prisma de base triangular, dividido em três pirâmides de mesmo volume, os autores apresentam uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um tetraedro (figura 5) e de uma pirâmide qualquer.

Figura 5 – Volume de um tetraedro e de uma pirâmide qualquer

Seja B a área da base e h a medida da altura do prisma do item anterior. Notemos que B é a área da base e h é a medida da altura do tetraedro T_1 .

Em vista do teorema anterior e fazendo $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3} = V_T$:

$$V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} = V_{\text{prisma}} \Rightarrow 3V_T = B \cdot h \Rightarrow V_T = \frac{1}{3} B \cdot h$$

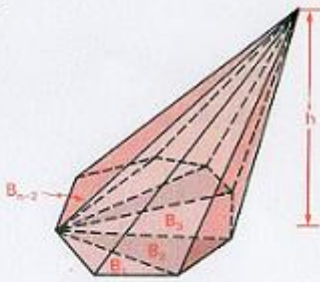
182. Volume de uma pirâmide qualquer

Seja B a área da base e h a medida da altura de uma pirâmide qualquer. Esta pirâmide é soma de $(n-2)$ tetraedros.

$V = V_{T_1} + V_{T_2} + \dots + V_{T_{n-2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} B_1 h + \frac{1}{3} B_2 h + \dots + \frac{1}{3} B_{n-2} h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} (B_1 + B_2 + \dots + B_{n-2}) h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} B \cdot h$$


183. Conclusão

O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Fonte: Dolce e Pompeo (1993. P.193)

Como podemos observar os autores representam por B a medida da área dos triângulos tomados como base e por h a altura da pirâmide (distância entre o triângulo da base e o vértice da pirâmide) para deduzir uma fórmula que expresse o volume e possibilite o cálculo da medida do volume de um tetraedro regular, ou seja, $V_T = \frac{1}{3} B \cdot h$. Além disso, generalizam essa fórmula para o cálculo da medida do volume de uma pirâmide qualquer, justificando que em uma pirâmide de base qualquer, a base pode ser dividida convenientemente em triângulos que formam tetraedros de mesmo vértice. Concluem então que a medida do volume de uma pirâmide qualquer é um terço do produto da medida da área da base pela medida da altura.

Dando continuidade à apresentação de nossa problemática, no que segue, apresentaremos a revisão bibliográfica para verificar pesquisas que estudaram todos os poliedros regulares convexos, com o auxílio do Cabri-3D, para o cálculo de medida de volume.

2.2 Revisão bibliográfica

Realizamos uma revisão da bibliografia a respeito de geometria espacial em trabalhos que tratassem da decomposição e composição para o cálculo de medidas de volume. Iniciamos nossa busca no banco de teses da CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) utilizando a palavra-chave “geometria espacial” e encontramos duas dissertações de mestrado: a de Silva (2011) e a de Muraca (2011). Utilizamos ainda a palavra “poliedros”, “poliedros de Platão” e “poliedros regulares”, mas não encontramos trabalhos que pudesse contribuir para a pesquisa. Consultamos também o banco de dissertações e teses da PUC/SP com a palavra “geometria espacial” e encontramos a dissertação de mestrado de Carvalho (2008). Fizemos nova consulta com a palavra-chave “Cabri-3D”, tanto no banco de teses da CAPES quanto da PUC/SP, por ser um *software* de geometria dinâmica muito utilizado no ensino de geometria espacial. Encontramos quatro dissertações de mestrado, de Almeida (2010), Rodrigues (2011), Possani (2012), Palles (2013) e Oliveira (2013) e uma tese de doutorado, a de Salazar (2009).

Pesquisamos ainda em diretórios da França com a palavra “*Dodécaèdre régulier et icosaèdre régulier*” (Dodecaedro regular e icosaedro regular), e encontramos Morales e Morales (2009), um livro intitulado, “*Les polyèdres réguliers convexes et non convexes par Pliag. (origami)*”, (Os poliedros regulares convexos e não convexos por dobradura) que trabalha com dobradura para a construção de superfícies poliédricas convexas e não convexas. Fizemos consultas em diretórios da Espanha com a palavra “*Los sólidos platônicos*” (Os sólidos platônicos) e encontramos Nieto e Hernández (2009), artigo intitulado, “*Construcción de los sólidos platónicos y arquimedianos haciendo uso del software cabri 3d*” (Construção dos sólidos platônicos e arquimedianos fazendo uso do *software* Cabri-3D) que apresentou instruções para a construção dos sólidos platônicos e arquimedianos com o uso das ferramentas do Cabri-3D.

Desta forma, a seguir apontaremos em ordem cronológica de publicação, o objetivo de cada trabalho, sua metodologia, juntamente com os principais resultados obtidos para verificar possíveis contribuições a nossa investigação e poder justificá-la cientificamente.

A dissertação de Carvalho (2008), teve como objetivo investigar a organização que os livros didáticos de Matemática, destinados à 2ª série do Ensino Médio, apresentavam para Geometria Espacial Métrica, e como essa organização favorecia a construção do pensamento geométrico. O autor procurou desvendar os possíveis motivos que levaram alguns professores

a não trabalharem Geometria Espacial Métrica, em especial, o cálculo de volume e área de superfícies de sólidos geométricos, como prismas e pirâmides, essenciais para o estudo de Geometria Espacial Métrica. Seu aporte teórico para análise baseou-se nas teorias de Raymond Duval, Aline Robert e Bernard Parsysz.

A análise do livro didático, segundo o autor, tinha como finalidade verificar se as atividades propostas nos livros pesquisados, proporcionavam e favoreciam a construção do conhecimento por parte dos alunos, propondo o uso de material concreto, construções geométricas com instrumentos, como régua e compasso ou *softwares* que facilitavam a visualização e desenvolviam o pensamento geométrico espacial. O autor, elaborou um questionário com o objetivo de obter subsídios para a compreensão do processo de ensino-aprendizagem no que tange a geometria espacial, mais especificamente, estudar a relação professor e livro didático e aplicou a um grupo de 21 professores de Matemática do Ensino Médio de 17 escolas da rede estadual e privada do ABC paulista. Com este questionário obteve dados para analisar os livros didáticos sobre o ensino de geometria espacial métrica, como os professores pensam e como agem em relação ao seu ensino.

O autor concluiu que os professores pesquisados declararam que o ensino da geometria é importante, mas nem sempre o discurso é compatível com a prática desempenhada, uma vez que apresentam dificuldades para operacionalizar. Os resultados de sua pesquisa indicaram pouca exploração, por parte dos autores dos livros didáticos, de atividades que desenvolvem a visualização e observou que a representação no plano das figuras tridimensionais não é estimulada. Os resultados da análise indicaram que os livros didáticos atendem parcialmente as recomendações das pesquisas em Educação Matemática quanto ao favorecimento do pensamento geométrico espacial.

A tese de doutorado de Salazar (2009), teve como objetivo observar como estudantes do Ensino Médio se apropriam das transformações geométricas no espaço, quando interagem com o ambiente de geometria dinâmica Cabri-3D, bem como, quais raciocínios mobilizam quando desenvolvem atividades que abrangem esse conteúdo. Seu referencial teórico baseou-se na Abordagem Instrumental de Rabardel e na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Como metodologia do estudo apoiou-se nos pressupostos de Engenharia Didática de Artigue. Para sua coleta de dados, utilizou dispositivos experimentais: questionários, observações, entrevistas semidirigida e gravações. Os questionários foram divididos em dois: questionário diagnóstico com dois objetivos, saber se os estudantes já tinham

usado ambientes de Geometria Dinâmica e conhecer quais noções de transformações geométricas eles tinham.

O questionário final foi composto por oito perguntas, cuja finalidade era levantar informações a respeito do ambiente computacional Cabri-3D, e as atividades desenvolvidas pelos estudantes. As observações foram realizadas por dois professores colaboradores da pesquisadora e as entrevistas foram feitas no último encontro, com quatro estudantes, com o objetivo de conhecer como se desenvolveu a experiência dos alunos com o Cabri-3D, além da mobilização de noções de transformações geométricas no espaço. A autora considerou que os estudantes estabeleceram relações entre as ferramentas e recursos do Cabri-3D e seus conhecimentos matemáticos e, mobilizaram conhecimentos de transformações geométricas, pois suas ações evidenciaram a mobilização de esquemas pré-estabelecidos e/ou a criação de novos esquemas de utilização.

Nieto e Hernández (2009) criaram uma oficina para as construções de representações de sólidos Platônicos e Arquimedianos utilizando as ferramentas do *software* Cabri-3D, com a finalidade de incentivar professores a incluir em seus procedimentos didáticos o *software* Cabri-3D para despertar o interesse de seus alunos para o estudo de matemática, mais especificamente, o estudo de poliedros. Os autores tinham como objetivos apresentar instruções para a construção geométrica dos sólidos Platônicos e Arquimedianos no Cabri-3D, familiarizar professores e alunos com o *software* e sensibilizá-los sobre a importância das ferramentas tecnológicas na sala de aula. No desenvolvimento da oficina, os autores apresentaram roteiros para a construção dos sólidos Platônicos e Arquimedianos, ou seja, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro, tetraedro truncado, cuboctaedro, cubo truncado, octaedro truncados, rombicuboctaedro, cuboctaedro truncado, cubo rombo, icosidodecaedro e dodecaedro truncado, mas não apresentaram suas construções.

A dissertação de Almeida (2010) teve como objetivo revisitar o objeto matemático Sólidos Arquimedianos, gerados por meio de truncatura de sólidos platônicos, por meio de suas construções no ambiente de geometria dinâmica Cabri-3D. Para investigar o processo de construção desses sólidos, recorreu a um estudo bibliográfico de livros e artigos científicos. Seu referencial teórico se baseou na Transposição Didática e na Problemática Ecológica de Chevallard, para promover a articulação entre a análise epistemológica e a análise didática, além de apontar outras características que determinam a sobrevivência do objeto matemático Sólidos Arquimedianos enquanto objeto de ensino, e na teoria dos Registros de Representação

Semiótica de Duval, para identificar e analisar quais registros são mobilizados para a construção desses sólidos, bem como evidenciar os tratamentos e conversões efetuados.

As análises das construções realizadas ajudaram a autora a perceber que apenas os tratamentos figurais não são suficientes para a construção dos Sólidos Arquimedianos no Cabri-3D, fez-se necessário mobilizar um registro discursivo como suporte para que os pontos de corte em sólidos platônicos pudessem ser encontrados. A autora constatou que o Cabri-3D se confirmou como um habitat para o estudo dos Sólidos Arquimedianos, na medida em que reconheceu como objeto todos os saberes que determinam a existência desses sólidos enquanto objeto de ensino.

A dissertação de Rodrigues (2011) abordou uma proposta dedicada à análise do “Caderno do Professor” distribuído em 2008 pela Secretaria de Estado de São Paulo aos professores de ensino médio das escolas públicas do Estado. Sua pesquisa se restringiu a examinar a parte do estudo de volumes de sólidos, também denominado de estereometria. Tinha como objetivo avaliar em que medida esses cadernos, na abordagem da estereometria, contemplam a especificidade da disciplina em seu caráter abstrato e se proporciona ao professor condições de superação das dificuldades que aquelas especificidades acarretam para o processo de aprendizado. Em síntese, a pesquisa procurou observar se o material distribuído aos professores trouxe uma abordagem conceitual de volumes.

A autora concluiu que o referido Caderno possibilita uma abordagem conceitual de volume de poliedros geométricos, para o segundo ano do ensino médio, embora não contenha atividades que utilizem aplicativos computacionais ou vídeos. Considerou isso como falha que frustra as expectativas em relação ao referido material, visto que prometia trazer esse tipo de atividade. Além disso, a autora ressalta que o Caderno do Professor, como proposta de atividade complementar, não contempla o conceito de semelhança, apontado como de fundamental importância.

A dissertação de Silva (2011) teve como objetivo resgatar elementos e construções usados na disciplina de Desenho Geométrico, como auxiliares no estudo de Geometria Espacial. Foram observados e analisados o desenvolvimento dos trabalhos dos alunos de duas turmas de segundo ano do Ensino Médio em duas escolas particulares da cidade de Belo Horizonte.

Durante seu trabalho houve um crescimento gradativo do interesse por parte dos alunos, e do conhecimento, culminando numa melhora de rendimento no estudo posterior de Geometria Espacial. Como resultado, o autor verificou, entre os alunos, expectativas e posturas

favoráveis a proposta de pesquisa, bem como notório empenho ao desenvolver as atividades e, posteriormente, em relacionar e aplicar o conhecimento adquirido nos estudos de Geometria Espacial.

A dissertação de Muraca (2011) teve como objetivo pesquisar e analisar uma experiência formativa (inserida em um processo de formação continuada) que privilegiasse uma abordagem exploratório-investigativa, quanto às reflexões feitas por professores relativas a conceitos geométricos e ao ensino de geometria na Educação Básica. Para atingir seu objetivo, o autor dividiu a pesquisa em: (i) construir uma experiência formativa baseada em atividades exploratório-investigativas; (ii) desenvolver essas experiências com um grupo de professores; (iii) analisar as problematizações, as discussões e reflexões coletivas ao longo do processo e/ou as (re)conceituações ocorridas.

Sua pesquisa foi parte do projeto de Educação Continuada de Professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio: Constituição de um Núcleo de Estudos e Investigações de Processos Formativos, com a finalidade de incorporar à prática docente resultados de pesquisas da área de Educação Matemática. Coletou os dados por observação direta, gravação de encontros e registros produzidos pelos sujeitos da pesquisa.

O autor utilizou análise interpretativa por triangulação de dados e os resultados obtidos indicaram que a experiência formativa, privilegiando uma abordagem exploratório-investigativa, levou a problematizações relacionadas aos conteúdos de Geometria de Posição que possibilitaram reconceituações, especialmente para retas paralelas, retas reversas, posições de reta e plano, figuras espaciais, tais como quadrilátero. Quanto às atividades que problematizaram o ensino, elas possibilitaram ao grupo pesquisado a reflexão sobre o uso de tecnologia, particularmente *softwares* de Geometria dinâmica, no sentido de (re)pensar metodologias ou estratégias para a prática pedagógica.

Em sua dissertação, Possani (2012) procurou investigar a apropriação do cálculo para a medida do volume do icosaedro regular, por alunos do 3º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência de atividades mediadas pelo uso do *software* Cabri-3D. A investigação apoiou-se nos pressupostos da Engenharia Didática, na Teoria das Situações Didáticas, e também na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, mais especificamente, nas diferentes apreensões de uma figura.

O autor propôs aos estudantes que refletissem sobre situações-problema, trabalhando com diversos objetos geométricos e, compreendessem como calcular o volume do icosaedro

regular a partir da modificação de uma figura, utilizando o Cabri-3D. A sequência de ensino proporcionou aos estudantes, condições para refletir sobre geometria espacial. Ajudou os sujeitos a entender os mecanismos que os levaram a construir a fórmula que permitiu calcular a medida do volume de um icosaedro regular, além de uma melhor compreensão das propriedades de alguns objetos geométricos envolvidos na construção.

A dissertação de Palles (2013) teve como objetivo o estudo da visualização geométrica de registros figurais dinâmicos por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica a partir da dissertação de Possani. Na análise da sequência a autora percebeu que o papel heurístico da figura, em grande parte das atividades, poderia ter sido mais bem explorado se as atividades não fossem restritas a um “passo a passo”, ou seja, se os alunos tivessem a oportunidade de explorar a figura para encontrar soluções.

A autora utilizou como metodologia um estudo de caso por ser uma pesquisa de natureza empírica baseada em uma análise documental, tomando como estudo uma sequência didática para o cálculo da medida do volume do icosaedro constante no trabalho de Possani. Segundo a autora os tratamentos figurais e, conseqüentemente, as apreensões, também poderiam ser mais trabalhados, pois a maioria das atividades requer a apreensão sequencial e a apreensão perceptiva, trabalhando pouco com a apreensão operatória.

A dissertação de Oliveira (2013) teve como objetivo refletir a respeito do ensino de geometria espacial de posição, do estudo de poliedros à luz das análises de dois livros didáticos de matemática utilizados em escolas públicas e da utilização de recursos computacionais, mediante o emprego de *softwares* educacionais.

O autor propôs a utilização do *software* educacional “Uma Pletora de Poliedros”, o qual faz parte de um projeto da UFF (Universidade Federal Fluminense) como recurso para complementar ao livro didático para o ensino do cálculo da medida do volume do dodecaedro e do icosaedro a partir de conceitos matemáticos já conhecidos pelos alunos do Ensino Médio. Sua aplicação se deu com duas listas de atividades e apesar das dificuldades iniciais percebidas no manuseio dos *softwares*, o autor concluiu que as atividades aplicadas com esse recurso proporcionaram maior participação e entrosamento dos alunos.

Silva e Almouloud (2013) fizeram um estudo a respeito da elaboração de fórmulas para o cálculo da medida do volume de sólidos e apresentaram uma análise praxeológica da truncatura no cubo envolvendo o *software* Cabri-3D, para assim determinar a medida do volume do octaedro regular resultante. Consideraram que o Cabri-3D se mostrou um ambiente

favorável para a construção dos procedimentos necessários para a dedução da fórmula para a medida do volume do octaedro regular.

Em nossa revisão bibliográfica, observamos que apenas dois trabalhos trataram de do desenvolvimento de uma fórmula para o cálculo da medida do volume, um a partir de um icosaedro dado e outro a partir de truncaturas de um cubo para obter um octaedro regular e um cuboctaedro, ambos utilizando ferramentas do Cabri 3D. Em nenhum dos trabalhos encontramos a dedução das fórmulas a partir da decomposição dos poliedros regulares ou das condições de uma pirâmide poder compor ou não esses poliedros utilizando as construções propostas por Euclides.

Apresentamos a seguir o estudo de alguns livros didáticos sobre os poliedros regulares convexos com a finalidade de explorar as abordagens apresentadas.

2.3 Breve estudo de livros didáticos

O livro didático de matemática tem um papel importante para professores e alunos da Educação Básica. De acordo com Silva Junior e Regnier (2008) o professor de matemática procura nos livros didáticos uma função de apoio, para completar sua formação ou mesmo para compreender algo que não aprendeu em sua formação inicial, seja relativa ao conteúdo, à metodologia ou à pedagogia.

Nesse sentido o livro didático pode ser considerado como instrumento de uso profissional que oferece suporte para o aprendizado do professor, como determinante para organizar o conteúdo a ser desenvolvido em sala de aula no processo de ensino e de aprendizagem. Acompanhando estas argumentações, encontramos nas Organizações Curriculares para o Ensino Médio-OCEM (BRASIL, 2006) referência sobre o uso do livro didático em sala de aula:

O texto didático traz para a sala de aula mais um personagem, seu autor, que passa a estabelecer um diálogo com o professor e seus alunos, refletindo seus pontos de vista sobre o que é importante ser estudado e sobre a forma mais eficaz de se trabalharem os conceitos matemáticos. [...] o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que “o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar com o livro de capa a capa”. (BRASIL, 2006 p.86)

Isso reforça a influência que o livro didático tem na prática docente, gerando muitas vezes, a perda da autonomia do professor como responsável pelo processo educativo e didático

em sala de aula. É importante salientar que o livro didático deve ser visto como um recurso dentre vários, que auxiliam o desenvolvimento do trabalho do professor em sala de aula.

Assim, vamos analisar como é tratada a medida de volume dos poliedros regulares convexos em alguns livros didáticos do Ensino Médio; observaremos ainda se existe alguma abordagem desenvolvida para a generalização da medida de volume. Procuramos selecionar os livros, de forma a considerar alguns publicados antes do Movimento da Matemática Moderna no Brasil sendo que consideraremos o período (1957-1960), sendo que desta época analisaremos um livro de 1963; alguns cuja publicação se deu quando este movimento estava sendo abandonado, que consideraremos o período de (1975-1998) e alguns que foram publicados quando ocorreu a publicação dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais-1998) e que constam no Programa Nacional de Livros Didáticos para o Ensino Médio (PNLDEM¹), que consideraremos (1999-2013).

De acordo com Carvalho (2008) o Movimento da Matemática Moderna no Brasil teve início com a ideia central de adaptar o ensino de matemática a novas concepções. Nos livros didáticos lançados nesse período, estavam presentes a preocupação com as estruturas algébricas e com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. A coerência com o Movimento da Matemática Moderna exigia um trabalho com a geometria sob o enfoque das transformações e, como a maioria dos professores não dominavam o assunto fazia com que muitos deixassem de ensinar geometria sob qualquer enfoque. Ainda segundo Carvalho (2008), a partir do ano de 1970, iniciou-se um movimento de resgate do ensino de geometria, visando ampliar sua participação no ensino integral do educando.

Nossa análise dos livros selecionados, busca o tratamento dado a medida do volume de poliedros convexos e, por isso, optamos por analisar: a definição de poliedro, a relação de Euler, os poliedros de Platão, os poliedros regulares, como foi apresentado o estudo de volumes, uso ou não do princípio de Cavalieri, uso ou não da trisseção do prisma para definir volume de pirâmide e, como se deu a apresentação da medida de volume, se foi apenas do tetraedro ou se foi abordada a medida de volume de uma pirâmide qualquer. No quadro 1 apresentamos os nomes dos livros objeto de nosso estudo.

¹ Foi publicada a resolução CD FNDE nº 38, de 15/15/2013 que institui o Programa Nacional de Livro Didático para o Ensino Médio (PNLDEM). Em 2004, seu primeiro ano de execução, o PNLDEM 2004 distribuiu livros de matemática e português para alunos do 1º ano do Norte e Nordeste. No ano seguinte houve distribuição de livros de matemática e português para todos os anos e regiões. Fonte: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-historico>. Acessado em 19/01/2016.

Quadro 1 – Relação dos livros didáticos pesquisados

Livro	Ano	Autor	Nome do Livro
1	1957	Irmãos Isidoro Dumont	Geometria Elementar segundo os programas elementares às escolas superiores – Livro VI – Coleção de livros didáticos – FTD – SP.
2	1960	Manoel Jairo Bezerra	CURSO DE MATEMÁTICA para os cursos de segundo grau. (Antigos cursos clássicos e científicos) – Companhia Editora Nacional – SP.
3	1963	Ary Quintella ²	MATEMÁTICA para o primeiro ano colegial – Companhia Editora Nacional – SP.
4	1976	Paulo Boulos, Renate Watanabe	Matemática Segundo grau – Volume 2 – Companhia Editora Nacional – SP.
5	1984	Vitor Setani	Matemática segundo grau – Volume 2 – Editora Ática – SP.
6	1988	Chico Nery e José Jakubovic	Curso de Matemática – volume 2 – Editora Moderna – SP.
7	1994	Luiz Tavares Laureano, Olímpio Rudinin Vissoto Leite, Vincenzo Bongiovanni	Matemática – volume único – 2º grau – Editora Ática – SP.
8	1998	Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier da Silva	Matemática aula por aula – volume 2 – Editora FTD – SP.
9	2000	Carlos Alberto Marcondes dos Santos, Nelson Gentil, Sergio Emílio Greco	Matemática novo ensino médio – volume único – Editora Ática – SP.
10	2003	Oscar Guelli	Matemática – série Brasil – Ensino Médio – volume único – Editora Ática – SP.
11	2007	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo	Matemática – volume único – Editora Atual – SP.
12	2012	Luiz Roberto Dante	Matemática Contextos & Aplicações – volume 2 – Editora Ática – SP.
13	2013	Joamir Souza	Novo olhar matemática – volume 3 – Editora FTD – SP.

Fonte: produção do autor.

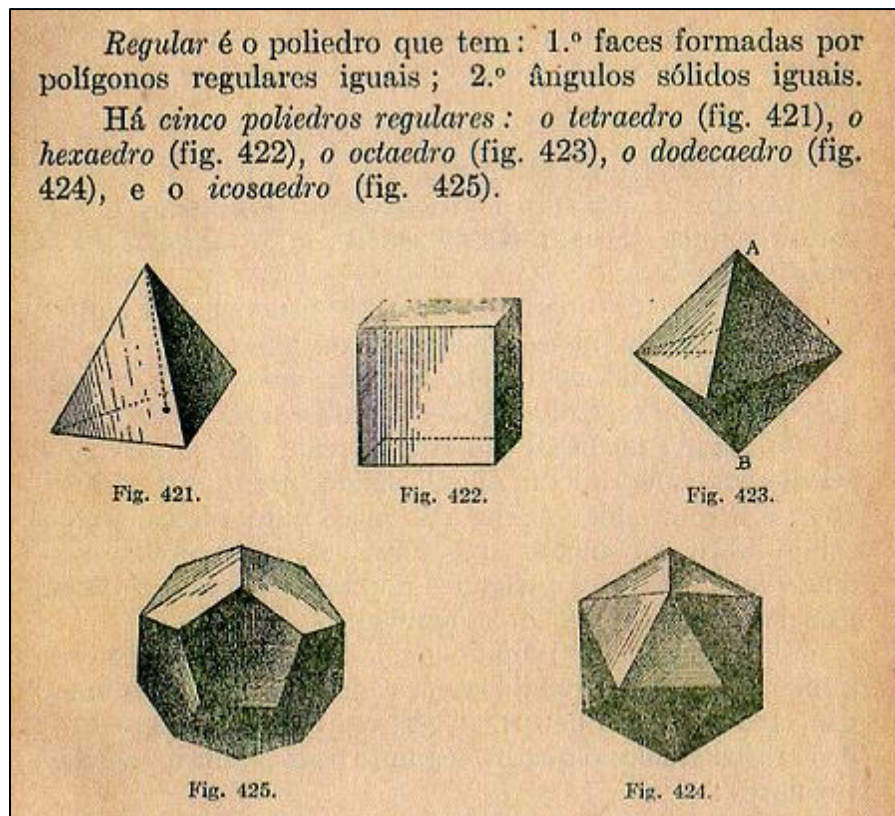
Iniciamos nossa análise com alguns livros publicados antes do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, no período de (1957-1960). O livro do Irmão Isidoro Dumont (1957) é um livro destinado ao aluno e, é recomendado para o professor, no início do volume, que: “o cuidado de despertar o conhecimento intuitivo do aluno para os elementos básicos da geometria: espaço, linha, ponto, plano. Numerosos exemplos devem também ilustrar estes conceitos básicos”. (DUMONT, 1957, p.3).

Na figura 6, o autor apresenta a definição de poliedro regular e a existência de cinco poliedros regulares. Na sequência associa a cada um a quantidade de polígonos cuja intersecção formam um vértice em cada poliedro e, ainda, argumenta que o tetraedro é formado por 4 triângulos equiláteros unidos 3 a 3 em torno de um vértice, o hexaedro é formado por 6 quadrados unidos 3 a 3, o octaedro por 8 triângulos equiláteros unidos 4 a 4, o dodecaedro por 12 pentágonos regulares unidos 3 a 3 e o icosaedro regular por 20 triângulos equiláteros unidos de 3 a 3. Ressaltamos que o autor não destaca que os poliedros apresentados são convexos, porém evidenciam que em cada vértice formado a soma dos ângulos deve ser inferior a 360°;

² <http://www.ebah.com.br/search?q=Ary+Quintella>. Acessado em 13/01/2016.

basta examinar quais são os polígonos regulares cujos ângulos unidos de 3 a 3, 4 a 4 e 5 a 5, têm uma soma menor que 360° .

Figura 6 – Cinco poliedros regulares convexos – Livro 1



Fonte: Dumont (1957, p.291)

Na afirmação “3 a 3” fica implícito que serão unidos os vértices de três triângulos equiláteros para formar um vértice do tetraedro e que serão unidos os vértices de três pentágonos regulares para formar um vértice do dodecaedro regular. Para a afirmação “4 a 4” está implícito que serão unidos os vértices de quatro triângulos equiláteros para formar um vértice do octaedro e, finalmente, na afirmação “5 a 5” fica implícito que serão unidos cinco triângulos equiláteros para formar um vértice do icosaedro.

Os autores apresentam a relação de Euler, figura 7, designando por f o número de lados em cada face, por v o número de arestas reunidas em cada vértice, por F o número de faces, por V o número de vértices e por A o número total de arestas, apresentando a contagem desses elementos em um quadro e concluindo com o enunciado da relação como um Teorema.

Figura 7 – Relação de Euler – Livro 1

Se f designa o número de lados de cada face, v o número de arestas reunidas em cada vértice, F o número das faces, V o número dos vértices e A o número total das arestas, temos o quadro seguinte para os cinco poliedros regulares :

POLIEDROS	f	v	F	V	A
Tetraedro.....	3	3	4	4	6
Cubo.....	4	3	6	8	12
Octaedro	3	4	8	6	12
Dodecaedro	5	3	12	20	30
Icosaedro	3	5	20	12	30

514. Teorema. — *Em qualquer poliedro, o número das arestas mais dois é igual ao número dos vértices mais o número das faces (EULER) (1).*

Fonte: Dumont (1957, p.292)

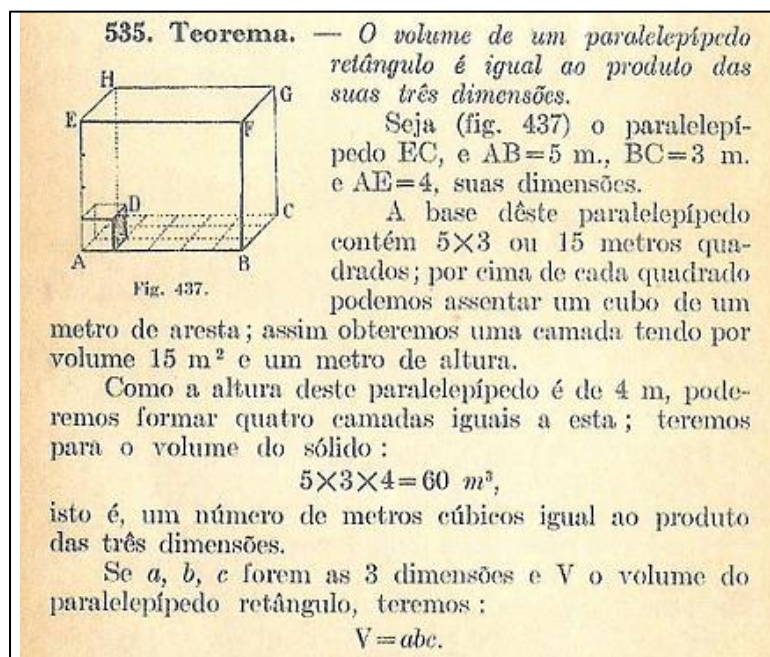
Como nossa investigação se concentra na medida do volume de poliedros regulares convexos verificamos como esse conteúdo foi abordado. O autor apresenta primeiro a medida do volume do paralelepípedo retângulo enunciando um teorema.

Na figura 8 o autor enuncia um teorema, mas não o demonstra, apenas apresenta um exemplo numérico para a medida do volume do paralelepípedo retângulo a partir da ideia de contagem de cubos unitários. Em seguida, enuncia um corolário para a definição da medida do volume do cubo.

- 1º O volume de um cubo vale a 3ª potência de sua aresta – O cubo de aresta a é um paralelepípedo retângulo cujas três dimensões valem a . Seu volume é:
 $V = a \cdot a \cdot a = a^3$
- 2º O produto de AB por BC é igual à área da base do paralelepípedo; logo, o volume de um paralelepípedo é igual ao produto da base pela altura.
 (DUMONT, 1957, p. 302).

Notamos que apresenta a medida do volume do paralelepípedo retângulo referindo-se a contagem de cubos de dimensões unitárias, no entanto, para a medida do volume do cubo, não se refere à contagem e sim a medida da aresta do cubo, não justificando a passagem da contagem que tem como resultado um número natural, para uma medida qualquer que pode ser qualquer número real.

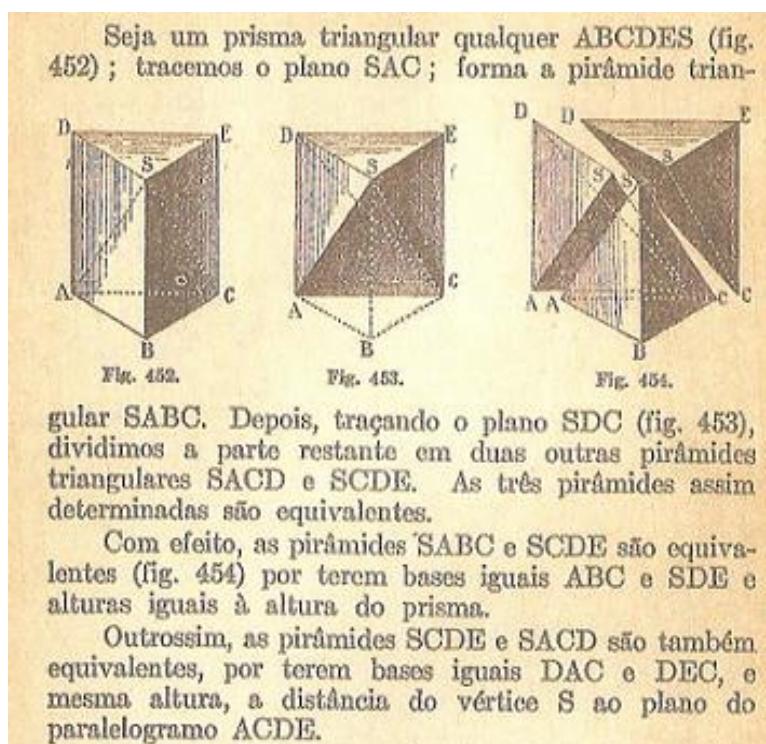
Figura 8 – Medida do volume de um paralelepípedo – Livro 1



Fonte: Dumont (1957, p. 302)

O autor enuncia, por teorema, que o “volume de uma pirâmide é igual ao terço do produto da base pela altura”. (DUMONT, 1957, p.315) apresentando trisseção de um prisma de base triangular (figura 9).

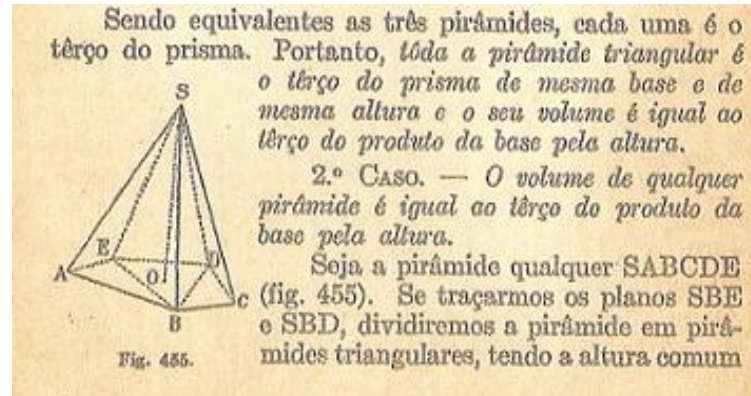
Figura 9 – Trisseção de um prisma em três pirâmides – Livro 1



Fonte: Dumont (1957, p. 316-317)

Na figura 10, o autor apresenta a trisseccção de um prisma em três pirâmides equivalentes para apresentar a medida do volume de uma pirâmide qualquer.

Figura 10 – Pirâmide qualquer – Livro 1



Fonte: Dumont (1957, p.316)

Em seguida, a medida do volume de uma pirâmide qualquer, dividindo a pirâmide dada em pirâmides triangulares, com altura comum, o segmento SO, para chegar na medida do volume de uma pirâmide qualquer, como mostra a figura 11.

Figura 11 – Fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide qualquer – Livro 1

$$\begin{aligned}
 \text{Vol. SABCDE} &= \frac{1}{3} \text{BAE} \times \text{SO} + \frac{1}{3} \text{BDE} \times \text{SO} \\
 &+ \frac{1}{3} \text{BCD} \times \text{SO} = \frac{1}{3} \text{SO} (\text{BAE} + \text{BDE} + \text{BCD}) = \\
 &\frac{1}{3} \text{ABCDE} \times \text{SO}.
 \end{aligned}$$

Designando por V o volume de uma pirâmide, por B a base e h a altura :

$$V = \frac{Bh}{3}.$$

Fonte: Dumont (1957, p.316)

Para a medida do volume de um tetraedro regular, o autor parte do seguinte problema: “Achar o volume do tetraedro regular conhecendo a aresta a .” (DUMONT, 1957, p.332). Como mostra a figura 12, o autor considera o triângulo equilátero da base para encontrar a medida de sua altura AE . Em seguida, considera o triângulo SAO , retângulo em O , para determinar a medida da altura OS , do tetraedro regular. Como a base é um triângulo equilátero, a medida de sua área é calculada por $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ e considerando que a medida do volume de uma pirâmide qualquer é calculada por $V = \frac{B \cdot h}{3}$, a medida do volume do tetraedro regular de aresta a , pode ser calculada então por $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Figura 12 – Medida do volume do de um tetraedro regular – Livro 1

586. Problema. — Achar o volume do tetraedro regular conhecendo a aresta a .

A base é um triângulo equilátero (fig. 469), cuja área é (437) :

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

A altura SO ou h dá, no triângulo retângulo SAO :

$$h^2 = a^2 - AO^2$$

Como o tetraedro é regular, O é o ponto de encontro das medianas da base, e $AO = \frac{2}{3} AE$.

Mas o triângulo retângulo AEB dá :

$$AE = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{3};$$

donde $AO = \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}$ e $AO^2 = \frac{a^2}{3}$.

Logo $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3};$

donde $h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

Se V designa o volume do tetraedro regular, temos :

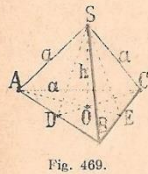
$$V = \frac{1}{3} h \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$


Fig. 469.

Fonte: Dumont (1957, p. 332-333)

O autor apresenta então (figura 13) a representação de um octaedro regular como composição de duas pirâmides de base comum a partir e o seguinte problema: “Achar o volume do octaedro regular, conhecendo a aresta a ” (DUMONT, 1957, p.333). Considerando o quadrado $ABCD$ de lado a , afirma que a medida do volume de um octaedro regular de aresta a pode ser obtido pela fórmula: $V = \frac{1}{3} \left(\frac{a \cdot a}{2} \right) \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot 4 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Figura 13 – Medida do volume de um octaedro regular – Livro 1

587. Problema. — Achar o volume do octaedro regular, conhecendo a aresta a .

O octaedro regular (fig. 470) compõe-se de duas pirâmides que têm por base comum o quadrado $ABCD$ de lado a e de superfície a^2 .

Por outra parte, a altura SS' é igual à diagonal do quadrado de lado a e vale $a\sqrt{2}$ (369).

Logo, a altura SO ou $S'O$ de cada pirâmide vale $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$.

Temos, pois, para o volume V :

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

O volume do octaedro regular vale 4 vezes o volume do tetraedro regular de mesmo lado.

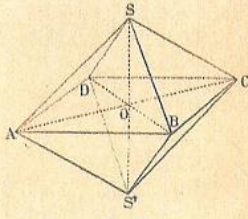


Fig. 470.

Fonte: Dumont (1957, p. 333)

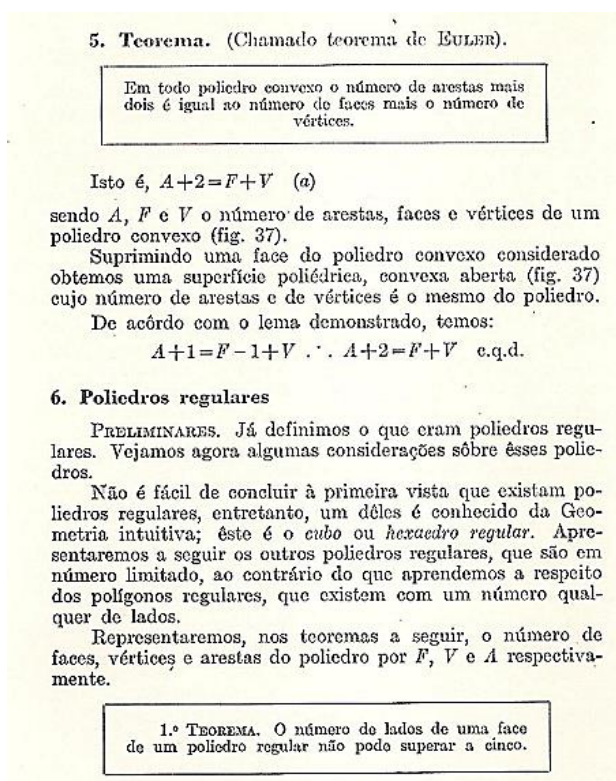
Conclui que “o volume do octaedro regular é 4 vezes o volume do tetraedro regular de mesmo lado” (DUMONT, 1957, p.333). Isso significa que o octaedro regular pode ser

decomposto em quatro tetraedros. O autor não apresenta o Princípio de Cavalieri, nem tão pouco os poliedros de Platão e ainda, não encontramos cálculos para medida do volume do dodecaedro e icosaedro regulares.

Bezerra (1960), 2ª edição, em seu livro: CURSO DE MATEMÁTICA para os cursos de segundo grau (antigos cursos clássicos e científicos) destinado ao aluno, definiu superfície poliédrica como a superfície formada por quatro ou mais regiões poligonais pertencentes a planos diferentes de maneira que dois a dois tenham um lado em comum. Para o autor, uma superfície poliédrica é convexa quando pertence ao mesmo semiespaço determinado pelo plano suporte de qualquer uma de suas faces, e diz-se côncava quando não pertence inteiramente a, pelo menos, um dos semiespaços determinados pelo suporte de uma de suas faces. Com isso, definiu poliedro como um conjunto de pontos do espaço limitado por uma superfície poliédrica.

Como mostra a figura 14, enuncia a relação de Euler a partir de um teorema e, na sequência, um teorema para poliedros regulares: “[...] o número de lados de uma face de um poliedro regular não pode superar cinco” (BEZZERRA, 1960, p.372), com propósito de associar polígonos regulares à formação de superfícies poliédricas convexas de poliedros, apresentando a demonstração.

Figura 14 – Relação de Euler e poliedros regulares – Livro 2



Fonte: Bezerra (1960, p. 372-273)

A partir da relação de Euler enunciou outro teorema, “[...] Só existem cinco poliedros regulares” (BEZZERRA, 1960, p.374), ou seja, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, apresentando a demonstração.

Figura 15 – Cinco poliedros regulares – Livro 2

POLIEDROS REGULARES	n	F	V	A	p
Tetraedro.....	3	4	4	6	3
Hexaedro.....	4	6	8	12	3
Octaedro.....	3	8	6	12	4
Dodecaedro.....	5	12	20	30	3
Icosaedro.....	3	20	12	30	5

Fonte: Bezerra (1960, p. 374-275)

Como vemos na figura 15 o autor utiliza a relação de Euler para apresentar o número de faces (F), o número de vértices (V), o número de arestas (A) além do número de lados do polígono que limita cada face (n) e do número de arestas (p) que formam cada um de seus ângulos sólidos, para cada um dos poliedros regulares. Não encontramos citações do autor a respeito de poliedros de Platão.

Figura 16 – Volume do paralelepípedo e do cubo – Livro 2

14. Volume de um paralelepípedo retângulo. Partindo-se do teorema seguinte. *Dois paralelepípedos retângulos de mesma base estão entre si como as suas alturas*, e, mediante certas considerações, chega-se a conclusão de que o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto da medida de suas três dimensões.

Consideraremos, todavia, para simplicidade, e de modo análogo ao que se procede modernamente com um grande número de conceitos da Geometria Euclideana, que, *por definição*, o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto da medida de suas três dimensões.

Assim, sendo a , b , c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume será:

$$V = abc$$

Geometria – Primeiro ano 393

E sendo a e b as medidas dos lados da base, então

$$V = S_b h$$

isto é, o volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área da base pela altura.

15. Volume do cubo. Como o cubo é um paralelepípedo de dimensões iguais, temos:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

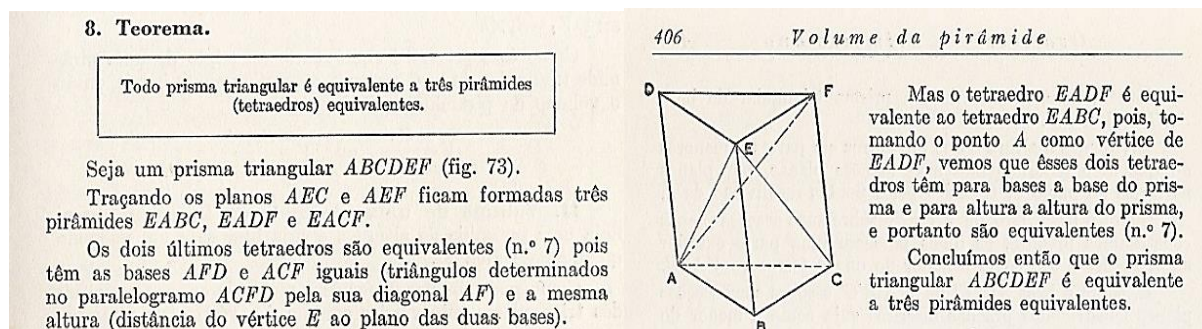
E dizemos que o volume de um cubo é o cubo de sua aresta.

Fonte: Bezerra, (1960, p.392-393)

Para o volume do paralelepípedo retângulo (figura 16) o autor enunciou o teorema “O volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto da medida de suas três dimensões” (BEZZERRA, 1960, p.392). Não explicita a utilização do Princípio de Cavalieri para deduzir a fórmula para o cálculo da medida de volume quando se refere ao “produto da medida de suas três dimensões”: $V = a \cdot b \cdot c$. Em seguida considerou a e b como sendo as medidas dos lados da base para apresentar outra fórmula, $V = S_b \cdot h$, onde S_b representa a medida da área da base

e h a medida da altura. O autor considerou um paralelepípedo com três medidas iguais para definir a medida do volume do cubo, “Como o cubo é um paralelepípedo de dimensões iguais, temos: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$ ”. (BEZERRA, 1960, p. 393).

Figura 17 – Trissecção do prisma em três pirâmides – Livro 2

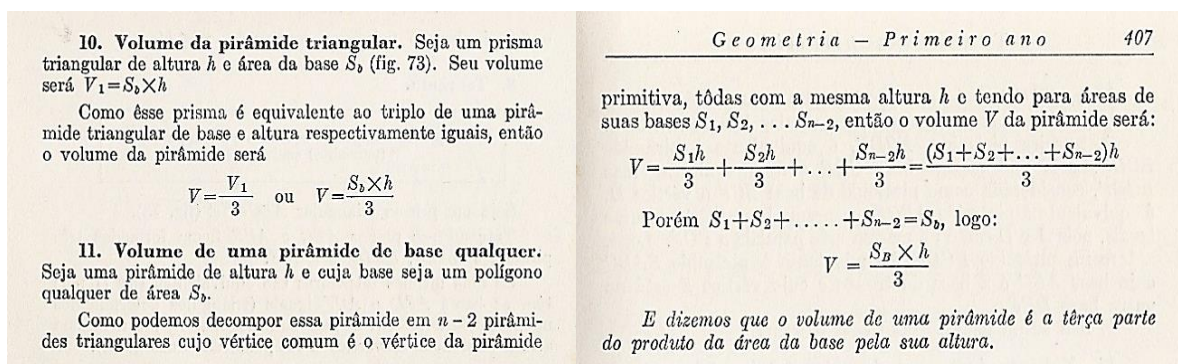


Fonte: Bezerra (1960, p. 405-406)

Na figura 17, o autor apresenta a medida do volume de uma pirâmide pelo teorema, “Todo prisma triangular é equivalente a três pirâmides (tetraedros) equivalentes”. (BEZERRA, 1960, p.405), apresentando, em seguida, sua demonstração com a divisão do prisma em três pirâmides equivalentes.

Para uma pirâmide de base qualquer, o autor apresenta, na figura 18, a medida de seu volume enunciando um teorema e o demonstrando na sequência. Não trata da medida do volume de um tetraedro regular, nem dos poliedros: octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Figura 18 – Volume da pirâmide – Livro 2



Fonte: Bezerra (1960, p. 405-406)

Notamos que neste período (1957-1960) os autores apresentaram em seus livros abordagens equivalentes para o estudo dos poliedros convexos. A medida de volume de poliedros convexos foi apresentada, em alguns casos a partir da contagem e, em outras, a partir de teoremas e demonstrações. Não encontramos em nenhum deles qualquer fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro e do dodecaedro.

Em seguida apresentamos a análise de um livro didático da década de (1960-1970), Ary Quintella (1963) na 19ª edição de seu livro, destinado ao aluno. Como mostra a figura 19, o autor define poliedros e seus elementos. A seguir os classifica em convexos ou não convexos e regulares ou não. Para ele, um poliedro é regular quando todas as faces são polígonos regulares. Em seguida apresenta a relação de Euler, como um teorema válido apenas para poliedros convexos.

Figura 19 – Definição de poliedro – Livro 3

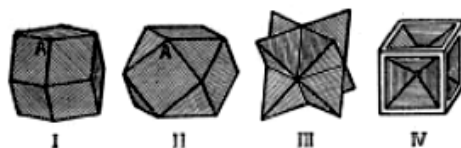
1. Definições. Poliedro é o corpo limitado por superfícies planas (fig. 51).

As porções de plano que limitam o poliedro chamam-se *faces*.

As intersecções de duas faces chamam-se *arestas*. Cada aresta é, pois, comum a duas faces. As arestas do poliedro são lados dos polígonos das faces.

Os vértices dos polígonos denominam-se *vértices* do poliedro (A, fig. 51); um vértice é comum a várias faces. Na fig. 51, I, o vértice A é comum a três faces, em II é comum a quatro. Assim, em cada vértice fica formado um ângulo sólido.

Diagonal é o segmento que une dois vértices não situados na mesma face. Na fig. 56 o segmento BH é uma diagonal do poliedro.



Fonte: Quintella (1963, p.123)

Utilizou então a relação de Euler (figura 20) para enunciar o teorema: “existe apenas cinco poliedros regulares convexos” (QUINTELLA 1963, p.127).

Figura 20 – Demonstração do teorema fundamental – Livro 3

II) POLIEDROS REGULARES

4. Teorema fundamental.

Existem apenas cinco poliedros regulares convexos

Demonstração.

De acordo com o teorema de Euler, temos:

$$V + F = A + 2 \quad \dots \quad (1)$$

Se o poliedro é regular, todas as faces são iguais e, portanto, todas terão o mesmo número n de lados. Resulta que o número total de lados das faces é nF e, como dois lados se confundem numa única aresta, temos a equação:

$$nF = 2A \quad \therefore \quad A = \frac{nF}{2} \quad (2)$$

Analogamente, se o número de lados que concorrem em cada vértice for p o número total desses lados será pV e, considerando que cada dois lados se confundem em uma aresta, conclui-se:

$$pV = 2A \quad \therefore \quad pV = nF \quad \text{e} \quad V = \frac{nF}{p} \quad (3)$$

Substituindo os valores de V e A na equação (1), vem:

$$\frac{nF}{p} + F = \frac{nF}{2} + 2$$

onde

$$(2n + 2p - np) F = 4p$$

$$F = \frac{4p}{2n + (2 - n)p} \quad (4)$$

Como $p \geq 3$, o numerador da última fração é positivo, e devemos ter também:

$$2n + (2 - n)p > 0$$

onde

$$(2 - n)p > -2n$$

ou, multiplicando os dois membros por -1 :

$$(n - 2)p < 2n \quad \therefore \quad p < \frac{2n}{n - 2} \quad (5)$$

e, por ser $p \geq 3$:

$$\frac{2n}{n - 2} > 3$$

resultando:

$$2n > 3n - 6 \quad \text{e} \quad n < 6.$$

Dai, as três hipóteses: $n = 3, n = 4$ e $n = 5$.

Primeira hipótese: $n = 3$.

Em virtude da condição (5), resulta:

$$3 \leq p < 6$$

Existem, pois, três poliedros regulares de faces triangulares que correspondem aos valores:

$$p = 3, p = 4 \text{ e } p = 5.$$

Segunda hipótese: $n = 4$.

Temos, então (condição 5):

$$3 \leq p < 4$$

e o único valor de p é 3.

Existe apenas um poliedro regular de faces quadrangulares.

Terceira hipótese: $n = 5$.

Teremos:

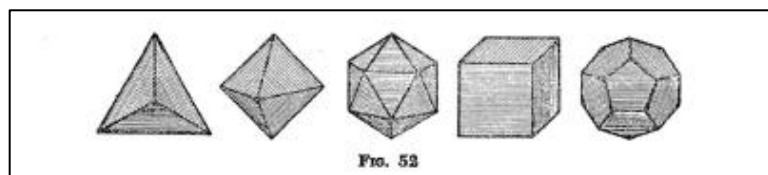
$$3 \leq p < \frac{10}{3}$$

Logo, o único valor de p é 3 e existe apenas um poliedro regular de faces pentagonais.

Fonte: Quintella (1963, p.124-125)

Com esta demonstração, na figura 21, o autor mostrou que apenas poliedros formados com triângulo equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares podem formar os cinco poliedros regulares convexos. O autor não apresentou referências sobre poliedros de Platão.

Figura 21 – Cinco poliedros regulares – Livro 3



Fonte: Quintella (1963, p.129)

Na figura 22, apresenta a fórmula para o cálculo da medida do volume de um paralelepípedo retângulo, como sendo o produto da medida de suas três dimensões e apresenta duas consequências. Na primeira, substitui o produto das duas primeiras dimensões pela medida da área da base e na segunda, considera as três dimensões iguais para apresentar uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um cubo. Para o autor dimensão refere-se a um número e portanto deve ser uma medida, no caso, de comprimento.

Figura 22 – volume de paralelepípedo e do cubo – Livro 3

A medida do volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto das medidas de suas três dimensões.

Abreviadamente escreve-se:

$$V = abc$$

e diz-se:

O volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto das três dimensões.

Conseqüências.

1.ª) Como o produto das duas primeiras dimensões é a área da base e a terceira dimensão é a altura, o volume pode ser, também, expresso pela fórmula:

$$V = Bh$$

onde B representa a área da base e h , a altura, do paralelepípedo.

2.ª) O cubo é um paralelepípedo retângulo de dimensões iguais; temos, então:

$$V = a^3$$

Fonte: Quintella (1963, p.142-143)

Para introduzir a medida de volume de pirâmides, o autor apresentou a trissecção do prisma de base triangular. Na figura 23, o autor mostra como foram realizados os cortes no prisma para a obtenção de três pirâmides equivalentes. Em seguida apresentou a medida de volume de uma pirâmide.

Figura 23 – Trissecção do prisma – Livro 3

Seja o prisma $A B C D E F$ (fig. 70).
 Considerando o plano das concorrentes AE e AF , o prisma fica decomposto em duas pirâmides: a primeira ($ADEF$), triangular e a segunda ($ABCFE$), quadrangular.
 Traçando BF , o plano das concorrentes BF e BA divide a última pirâmide nas duas triangulares, $ABCF$ e $ABFE$, que são eqüivalentes, por serem iguais os triângulos das bases e a altura comum (distância do ponto A ao plano $BCFE$).
 Da mesma forma, a primeira pirâmide ($ADEF$) é eqüivalente à segunda ($ABCF$) pois os triângulos DEF e ABC são iguais e a altura de ambas é a altura do prisma.
 Assim, as três pirâmides são eqüivalentes.

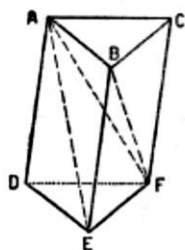


FIG. 70

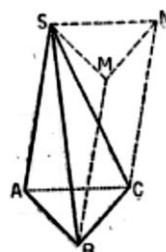


FIG. 71

Fonte: Quintella (1963, p.158)

O autor utilizou a trissecção do prisma em pirâmides equivalentes (figura 24) para deduzir a medida de volume de uma pirâmide.

Figura 24 – Volume de uma pirâmide – Livro 3

b) *Cálculo do volume da pirâmide.*

O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Demonstração.

1.º) Consideremos uma pirâmide triangular $SABC$ (fig. 71).

De acôrdo com o segundo teorema, o volume dessa pirâmide será um terço do volume do prisma $ABCMNS$, da mesma altura, pois o mesmo prisma pode ser decomposto em três pirâmides triangulares eqüivalentes, sendo uma delas a pirâmide dada $SABC$.

Representando por V' o volume do prisma e por V , o da pirâmide, teremos:

$$V = \frac{V'}{3}$$

Substituindo o volume V' do prisma pelo valor conhecido (Bh) , conclui-se:

$$V = \frac{Bh}{3}$$

Fonte: Quintella (1963, p.158)

Como já considerou B como a medida da área da base e h como a medida da altura, concluiu que a medida do volume de uma pirâmide pode ser calculada pela fórmula $V = \frac{B \cdot h}{3}$. Em seguida apresentou a medida do volume para uma pirâmide qualquer.

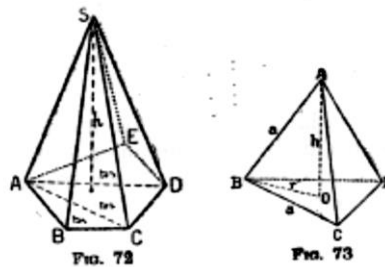
Observamos que o autor apresentou na figura 25, uma pirâmide de base pentagonal e dividiu sua base em três triângulos para deduzir que a soma dos volumes das pirâmides triangulares equivale à medida do volume de uma pirâmide qualquer.

O autor a partir da representação de um tetraedro regular anteriormente apresentado e da fórmula $V = \frac{B \cdot h}{3}$ deduziu a fórmula para calcular a medida de seu volume: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Figura 25 – Volume de uma pirâmide qualquer – Livro 3

2.º) Consideremos uma pirâmide qualquer $S A B C D E \dots$ (fig. 72).

Tracemos, do vértice A , as diagonais do polígono da base. Estas diagonais e o vértice da pirâmide determinam planos que dividem a pirâmide dada em pirâmides triangulares.



Assim, se representarmos por $v_1, v_2, v_3 \dots$ os volumes e por $s_1, s_2, s_3 \dots$ as áreas das bases das pirâmides triangulares, teremos, de acordo com a primeira parte, por ser a altura h comum a todas as pirâmides:

$$v_1 = \frac{s_1 h}{3}, v_2 = \frac{s_2 h}{3}, v_3 = \frac{s_3 h}{3}, \dots$$

Somando membro a membro, conclui-se:

$$V = \frac{h}{3} (s_1 + s_2 + \dots).$$

Fonte: Quintella (1963, p.159)

Em seguida, como mostra a figura 26, o autor considerou o octaedro regular formado por duas pirâmides quadrangulares $SABCD$ e $S'ABCD$ de base comum, o quadrado $ABCD$ de lado medindo a e as alturas das pirâmides medindo SO e $S'O$ para determinar uma fórmula para o cálculo da medida de seu volume.

Figura 26 – Octaedro regular – Livro 3

2.ª) **Volume do octaedro regular.** O octaedro regular é a soma de duas pirâmides quadrangulares $SABCD$ e $S'ABCD$ (fig. 74). A base, comum às duas pirâmides, é um quadrado de lado a e as alturas são, SO e $S'O$. Logo, o volume será a soma:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot SO + \frac{1}{3} a^2 \cdot SO' = \frac{1}{3} a^2 \cdot SS'.$$

SS' é igual à diagonal AC do quadrado de lado a ; logo temos:

$$SS' = a\sqrt{2}$$

e, portanto:

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\sqrt{2}$$

ou

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

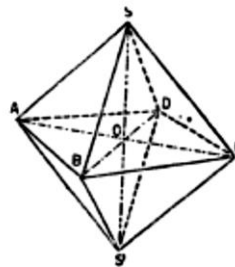


Fig. 74

Fonte: Quintella, (1963, p. 161).

Notamos que os livros publicados no período (1957-1963) apresentaram abordagens equivalentes e, embora, o livro de Quintella tenha sido publicado em 1963, durante o movimento da Matemática Moderna, não observamos mudança significativa sob influência do movimento para este autor.

Boulos e Watanabe (1976), no volume 2, apresentaram uma ordem inversa para o estudo de sólidos, primeiro abordaram prismas, depois pirâmide, encerrando com a definição de poliedro convexo, poliedro regular e a aplicação da relação de Euler. Os autores apresentaram o princípio da Cavalieri, a trissecção do prisma e, a medida do volume do tetraedro regular e do octaedro regular por meio de exercícios resolvidos.

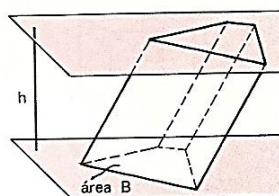
Figura 27 – Volume do prisma – Livro 4

Volume

Imagine um recipiente como o desenhado ao lado, cuja forma é a de um prisma. Seja h sua altura, e B a área de base.

Se você quiser enchê-lo com água, uma questão natural é saber o quanto de água você necessita. Intuitivamente, este tanto de água que vai encher o recipiente todo é o seu volume.

Veremos na seção 16 que, partindo de postulados a serem dados, pode-se chegar à conclusão de que o volume em questão é $B \cdot h$.



Em geral:

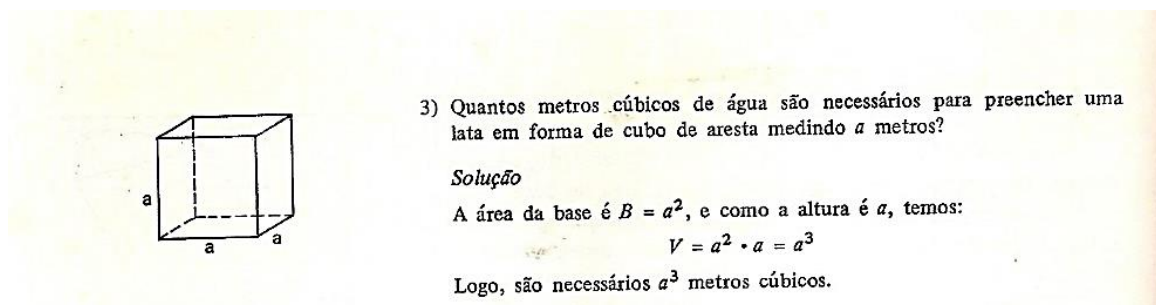
O volume de um prisma de área de base B e altura h é

$$V = B \cdot h$$

Fonte: Boulos e Watanabe (1976, p. 103)

Na figura 27, os autores introduziram medida de volume de um prisma qualquer a partir de um problema resolvido em que o consideram como um recipiente que tem capacidade, ou seja, não é um sólido. No exemplo, a capacidade se confunde com volume e uma fórmula para o cálculo da medida de seu volume é apresentada. A seguir da mesma forma apresentam (figura 28) a medida do volume de um cubo.

Figura 28 – Volume do cubo – Livro 4



Fonte: Boulos e Watanabe (1976, p. 105)

Ao abordar o conteúdo sobre pirâmide os autores apresentam a fórmula e justificam que, mais à frente apresenta sua dedução (figura 29).

Figura 29 – Volume de uma pirâmide qualquer – Livro 4

Volume

Do mesmo modo que fizemos no caso do prisma, vamos dar a fórmula do volume de uma pirâmide, deixando para depois as considerações de como se chega a essa fórmula.

O volume de uma pirâmide de área de base B e altura h é

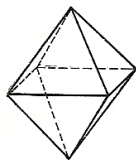
$$V = \frac{1}{3} Bh$$

Fonte: Boulos e Watanabe (1976, p.116-117)

Os autores definem o tetraedro da seguinte maneira: *chama-se tetraedro a uma pirâmide triangular. Um tetraedro é regular se todas as suas arestas são congruentes.* (BOULOS E WATANABE 1976, p.110). Apresentam a fórmula para o volume de um tetraedro a partir de um exercício resolvido e o octaedro regular (figura 30) como uma composição de duas pirâmides de base quadrada congruentes e, com isso deduzem a fórmula para o cálculo da medida de seu volume.

Figura 30 – Volume do octaedro regular – Livro 4

Exercícios resolvidos



- 1) Ache a área da superfície e o volume de um octaedro regular de aresta medindo b .

Solução

A área é 8 vezes a área de um triângulo equilátero de lado medindo b :

$$A = 8 \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = 2b^2 \sqrt{3}$$

Quanto ao volume, é o dobro do volume de uma pirâmide quadrangular regular (ver fig. ao lado):

$$V = 2 \cdot \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

Mas, aplicando o Teorema de Pitágoras ao $\triangle VOA$, temos:

$$h = \sqrt{a^2 - m^2} \quad (2)$$

Por outro lado, no $\triangle OMA$ (ver fig. ao lado), aplicando o Teorema de Pitágoras, vem:

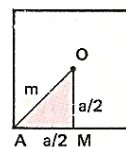
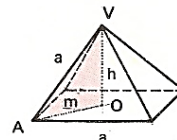
$$m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

Substituindo em (2),

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Substituindo em (1):

$$V = 2 \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$



Fonte: Boulos e Watanabe (1976. P. 160-161)

Não encontramos procedimentos para o cálculo da medida do volume do dodecaedro ou do icosaedro regulares, mas para justificar as fórmulas utilizadas anteriormente (figura 31) os autores apresentam o Princípio de Cavalieri.

Figura 31 – Princípio de Cavalieri – Livro 4

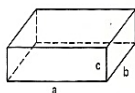
6. Volumes. Princípio de Cavalieri

Passaremos agora a justificar algumas fórmulas de volume já dadas. Para isso vamos admitir inicialmente o seguinte postulado:

PV1 O volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a , b , c é

$$V = abc$$

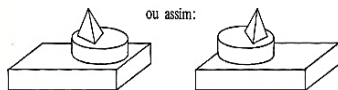
(isto é, área de uma base pela altura correspondente)



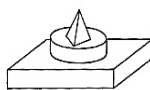
A seguir apresentaremos um outro postulado, conhecido como *Princípio de Cavalieri*. Para entendê-lo, considere três sólidos como se mostra na figura:



Empilhando-os assim:

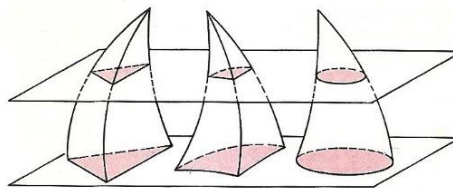


ou assim:



voce obtém 3 sólidos de mesmo volume. É claro: o volume de cada sólido é a soma dos volumes de cada um deles.

O mesmo princípio se aplica mais geralmente. Suponha dois sólidos com "bases" num plano α , tais que todo plano $\beta \parallel \alpha$ que encontra um sólido também encontra o outro. Suponha também que as intersecções dos sólidos com β têm a mesma área. Então os sólidos têm mesmo volume (este é o Princípio de Cavalieri). Observe que a argumentação acima não prova o princípio, em absoluto, mas nos mostra que ele é plausível.



PV2
(Princípio de Cavalieri)

Dados dois sólidos e um plano, tais que todo plano paralelo ao dado, interceptando um sólido também intercepta o outro, e estas intersecções têm mesma área, então os sólidos têm mesmo volume.

Além desses, vamos precisar de um outro postulado:

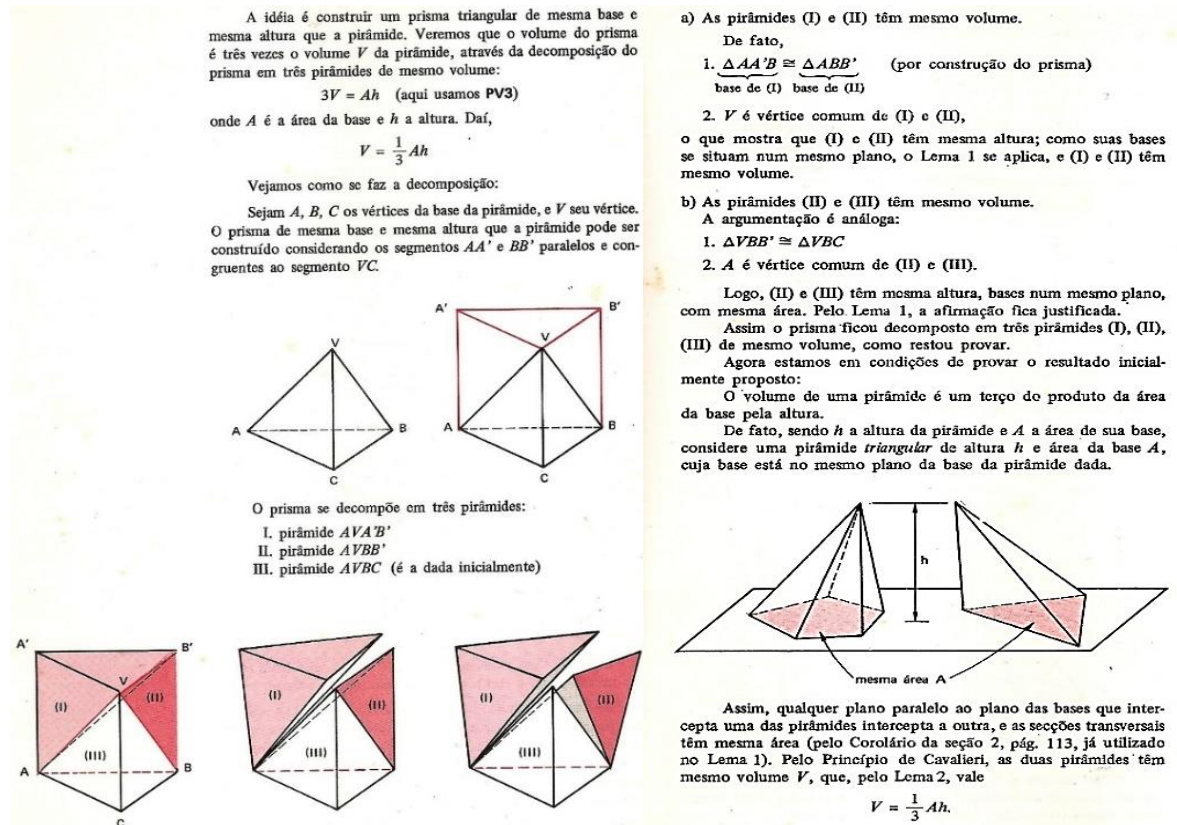
PV3

Se dois sólidos têm intersecção de volume nulo, então o volume da reunião dos sólidos é a soma dos volumes dos dois sólidos.

Fonte: Boulos e Watanabe (1976, p. 145)

O princípio de Cavalieri pode ser interpretado como reunião infinita de áreas consideradas como base que compõem o volume de um poliedro. A seguir (figura 32) os autores abordaram também a trissecção de um prisma triangular.

Figura 32 – Trissecção do prisma e volume de pirâmide – Livro 4



Fonte: Boulos e Watanabe (1976, p. 148-149)

Na figura 32, a partir da trissecção do prisma os autores deduziram a fórmula para o cálculo da medida de volume de uma pirâmide com base triangular e apresentaram a fórmula da medida de volume para uma pirâmide qualquer. Em seguida definiram: poliedro, poliedro regular, relação de Euler e os cinco poliedros regulares convexos.

Definiram poliedros regulares (figura 33) e a partir de um teorema apresentam então os cinco poliedros regulares convexos, identificando o polígono que caracteriza cada face, juntamente com a quantidade de faces, vértices e arestas que cada poliedro possui.

Não encontramos referências aos poliedros de Platão e, nem tão pouco, a respeito da medida de volume do dodecaedro ou do icosaedro regulares.

Figura 33 – Poliedros regulares – Livro 4

Poliedro regular

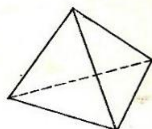
Um poliedro convexo é *regular* se

- 1º) suas faces são polígonos regulares, congruentes entre si, e
- 2º) seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

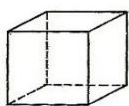
Desde aproximadamente 388 a.C. já se conhecia o seguinte:

Teorema

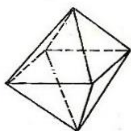
Se $\mathcal{P}$ é um poliedro convexo regular, então ocorre uma das possibilidades:



- 1ª) $\mathcal{P}$ é um tetraedro regular.
 $F = 4$ (triângulos equiláteros congruentes)
 $V = 4$
 $A = 6$



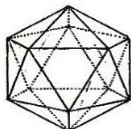
- 2ª) $\mathcal{P}$ é um cubo.
 $F = 6$ (quadrados congruentes)
 $V = 8$
 $A = 12$



- 3ª) $\mathcal{P}$ é um octaedro regular.
 $F = 8$ (triângulos equiláteros congruentes)
 $V = 6$
 $A = 12$



- 4ª) $\mathcal{P}$ é um dodecaedro regular.
 $F = 12$ (pentágonos regulares congruentes)
 $V = 20$
 $A = 30$



- 5ª) $\mathcal{P}$ é um icosaedro regular.
 $F = 20$ (triângulos equiláteros congruentes)
 $V = 12$
 $A = 30$

Nota: Portanto as faces de um poliedro convexo regular só podem ser triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares e existem apenas 5 tipos de poliedros convexos regulares.

Eles foram chamados, no decorrer dos séculos, de “corpos cósmicos” ou “sólidos platônicos”, pois Platão os usava para explicar fenômenos científicos.

Fonte: Boulos e Watanabe (1976, p. 159-160)

Observamos nos autores a preocupação em apresentar definições com a utilização da linguagem da teoria dos conjuntos, com representações dos poliedros que satisfazem a relação de Euler, sem demonstrações, mas preocupando-se com a compreensão dos conteúdos abordados por meio de exemplos.

O livro didático Matemática segundo grau volume 2 de Setani (1984, p. 3) destinado ao aluno, apresenta algumas observações a respeito do capítulo de geometria espacial:

Devido à aridez que reveste o capítulo de Geometria Espacial e às dificuldades inerentes a tal assunto, decidimos abordá-lo de forma menos formal possível. Para isso, em algumas ocasiões, a linha de demonstração de teoremas é colocada de maneira totalmente intuitiva, acompanhada de figuras.

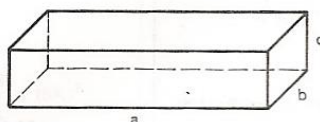
Observamos a preocupação em apresentar a teoria em “doses mínimas” (SETANI, 1984, p.3) apresentando uma redução nas demonstrações por julgar que os teoremas apresentados são de acesso fácil, além de exercícios de fixação com problemas que considerou práticos e de interesse do aluno.

O autor apresentou medida do volume de um paralelepípedo retângulo indicando diretamente a fórmula (figura 34) e a medida de volume de um cubo como consequência.

Figura 34 – Volume do paralelepípedo – Livro 5

d) O volume do paralelepípedo (V)
 Uma idéia intuitiva de volume de um sólido, em particular de um paralelepípedo, é a quantidade de espaço por ele ocupado.
 Quando se quer medir o “volume” de um sólido, compara-se esse sólido com uma unidade e, desta comparação, resulta um número que será a medida do volume.
 A unidade de volume é um cubo de aresta medindo uma unidade de comprimento. O volume do cubo unitário é 1, por definição.
 Assim, quando dizemos que um sólido S tem um volume s , queremos dizer que o sólido S contém s vezes o cubo unitário.

Demonstra-se que o volume do paralelepípedo retângulo de dimensões a , b , c é abc .



$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = (a \cdot b) c$$

$$V = (\text{Área da base}) \cdot (\text{Altura})$$

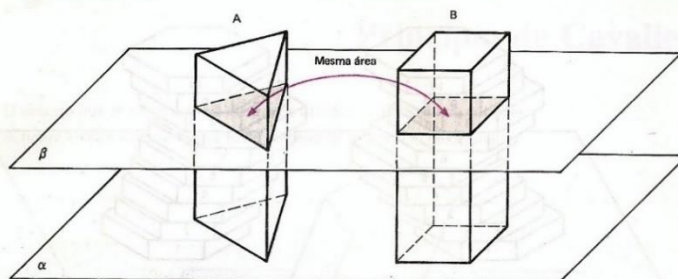
Fonte: Setani (1984, p.233)

Observamos que, para o autor, medir volume é comparar o que se quer medir com o volume de um cubo de aresta unitária sendo o resultado dessa comparação a medida do volume. No entanto, no final afirma que o volume é o produto das dimensões do paralelepípedo, ou seja, dimensão é medida de comprimento e, ainda, apresenta o volume como multiplicação das palavras “área da base” por “altura”.

Figura 35 – Princípio de Cavalieri – Livro 5

Princípio de Cavalieri

Dados dois sólidos, A e B , e um plano, suponhamos que todo plano paralelo ao plano dado, ao interceptar um dos sólidos, intercepte também o outro. Se resultarem secções transversais de mesma área, então os sólidos A e B têm o mesmo volume.



Fonte: Setani (1984, p.238)

Com a apresentação do princípio de Cavalieri (figura 35), o autor generaliza que sólidos que possuem área da base equivalentes e mesma altura têm mesmo volume. A partir do Princípio de Cavalieri compara um paralelepípedo com um prisma reto e conclui que o volume de um prisma é igual ao volume de um paralelepípedo retângulo.

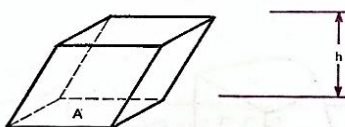
Na figura 36, o autor apresentou a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo como sendo a medida da área da base pela medida da altura, utilizando a noção intuitiva do princípio de Cavalieri, sem preocupar-se com demonstração.

Figura 36 - volume do paralelepípedo retângulo – Livro 5

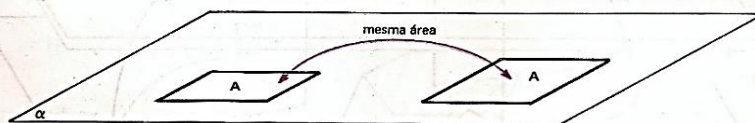
Teorema

O volume de um paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela altura.

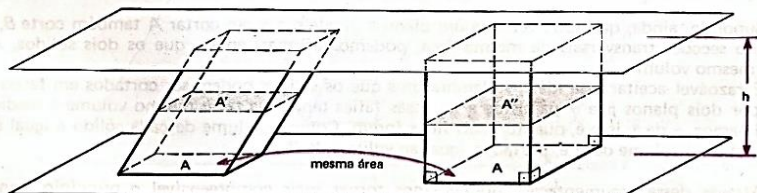
Seja o paralelepípedo de altura h e área da base A .



Num plano α , colocamos o paralelogramo da base desse paralelepípedo e também um retângulo de mesma área que o paralelogramo:



Consideremos agora o paralelepípedo dado e um prisma reto de altura h , tendo como base o retângulo:



Qualquer plano transversal produzirá figuras equivalentes às bases, ou seja, de áreas iguais às das bases:

$$\left. \begin{array}{l} A = A' \\ A = A'' \end{array} \right\} \Rightarrow A' = A''$$

Portanto, pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume.

$$\text{Volume}_{\text{paralelepípedo}} = \text{Volume}_{\text{paralelepípedo retângulo}}$$

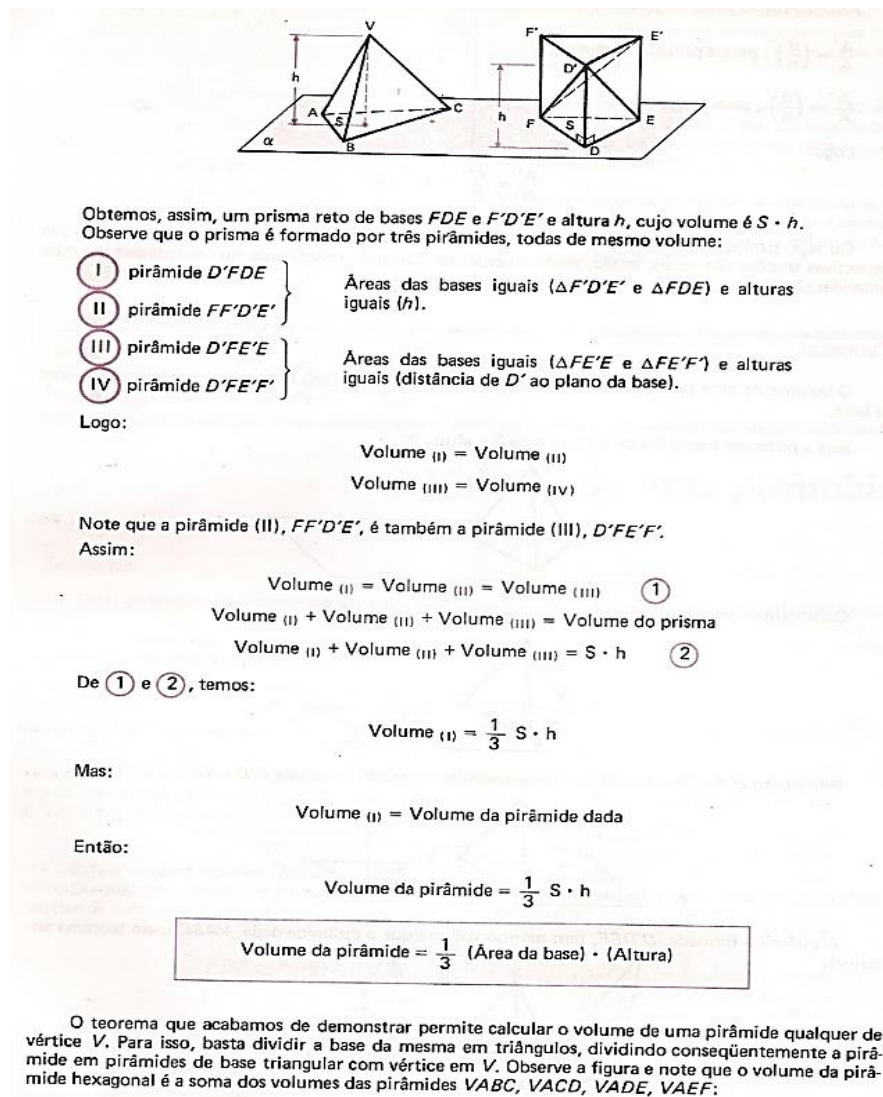
$$\text{Volume}_{\text{paralelepípedo}} = A \cdot h \quad (\text{página 233})$$

$$\text{Volume}_{\text{paralelepípedo}} = (\text{Área da base}) \cdot (\text{Altura})$$

Fonte: Setani (1984, p.238-239)

Na sequência (figura 37) apresenta a fórmula para o cálculo da medida do volume de uma pirâmide pelo teorema: “O volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da altura pela área da base.” (SETANI, 1986, p.261).

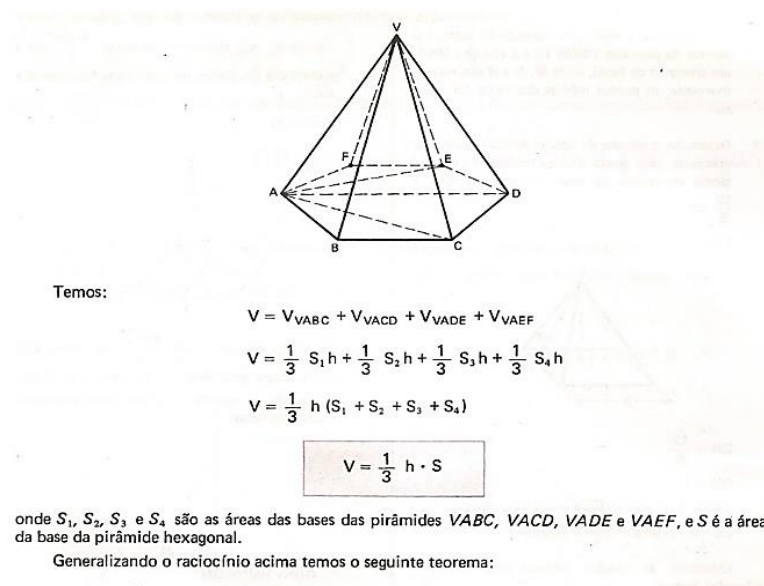
Figura 37 – Trisseccão do prisma de base triangular – Livro 5



Fonte: Setani (1984, p.262)

Acrescenta que “uma pirâmide triangular regular, em que as seis arestas são congruentes, denomina-se tetraedro regular.” (SETANI 1984, p.251).

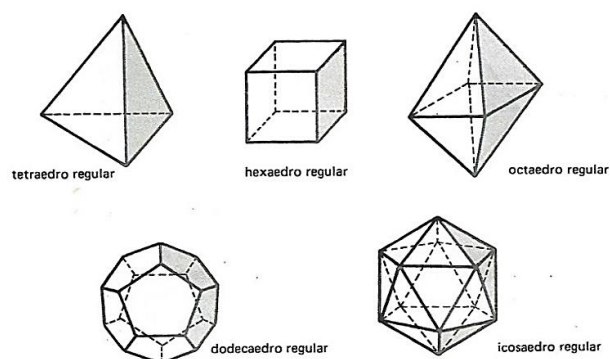
O autor apresenta também a medida do volume de uma pirâmide qualquer (figura 38) relacionando a divisão do polígono da base em triângulos, a partir de um de seus vértices. Não encontramos referências a respeito da definição de poliedros, poliedros regulares, poliedros de Platão, relação de Euler nem tão pouco medida do volume do octaedro, do dodecaedro ou do icosaedro regulares.

Figura 38 – Volume de uma pirâmide qualquer – Livro 5

Fonte: Setani (1984, p.263)

Nery e Jakubovic (1988), no livro “Curso de Matemática” volume 2, destinado ao aluno, destacaram como principais características de sua obra a motivação, a simplicidade e uma metodologia onde o aprendizado se dá ao longo do processo de forma equilibrada. Os autores iniciaram o estudo de sólidos geométricos definindo poliedros, seus elementos e superfície poliédrica. Para eles um poliedro é constituído por dois tipos de pontos: os pontos que estão no interior do sólido e os pontos que estão na superfície poliédrica. Apresentaram a definição de poliedros convexos e poliedros regulares, para então apresentarem a definição de poliedros de Platão e os apresentam na figura 39.

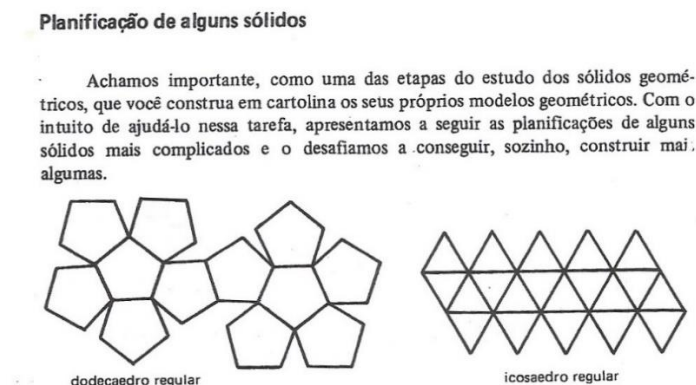
Chamamos de poliedro de Platão aos poliedros que têm todas as faces do mesmo tipo, e ainda, o mesmo número de arestas em cada vértice. Os poliedros de Platão não precisam ter como faces polígono regulares. Os poliedros de Platão que têm como faces polígonos regulares são chamados de poliedros regulares. A dupla exigência, de que o poliedro seja de Platão e tenha como faces polígonos regulares, limita o número de poliedros a cinco: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. (NERY e JAKUBOVIC 1988, p.253).

Figura 39 – Os cinco poliedros regulares convexos – Livro 6

Fonte: Nery e Jakubovic (1988, p.254)

Os autores consideraram importante, como uma das etapas do estudo, a construção em cartolina de modelos geométricos (figura 40) e apresentaram a planificação das superfícies poliédricas do dodecaedro e do icosaedro.

Figura 40 – Planificação das superfícies do dodecaedro e do icosaedro regulares – Livro 6



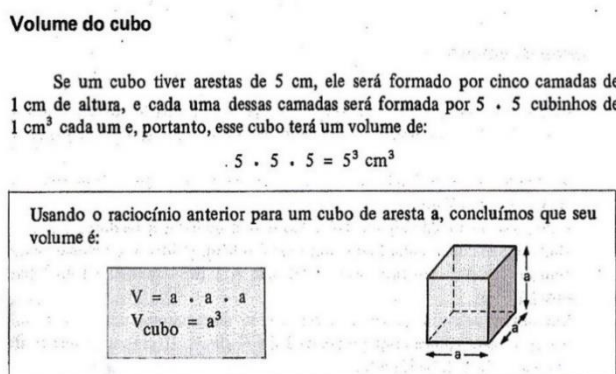
Fonte: Nery e Jakubovic (1988, p.254)

Os autores apresentaram a planificação para salientar que a superfície poliédrica do dodecaedro regular e do icosaedro regular são formadas por polígonos regulares (na realidade superfícies poligonais regulares), no entanto apresentam “planificação de sólidos” o que não é possível por sua própria natureza.

Para a relação de Euler, os autores apresentaram o seguinte teorema: “Num poliedro convexo qualquer, sejam V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces, vale a relação: $V - A + F = 2$ ”. (NERY e JAKUBOVIC 1988, p.262), demonstrando em seguida.

No estudo de volumes, apresentaram diretamente a fórmula para o cálculo da medida do volume de um cubo (figura 41) a partir de um exemplo particular para depois deduzir a fórmula geral. No entanto, a fórmula é deduzida por contagem de cubinhos de 1cm^3 , como os autores anteriores, também consideram que o volume e a aresta são representados por números.

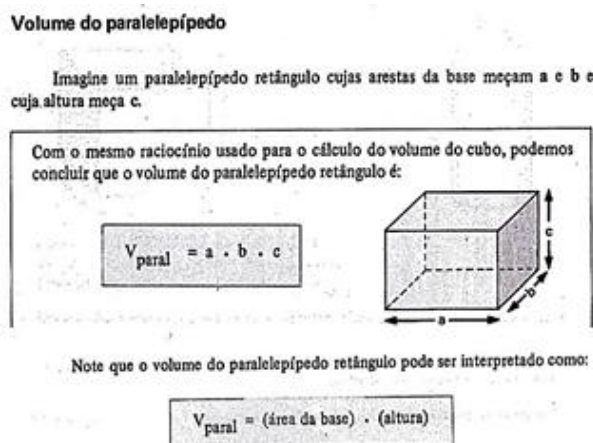
Figura 41 – Volume de um cubo – Livro 6



Fonte: Nery e Jakubovic (1988, p.266-267)

Em relação ao volume do paralelepípedo (figura 42), os autores consideraram a base retangular de medidas a e b e a altura medindo c concluindo com a fórmula. Em seguida, consideram que o produto das duas primeiras medidas representa a medida da área da base e apresentam então, o volume como sendo o produto da multiplicação das palavras “área da base” por “altura”. Como os autores conduzem ao raciocínio usado anteriormente, acreditamos que, embora explicitem a multiplicação de medidas, elas ainda estão relacionadas à contagem.

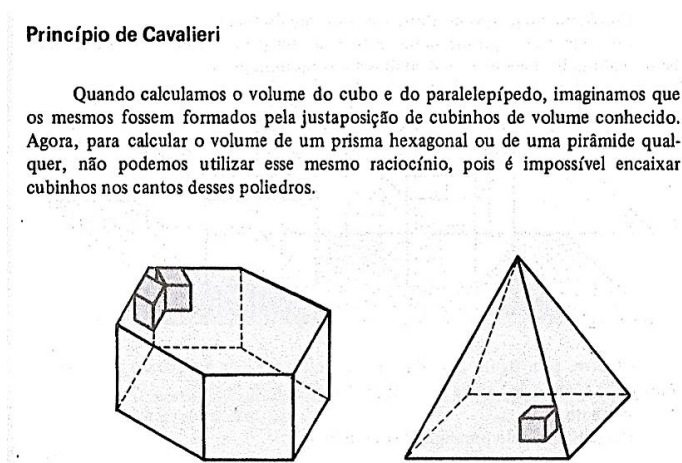
Figura 42 – Volume de um paralelepípedo – Livro 6



Fonte: Nery e Jakubovic (1988, p.266-267)

Antes de enunciar o Princípio de Cavalieri os autores se preocuparam em mostrar que não é possível encontrar a medida do volume de alguns sólidos por contagem de cubos de medida unitária (Figura 43) como feito até o momento.

Figura 43 – Introdução ao Princípio de Cavalieri – Livro 6



Fonte: Nery e Jakubovic (1988, p.269)

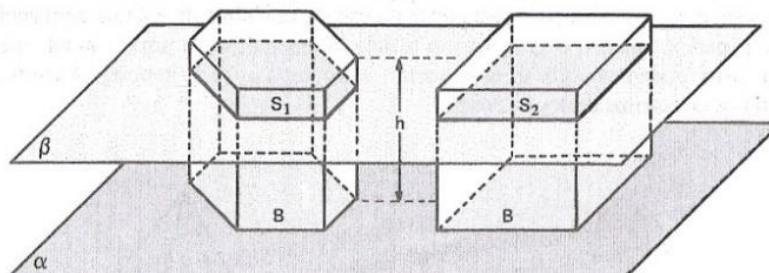
Apresentam por exemplos, mas não enunciam, o Princípio de Cavalieri (figura 44) e o utilizam para justificar a fórmula para a medida do volume do prisma, citado anteriormente, agora considerando que uma medida pode ser representada por um número real, isto é, como resultado de um processo de medição e não apenas a contagem.

Figura 44 – Princípio de Cavalieri – Livro 6

Cálculo do volume do prisma

Considere um prisma de altura h e com base de área B .

Colocamos esse prisma juntamente com um paralelepípedo retângulo, também de altura h e base de área B , ambos apoiados num plano α :



Observe, pela figura anterior, que qualquer que seja a distância do plano de corte (β) ao plano de apoio (α), tem-se: $S_1 = B$ e $S_2 = B$.

Portanto: $S_1 = S_2$.

Concluimos, pelo princípio de Cavalieri, que:

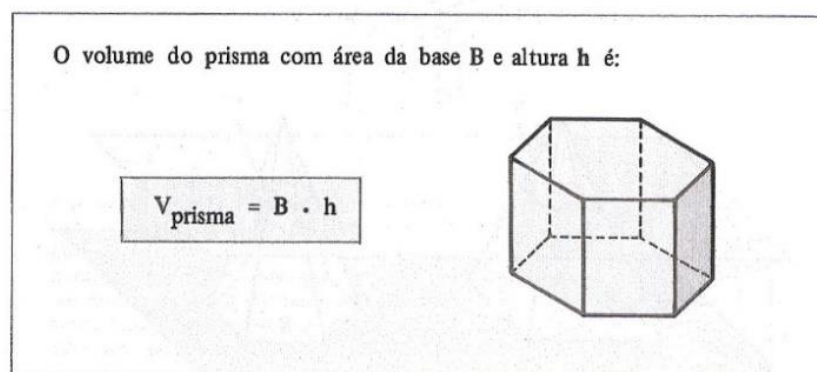
Volume do prisma = Volume do paralelepípedo

ou seja:

$$V_{\text{prisma}} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

ou ainda:

$$V_{\text{prisma}} = B \cdot h$$



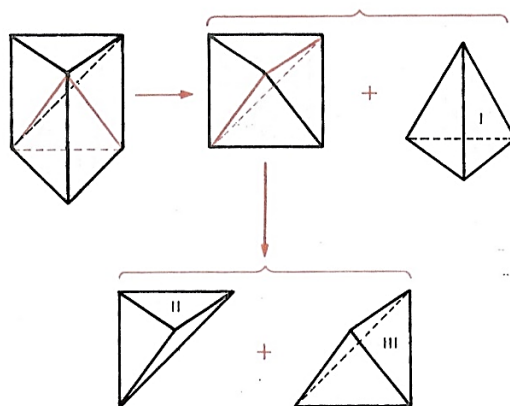
Fonte: Nery e Jakubovic (1988, p.270)

Na figura 45, os autores apresentaram a trisseção do prisma em três pirâmides equivalentes de mesma altura, destacando que a medida do volume do prisma é igual três vezes a medida do volume de uma das pirâmides.

Em seguida destacaram que qualquer pirâmide não triangular é formada pela justaposição de pirâmides triangulares de mesma altura, sem apresentar a demonstração. A medida do volume do octaedro regular foi abordada apenas como exercício proposto. Não encontramos referências para a medida do volume do dodecaedro e do icosaedro regulares.

Figura 45 – Trissecção de um prisma triangular – Livro 6

Agora vamos comparar os volumes de uma pirâmide e de um prisma. Observe que todo prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides equivalentes:



Então:

$$V_{\text{prisma}} = V_I + V_{II} + V_{III}$$

As pirâmides I e II têm mesma base e mesma altura, logo, como acabamos de ver, têm mesmo volume. O mesmo acontece com as pirâmides II e III. Sendo V o volume dessas pirâmides, temos:

$$V_{\text{prisma}} = V + V + V \text{ ou } V_{\text{prisma}} = 3V$$

logo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{prisma}}$$

Sendo B a área da base do prisma e h sua altura, concluímos que:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

Fonte: Nery e Jakubovic (1988, p.270)

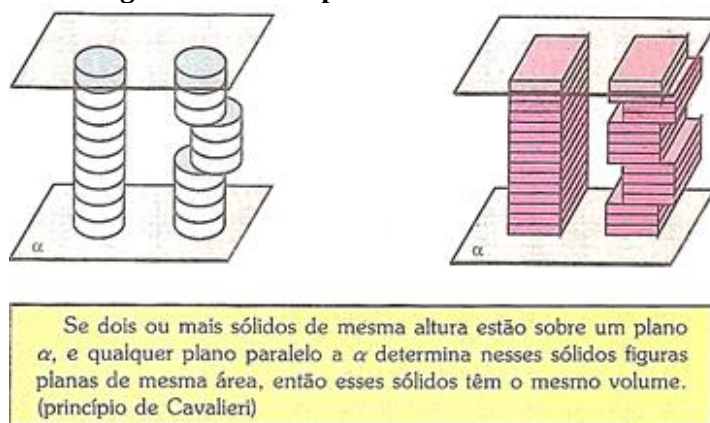
Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1994) em seu livro destinado ao professor, destacaram os seguintes comentários a respeito da proposta do livro:

Este volume único seleciona e organiza os conteúdos, garantindo um programa significativo. Um programa significativo é aquele em que os conteúdos contribuem para a formação geral do adolescente, desenvolvendo a observação e o raciocínio lógico, contribuindo para a aquisição da linguagem matemática, enfatizando o processo de construção dos conceitos, oferecendo ao professor essa opção. (BONGIOVANNI, VISSOTO e LAUREANO, 1994, p.3).

Nesta edição, os autores se preocuparam em apresentar os conteúdos em volume único e adequar às necessidades básicas dos professores porque a carga horária para o Ensino Médio foi reduzida, optando pelos conteúdos que consideraram adequados ao currículo.

Os autores apresentaram no estudo dos prismas a medida do volume de um bloco retangular como $V = A_{\text{base}} \cdot h$ onde, A_{base} representa a medida da área da base e h a medida da altura fazendo referência a contagem de cubos de aresta unitária como unidade de medida. A seguir (figura 46) apresentaram o princípio de Cavalieri.

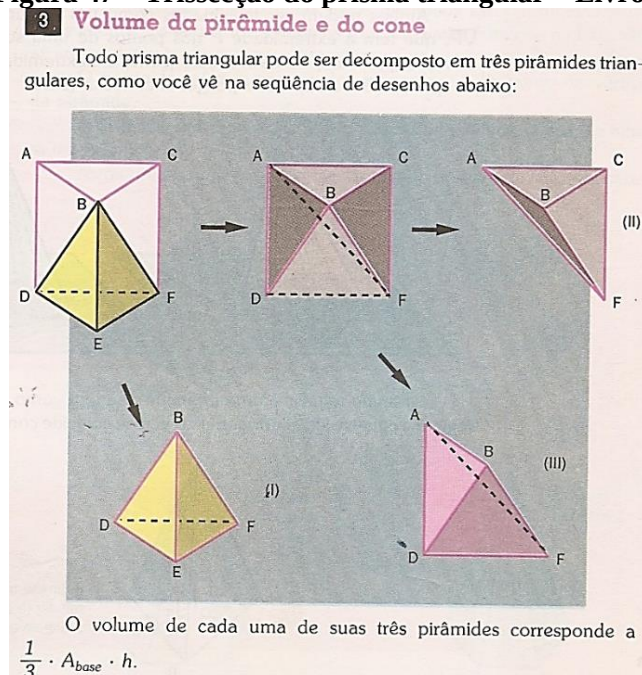
Figura 46 – Princípio de Cavalieri – Livro 7



Fonte: Bongiovanni, Vissoto e Laureano, (1994, p.240)

Em seguida apresentaram a trisseção do prisma de base triangular (figura 47) e a partir dela deduziram a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide de base triangular.

Figura 47 – Trisseção do prisma triangular – Livro 7



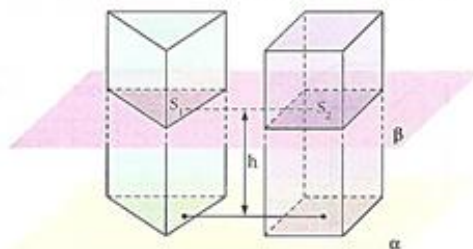
Fonte: Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1994, p.348)

Definiram tetraedro e propuseram um exercício para encontrar a medida de seu volume. Não apresentaram referências a respeito de poliedro, relação de Euler, poliedros de Platão, medida do volume do octaedro, do dodecaedro ou do icosaedro regulares.

Barreto Filho e Silva (1998) no volume 2, destinado ao professor apresentaram primeiro o estudo de prisma e pirâmide para depois abordaram a definição de poliedros. Apresentaram a fórmula da medida do volume de um prisma reto e de um paralelepípedo retângulo com sendo $V = A_b \cdot h$ onde A_b representa a medida da área da base e h representa a medida da altura. Na sequência apresentaram o princípio de Cavalieri (figura 48).

Figura 48 – Princípio de Cavalieri – Livro 8

Considere dois sólidos com bases num plano α . Se qualquer plano β , paralelo a α e secante aos sólidos, determinar nos mesmos superfícies S_1 e S_2 com áreas iguais, podemos afirmar, pelo Princípio de Cavalieri, que os dois sólidos têm o mesmo volume.



Logo, o volume do prisma triangular é igual ao volume do paralelepípedo retângulo, ou seja:

$$V_{\text{prisma triangular}} = V_{\text{paralelepípedo retângulo}}$$

Portanto:

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$$

Fonte: Barreto Filho e Silva, (1998, p. 211)

Os autores iniciaram a abordagem da medida de volume do prisma triangular e do paralelepípedo retângulo pelo princípio de Cavalieri e deduziram que o volume do prisma é o produto da medida da área da base pela medida da altura. Mais uma vez área e volume estão associadas a números.

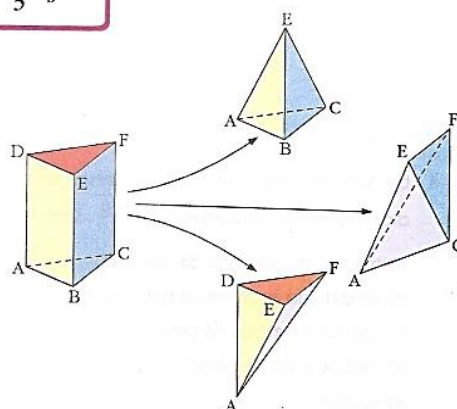
Figura 49 – Trissecção do prisma triangular e volume de pirâmide qualquer – Livro 8

Volume da pirâmide

O volume da pirâmide corresponde a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela altura:

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

Para compreender melhor essa fórmula, observe que um prisma triangular pode se decompor em três pirâmides triangulares de mesmo volume. Portanto, o volume de cada uma dessas pirâmides é igual à terça parte do volume do prisma triangular. (Pode-se fazer uma experiência cortando um pedaço de sabão.)

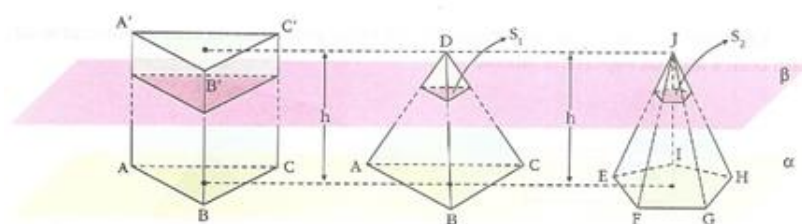


Fonte: Barreto Filho e Silva, (1998, p. 222)

Para as pirâmides os autores utilizaram a trissecção do prisma triangular (figura 49) para deduzir a medida de volume de uma pirâmide triangular.

Figura 50 – Volume da uma pirâmide qualquer – Livro 8

Consideremos uma pirâmide qualquer com a mesma altura h e a mesma área da base de uma pirâmide triangular que, quando seccionadas por qualquer plano β paralelo ao plano α das suas bases, determinam secções S_1 e S_2 , com áreas iguais.



Pelo Princípio de Cavalieri, isso nos permite dizer que o volume dessa pirâmide qualquer é igual ao dessa pirâmide triangular.

$$V_{\text{pirâmide qualquer}} = V_{\text{pirâmide triangular}}$$

$$V_{\text{pirâmide qualquer}} = \frac{1}{3} (\text{área da base} \times \text{altura})$$

Fonte: Barreto Filho e Silva, (1998, p. 222)

A partir do Princípio de Cavalieri (figura 50) os autores deduziram que a medida do volume de uma pirâmide qualquer pode ser calculada pela mesma fórmula, pois uma pirâmide de base qualquer pode ser decomposta em pirâmides de base triangular de mesma altura e ter a medida de seu volume calculada pela fórmula $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$ onde A_b representa a área da base e h representa a medida da altura. Observamos que estes autores utilizaram linguagem natural para indicar o produto da “área da base” pela “altura”, ou seja, estão utilizando o símbolo de multiplicação para relacionar palavras escritas.

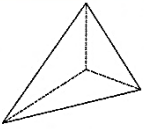
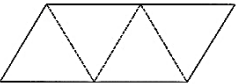
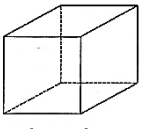
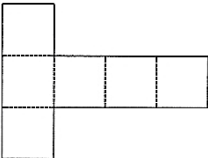
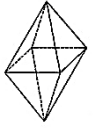
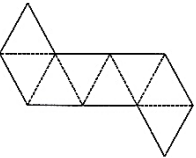
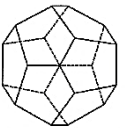
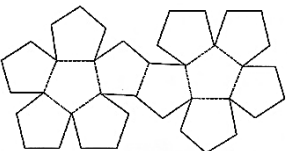
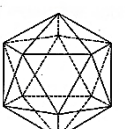
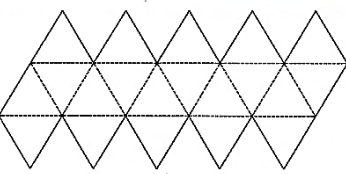
O volume do tetraedro regular foi apresentado pelos autores por um exercício resolvido onde deduzem a fórmula da medida do volume de um tetraedro regular por $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. No final do capítulo definiram poliedros de Platão “é necessário que todas as suas faces tenham o mesmo número (n) de arestas e que, dos vértices parta o mesmo número (m) de arestas”. (BARRETO e SILVA 1998, p.262). Em seguida definiram poliedros regulares, representando os cinco poliedros, mas não apresentaram a relação de Euler.

Apresentaram os cálculos para a medida do volume de um octaedro regular a partir do volume de duas pirâmides de base quadrada, no entanto não fizeram referências a medida do volume do dodecaedro ou do icosaedro regulares.

O livro de Santos, Gentil e Greco (2000) destinado ao professor, destacou na contracapa que estava *de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. No capítulo sobre geometria espacial métrica apresentaram a definição de poliedro como sendo um sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos (referindo-se a regiões

poligonais), diferenciaram também poliedro côncavo de convexo, apresentando exemplos para todos os casos. Definiram então um poliedro convexo regular como sendo aqueles que suas faces são regiões poligonais regulares, cada uma com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge o mesmo número de arestas. Apresentam então exemplos de poliedros regulares convexos (figura 51) destacando seus elementos e modelos da planificação de suas superfícies, sem destacar que só podemos criar a planificação da superfície, pois os poliedros são sólidos.

Figura 51 – Poliedros regulares – Livro 9

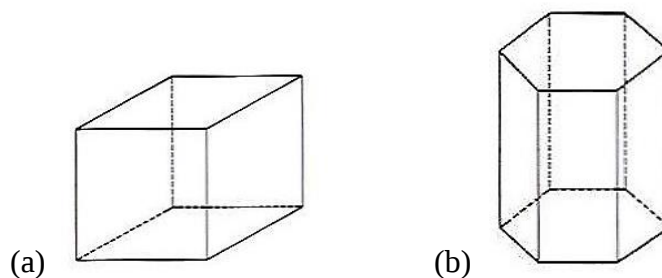
Poliedro	Planificação	Elementos
 tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 hexaedro		6 faces qua- drangulares 8 vértices 12 arestas
 octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
 dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
 icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

Fonte: Marcondes, Gentil e Greco, (2000, p.287)

Em seguida, apresentarem a relação de Euler (figura 52) e, definiram Poliedros de Platão.

Diz-se que um poliedro é platônico se, e somente se:

- For convexo;
- Em todo vértice concorre o mesmo número de arestas;
- Toda face tiver o mesmo número de arestas;
- For válida a relação de Euler. (SANTOS, GENTIL E GRECO, 2000, p.288)

Figura 52 – Poliedro Platônico e não Platônico – Livro 9

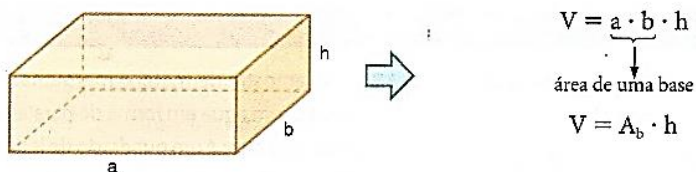
Fonte: Santos, Gentil e Greco (2000, p.288)

A partir dessa definição os autores utilizaram a figura 52 para argumentar que a figura 52 (a) representa um poliedro platônico e a figura 52 (b) representa um poliedro não-platônico.

Apresentaram diretamente a medida de volume de um prisma e de um paralelepípedo reto, sem abordar o princípio de Cavalieri, pela fórmula $V = A_b \cdot h$, considerando que A_b representa a medida da área da base e h representa a medida da altura. Em seguida apresentaram a fórmula para o cálculo do volume de um cubo: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$. No estudo das pirâmides apresentaram a fórmula para o cálculo da medida do volume de uma pirâmide qualquer, sem especificar o volume de um tetraedro regular, embora o tenham definido como sendo: *Toda pirâmide triangular recebe o nome de tetraedro. Quando possui como faces triângulos equiláteros, ele é denominado regular* (IBID, 2000, p.307). Não apresentaram a dedução da fórmula para a medida do volume de um octaedro, dodecaedro ou icosaedro.

O livro de Guelli (2003), destinado ao aluno, apresentou a definição de poliedros exemplificando com figuras de poliedros convexos e não convexos. Em seguida apresentou a relação de Euler e definiu poliedros regulares, mas não apresentou definição para os poliedros de Platão.

No estudo de prismas apresentou a fórmula para o cálculo da medida do volume de um paralelepípedo retângulo conforme a figura 53:

Figura 53 – Volume do paralelepípedo retângulo – Livro 10

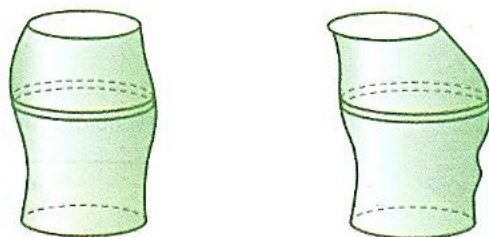
Em geral, qualquer uma das arestas de um prisma reto não contida nos planos das bases é a altura do prisma.

Fonte: Guelli, (2003, p.281)

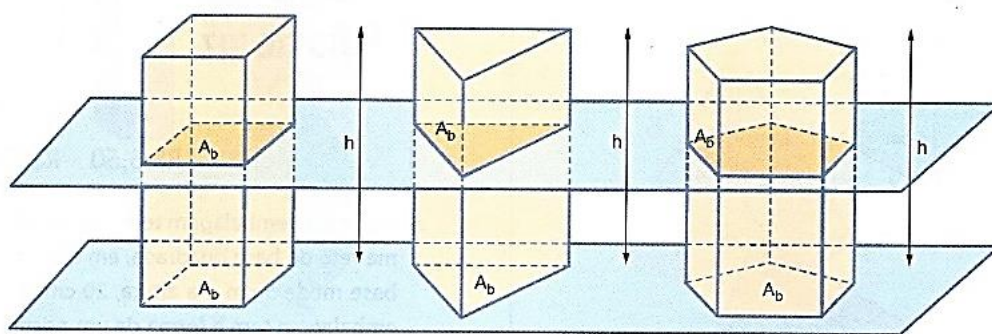
Para o Princípio de Cavalieri, o autor considerou três prismas com bases quadrangular, triangular e pentagonal com áreas das bases equivalentes e mesma altura (figura 54) para concluir que também possuíam volumes equivalentes.

Figura 54 – Princípio de Cavalieri – Livro 10

Considere dois corpos geométricos e um plano. Suponha que todo plano, paralelo ao plano dado, interceptando um dos dois corpos interceptará também o outro, produzindo seções transversais com áreas iguais. Então os dois corpos geométricos têm o mesmo volume.



Os três prismas da figura têm seções transversais de áreas iguais A_b e a mesma altura h .



$$V_{\text{paralelepípedo retângulo}} = V_{\text{prisma triangular}} = V_{\text{prisma pentagonal}}$$

O volume de um prisma é o produto da área de uma base pela altura:

$$V = A_b \cdot h$$

Fonte: Guelli, (2003, p.281)

Na figura 55, o autor apresentou uma situação problema que consiste em construir modelos de um prisma de base triangular e de uma pirâmide com base equivalente à base do prisma e de mesma altura. Em seguida solicitou que o modelo de pirâmide fosse cheio com areia fina e que esse conteúdo fosse derramado no modelo de prisma para verificar que o volume da pirâmide corresponde a um terço do volume do prisma.

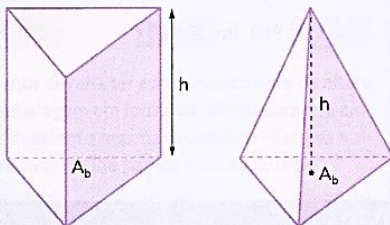
Com essa verificação, o autor deduz que a medida do volume de uma pirâmide triangular pode ser obtida pela fórmula $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$. Em seguida apresentou duas pirâmides, uma com base triangular e outra com base quadrangular de mesma altura para deduzir que a medida do volume de uma pirâmide qualquer, pelo princípio de Cavalieri, pode ser obtida pela mesma fórmula.

Figura 55 – Volume da pirâmide triangular e da pirâmide qualquer – Livro 10

Volume de pirâmides

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Construa com cartolina uma pirâmide triangular e um prisma triangular com bases congruentes e alturas iguais. Encha a pirâmide com areia fina e depois derrame o conteúdo no prisma. Verifique que são necessárias três pirâmides de areia para encher o prisma.



$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma}} \rightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

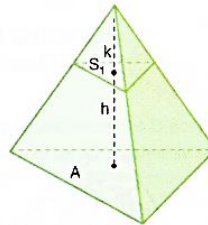
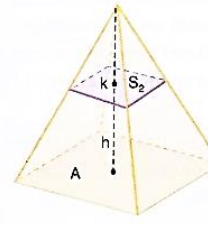
O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do volume do prisma de mesma área da base e mesma altura.



Como se calcula o volume de uma pirâmide qualquer?

Considere duas pirâmides cujas bases estão contidas no mesmo plano.

Se elas têm a mesma área da base e a mesma altura, então as seções transversais equidistantes do vértice têm a mesma área.

Sabemos que $\frac{S_1}{A} = \frac{k_1^2}{h^2}$ e $\frac{S_2}{A} = \frac{k_2^2}{h^2}$. Portanto $S_1 = S_2$.

Como as seções transversais nas duas pirâmides têm a mesma área, pelo postulado de Cavalieri, as duas pirâmides têm o mesmo volume.

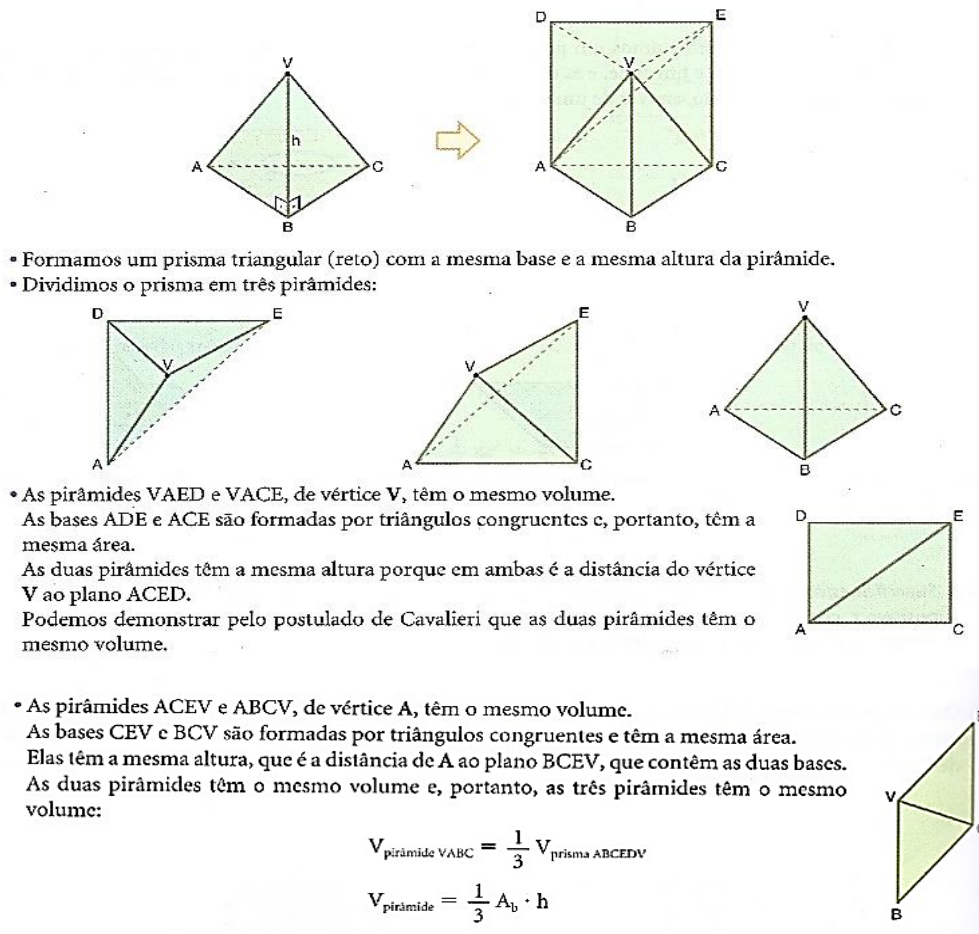
O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela altura.

Fonte: Guelli, (2003, p.283)

Mais à frente, o autor apresentou a trisseção do prisma triangular em três pirâmides com área da base equivalentes e mesma altura (figura 56) para deduzir que o volume da pirâmide representa um terço do volume do prisma. Não encontramos referência a respeito da medida do volume do octaedro, do dodecaedro ou do icosaedro.

Figura 56 – Trissecção do prisma triangular – Livro 10

21. O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto da altura pela área da base.



Fonte: Guelli, (2003, p.297)

Iezzi et al (2007), destinado ao professor, apresentaram a definição de poliedros diferenciando, com figuras, os convexos e não convexos. Definiram a relação de Euler e destacaram que *todo poliedro convexo é euleriano, porém nem todo poliedro euleriano é convexo*.

Definiram poliedros de Platão como sendo aqueles que preenchem as seguintes condições: “todas as faces têm o mesmo número n de arestas; todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número m de arestas; vale a relação de Euler” (IEZZI et al 2007, p.426). Afirmaram por uma propriedade que existem exatamente cinco classes de poliedros de Platão, fazendo a demonstração. Apresentaram então a definição de poliedros regulares convexos (figura 57) e utilizaram a definição de poliedro de Platão para afirmar que existem exatamente cinco poliedros que satisfazem as duas condições.

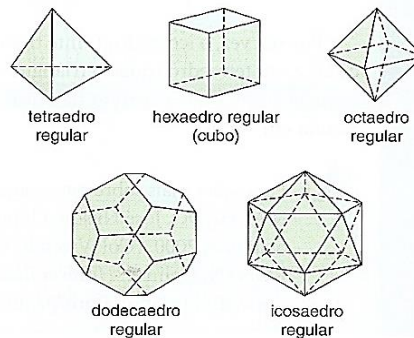
Figura 57 – Poliedros regulares convexos – Livro 11

Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular quando:

- suas faces são polígonos regulares e congruentes;
- seus ângulos poliédricos são congruentes.

Pelas condições estabelecidas acima, podemos observar que os poliedros regulares são poliedros de Platão. Assim, existem exatamente cinco poliedros regulares. São eles:



Fonte: Iezzi et al, (2007, p.427)

No estudo dos prismas definiram a medida do volume de um paralelepípedo retângulo por contagem de cubos de volume unitário (figura 58).

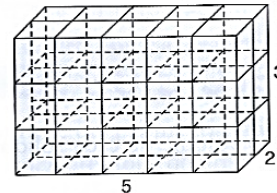
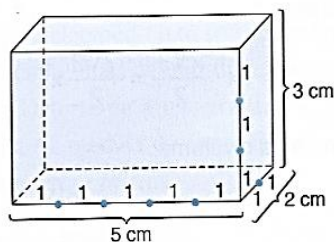
Figura 58 – Volume do paralelepípedo retângulo – Livro 11

Volume

Para introduzir a noção de volume de um prisma, vamos apresentar inicialmente o cubo unitário, que tem aresta unitária (aresta de comprimento 1) e volume unitário (seu volume é 1).



Seja, agora, por exemplo, um paralelepípedo retângulo de dimensões 5 cm, 2 cm e 3 cm, representado abaixo:



Decompondo cada dimensão em unidades de comprimento (cm), teremos cinco unidades (5 cm), duas unidades (2 cm) e três unidades (3 cm), respectivamente. Isso sugere que o paralelepípedo pode ser dividido em $5 \cdot 2 \cdot 3$ cubos unitários (1 cm^3) e o volume desse paralelepípedo é $5 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^3$.

De modo geral, o volume V de um paralelepípedo retângulo de dimensões a , b e c é dado pela fórmula:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

e, notando que $a \cdot b$ é a área da base (A_b) e c é a altura (h) do paralelepípedo, podemos escrever:

$$V = A_b \cdot h$$

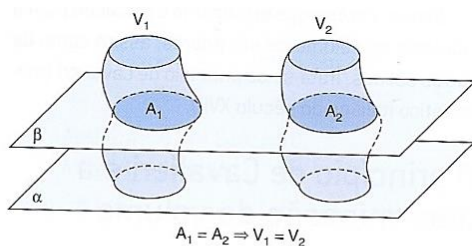
Fonte: Iezzi et al, (2007, p.435)

Observamos que os autores utilizaram a contagem de cubos de volumes unitários para deduzir a fórmula da medida do volume representada por $V = A_b \cdot h$, onde A_b representa a

medida da área da base e h a medida da altura, e a partir dela, os autores deduziram a fórmula para o cálculo da medida do volume de um cubo como $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

Os autores consideraram como aceito o princípio de Cavalieri (figura 59) e apresentaram dois prismas, um com base triangular e outro com base quadrangular com mesma área da base e mesma altura para definir o volume de um prisma como sendo o produto da medida da área da base pela altura. Notamos que os autores não apresentaram a demonstração do princípio de Cavalieri e nem tão pouco do volume do prisma.

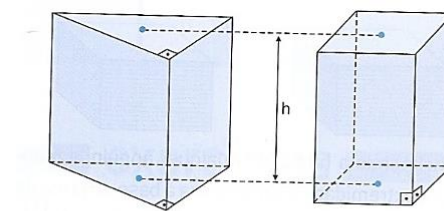
Figura 59 – Princípio de Cavalieri – Livro 11



O princípio de Cavalieri será aceito também como postulado, sendo utilizado na demonstração do seguinte teorema: "O volume de um prisma é igual ao produto da altura pela área da base".

Sejam h e A , respectivamente, a altura e a área da base de um prisma. Seja, também, um paralelepípedo retângulo de mesma altura h e mesma área da base A .

Suponhamos que as bases dos dois prismas estejam no mesmo plano.



Nessas condições, para ambos os prismas, todas as seções transversais possuem a mesma área A . Isso, pelo princípio de Cavalieri, significa que os dois sólidos possuem o mesmo volume.

Como o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área da base pela altura, o mesmo ocorre com o volume do prisma:

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$$

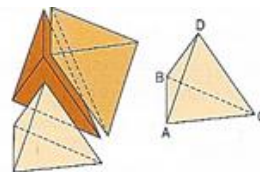
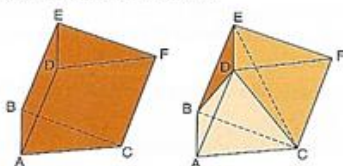
Fonte: Iezzi et al, (2007, p.436)

A fórmula para a medida do volume de uma pirâmide (figura 60) foi definida pela trisseção de um prisma triangular e apresentada no final como um produto de "palavras".

Figura 60 – Trisseção do prisma – Livro 11

Volume: V

O volume de uma pirâmide triangular vale um terço do volume de um prisma triangular de mesma base e mesma altura. As figuras abaixo mostram a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros de mesmo volume:



Assim, a pirâmide $DABC$, por exemplo, corresponde a um terço do volume do prisma $ABCDEF$.

O procedimento é análogo para qualquer tipo de pirâmide (quadrangular, pentagonal, etc.). Portanto, o volume de uma pirâmide qualquer é dado pela fórmula:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\text{área da base}) \cdot (\text{medida da altura})$$

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

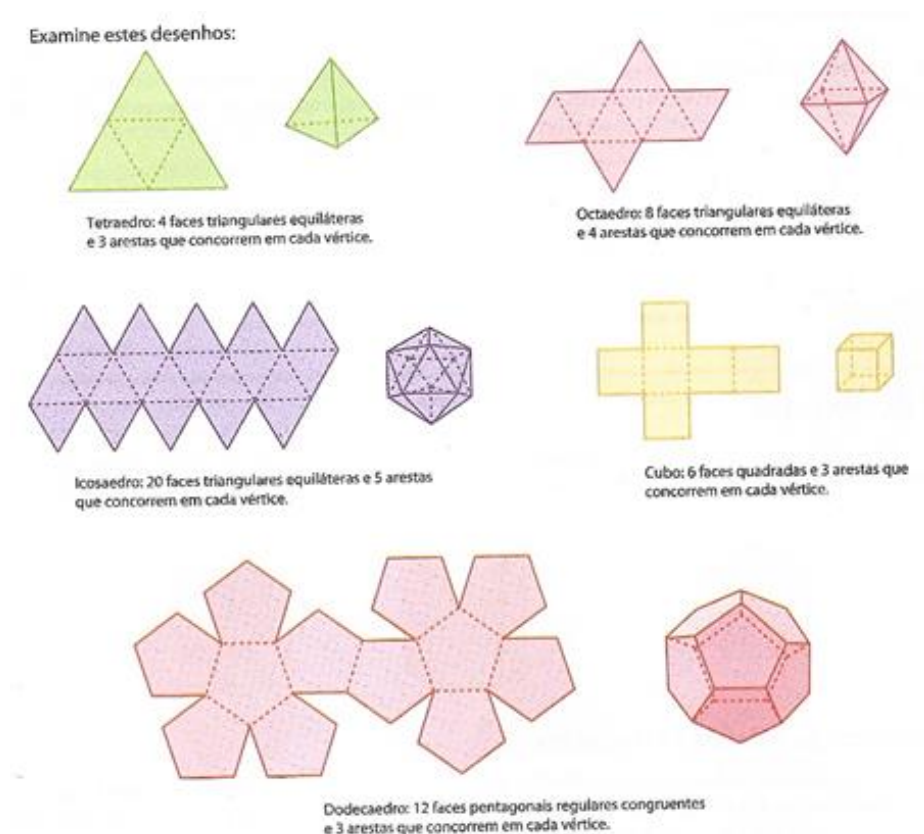
Fonte: Iezzi et al, (2007, p.436)

Os autores definiram também que: *tetraedro regular é uma pirâmide regular em que as quatro faces são congruentes*, (IEZZI et al 2007, p.446) e deduziram a fórmula $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Não encontramos referência a respeito da medida do volume do octaedro, do dodecaedro ou do icosaedro.

Dante (2012) no livro *Matemática & Aplicações*, destinado ao professor, apresentou os poliedros como figuras espaciais côncavas ou convexas e definiu poliedro convexo e não convexo. Em seguida, apresentou a relação de Euler e a exemplificou com algumas figuras de poliedros convexas. Definiu poliedros regulares destacando que existem apenas cinco poliedros regulares convexas, apresentando em seguida a demonstração, e os representou (figura 61) juntamente com a planificação de suas superfícies para enfatizar que essas superfícies são formadas por polígonos regulares. O autor apresenta ainda a definição de Poliedros de Platão.

Figura 61 – Poliedros regulares convexas – Livro 12



Fonte: Dante, (2012, p. 211)

Observando a figura 62, notamos que o autor apresentou a medida do volume de um paralelepípedo retângulo relacionando a um cubo unitário, deduzindo a fórmula para a medida do volume como $V = A_b \cdot h$. Em seguida considerou o cubo com sendo um caso particular de paralelepípedo retângulo apresentando a fórmula $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

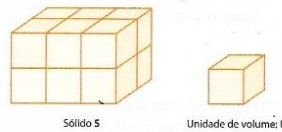
Figura 62 – Volume do paralelepípedo retângulo – Livro 12

7. A ideia intuitiva de volume

Suponha que queiramos medir a quantidade de espaço ocupado por um sólido S . Para isso, precisamos comparar S com uma unidade de volume. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes o sólido S contém a unidade de volume. Esse número é a medida do volume de S , que costumamos dizer, simplesmente, volume de S .

Por exemplo, o volume do sólido S ao lado é de 12 unidades de volume: 12 U, ou seja:

$$\text{volume de } S = 12 \text{ U}$$



Cubo unitário

Vamos estabelecer como *unidade de volume* um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado de *cubo unitário*.

Qualquer cubo cuja aresta meça 1 terá, por definição, volume igual a 1.



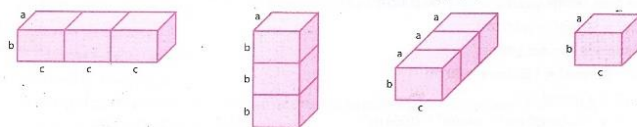
Volume do paralelepípedo retângulo ou bloco retangular

O bloco retangular é um poliedro formado por 6 faces retangulares. Ele fica determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c). Indicaremos o volume desse bloco retangular por $V(a, b, c)$ e o volume do cubo unitário por $V(1, 1, 1) = 1$.



O volume do bloco retangular é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, se mantivermos constantes duas das dimensões e multiplicarmos a terceira dimensão por um número natural qualquer, o volume também será multiplicado pelo mesmo número natural. Isso pode ser observado no exemplo abaixo:

$$V(a, b, 3c) = V(a, 3b, c) = V(3a, b, c) = 3V(a, b, c)$$



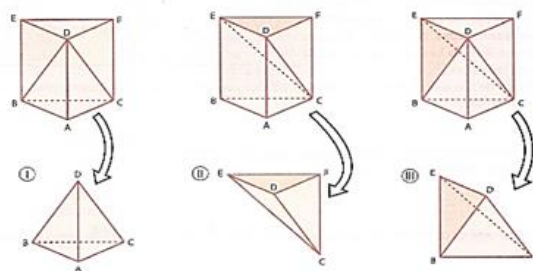
Fonte: Dante, 2012, p.219

Na sequência o autor apresenta o Princípio de Cavalieri para o estudo do volume de prismas. Em seguida (figura 63) definiu a medida do volume de uma pirâmide por meio da trissecção de um prisma de base triangular.

Figura 63 – Trissecção do prisma, volume da pirâmide – Livro 12

Cálculo do volume da pirâmide triangular

Vamos agora decompor um prisma triangular em três pirâmides, como indicam as figuras:



Observações:

- 1º) As pirâmides I e II têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, os triângulos ABC e DEF são congruentes e a distância de D ao plano (ABC) é igual à distância de C ao plano (DEF) – altura do prisma original. Logo, I e II têm mesmo volume.
- 2º) As pirâmides II e III também têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo CEF é congruente ao triângulo BCE, pois cada um deles é a metade do paralelogramo BCFE, e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de D ao plano (BCE). Logo, II e III têm o mesmo volume. Assim, $V_I = V_{II}$ e $V_{II} = V_{III}$, portanto, os três volumes são iguais.

Lembrando que $V_{\text{prisma}} = V_I + V_{II} + V_{III}$ e fazendo $V_I = V_{II} = V_{III} = V$, temos que:

$$V_{\text{prisma}} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$$

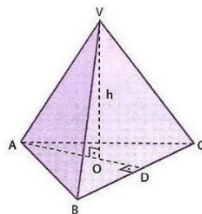
Como $V_{\text{prisma}} = \text{área da base} \cdot \text{altura}$, temos:

$$V \text{ ou } V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

Fonte: Dante, 2012, p.231

Como podemos ver na figura 63 o autor apresentou a fórmula para o cálculo da medida do volume de uma pirâmide triangular por uma divisão por 3 de uma “multiplicação de palavras” não a representando simbolicamente. Em seguida faz uma observação de que essa “fórmula” vale para uma pirâmide qualquer.

Figura 64 – Volume do tetraedro regular – Livro 12



• O é o centro do triângulo equilátero ABC

• $\overline{AD}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$

$$\bullet \overline{AO} = \frac{2}{3} \overline{AD}$$

• $\overline{AD}$ é a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$: $\overline{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Das observações feitas, podemos tirar que:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Considerando o triângulo retângulo AOV ($\hat{O}$ é reto), temos:

$$\overline{AV}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OV}^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vamos, agora, calcular o volume:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

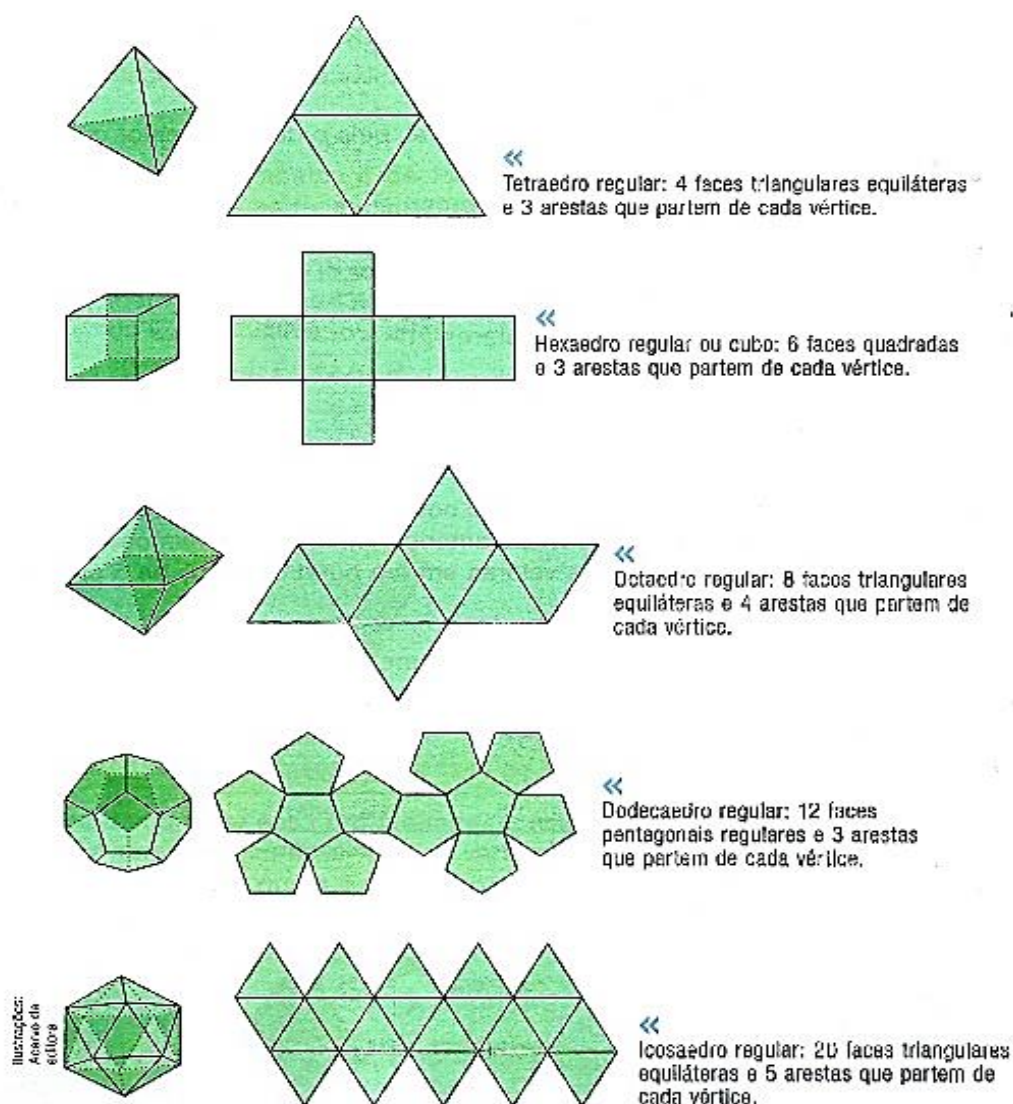
Fonte: Dante, 2012, p.233

O autor considerou, na figura 64, um tetraedro regular, para deduzir a fórmula para o cálculo da medida do volume de um tetraedro regular de aresta medindo a , ou seja, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Não encontramos referências a respeito da medida do volume para octaedro, dodecaedro ou icosaedro.

O livro de Souza (2013) destinado ao professor, no estudo de poliedros apresentou a definição de poliedros como sólidos limitados por superfícies planas poligonais. Em seguida apresentou a relação de Euler e a exemplificou. O autor definiu que um poliedro de Platão satisfaz simultaneamente as condições: “todas as faces têm o mesmo número de arestas; de cada vértice partem o mesmo número de arestas; a relação de Euler é válida.” (SOUZA 2012, p.74). Enunciou, em seguida, que: *Em relação aos Poliedros de Platão, temos a seguinte propriedade: Existem 5, e somente 5, classes de poliedros de Platão*, apresentando a demonstração.

Também definiu que um poliedro convexo é regular quando as faces são polígonos regulares e congruentes entre si e, de cada vértice, partem o mesmo número de arestas. (SOUZA 2012, p.76).

Figura 65 – Poliedros regulares convexos – Livro 13



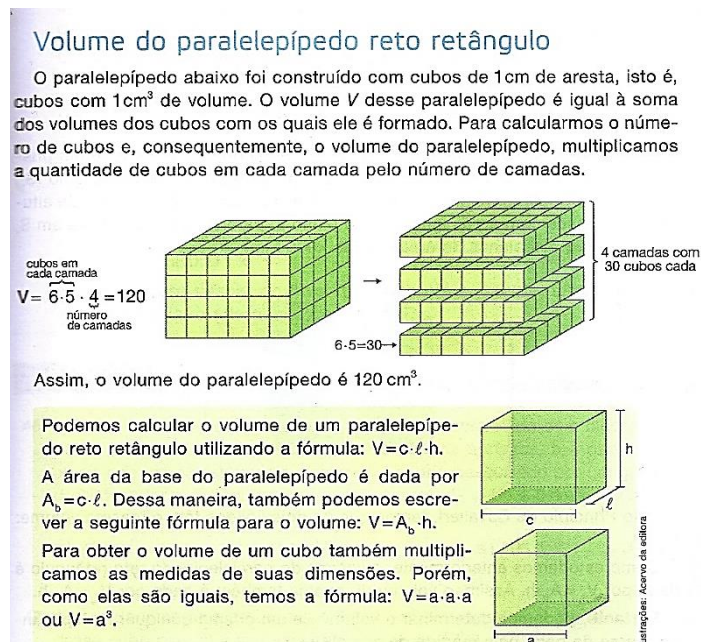
Portanto, existem 5, e somente 5, poliedros regulares.

Fonte: Souza, 2013, p.76

O autor apresentou (figura 65) os cinco poliedros regulares convexos acrescentando a planificação da superfície de cada um deles e as respectivas quantidades de vértices, faces e arestas.

No estudo dos prismas o autor tratou primeiro da medida do volume de um paralelepípedo retângulo (figura 66) para depois tratar do volume de um cubo. Podemos observar que apresenta a medida do volume de um paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos unitários, para em seguida apresentar a fórmula $V = A_b \cdot h$, onde A_b representa a medida da área da base e h a medida da altura. Em seguida, o cubo como sendo um paralelepípedo que possui dimensões iguais e a fórmula $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

Figura 66 – Volume do paralelepípedo e do cubo – Livro 13

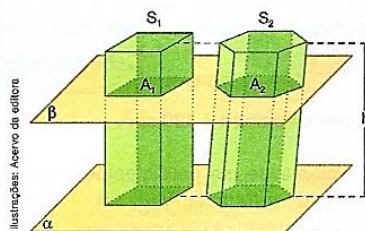


Fonte: Souza, 2013, p.85

Na sequência o autor apresenta o Princípio de Cavalieri para então tratar da medida do volume de um prisma qualquer (figura 67). A partir desse princípio apresenta um prisma quadrangular e outro hexagonal com bases de área de mesma medida e tendo ambos a mesma altura, para deduzir a fórmula para o cálculo da medida do volume: $V = A_b \cdot h$.

Figura 67 – Volume de um prisma qualquer – Livro 13

Agora, utilizando o Princípio de Cavalieri, vamos obter o volume de um prisma qualquer. Para isso, consideraremos um paralelepípedo reto retângulo (S_1) e um prisma qualquer (S_2), apoiados em um plano horizontal α , ambos de altura h e de bases com áreas iguais. Todo plano β , paralelo a α , determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas iguais.



Pelo Princípio de Cavalieri, temos que os dois sólidos têm o mesmo volume: $V_{S_1} = V_{S_2}$.

Como estudamos anteriormente, o volume do paralelepípedo reto retângulo é dado por $V_{S_1} = A_b \cdot h$. Assim, o volume do prisma também é dado por $V_{S_2} = A_b \cdot h$.

Portanto, podemos determinar o volume de um prisma qualquer multiplicando a área da base pela medida de sua altura.

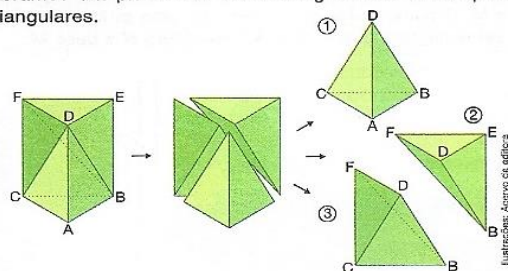
Fonte: Souza, 2013, p.86

Apresentou então (figura 68) a trisseção de um prisma de base triangular para deduzir a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide triangular: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

Figura 68 – Volume de uma pirâmide qualquer – Livro 13

Volume de uma pirâmide qualquer

Obtemos o volume de uma pirâmide relacionando prismas e pirâmides. Para isso, consideramos um prisma de base triangular e o decomparamos em três pirâmides triangulares.



Podemos notar que as pirâmides 1 e 2 possuem bases congruentes ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$) e a mesma altura, correspondente à altura do prisma. Assim, as pirâmides 1 e 2 possuem o mesmo volume.

Note também que as bases das pirâmides 2 e 3 também são congruentes ($\triangle BEF \equiv \triangle AFC$) e têm a mesma altura, correspondente à distância do ponto D ao paralelogramo BEFC. Assim, as pirâmides 2 e 3 possuem o mesmo volume.

Portanto, as pirâmides 1, 2 e 3 possuem o mesmo volume, isto é: $V_1 = V_2 = V_3$.

Como $V_{\text{prisma}} = V_1 + V_2 + V_3$ e considerando $V_1 = V_2 = V_3 = V$, temos:

$$V_{\text{prisma}} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$$

Estudamos anteriormente que o volume do prisma é dado por $V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$. Assim:

$$V = \frac{V_{\text{prisma}}}{3} \Rightarrow V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Fonte: Souza, 2013, p.98

A medida do volume de um tetraedro regular foi apresentada em uma atividade resolvida e sugeriu o cálculo da medida do volume de um octaedro regular. Não encontramos referências a respeito da medida do volume do dodecaedro ou do icosaedro regulares.

Notamos que, em todos os livros, a ausência de abordagem da medida do volume do dodecaedro e do icosaedro regular, apesar de fazerem parte dos poliedros convexos regulares apresentados pela maioria dos autores. Apresentamos no quadro 2 os resultados encontrados para cada uma das edições pesquisadas em função da medida de volume dos poliedros regulares convexos.

Com este levantamento notamos que a medida do volume foi apresentada somente para alguns dos poliedros regulares convexos, havendo maior concentração para o hexaedro e para o tetraedro. No período de (1957-1963) os autores pesquisados utilizavam dimensão e vários teoremas e suas demonstrações. No período de (1976-1998) notamos que autores diminuíram os teoremas e as demonstrações, mas passam a exemplificar mais.

Quadro 2 – Resultados da medida do volume dos poliedros regulares convexos

Ano	Poliedros regulares	Volume do tetraedro regular	Volume do hexaedro regular	Volume do octaedro regular	Volume do dodecaedro regular	Volume do icosaedro regular
1957	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não
1960	Sim	Não	Sim	Não	Não	Não
1963	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não
1976	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não
1984	Não	Sim	Sim	Não	Não	Não
1988	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não
1994	Não	Sim	Não	Não	Não	Não
1998	Não	Sim	Não	Sim	Não	Não
2000	Sim	Não	Sim	Não	Não	Não
2003	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não
2007	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não
2012	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não
2013	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não

Fonte: produção do autor.

Finalmente no período de (1999-2013) os livros pesquisados estão de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais e atendem o Programa Nacional do Livros Didáticos do Ministério da Educação do Brasil apresentando, para o estudo dos poliedros convexos regulares mais precisamente o estudo do volume, diversidade de representações de poliedros, com a finalidade de facilitar a compreensão da medida de volume dos poliedros abordados. As definições de poliedros baseadas na definição de polígono não ficam claras, porque os autores definem polígono por união de segmentos e, portanto, não poderia delimitar ou compor uma face de poliedro. Poucos são os que especificam a face do poliedro por uma superfície poligonal. Por outro lado, embora tratem dos poliedros regulares, o trabalho com volume, é feito a partir do prisma e da trisseção do prisma de base triangular, desses poliedros apenas o tetraedro e o hexaedro têm seus volumes estudados. Entendemos que os volumes do icosaedro e do dodecaedro poderiam também ser trabalhado a partir das noções de composição e decomposição de sólidos, pois constatando que esses poliedros podem ser decompostos em pirâmides seus volumes poderiam ser calculados.

Vimos ainda que todos os autores não diferenciam uma grandeza de sua medida, representando comprimentos, áreas e volumes por números, não evidenciando que o número resultante de uma medição depende da unidade escolhida. Além disso, vários misturam representações específicas da Matemática com a língua natural escrita, por exemplo, a multiplicação entre palavras.

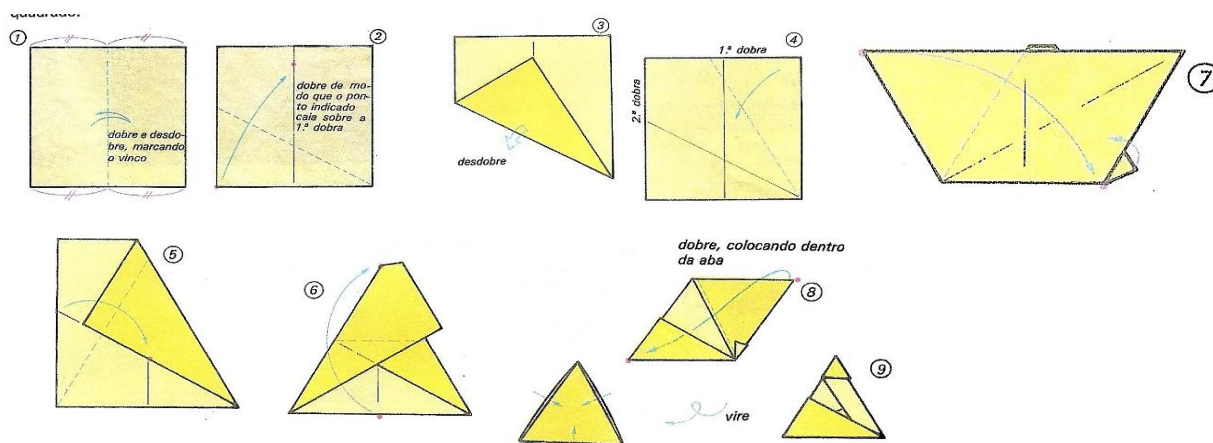
Assim, buscando encontrar outro panorama decidimos analisar livros paradidáticos, que apresentamos no que segue.

2.4 Livros paradidáticos

Como nosso foco de investigação é a medida do volume para poliedros regulares convexos, optamos por analisar também em livros paradidáticos como o assunto é abordado. Encontramos dois que trabalharam com poliedros regulares convexos: *Geometria das dobraduras* de Imenes (1988) e *Os Poliedros de Platão e os dedos da mão* de Machado (1990) que associa cada poliedro de Platão a um dedo da mão.

Imenes (1988) apresenta um “passo a passo” para a construção de modelos físicos de regiões poligonais, por dobraduras em papel, tais como triângulo equilátero, quadrado, pentágono e hexágono e, a partir delas, a construção da superfície poliédrica de cada um dos poliedros regulares. O autor apresentou a sequência de dobraduras (figura 69), para chegar a uma face triangular que compõe o tetraedro, o octaedro e o icosaedro. Discute ainda, medidas dos ângulos que surgem durante a dobradura.

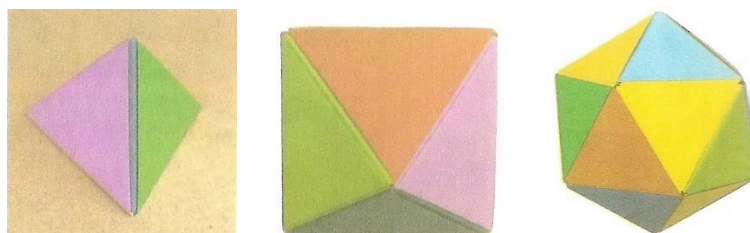
Figura 69 – Dobradura para obter uma face triangular



Fonte: Imenes (1988, p.46-47).

O autor apresenta (figura 70) modelos para o tetraedro regular, octaedro regular e icosaedro regular obtidos a partir de uma composição de modelos de triângulos equiláteros construídos anteriormente.

Figura 70 – Superfície poliédrica do tetraedro, octaedro e icosaedro

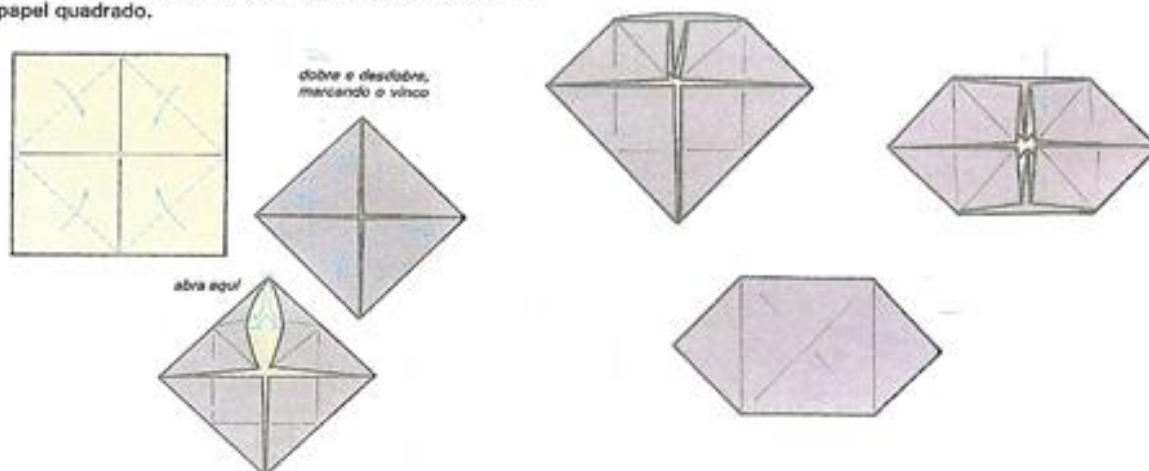


Fonte: Imenes (1988, p.50-51-54).

Encontramos também um procedimento de dobradura que representa uma região quadrangular (figura 71) que servirá de base para a construção de um modelo físico para um cubo.

Figura 71 – Dobradura em um quadrado para obter uma face do cubo

Para construir um cubo com dobraduras, vamos começar pelas faces, que, ao todo, são seis. Utilizaremos papel quadrado.



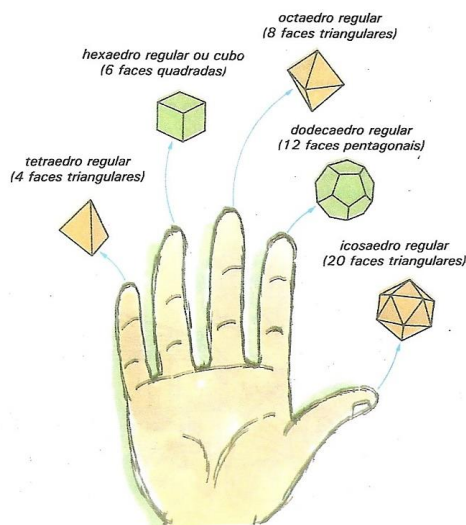
Fonte: Imenes (1988, p.57-58).

Não encontramos procedimentos para a montagem de um modelo para o dodecaedro regular, não era objetivo do autor trabalhar com a medida de volume desses poliedros, apenas com sua construção.

Machado (1990) apresenta a morfologia da palavra polígono, de origem grega onde, *poli* quer dizer “vários” e *gonos* quer dizer “ângulos” e da palavra poliedro de origem grega onde *-edro* provém da palavra *hedra* que quer dizer “face”. Assim, a definição de polígono depende da definição de ângulo (por região ou por semirretas), o autor adota a definição por região, pois define um poliedro regular como sendo “um poliedro que tenha como faces apenas polígonos regulares, todos idênticos, e que também apresente todos os bicos (ângulos poliédricos) idênticos entre si é um poliedro regular” (MACHADO, p. 22).

O autor associou a cada um dos poliedros regulares um dos dedos de uma mão, conforme a figura 72, e ressalta ainda que mesmo se dispuséssemos de todos os recursos imagináveis, referindo-se à intuição, não seria possível construir mais que cinco tipos de poliedros regulares.

Figura 72 – Relação dos poliedros regulares com os dedos de uma mão

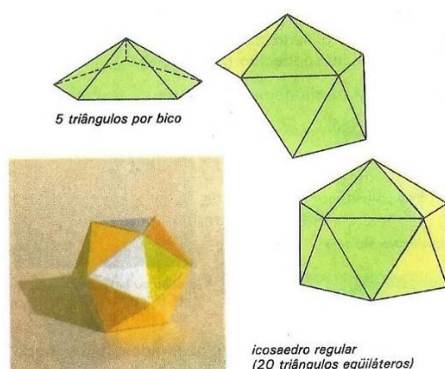


Fonte: Machado (1990, p.23).

Apresenta exemplos de construção com régua e compasso de ângulos de 60° , 90° e 120° para a construção, respectivamente, do triângulo equilátero, do quadrado e do hexágono regular. Para encontrar a medida do ângulo interno de um pentágono regular, o autor recomenda sua construção inscrita em uma circunferência.

O autor iniciou a construção de modelos para os poliedros regulares a partir de regiões triangulares equiláteras, construindo primeiro o tetraedro regular, na sequência construiu o octaedro regular e, depois o icosaedro regular. Usando modelos de regiões quadrangulares construiu o cubo, e por fim, utilizando modelos de regiões pentagonais regulares construiu o dodecaedro regular. Como exemplo, mostraremos a construção do icosaedro. Inicia mostrando a união de cinco modelos de cinco triângulos equiláteros para formar um de seus ângulos poliédricos (figura 73) e depois vai acrescentando outros modelos idênticos para completar as outras faces.

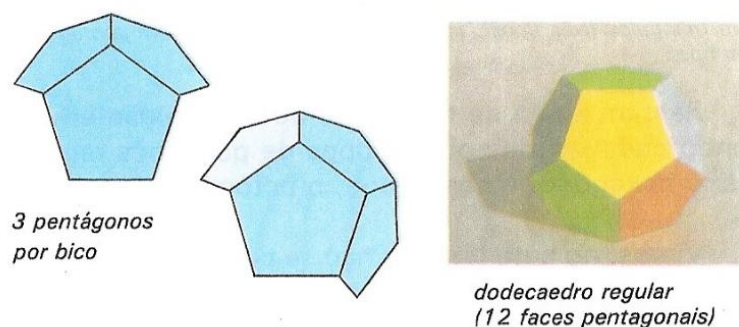
Figura 73 – Icosaedro regular a partir da junção de cinco triângulos



Fonte: Machado (1990, p.37).

Para a construção do dodecaedro regular (figura 74) o autor repete o mesmo processo partindo da construção da superfície de um ângulo poliédrico, com três superfícies de pentágonos regulares e congruentes, para depois completar o poliedro com as faces restantes.

Figura 74 – Dodecaedro regular a partir da junção de três pentágonos



Fonte: Machado (1990, p.39).

Encontramos justificativas feitas pelo autor a respeito da quantidade de polígonos utilizados na formação de um vértice, com três, quatro ou cinco polígonos. Não sendo possível, segundo o autor, a utilização de seis triângulos porque compõe um ângulo de 360° . Utilizando o quadrado foi possível formar um vértice com apenas três quadrados, não sendo possível a utilização de quatro quadrados porque compõe um ângulo de 360° . Para o dodecaedro regular, Machado (1990) explica que foi possível utilizar somente três pentágonos, pois a utilização de quatro pentágonos regulares ultrapassa 360° , não sendo possível sua formação.

Notamos que, em ambas as obras analisadas, o objetivo era a construção de modelos materiais para superfícies poliédricas.

2.5 Documentos oficiais da Secretaria da Educação de São Paulo

Em nosso percurso de investigação, entendemos que se faz necessário, além de analisar como nosso objeto de estudo é tratado na literatura voltada para a sala de aula, verificar também como os documentos oficiais da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo-(SEE-SP) abordam os conteúdos de geometria espacial e para quais séries da educação básica são recomendados.

Consultando o acervo do Memorial Mário Covas, em São Paulo, encontramos duas Propostas Curriculares para o Ensino de Matemática (PCEM) do 2º grau, uma de 1989 e outra de 1992. Consultamos também Propostas Curriculares para o Ensino de Matemática-PCEM, de

2012 com a finalidade de verificar se houve modificação da abordagem de conteúdos de geometria espacial.

A PCEM (SÃO PAULO, 1989) destaca que o final de 1983 ficou marcado pela possibilidade conferida às escolas do 2º grau do Estado de São Paulo de reformularem suas grades curriculares, atribuindo para as escolas a autonomia de modificarem seus currículos de acordo com a necessidade e interesse de seus alunos e disponibilidade de seus professores tendo em vista a realidade de cada escola. A geometria, conforme trata o texto, ficou distribuída na segunda e na terceira séries do Ensino Médio. O documento sugere para o estudo de cubos e paralelepípedos, prismas e pirâmides sejam concentrados no cálculo da medida de área de superfícies, deixando para a última série o estudo da medida de volume.

Nesse documento os poliedros regulares foram apresentados a partir de suas faces, triangulares, quadrangulares ou pentagonais, destacando o número de polígonos necessários para formar um vértice “ou bico”, como o documento ressalta. Segundo o documento, para um vértice (bico) do tetraedro regular são necessários três triângulos, para um vértice do octaedro regular são necessários quatro triângulos, para um vértice do icosaedro regular são necessários cinco triângulos. Acrescentam que são regulares os poliedros regulares que têm todas as faces congruentes, construídas por polígonos regulares de um só tipo e que, além disso, têm todos os vértices com o mesmo formato, destacando o número de polígonos necessários para formar cada poliedro.

Embora seja um documento para o segundo grau (atual ensino médio) utilizam a palavra “bico” em vez de vértice, o que não condiz com o nível de ensino. Além disso, tratam das faces como polígonos e não como regiões poligonais, o que implicaria em definir polígono como região e não como contorno de uma região.

Em relação à medida do volume, tratou do cálculo para prismas e pirâmides, sem referir-se a outros poliedros como octaedro, dodecaedro ou o icosaedro.

No PCEM (SÃO PAULO, 1992) encontramos recomendações semelhantes à proposta anterior, distribuindo a geometria nas segunda e terceira séries do Ensino Médio, porém para a segunda série aborda somente o estudo do prisma relacionando as formas geométricas e seus elementos, com objetos concretos do dia-a-dia. Para a terceira série o documento orienta a retomada da geometria, com a pirâmide e os corpos redondos. O estudo de pirâmides deve ter como objetivo classificá-las, identificar seus elementos e calcular a medida da área de sua superfície e a medida de seu volume. Os poliedros regulares são apresentados em forma de

atividade proposta para que o aluno construa modelos para poliedros com triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos regulares e hexágonos regulares, com o objetivo de que o aluno compreenda que só é possível formar vértices para poliedros regulares com triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares. O documento aponta que a partir da construção de uma pirâmide de base quadrada, com todas as arestas de mesmo comprimento, é possível reunir duas pirâmides idênticas, com base comum, para formar um octaedro, no entanto não apresentou cálculo da medida do seu volume.

No PCEM (SÃO PAULO, 2012) a geometria espacial métrica concentra-se na segunda série do Ensino Médio. O documento aponta que o conteúdo deve ser iniciado por poliedros convexos, explorando o número de vértices, de faces e de arestas, em seguida deve ser abordada a medida de área de superfícies de alguns poliedros para chegar na medida de volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas sem, no entanto, referir-se ao octaedro, dodecaedro ou icosaedro. O documento ainda ressalta que no caso da geometria, os cálculos de comprimento, áreas e volumes constituem o lado mais visível das relações métricas, que se iniciam na contagem de quadrados ou de cubos unitários e culminam com sua formalização em expressões literais que traduzem medidas e relações métricas.

2.6 Justificativa

Em nossa revisão de literatura focamos em trabalhos que abordassem a geometria espacial, especificamente abordando o cálculo da medida do volume de um poliedro regular convexo. Nesses trabalhos não encontramos nenhum que apresentasse o estudo de todos os poliedros regulares convexos, pois ora eram abordados com enfoque na origem histórica destacando a medida de volume, ora obtendo os poliedros por truncatura e calculando o volume de alguns deles.

Procurando trabalhos que nos levassem a compreender procedimentos relevantes e que pudessem contribuir para o cálculo da medida do volume dos poliedros regulares convexos; encontramos Rommevaux (1999) que se questiona a respeito de os alunos conseguirem aprender a ver tridimensionalmente, uma vez que, é uma questão de não ver em um espaço tridimensional, mas ver três dimensões em uma figura geométrica que tem apenas duas.

A autora conduziu um estudo experimental com alunos de 15 e 16 anos, no qual utilizou dois registros de representação semiótica, o registro figural e a língua natural definidos por Duval, e alguns objetos materiais como maquetes. Os resultados mostraram que os alunos

não exploraram todas as possibilidades da maquete e na passagem para a representação figural em perspectiva, o reconhecimento dos planos com a coordenação dos diferentes elementos, unidimensional, bidimensional e tridimensional, não foi fácil para os alunos.

Assim, podemos conjecturar que para o estudo de geometria espacial o uso de *software* pode contribuir para a visualização de objetos tridimensionais. Nos apoiamos em Flores (2003, p.23) quando afirma que a ligação

entre a aprendizagem de geometria e o saber ver as representações das figuras geométricas tem aguçado a busca de variados procedimentos que possam ser colocados em prática na sala de aula a fim de aprimorar a desenvoltura do olhar as imagens, no ensino de geometria.

A autora destaca que a aprendizagem em geometria pode ser compreendida com a utilização de recursos que contribuam para o desenvolvimento da capacidade de percepção de representações de figuras geométricas em planos bidimensionais e, com isso desenvolver a visualização do objeto estudado tridimensionalmente.

Consultando documentos oficiais, encontramos na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – PCEM (SÃO PAULO, 1989, 1992), recomendação para que tomasse como base para o ensino a vida cotidiana do aluno, já no Currículo para Matemática e suas Tecnologias (SÃO PAULO, 2012), orientam o ensino de poliedros regulares em situações do dia-a-dia do aluno.

Quanto ao ensino de medidas de volume, observamos que tanto na literatura, quanto nos documentos oficiais estão voltadas para a métrica e utilização de fórmulas dadas, sem justificativas, na maioria dos casos.

Consideramos então que talvez a construção geométrica dos poliedros regulares poderia nos proporcionar relações e medidas que ajudassem a construir fórmulas para o cálculo do volume desses poliedros, o que não é possível com a construção de modelos materiais. A procura por esse tipo de construção nos levou aos *Elementos* de Euclides (BICUDO, 2009) em que são apresentadas as construções geométricas para as superfícies dos poliedros regulares convexos, no livro XIII.

Para que possamos desenvolver um estudo sobre as construções realizadas por Euclides e adaptá-las para uma linguagem atual³, escolhemos o *software* Cabri-3D, porque as ferramentas oferecidas pelo *software* auxiliam as construções geométricas espaciais, permitem

³ No anexo A mostramos um exemplo da linguagem utilizada por Euclides para a construção de um tetraedro regular

manipulá-las, facilitam a exploração e a elaboração de conjecturas, além de termos já familiaridade com esse *software*.

2.7 Delimitação do problema

Em nossas leituras encontramos alguns trabalhos que desenvolvessem a decomposição e a composição de poliedros para obtenção da medida de seu volume, mas nenhum que explorasse a decomposição e composição por pirâmides triangulares e pentagonais, para o icosaedro e dodecaedro, respectivamente, a partir de sua construção. Assim, apresentamos nossa questão de pesquisa: **A construção de poliedros regulares pelo método de Euclides propicia a obtenção de uma fórmula para o cálculo da medida de volume do dodecaedro e do icosaedro, a partir das noções de composição e decomposição de sólidos?**

Nosso **objetivo geral** é, então, verificar a possibilidade de construir os poliedros regulares convexos pelo método de Euclides no ambiente Cabri 3D e a possibilidade de construir uma fórmula para o cálculo do volume, do icosaedro e dodecaedro que dependa de resultados dessa construção e da noção de composição e decomposição desses poliedros regulares.

Para responder essa questão e atingir nosso objetivo geral elaboramos os seguintes objetivos específicos.

- construir os poliedros regulares convexos pelos processos apresentados por Euclides em (BICUDO, 2009) utilizando o *software* Cabri 3D;
- analisar se essas construções favorecem a decomposições do dodecaedro e do icosaedro regulares em pirâmides regulares pentagonais e triangulares, com um vértice comum;
- analisar se essas construções favorecem a obtenção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume de cada uma dessas pirâmides e, em consequência, desses poliedros.
- verificar, a partir das construções, a possibilidade de determinar as condições necessárias para que uma pirâmide regular pentagonal ou triangular podem compor um dodecaedro ou um icosaedro, respectivamente e, assim, possibilitar o processo de composição.

A seguir apresentamos a metodologia e os procedimentos utilizados para responder nossa questão de pesquisa.

2.8 Metodologia de pesquisa e procedimentos

Na busca pelo cálculo da medida do volume dos poliedros regulares convexos por decomposição ou composição com o auxílio do Cabri-3D, desenvolvemos nossa pesquisa a partir da leitura, análise e interpretação do livro XIII de Euclides (BICUDO, 2009), abordando a construção dos poliedros regulares convexos. Nossa pesquisa é de cunho qualitativo, pois de acordo com Silveira e Córdova (2009) nos preocupamos em descrever, compreender e explicar um fenômeno buscando resultados fieis e possíveis, em nosso caso, compreender e explicar as construções dos poliedros regulares por Euclides, buscando relações matemáticas que permitam decompor o icosaedro e o dodecaedro, em pirâmides regulares triangulares ou pentagonais e, no sentido inverso, determinar as condições para que uma pirâmide desse tipo possa compor ou não um desses poliedros. Em suma, nossa pesquisa é qualitativa porque se caracteriza por uma hierarquia de descrição, compreensão e explicação dessas construções e relações matemáticas.

De acordo com Silveira e Córdova (2009, p. 32) os pesquisadores que utilizam esse método “buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos e se valem de diferentes abordagens”.

Quanto aos procedimentos consideramos que se trata de uma pesquisa documental, pois buscaremos apreender, compreender e analisar um documento, o livro XIII de *Os Elementos* de Euclides e, nesse sentido, entendemos que daremos um tratamento analítico ao documento que não encontramos em nossa revisão bibliográfica.

Para Corsetti (2006, p. 36) em uma pesquisa documental o ponto de partida não é a pesquisa de um documento, mas

a colocação de um questionamento – o problema da pesquisa. O cruzamento e confronto das fontes é uma operação indispensável, para o que a leitura hermenêutica da documentação se constitui em operação importante do processo de investigação, já que nos possibilita uma leitura não apenas literal das informações contidas nos documentos, mas uma compreensão real, contextualizada pelo cruzamento das fontes que se complementam, em termos explicativos (CORSETTI, p. 36).

Assim, entendemos que as fontes documentais são importantes, no nosso caso o livro XIII de *Os Elementos* de Euclides, para levantar questionamentos a partir das construções que nos permitirão encontrar ou não relações matemáticas que nos proporcionem a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume, ou a percepção de relações matemáticas que

permitam identificar se uma pirâmide regular de base triangular ou pentagonal podem vir a compor um icosaedro ou um dodecaedro, respectivamente.

As construções, diferentes das de Euclides realizadas com lápis e papel, serão realizadas com o *software* Cabri 3D, porque por *default* já são realizadas com perspectiva cavaleira, técnica imprescindível para a representação de figuras espaciais em um plano. Por outro lado, o dinamismo das representações que o *software* fornece facilita a mudança do olhar do observador (quem constrói) o que facilita a percepção das relações matemáticas que pretendemos.

Além disso, buscaremos descrever as construções e as relações matemáticas encontradas em termos de uma transposição didática interna, no sentido de Chevallard, com o objetivo de contribuir para o ensino de sólidos geométricos, especificamente, para o ensino de cálculo de volumes.

Para realizar nossa pesquisa dividimos o trabalho em três partes: na primeira buscaremos explorar, compreender e descrever em linguagem atual as construções realizadas por Euclides para os poliedros regulares convexos, com o *software* Cabri 3D, utilizando seu dinamismo para percepção de relações matemáticas que favoreçam o cálculo da medida do volume do poliedro representado. Na segunda parte, buscaremos explorar a construção do dodecaedro e do icosaedro regulares, para encontrar relações matemáticas que permitam a decomposição desses poliedros em pirâmides e consequente, dedução de fórmulas para o cálculo das medidas de seus volumes. Na terceira parte, utilizando as relações e construções realizadas anteriormente, buscaremos o caminho inverso, ou seja, as relações matemáticas que permitam dizer se uma pirâmide regular triangular ou pentagonal pode compor ou não um icosaedro ou um dodecaedro regular.

Assim, no que segue apresentamos o referencial teórico que utilizaremos nesta pesquisa.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão abordadas as teorias que dão suporte a nossa pesquisa, ou seja, a noção de Transposição Didática e a Problemática Ecológica de Yves Chevallard, os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

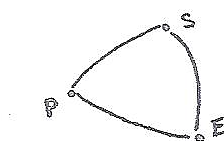
3.1 A Noção de Transposição Didática e a Problemática Ecológica

De acordo com Chevallard (1999), um conteúdo de saber que tenha sido definido como um saber a ensinar passa por um processo de transformações adaptativas didáticas para se tornar um objeto de ensino. Esse processo é denominado Transposição Didática.

Podemos dizer que a transposição didática pode ser entendida como um caminho percorrido por um conhecimento científico (saber) para ser utilizado em sala de aula. Isso requer interpretação do saber científico e adaptações didáticas para que possa ser transformado em saber a ensinar. Um conhecimento, ao ser transportado de um contexto de saber para outro, passa por modificações, ou seja, qualquer conhecimento matemático ao ser ensinado, por mais que se aproxime do contexto que o originou, adquire outros significados próprios do contexto em que será inserido, atribuindo-lhe o status, saber a ensinar.

Chevallard (1999) afirma que dentro do sistema de ensino são formados os sistemas didáticos cujos componentes essenciais são: o professor (P), o saber (S) e o aluno (E) a partir dessa relação triangular de interdependência um do outro.

Figura 75 – Representação do sistema didático de Chevallard



Fonte: Chevallard (1998, p.26)

Nesse sentido a trajetória escolar é influenciada pelo saber científico associado a outras fontes que, por sua vez, moldam as ações do professor no aspecto conceitual e no procedimento didático. Para Chevallard (1999), o conjunto das fontes de influências que atuam na seleção dos conteúdos que deverão compor os programas escolares e determinam todo o funcionamento do processo didático recebe o nome de **noosfera**. “A noosfera atua, então, na seleção e no trabalho de transposição didática dos conteúdos de saberes selecionados.” Essa primeira transposição (chamada de externa), do saber sábio ao saber a ser ensinado, ou seja, o saber entendido como

saber escolar que também está presente nos livros didáticos. No entanto, há uma segunda transposição didática (chamada de interna), do saber a ser ensinado ao saber ensinado, que se refere ao que realmente acontece em sala de aula e remete à liberdade do professor em transformar o saber a ser ensinado por meio de suas escolhas didáticas.

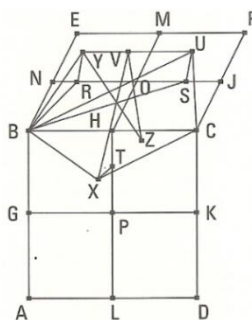
De acordo com Almouloud (2007, p. 113) a Teoria da Transposição Didática de Chevallard tem o propósito de fazer uma análise epistemológica do saber, sob o ponto de vista didático, em termos de objeto de saber. A problemática ecológica amplia o campo de análise da Transposição Didática, e permite abordar os problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar. Nessa visão, os objetos têm inter-relações hierárquicas que permitem identificar e analisar as estruturas ecológicas dos objetos de saber a partir das ideias de nicho e habitat. Assim, introduz a noção de **habitat** de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará a função desse saber, ou seja, determinará o seu nicho.

Assim, o saber a ensinar é aquele que aparece nos programas, livros didáticos e materiais de instituições de ensino e que necessita de adaptação para ser apresentado ao aluno. Nesse sentido, podemos dizer que tanto o estudo de poliedros regulares quanto, o de volumes de sólidos são saberes que fazem parte do sistema escolar brasileiro como “saberes a ensinar”, no entanto não se vê uma relação entre os dois, ou seja, o desenvolvimento de fórmulas para o cálculo do volume desses poliedros, nem tão pouco qualquer indício que conduza à construção geométrica desses poliedros que não por planificação de suas superfícies.

Em nossa pesquisa, faremos a reconstrução dos procedimentos desenvolvidos por Euclides (BICUDO, 2009), no livro XIII, para a construção dos poliedros regulares realizando adaptações didáticas, tanto na atualização da linguagem utilizadas no enunciado, quanto nas ferramentas de construção. Dessa forma, usaremos o Cabri 3D para as construções, tendo em vista que ele possui todas as ferramentas necessárias para tal, inclusive, e também o consideraremos como habitat para o estudo que pretendemos, pois acreditamos que parte dos conhecimentos necessários tanto para a construção dos poliedros regulares, quanto para a busca das relações matemáticas que permitem desenvolver uma fórmula para o volume desses poliedros podem ser mobilizados por meio de suas ferramentas. A utilização do dinamismo de suas representações seria um ponto primordial para que a construção fosse completada (Euclides constrói apenas uma face de cada poliedro) e que hipóteses possam ser levantadas ou percebidas relações entre seus elementos.

Quanto a atualização da linguagem mostramos como exemplo a proposição 17, do livro XIII de Euclides, apresentado em Bicudo (2009, p. 586) que assim está enunciada: “como construir um dodecaedro e contê-lo por uma esfera, como as figuras anteriores ditas, e provar que o lado do dodecaedro é uma irracional, o chamado apótomo”. Este enunciado é seguido da figura 76.

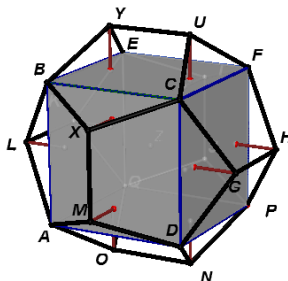
Figura 76 - Representação de uma face do dodecaedro feita por Euclides



Fonte: Bicudo (2009, p. 586).

Em linguagem atual podemos enunciar essa proposição da seguinte forma: “como construir um dodecaedro regular circunscrito por uma esfera e provar que a medida de sua aresta é um irracional. Seguido da figura 77, construída no Cabri-3D.

Figura 77 - Construção de um dodecaedro a partir de um cubo



Fonte: Produção do autor

Apresentamos a seguir a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval para que possamos identificar os registros que serão mobilizados na construção dos poliedros regulares convexos e suas articulações com o desenvolvimento das apreensões.

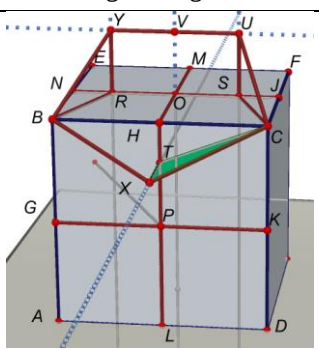
3.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Para desenvolver nossa pesquisa a respeito dos poliedros regulares convexos, buscamos um embasamento teórico que nos auxiliasse na compreensão e análise das construções realizadas com o auxílio do Cabri-3D e, por isso, recorremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, pois de acordo com Duval (2009) as representações não são somente indispensáveis para a comunicação, mas são necessárias para a própria atividade

matemática. O autor chama de *semiós* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noés* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Ressalta que, a análise dos problemas de aprendizagem de matemática e dos obstáculos que os alunos enfrentam regularmente conduz a reconhecer uma lei fundamental do funcionamento cognitivo humano: não há *noés* sem *semiós*, quer dizer, não há *noés* sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica em sua coordenação para o próprio sujeito.

Para o autor, os sistemas semióticos devem permitir o cumprimento de três atividades cognitivas inerentes a toda representação. Primeiramente, construir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar essas representações, apenas pelas regras próprias ao sistema (que chama de tratamento), de modo a obter outras representações que possam construir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema (que chama de conversão), de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. Essas duas transformações podem ser exemplificadas com o auxílio da figura 78, em que no registro figural por uma série de tratamentos construímos uma face de um dodecaedro regular partindo da representação de um cubo. Por outro lado, a conversão pode ser observada em uma interpretação possível da figura para um registro da língua natural, associado às notações simbólicas, no sentido de desenvolver um discurso justificativo para a regularidade do pentágono construído.

Figura 78 – Conversão de registro figural para registro da língua natural

Registro figural	Registro da língua natural associado à notação simbólica
	O triângulo YRB é retângulo em R e o triângulo USC é retângulo em S. Por construção, temos que $\overline{YR} \equiv \overline{US}$ e que $\overline{RB} \equiv \overline{SC}$. Logo, $\overline{YB} \equiv \overline{UC}$. Mostremos agora que os triângulos TCX e USC são congruentes. O triângulo TCX é retângulo em T e o triângulo USC é retângulo em S. Por construção, sabemos que $\overline{TC} \equiv \overline{SC}$ e que $\overline{US} \equiv \overline{TX}$. Logo, $\overline{CX} \equiv \overline{UC}$. O mesmo acontece com os triângulos TXB e YRB que nos dá $\overline{BX} \equiv \overline{YB}$. Assim, já mostramos que $\overline{UC} \equiv \overline{CX} \equiv \overline{XB} \equiv \overline{BY}$

Fonte: produção do autor.

Tratando de registro figural, Duval (1999) diferencia visão de visualização. Para ele, a visão refere-se à percepção visual e a imagem visual, e envolve duas funções cognitivas

essenciais. A primeira permite dar acesso direto a qualquer objeto físico, e por isso a percepção visual é sempre apresentada como um modelo para a noção epistemológica de intuição. A segunda, consiste em apreender simultaneamente diversos objetos ou um campo inteiro, ou seja, a visão parece dar imediatamente uma apreensão completa de qualquer objeto ou situação, e é denominada de função sinóptica. Para o autor, a percepção visual executa, de uma maneira muito imperfeita, a função sinóptica, porque estamos imersos em um mundo tridimensional e apenas um lado das coisas pode ser visto e, portanto, a apreensão completa requer movimento, tanto do observador, quanto do que está sendo visto. Assim, a percepção visual sempre focaliza em uma parte particular do campo e pode saltar para uma outra parte, pois não há percepção visual sem exploração.

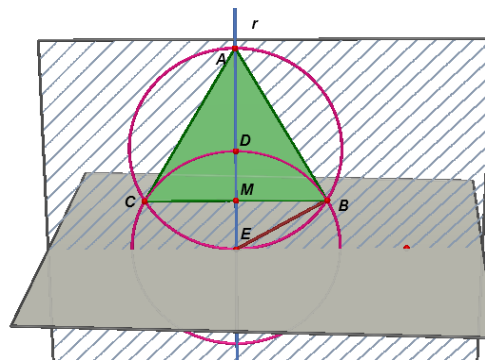
De acordo com Duval (2012) ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento do que uma imagem mostra, ela depende do papel que tem na atividade matemática. Afirmar ainda que pensar em figuras pressupõe exploração de suas propriedades e os sujeitos que interagem com essas representações ficam suscetíveis a interpretação. O autor chama essas interpretações de apreensões e as classifica em quatro tipos: **sequencial, perceptiva, discursiva e operatória**.

Para o autor, a apreensão **sequencial** é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividade de descrição que têm como objetivo a reprodução de uma figura dada. Essa apreensão refere-se às ordens para a construção de uma figura, que dependem de suas propriedades e de restrições técnicas provocadas pelos instrumentos utilizados e não apenas pelo enunciado. A apreensão sequencial de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência feita no Cabri-3D, em verdadeira grandeza (figura 79) implica na construção de um plano auxiliar perpendicular ao plano de base e com vista frontal para o observador.

Figura 79 – Apreensão sequencial para a construção de um triângulo equilátero

Traça-se uma reta r perpendicular ao plano de base passando por um ponto E qualquer. Por um ponto qualquer do plano de base e a reta r traça-se um plano, perpendicular a este, para ser suporte da circunferência de centro em D e raio DE , que determina o ponto A na intersecção com a reta r , um dos vértices do triângulo.

Os outros dois vértices, B e C , são obtidos a partir da intersecção dessa circunferência com a circunferência com centro em E , raio ED , determinando o triângulo equilátero ABC .

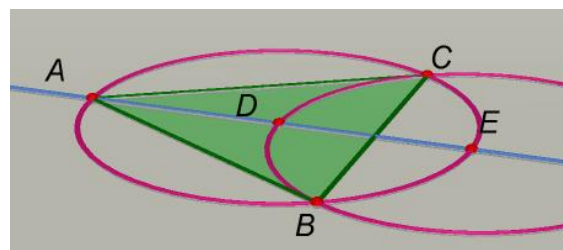


Fonte: produção do autor.

No entanto, poderíamos construir um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência, sob um outro ponto de vista (figura 80), por exemplo, construído no próprio plano de base, neste caso a apreensão sequencial para a construção seria outra.

Figura 80 - Outra apreensão sequencial para a construção de um triângulo equilátero

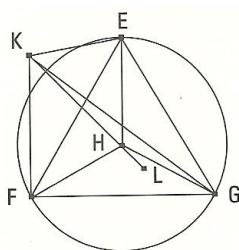
No plano de base criar os pontos D e E, traçar uma circunferência de centro em D e raio DE. Uma outra circunferência de centro em E e raio ED determina na intersecção com a circunferência inicial dois pontos B e C, vértices do triângulo. O terceiro vértice, A, será obtido na intersecção da reta definida pelos pontos D e E com a circunferência de centro em D.



Fonte: produção do autor.

Uma outra apreensão definida pelo autor é a **perceptiva** de formas que ocorre a partir do contato do sujeito com uma figura, em um contexto de atividade e que gera duas reações contraditórias: uma imediata e automática e outra controlada pelas interpretações dos elementos figurais. Essas reações geralmente estão em conflito porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, e outros que embora enunciado nas hipóteses podem não aparecer espontaneamente. Nos dois exemplos, anteriores, o fato dos triângulos representados serem equiláteros pode gerar um conflito. Outro exemplo de apreensão perceptiva pode ser observado em uma representação figural apresentada por Euclides para a construção de um tetraedro regular (figura 81). A reação imediata nos diz que temos uma circunferência, com centro em H, que passa pelos pontos E, F e G, um ponto K, fora dela; e um ponto L em sua região interior. Essas interpretações entram em conflito com as informações de que os pontos E, F, G e K pertencem à uma superfície esférica e que o triângulo EFG é, na verdade, a face de um tetraedro inscrito nessa esfera.

Figura 81 – Apreensão perceptiva de um tetraedro inscrito em uma esfera dado por Euclides



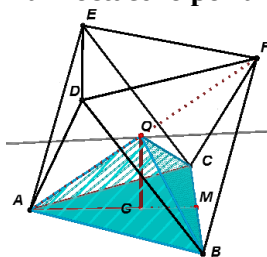
Fonte: Bicudo (2009, p. 577)

A apreensão **discursiva**, para Duval (2012) corresponde a explicitação de outras propriedades de uma figura, além daquelas que estão assinaladas por uma legenda ou por hipóteses. Uma figura geométrica não mostra, à primeira vista, todas suas propriedades a partir

de seu traçado ou de suas formas, mas a partir do que é dito e por isso pode ser considerada como uma teorização da representação figural, tornando assim, de certa maneira, a figura geométrica um fragmento do discurso teórico. No exemplo anterior a apreensão discursiva ocorre a partir do enunciado que permite a percepção de um tetraedro regular e de sua construção; além de outras propriedades que talvez possam ser enunciadas a partir da exploração da construção que faremos no Cabri-3D.

A quarta e última apreensão, de acordo com Duval (2012), é a **operatória** que se refere a modificações que podem ser feitas nas figuras para ajudar na resolução de um problema proposto tanto, graficamente, quanto geometricamente ou mesmo mentalmente. Essas modificações podem ser de três tipos: a mereológica, a ótica e a posicional. A modificação **mereológica**, se faz em função da relação parte todo, porque podemos dividir a figura em partes, em várias subfiguras, ou ainda a incluir em outra figura de modo que ela se torne uma subfigura. Por sua vez, a modificação **ótica**, transforma uma figura em outra por ampliação, redução ou mesmo deformação. Por fim, a modificação **posicional**, transforma a figura alterando a orientação e a posição, podendo-se deslocá-la ou rotacioná-la. Como exemplo de uma apreensão operatória a partir de uma modificação mereológica (figura 82), a divisão um octaedro regular em partes, das quais se destaca uma pirâmide que tem como base uma de suas faces e como vértice seu centro.

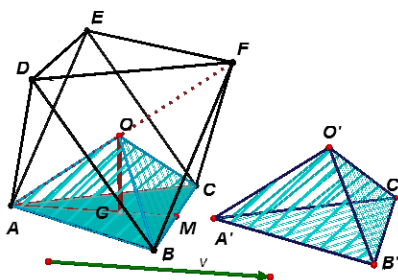
Figura 82 – Apreensão operatória em um octaedro por uma modificação mereológica



Fonte: produção do autor.

Como exemplo de outra apreensão operatória a partir de uma modificação **posicional** (figura 83) em que transladamos a pirâmide em destaque no exemplo anterior por um vetor v .

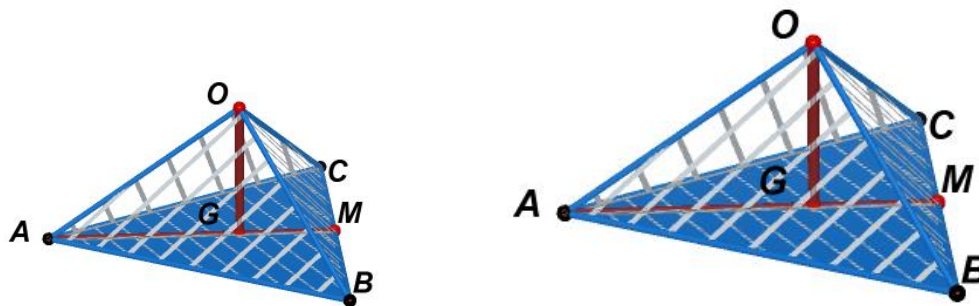
Figura 83 – Apreensão operatória em um octaedro por uma modificação posicional



Fonte: produção do autor.

Para exemplificar uma apreensão operatória por uma modificação **ótica** (figura 84) apresentamos a ampliação da pirâmide do exemplo anterior.

Figura 84 – Apreensão operatória de uma pirâmide por uma modificação ótica



Fonte: produção do autor.

A articulação entre dois ou mais tipos de apreensão pode, segundo Moretti e Brandt (2015), ser solicitada na resolução de um problema em geometria e apontam, principalmente, quatro dessas articulações. A **figura geométrica** como resultado da articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva, sendo a segunda subordinada à primeira, pois é necessário que a figura, seja geométrica, deve ser vista a partir de hipóteses e não apenas de formas ou propriedades evidentes. Não há figura geométrica sem legenda. A **visualização** como resultado da articulação entre as apreensões perceptiva e operatória. A **heurística e demonstração** que articula a apreensão operatória (subordinada à apreensão perceptiva) e a apreensão discursiva. A **construção geométrica** que resulta da articulação entre a apreensão sequencial e a apreensão discursiva que também requer a apreensão perceptiva.

Em termos de Transposição Didática entendemos que a externa já ocorreu, tendo em vista que tanto os poliedros regulares convexos, quanto o cálculo de medida de sólidos estão contemplados na matemática escolar, como já vimos. Entendemos que contribuiremos, com nosso trabalho, para possíveis transposições internas, na medida em que buscamos a possibilidade de construir esses poliedros utilizando ferramentas do Cabri-3D, bem como de realizar um estudo matemático a respeito de relações e propriedades que possam ser estabelecidas a partir da construção.

Quanto aos Registros de Representações Semióticas acreditamos que durante todo o trabalho necessitaremos fazer conversões de registros, assim como tratamentos em cada um deles. E, ainda, a possibilidade de, com a realização das atividades propostas identificar ações que podem propiciar as apreensões já descritas. Assim, no que segue apresentaremos as construções dos poliedros regulares propostas por Euclides utilizando o Cabri-3D e adaptando os enunciados para uma linguagem atual para tal.

4 OS POLIEDROS REGULARES E SUAS CONSTRUÇÕES POR EUCLIDES

Neste capítulo apresentamos o estudo dos poliedros regulares convexos. Iniciamos por uma breve descrição da obra *Os Elementos* de Euclides, na sequência mostramos algumas características do *software* Cabri-3D e finalizamos com os procedimentos de construção desses poliedros apresentados na obra de Euclides, no livro XIII, (BICUDO, 2009).

4.1 *Os Elementos* de Euclides

De acordo com Bongiovanni (2005), *Os Elementos* de Euclides é o mais antigo texto matemático grego, constituído por 13 livros que expõe o conhecimento matemático elementar da época de Tales (600 a.C) até Euclides (300 a.C). Esta obra prima da matemática grega, é considerada por muitos a obra de referência para estudos em Geometria.

Veras (1970) afirma que a vida de Euclides se limita ao período de 365 à 325 a.C e que escreveu sua obra nos últimos anos de vida. É uma síntese, não só da produção geométrica grega, mas também um compêndio que usa linguagem geométrica plana e espacial. As demonstrações, o mecanismo de concatenação dos teoremas apresentados na obra, ressaltam a geometria como uma ciência autônoma, pois as definições euclidianas, segundo o autor, podem ser classificadas como a essência das coisas ou correspondem a elementos síntese, inteligíveis já que propiciam a clareza na linguagem. Os postulados são de caráter prático, compatíveis entre si e os axiomas ou noções comuns são verdades auto evidentes.

Bongiovanni (2005) apresentou uma organização da estrutura axiomática dos 13 livros como mostra o quadro 3.

Salientamos que a obra de Euclides foi traduzida para o português por Irineu Bicudo e publicada em 2009 e é dela que estamos considerando as construções de Euclides. Nossa pesquisa se concentra no livro XIII que trata dos poliedros regulares convexos, especificamente, nas proposições 13, 14, 15, 16 e 17 que tratam da construção dos poliedros regulares tetraedro, octaedro, hexaedro, icosaedro e dodecaedro.

Quadro 3 – Estrutura do livro Elementos de Euclides

Livro I	Propriedades dos triângulos, teoria das paralelas (proposições 27 a 32) e figuras equivalente	23 definições, 9 axiomas, 5 postulados, 48 proposições
Livro II	Álgebra geométrica	2 definições, 14 proposições
Livro III	A geometria do círculo	11 definições, 39 proposições
Livro IV	Polígonos regulares	7 definições, 16 proposições
Livro V	A teoria das proporções	18 definições, 25 proposições
Livro VI	Tales e figuras semelhantes	4 definições, 33 proposições
Livro VII	Teoria dos conjuntos	23 definições, 39 proposições
Livro VIII	Teoria dos números	27 proposições
Livro IX	Teoria dos números	36 proposições
Livro X	Números incomensuráveis	4 definições, 115 proposições
Livro XI	Geometria espacial de posição	28 definições, 39 proposições
Livro XII	Áreas e volumes	18 proposições
Livro XIII	Poliedros regulares	18 proposições

Fonte: Bongiovanni (2005, s.p.)

Procuramos transformar as orientações expressas no livro XIII do texto de Euclides para uma linguagem atual, tanto da língua natural, quanto da matemática, os enunciados das construções e as argumentações e propriedades levantadas. Ao mesmo tempo teremos que adaptar esses enunciados e argumentos para inserir termos específicos na utilização de um *software* para construções geométricas, no nosso caso, o *Cabri-3D*. Dessa forma, no que segue apresentamos algumas vantagens da utilização do *software Cabri-3D* em vez de lápis e papel para as construções que realizaremos.

4.2 *Cabri-3D*

O ambiente *Cabri-3D* traz para a educação matemática ferramentas importantes para construções geométricas, pois oferece a possibilidade de manipulação de representações de objetos por meio de seu dinamismo, o que facilita as articulações entre apreensões já citadas, ou seja: a figura geométrica, a visualização, o levantamento de conjecturas e demonstrações. A construção e manipulação de figuras geométricas que representam objetos espaciais é importante no ensino, porque favorece o que Duval (2005) chamou de desconstrução dimensional, ou seja, uma mudança na maneira de olhar uma figura. Para o autor a desconstrução dimensional se faz necessariamente em articulação com uma atividade discursiva, no nosso caso, os enunciados das construções. As construções realizadas no

Cabri-3D permitirão, por seu dinamismo, a manipulação da figura e a percepção de que a representação no plano de um poliedro (que em um modelo material teria dimensão 3) é composta de pontos (dimensão zero), de segmentos (dimensão um) e de regiões planas (dimensão 2).

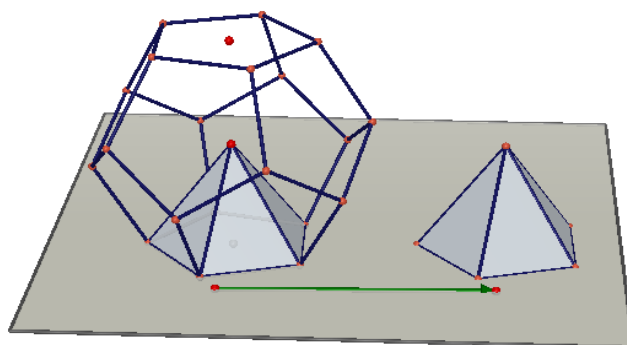
Além disso, a construção em lápis e papel de figuras espaciais exige conhecimentos de técnicas de perspectiva e torna a construção mais complexa por permitir apenas um ponto de vista. No entanto, no *Cabri-3D* as técnicas de perspectivas fazem parte do *software* e, muitos usuários não a percebem e, ainda, o dinamismo permite a mudança de ponto de vista durante a construção, ou seja, posso colocar a figura em uma posição que facilite essa tarefa.

Outra vantagem do *Cabri-3D* em relação ao lápis e papel é a possibilidade de poder esconder todos os traçados auxiliares e deixar visível apenas o resultado final da construção. Esses traçados podem ser recuperados e se tornarem visíveis sempre que o usuário assim o desejar.

Entre os *softwares* de geometria dinâmica disponíveis, tivemos acesso ao *Cabri-3D* e ao *Geogebra-3D*, sendo este último gratuito. Verificamos que ambos apresentam ferramentas semelhantes e permitiriam a construção dos poliedros regulares que pretendemos, no entanto, optamos pelo *Cabri-3D* por estarmos mais familiarizados com ele e o utilizarmos há algum tempo.

Uma das ferramentas que utilizamos foi a translação por um vetor (figura 85), para destacar uma pirâmide contida em um dodecaedro regular, realização que demandaria tempo e uma certa complexidade se realizada em lápis e papel, ou por outros tipos de modelos, como os feitos em cartolina a partir da planificação de superfícies.

Figura 85 – Translação por vetor de uma pirâmide contida em um dodecaedro regular



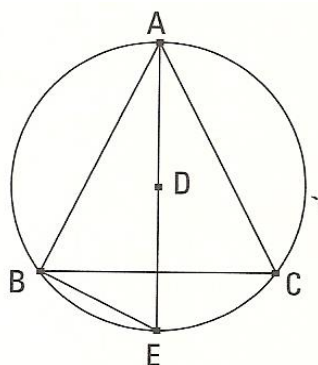
Fonte: produção do autor.

Entendemos que apresentaremos uma nova possibilidade de trabalho com os poliedros convexos, que realizada com o *Cabri-3D* abre caminhos para organização de sequências de ensino que associem a construção de poliedros às relações matemáticas que possibilitam deduzir fórmulas para o cálculo de medida de volume. Essas construções em linguagem atual, tanto da língua natural, quanto matemática é o que apresentaremos na sequência, iniciando pela construção de um tetraedro regular.

4.3 Tetraedro regular

Antes de iniciarmos a construção do tetraedro regular é necessário apresentar a proposição 12, do livro XIII, que diz: “um triângulo equilátero inscrito em um círculo, o lado do triângulo é, em potência, o triplo do raio do círculo” (BICUDO, 2009, p.576) que está acompanhado da figura 86.

Figura 86 – Tetraedro regular inscrito em uma esfera por Euclides

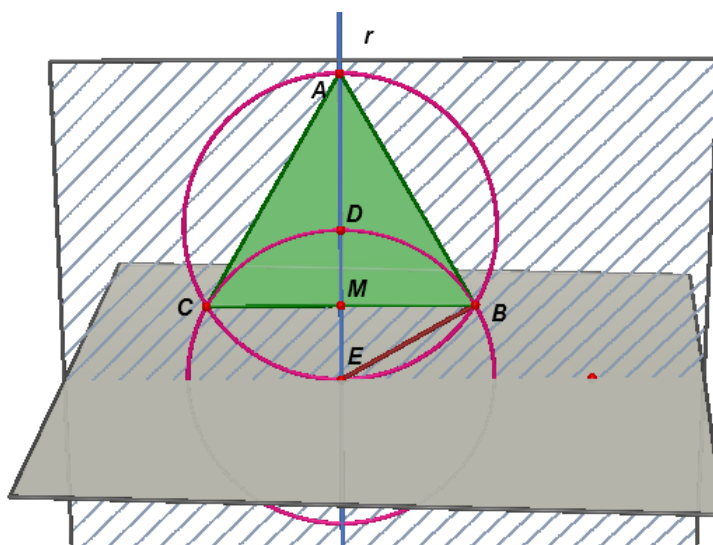


Fonte: Bicudo, 2009, p.576

Em linguagem atual essa proposição poderia ser assim enunciada: “se um triângulo equilátero está inscrito em uma circunferência então o quadrado da medida do lado desse triângulo é igual ao triplo do quadrado da medida do raio da circunferência”, ou seja, $AB^2 = 3BE^2$.

A construção, proposta por Euclides, quando feita no *Cabri-3D*, parte do traçado de uma reta r perpendicular ao plano de base passando por um ponto E qualquer (figura 87). Por um ponto qualquer do plano de base e a reta r , traçamos um plano perpendicular a este, para ser suporte da circunferência de centro em D e raio DE , que determina o ponto A na intersecção com a reta r , um dos vértices do triângulo. Os outros dois vértices, B e C , são obtidos a partir da intersecção dessa circunferência com outra circunferência com centro em E e raio ED .

Figura 87 – Construção de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência



Fonte: produção do autor.

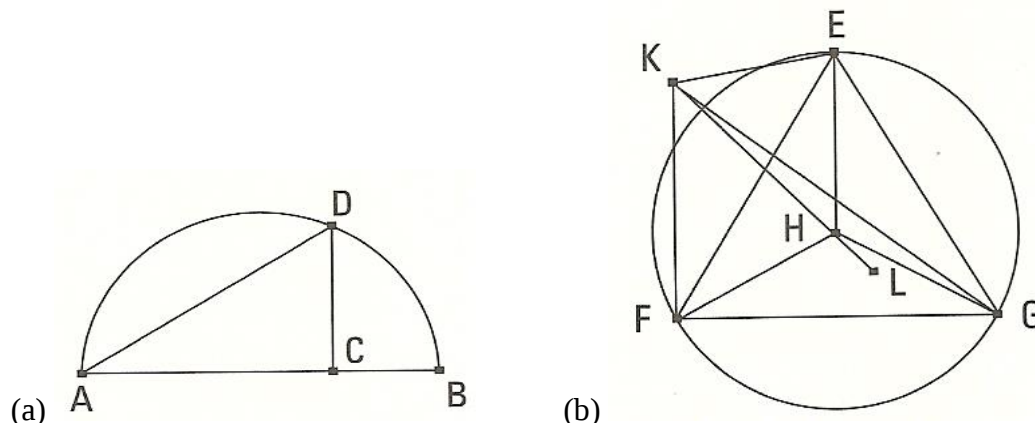
Temos que mostrar agora que $AB^2 = 3BE^2$.

Construído, na figura 87, o triângulo equilátero ABC , inscrito em uma circunferência de centro em D e raio $AD = BD = CD$. Como a reta AD intercepta a circunferência no ponto E , temos $AE = 2DE$ e $\overline{AE}^4$ divide $\overline{CB}$ em duas partes de mesma medida, isto é, M é ponto médio de $\overline{CB}$ e $\overline{DE}$. De onde podemos concluir que $\frac{AM}{AE} = \frac{3}{4}$ e ainda que $AD = 2DM$. Por ser o triângulo ABC equilátero, o arco BEC representa um terço da circunferência e o arco BE representa então um sexto da circunferência. Logo, $\overline{BE}$ representa o lado de um hexágono regular inscrito na circunferência e, portanto, $BE = DE$. Como $AE = 2DE$ então $AE^2 = 4DE^2 = 4BE^2$. Mas, por outro lado, como o triângulo ABE é retângulo em B vem que $AE^2 = AB^2 + BE^2$. Assim, $4BE^2 = AB^2 + BE^2$ que nos dá: $AB^2 = 3BE^2$. Podemos então concluir que $AB = BE\sqrt{3}$, ou ainda que $AB = r\sqrt{3}$ em que r representa a medida do raio da circunferência em que o triângulo equilátero está inscrito.

Voltando à Euclides encontramos a proposição 13, que diz como “construir uma pirâmide e contê-la pela esfera dada e provar que o diâmetro da esfera é, em potência, uma vez e meia o lado da pirâmide”, (BICUDO 2009 p.586), acompanhada da figura 88.

⁴ Em relação as notações, utilizaremos $\overline{AE}$ para representar segmento e AE para representar sua medida.

Figura 88 – Construção de uma pirâmide contida em uma esfera apresentada por Euclides



Fonte: Bicudo, 2009, p.577.

A partir de uma semicircunferência de diâmetro AB determinamos o ponto C de tal modo que $AC = 2BC$. Por C traçamos uma reta perpendicular ao diâmetro que determina na circunferência o ponto D .

Como o triângulo ADB é retângulo em D , sabemos que $CD^2 = AC \cdot CB$ (1) e que $AD^2 = AB \cdot AC$ (2). De (1) vem que $AC = \frac{CD^2}{CB}$ que substituído em (2) nos dá $AD^2 = AB \cdot \frac{CD^2}{CB}$. Mas como $AB = 3CB$, por construção, temos $AD^2 = 3CB \cdot \frac{CD^2}{CB}$.

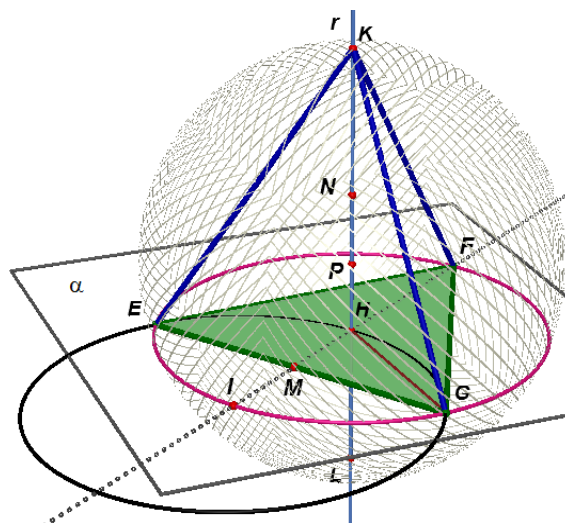
Logo, $AD^2 = 3CD^2$ ou seja, de acordo com a proposição 12, $\overline{AD}$ representa o lado de um triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio $\overline{CD}$. Assim, a construção do tetraedro inscrito em uma esfera é justificada pela relação entre o diâmetro dessa esfera e a aresta do tetraedro.

Euclides refere-se ao tetraedro regular circunscrito por uma esfera e, em linguagem atual, a proposição 13 seria: “construir um tetraedro regular inscrito em uma esfera e provar que o quadrado da medida do diâmetro da esfera é igual a $\frac{3}{2}$ do quadrado da medida da aresta do tetraedro”, ou seja $KL^2 = \frac{3}{2}KE^2$.

Vamos inscrever um tetraedro em uma esfera (figura 89). Por um ponto qualquer no plano de base traçamos uma reta r perpendicular a esse plano. Determinamos, nessa reta, os pontos P e K e por ele traçamos a esfera de centro em P e raio $\overline{PK}$, que determina o ponto L da intersecção com a reta r .

Dividimos então o diâmetro em três partes para determinar o ponto H de tal forma que $KH = 2HL$. Podemos também, determinar os pontos L e H na reta r e tomar o simétrico N de L em relação ao ponto H .

Figura 89 – Construção do tetraedro regular inscrito em uma esfera



Fonte: produção do autor.

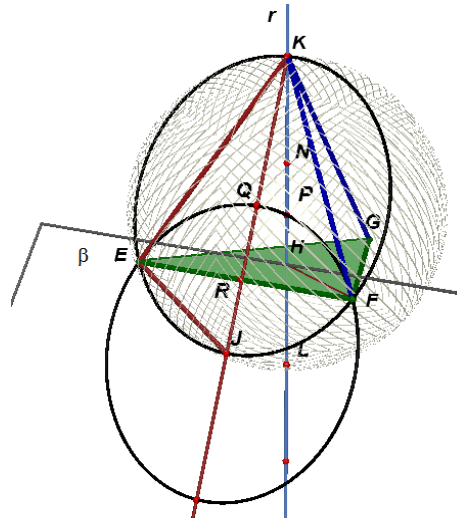
O ponto P é médio de $\overline{HN}$ e centro da esfera. Traçamos o plano α , que passa pelo ponto H e é paralelo ao plano de base e, a intersecção desse plano com a esfera nos dá a circunferência de centro H . A partir da proposição 12, tomamos um ponto I , qualquer na circunferência de centro H , para traçar a circunferência de centro em I e raio $\overline{IH}$ para obter os pontos E e G , na intersecção da circunferência de centro H , que determinarão a aresta $\overline{EG}$ do tetraedro. A reta que passa por I e H , determinará na intersecção com a circunferência de centro H , o ponto F de tal forma que $FH = 2HM$, sendo M o ponto médio da aresta $\overline{EG}$. Assim ficam determinadas as arestas $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GE}$ que, pela proposição 12, representam os lados de um triângulo equilátero. Por outro lado, se observamos o triângulo KEL e sabemos que $\overline{KE}$ representa uma aresta do tetraedro e que $KH = 2HL$. Logo, analogamente, $\overline{KF}$ e $\overline{KG}$ representam as outras arestas do tetraedro regular.

Para verificar que, de fato, o tetraedro é regular temos que mostrar $EF = EK$, isto é, que o triângulo KEF é equilátero.

Podemos observar, na figura 90, o plano β , determinado pelos pontos K , E e F , uma circunferência passando pelos mesmos pontos e o triângulo KEF . Como KEF é equilátero inscrito em uma circunferência, então $KE^2 = 3QJ^2$. O triângulo KEJ está inscrito em uma semicircunferência e, portanto, é retângulo em E , então $KJ^2 = KE^2 + EJ^2$. Como $KJ = 2QJ$,

então $KJ^2 = 4QJ^2$. Temos que $4QJ^2 = KE^2 + EJ^2$, mas $EJ = QJ$ (lado do hexágono inscrito em uma circunferência), então $4QJ^2 = KE^2 + QJ^2$, ou seja, $KE^2 = 3QJ^2$.

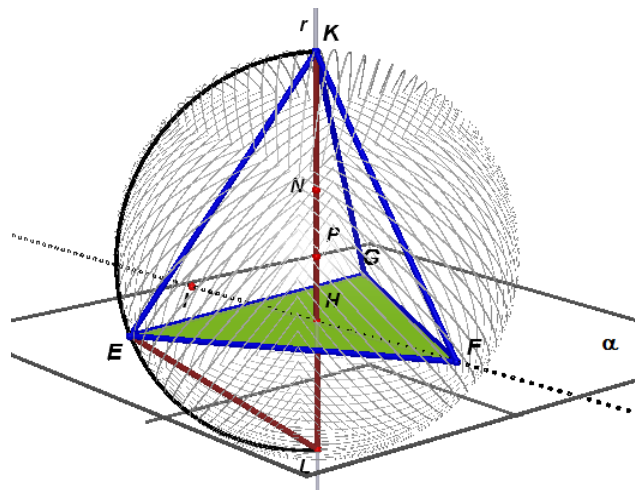
Figura 90 – Mostrando que o triângulo EFK é equilátero



Fonte: produção do autor.

Agora cabe provar que $KL^2 = \frac{3}{2}KE^2$ da proposição 13. Observando a figura 91 vemos que o triângulo KEL está inscrito em uma semicircunferência e, portanto, é retângulo em E . Por construção, sabemos que $KL = 3HL$, ou seja, $HL = \frac{1}{3}KL$ (1) e, sabemos ainda, que $EL^2 = HL \cdot KL$ (2). Substituindo (1) em (2) vem que $EL^2 = \frac{1}{3}KL^2$.

Figura 91 – Tetraedro regular inscrito na esfera



Fonte: produção do autor.

Por outro lado, $KL^2 = KE^2 + EL^2$, ou seja $KL^2 = KE^2 + \frac{1}{3}KL^2$, o que permite concluir que $KL^2 = \frac{3}{2}KE^2$, ou seja, o quadrado da medida do diâmetro da esfera é igual a uma vez e meia o quadrado da medida da aresta do tetraedro regular inscrito nessa esfera.

Assim, feita a construção do tetraedro regular, como proposto por Euclides, utilizando as ferramentas do *Cabri-3D* levantamos a hipótese de que essa construção possibilita encontrar medidas que permitam determinar outras fórmulas para o cálculo de seu volume.

Ressaltamos que nas construções com o *Cabri-3D*, encontramos três maneiras diferentes de construir uma circunferência: por um segmento em um plano, por dois pontos distintos em um determinado plano ou com a ferramentas esfera e curva de intersecção. Em nosso trabalho utilizaremos essas três maneiras optando pela mais conveniente dependendo da situação.

Analisando as etapas da construção realizadas, notamos que o *Cabri-3D* possibilitou a conversão de um enunciado em língua natural e notação simbólica para o registro figural e deste para o algébrico, para realizar as demonstrações que justificam as construções. A construção no *Cabri-3D* permitiu que os traçados auxiliares fossem escondidos e apenas ficasse visível o que se quer mostrar, como na figura 91.

Continuamos nossa investigação, com a construção do hexaedro regular ou cubo.

4.4 Hexaedro regular

No livro XIII de Euclides encontramos a proposição 15 que descreve como “construir um cubo e contê-lo por uma esfera, como a pirâmide, e provar que o diâmetro da esfera é, em potência, o triplo do lado do cubo”, (BICUDO 2009, p. 581) acompanhada da figura 92.

Em linguagem atual a proposição 15 pode ser “construir um cubo circunscrito por uma esfera e provar que o quadrado da medida do diâmetro da esfera é igual ao triplo do quadrado da medida da aresta do cubo”, ou seja $KG^2 = 3KE^2$.

Figura 92 – Construção de Euclides para o cubo



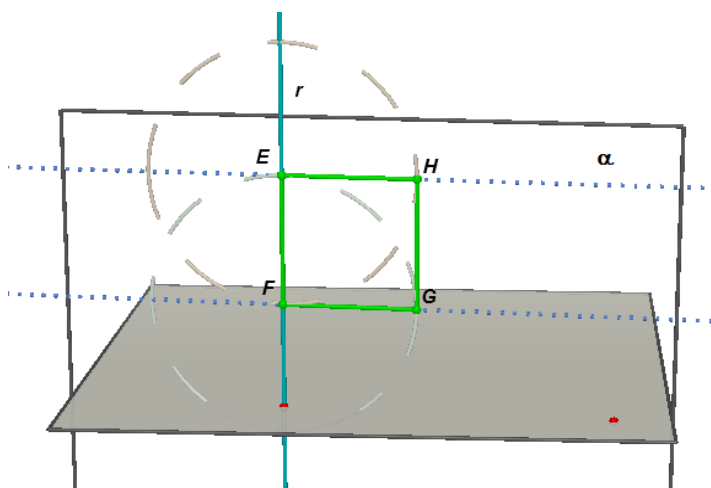
Fonte: Bicudo 2009, p.581.

Euclides circunscreve uma esfera em um cubo com a ajuda da primeira construção da figura 92, que é a mesma feita para o tetraedro. Enquanto o cateto $\overline{AD}$ representa a aresta do

tetraedro, aqui o cateto $\overline{BD}$ representa a aresta do hexaedro. Ele usa a primeira figura para mostrar que em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ se criarmos um ponto C de modo que $AC = 2CB$ então $AB^2 = 3BD^2$, ou seja se $\overline{BD}$ é aresta de um hexaedro então três vezes sua medida ao quadrado será igual ao quadrado da medida do diâmetro da esfera que o circunscreve.

Para a construção do cubo no *Cabri-3D* podemos escolher vários caminhos para traçar o quadrado inicial, mas observando a figura de Euclides, decidimos iniciar pelo quadrado representado por $EFGH$. Para isso, traçamos por um ponto qualquer do plano de base, uma reta perpendicular à ele (figura 93) e, por ela e um outro ponto qualquer do plano de base determinamos o plano α e nele construímos o quadrado pretendido.

Figura 93 – Construção do quadrado para formar o cubo

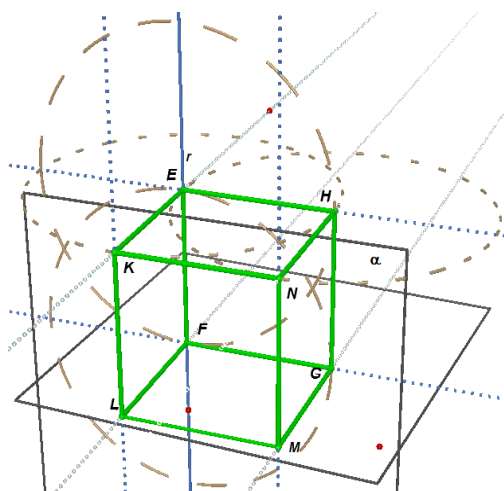


Fonte: produção do autor.

Com retas perpendiculares ao plano α passando pelos pontos E, F, G e H (figura 94), criamos os pontos K e N , a partir de circunferências de centro em E e raio EH , e de centro em H e raio HE , em um plano auxiliar determinado pelos pontos E, H e K . Traçando perpendiculares ao plano de base, passando por K e N , determinamos os pontos M e L . Assim, os pontos E, H, G, F, L, M, N e K determinarão os vértices do cubo e os traçados dos segmentos que representam suas arestas completam a construção.

Agora devemos provar que $KG^2 = 3KE^2$, ou seja, $\overline{KE}$ é uma aresta do cubo então $\overline{KG}$ é diâmetro da esfera que circunscreve esse cubo.

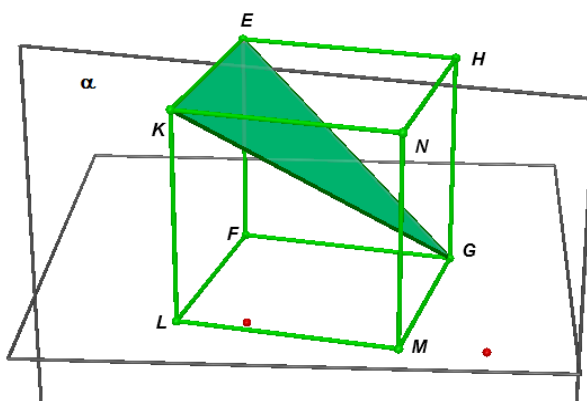
Figura 94 – Construção do cubo a partir do segmento EF



Fonte: produção do autor.

Na figura 95, observando o triângulo GHE , contido em uma face do cubo, retângulo em H e o triângulo GEK retângulo em E , podemos dizer que $GE^2 = GH^2 + HE^2$. Mas como $GH = HE$ vem que $GE^2 = HE^2 + HE^2$, então $GE^2 = 2HE^2$.

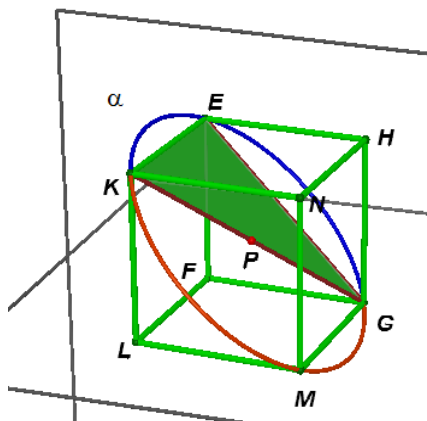
Figura 95 – Diagonal do triângulo retângulo GEK , retângulo em E



Fonte: produção do autor.

Por outro lado, no triângulo GEK , temos que $GK^2 = GE^2 + KE^2$ e como $KE = HE$ vem que $GK^2 = 2HE^2 + HE^2$, ou seja, $GK^2 = 3HE^2$. Logo, a medida do diâmetro da esfera ao quadrado é igual ao triplo da medida da aresta do cubo inscrito elevado ao quadrado, ou ainda $KG = HE\sqrt{3}$. Podemos entender que, segundo Euclides, GK é diâmetro da esfera que circunscreve o cubo de aresta KE . De fato, na figura 96, podemos observar que o triângulo EGK é congruente ao triângulo MGK , pois possuem dois lados congruentes, $KE = GM$ e $GE = KM$ e ainda têm o lado $\overline{KG}$ comum.

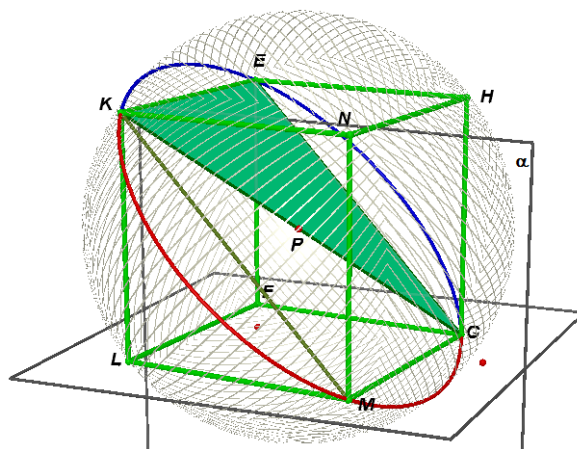
Figura 96 – Hipotenusa do triângulo GMK, retângulo em M



Fonte: produção do autor.

Como esses triângulos são retângulos em E e M , respectivamente, estão inscritos em uma semicircunferência de mesmo diâmetro, o que nos permite dizer que os pontos E , K , M e G são pontos da esfera que circunscreve o cubo e tem centro no ponto P , médio de $\overline{KG}$ como mostra a figura 97.

Figura 97 – Cubo circunscrito em uma esfera.



Fonte: produção do autor.

Assim, a construção do hexaedro inscrito em uma esfera é justificada pela relação que existe entre a medida do diâmetro dessa esfera e a medida da aresta do hexaedro. Além disso, podemos levantar a hipótese que essa construção possibilita encontrar medidas para deduzir outras fórmulas para o cálculo da medida do volume de um hexaedro.

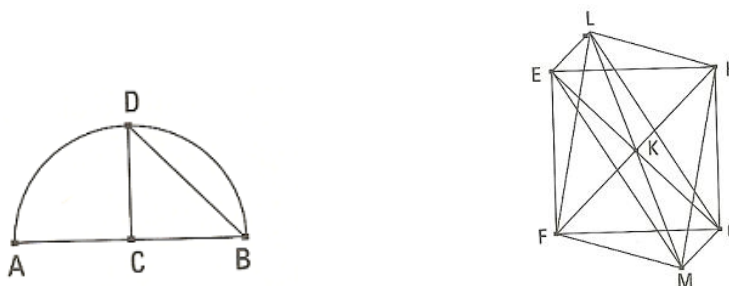
Com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2012) ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que um simples reconhecimento daquilo que a imagem mostra. Notamos que para construir uma representação que traduzisse a construção de Euclides, figura 97, utilizamos uma sequência de construções

que pode ser interpretada como apreensão sequencial no ambiente *Cabri-3D*. Em cada uma das etapas foi necessário a utilização de, além do registro da língua natural, no enunciado, utilizamos o registro figural e o registro algébrico para comprovar as relações descritas por Euclides. Continuamos nossa investigação, com a construção do octaedro regular.

4.5 Octaedro regular

Na proposição 14 de Euclides encontramos como “construir um octaedro e contê-lo por uma esfera, como nas coisas anteriores, e provar que o diâmetro da esfera é, em potência, o dobro do lado do octaedro”, (BICUDO 2009, p.579), seguida da figura 98.

Figura 98 – Construção apresentada por Euclides, do octaedro regular inscrito na esfera



Fonte: Bicudo, 2009, p.580.

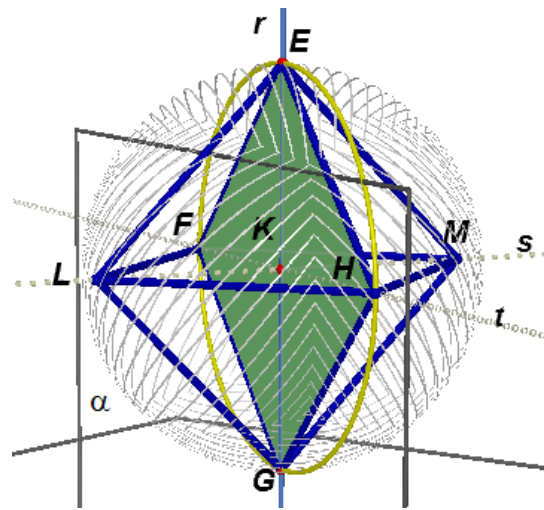
Euclides refere-se a um octaedro regular, cujas arestas respeitam as relações que apresenta para o triângulo ABD . Esse octaedro pode ser circunscrito por uma esfera e é construído por duas pirâmides de base quadrada representada por $ELGM$.

Na primeira construção da figura 98, Euclides representa o diâmetro $\overline{AB}$ do semicírculo ADB considerando C o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ como a aresta do octaedro regular. Mostra ainda que nessas condições $AB^2 = 2AD^2$ considerando que no triângulo ADB , retângulo em D , vale que $AB^2 = AD^2 + DB^2$, mas como $AD = DB$ vem que $AB^2 = 2AD^2$.

Em linguagem atual podemos escrever a proposição 17 como “construir um octaedro regular inscrito em uma esfera e provar que o quadrado da medida do diâmetro da esfera é igual ao dobro do quadrado da medida da aresta do octaedro regular, isto é $LM^2 = 2LE^2$.”

Na construção com o *Cabri-3D* (figura 99) decidimos construir o octaedro em uma outra posição. Assim, construímos a reta r perpendicular ao plano de base e nela tomamos os pontos E e G para que $\overline{EG}$ represente o diâmetro da esfera, determinamos o ponto K seu ponto médio e por ele traçamos a reta t perpendicular a r .

Figura 99 – Construção do octaedro regular



Fonte: produção do autor.

Por r e um ponto qualquer do plano de base construímos o plano α como auxiliar no traçado da circunferência de centro em K e raio $\overline{KE}$. Na intersecção da reta t com essa circunferência determinamos os pontos F e H . Obtemos assim o quadrado $EFGH$ como Euclides orienta. Traçamos então a esfera de centro em K e raio $\overline{KE}$ e a reta s perpendicular ao plano α , passando por K . A intersecção da reta s com a esfera nos dá os pontos L e M vértices do octaedro regular.

Euclides depois da construção do octaedro passa então a mostrar que os triângulos da superfície poliédrica são equiláteros para concluir que o octaedro construído é regular. Em nossa construção (figura 99) podemos concluir que o lado do quadrado $ELGM$ têm a mesma medida de lado do quadrado $EFGH$ porque os dois tem como diagonal o diâmetro da esfera.

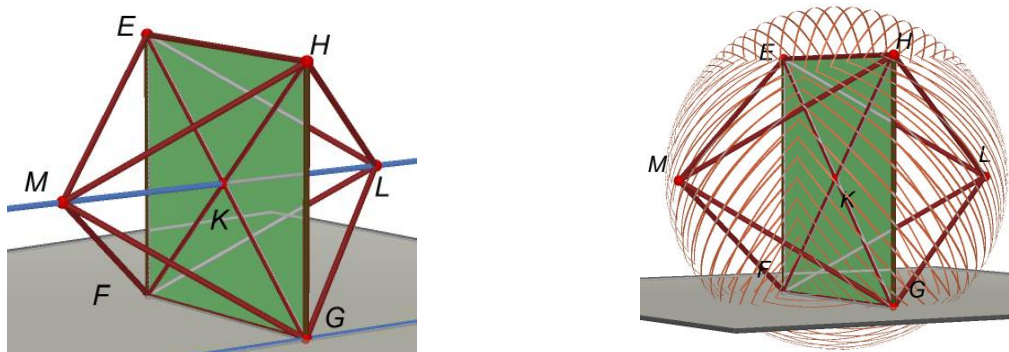
Temos que provar agora que $LM^2 = 2LE^2$.

Podemos dizer que $LM^2 = LE^2 + EM^2$, pois o triângulo LEM é retângulo em E . Mas como $LE = EM$ temos que $LM^2 = LE^2 + LE^2$ do que concluímos que $LM^2 = 2LE^2$, ou seja, o quadrado da medida do diâmetro da esfera é igual ao dobro do quadrado da medida da aresta do octaedro regular. Esse resultado pode ser representado ainda por $LM = LE\sqrt{2}$ e considerando que $LM = 2r$, em que r representa a medida do raio da esfera circunscrita, concluir que $LE = r\sqrt{2}$. Podemos entender então o octaedro como sendo composto por duas pirâmides de base quadrada com arestas medindo $r\sqrt{2}$ em que r representa a medida do raio da circunferência que circunscreve o quadrado da base dessas pirâmides que tem como altura a mesma medida desse raio.

Assim a construção do octaedro inscrito em uma esfera é justificada pela relação que existe entre a medida do diâmetro dessa esfera e a medida da aresta do octaedro. Por outro lado, o cálculo da medida de seu volume não apresenta grandes problemas no ensino porque podemos entender o octaedro como a composição de duas pirâmides de mesma altura e de base comum quadrada, no entanto podemos levantar a hipótese de que a construção realizada, como proposto por Euclides, pode fornecer medidas que possibilitem outras fórmulas para o cálculo da medida do volume de um octaedro.

O *Cabri-3D* nos dá outras possibilidades de construção (figura 100), por exemplo, a sugerida por Euclides em que a base quadrada das pirâmides que compõem o octaedro está contida em um plano perpendicular ao plano de base.

Figura 100- Outra construção para o octaedro regular

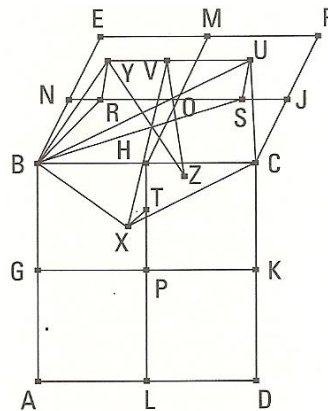


Fonte: produção do autor.

Continuamos nossa investigação com a construção do dodecaedro regular.

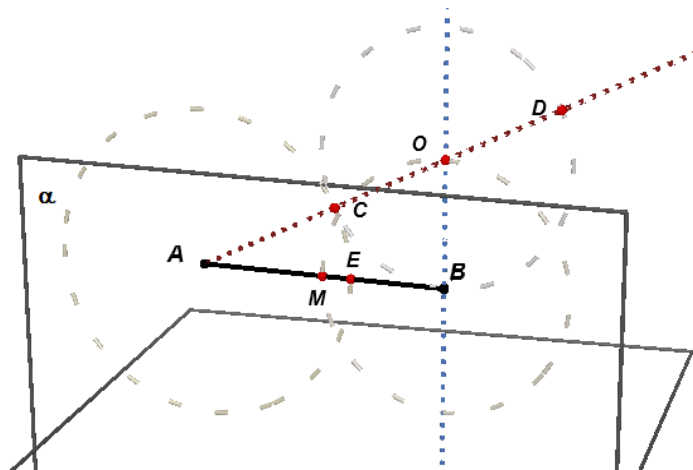
4.6 Dodecaedro regular

Euclides, na proposição 17, do livro XIII, apresenta como “construir um dodecaedro e contê-lo por uma esfera, como as figuras anteriormente ditas, e provar que o lado do dodecaedro é uma irracional, o chamado apótomo”, (BICUDO 2009 p.586), acompanhada da figura 76, retomada aqui como figura 101. Em linguagem atual podemos escrever essa proposição como “construir um dodecaedro circunscrito por uma esfera e provar que a medida da aresta do dodecaedro é um irracional”.

Figura 101 – Construção de Euclides de uma face do dodecaedro regular

Fonte: Bicudo 2009, p.586.

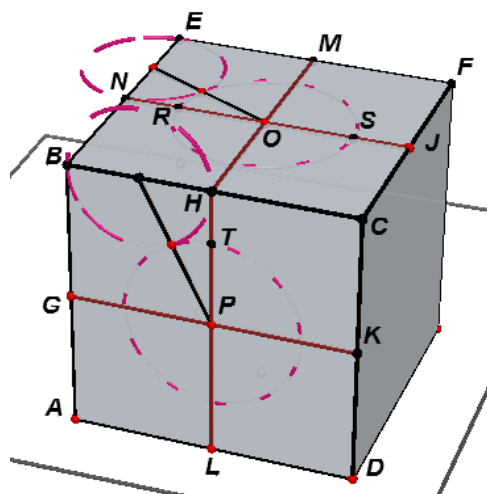
Como Euclides utiliza nesta e em outras construções a divisão de um segmento em média e extrema razão apresentamos agora tal construção. Dizemos que um segmento é dividido em média e extrema razão quando a razão entre o menor segmento obtido e o maior é igual à razão entre o maior segmento obtido e o segmento que está sendo dividido. Se considerarmos um segmento qualquer $\overline{AB}$ (figura 102) dividi-lo em média e extrema razão significa determinar um ponto E em $\overline{AB}$ de tal forma que: $\frac{EB}{AE} = \frac{AE}{AB}$, ou seja $AE^2 = AB \cdot EB$.

Figura 102 – Divisão de um segmento em média e extrema razão

Fonte: produção do autor.

Dado $\overline{AB}$ e M seu ponto médio, contido em um plano α , perpendicular ao plano de base, traçamos por B uma reta perpendicular a esse segmento e nela determinamos o ponto O de tal forma que $BO = \frac{AB}{2}$. A seguir, traçamos a circunferência com centro em O e raio $\overline{OB}$ e a semirreta $\overline{AO}$ que intercepta a circunferência nos pontos C e D . Traçando a circunferência de centro em A e raio AC determinamos em $\overline{AB}$ o ponto E que o divide em duas partes. Dizemos que o segmento $\overline{AE}$ é o segmento áureo de $\overline{AB}$.

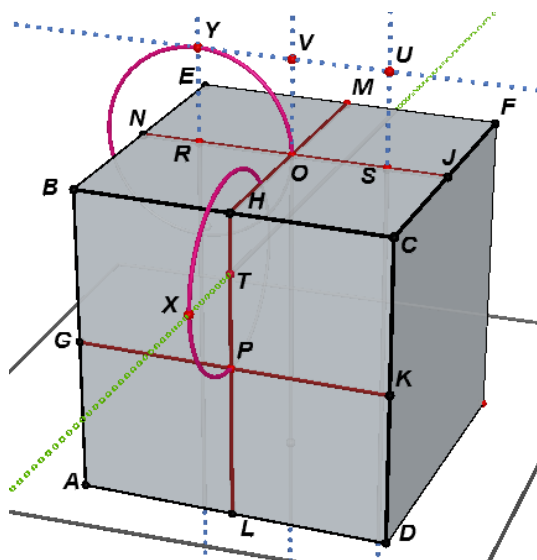
Figura 104 – Divisão em média e extrema razão dos segmentos ON, OJ e PH



Fonte: produção do autor.

Continuando com a construção proposta por Euclides devemos traçar retas perpendiculares às duas faces do cubo, passando pelos R, O, S e T (figura 105). Traçamos então a circunferência de centro em R e raio RO e determinamos na intersecção com a reta perpendicular, que passa pelo ponto R, o ponto Y.

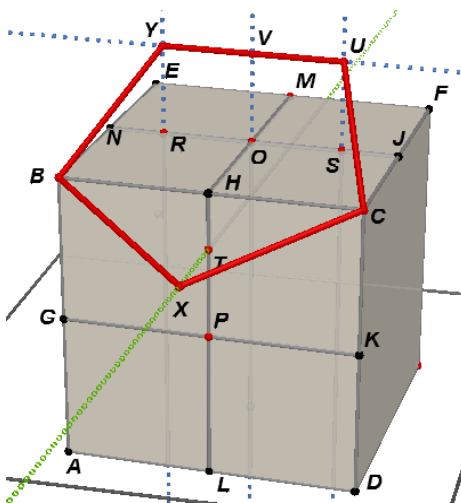
Figura 105 – Construção de perpendiculares às faces do cubo



Fonte: produção do autor.

A seguir, traçamos uma reta paralela à aresta $\overline{EF}$ pelo ponto Y para determinar, nas outras duas retas perpendiculares, que passam pelos pontos O e S, os pontos V e U. Com centro em T e raio TP traçamos uma circunferência que determina na perpendicular, que passa pelo ponto T, o ponto X. Os pontos Y, U, C, X e B, como mostra a figura 106, representam os vértices de uma face do dodecaedro.

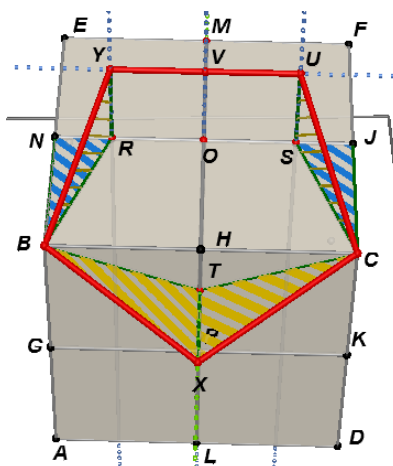
Figura 106 – Construção de uma face do dodecaedro



Fonte: produção do autor.

A seguir Euclides mostra que, de fato o pentágono obtido é equilátero. Mostremos, baseados na figura 107, que os triângulos NRB e JSC são congruentes. O triângulo NRB é retângulo em N e o triângulo JSC é retângulo em J . Por construção, temos que $\overline{JC} \equiv \overline{NB}$, e que $\overline{RN} \equiv \overline{SJ}$. Logo, $\overline{RB} \equiv \overline{SC}$.

Figura 107 – Construção dos triângulos retângulos observados por Euclides

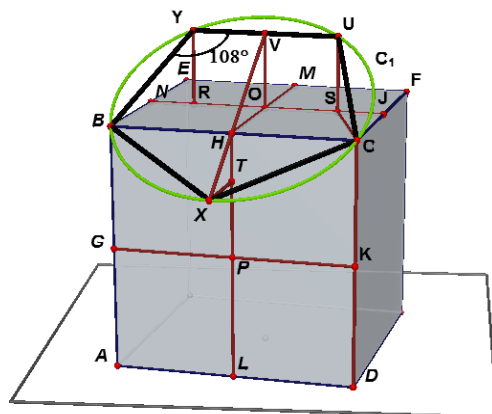


Fonte: produção do autor.

Mostremos agora que os triângulos YRB e USC são congruentes. O triângulo YRB é retângulo em R e o triângulo USC é retângulo em S . Por construção, temos que $\overline{YR} \equiv \overline{US}$ e que $\overline{RB} \equiv \overline{SC}$, como acabamos de mostrar. Logo, $\overline{YB} \equiv \overline{UC}$. Mostremos agora que os triângulos TCX e USC são congruentes. O triângulo TCX é retângulo em T e o triângulo USC é retângulo em S . Por construção, sabemos que $\overline{TC} \equiv \overline{SC}$ e que $\overline{US} \equiv \overline{TX}$. Logo, $\overline{CX} \equiv \overline{UC}$. O mesmo acontece com os triângulos TXB e YRB que nos dá $\overline{BX} \equiv \overline{YB}$. Assim, já mostramos que $\overline{UC} \equiv \overline{CX} \equiv \overline{XB} \equiv \overline{YB}$.

Mostraremos agora que os triângulos BCX e BUY são congruentes. Temos que o pentágono regular está inscrito em uma circunferência, então $\overline{BC} \equiv \overline{BU}$ porque são duas de suas diagonais. Como o triângulo BCX é isósceles, pois $\overline{CX} \equiv \overline{XB}$ e $\overline{XB} \equiv \overline{BY}$, podemos concluir que $\overline{BY} \equiv \overline{YU}$. Portanto, mostramos que $\overline{UC} \equiv \overline{CX} \equiv \overline{XB} \equiv \overline{BY} \equiv \overline{YU}$. Como o pentágono pode ser circunscrito por uma circunferência podemos concluir que está contido em um mesmo plano.

Figura 108 – Pentágono regular, medida dos ângulos internos

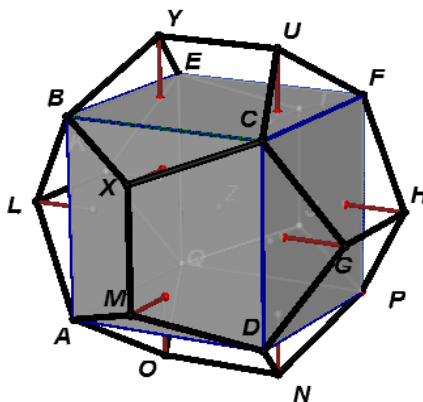


Fonte: produção do autor.

Para mostrar que o pentágono $YUCXB$ é equiângulo, Euclides o inscreveu em uma circunferência (figura 108) e argumentou que como o pentágono é regular divide a circunferência em cinco ângulos congruentes de medida 108° .

A partir da construção dessa primeira face do dodecaedro podemos construir as outras repetindo a construção para cada par de faces consecutivas de um cubo, como mostra a figura 109, ou usar simetria para obter as outras faces, quando possível.

Figura 109 – Construção do dodecaedro a partir do cubo

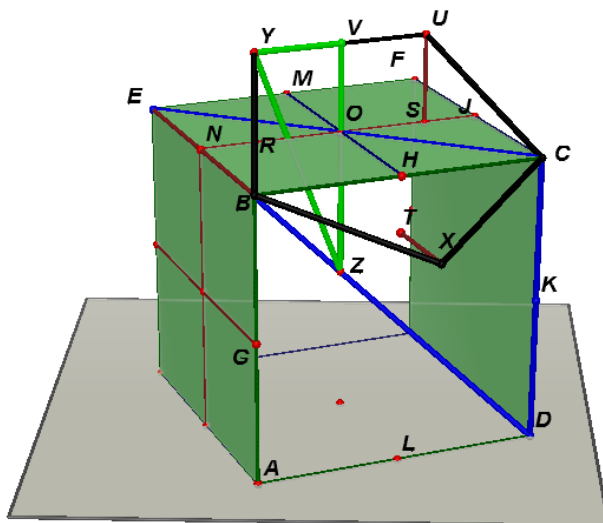


Fonte: produção do autor.

A seguir, Euclides mostra que existe uma esfera que circunscreve o dodecaedro. Como os vértices do cubo são também vértices do dodecaedro regular então o centro da esfera será o

ponto médio de uma diagonal do cubo e seu raio terá a metade da medida dessa diagonal. Para mostrar que a esfera circunscreve realmente o dodecaedro (figura 110) Euclides mostra que o segmento $\overline{YZ}$ tem a metade da medida da diagonal do cubo, ou seja, que $\overline{YZ}$ também é raio da esfera. Para isso, traça a reta que passa por V e O que intercepta a diagonal $\overline{ED}$ do cubo no ponto Z .

Figura 110 – Medida do raio da esfera circunscrita no dodecaedro



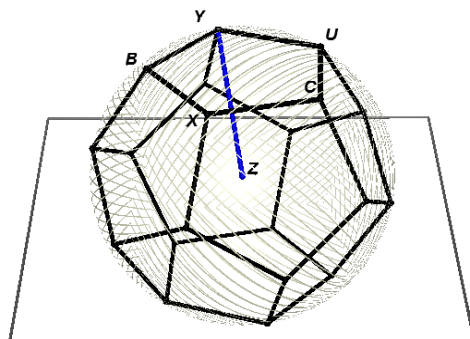
Fonte: produção do autor.

Em linguagem atual podemos observar que $\overline{YZ} \equiv \overline{EZ}$ e considerar que a **aresta do cubo mede x** . Observando o triângulo EFC retângulo em F temos que $EC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$, ou seja, $EC = x\sqrt{2}$ que representa a medida da diagonal de uma face do cubo em função de sua aresta. Observando agora o triângulo ECD , retângulo em C , temos que $ED^2 = (x\sqrt{2})^2 + x^2 = 3x^2$, ou seja, $ED = x\sqrt{3}$, logo $\overline{ED}$ representa a diagonal do cubo em função de sua aresta.

Considerando ainda o triângulo YVZ , retângulo em V , sabemos que como YV tem a mesma medida de RO , como vimos anteriormente $YV = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}$ em que x , neste caso tem a metade da medida da aresta do cubo, ou seja $x = \frac{x}{2}$, logo, $YV = \frac{x\sqrt{5}}{4} - \frac{x}{4}$. Observando o segmento YV no triângulo YVZ , sabemos que $VZ = VO + OZ$, como $VO = YV$ vem que $VZ = \frac{x\sqrt{5}}{4} - \frac{x}{4} + \frac{x}{4}$ ou seja $VZ = \frac{x\sqrt{5}}{4} + \frac{x}{4}$. Assim, podemos calcular a medida de $\overline{YZ}$ em função da medida da aresta do cubo, $YZ^2 = YV^2 + VZ^2 = \left(\frac{x\sqrt{5}}{4} - \frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{5}}{4} + \frac{x}{4}\right)^2$. Desenvolvendo a expressão obtemos que $yz = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Logo, como $YZ = \frac{ED}{2}$, esse segmento representa o raio da esfera que circunscreve o dodecaedro, como mostra a figura 111, pois como o segmento ZY tem

a mesma medida do segmento ZB então Y pertence a esfera e, por consequência, os outros vértices do dodecaedro.

Figura 111 – Dodecaedro inscrito em uma esfera

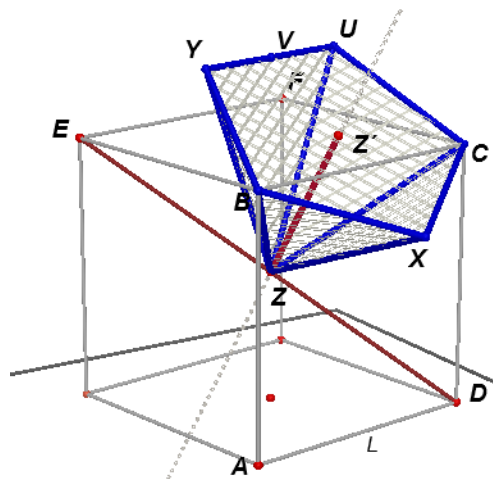


Fonte: produção do autor.

Para mostrar que a medida do lado de um dodecaedro regular é um número irracional Euclides retoma a divisão do segmento em média e extrema razão do início da construção que, como já vimos, trata-se de um número irracional.

Podemos ver, ainda, o ponto Z como vértice de uma pirâmide de base pentagonal (figura 112) e buscar qual seria a medida de sua altura. E, então, interpretar o dodecaedro como sendo composto por 12 pirâmides de base pentagonal e de altura medindo ZZ' .

Figura 112 – Pirâmide pentagonal com base em uma face do dodecaedro



Fonte: produção do autor.

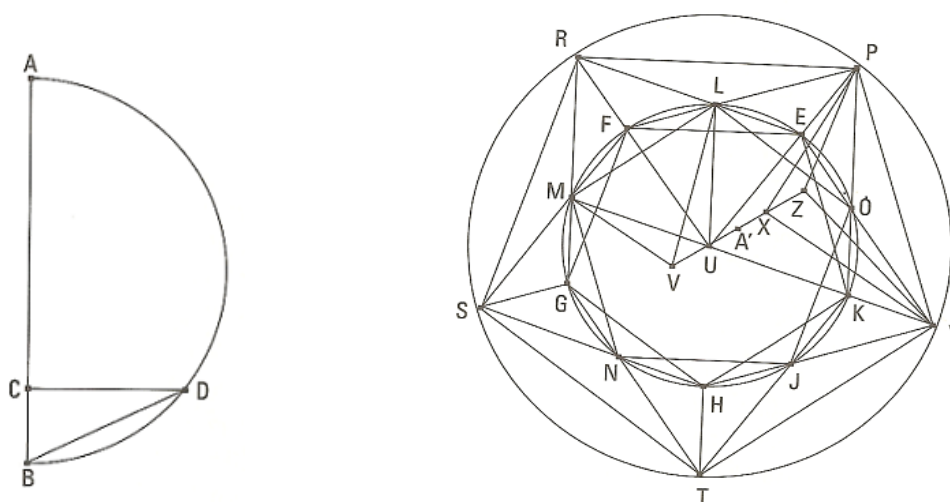
Feita a construção do dodecaedro regular, como proposto por Euclides, mas utilizando as ferramentas do *Cabri-3D*, resta a questão: **É possível calcular a medida da altura de uma pirâmide que tenha como base um pentágono regular que permita compor um dodecaedro regular?** A resposta dessa pergunta é necessária para deduzirmos uma fórmula

para o cálculo da medida de seu volume. Verificaremos se é possível respondê-la no capítulo 5. Continuamos nossa investigação, com a construção do icosaedro regular.

4.7 Icosaedro regular

Euclides (300 a.C), no livro XIII na proposição 16, descreve como “construir um icosaedro e contê-lo por uma esfera, como as figuras anteriormente ditas, e provar que o lado do icosaedro é uma irracional, a chamada menor”, (BICUDO, 2009, p. 581) seguida da figura 113.

Figura 113 – Construção apresentada por Euclides, do icosaedro regular inscrito na esfera



Fonte: Bicudo, 2009, p.583.

A primeira construção da figura 113 representa um segmento $\overline{AB}$ dividido pelo ponto C de tal forma que CB representa a quinta parte da medida AB e, portanto, $AC = 4CB$. Como o triângulo ABD é retângulo em D , vem que $CD^2 = AC \cdot CB$ porque CD é média geométrica de AC e CB . Logo, $CD^2 = 4CB \cdot CB = 4CB^2$ e, portanto, $CD = 2CB$.

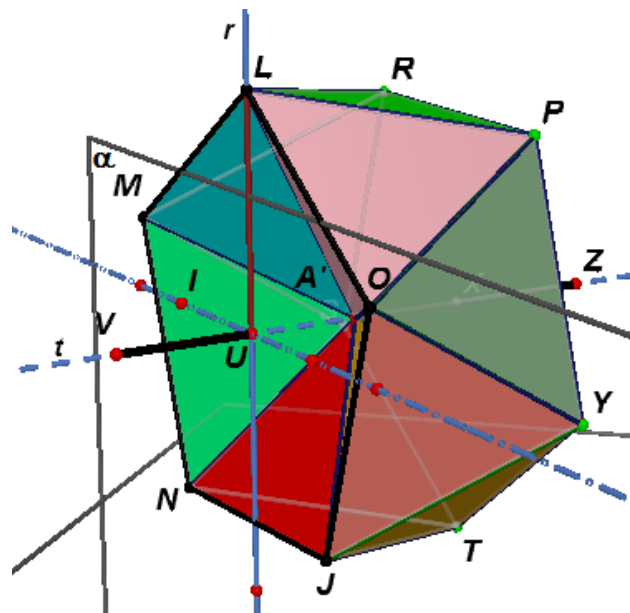
Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras no mesmo triângulo temos que $BD^2 = CD^2 + CB^2$, isto é, $BD^2 = 4CB^2 + CB^2 = 5CB^2$ e, portanto, $BD = CB\sqrt{5}$ que representa a medida da aresta do icosaedro, sendo $\overline{AB}$ o diâmetro da esfera circunscrita.

Em linguagem atual a proposição 16 descreve como “construir um icosaedro inscrito em uma esfera e provar que a aresta do icosaedro tem medida irracional”.

Iniciamos a construção do icosaedro, no *Cabri-3D*, traçando por um ponto qualquer do plano de base uma reta r perpendicular a esse plano e, a partir dessa reta e um outro ponto qualquer do plano de base construímos o plano α , como mostra a figura 114. Determinamos um

Podemos agora esconder o pentágono $EKHGF$ e outras construções auxiliares para construir dez triângulos equiláteros que já serão faces do icosaedro que estamos construindo (figura 117), começando pelos pontos RLP , depois LPO e assim por diante.

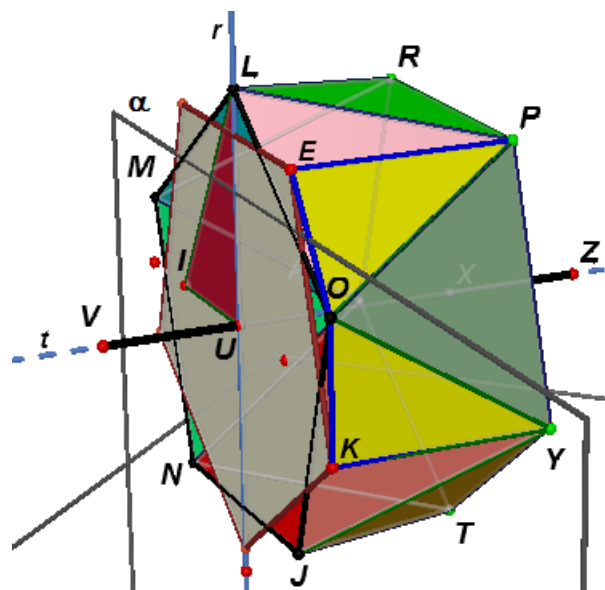
Figura 117 – Construindo o icosaedro. Dez triângulos equiláteros entre os pentágonos



Fonte: produção do autor.

Temos que mostrar então que, de fato, esses triângulos são equiláteros e, para isso, utilizaremos os argumentos de Euclides. Mostrar de novo o pentágono $EKHGF$ e determinar os segmentos $\overline{PE}$, $\overline{KY}$, $\overline{EO}$ e $\overline{OK}$.

Figura 118 – Triângulos retângulo PEO e YKO

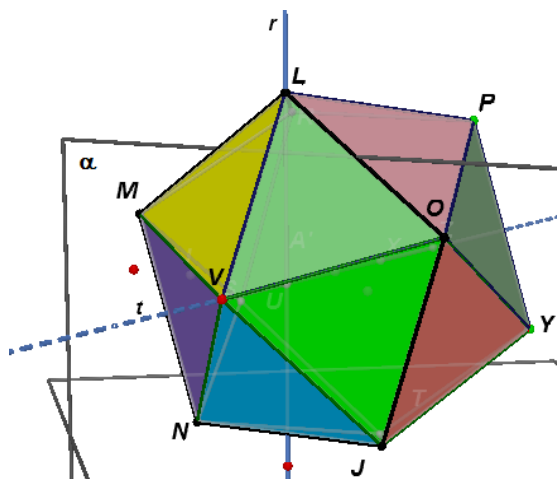


Fonte: produção do autor.

Podemos observar na figura 118, primeiro que os segmentos EP e KY são paralelos à reta t e possuem a mesma medida UL e, ainda, que os segmentos EO e OK têm a mesma medida IU (que seria a medida de um lado do decágono regular). Observando o triângulo PEO , retângulo em E vemos que é congruente ao triângulo LUI e, portanto, $PO = LI$, ou seja, PO tem mesma medida do lado do pentágono. O mesmo ocorre com o triângulo YKO , retângulo em K , isto é, $YO = IL$. Analogamente, para o restante dos triângulos.

Continuando, escondemos outra vez o pentágono $EKHGF$ e os segmentos traçados (figura 119) para construir mais algumas faces por triângulos a partir do ponto V e dos vértices do pentágono $OJNML$.

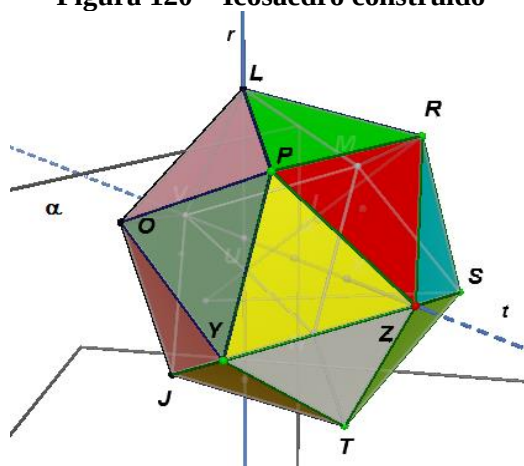
Figura 119 – Mais algumas faces do Icosaedro



Fonte: produção do autor.

Completando a construção das últimas faces a partir do ponto Z e dos vértices do pentágono $PYTSR$, como mostra a figura 120. A construção só é possível utilizando a translação e a movimentação do plano de base para alterar a posição da figura e poder esconder as construções consideradas auxiliares.

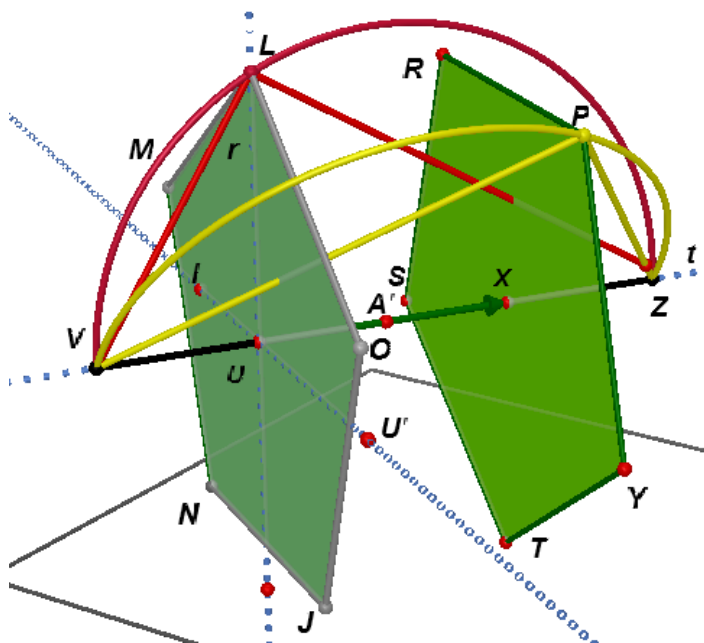
Figura 120 – Icosaedro construído



Fonte: produção do autor.

Usando os mesmos argumentos podemos mostrar que os triângulos construídos com vértice em Z , PZR , RZS , SZT , TZY e YZP , também são equiláteros e têm medidas de lados iguais à medida do lado do pentágono $PYTSR$ que, por sua vez, é congruente ao pentágono $OJNML$, como já mostramos. Dessa forma fica construído um icosaedro regular, a partir da construção apresentada por Euclides, na proposição 16, do livro XIII de *Os Elementos* e, a partir dela, ele mostra que existe uma esfera que circunscreve o icosaedro.

Figura 121 – Semicircunferências VPZ e VLZ para determinar o diâmetro da esfera

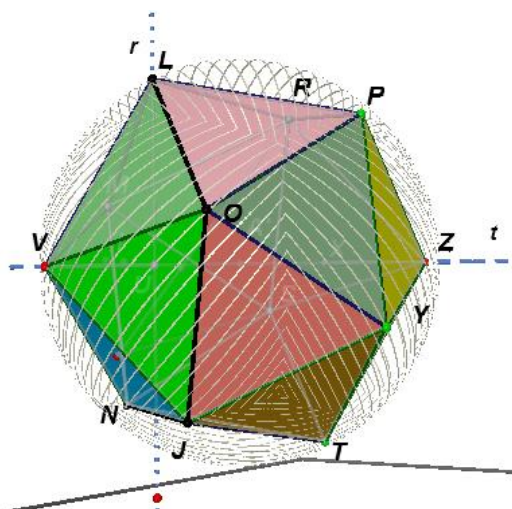


Fonte: produção do autor.

Observando o triângulo VPZ , na figura 121, vemos que $UX = UU'$ e, portanto, tem medida igual ao raio da circunferência em que o pentágono inicial foi inscrito e $XZ = UI$, segmento maior da divisão do raio em média e extrema razão, e por isso, tem a medida do lado de um decágono inscrito nessa circunferência. Assim, podemos dizer que o segmento UZ foi dividido em média e extrema razão no ponto X , sendo UX o segmento maior, e concluir que $\frac{ZU}{UX} = \frac{UX}{XZ}$, isto é, $UX^2 = ZU \cdot XZ$ (1). Observando o triângulo VLZ e sabendo $UL = UX$ e que $UV = XZ$, substituindo em (1) vem que $UL^2 = ZU \cdot UV$ e, portanto, o triângulo VLZ é retângulo em L e está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro VZ .

Assim, como $LU = PX$, pois são raios das circunferências que circunscrevem os dois pentágonos iniciais, podemos então dizer que os triângulos VPZ e VLZ estão inscritos em semicircunferências de mesmo diâmetro e como os pontos P e L são vértices do icosaedro, concluímos que VZ é diâmetro da esfera que circunscreve esse icosaedro, como podemos ver na figura 122.

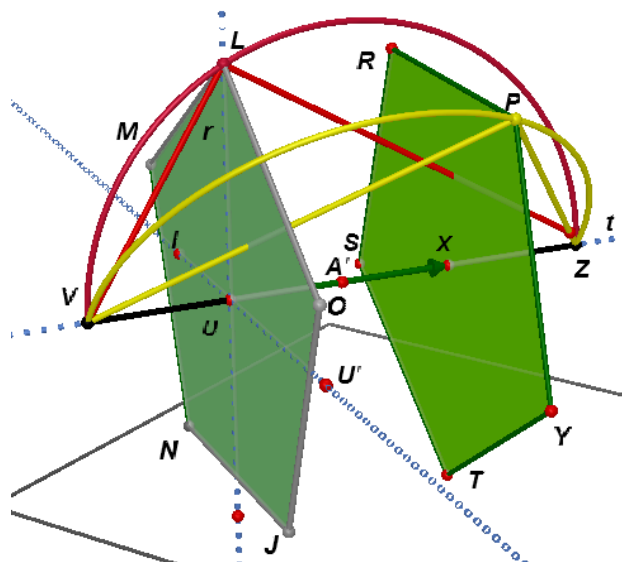
Figura 122 – Esfera circunscrita no icosaedro regular



Fonte: produção do autor.

No final, Euclides prova algumas relações, para justificar a construção realizada, a partir do triângulo inicial ABD . Entre elas mostra que $VX = 4XZ$ e $ZV^2 = 5UX^2$ para justificar que o diâmetro VZ foi dividido em cinco partes como foi o segmento AB do triângulo ABD inicialmente construído e que, as relações válidas nesse triângulo, também são válidas na construção do icosaedro. Mostraremos apenas que, de fato, $ZV^2 = 5UX^2$, a partir da figura 123.

Figura 123 – Triângulo



Fonte: produção do autor.

Em linguagem atual vamos mostrar que $VZ^2 = 5UX^2$. Considerando o diâmetro VZ e que $UZ = m$, como já vimos anteriormente, podemos dizer que $UX = \frac{m\sqrt{5}-m}{2}$, pois X é o ponto que divide o segmento UZ em média e extrema razão.

Daí vem que $UX^2 = \left(\frac{m\sqrt{5}-m}{2}\right)^2 = \frac{m^2(3-\sqrt{5})}{2}$. Por outro lado, temos que:

$$XZ = VU = m - \frac{m\sqrt{5}-m}{2} = \frac{3m-m\sqrt{5}}{2} \text{ e que } VZ = VU + UZ = \frac{3m-m\sqrt{5}}{2} + m = \frac{5m-m\sqrt{5}}{2}. \text{ Logo,}$$

$$VZ^2 = \left(\frac{5m-m\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5m^2(3-\sqrt{5})}{2} = 5UX^2 \text{ e, portanto, podemos concluir que } VX = 4XZ.$$

Feita a construção do icosaedro regular, como proposto por Euclides, utilizando as ferramentas do Cabri-3D, resta a questão: **É possível calcular a medida da altura de uma pirâmide que tenha como base um triângulo equilátero que permita compor um icosaedro regular?** A resposta dessa pergunta é necessária para calcularmos a medida do seu volume e efetuar a composição do poliedro. Verificaremos se é possível respondê-la no capítulo 5 quando deduzirmos a generalização da medida do volume do icosaedro regular.

Algumas considerações a respeito das construções

Analisando as construções dos poliedros regulares, propostas por Euclides no livro XIII de *Os Elementos*, o primeiro passo foi reescrever tanto as proposições, quanto as orientações para construção, traduzidas em Bicudo (2009) para uma linguagem atual, tanto na linguagem natural, quanto matemática.

Foi necessário em vários momentos fazer conversões de representações, principalmente, entre representações no registro figural para representações no registro algébrico, além de agregar notações simbólicas atuais nos enunciados de construção ou de propriedades das figuras.

As figuras iniciais apresentadas por Euclides vistas de imediato como visualização icônica não nos remete à apreensão perceptiva de que tratam de poliedros circunscritos por uma esfera. A compreensão dos passos de construção e do desenho construído passa também por uma necessária articulação entre a apreensão perceptiva e a discursiva, na medida em que é necessário olhar o desenho a partir das hipóteses do enunciado e das legendas apresentadas, e com isso ter efetivamente uma figura geométrica. Por outro lado, nesse processo foi necessária a articulação entre a apreensão sequencial apresentada e a discursiva para que efetivamente ocorresse a construção geométrica.

O dinamismo das representações realizadas no *Cabri-3D* foi fundamental para a interpretação das construções e para a articulação entre as apreensões perceptivas e operatórias que permite desenvolver a visualização das construções realizadas. Os movimentos de pontos básicos da construção; a movimentação do plano de base para alterar a posição da figura; a

possibilidade de esconder traçados auxiliares, que em alguns momentos interferem tanto na visualização, quanto na construção; as translações e rotações imediatas, entre outros, são recursos que o *software* oferece que auxiliam no desenvolvimento dessa visualização. A articulação entre as apreensões discursivas e operatórias (modificações nas figuras) juntamente com as representações algébricas e simbólicas permitiram também enunciar e demonstrar várias propriedades dessas figuras durante o processo de suas construções.

Além disso, a desconstrução dimensional que, de acordo com Duval (2005), se faz para uma (re)construção dedutiva dos objetos representados e é inteiramente subordinada à um discurso axiomático ou que possa ser axiomatizado, foi necessária durante todo o processo de construção de cada um dos poliedros regulares. Para o autor, a maneira matemática de ver as figuras consiste em decompô-las em unidades figurais de dimensão inferior à forma inicial, ou seja uma figura plana (2D) que representa um cubo (3D), que o autor representa por (3D/2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, triângulos, etc que são unidades (2D/2D) que, por sua vez, podem ser decompostos em segmentos de retas, unidades figurais (2D/1D) que também podem ser decompostos em pontos, unidades figurais (2D/0D). Para que uma figura dê lugar à uma visualização ela deve emergir do que o autor chamou de um “circuito de visualização” organizado ao redor de traçados 1D/2D, pois a partir de retas podemos fazer aparecer uma grande diversidade de formas 2D/2D. As construções dos poliedros realizadas só foram possíveis porque as sequências de passos seguidos só puderam ser enunciadas, a partir de uma desconstrução dimensional de cada um deles. Em todas as construções os poliedros regulares foram desconstruídos, para que uma face fosse construída teve que ser decomposta em pontos e segmentos, juntamente com o desenvolvimento de um discurso matemático que os relacionem. Por exemplo, para a construção do icosaedro e do dodecaedro foi essencial a divisão de um segmento em média e extrema razão e sua relação com pentágonos e decágonos regulares; em várias construções conhecimentos a respeito de triângulos retângulos, tais como o teorema de Pitágoras e a relação entre a altura e a projeção dos catetos sobre a hipotenusa (média geométrica), tiveram que ser mobilizados para que algumas construções pudessem ser justificadas; conhecimentos a respeito.

Segundo Chevallard (1998) o saber a ensinar também requer uma análise na passagem para o sistema educacional, pois trata de um saber ligado a forma didática, que será interpretada pelo professor para ser apresentada ao aluno. As construções até agora realizadas poderão ser adaptadas para a sala de aula do Ensino Médio por meio de atividades porque todos os conhecimentos necessários para isso já foram trabalhados nesse nível de ensino.

Um dos objetivos das construções propostas foi buscar relações matemáticas que possibilitassem desenvolver fórmulas para o cálculo da medida de volume desses poliedros e verificamos que, principalmente, para o icosaedro e o dodecaedro conseguimos visualizar a altura da pirâmide em cada um e que pode ser decomposto. Assim, estando todos os poliedros regulares construídos, de acordo com o proposto por Euclides, no que segue trataremos de, a partir delas, desenvolver fórmulas para o cálculo da medida de volume desses poliedros.

5 A MEDIDA DE VOLUME DOS POLIEDROS REGULARES

Como vimos, anteriormente, o estudo do volume de poliedros é realizado em um primeiro momento por contagem de cubos unitários em um paralelepípedo retângulo. Depois é apresentado o Princípio de Cavalieri, para que seja deduzida uma fórmula para o cálculo da medida de volume de prismas quaisquer e, ainda, para a passagem da medida obtida por contagem e representada por números naturais, para uma medida qualquer representada por um número real. Na sequência, a fórmula para o cálculo da medida do volume de uma pirâmide é deduzida a partir da trisseção de um prisma reto de base triangular em três pirâmides de mesma altura e de bases triangulares de mesma área. A fórmula obtida é então ampliada para uma pirâmide qualquer.

Das análises feitas vimos que o ensino, de certa forma, trata os volumes do tetraedro, do hexaedro e do octaedro, mas as construções realizadas até o momento nos permitem deduzir uma fórmula para o cálculo de seus volumes em função do diâmetro da esfera circunscrita. Já para o icosaedro e o dodecaedro vimos que o ensino não trata de fórmulas para seus volumes, no entanto, os conhecimentos relativos ao cálculo da medida do volume de uma pirâmide poderiam ser mobilizados para tal tarefa, a partir da decomposição desses sólidos em pirâmides.

Assim, como anunciado no capítulo anterior analisaremos as construções dos poliedros regulares, a partir de Euclides, para deduzir fórmulas para cálculo do volume de cada um deles.

5.1 A medida do volume de um tetraedro regular

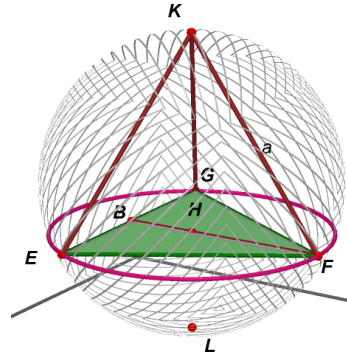
A partir da construção realizada no capítulo anterior levantamos a hipótese de que essas construções poderiam permitir deduzir uma ou mais fórmulas para o volume de um tetraedro. Entendemos que podemos deduzir tais fórmulas a partir da medida da aresta e a partir do diâmetro da esfera circunscrita. É o que pretendemos demonstrar no que segue.

Primeiro deduziremos uma fórmula em função da medida da aresta do tetraedro. Consideramos conhecido que a medida do volume de uma pirâmide qualquer é dada por $V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$, em que A_B é a medida da área da base e h a altura do tetraedro.

Vamos então deduzir, a partir da construção realizada, a medida do volume de um tetraedro qualquer em função da medida de sua aresta. No tetraedro regular $KGEF$, representado na figura 124, consideramos que sua aresta mede a e vamos calcular primeiro a medida da área

da base em função de a . No triângulo equilátero EGF determinamos o ponto B , médio da aresta $\overline{EG}$ e uma das alturas desse triângulo representada por $\overline{FB}$.

Figura 124 – Tetraedro regular e a esfera circunscrita



Fonte: produção do autor.

Como o triângulo EBF é retângulo em B podemos determinar a medida dessa altura por Pitágoras, isto é, $EF^2 = FB^2 + BE^2$ que nos permite escrever que $a^2 = FB^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ou seja $FB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Assim a medida da área da base é dada por $A_B = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Temos agora que calcular a medida da altura do tetraedro em função da medida da aresta.

Vimos durante a construção que a altura da pirâmide mede $\frac{2}{3}$ da medida do diâmetro da esfera, além disso vale a relação $KL^2 = \frac{3}{2}KE^2$, ou seja, $d^2 = \frac{3}{2}a^2$. Logo, $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ e então $h = \frac{2}{3}d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Assim, podemos deduzir uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um tetraedro em função da medida de sua aresta: $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$, ou seja:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

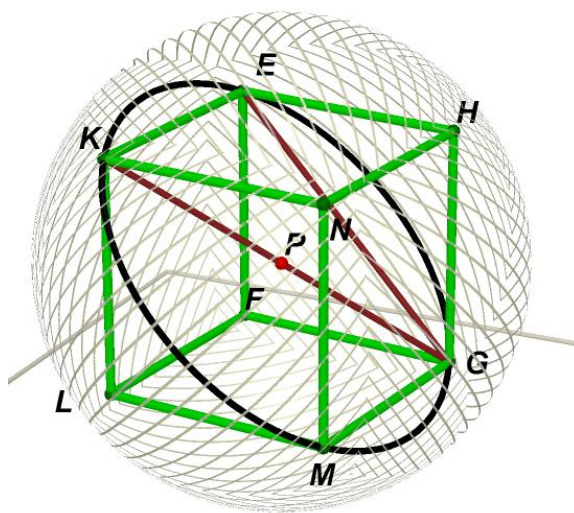
Agora vamos deduzir uma fórmula para o cálculo da medida do volume do tetraedro em função do diâmetro da esfera que circunscribe esse tetraedro. Já sabemos que $d^2 = \frac{3}{2}a^2$ ou seja que $a = \frac{\sqrt{6}}{3}d$. Substituindo esse valor na fórmula deduzida anteriormente vem que se

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, então $V = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}d\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{d^3\sqrt{3}}{27}$. Com isso, expressamos o volume do tetraedro regular em função do diâmetro da esfera circunscrita.

5.2 A medida do volume de um hexaedro

Na figura 125 apresentamos o hexaedro regular construído de acordo com Euclides. Já sabemos que se a aresta desse hexaedro mede a , a medida de seu volume pode ser calculada por $V = a^3$. Mas como o hexaedro está inscrito em uma esfera queremos buscar uma fórmula para calcular a medida desse volume em função da medida do diâmetro da esfera.

Figura 125 – Hexaedro regular e a esfera circunscrita



Fonte: produção do autor.

No quadrado $EHGF$, de lado medindo a , sua diagonal mede $a\sqrt{2}$ e a do hexaedro $HG = d$ mede $a\sqrt{3}$, facilmente calculadas a partir do triângulo GEK e o teorema de Pitágoras. Ou ainda, pela relação $KG^2 = 3KE^2$ validada durante a construção, ou seja, $d^2 = 3a^2$. Temos então que deduzir a medida a em função de d , ou seja, $a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$. Assim, podemos substituir o valor de a na fórmula anterior: $V = \left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$. Com isso, expressamos a medida do volume de um hexaedro regular qualquer em função do diâmetro da esfera que o circunscreve ou em função de seu diâmetro.

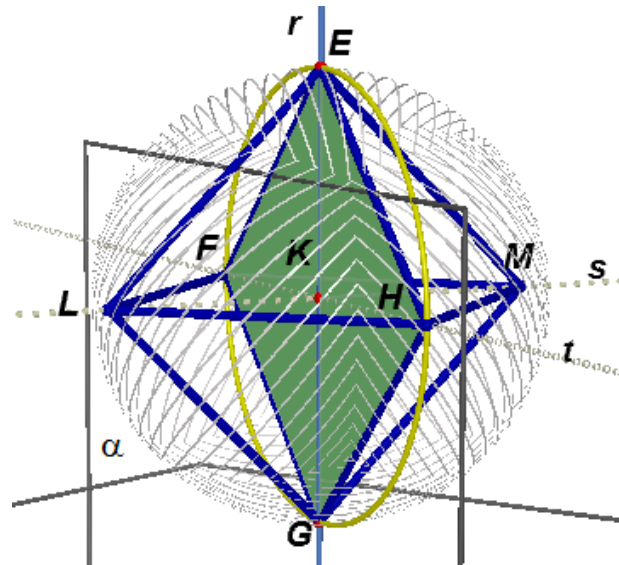
5.3 A medida do volume de um octaedro regular

Buscamos, agora, uma fórmula para calcular a medida de seu volume em função da medida da aresta e em função da medida do diâmetro da esfera, para isso retomaremos na figura 126, a figura 99, que representa um octaedro regular circunscrito por uma esfera, como construído no item 4.5 e reapresentada mais a frente. Como dito anteriormente, vamos deduzir

essas fórmulas considerando que o octaedro é composto por duas pirâmides de bases quadrangulares.

Já sabemos que podemos calcular a medida do volume de uma pirâmide pela fórmula $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$ em que A_B representa a medida da área da base de tal pirâmide e h a medida de sua altura.

Figura 126 – Octaedro regular e a esfera circunscrita



Fonte: produção do autor.

Observando o octaedro representado podemos decompô-lo em duas pirâmides de base quadrada comum $LFMH$ com vértices nos pontos E e G e dele precisamos então buscar as medidas necessárias para o cálculo da medida de seu volume em função da medida da aresta a e do diâmetro da esfera que o circunscreve, d .

Na pirâmide $LFMHE$ a medida da área de sua base (quadrado $LFMH$) é obtida por $A_b = a^2$, pois seus lados são arestas do octaedro e a medida da altura h é a metade da medida da diagonal do quadrado da base, da diagonal do octaedro ou do diâmetro da esfera circunscrita, ou seja, $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Logo, podemos dizer que a medida do volume do octaedro regular pode ser calculada pela fórmula: $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$, isto é: $V = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Podemos também deduzir uma fórmula para esse cálculo em função da medida d do diâmetro da esfera circunscrita. Deduzimos durante a construção, no item 4.5, a relação $LM^2 = 2LE^2$ ou seja, $d^2 = 2a^2$ da qual podemos obter a medida a em função da medida d da

diagonal e substituí-la na fórmula anteriormente deduzida. Isto quer dizer que se $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$ então:

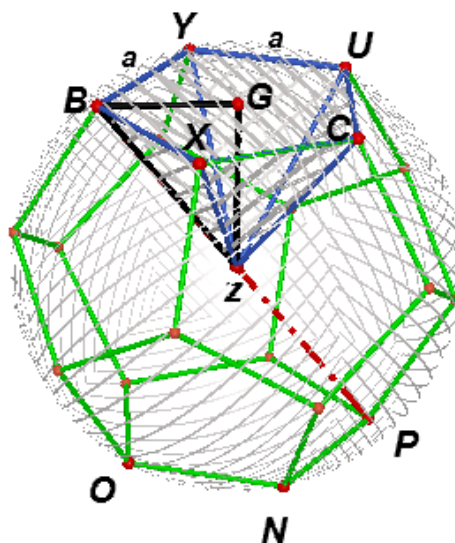
$$V = \left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ ou seja, } V = \frac{d^3}{6}.$$

Com isso, expressamos a medida do volume do octaedro em função da medida da aresta e, em função da medida do diâmetro da esfera circunscrita.

5.4 A medida do volume do dodecaedro regular

Para deduzir uma fórmula para calcular a medida do volume do dodecaedro regular em função da medida de sua aresta ou em função da medida do diâmetro da esfera circunscrita é necessário analisar a figura 127 e verificar se é possível obter as medidas para o cálculo do volume de uma das dozes pirâmides em que o dodecaedro pode ser decomposto.

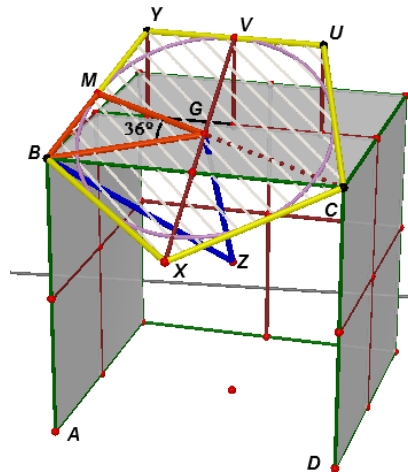
Figura 127 – Dodecaedro regular, a esfera circunscrita e uma pirâmide



Fonte: produção do autor.

Vamos considerar para esse estudo a pirâmide $YUCXBZ$ (figura 128), e procurar a medida A_B da área de sua base (pentágono $YUCXB$) e de sua altura h , ou seja, a medida do segmento GZ , em que G é o centro do pentágono da base.

Figura 128 – Pirâmide pentagonal do dodecaedro

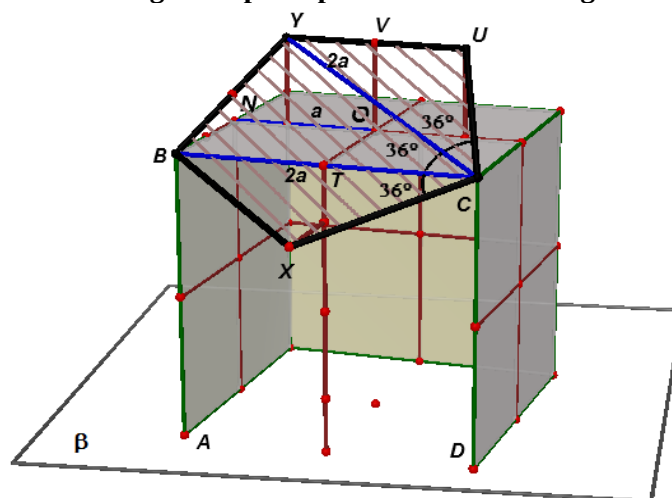


Fonte: produção do autor.

Vamos iniciar calculando medida da área da base da pirâmide pentagonal. Como vimos anteriormente, durante a construção, sendo x a medida da aresta do cubo, $YV = \frac{x\sqrt{5}}{4} - \frac{x}{4}$. Considerando que a medida da aresta do dodecaedro é a então $YV = \frac{x\sqrt{5}}{4} - \frac{x}{4} = \frac{a}{2}$. Logo $a = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}$ e, portanto, $x = \frac{2a}{\sqrt{5}-1}$.

Para o cálculo da medida da área consideraremos o triângulo MGB do qual conhecemos a medida de MB e do ângulo MGB que mede 36° , vistos no item 4.6. Assim, utilizando a tangente desse ângulo poderemos determinar a medida da altura GM . No entanto, para determinar a tangente desse ângulo precisamos, primeiro, dos valores de seus seno e cosseno. É o que faremos na sequência.

Figura 129 – Figura suporte para o cálculo da tangente de 36°



Fonte: produção do autor.

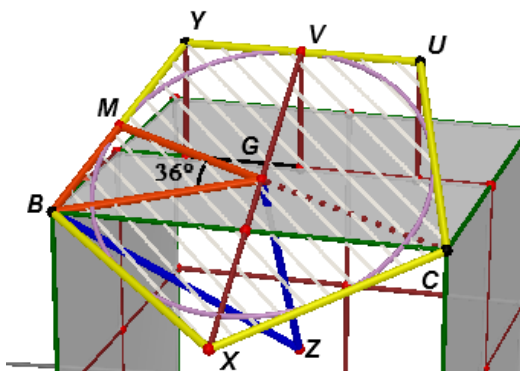
Considerando na figura 129 o triângulo YBC aplicaremos a lei dos cossenos, de acordo com IEZZI (1993, p.226), temos: $BY^2 = BC^2 + CY^2 - 2 \cdot BC \cdot CY \cdot \cos 36^\circ$, considerando

então que $BY = a = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}$ (aresta do pentágono), $BC = CY = x$ (aresta do cubo ou diagonal do pentágono) vem que: $\left(\frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 36^\circ$ que nos dá $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. A partir deste valor, recorremos a relação fundamental da trigonometria $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ que nos leva a: $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Agora podemos encontrar a tangente de 36° :

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$$

Voltando ao triângulo MGB , como mostra a figura 130 podemos calcular a medida de GM . Sabemos que o triângulo BMG é retângulo em M e ainda que $BY = a = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}$ ou seja, $BM = \frac{x\sqrt{5}}{4} - \frac{x}{4}$.

Figura 130 – Suporte para o cálculo da medida da área do pentágono



Fonte: produção do autor.

Podemos então determinar a medida de $\overline{MG}$ a partir da tangente de 36° como quociente entre os valores do cateto oposto e do cateto adjacente do triângulo BMG . Isto é: $\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{BM}{MG}$.

Logo, $\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\frac{x(\sqrt{5}-1)}{4}}{MG} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$ de onde vem que $MG = \frac{x}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$. Tal segmento representa a

medida da altura do triângulo YGB . Dessa forma a medida da área desse triângulo pode ser dada

por: $\frac{BY \cdot MG}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \cdot \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2} = \frac{x^2(\sqrt{5}-1)}{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$. Assim A_B , ou seja, a área da base da

pirâmide corresponde a cinco áreas desse triângulo e, portanto, dada por $A_B = \frac{5x^2(\sqrt{5}-1)}{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ em

função da aresta do cubo, mas como $x = \frac{2a}{\sqrt{5}-1} = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$ vem que $A_B = \frac{5a^2(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ em função

da aresta do dodecaedro.

Agora temos que calcular a medida GZ ou seja a medida da altura da pirâmide.

Observando o triângulo BGZ retângulo em G , o segmento $\overline{GZ}$ representa a altura da pirâmide pentagonal, e sabemos que $BZ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ porque corresponde a metade da diagonal do cubo inicial, então podemos inferir que $BZ^2 = GZ^2 + BG^2$. Para realizar esse cálculo temos que obter a medida de $\overline{BG}$, a partir da definição de seno de um ângulo e do valor do $\text{sen}36^\circ$. Assim, $\text{sen}36^\circ = \frac{BM}{BG}$, ou seja $BG = \frac{BM}{\text{sen}36^\circ} = \frac{x\sqrt{5}-x}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, ou seja $BG = \frac{x\sqrt{5}-x}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$. Voltando ao cálculo de BZ temos então que $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 = GZ^2 + \left(\frac{x\sqrt{5}-x}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)^2$ ou seja $GZ = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}$.

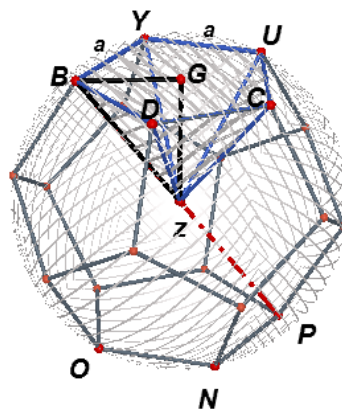
Lembrando que $(1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5}$, vem que $GZ = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{10-2\sqrt{5}}} = \frac{x(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$.

Considerando que $x = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$ vem que $GZ = h = \frac{a(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ em função da medida a da aresta do dodecaedro.

Agora podemos calcular a medida do volume da pirâmide $YUCXBZ$ (figura 131) e, conseqüentemente a medida do volume do dodecaedro inicial. A medida do volume de tal pirâmide é dada por $V_p = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$, isto é, $V_p = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a^2(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \cdot \frac{a(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{48}$, em função da medida da aresta do dodecaedro. Agora podemos, finalmente, calcular a medida do volume do dodecaedro que é composto por 12 dessas pirâmides: $V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$.

Agora, podemos deduzir outra fórmula para o cálculo da medida desse volume a partir da medida da diagonal do dodecaedro, ou diâmetro da esfera circunscrita, tendo em vista que ela também representa o diâmetro da esfera que circunscreve esse dodecaedro.

Figura 131 – Dodecaedro, uma pirâmide e a esfera circunscrita



Fonte: produção do autor.

Observando a figura 131, sua diagonal é $d = BP = 2BZ$. Sabemos que $BP = 2 \frac{x\sqrt{3}}{2} = x \cdot \sqrt{3}$, e como escrevemos anteriormente que $x = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$, podemos deduzir essa diagonal em função da aresta a : $d = \frac{a(\sqrt{5}+1) \cdot \sqrt{3}}{2}$ o que resulta que $a = \frac{d\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6}$. Obtendo a medida a em função da medida d da diagonal, podemos substituir esse valor na fórmula anteriormente deduzida, então:

$$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}, \text{ ou seja, } V = \left(\frac{d\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6} \right)^3 \cdot \frac{(15+7\sqrt{5})}{4} \rightarrow V = \frac{d^3 \cdot \sqrt{3} \cdot (5+\sqrt{5})}{36}.$$

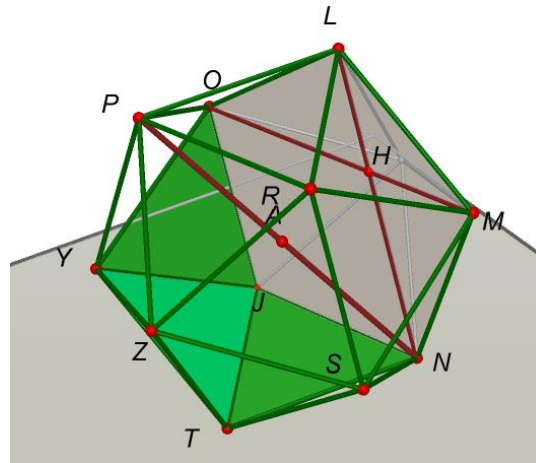
Com isso, expressamos a medida do volume do dodecaedro regular em função da medida da aresta a e, em função da medida do diâmetro d da esfera circunscrita.

A seguir apresentamos a medida de volume do icosaedro regular.

5.5 A medida do volume do icosaedro regular

Para encontrar a medida do volume do icosaedro regular em função da medida de sua aresta ou em função do diâmetro da esfera circunscrita, recorreremos ao livro XIII de Euclides (BICUDO, 2009, p. 570) onde descreve que: “*caso retas estendam-se sob dois ângulos consecutivos de um pentágono equilátero e equiângulo, cortam-se em média e extrema razão, e os segmentos maiores delas são iguais ao lado do pentágono*”. Quer dizer que em um pentágono regular o ponto de intersecção de duas diagonais consecutivas dividem essas diagonais em média e extrema razão tendo o maior segmento obtido dessa divisão a mesma medida do lado desse pentágono. Como podemos ver na figura 132 as diagonais OM e LN do pentágono regular $LMNJO$ interceptam-se no ponto H e OH e NH representam um lado desse pentágono. Usaremos esse resultado para determinar a medida da diagonal do icosaedro em função da medida de sua aresta. Se H divide as arestas em média e extrema razão e se considerarmos que o segmento HN mede a , como vimos anteriormente, podemos concluir que $HN = a = \frac{LN\sqrt{5}-LN}{2}$ de onde vem que $LN = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$. Estando com o valor da diagonal LN em função da medida da aresta do icosaedro, agora, vamos buscar a medida da diagonal d do icosaedro a partir desse resultado.

Figura 132 – Suporte para o cálculo da medida do volume do icosaedro

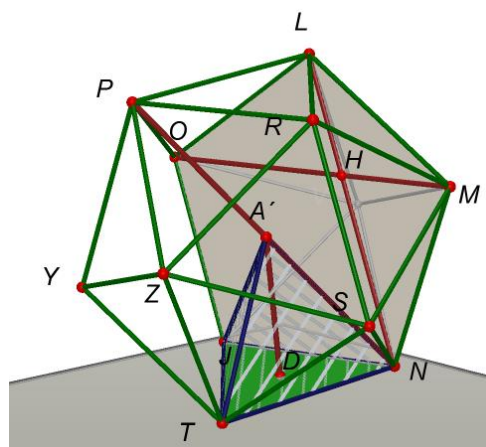


Fonte: produção do autor.

Considerando o triângulo PLN (figura 133) retângulo em L , porque esses pontos são vértices do icosaedro, por Pitágoras podemos dizer que $PN^2 = PL^2 + LN^2$ que podemos representar por $d^2 = a^2 + \left(\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}\right)^2$ de onde concluímos que $d = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2}$ e que, portanto, nos dá $a = \frac{d\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{5+\sqrt{5}}$.

De posse desses resultados, no que segue, deduziremos uma fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro em função da medida da aresta e da medida da diagonal do icosaedro. Iniciamos pelo primeiro caso.

Figura 133 – Icosaedro regular e uma pirâmide



Fonte: produção do autor.

Na figura 133 representamos um icosaedro regular e uma pirâmide em seu interior com base em uma face, JNT e vértice em seu centro A' . Para calcular a medida do volume desse tetraedro precisamos da medida da área de sua base e da medida de sua altura $A'D$. Já vimos na

dedução da fórmula para o volume do tetraedro que a medida da área da base é dada por $A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ então precisamos calcular sua altura. Observando o triângulo $A'ND$, retângulo em D , sabemos que ND representa dois terços da medida da altura do triângulo equilátero da base, ou seja, $ND = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Por outro lado, para esse triângulo sabemos que $A'N^2 = A'D^2 + DN^2$ de onde vem

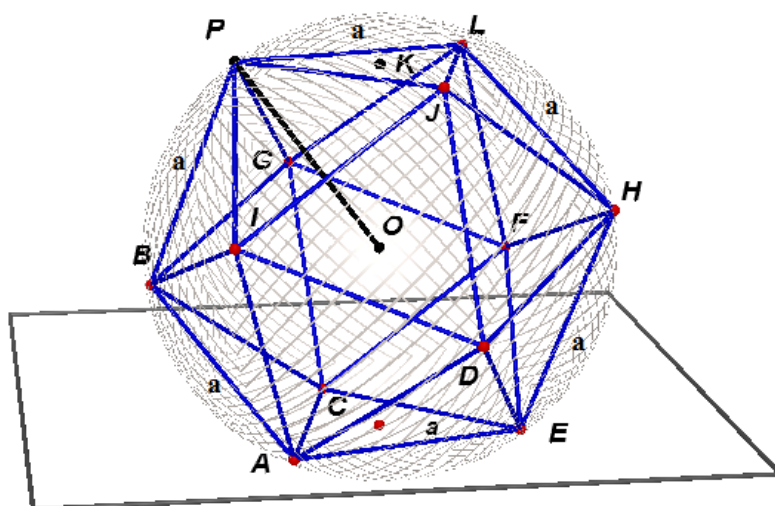
$$\text{que: } \left(\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2} \right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 + A'D^2, \quad \text{logo} \quad A'D^2 = \frac{a^2(10-2\sqrt{5})}{16} - \frac{3a^2}{9} = \frac{a\sqrt{3(14+6\sqrt{5})}}{12}.$$

Considerando que $(3+\sqrt{5})^2 = 14+6\sqrt{5}$ podemos simplificar a expressão e obter:

$A'D = \frac{a(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{12}$ que representa a medida da altura do tetraedro $JTNA'$. A medida do volume desse tetraedro é dada então por: $V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3(3+\sqrt{5})}{48}$. Como podemos compor um icosaedro regular por 20 desses tetraedros podemos concluir que a medida do volume desse icosaedro pode ser calculada pela seguinte fórmula: $V = 20 \frac{a^3(3+\sqrt{5})}{48} = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$.

Agora podemos deduzir outra fórmula para o cálculo da medida desse volume a partir da medida da diagonal do icosaedro, tendo em vista que ela representa também a diagonal da esfera que circunscreve esse icosaedro (figura 134). É o que faremos na sequência.

Figura 134 – Icosaedro regular e a esfera circunscrita



Fonte: produção do autor.

Como sabemos que $a = \frac{d \cdot \sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{5+\sqrt{5}}$ podemos substituir esse valor na fórmula deduzida anteriormente e obter que: $V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12} = 5 \left(\frac{d \cdot \sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{5+\sqrt{5}} \right)^3 \cdot \frac{(3+\sqrt{5})}{12} = \frac{10d^3 \cdot \sqrt{2(5+\sqrt{5})} \cdot (3+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})^2 \cdot 12}$, de onde podemos concluir que $V = \frac{d^3 \cdot \sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{12}$

Vemos com essas deduções que abrimos possibilidades didáticas para o trabalho com volumes de sólidos, principalmente, os poliedros regulares que embora sejam definidos, geralmente, no ensino não têm seus volumes tratados. Vimos que o trabalho com deduções de fórmulas e, não apenas sua apresentação, pode ser implementado a partir dos resultados aqui obtidos em atividades desenvolvidas para isso. Por exemplo, no caso das fórmulas em função dos diâmetros das esferas, que não são apresentadas no ensino, ou ainda, nos casos do icosaedro e dodecaedro que mobilizando conteúdos já trabalhados a respeito de pirâmides podem ter formulas para o cálculo da medida do volume deduzidas, a partir da percepção que ambos os poliedros podem ser decompostos em pirâmides.

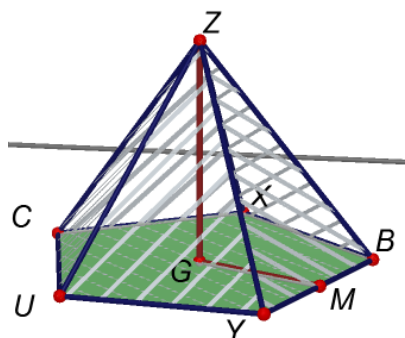
Essas possibilidades didáticas ocorrem porque utilizamos o *Cabri-3D* como meio para as construções e como já dissemos, ele facilita tanto a construção geométrica, quanto a visualização do que foi construído que permitem a dedução das relações que foram necessárias para a dedução de tais fórmulas.

Como as construções realizadas permitiram visualizar a decomposição do icosaedro e do dodecaedro regulares em pirâmides, levantamos a hipótese de que tais construções também poderiam facilitar a percepção das relações entre os elementos dessas pirâmides que devem ser encontradas para que a partir delas esses poliedros possam ser compostos. É sobre isso que trataremos no que segue.

5.6 A composição do dodecaedro e do icosaedro regulares

Anteriormente, decompomos o **dodecaedro regular** em 12 pirâmides congruentes e agora queremos verificar que condições uma pirâmide regular de base pentagonal qualquer deve satisfazer para que possamos a partir dela compor esse dodecaedro.

Figura 135 – Suporte para a composição de um dodecaedro regular

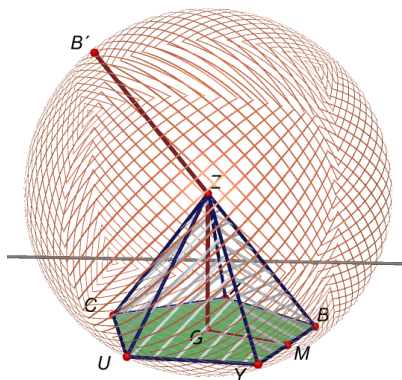


Fonte: produção do autor.

Na figura 135 representamos uma pirâmide qualquer de base pentagonal ($YUCXB$) e vértice no ponto Z . O segmento $\overline{GZ}$ representa a altura dessa pirâmide e como vimos, mede $GZ = h = \frac{a(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, o segmento $\overline{MG}$ representa o apótema de sua base, $MG = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, em que a representa a medida do lado do pentágono, ou seja, a medida da aresta do possível dodecaedro, e $\overline{BZ}$ o raio de uma possível esfera em que o dodecaedro poderia estar inscrito, isto é: $BZ = \frac{a}{2} = r = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$.

Se essa pirâmide faz parte de um dodecaedro regular então Z representa o centro da esfera em que ele está inscrito (figura 136) e haverá um ponto B' , simétrico de B em relação a Z de tal forma que o segmento BB' representa o diâmetro dessa esfera e os vértices do pentágono da pirâmide pertençam a ela.

Figura 136 – Esfera circunscrita em um possível dodecaedro



Fonte: produção do autor.

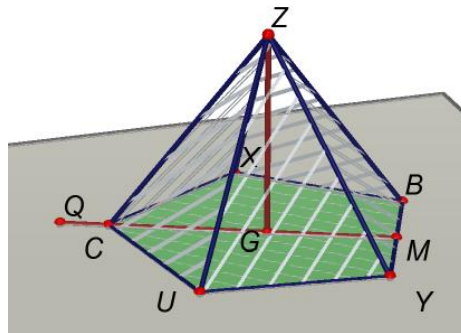
Com a finalidade de determinar condições para que essa pirâmide possa fazer parte do dodecaedro, calculamos a razão entre a medida de $\overline{GM}$ (figura 135), que representa o apótema do pentágono da base da pirâmide e a medida de $\overline{GZ}$, que representa a altura da pirâmide.

Encontramos que $\frac{GZ}{GM} = \frac{\frac{a(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ou seja, o número de ouro (ϕ) que é obtido quando se

calcula a razão entre a medida do segmento maior e a medida do segmento menor obtidos pela divisão de um segmento em média e extrema razão. Logo, podemos construir uma pirâmide regular de base pentagonal possível de compor um dodecaedro regular, a partir da divisão de um segmento qualquer em média e extrema razão em que o maior segmento obtido representará a altura da pirâmide e o menor representará o apótema do pentágono da base.

Isto, é traçando o segmento MG e construindo na mesma semirreta o segmento GQ (figura 137) temos que verificar se $\frac{GM}{GQ} = \frac{GQ}{MQ}$. Nessas condições podemos então afirmar que essa pirâmide é uma das 12 que compõem o dodecaedro.

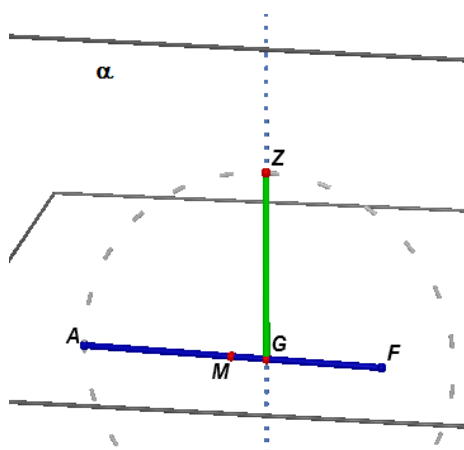
Figura 137 – Pirâmide de base pentagonal



Fonte: Produção do autor.

Dessa forma temos as condições que propiciam a construção dessa pirâmide com a garantia de que faça parte de um dodecaedro regular. Para construí-la partimos do traçado de um segmento qualquer, o dividimos em média e extrema razão e consideramos que o menor dos segmentos obtidos representa um apótema do pentágono da base e o maior a altura da pirâmide. Considerando $\overline{AF}$ na figura 138, o ponto G divide $\overline{AF}$ em média e extrema razão e, portanto $\overline{AG}$ representará a altura da pirâmide e $\overline{GF}$ o apótema do pentágono da base. Com isso podemos determinar, a partir de um plano α , perpendicular ao plano de base o ponto Z tal que $\overline{GZ}$ represente essa altura e, a seguir construir o pentágono da base da pirâmide.

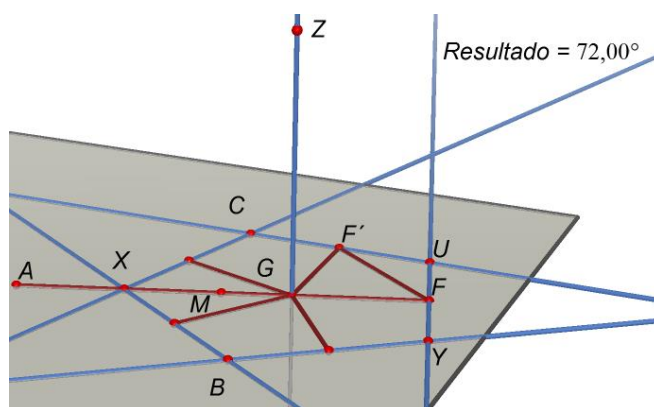
Figura 138 – Altura GZ da pirâmide de base pentagonal



Fonte: Produção do autor.

Considerando que a medida do ângulo entre dois apótemas de um pentágono regular é de 72° , podemos, no *Cabri-3D*, fazer a rotação do segmento $\overline{GF}$, desse ângulo, no sentido anti-horário que nos dá o ponto F' (figura 139). Traçando pelo ponto F uma reta perpendicular ao segmento $\overline{GF}$ e pelo ponto F' uma reta perpendicular ao segmento $\overline{GF'}$ obtemos na intersecção dessas duas retas o ponto U , que é um vértice do pentágono. Repetindo esse processo obtemos os outros vértices, C , X , B e Y do pentágono.

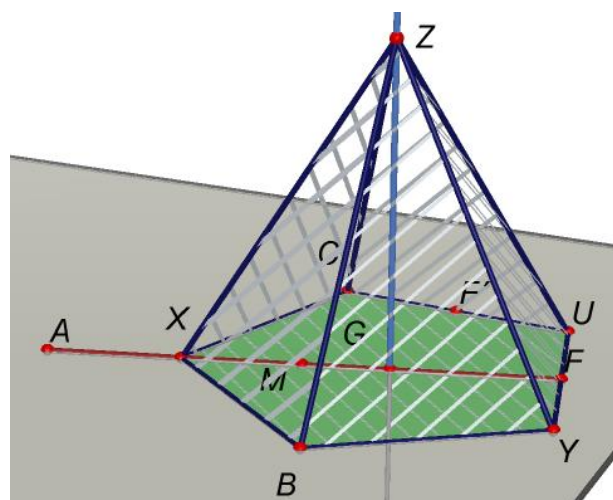
Figura 139 – Construção da base de uma pirâmide pentagonal



Fonte: Produção do autor.

Com a ferramenta *pentágono regular*, do *Cabri-3D*, determinamos o pentágono regular (figura 140) e com a ferramenta *pirâmide*, determinamos a pirâmide $BYUCXZ$.

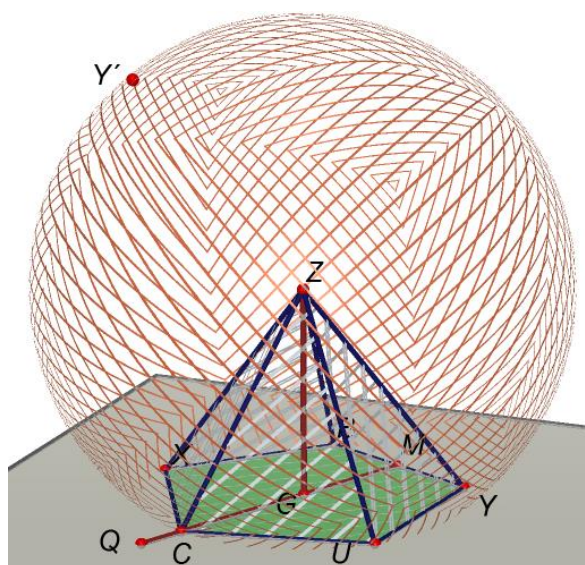
Figura 140 – Construção de uma pirâmide para compor o dodecaedro regular



Fonte: Produção do autor.

Assim, baseando-nos em resultados anteriores, $\overline{ZY}$ representa o raio da esfera que circunscreve o dodecaedro da qual os cinco vértices do pentágono pertencem. É o que podemos ver na figura 141.

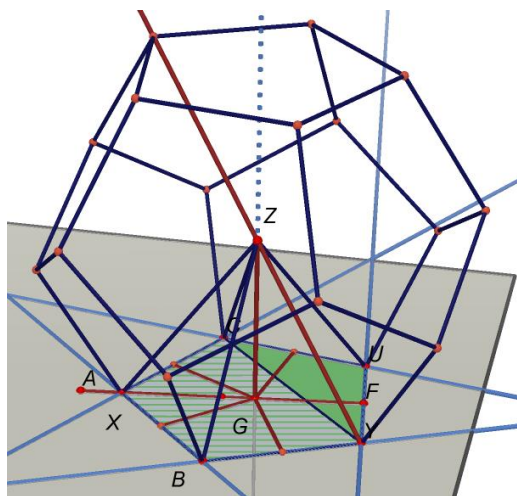
Figura 141 – Esfera circunscrita em um possível dodecaedro



Fonte: Produção do autor.

A partir dessa pirâmide podemos compor o dodecaedro por simetrias e rotações, como descrito no Apêndice A. Podemos também a partir da pirâmide solicitar que o *Cabri-3D* construa o dodecaedro regular, como podemos ver na figura 142.

Figura 142 – Esfera circunscrita em um possível dodecaedro



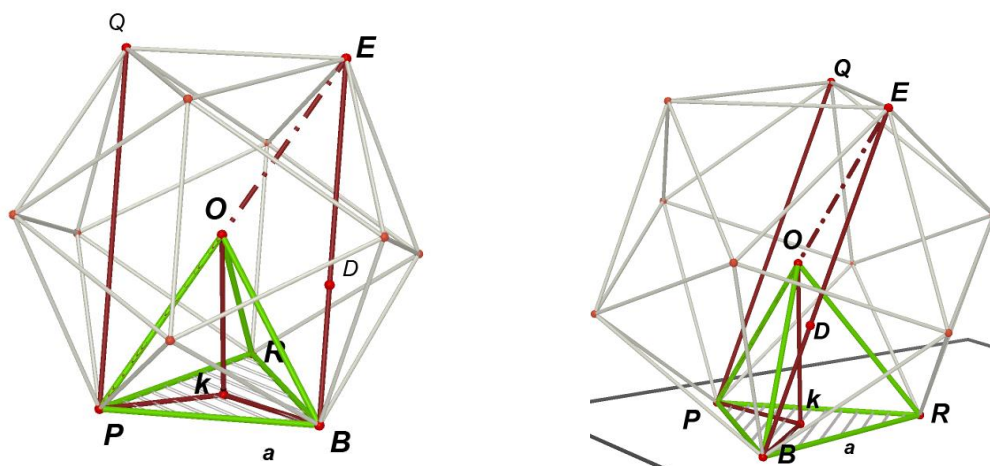
Fonte: Produção do autor.

Assim, podemos concluir que a construção apresentada por Euclides para o dodecaedro regular fornece relações e medidas que nos permitem deduzir uma fórmula para o cálculo da medida de seu volume, bem como verificar se uma pirâmide de base pentagonal pode compor um dodecaedro regular e, ainda, como construir uma pirâmide pentagonal que possa compor esse dodecaedro.

No que segue estudaremos a possibilidade de compor o **icosaedro regular**.

Nossa primeira questão é verificar se um tetraedro qualquer pode compor um icosaedro, buscando as condições necessárias para que isso ocorra, tendo como referência a figura 143.

Figura 143 – Tetraedro que compõe um icosaedro regular



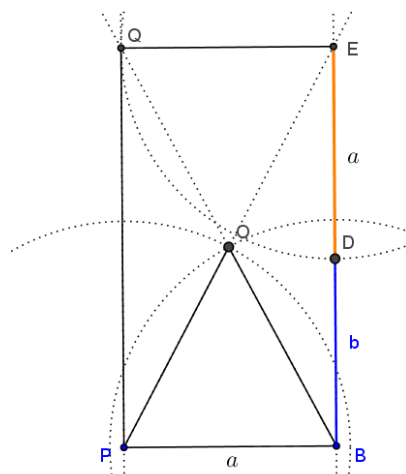
Fonte: Produção do autor.

Ao observar na figura 143 as representações do tetraedro $OPBR$ se percebe que o triângulo PBR é equilátero porque seus lados representam arestas do icosaedro, no entanto, os outros três triângulos que o compõem são isósceles com medidas diferentes da aresta do

icosaedro, mas que têm a mesma medida do raio da esfera que circunscreve esse icosaedro. Logo um tetraedro regular não pode compor um icosaedro regular.

Se esse tetraedro puder compor o icosaedro, ao traçar o retângulo de lado $PB = a$ e tal que OP e OB representem metade de suas diagonais (figura 144) o ponto D deve dividir o segmento $\overline{EB}$ em média e extrema razão de tal forma que o segmento maior obtido tenha a mesma medida da aresta do icosaedro, ou seja, de acordo com a figura, a relação $\frac{ED}{EB} = \frac{DB}{ED}$, ou seja, $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$ deve ser verificada.

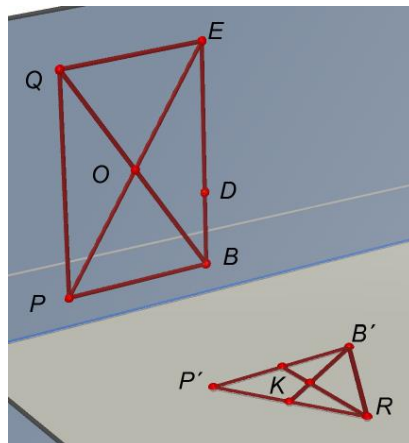
Figura 144 – Retângulo áureo



Fonte: Produção do autor.

Com esse resultado, é possível então construir um tetraedro, no *Cabri-3D*, que possa ser parte de um icosaedro regular a partir da construção de um retângulo áureo $QEBP$ (figura 145), em um plano perpendicular ao plano de base, em que $PB = ED = a$ e $DB = b$. A seguir, a partir dele construímos o triângulo equilátero $P'B'R$ que representará a base do tetraedro e pela intersecção de duas de suas alturas determinamos o ponto K .

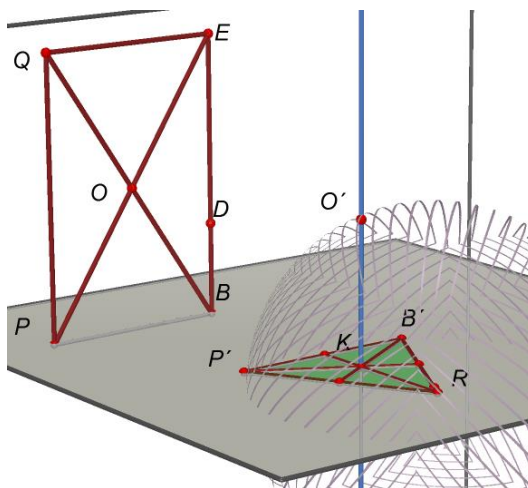
Figura 145 – Construção da base de um tetraedro para compor um icosaedro regular



Fonte: Produção do autor.

Por esse ponto, K , traçamos uma reta perpendicular ao plano de base onde teremos que determinar a altura $\overline{KO'}$ do tetraedro (figura 146). Como no retângulo $QEBP$ os segmentos $\overline{PO}$ e $\overline{BO}$ representam a aresta lateral do tetraedro, se construirmos uma esfera com centro em R e raio de medida PO , a intersecção dela com a reta determina o ponto O' , ficando assim determinada a altura do tetraedro.

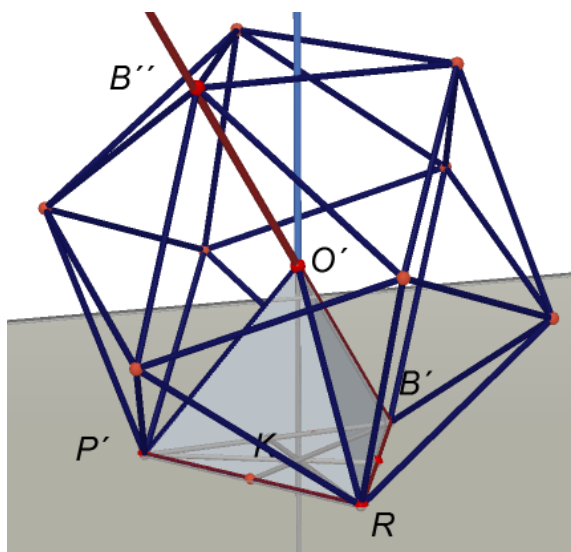
Figura 146 – Construção da altura de um tetraedro para compor um icosaedro regular



Fonte: Produção do autor.

Construindo o tetraedro, podemos determinar o ponto B'' simétrico do ponto B' em relação ao ponto O' , para determinar o segmento $B''B'$, diagonal do icosaedro regular (figura 147). Podemos ainda determinar um icosaedro regular, no *Cabri-3D*, a partir do tetraedro construído e verificar que, de fato, B'' é um dos vértices do icosaedro. A partir desse tetraedro podemos também compor o icosaedro por simetrias e rotações, como descrito no Apêndice B.

Figura 147 – Construção um icosaedro regular a partir de um tetraedro



Fonte: Produção do autor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese é fruto de uma inquietação a respeito do estudo da medida de volume dos poliedros regulares convexos que teve início com a investigação de como seria possível encontrar a medida de volume do dodecaedro regular para ser inserido no Ensino Médio. Procuramos teses ou dissertações que abordassem o tema, além de consultar livros didáticos e paradidáticos investigando suas contribuições. Entre os trabalhos que tratavam de geometria espacial, encontramos uma pesquisa que revisitou os sólidos Arquimedianos e apresenta a construção de alguns deles por truncatura, no ambiente *Cabri-3D*; uma que analisou o material didático da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, destinado ao professor para verificar se atende ao que é proposto para o ensino de geometria espacial métrica; uma que verificou se as construções com régua e compasso auxiliam o estudo de geometria espacial; uma que deduziu uma fórmula para o cálculo da medida de volume de um icosaedro regular a partir de uma sequência didática mediada pelo uso do *Cabri-3D*; uma que utilizou um *software* educacional com o objetivo de calcular a medida de volume de um dodecaedro regular e de um icosaedro regular, mas em nenhum deles houve a dedução de fórmulas para calcular a medida de volume dos poliedros regulares a partir de suas construções por meio do *Cabri 3D* e da noção de composição e decomposição de figuras.

Na investigação dos livros didáticos e paradidáticos não encontramos recomendações para o ensino dos poliedros regulares, nem tão pouco recomendações de *softwares* para o ensino dos poliedros que são estudados no ensino médio.

Em nossa investigação tínhamos como objetivo geral verificar se a construção dos poliedros regulares convexos, no *Cabri-3D*, de acordo com a proposta de Euclides (300 a.C) poderiam favorecer a dedução de uma fórmula para o cálculo da medida de volume desses poliedros, a partir de uma possível transposição didática dessas construções baseada na tradução de suas orientações para uma linguagem atual, tanto do ponto de vista da linguagem materna, quanto da linguagem matemática. Para atingir esse objetivo geral buscamos, inicialmente, interpretar as indicações de construção encontradas no livro XIII de Euclides (BICUDO, 2009) para isso procuramos atingir os objetivos específicos.

Propusemos a seguinte questão de pesquisa: **a construção de poliedros regulares pelo método de Euclides propicia a obtenção de uma fórmula para o cálculo da medida de volume do dodecaedro e do icosaedro, a partir das noções de composição e decomposição de sólidos?**

Nosso **objetivo geral** foi então, verificar a possibilidade de construir os poliedros regulares convexos pelo método de Euclides no ambiente *Cabri-3D* e a possibilidade de construir uma fórmula para o cálculo do volume, do icosaedro e dodecaedro que dependa de resultados dessa construção e da noção de composição e decomposição desses poliedros regulares.

Para atingir nosso objetivo e responder nossa questão, exploramos os procedimentos sugeridos por Euclides, no livro XIII de sua obra *Os Elementos*, para construir os poliedros regulares convexos procurando converter a linguagem desses procedimentos para uma linguagem atual. Percebemos que essas construções não eram simples e decidimos então realizá-las com o *Cabri-3D*, no intuito de torná-lo um habitat em que todas fossem possíveis de serem realizadas. Embora muitos conhecimentos, que atualmente não são tratados no ensino básico, tivessem que ser mobilizados, como é o caso da divisão de um segmento em média e extrema razão, durante as construções todas foram realizadas a contento.

Durante essas construções levantamos hipóteses de que elas permitiriam deduzir a altura de cada uma das pirâmides em que podem ser decompostos o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro regulares e a suas composições a partir de pirâmides dadas. De fato, a partir de relações e medidas obtidas durante a construção deduzimos fórmulas para o cálculo da medida de volume para cada um dos poliedros regulares, tanto em função da medida da aresta de cada um, quanto em função da medida da diagonal, ou diâmetro da esfera que circunscreve cada um deles. No caso do icosaedro e do dodecaedro, a possibilidade de decompor cada um em pirâmides regulares e de obter a medida da altura de cada uma delas foi o que permitiu a dedução das fórmulas para a medida de seus volumes.

Pudemos então aprofundar a análise das construções e verificar quais condições eram necessárias para determinar se uma pirâmide regular de base pentagonal possa ser usada para compor um dodecaedro regular e, de modo análogo, para que um tetraedro regular possa ser usado para compor um icosaedro regular. Verificamos que, de fato, essas condições existem e, a partir delas pudemos então construir uma pirâmide regular pentagonal e um tetraedro que permitem compor um dodecaedro regular e um icosaedro regular, respectivamente. No caso do dodecaedro regular concluímos que o segmento que representa a altura da pirâmide e o segmento que representa o apótema do pentágono da base dessa pirâmide, determinam um segmento que foi dividido em média e extrema razão, sendo a altura o maior deles. Com esta constatação foi possível então construir uma pirâmide regular de base pentagonal a partir de um segmento qualquer dividido em média e extrema razão e considerar o maior deles como a altura

da pirâmide e o menor como o apótema do pentágono regular da base de tal pirâmide. Com essa pirâmide construída pudemos, com a ajuda do *Cabri-3D*, compor o dodecaedro regular.

Para o icosaedro regular notamos que o prolongamento de uma de suas faces permite construir um retângulo, com um de seus lados sendo a aresta do icosaedro e que as duas outras arestas representam metade das diagonais desse retângulo. Constatamos que esse retângulo é um retângulo áureo. Dessa forma foi possível, ainda, como esse retângulo é áureo, a partir da construção de um retângulo áureo a metade de suas diagonais correspondem as arestas laterais de uma pirâmide que tem como aresta da base, o lado menor desse retângulo áureo. Com essa constatação, foi possível construir uma pirâmide que pode compor um icosaedro regular.

Pudemos constatar que o *Cabri-3D* pode ser tomado como um habitat para o estudo dos poliedros regulares, a partir de Euclides, porque ele tem todas as ferramentas que permitem a mobilização de todos os conhecimentos necessários para a construção desses poliedros, para realizar sua decomposição ou composição e, principalmente, de levantar conjecturas utilizando seu dinamismo.

Entendemos que realizamos uma transposição didática interna, segundo os pressupostos teóricos de Chevallard (1998), porque conseguimos estudar didática e matematicamente as construções dos poliedros regulares, de um ponto de vista não encontrado em nossa revisão bibliográfica e estudo de livros didáticos. Didaticamente, construímos um processo para o ensino de poliedros regulares e o cálculo da medida de seus volumes que poderiam, com adaptações, fazer parte da matemática escolar. Seu diferencial está tanto nas construções, quanto no desenvolvimento de fórmulas o que acarretaria em um ensino mais significativo para os alunos que, geralmente, as recebem prontas e sem justificativas. Ainda, mostramos que as apreensões no sentido de Duval (2012) podem ser construídas visto que foi desenvolvido um discurso associado à compreensão do desenho que conduziram ao desenvolvimento efetivo de construções geométricas. Esse discurso juntamente com o desenvolvimento da apreensão sequencial permitiu escrever uma sequência de passos para a construção dos poliedros. Além disso, o desenvolvimento da apreensão operatória sobre as figuras, a partir das modificações possíveis, articulada com a apreensão discursiva permitiu justificar ou demonstrar matematicamente as construções realizadas e, ainda enunciar e demonstrar outras relações que permitiram estudar pirâmides que possam compor o icosaedro ou o dodecaedro, individualmente. A visualização também foi desenvolvida com a articulação das apreensões perceptiva e operatória apoiada, principalmente, pelo dinamismo do *Cabri-3D*.

Durante todo o processo foi fundamental a conversão de representações realizadas do registro figural para representações no registro algébrico e tratamentos em cada um deles. No registro figural as modificações nas figuras, que permitem o desenvolvimento da apreensão operatória, foram utilizadas em todas as construções. A modificação mereológica que se faz em função da relação parte todo ocorreu em vários momentos, por exemplo, na divisão de segmentos em média e extrema razão ou na decomposição dos poliedros; a modificação ótica também quando tivemos, durante a construção, que alterar a figura por ampliação ou redução com o dinamismo do *Cabri-3D* para obter um melhor posicionamento da figura e melhor poder seguir a construção ou levantar conjecturas; a modificação posicional foi utilizada, em momentos em que simetrias, rotações ou translações foram necessárias para que a construção se concretizasse.

Com essas argumentações acreditamos que respondemos nossa questão de pesquisa, ou seja, a construção dos poliedros regulares convexos, tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e o icosaedro regular por decomposição e composição no *Cabri-3D* para o desenvolvimento e generalização da medida de volume desses poliedros se transformaram em uma possível transposição didática.

Esta pesquisa não se esgota com este trabalho, outras pesquisas podem ser feitas utilizando outro *software* de representações dinâmicas, ou o desenvolvimento de sequências didáticas para o ensino dos poliedros regulares e do cálculo das medidas de seus volumes, para o Ensino Médio, focando na construção de fórmulas pelos próprios alunos a partir de adaptações das construções por nós efetuadas.

Esperamos que esta tese centrada na dedução de fórmulas para o cálculo da medida de volume dos poliedros regulares convexos por decomposição e/ou composição, no ambiente *Cabri-3D* possa estimular novas abordagens.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, T. C. S.; SILVA, M. J. F. **Sólidos Arquimedianos e Cabri 3-D: A construção do cubo truncado**, VII EPAEM-Encontro Paraense d Educação Matemática, Belém- Pará, Brasil, 2010.
- ALMEIDA, T. C. S. **Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: Um estudo de truncaturas baseadas no renascimento**. 2010. PUC-São Paulo, 185 p, Dissertação (Mestrado profissional em ensino de Matemática), 2010.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Paraná. Editora da Universidade Federal do Paraná, 2007.
- _____. **As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo**. Educar em Revista. Curitiba, n. Especial 1/2011, p, 191-210, 2011.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. **Engenharia Didática: evolução e diversidade**. Revemat. Florianópolis. v. 07, n. 2, p, 22-52, 2012.
- ANWANDTER-CUELLAR, N. **Conceptions d'élèves de collège sur la notion de volume**. In: Petit x, n. 93, 2013, p. 53-75,
- ARTAUD, M. **Introduction à L'approche écologique du didactique, L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Actes de la Neuvième École d'Éle de Didactique des Mathématiques**. Houlgate Bailleul, 1988.
- BARRETO, F. S. **Matemática aula por aula**. Volume 2, Editora FTD-SP, 1998.
- BEZERRA, M. J. **Curso de Matemática para o primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico**. 2ª edição, São Paulo, Companhia Editora Nacional – São Paulo, (exemplar Nº 6815), 1960.
- BICUDO, I. **Os Elementos - Euclides**. Livro XIII, Editora Unesp, p.563, 2009.
- BONGIOVANNI, V.; VISSOTO, O. R.; LAUREANO, J. L. T. **Matemática volume único**. Segundo Grau, São Paulo, Editora Ática, 1994.
- BONGIOVANNI, V. **De Euclides às geometrias não euclidianas**. Notas de aula, Texto 4, PUC-SP, 2005.
- _____. **Arquimedes de Siracusa e seu método mecânico de descobertas**, Texto 5, PUC-SP, 2005.
- BOULOS, P. e WATANABE, R. **Matemática – 2º grau**, São Paulo, Companhia Editora Nacional, volume 2, 1976.
- BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**, Brasília: MEC/SE, 2000.
- BRASIL, **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**, Brasília: MEC/SE, 2002.

BRASIL, **ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO-OCM:** Orientações curriculares para o ensino médio-Secretaria da Educação Básica, Brasília: MEC/SE, 2006.

BRASIL, **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (DCNEB).** Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013, 562p.

CARVALHO, L. C. **Análise da organização didática da geometria espacial métrica nos livros didáticos.** 2008. 164 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). PUC, São Paulo, 2008.

CHEVALLARD, Y. **Conceitos fundamentais da didática: perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica:** In BRUN, J (Org). Didática das Matemáticas. Lisboa, Instituto Piaget, p.115-153, 1996.

_____. **La transposición didáctica: Del saber sábio al saber enseñado:** AIQUE Grupo Editor 1998, 3ª edição.

_____. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didático.** *Recherches em Didactique des Mathématiques.* Vol 19, nº 2 pp 221 0 266, 1999.

CORSETTI, B. **A análise documental no contexto da metodologia qualitativa:** uma abordagem a partir da experiência de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Educação da Unisinos. UNIrevista, vol. 1, nº 1, janeiro 2006, p. 32-46.

CROMWELL, P. R., **Polyhedra,** Cambridge University Press, p.181-213, 2008.

DANTE, L. R. **Matemática: contextos e aplicações,** São Paulo, v.2, p.174, Editora Ática, 2012.

DIOGO R. C.; OSÓRIO A. S.; SILVA D. R. R. **A teoria antropológica do didático: Possibilidades de contribuição ao ensino de física,** VI ENPEC, 2007.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: geometria espacial, posição e métrica.** Volume 10, Editora Atual, 1993.

DUMONT, I. I., **Geometria Elementar. Segundo os programas de admissão às escolas superiores.** Coleção de livros Didáticos, Editora FTD, São Paulo, p.256, 1957.

DUVAL, R. **Approche cognitive des problèmes de géométrie em termes de congruence.** *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* v.1, p.57-74, IREM de Strasbourg, 1988.

_____. **Semiósis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Berna: Peter Lang, 1995.

_____. **Rpresentation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking.** Basic issues for learning, 1999.

_____. **Semiósis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.** Peter Lang, 2004.

_____. **Les condicions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation raisonnements et coordination de leurs**

fonctionnements. ANNALES de DIDACTIQUE et SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 5 - 53. 2005, IREM de STRASBOURG.

_____. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais** (Fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levi, Marisa Rosâni Abreu da Silveira. Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.** Tânia M. M. Campos. (Tradução: Marlene Alves Dias). São Paulo: Editora Proem, 2011.

_____. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Revemat. Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012.

_____. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012B. (Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>)

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** Editora Unicamp, 2004.

FRANCO, V. S.; MORAN, M. **As apreensões perceptivas, operatórias e discursivas em registros figurais de atividades de geometria.** XII EPREM – Campo Mourão - PR, 2014.

FLORES, C. R. **Olhar, saber, representar: Ensaio sobre a representação em perspectiva.** Tese de doutorado. UFSC. Florianópolis, 2003.

GARBI, G. G. **C.Q.D. Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.** Editora Livraria da Física, 2010.

GUELLI, O. **Matemática - série Brasil.** Volume único, São Paulo, Editora Ática 2003.

GUTIERREZ, A. **Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometria espacial.** Revista EMA, 1998, vol 3, Nº 3, 193-220.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar.** Geometria plana, 5ª ed, vol 9, São Paulo, Editora Atual, 1984.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar.** Trigonometria, 7ª ed, Vol 3. São Paulo, Editora Atual, 1993.

IEZZI, G. et al. **Matemática volume único.** São Paulo, Editora Atual, p.423, 2007.

IMENES, L. M. **Geometria das dobraduras.** Coleção vivendo a matemática, Editora Scipione-SP, 1988.

SILVA JUNIOR, C. G.; REGNIER, J. C. **Livros didáticos e sua formação para o professor de matemática no Brasil e na França.** 2 SIPEMAT, Recife-PE, 2008.

LAKATOS, E. M. A e MARCONI, M. A. **Livros didáticos e sua formação para Fundamentos da metodologia científica.** São Paulo, 5ª edição, Editora Atlas, 2003.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 2. Edição revisada – Campinas, S. P. Autores associados, 2009. (Coleção formação de professores).

MACHADO, N. J. **Os poliedros e os dedos da mão**. Coleção vivendo a matemática, Editora Scipione-SP, 1990.

MORAIS, L. B. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de matemática do ensino médio**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnolovia). UFPE, Recife.

MORALES, M.; MORALES, A. **Les polyèdres réguliers convexes et non convexes par pliage. (Origami)**. (Les polyèdres par origami). 2009. Edition Morales, França.

MORETTI, M. T. **Estudo das apreensões e os olhares em geometria**. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas – RS, 2013.

MORETTI, M. T. e BRANDIT, C. F. **Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras**. Educação Matemática Pesquisa, v.17, n.3, pp. 597-616, 2015 (III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil).

MURACA, F. S. **Educação continuada do professor de matemática: um contexto de problematização desenvolvido por meio de atividades exploratório-investigativas envolvendo geometria espacial de posição**. 2011. 159 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNIBAN, São Paulo.

NERY, C.; JAKUBOVIC J. **Curso de Matemática**. São Paulo, Editora Moderna, v-2, 185, 1988.

NIETO, D. C. HERNÁNDEZ, A. R. G. **Construcción de los sólidos platônicos y Arquimedianos haciendo uso del software cabri 3d**. 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, San Juan de Pasto. Colombia, 2009.

OLIVEIRA, E. B. **Uma contribuição ao ensino de geometria espacial**. 2013. 153 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba.

PAIS, L. C. **Educação Matemática -Transposição didática**. São Paulo, Editora Educ, p.16, 2012.

PALLES, C. M. **Um estudo do icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica**. 2013. 73p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2013.

POSSANI, J. F. **Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular**. 2012. 132 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo.

QUINTELLA, A. **Matemática para o Primeiro Ano Colegial**. 19ª ed., São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1963.

RODRIGUES, W. P. **Uma Abordagem Conceitual de Volume no Ensino Médio**. 2011, 86p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo.

ROMMEVAUX, M. P. **Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.1, n.1, 1999.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese instrumental na interação com o Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço**. 2009. 317 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC, São Paulo.

SALAZAR, J. V. F.; JAHN, A. P. **Explorando objetos espaciais no ambiente Cabri 3D**. SBEM.

SANTOS, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática: novo ensino médio**. São Paulo, volume único, p.286, Editora Ática, 2000.

SÃO PAULO. **Caderno do professor: Matemática, Ensino Médio – 2ª série**. São Paulo: SEE, v. 4, 2008.

SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática (PCEM)**. Segundo Grau, 2.ed. São Paulo: SE/CENP, 1989

SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática (PCEM)**. Segundo Grau, 3.ed. São Paulo: SE/CENP, 1992.

SÃO PAULO. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**: Secretaria da Educação, São Paulo: SE, 2012.

SETANI, V. **Matemática Segundo Grau**, v-2, p.225, São Paulo, Editora Ática, 1984.

SILVA, C. A. **O resgate de elementos e de construções do desenho geométrico para auxiliar o estudo de geometria espacial com alunos do 2º ano do Ensino Médio**. 2011. 106 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). PUC, Minas Gerais.

SILVA, M. J. F. **A construção de situações problemas utilizando o Cabri 3D**, IBEROCABRI 2012, PUC-Peru.

SILVA, M. J. F. & ALMOULOU, S. A. **Estudo de uma organização didática para a construção de fórmula para a medida de volume de sólidos**, CIBEM, 2013.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F.P. A pesquisa científica. In: **Métodos de pesquisa**. Tatiana Engel Gerhardt e Denise Tolfo Silveira (orgs). Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

SOUZA, J. **Novo olhar matemática**, v-3, São Paulo, Editora FTD, 2013.

VELOSO, E. 1928 - **Geometria: temas actuais: materiais para professores (Desenvolvimento curricular no ensino secundário)**. Instituto de Inovação Educacional. Lisboa, Portugal, p. 231 a 248, 2000.

VERAS, F. **Científicos griegos**. Recompilacion, preâmbulos e notas de estudios preliminares. Editora Aguilar, Madri-Espanha, 1970, p.680-979.

ANEXO A: ORIENTAÇÕES PARA CONSTRUÇÃO DO TETRAEDRO REGULAR POR EUCLIDES

Euclides (300 a.C), no livro XIII (in BICUDO 2009 p.586) na proposição 13, *apresenta como construir uma pirâmide e contê-la pela esfera dada e provar que o diâmetro da esfera é, em potência, uma vez e meia o lado da pirâmide*. Refere-se ao tetraedro regular que pode ser circunscrito por uma esfera. Assim:

Fique exposto o diâmetro AB da esfera dada, e fique cortado no ponto C, de modo a ser a AC o dobro da CB; fique descrito, sobre a AB, o semicírculo ADB, e fique traçada, a partir do ponto C, a CD em ângulos retos com AB, e fique ligada a DA; e fique exposto o círculo EFG, tendo o raio igual à CD, e fique inscrito no círculo EFG o triângulo equilátero EFG; e fique tomado o ponto H, o centro do círculo, e fiquem ligadas as EH, HF, HG. E fique alteada, a partir do ponto H, a HK em ângulos retos com o plano do círculo EFG, e fique cortada da HK a HK igual à reta AC, e fiquem ligadas às KE, KF, HG. E, como HK é em ângulos retos relativamente ao plano do círculo EFG, portanto, também fará ângulos retos relativamente a todas as retas que tocam e que estão no plano do círculo EFG. Mas cada uma das HE, HF, HG toca-a; portanto, a HK é em ângulos retos relativamente a cada uma das HE, HF, HG. E como, por um lado, a AC é igual à HK, e, por outro lado, a CD, à HE, e contém ângulos retos, portanto, a base DA é igual à base KE. Pelas mesmas coisas, então, também cada uma das KF, KG, é igual à DA; portanto, as três KE, KF, KG, são iguais entre si. E, como a AC é o dobro da CB, portanto, a AB é o triplo da BC. Mas, como a AB para BC, assim o sobre AD para o sobre DC, como será provado na sequência. Portanto o sobre a AD é o triplo do sobre a DC. Mas também o sobre FE é o triplo do sobre a EH, e a DC é igual à EH; portanto, também a DA é igual à EF. Mas a DA foi provada igual a cada uma das KE, KF, KG; portanto, também cada uma das EF, FG, GE é igual a cada uma das KE, KF, KG; portanto, os quatro triângulos EFG, KEF, KFG, KEG são equiláteros. Portanto, uma pirâmide foi construída de quatro triângulos equiláteros, da qual, o triângulo EFG é base, e por outro lado, o ponto K é vértice.

É preciso, então, tanto contê-la pela esfera dada quanto provar que o diâmetro da esfera é, em potência, uma vez e meia o lado da pirâmide. Fique, pois, prolongada a reta HL sobre uma reta com a KH, e fique posta a HL igual à CB. E, como a AC está para a CD, assim a CD para a CB, mas, por um lado, a AC é igual à KH, e, por outro lado, a CD, à HE, e a CB, à HL, portanto, como a KH está para HE, assim a EH para HL; portanto, o pelas KH, HL é igual ao sobre a EH. E cada um dos ângulos de KHE, EHL é reto; portanto, o semicírculo descrito por

KL passará também pelo E [visto que, caso liguemos a EL, produz-se o ângulo sob LEK reto, pelo produzir-se o triângulo ELK equiângulo com cada um dos triângulos ELH, EHK]. Então, caso o semicírculo, tendo sido levado à volta da KL, que permanece fixa, retorne, de novo, ao mesmo, de onde começou a ser levado, passará, também pelos pontos F, G, as FL, LG sendo ligadas e produzindo, semelhantemente, os ângulos retos junto aos F, G; e a pirâmide será contida pela esfera dada. Pois, o diâmetro KL da esfera é igual ao diâmetro AB da esfera dada, visto que, por um lado, a KH foi posta igual à AC, e, por outro lado, a HL, à CB.

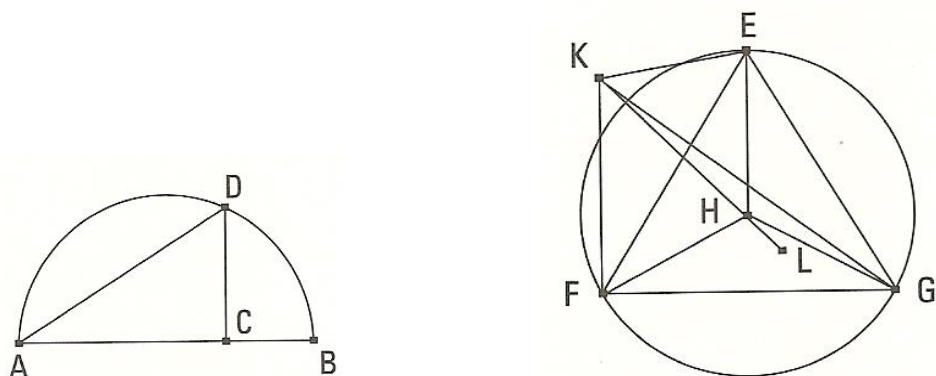
Digo, então, que o diâmetro da esfera é, em potência, uma vez e meia o lado da pirâmide.

Pois, como a AC é o dobro da CB, portanto, a AB é o triplo da BC; portanto, por convenção, a BA é uma vez e meia a AC. Mas, como a BA para a AC, assim o sobre a BA para o sobre a AD [visto que, sendo ligada a DB, como a BA está para a AD, assim a DA para AC, pela semelhança dos triângulos DAB, DAC, e pelo estar como a primeira para a terceira, assim o sobre a primeira para o sobre a segunda]. Portanto, também o sobre a BA é uma vez e meia o sobre a AD. E, por um lado, a BA é o diâmetro da esfera dada, e, por outro lado, a AD é igual ao lado da pirâmide.

Portanto, o diâmetro da esfera é uma vez e meia o lado da pirâmide; o que era preciso provar.

Euclides apresentou as seguintes representações para a construção da pirâmide citada, conforme indica a figura 1.

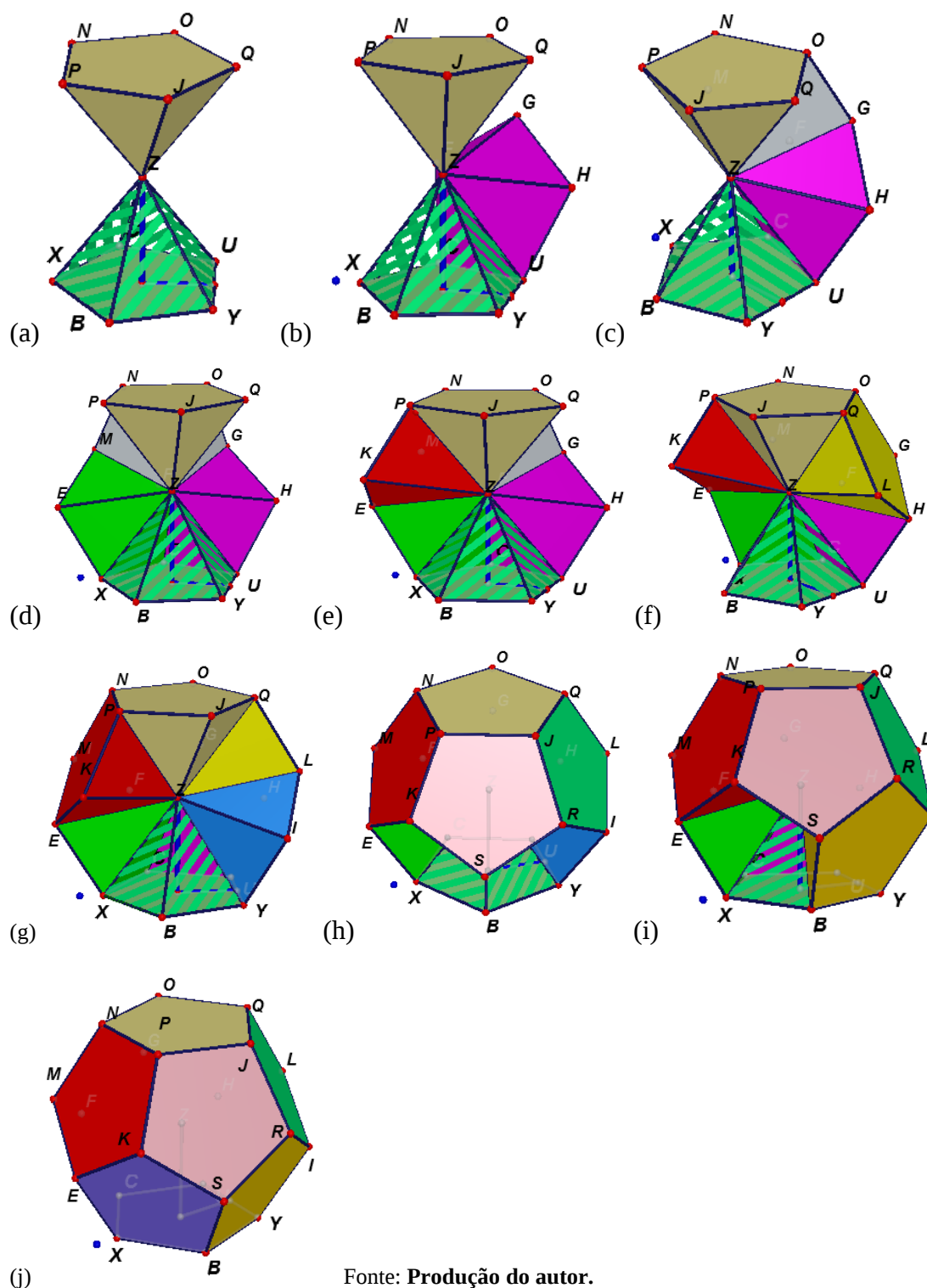
Figura 2 – Construção apresentada por Euclides a respeito do tetraedro circunscrito por uma esfera



Fonte: Euclides, in Bicudo, p.577

APÊNDICE A – COMPOSIÇÃO DO DODECAEDRO A PARTIR DE UMA PIRÂMIDE

Aqui mostramos os passos para compor um dodecaedro regular a partir de uma pirâmide pentagonal, utilizando as ferramentas rotação ou simetria do Cabri 3D.



Fonte: Produção do autor.

Para descrever a composição do dodecaedro regular, iniciamos com a figura (a) que para ser obtida basta acessar a ferramenta simetria central, clicar na pirâmide $BXCUIYZ$ e no vértice Z para obter a pirâmide $PNOQJ$. Na (b), rotacionamos a pirâmide $BXCUIYZ$ em torno da aresta $\overline{VZ}$, deslocando o vértice Y na direção do vértice C , para obter a pirâmide $UCFGH$. Obtemos a figura (c) pela rotação da pirâmide $UCFGH$ em torno da aresta $\overline{GZ}$, deslocando o vértice H em direção ao vértice F para obter a pirâmide $GONMF$.

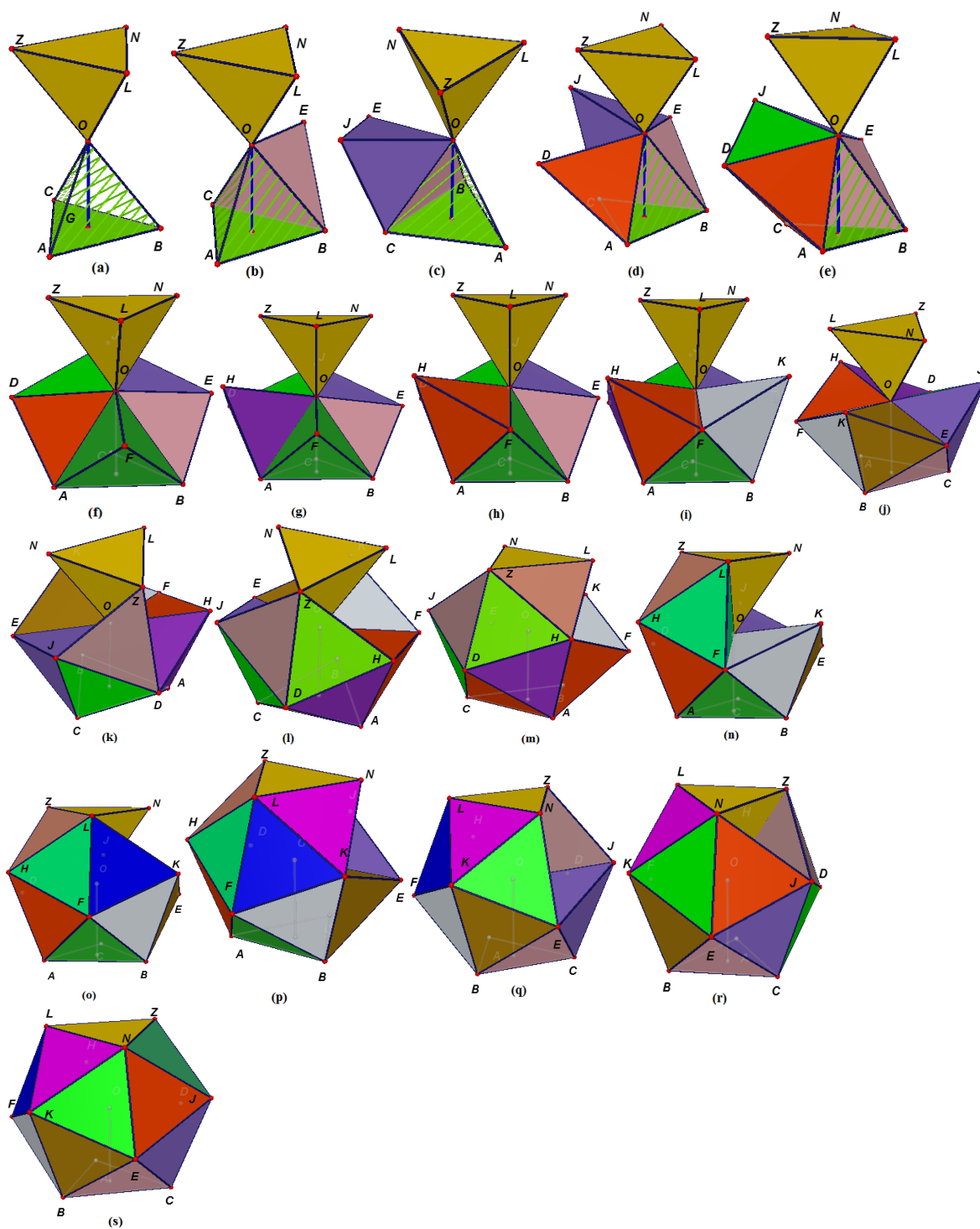
Na figura (d) rotacionamos a pirâmide $BXCUIYZ$ em torno da aresta $\overline{XZ}$, deslocando o vértice B na direção do vértice C , obtendo a pirâmide $CXEMF$. Na figura (e) rotacionamos a pirâmide $CXEMF$ em torno da aresta $\overline{MZ}$, deslocando o vértice X na direção do vértice P , obtendo a pirâmide $EKP NM$. Na figura (f) rotacionamos a pirâmide $UCFGH$ em torno da aresta $\overline{GZ}$, deslocando o vértice U na direção do vértice Q .

Na figura (g) rotacionamos a pirâmide $BXCUIYZ$ em torno da aresta $\overline{UZ}$, deslocando o vértice B na direção do vértice L , obtendo a pirâmide $YUHLI$. Na figura (h) rotacionamos a pirâmide $YUHLI$ em torno da aresta $\overline{LZ}$, deslocando o vértice L na direção do vértice Q , obtendo a pirâmide $ILQJR$. Na figura (i) rotacionamos a pirâmide $ILQJR$ em torno da aresta $\overline{JZ}$, deslocando o vértice I na direção do vértice K , obtendo a pirâmide $SRJPK$.

Finalmente a última figura (j) que rotacionamos a pirâmide $SRJPK$ em torno da aresta $\overline{SZ}$, deslocando o vértice K na direção do vértice B , obtendo a pirâmide $XBSKE$. Com isso completamos o dodecaedro regular utilizando as ferramentas simetrias ou rotação.

ANEXO B – COMPOSIÇÃO DO ICOSAEDRO REGULAR A PARTIR DE UM TETRAEDRO

A partir da construção do tetraedro que pode compor um icosaedro regular podemos construí-lo utilizando as ferramentas rotação ou simetria central, do Cabri 3D.



Fonte: produção do autor.

Na figura (a) acessamos a ferramenta simetria central, clicamos no tetraedro $ABCO$ e no vértice O para construir o tetraedro $ZNLO$. Na figura (b) utilizamos a ferramenta rotação, rotacionar o tetraedro $ABCO$ em torno da aresta $\overline{CO}$, deslocando o vértice A na direção do vértice B , obtendo o tetraedro $CBEO$. Na figura (c), com a mesma ferramenta rotacionamos o tetraedro $ABCO$ em torno da aresta $\overline{CO}$, deslocando o vértice A na direção do vértice E , obtendo o tetraedro $CEJO$. Na figura (d) acessamos a ferramenta rotação para rotacionar o tetraedro $ABCD$ em torno da aresta $\overline{AO}$, deslocando o vértice B na direção do vértice C , obtendo o tetraedro $ACDO$.

Na figura (e) com a ferramenta rotação, rotacionamos o tetraedro $ACDO$ em torno da aresta $\overline{CO}$, deslocando o vértice D em direção ao vértice J obtendo o tetraedro $CDJO$. Na figura (f) com a mesma ferramenta, rotacionamos o tetraedro $ABCO$ em torno da aresta $\overline{AO}$, deslocando o vértice C na direção do vértice B , obtendo o tetraedro $ABFO$. Na figura (g) com a mesma ferramenta, rotacionamos o tetraedro $ABFO$ em torno da aresta $\overline{AO}$, deslocando o vértice F em direção ao vértice D , obtendo o tetraedro $ADHO$. Na figura (h) com a ferramenta rotação, rotacionamos o tetraedro $ABFO$ em torno da aresta $\overline{AO}$, deslocando o vértice F na direção do vértice H , obtendo o tetraedro $AFHO$.

Na figura (i) com a mesma ferramenta, rotacionamos o tetraedro $BECO$ em torno da aresta $\overline{BO}$, deslocando o vértice E na direção do vértice F , obtendo o tetraedro $BFKO$. Na figura (j) com a mesma ferramenta, rotacionamos o tetraedro $BECO$ em torno da aresta $\overline{BO}$, deslocando o vértice E na direção de K , obtendo o tetraedro $BEKO$. Na figura (k) com a ferramenta rotação, rotacionamos o tetraedro $AHDO$ em torno da aresta $\overline{DO}$, deslocando o vértice H na direção do vértice J , obtendo o tetraedro $DJZO$. Na figura (l) com a mesma ferramenta, rotacionamos o tetraedro $AHDO$ em torno da aresta $\overline{DO}$, deslocando o vértice H na direção do vértice Z , obtendo o tetraedro $DHZO$.

Na figura (m) com a ferramenta rotação, rotacionamos o tetraedro $ZLNO$ em torno da aresta $\overline{ZO}$, deslocando o vértice L na direção do vértice H , obtendo o tetraedro $ZHLO$. Na figura (n) com a ferramenta rotação, rotacionamos o tetraedro $ZLHO$ em torno da aresta $\overline{HO}$, deslocando o vértice L em direção ao vértice F , obtendo o tetraedro $HFLO$. Na figura (o) com a mesma ferramenta, rotacionamos o tetraedro $ZLNO$ em torno da aresta $\overline{LO}$, deslocando o vértice N na direção do vértice F , obtendo o tetraedro $FKLO$. Na figura (p) com a ferramenta rotação, rotacionamos o tetraedro $LNZO$ em torno da aresta $\overline{LO}$, deslocando o vértice N na direção do vértice K , obtendo o tetraedro $LKNO$.

Na figura (q), com a mesma ferramenta, deslocamos o tetraedro $KNLO$ em torno da aresta $\overline{KO}$, deslocando o vértice N na direção do vértice E , obtendo o tetraedro $KENO$. Na figura (r) com a ferramenta rotação, rotacionamos o tetraedro $NZLO$ em torno da aresta $\overline{NO}$, deslocando o vértice Z na direção do vértice E , obtendo o tetraedro $EDNO$.

Finalmente na figura (s) com a ferramenta rotação, rotacionamos o tetraedro $NZLO$ em torno da aresta $\overline{NO}$, deslocando o vértice Z na direção do vértice J , obtendo o tetraedro $NDZO$. Com isso completamos a composição do icosaedro regular a partir de um tetraedro construído a partir de relações e medidas da construção proposta por Euclides.