

**PONTÍFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

FELIPE DE ALMEIDA COSTA

**O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O USO DA MODELAGEM
MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DA APRENDIZAGEM
SIGNIFICATIVA**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**SÃO PAULO
2017**

PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

FELIPE DE ALMEIDA COSTA

O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O USO DA MODELAGEM
MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DA APRENDIZAGEM
SIGNIFICATIVA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**, sob a orientação da **Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori**.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2017

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura

Local e data

Dedicação especial

À minha mãe, pois sem ela não conseguiria realizar boa parte dos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, que sempre incentivaram o meu estudo e faziam o possível para eu ser uma pessoa melhor eticamente e intelectualmente.

À minha orientadora Sonia Igliori, que a todo o momento me auxiliou na realização desse trabalho, e conseguiu ver em mim potencial para realizar outros trabalhos sob sua orientação.

Aos Professores do curso, em especial a Professora Cileda Coutinho, que evidenciou alguns caminhos possíveis para a minha pesquisa, e a Professora Barbara Bianchini que contribuiu significativamente na minha motivação na realização dessa dissertação, tanto como membro da banca quanto em classe indicando leituras que subsidiaram esse texto.

Aos Professores Nilson Machado e Eloíza Gomes, que como membros da banca dessa dissertação, apontaram caminhos me auxiliando no desenvolvimento dessa e de outras pesquisas.

Aos meus amigos, que muitas vezes contribuíram na produção desse trabalho com leituras e dicas para melhorar o texto. Não indico nomes em especial, pois não quero ser injusto com quem esteve comigo durante toda a realização da pesquisa.

À minha esposa Karen, que junto à minha amiga Gisele, foram revisoras desse texto.

Ao CNPq que financiou meus estudos durante o período do mestrado.

RESUMO

COSTA, F. A. O ensino de funções trigonométricas com o uso da modelagem matemática sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa. 2017. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

A presente pesquisa se insere no âmbito das investigações sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino. Ela teve como proposta a elaboração e a aplicação de uma sequência didática norteada pelos princípios da modelagem, para o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno. As possibilidades de essas funções poderem expressar fenômenos periódicos foi um fator da escolha. O objetivo principal da investigação foi analisar os efeitos do uso dessa estratégia no ensino, no sentido de propiciar aprendizagem com significado para os alunos. Os sujeitos da pesquisa foram alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola pública de São Paulo. A metodologia utilizada foi de natureza qualitativa, a observação participante, sendo os dados coletados a partir de atividades contextualizadas, com a elaboração de modelos. A orientação para o desenvolvimento da modelagem foi uma daquelas indicadas por Barbosa e a análise de aprendizagem norteou-se pela teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. A sequência didática foi elaborada considerando-se o papel de âncora, de acordo com essa teoria, os movimentos periódicos da natureza que pudessem ser expressos por funções matemáticas que os modelavam, no caso as funções trigonométricas seno e cosseno. Com esse procedimento pode-se, por meio delas, levantar conjecturas a respeito desses fenômenos. Como resultado pode-se constatar que o uso da modelagem matemática pode ser uma opção fértil de estratégia de ensino de matemática, pois apresenta condições para potencializar a aprendizagem dos alunos. E também pode-se analisar que, no processo de modelagem há a possibilidade de os alunos participarem da construção de um novo conhecimento, e nessa construção realizarem aprendizado com significado. Além disso, destaca-se como potencial do uso da modelagem, a formação do pensamento crítico do aluno, pois por meio dela pode-se estabelecer relações entre conceitos matemáticos que estão sendo ensinados e fenômenos naturais.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Aprendizagem Significativa; Funções Trigonométricas; Sequência Didática.

ABSTRACT

COSTA, F. A. The teaching of trigonometric functions with the use of Mathematical Modeling from the perspective of the theory of significant learning. 2017. 142 f. Dissertation (Mestrado in Mathematics Education) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

This research is part of the research on the use of mathematical modeling as a teaching strategy. It was proposed the elaboration and application of a didactic sequence guided by the principles of modeling, for the teaching of sine and cosine trigonometric functions. The possibilities of these functions being able to express periodic phenomena was a factor of choice. The main objective of the research was to analyze the effects of the use of this strategy in teaching, in order to provide meaningful learning for students. The subjects of the research were high school students of a public school in São Paulo. The methodology used was of qualitative nature, the participant observation, being the data collected from contextualized activities, with the elaboration of models. The orientation to the development of the modeling was one of those indicated by Barbosa and the analysis of learning was guided by the learning theory of Ausubel. The didactic sequence was elaborated considering the role of anchor, according to this theory, the periodic movements of the nature that could be expressed by mathematical functions that shaped them, in this case the sine and cosine trigonometric functions. With this procedure one can, through them, raise conjectures about these phenomena. As a result it can be seen that the use of mathematical modeling can be a fertile option of mathematics teaching strategy, since it presents conditions to enhance students' learning. And it can also be analyzed that in the modeling process there is the possibility of the students participating in the construction of a new knowledge, and in this construction they realize meaningful learning. In addition, the potential of the use of modeling, the formation of critical thinking of the student, is highlighted as it can establish relationships between mathematical concepts being taught and natural phenomena.

Keywords: Mathematical Modeling; Significant Learning; Trigonometric Functions; Following teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - O aluno e o professor nos casos de Modelagem	34
Figura 2 – Relação aprendizagem por (recepção x descoberta) e (mecânica x significativa).....	36
Figura 3- Mapa Conceitual da TAS	45
Figura 4: Tábua das Mares (Caderno do Aluno)	50
Figura 5 - Atividade de Consolidação (GeoGebra).....	58
Figura 6 – Aprendizagem Superordenada	61
Figura 7 – Atividade de consolidação (GeoGebra).....	64
Figura 8 – Protocolo da atividade 1: Grupo1	69
Figura 9 - Protocolo da atividade 1: Grupo 2.....	70
Figura 10 - Protocolo da atividade 1: Grupo 3.....	71
Figura 11 - Protocolo da atividade 1: Grupo 4.....	72
Figura 12 - Protocolo da atividade 1: Grupo 5.....	73
Figura 13 - Experimento Pêndulo Simples	75
Figura 14 - Experimento Pêndulo Simples 2	76
Figura 15 - Dados a partir do Pêndulo	76
Figura 16- Construção no Computador	77
Figura 17 - Protocolo da atividade 1: Grupo 1.....	78
Figura 18 - Protocolo da atividade 1: Grupo 2.....	78
Figura 19 - Protocolo da atividade 1: Grupo 3.....	79
Figura 20 - Protocolo da atividade 1: Grupo 4.....	79
Figura 21 - Protocolo da atividade 1: Grupo 5.....	80
Figura 22 - Dados Esperados pelo professor	81
Figura 23 - Protocolo da atividade 2: Grupo 1.....	81
Figura 24 - Protocolo da atividade 2: Grupo 2.....	82
Figura 25 - Protocolo da atividade 2: Grupo 3.....	82
Figura 26 - Protocolo da atividade 2: Grupo 4.....	83
Figura 27 - Protocolo da atividade 2: Grupo 5.....	83
Figura 28 - Protocolo da atividade 2: Grupo 1.....	85

Figura 29 - Protocolo da atividade 2: Grupo 2.....	85
Figura 30 - Protocolo da atividade 2: Grupo 3.....	86
Figura 31 - Protocolo da atividade 2: Grupo 4.....	86
Figura 32 - Protocolo da atividade 2: Grupo 5.....	87
Figura 33 - Protocolo da atividade 3: Grupo 1.....	88
Figura 34 - Protocolo da atividade 3: Grupo 2.....	89
Figura 35 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3.....	90
Figura 36 - Protocolo da atividade 3: Grupo 4.....	91
Figura 37 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	92
Figura 38 - Protocolo da atividade 3: Grupo 1.....	93
Figura 39 - Protocolo da atividade 3: Grupo 2.....	93
Figura 40 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3.....	94
Figura 41 - Protocolo da atividade 3: Grupo 4.....	95
Figura 42 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	95
Figura 43- Apresentação da atividade aos alunos.	97
Figura 44 - Protocolo da atividade 3: Grupo 1.....	98
Figura 45 - Protocolo da atividade 3: Grupo 1.....	98
Figura 46 - Protocolo da atividade 4: Grupo 2.....	99
Figura 47 - Protocolo da atividade 4: Grupo 2.....	100
Figura 48 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3.....	101
Figura 49 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3.....	101
Figura 50 - Protocolo da atividade 3: Grupo 4.....	102
Figura 51 - Protocolo da atividade 3: Grupo 4.....	102
Figura 52 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	103
Figura 53 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	103
Figura 54 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	104
Figura 55- Resultado esperado pelo professor	105
Figura 56 - Protocolo da atividade 3: Grupo 1.....	106
Figura 57 - Protocolo da atividade 3: Grupo 2.....	107
Figura 58 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3.....	108

Figura 59 - Protocolo da atividade 3: Grupo 4.....	109
Figura 60 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	110
Figura 61 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	110
Figura 62 - Circulo trigonométrico da dissertação de Klein	112
Figura 63 - Protocolo da atividade 3: Grupo 1.....	113
Figura 64 - Protocolo da atividade 3: Grupo 1.....	113
Figura 65 - Protocolo da atividade 3: Grupo 1.....	114
Figura 66 - Protocolo da atividade 3: Grupo 2.....	115
Figura 67 - Protocolo da atividade 3: Grupo 2.....	116
Figura 68 - Protocolo da atividade 3: Grupo 2.....	117
Figura 69 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3.....	118
Figura 70 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3.....	119
Figura 71 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3.....	120
Figura 72 - Protocolo da atividade 3: Grupo 4.....	121
Figura 73 - Protocolo da atividade 3: Grupo 4.....	121
Figura 74 - Protocolo da atividade 3: Grupo 4.....	122
Figura 75 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	123
Figura 76 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	124
Figura 77 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	125
Figura 78 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	126
Figura 79 – Atividade apresentada aos alunos pelo professor.....	127
Figura 80 - Protocolo da atividade 3: Grupo 1.....	128
Figura 81 - Protocolo da atividade 3: Grupo 2.....	129
Figura 82 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3.....	130
Figura 83 - Protocolo da atividade 3: Grupo 4.....	131
Figura 84 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5.....	132

SUMÁRIO

CAPÍTULO I	14
1. INTRODUÇÃO.....	14
1.1 OBJETIVO	17
1.2 PROBLEMÁTICA	17
1.3 QUESTÕES DE PESQUISA	19
1.4 PROCEDIMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS.....	19
1.5 REVISÃO DE LITERATURA SOBRE O ASSUNTO.....	20
1.6 ESTRUTURA DA PESQUISA	21
CAPÍTULO II	23
2. MODELAGEM MATEMÁTICA.....	23
2.1 O QUE É MODELAGEM?	23
2.2 ALGUNS ELEMENTOS DA HISTÓRIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA	24
2.3 MODELAGEM, MODELAÇÃO E MODELOS MATEMÁTICOS.....	28
2.4 PORQUE USAR MODELAGEM	29
2.5 AS DIFICULDADES APRESENTADAS NO USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA EM ALGUMAS PESQUISAS	31
2.6 POSSIBILIDADES PARA A IMPLEMENTAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA	32
CAPÍTULO III	35
3. TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA (TAS).....	35
3.1 IDEIA GERAL DA TEORIA	35
3.2 PRIMEIROS SUBSUNÇORES	40
3.3 ORGANIZADOR PRÉVIO	41
3.4 A APRENDIZAGEM NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA...42	
CAPÍTULO IV	46
4. ANÁLISE PRÉVIA DA SEQUÊNCIA	46
4.1 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ENSINAR AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO	46
4.2 ATIVIDADE 1: ITENS 1 e 2.....	46
4.3 ATIVIDADE 1: ITENS 3 E 4	48
4.4 ATIVIDADE 2: ITENS 1 E 2	49

4.5	ATIVIDADE 3: ITENS DE 1 A 11	54
4.6	ATIVIDADE 3 (ITENS 12 E 13)	63
CAPÍTULO V		67
5.	ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DESENVOLVIDA PELOS ALUNOS.....	67
5.1	AULA 1.....	67
5.2	AULA 2.....	74
5.3	AULA 3.....	80
5.4	AULA 4.....	87
5.5	AULA 5.....	96
5.6	AULA 6.....	105
5.7	AULA 7.....	111
5.8	AULA 8.....	126
CONCLUSÕES		133
REFERÊNCIAS.....		139

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A tarefa de ensinar é um processo complexo e dinâmico no qual há que se verificar com frequência, os acertos e erros de seus resultados. Os acertos nos ajudam a verificar se o aprendizado aconteceu, e os erros demonstram a necessidade de modificar as estratégias de ensino.

Para Ausubel (1963) um dos fatores que indicam se a aprendizagem ocorreu é o fato do aluno poder estabelecer relações entre esse conhecimento novo com outros em sua estrutura cognitiva, inclusive conhecimentos de diferentes contextos do cotidiano.

Nesse sentido, compreendo que para existir uma aprendizagem com significado é necessário o aluno relacionar suas experiências com o conhecimento escolar¹, em acordo com a concepção de Ausubel (1963), que em sua teoria descreve que, para ocorrer a aprendizagem significava o aluno precisa relacionar o novo conhecimento com os conhecimentos prévios².

Na escola o aluno se depara com uma série de conhecimentos, mas isso não significa que têm significado para eles, isso pode ocorrer se eles conseguem relacionar o mesmo com diferentes situações da realidade (conhecimentos prévios).

Ao longo de minha trajetória ministrando aulas de matemática (profissional), sempre percebi que, quando os alunos relacionam os conhecimentos com alguma situação, já vivenciada por eles, eles se interessam pela aprendizagem desse conhecimento e conseguem relacionar o mesmo em diferentes contextos. Durante essa trajetória, em vários momentos, tive que ensinar funções trigonométricas, em especial as funções seno e cosseno; ao ensiná-las era difícil fazer relação com algum conhecimento prévio do estudante, desse modo ensinar esse conceito se tornava muito enfadonho e os alunos não demonstravam interesse em aprender,

¹ Conteúdos ensinados na escola.

² Conhecimentos que os alunos já trazem do meio no qual estão inseridos.

sendo necessárias muitas aulas para eles abstraírem os conhecimentos relacionados às funções trigonométricas.

No mestrado tive contato com a modelagem matemática, e percebi que ela poderia ser uma estratégia de ensino que propiciaria ao professor e alunos situações em que se consiga relacionar os conteúdos trabalhados em sala com situações reais, potencializando a aprendizagem. O desenvolvimento de atividades de aprendizagem com a modelagem pode implicar em um ensino de matemática com mais significado para o aluno, permitindo que ele vivencie relações entre a matemática e fenômenos da vida real.

Nessa proposta de ensino o aluno se modifica, pois estabelece uma relação entre o mundo e o conceito a ser aprendido, isso acontece por meio de questionamentos e análises, possibilitando interações dos conhecimentos novos com os anteriores. Essa dinâmica contribui com o desenvolvimento da aprendizagem e em consequência com a evolução do aluno/cidadão e do meio em qual ele está inserido, tornando-o um ser mais questionador, conseguindo perceber as possibilidades e estabelecer interações com os diversos meios sociais.

A aprendizagem quando resultante do ensino por meio da modelagem³ como estratégia⁴, possibilita criar situações que favoreçam a construção de conceitos, em particular, o objeto desse estudo, funções trigonométricas seno e cosseno.

Com essa estratégia de ensino o aluno pode perceber a aplicabilidade da matemática, tornando-a mais atrativa, dessa forma, o aluno pode construir a ideia do objeto a partir de uma situação real e ampliar o significado que eles próprios elaboraram sobre o objeto de aprendizagem.

Nessa pesquisa as atividades foram desenvolvidas de forma que, professor e alunos interagissem provocando uma série de questionamentos, argumentação e organização de ideias, contribuindo para que se tivesse uma aula dinâmica, e como consequência levando à obtenção de melhores resultados de aprendizagem para os

³ Modelagem substitui o termo Modelagem Matemática.

⁴ Neste trabalho assumimos a Modelagem como estratégia de ensino, mas sem interferir no currículo já estabelecido no plano de ensino da escola.

alunos. Na modelagem esses aspectos supracitados são fatores imprescindíveis, pois podem despertar o interesse dos alunos pelo desenvolvimento da atividade.

São essas razões que me motivaram a desenvolver essa pesquisa, na qual elaborei e apliquei uma sequência de atividades norteadas por referências de modelagem para o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno. A análise dos resultados da pesquisa, do ponto de vista da aprendizagem, teve por base a Teoria da aprendizagem significativa.

Nessa teoria proposta por Ausubel (1965, apud Moreira, 1999, p.155) é afirmado que “a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual a nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura do conhecimento do indivíduo”. E para que o aprendizado seja internalizado, é indispensável que o novo conhecimento seja ancorado a ideias já estabelecidas na estrutura cognitiva de quem aprende, pois, essa ligação contribui para a construção do novo conhecimento. As atividades que levam em consideração o que o educando já sabe é fundamental, e que relacionam suas experiências com a construção de modelos, é um exemplo de atividade que cria essa situação, ancorando o novo conhecimento em conhecimentos prévios.

Essa pesquisa tem referência metodológica qualitativa, e se desenvolveu em uma atividade de ensino com a utilização da modelagem, realizada com um grupo de alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola pública de São Paulo.

Esse trabalho terá sua sequência de atividades disponibilizada no sítio www.ensinomatematica.com.br, como atividade do projeto de pesquisa intitulado “Atividades Matemáticas para o Ensino Fundamental II no ambiente WordPress”, desenvolvido na PUC-SP⁵ e coordenado por Igliori. Esse projeto tem por objetivo proporcionar aos professores de matemática conteúdos que possam ser utilizados em suas aulas.

A atividade de aplicação (sequência didática) de modelagem ocorre por meio da análise de algumas situações: o movimento de um pêndulo, o índice de chuvas de uma cidade e o movimento de uma roda de bicicleta, possibilitando estabelecer

⁵ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

um cenário para a utilização de um modelo para o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno, com vistas à participação dos alunos no processo de aprendizagem.

Com esse procedimento busca-se uma aprendizagem significativa na concepção de Ausubel (1963), na qual ideias, conceitos construídos de forma significativa podem servir de âncora (subsunçores⁶) de novos conceitos, a sequência para o aprendizado das funções trigonométricas se relaciona a movimentos e fenômenos periódicos, já conhecidos pelos alunos.

O processo de modelagem utilizado nessa pesquisa baseia-se no primeiro dos três casos propostos por Barbosa (2001), escolha justificada no fato de que, nesse caso o professor fica responsável pela elaboração do modelo, ficando ao aluno a sua resolução e análise, assim permitindo que o professor realize a modelagem sem a necessidade de interferência no currículo escolar preexistente.

A sequência também está em conformidade com Almeida e Dias (2004) para os quais é interessante iniciar as atividades de modelagem, utilizando modelos matemáticos a partir de situações problema estabelecidos e apresentados pelo professor.

1.1 OBJETIVO

O objetivo da pesquisa é investigar se atividades de ensino com o uso de modelagem tendo fenômenos periódicos (como os índices pluviométricos, movimento oscilatório de um pêndulo e o giro de uma roda de bicicleta com ela parada) como aprendizado prévio, são meios que favorecem a aprendizagem significativa dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno.

1.2 PROBLEMÁTICA

Em minha prática docente percebo que, para muitos alunos, a matemática é considerada muito difícil para se aprender. Alunos, em sua grande maioria, descrevem a matemática como sendo difícil e indicam não gostar desse componente

⁶ Ausubel chamava de Subsunçores os conhecimentos que o aprendiz já tinha em sua estrutura cognitiva (conhecimentos prévios).

curricular, o que pode apresentar uma barreira para o processo de ensino, gerando então dificuldade no processo de aprendizagem.

Muitos desses alunos ao serem questionados sobre o porquê de não gostarem de matemática, descrevem que ela é difícil, e não entendem a necessidade de realizar as operações, pois não conseguem identificar relações entre a matemática e sua vida, essas respostas podem fazer sentido para eles. E essa carência encontra eco em alguns livros didáticos que apresentam séries de conteúdos com pouca ou nenhuma relação com problemas reais, ocasionando pouco interesse por parte dos alunos ao conhecimento ensinado.

Nessa situação se insere o conceito de função trigonométrica, que é em geral pouco explorado não favorecendo uma aprendizagem significativa no ensino médio, isso se evidencia nos resultados dos alunos do município de Itapeceira da Serra matriculados na SEE-SP⁷, que em 2015 apresentaram resultados não animadores nas habilidades H13 (Resolver equações trigonométricas simples, compreendendo o significado das condições dadas e dos resultados obtidos) e H27 [Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente)], em que o aproveitamento deles nas questões referentes a essas habilidades no SARESP⁸ são 40,89% e 45,53%⁹ respectivamente. Nesse cenário é importante rever a maneira de como esse conteúdo é ensinado para os alunos nas escolas públicas do estado de São Paulo.

Esses fatos levaram-me a repensar e considerar novas estratégias de ensino, na abordagem dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno, com o desenvolvimento de atividades de aprendizagem com modelagem. As atividades de modelagem podem trazer o objeto de estudo para a realidade do aluno, permitindo que o mesmo vivencie a construção do conhecimento e se possível que ele perceba a aplicação da matemática nos diferentes contextos, e assim possibilite que o aluno tenha uma aprendizagem significativa.

⁷ Secretaria de Educação do Estado de São Paulo

⁸ Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

⁹ Dados obtidos na Plataforma Foco Aprendizagem

1.3 QUESTÕES DE PESQUISA

O objetivo da pesquisa motivou a busca de respostas às seguintes questões:

Nas condições atuais da escola pública, a modelagem na sala de aula pode levar o aluno a ser protagonista do seu aprendizado acarretando uma aprendizagem significativa?

As estratégias de ensino norteadas pela modelagem e referenciadas pela teoria da aprendizagem significativa potencializam o aprendizado dos alunos relativo às funções trigonométricas seno e cosseno?

1.4 PROCEDIMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Essa pesquisa é de natureza qualitativa, que segundo Lüdke e André (1986) pode assumir várias formas, destacando-se primeiramente a pesquisa etnográfica e o estudo de caso. Ambas vêm ganhando muita aceitação e credibilidade na área da educação, mais precisamente as relacionadas com a escola. Em seu teor um estudo de caso consiste em investigar certa população, em que os dados recolhidos não podem ser generalizados.

Nessa pesquisa a aprendizagem por modelagem operará como eixo para o desenvolvimento do conteúdo, e a atuação teórica será desenvolvida pelos pressupostos de Ausubel (1963), os quais vão ao encontro do modelo metodológico utilizado, que possibilita a relação de estruturas cognitivas com a aprendizagem de um novo conhecimento, gerando uma aprendizagem significativa.

A pesquisa foi realizada com um grupo de 25 alunos da 3ª série do ensino médio, organizados em grupos de 5 alunos. A proposta de atividade foi a aplicação de uma sequência didática com o uso da modelagem em 8 aulas de 50 minutos. A aplicação tinha por objetivo utilizar várias ferramentas para potencializar a aprendizagem dos conteúdos de funções trigonométricas pelos alunos.

A modelagem contribui com o interesse pelo conhecimento matemático, isso porque ela coloca o aluno em situações em que o mesmo vê sentido no conhecimento estudado, dessa maneira é despertado o interesse a explorar esse conhecimento e trabalhar com entusiasmo para aprender. Esses fatores fazem com que a modelagem proporcione atitudes positivas em relação à matemática.

1.5 REVISÃO DE LITERATURA SOBRE O ASSUNTO

A revisão bibliográfica é parte essencial de uma pesquisa, pois possibilita a conversa com os pesquisadores que já investigaram o mesmo assunto e contribui com o avanço científico. Nessa dissertação essa revisão foi feita como segue.

Primeiramente foi feito uma busca no banco de teses da CAPES¹⁰ com as palavras-chaves “funções periódicas e funções trigonométricas”, encontrando 27404 registros. Em razão do número foi refinada a busca para dissertações e teses, das áreas de concentração: educação, matemática e educação matemática.

Com esse refinamento resultaram 545 trabalhos. Com o foco acerca do ensino dessas funções, chegou-se a um total de 22 trabalhos¹¹ que tratavam desse ensino, sendo que os mesmos utilizavam diversas estratégias que foram caracterizadas da seguinte forma:

Tabela 1: Caracterização das dissertações analisadas

Utilizam como estratégias	Quantidade	Utilizam como estratégias	Quantidade
GeoGebra	12	Outro <i>Software</i>	4
Modelagem Matemática	1	Fenômenos Físicos	5
Uso de Materiais*	2	Resolução de Problemas	7
Sequência didática	3	Uso de livros didáticos	2

* Estratégias que usam alguma ferramenta criada pelo autor do trabalho pesquisado.

Aqui são destacados 5 trabalhos que utilizaram fenômenos físicos. Vale ressaltar que 16 trabalhos utilizaram recurso tecnológico (GeoGebra ou outro *Software*) para o ensino das funções trigonométricas ou periódicas. O único trabalho

¹⁰ Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

¹¹ Na Tabela 1 estão apresentadas as estratégias utilizadas nesses trabalhos, sendo que alguns apresentam mais de uma estratégia, elas não são disjuntas.

que apresentou os pressupostos da modelagem foi o trabalho de Santos (2014) que utilizou o material oficial do estado de São Paulo, no qual o fenômeno estudado foi o movimento do sol durante as estações do ano, que pode ser modelado pela função seno.

Para isso Santos aplicou a sequência que constava do material oficial. Na dissertação descrita nesse Relatório a sequência didática foi elaborada pelo pesquisador. E o educando foi conduzido a modelar fenômenos pelas funções seno e cosseno, diferente do trabalho de Santos (2014) no qual ele modela o movimento do sol pela função seno.

Entre os 22 trabalhos analisados, o de Santos (2014), é o único que tem como temática de pesquisa a modelagem.

A partir do panorama das pesquisas que tratam da modelagem no ensino fundamental e médio no período de 2010 a 2014, que consta em Santos (2016), tomou-se conhecimento das 85 dissertações e 29 artigos.

1.6 ESTRUTURA DA PESQUISA

A pesquisa está dividida em cinco capítulos e conclusões finais.

No Capítulo I encontram-se: Introdução, objetivos, metodologia e levantamento bibliográfico das pesquisas com a temática do uso da modelagem no ensino de funções trigonométricas.

No Capítulo II estão: um dos referenciais teóricos da pesquisa, a modelagem matemática como estratégia de ensino, de acordo com Barbosa (2001) e a explicitação dos procedimentos metodológicos para a obtenção dos dados.

No Capítulo III são apresentados elementos da “teoria da aprendizagem significativa”, segundo os preceitos de Ausubel (1963), eixo norteador da elaboração e análise da sequência didática. Nessa apresentação indico as principais características dessa teoria. Outro referencial norteador dessa pesquisa é a modelagem matemática.

No Capítulo IV são apresentadas a sequência e a análise da mesma, de acordo com a teoria da aprendizagem significativa (AUSUBEL,1980) e da estratégia de ensino da modelagem (BARBOSA, 2001).

No Capítulo V e Conclusões, estão os resultados da realização da sequência didática. São descritos o ambiente de aplicação da modelagem, discutidos e analisados os protocolos dos alunos, sujeitos de pesquisa. Além disso são descritos os resultados das análises dos protocolos dos alunos, durante a realização da sequência didática. As análises foram elaboradas de acordo com os referenciais teóricos, e também a potencialidade de aprendizagem de funções trigonométricas nas aulas de matemática, utilizando a modelagem (BARBOSA, 2001) como estratégia de ensino, além da teoria da aprendizagem significativa (AUSUBEL,1980).

CAPÍTULO II

MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 O QUE É MODELAGEM?

A modelagem pode ser compreendida como uma estratégia de ensino que possibilita ao estudante abordar conteúdos matemáticos como expressão de fenômenos de sua realidade, e tem como objetivo explicar matematicamente situações do cotidiano, das mais diferentes áreas da ciência, com o propósito de educar matematicamente. Ela permite uma inversão do “modelo comum” de ensino, visto que, por meio da modelagem selecionam-se primeiramente os problemas e deles emergem os conteúdos matemáticos, de modo a resolvê-los (BURAK, 1992).

No entender de Bassanezi (2015) a modelagem consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Na prática docente percebo que a modelagem tem como principal característica, levar o estudante a adquirir conhecimentos matemáticos em sua relação com situações reais. Na evolução do uso dessa estratégia no ensino foram se estruturando entre os pesquisadores diferentes concepções sobre como utilizar a modelagem. Para Bassanezi (2015) e Burak (1992), os estudantes devem escolher os temas geradores e o professor a partir dessas escolhas deve ajudar os estudantes a buscar as soluções matemáticas para o problema escolhido. Para Beltrão (2009) e Sadovsky (2010), deixar a escolha do tema para os alunos pode dificultar a implantação da mesma, na medida em que na escola há um programa para seguir, e essa escolha e o trabalho com ela pode interferir no calendário de desenvolvimento desse programa, o que pode não ser aceito.

Por um lado, Burak (1992) e Bassanezi (2015) defendem que a escolha do tema que vai gerar a construção de um modelo matemático deve ser atribuição dos alunos. Para isso, o conjunto de conhecimentos prévios deve orientar o caminho a seguir nesse processo de construção. Por outro, Beltrão (2009), assumindo

aspectos de sua prática, indica que os conhecimentos prévios, o prazo fixado previamente para construir o programa do curso e as exigências da instituição, se constituem em dificuldades para deixar ao encargo do aluno a escolha do tema no processo de modelagem.

Há diferença entre os pesquisadores sobre a atribuição da escolha do fenômeno, mas há convergência no entendimento de que, a modelagem tem como característica promover a busca pelo estudante das soluções dos problemas a partir de seus conhecimentos prévios, mobilizando diferentes conhecimentos para criar estratégias de resolução, avaliação e reflexão sobre o problema estudado.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), explicitam que em um processo de modelagem o sujeito do processo cognitivo é o aluno. Cada pessoa constrói o seu conhecimento, o sujeito atribui significados pelos próprios meios. Bassanezi (2015) considera que a utilização da modelagem na educação matemática valoriza o “saber fazer” do estudante e desenvolve sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos em seus diferentes contextos de aplicações, a partir da realidade de seu ambiente.

Assim, a modelagem contempla um dos principais objetivos do ensino, que é o aprender a aprender, ou seja, fazer com que o estudante aprenda a buscar soluções para as mais diferentes situações.

Nessa perspectiva, o documento “Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias” (SÃO PAULO, 2009) enfatiza que, a autonomia para gerenciar a própria aprendizagem (aprender a aprender) e para a transposição dessa aprendizagem em intervenções solidárias (aprender a fazer e a conviver) deve ser a base da educação das crianças, dos jovens e dos adultos, que têm em suas mãos a continuidade da produção cultural e das práticas sociais.

2.2 ALGUNS ELEMENTOS DA HISTÓRIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem pode ser compreendida como um fenômeno de perceber a matemática em situações reais, das mais variadas áreas da ciência e da atividade humana. Em diferentes momentos na história da humanidade foi utilizada uma abordagem de modelagem para resolver problemas, como por exemplo, a narrativa que explicita Tales de Mileto quando o seu desejo é descobrir a altura de uma

pirâmide, na qual ele observa as sombras projetadas por ela e pelo seu corpo, o que o fez calcular a altura dessa pirâmide. Tal modelação foi a base da enunciação do Teorema de Tales.

Stocco e Diniz (2010) expõem que a partir de observações sucessivas aos fenômenos naturais, o homem percebeu que alguns deles seguiam princípios constantes, e então havia a possibilidade de descrever esses fenômenos por meio de expressões matemáticas. Esse fato levou a utilização da matemática como uma ferramenta para sistematizar as observações, possibilitando o desenvolvimento de modelos que representassem as leis naturais, ou mesmo situações problemáticas do cotidiano que necessitavam de soluções.

Para Santos (2011) os conceitos matemáticos foram sendo elaborado ao longo da história, tanto pela necessidade da evolução da sociedade, quanto do desenvolvimento da própria matemática. Grande parte das descobertas de conceitos matemáticos não teve de pronto uma aplicação fora dela, porém em momentos posteriores esses conceitos se fizeram presentes no desenvolvimento das diversas ciências e da tecnologia.

A ideia de usar modelos matemáticos teve um grande impulso na revolução industrial, pois havia a necessidade de criar meios de aperfeiçoar a produção. Santos (2011) pondera que nesse contexto foi necessária a criação de modelos teóricos para a implementação de máquinas que substituiriam operários, centros de produção, armazenamento, logística, entre outros.

O termo “modelagem matemática” como forma para escrever, formular, modelar e resolver problemas de diversas áreas do conhecimento (BIEMBENGUT, 2009) aparece no início do século XX na literatura sobre Engenharia e Ciências Econômicas.

Beltrão (2009) descreve que anteriormente ao século XIX, a matemática ensinada tomava como base a matemática pura, somente no final desse século a matemática aplicada passou a compor o currículo escolar, devido ao empenho do matemático Félix Klein.

O ensino nas perspectivas de Klein deveria estar relacionado a outras ciências e realidades pelas aplicações matemáticas, não se limitando apenas às resoluções intramatemáticas¹². Félix Klein apresenta algumas alterações que norteariam a modernização do ensino da matemática:

A eliminação da organização excessivamente sistemática e lógica dos conteúdos; a valorização da intuição como elemento inicial importante para futura sistematização; a introdução de conteúdos mais modernos, como funções e Cálculo Diferencial e Integral ainda no ensino secundário (atual Ensino Médio); a valorização das aplicações da Matemática para a formação de qualquer estudante de nível secundário, não apenas de futuros técnicos, e a fusão dos conteúdos ensinados (BELTRÃO, 2009, p. 38-39).

Esse famoso matemático defendia uma educação com significados, em que os conteúdos não eram o único alvo. Quando os conteúdos eram puramente abstratos procurava-se construir significados durante a solução de problemas. Então essa matemática descrita por ele era chamada de matemática aplicada, na qual fez surgir o que chamamos de modelagem.

As ideias de Klein foram defendidas por Hans Freudenthal e Henry Pollak. Ambos participaram de conferências defendendo a inclusão de aplicações e modelagem no ensino da matemática, na década de 1960.

De acordo com Beltrão (2009), apesar da organização curricular nessas décadas ser regida pelos princípios da Matemática Moderna, Henry Pollak se dedicou à consolidação das ideias de modelagem no ensino. Biembengut (2009) descreve que no cenário internacional, ocorrem na década de 60, fóruns e debates sobre modelagem e aplicações dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade.

A partir dessas discussões houve grandes impulsos na formação de grupos de pesquisadores sobre o tema modelagem e suas aplicações. De acordo com Beltrão (2009), as questões que se destacaram, foram como ensinar matemática de modo que seja útil, ou seja, que envolvesse situações do cotidiano do estudante, que possibilitasse o desenvolvimento da capacidade de efetuar análise de situações da realidade e da habilidade para criar modelos que representassem essas

¹² Problemas que não são contextualizados fora da matemática.

situações, e não que se restringisse apenas a aplicações padronizadas. Biembengut (2009) descreve que na Europa ocorriam movimentos liderados por Hans Freudenthal, na Holanda e outro movimento na Dinamarca, liderado por Bernhelm Booss e Mogens Niss.

Em 1978 foi realizado um congresso sobre o tema matemática e realidade, contribuindo para a consolidação em 1983, do Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações – ICTMA.

A utilização da modelagem no ensino da matemática teve início no século XX, quando matemáticos puros e aplicados discutiam métodos para ensinar matemática. Seu surgimento no Brasil ocorreu tomando-se por base as ideias e os trabalhos de Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrosio, no final da década de 1970 e o começo da década de 1980, os quais valorizam aspectos sociais em sala de aula, conforme destacam Borba e Villareal (2005).

De acordo com Beltrão (2009), no final da década de 1960 surgiu a modelagem no Brasil, por meio de matemáticos brasileiros que participaram de congressos internacionais da área, dentre eles o professor Aristides Camargo Barreto, da PUC do Rio de Janeiro. O objetivo era fazer uso da modelagem em sala de aula como um meio de motivar o aluno para a aprendizagem da matemática.

Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), na década de 1980 a modelagem ganhou força por meio da influência de trabalhos como os de Aristides Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Bassanezi, João Frederico Meyer, Marineuza Gazetta e Eduardo Sebastiani, que disseminaram a modelagem valendo-se de cursos para professores e ações em sala de aula.

Em meu grupo de pesquisa credenciado pelo CNPq, “O elementar e o superior em matemática” a investigação sobre essa temática se iniciou com Brucki (2011) e já foram defendidas 4 dissertações, 1 tese de doutorado, além de artigos publicados e oficinas com professores. No momento há mais essa dissertação para o ensino médio e duas teses de doutorado em desenvolvimento.

2.3 MODELAGEM, MODELAÇÃO E MODELOS MATEMÁTICOS

Nesse item apresenta-se a discussão feita por Barbosa (2009) sobre modelagem matemática e modelos matemáticos, introduzindo que:

Um modelo matemático é sempre baseado sobre uma interpretação específica da realidade. Outra possibilidade não existe. Não podemos entrar em contato com a realidade sem estrutura-la. Um modelo nunca pode ser um modelo da realidade (BARBOSA, 2009, p.76).

Edwards e Hamson (1990, p.37) dizem que: “Um modelo é uma forma simplificada de representar determinados aspectos de um sistema real”.

Os autores citados consideram que os modelos não apresentam a realidade, apenas uma porção dela. Barbosa (2009) indica também que a ação de modelar é usada pelos professores para legitimar um estudo. Nesse sentido, os modelos matemáticos acabam reforçando o argumento de que, modelos são retratos exatos da realidade. Já a modelagem matemática para o autor, é sempre ativada a partir da compreensão de um fenômeno, assim não é apresentada aos alunos uma porção da realidade, apresenta-se a eles a realidade em si, e a partir dela é feita a modelagem. Por conseguinte, é feito o modelo matemático no momento em que é ajustada a situação real para um conceito matemático.

Entendo que em um processo de modelagem matemática no ensino, deve-se partir de situações reais, obtendo os dados e procurando na matemática conteúdos que subsidiem o estudo do fenômeno analisado. Desse modo, realizar modelagem implica em construir modelos matemáticos.

Nesse estudo interessa também, distinguir os diversos termos envolvidos, e por isso procuro na literatura o significado de modelação matemática, e obtenho a informação de que, para os autores pesquisados, modelagem matemática e modelação matemática são equivalentes. Esses autores são: Ponte, Matos e Abrantes (1998), que definem o processo de modelação matemática como aquele que tem origem em um fenômeno real, para o qual é construído um modelo matemático; Martins et al. (2013) indicam que a modelação matemática é um ambiente de aprendizagem, em que os alunos são convidados a investigar fenômenos a partir da matemática. Esses autores usam em vários momentos os trabalhos de Barbosa para explicar o que é modelação matemática; Martins et al.

(2013) consideram modelagem e modelação matemática é o mesmo tipo de ação; Pires e Magina (2011) descrevem a relação entre modelagem e modelação matemática, na modelação o professor escolhe os fenômenos que serão reproduzidos em sala e a modelagem é a própria matemática aplicada, para os autores a diferença é que, uma depende do ensino a ser dado, e a outra é inerente à existência da matemática.

A respeito da modelação Biembengut e Hein (2007) comentam:

Na modelação, o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo a sua recriação em sala de aula, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em questão, além de obedecer ao currículo inicialmente proposto. (BIEMBENGUT e HEIN, 2007, p.29).

Para esses autores, a modelação é uma modelagem matemática que podemos utilizar para ensinar um determinado conceito matemático. Logo no ensino a modelação e a modelagem têm mesmo significado.

No entanto, utilizado o caso 1¹³ de Barbosa (2011) entendo também que modelagem e modelação funcionam igualmente, ou seja, buscam fundamentar o ensino de conceitos matemáticos a partir de fenômenos reais.

2.4 PORQUE USAR MODELAGEM

Sadovsky (2010, p. 103) considera que frequentemente os professores afirmam que “a matemática está em toda parte”, para convencer seus alunos da importância de seu estudo. Embora seu estudo seja relevante, a matemática não é visível em toda parte. A frase “soa” tão distante da experiência dos estudantes, que dificilmente será capaz de motivá-los de alguma maneira interessante para o ensino.

Ao utilizar a modelagem com os estudantes em sala de aula, observo que ao desenvolver essa estratégia de ensino é possível mostrar essa relação da matemática com fenômenos de nosso dia a dia, e assim os estudantes sentem-se mais motivados para construir seu conhecimento.

¹³ Este caso será explicado posteriormente.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) afirmam que, o que se quer com a modelagem é ensinar matemática de uma maneira que os estudantes, a partir das ações para esse ensino, também criem mecanismos de reflexão e de ação. Portanto, nessa perspectiva não existe mais um currículo neutro, descontextualizado e sem significado para o professor, nem para o estudante. Ao contrário, o currículo é dinâmico, flexível, e constantemente reconstruído pelos professores e estudantes.

De acordo com Bassanezi (2015) tanto no caso em que há apenas um assunto escolhido, ou quando os temas são diversificados, os estudantes devem trabalhar em pequenos grupos com problemas específicos relacionados ao tema comum ao grupo.

Vejo que os alunos ao trabalharem em grupos, conseguem melhores resultados, pois dividem suas experiências e juntos buscam soluções para o modelo proposto. Para Sanches (2005), com o trabalho cooperativo eles passam da competição à cooperação, privilegiando o incentivo do grupo, em vez de incentivo individual, favorecem o desempenho escolar, a interação dos estudantes e as competências sociais.

Sanches (2005) destaca também que a aprendizagem em pares e bem conduzida, se revela uma estratégia quase indispensável numa escola que se quer de todos e para todos.

Além disso, os trabalhos em grupo estão de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2009), que em sua concepção, parte do princípio de que ninguém é detentor absoluto do conhecimento, e que o conhecimento coletivo é maior que a soma dos conhecimentos individuais, além de ser qualitativamente diferente.

De acordo com Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), na modelagem não se deve mais assistir aos objetos matemáticos, mas manipulá-los, rompendo com a concepção de que o professor ensina, e passando a acreditar na ideia de que o conhecimento não está somente no sujeito, nem no objeto, mas na sua interação, ou seja, passamos de objetos que o professor ensina para objetos que

o estudante explora. Nessa concepção o aluno explora o conhecimento, deixando de ser passivo em seu processo de aprendizagem.

Do que apresentam as Diretrizes Curriculares e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), referentes à formação do estudante crítico, reflexivo, capaz de resolver problemas, reforçando que o ensino da matemática deve estar a favor do exercício da cidadania. Tenho questionado em: como alcançar tais objetivos? Levanto a hipótese de que a modelagem é uma opção de caminho interessante, mas para isso são necessárias experiências nas ações formativas, inicial ou continuada de professores.

Assim, o uso da modelagem contempla outra competência exposta em diferentes documentos curriculares de matemática: a formação de cidadãos plenos, devendo adquirir discernimento e conhecimentos pertinentes para tomar decisões em diversos momentos, como em relação à escolha de alimentos, ao uso da eletricidade, ao consumo de água, à seleção dos programas de TV ou à escolha do candidato a um cargo político.

2.5 AS DIFICULDADES APRESENTADAS NO USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA EM ALGUMAS PESQUISAS

As pesquisas revelam que os pesquisadores utilizam formas diferentes para introduzir a modelagem na sala de aula, as quais podem eventualmente ser compostas, conforme o conteúdo ou momento de planejamento pedagógico. Beltrão (2009) admite que a utilização da modelagem na escola (sala de aula) possa ter seu tema ou fenômeno sendo indicado pelo professor. Assim, esse tem condições de escolher fenômenos que contemplem os conteúdos do currículo. Já para Bassanezi (2015) o tema deve ser escolhido pelos estudantes, e a partir o professor e eles trabalham os conceitos matemáticos que podem expressar quantitativamente os elementos desses fenômenos, ou seja, a partir do fenômeno os alunos buscam dados numéricos do mesmo, e de posse desses dados estudam os conceitos matemáticos que esse fenômeno propicia.

Na prática percebo que essas duas formas podem apresentar entraves e/ou facilidades para o uso da modelagem na sala de aula. No caso de Beltrão (2009), entendo que o professor ao apresentar o fenômeno para o estudante, se sente melhor preparado para responder às eventuais dúvidas e ainda conseguir explorar

os fenômenos que contemplem os tempos de ensino delimitados pelo currículo escolar. Entretanto, com a escolha partindo do professor, pode levar a que os estudantes não tenham tanto envolvimento no trabalho de modelagem.

Na proposta de Bassanezi (2015), os estudantes trazem o tema e junto com o professor buscam modelar o fenômeno, nesse caso terão maior envolvimento, pois o tema parte deles. Todavia, o problema pode ser a ausência de controle do professor em relação aos conteúdos que esses fenômenos podem trazer, se essa aprendizagem está de acordo com o programa e se vai ser compreensível para os estudantes.

No entender de Bassanezi (2015), a maior dificuldade encontrada pelos professores que decidem adotar a modelagem em seus cursos é a de transpor a barreira do “ensino comum” em favor de uma opção mais criativa.

No ensino tradicional, o objetivo de estudo se apresenta quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência pré-determinada, com um objetivo final muito claro que, muitas vezes, nada mais é que “cumprir o programa da disciplina”. Ora, ensinar a pensar matematicamente é muito mais que isso. Portanto, é imprescindível mudar métodos e buscar processos alternativos para transmissão e/ou aquisição de conhecimentos (BASSANEZI, 2015, p. 11).

Nesse trecho, vejo que não há preocupação com o currículo, mas sim com o conceito matemático. Porém, deve-se lembrar de que as escolas têm que fazer esforços para cumprir seus programas de ensino, e esses devem ser elaborados também com a participação ativa dos estudantes e de toda a comunidade escolar.

2.6 POSSIBILIDADES PARA A IMPLEMENTAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Do ponto de vista de Barbosa (2001), a modelagem propicia uma oportunidade para que os alunos indaguem situações por meio da matemática, sem procedimentos fixados previamente, e com possibilidades diversas de encaminhamento, sendo que, os conceitos e as ideias matemáticas exploradas dependerão do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem uma atividade proposta.

Segundo o autor, a modelagem é um ambiente de aprendizagem, no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade.

O entendimento de modelagem apresentado por Barbosa (2001) privilegia situações com circunstâncias que as sustentem, como por exemplo: o crescimento de uma planta, o fluxo escolar na escola, a construção de uma quadra de esportes, o custo com propaganda de uma empresa, a criação comercial de perus, o sistema de distribuição de água em um prédio e outros. Esses são alguns exemplos possíveis, sendo que, nesse contexto, tem-se pouco interesse em situações fictícias elaboradas artificialmente chamadas por Skovsmose (2000, apud BARBOSA, 2001) de sem realidade - para atender aos propósitos do ensino de matemática. Isso não quer dizer que elas não possam envolver os alunos em ricas discussões; podem e devem integrar o currículo. Apenas, tal como as investigações de matemática pura, não se enquadram confortavelmente na perspectiva de modelagem que são sustentadas por Barbosa (2001).

Convém ressaltar que existe uma relativa distância entre a modelagem e a maneira que o ensino tradicional enfoca problemas de outras áreas, pois o ambiente de aprendizagem de modelagem baseado na indagação e investigação, busca estabelecer relações com outras áreas e o dia a dia, e o ensino tradicional trazem situações idealizadas, que podem ser diretamente abordadas por ideias e algoritmos sugeridos pela exposição do professor.

Na análise dos estudos sobre modelagem, nacional e internacional, é possível classificar os casos de três formas distintas, segundo Barbosa (2001, p. 8-9):

- 1) Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.
- 2) Caso 2. O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.
- 3) Caso 3. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

Com base na argumentação do autor, nos três casos de modelagem supracitados, o professor é concebido como “copartícipe” na investigação dos alunos, dialogando com eles acerca de seus processos. Segundo esse autor, em alguns casos, o professor possui um papel mais presente na organização das atividades. Por exemplo, no caso 1, o professor é responsável pela formulação da situação - problema, e a sua presença é mais intensa do que no caso 3, em que a formulação é compartilhada com os alunos. Na Figura 1 está esquematizada a participação do professor e do aluno em cada um dos três casos.

Figura 1 - O aluno e o professor nos casos de Modelagem

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração da situação-problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Fonte: Barbosa, 2001, p.8

Convém ressaltar que os casos 1, 2 e 3 nos indicam possibilidades de programar a modelagem de diferentes maneiras no currículo escolar, bem como não tem a intenção de engessar a prática docente, sendo que, o ensino por meio da modelagem sempre poderá ser revisado conforme as possibilidades e as limitações impostas pelo contexto escolar, por meio de atividades que envolvem professores e alunos em relação aos seus conhecimentos e preferências.

Nesse trabalho, a modelagem matemática é concebida como uma estratégia de ensino que estrutura conhecimentos matemáticos, a partir de situações reais. Para desenvolver a modelagem foram utilizadas as ideias propostas por Barbosa (2011), em seu caso 1.

CAPÍTULO III

TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA (TAS)

3.1 IDEIA GERAL DA TEORIA

A TAS, é uma teoria construtivista, ela parte do pressuposto que para o aluno aprender um conceito, esse deve estar ligado a algum conhecimento já estabelecido em sua estrutura cognitiva.

Essa teoria tem por alvo principalmente as aprendizagens que ocorrem dentro da sala de aula. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) destacam que essa teoria fornece fundamento para que os professores descubram métodos mais eficientes para conseguir ensinar. Assim:

A teoria tem por alvo a aprendizagem que ocorre em sala de aula, assim essa teoria subsidia os professores para que criem um melhor ambiente de aprendizagem aos alunos, não deixando de lado que a avaliação é de responsabilidade do professor (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.3, adaptado).

Os autores ainda classificam as formas de aprendizagem que existem na sala, em duas dimensões: dimensão (automática – significativa) e dimensão (receptiva – descoberta). Para eles existem aprendizagens que são significativas para os alunos e aprendizagens que são automáticas, elas podem ser desenvolvidas por eles pela recepção ou descoberta, logo não significa que uma atividade por descoberta é mais significativa que uma atividade que utiliza a recepção.

Para esses autores a aprendizagem significativa é a aprendizagem à qual o aprendiz consegue relacionar o novo conhecimento com um conhecimento já preexistente em sua estrutura cognitiva, e a aprendizagem mecânica é uma aprendizagem que não tem associação com nenhuma estrutura já existente na cognição do aprendiz.

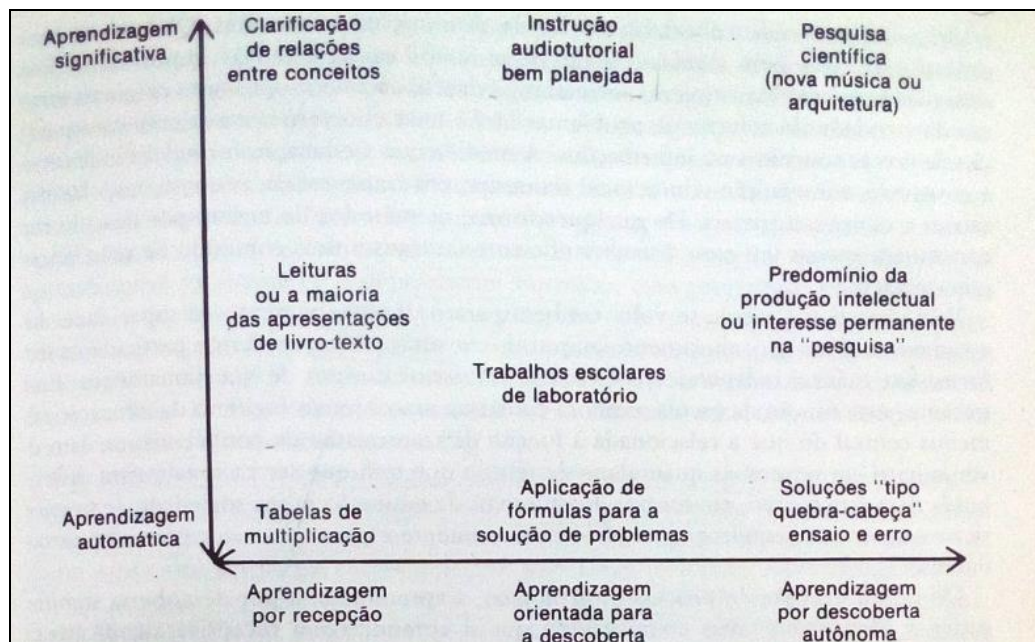
A chamada aprendizagem significativa diz respeito a um novo conhecimento que é ligado a estrutura cognitiva de quem aprende, isso não significa que a aprendizagem acarretará algo correto, do mesmo modo não podemos dizer que a

aprendizagem mecânica é uma aprendizagem que acarretará algo errado, ela só não tem associação com a estrutura cognitiva do aprendiz.

Uma situação para descrever que a aprendizagem significativa pode resultar em algo errado é descrita por Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p.41) da seguinte maneira: “durante séculos, a afirmativa de que a Terra era achatada foi considerada tanto lógica quanto válida, mas sabemos que essa proposição não é válida”, pois na época as pessoas viam os barcos sumirem no horizonte e isso justificava o entendimento errôneo sobre o formato do planeta.

Do mesmo modo os autores não fazem defesa à aprendizagem por descoberta ou recepção, destacam que nos dois casos existem, tanto a aprendizagem significativa como a automática. Na Figura 2 são indicadas as dimensões (aprendizagem por recepção x aprendizagem por descoberta) e (aprendizagem significativa x aprendizagem automática), conforme eles as destacam.

Figura 2 – Relação aprendizagem por (recepção x descoberta) e (mecânica x significativa).



Fonte: Ausubel, Novak e Hanesian, 1980, p.21

A Figura 2 apresenta dois eixos, o eixo aprendizagem por descoberta ou recepção (x), e o eixo aprendizagem automática ou recepção (y). Os elementos do primeiro quadrante podem-se lidos assim: “Leituras ou a maioria das apresentações de livro-texto”, situação em relação ao eixo (x) como uma modalidade de

aprendizagem por recepção, e em relação ao eixo (y) situa-se entre uma aprendizagem automática e significativa; A “pesquisa científica” é caracterizada como uma aprendizagem por descoberta, e uma aprendizagem significativa.

Para Ausubel (1961 apud AUSUBEL; NOVÁK; HANESIAN, 1980, p. 22) essas dimensões de aprendizagem são inteiramente independentes. Portanto, uma proposição muito mais defensável é de que tanto a aprendizagem recepção, quanto a aprendizagem por descoberta pode ser automática ou significativa, dependendo das condições sob as quais a aprendizagem ocorre.

Quando os autores introduzem essa teoria, querem dizer que, é mais simples para o aluno aprender um conceito, quando o mesmo surge de algo que eles já sabem, assim a aprendizagem terá mais sentido. Nessa perspectiva Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p.ix), introduzem que:

Uma parte integrante do nosso ponto de vista teórico sobre aprendizagem escolar é que um corpo de assuntos é muito mais fácil de compreender e lembrar se é relacionável (ancorável) a ideias organizadoras e explicativas derivadas de uma única posição teórica com uma plausibilidade aparente, do que um simples compêndio de fatos distintos, não integrados e inexplicados, relacionados na melhor das hipóteses, a uma grande variedade de pontos de vista teóricos contraditórios, e muitas vezes irreconciliáveis.

Os autores evidenciam que a aprendizagem dos alunos é de responsabilidade do professor, e que ele deve criar meios para que a aprendizagem parta dos conhecimentos prévios dos estudantes, seja pela descoberta ou recepção. Destacam também que, a aprendizagem por recepção é a mais comum e que ela é a grande responsável pela aquisição de conhecimentos dos alunos. Nas palavras dos autores temos:

Não negamos de maneira alguma a importância da aprendizagem por descoberta. Acreditamos, entretanto, que os alunos adquirem grande parte dos seus conhecimentos primeiramente por meio da aprendizagem receptiva significativa, que é facilitada por um ensino expositivo, apropriadamente elaborado, e por materiais adequados (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.ix).

Os autores destacam ainda que, para ocorrer a aprendizagem significativa, primeiro o material que vai ser utilizado para o ensino deve ser potencialmente significativo, ou seja, introduzir o novo conhecimento, ancorando-o em

conhecimentos prévios dos alunos. Ainda, para que essa aprendizagem ocorra, o aluno deve estar disposto a aprender, nas palavras dos autores:

Em primeiro lugar, o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo. Em segundo lugar, deve haver uma disposição para a aprendizagem significativa. [...] E mesmo que o material seja logicamente significativo, pode-se aprender pelo método de decorar (aprendizagem mecânica), se a disposição do aluno para aprender não for significativa (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.32).

Em nenhum momento, os autores pretendem colocar a responsabilidade da aprendizagem nos alunos, mas eles indicam que eles são partes importantes do processo, assim, se eles não quiserem, não existe aprendizagem significativa, do mesmo modo que se o material não tiver um potencial significativo, a aprendizagem significativa não ocorre. Nas palavras dos autores temos:

A escola, naturalmente, não pode assumir a responsabilidade completa pelo aprendizado do aluno. O aluno deve também buscar uma participação completa através de um aprendizado ativo e crítico, tentando compreender e reter o que é ensinado [...] dedicando um esforço necessário para dominar dificuldades inerentes a novos aprendizados, formulando questões pertinentes e envolvendo-se conscientemente na solução de problemas que lhe são dados para resolver. Tudo isso, entretanto, está distante da necessidade do aluno responsabilizar-se completamente por sua própria aprendizagem. Não significa que os alunos devam descobrir por conta própria tudo o que aprendem [...] O fato de se conhecer o dever dos estudantes em dedicar parte de seu horário escolar para a aquisição de conhecimentos que permitem localizar, interpretar e organizar informações por conta própria não isenta de forma alguma, a instituição de ensino da responsabilidade primária de estruturação unipolar (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.30-31).

Ao mencionar a importância das atividades serem potencialmente significativas, os autores acreditam que isso garante o envolvimento dos alunos, mas ainda assim eles não descartam que, se o aluno não se envolver esta aprendizagem não ocorre.

Moreira (2012) considera que se os materiais e estratégias de ensino não estiverem ligados aos conhecimentos prévios do estudante, esse não pode ser considerado com potencial significativo. Introduz também que, quanto mais o indivíduo domina um campo de conhecimento, mais ele se dispõe a aprender.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) consideram que uma das razões para que os alunos optem por uma aprendizagem automática ao invés da aprendizagem significativa, é por eles terem experiências mal sucedidas no processo de ensino/aprendizagem. Os autores classificam essa disposição do seguinte modo:

Uma das razões pelas quais os estudantes desenvolvem comumente uma disposição à aprendizagem automática em uma disciplina potencialmente significativa surge a partir de seguidas experiências malsucedidas: respostas substantivamente corretas, mas carentes de uma correspondência literal com aquelas que lhes foram ensinadas, não aceitas por alguns professores. Uma outra razão é que, devido ao alto nível de ansiedade ou devido a uma experiência crônica de fracasso numa determinada disciplina (refletindo, por sua vez, uma baixa aptidão ou um ensino inadequado), isso acarreta uma falta de confiança em sua capacidade de aprender significativamente e, portanto, o aluno não vê alternativa senão a aprendizagem automática para torná-lo mais seguro (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.36).

Por conseguinte, o desafio do professor nessa teoria é propor boas situações, nas quais o aluno consiga colocar em jogo os seus conhecimentos prévios e aprenda significativamente o novo saber.

Ribeiro e Junior (2012) destacam ainda que, o professor desempenha um papel fundamental nessa interação e na busca do sentido e do significado do que se aprende, na escolha das atividades e na forma de selecionar os conteúdos.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Moreira (2012) chamam o conhecimento prévio ou o conhecimento presente na estrutura cognitiva do aprendiz de subsunçor. Moreira (2012, p. 14) introduz o subsunçor do seguinte modo:

Subsunçor é o nome que se dá a um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto.

Assim os autores Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Moreira (2012) classificam que a aprendizagem significativa ocorre quando há um diálogo da nova informação com os subsunçores, ancorando nos conceitos e proposições relevantes, que já fazem parte da estrutura cognitiva do educando. Os subsunçores são as bases de uma aprendizagem significativa, ou seja, os seus conhecimentos já estabelecidos na estrutura cognitiva.

3.2 PRIMEIROS SUBSUNÇORES

Conforme o referencial dessa dissertação, só existe aprendizagem significativa se o sujeito tem em sua estrutura cognitiva, conhecimentos que consigam sustentar a nova aprendizagem. Assim, a questão é “como adquirimos esses subsunçores?” Respondendo a essa questão Ausubel, Novak e Hanesian (1980) introduzem que existem dois métodos para a aquisição dos primeiros subsunçores, o primeiro acontece ainda em fase pré-escolar, quando a criança aprende por meio de experiências concretas, a esse respeito os autores definem da seguinte forma:

As crianças aprendem o conceito “cachorro” por meio de encontros sucessivos com cachorros, gatos, vacas, e assim por diante, até que possam generalizar os atributos essenciais que constituem o conceito cultural de “cachorro”.(AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.36).

Já para as crianças mais velhas e os adultos, os autores classificam que a aprendizagem ocorre por assimilação de conceitos, ou seja, os conhecimentos novos são adquiridos a partir daqueles formados na infância, nesse caso o “professor” é o grande responsável por fazer a ponte cognitiva entre os conhecimentos da infância e os novos conhecimentos com o uso da assimilação.

A assimilação é o processo no qual o conhecimento interage de forma não arbitrária (com critérios específicos) e não literal (não exatamente como foi descrito), com algum conhecimento prévio especificamente relevante. Nessa interação o novo conhecimento e o já existente se modificam, nesse caso, se diz que houve uma assimilação do novo conhecimento. Moreira (2012) diz que a assimilação é uma interação cognitiva entre conhecimentos novos e prévios.

O autor define, também, que na infância o indivíduo depende muito de experiências concretas, com exemplos de objetos e eventos. Progressivamente (criança mais velha e adultos) passa a aprender a partir de subsunçores já construídos, sendo muitas vezes, necessária a mediação (professor), assim, esse novo subsunçor é construído a partir de negociações de significados aceitos e não aceitos de um determinado corpo de conhecimentos.

3.3 ORGANIZADOR PRÉVIO

O organizador prévio é uma das principais estratégias de ensino proposta por Ausubel (1963), ele tem como objetivo favorecer a eficiência da aprendizagem de um novo conhecimento, ajudando o estudante a reconhecer as relações entre o novo conhecimento e o já existente na estrutura cognitiva do aluno, no entanto o organizador prévio não tem como objetivo substituir um subsunçor não existente, seu objetivo é fazer uma ponte entre os subsunçores e o novo conhecimento.

O autor não ensina como construir um organizador prévio, isso não seria possível, pois para cada nova aprendizagem pode ser criado um novo organizador prévio. O autor também destaca que, o organizador prévio depende da idade do aprendiz e seu grau de familiaridade com o novo conteúdo a ser aprendido. Moreira (2012) define que um organizador prévio pode ser um enunciado, uma demonstração, um parágrafo, uma pergunta, um filme, entre outros, desde que esse consiga fazer uma ponte entre o que o aluno sabe e o que precisa aprender fazendo, assim com que a aprendizagem seja facilitada.

Para a elaboração de um organizador prévio, primeiramente o professor deve saber dos conhecimentos já internalizados na estrutura cognitiva dos estudantes, pois dessa forma ele saberá qual o melhor organizador prévio para facilitar a aprendizagem dos alunos.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) colocam três funções fundamentais de um organizador prévio:

1. Identificar o conteúdo relevante na estrutura cognitiva e apontar a importância desse conteúdo para a aprendizagem.
2. Dar uma visão geral do material em um nível mais amplo, indicando as relações importantes entre organizador e material a ser aprendido.
3. Promover uma facilitação de aprendizagem fazendo com que o aluno assimile o novo conhecimento relacionando com o seu subsunçor.

Existem dois tipos de organizadores que devem ser usados em casos distintos, o primeiro é o organizador comparativo, o qual é usado quando o aluno já tem uma ideia do que vai aprender. Moreira (2012) define que esse organizador

integra e discrimina as novas informações, que são basicamente familiares ao aprendiz.

O outro é o organizador expositivo, usado quando o conhecimento a ser aprendido não é familiar ao aluno, nesse caso, segundo Moreira (2012), deve-se formular um organizador em termos daquilo que o aluno sabe de outras áreas de conhecimento, ele deve ser usado para suprir a falta de conceitos estruturantes para o novo conhecimento.

Em nenhum dos casos o organizador prévio é ponto de partida para a aprendizagem, ou seja, para aprender um novo conhecimento, esse deve ser relacionável com alguma ideia preexistente na estrutura cognitiva do aprendiz.

3.4 A APRENDIZAGEM NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

As pesquisas de Ausubel em relação a TAS, são concentradas principalmente no aprendizado que acontece dentro da sala de aula, ao estabelecer relações entre um novo conhecimento com as ideias anteriores dos educandos (conhecimentos prévios), assim, essa teoria identifica como acontece essa organização de ideias e as suas relações.

O conhecimento prévio não deve ser confundido com a matéria ou conteúdo ensinado anteriormente. O conhecimento prévio é todo e qualquer conhecimento significativo internalizado na estrutura cognitiva do aluno.

A aprendizagem significativa não depende exclusivamente do ensino oferecido pelo professor. Um conhecimento se constrói. Essa construção depende das condições vistas anteriormente, relativas à aprendizagem e ao material, ou seja, de interações do sujeito com o meio externo. O professor desempenha um papel fundamental nessa interação e na busca do sentido e do significado do que se aprende, na escolha das atividades e na forma de selecionar os conteúdos.

Para Ausubel essa construção pelo aprendiz não se dá por si mesma e no vazio, mas a partir de situações às quais ele possa agir sobre o objeto de seu conhecimento, pensar sobre si, buscando as respostas da sua vivência.

Para Moreira (2010), na aprendizagem mecânica o novo conhecimento é armazenado de maneira arbitrária e literal na mente do indivíduo. O que não significa que esse conhecimento seja armazenado em um vácuo cognitivo, mas sim, que ele não interage significativamente com a estrutura cognitiva já existente, logo o sujeito não adquire significados. Durante certo período de tempo, a pessoa consegue reproduzir o que foi aprendido mecanicamente, mas não significa nada para ela.

Bodin (1989) e seu núcleo de pesquisa observaram alunos que acertaram a seguinte questão: resolver a equação $7x - 3 = 13x + 15$, mas os mesmos alunos não conseguiram responder à questão seguinte: o número 10 é uma solução da equação $7x - 3 = 13x + 15$?

Essa pesquisa nos mostra um típico caso de aprendizagem mecânica, pois os alunos conseguem repetir mecanicamente os procedimentos de resolução, mas os mesmos alunos não conseguem refletir sobre a situação apresentada.

Para que um indivíduo tenha uma aprendizagem significativa, são necessárias duas condições, segundo Moreira (1999, p. 154):

- a) a participação ativa do aluno no aprender: se o indivíduo quiser memorizar o material e de modo arbitrário e literal¹⁴, então haverá aprendizagem mecânica;
- b) a importância do material escolhido não arbitrário ser potencialmente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do material, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz deve fazer essa varredura dos materiais, apontando o que tem significado ou não para si próprio.

O autor classifica que essa aprendizagem significativa ocorre quando há um diálogo da nova informação com os subsunçores, ancorada aos conceitos e proposições relevantes, que já fazem parte da estrutura cognitiva do educando. Os subsunçores são as bases de uma aprendizagem significativa, ou seja, os seus conhecimentos já estabelecidos na estrutura cognitiva.

¹⁴ Dependente da vontade do Professor ou conforme explicitado no texto.

De acordo com Ausubel (1963) a teoria da aprendizagem significativa indica que, para aprender é necessário já saber algo sobre o que se quer aprender, logo, o conhecimento não é gerado do nada, é uma permanente transformação a partir do conhecimento existente.

Ausubel (1963) define três formas para a aprendizagem significativa.

- Subordinada: Quando a informação nova é assimilada pelo subsunçor passando a alterá-lo.
- Superordenada: Quando a informação nova é ampla demais para ser assimilada por qualquer subsunçor existente, sendo mais abrangente que esses e então passa a assimilá-los.
- Combinatória: Quando a informação nova não é suficientemente ampla para absorver os subsunçores, mas em contrapartida é muito abrangente para ser absorvida por esses, assim para se associar de forma mais independente aos conceitos originais.

À medida que o aprendiz adquire contato com um conceito, esse se torna cada vez mais elaborado e diferenciado. Dessa maneira é capaz de servir de âncora para a atribuição de significados a novos conhecimentos. Esse processo característico da dinâmica estrutural cognitiva chama-se diferenciação progressiva.

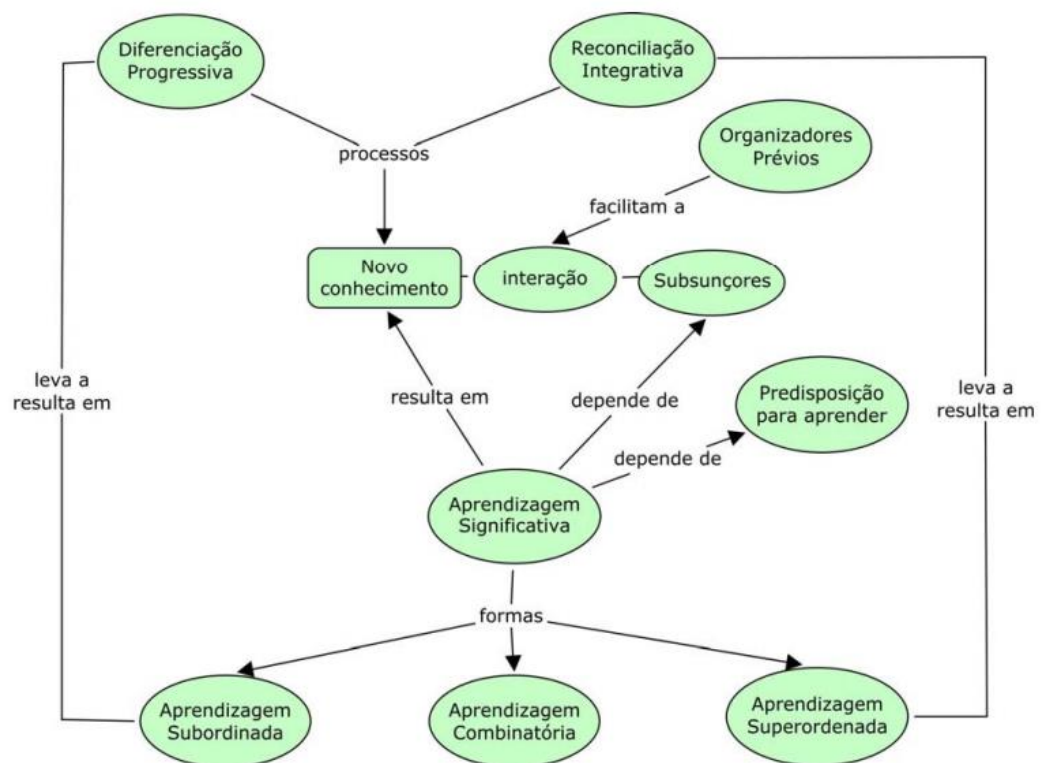
Exemplo: no caso em que o aluno tenha conceitos de movimento uniforme e progressão aritmética estáveis na estrutura cognitiva e os perceba intimamente relacionados, e os reorganize seus significados, de modo a vê-los como manifestações de um conceito mais abrangente, o conceito de função afim, essa recombinação de elementos, essa reorganização cognitiva, esse tipo de relação significativa, é referido como reconciliação integrativa.

Quando o professor percebe que o sujeito não apresenta em sua estrutura o conhecimento (subsunçores) suficiente para desenvolver o novo conhecimento, o professor pode criar atividades que possam facilitar a aprendizagem, assim o sujeito consegue ter a interação com o novo conhecimento.

Moreira (2010) define que os organizadores prévios são conceitos introdutórios que favorecem a aprendizagem de tópicos ou conjuntos de ideias correlacionadas. Esses organizadores contribuem na organização sequencial favorecendo a articulação entre ideias já existentes e o novo conhecimento.

O mapa a seguir representa a estrutura da aprendizagem significativa.

Figura 3- Mapa Conceitual da TAS



Fonte: Moreira e Buchweitz 1993, p.7

Esse mapa revela basicamente como a teoria de Ausubel (1980) é organizada, destacando os processos de aprendizagem do novo conhecimento, as dependências para uma aprendizagem significativa, de acordo com os pressupostos do autor e as formas que essa aprendizagem acontece.

O Capítulo IV trás a análise prévia (*a priori*) da sequência (didática) das atividades elaboradas tendo a modelagem como estratégia de ensino, de acordo com o caso 1 proposto por Barbosa (2011), sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE PRÉVIA DA SEQUÊNCIA

4.1 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ENSINAR AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO

Como foi enunciado no Capítulo III, a TAS é uma teoria construtivista sobre a aprendizagem dos alunos em sala de aula. Seus constructos evidenciam que as estratégias de ensino para os alunos precisam ser elaboradas pelo professor, de modo que essas devem articular os novos conhecimentos a partir dos conhecimentos prévios dos estudantes.

Para Moreira (2010) a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação se ancora em conceitos relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva de quem aprende.

A sequência¹⁵ elaborada para essa pesquisa destinou-se ao ensino das funções trigonométricas seno e cosseno tendo como estratégia a modelagem, utilizando-se do primeiro caso 1 de Barbosa (2011), no qual o professor prepara toda a atividade e fica para o aluno a resolução do modelo proposto, foram utilizados alguns modelos que partem dos conhecimentos prévios dos estudantes com o objetivo de dar significado à aprendizagem.

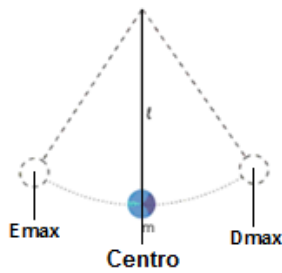
A sequência didática é composta de 3 Atividades. A Atividade 1 com 4 itens, a Atividade 2 com 2 itens e a Atividade 3 com 13 itens.

4.2 ATIVIDADE 1: ITENS 1 e 2

A atividade 1 tem por objetivo analisar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a periodicidade do movimento do pêndulo. Isso porque as atividades da sequência partem das ideias de periodicidade, sendo esse um conhecimento prévio necessário para estruturar as funções trigonométricas seno e cosseno, de acordo com a TAS (AUSUBEL, 1963).

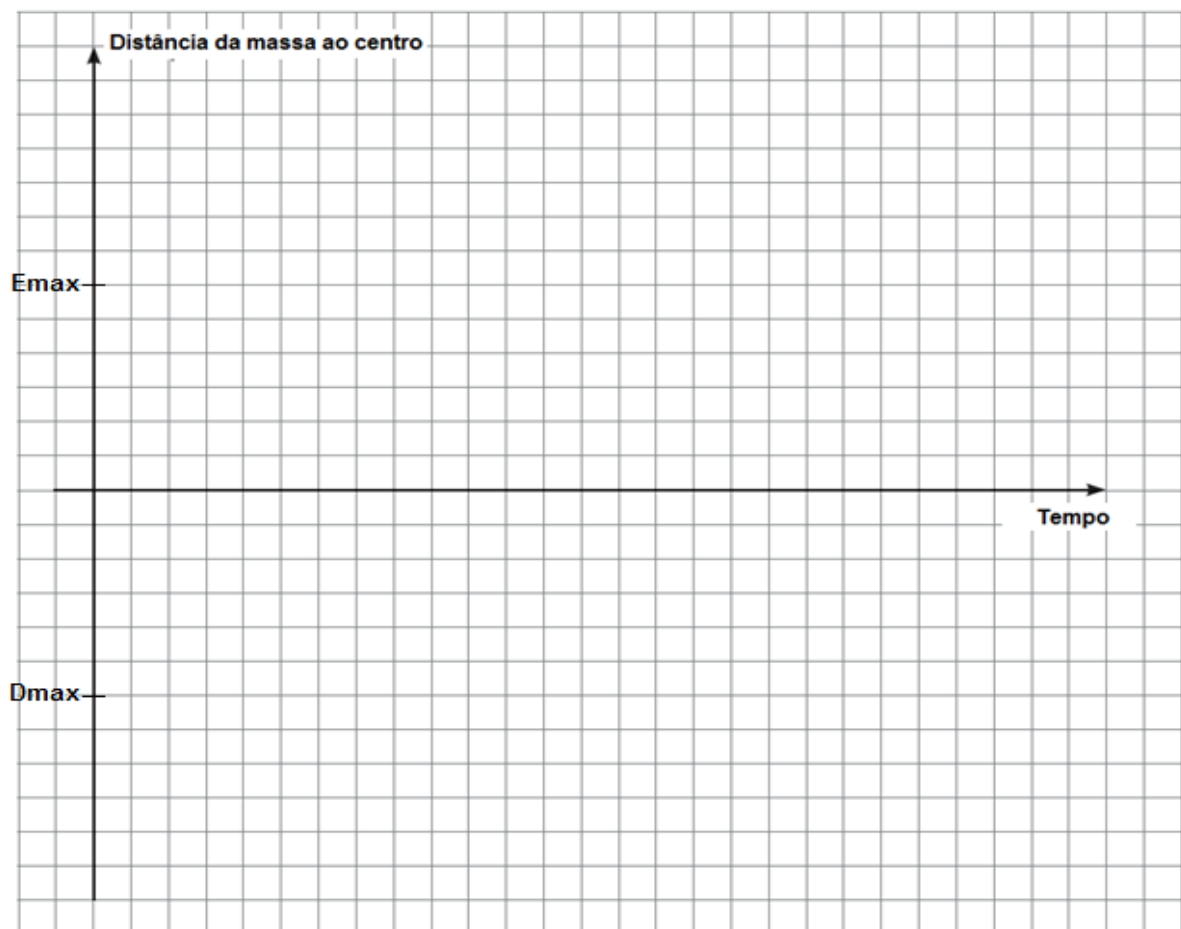
¹⁵ Neste capítulo apresento as atividades a serem realizadas pelos alunos e as intenções pedagógicas do professor/pesquisador quando elaborou cada item.

1. Um pêndulo é um sistema composto por uma massa acoplada a um pivô que permite sua movimentação livremente.



A partir dessa informação faça o esboço de um gráfico do movimento do pêndulo na malha quadriculada. Desconsidere a resistência do ar.

Obs.: Considere a **Dmax** (distância máxima na direita) e **Emax** (distância máxima na esquerda). O movimento começa na esquerda e na malha quadriculada faça pelo menos três ciclos.



2. A partir do esboço do gráfico o que podemos falar sobre o movimento do pêndulo?

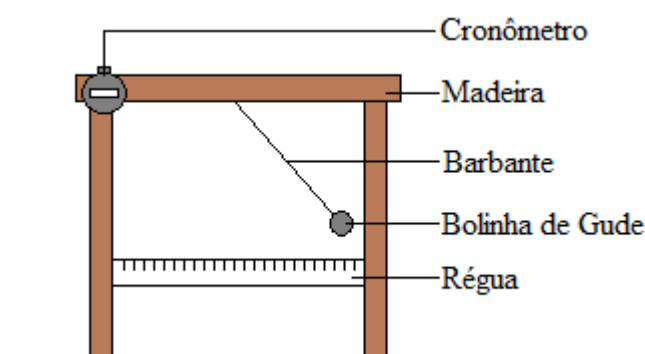
A intenção dessa atividade é possibilitar que os alunos evidenciem e compartilhem suas ideias entre os elementos de seu grupo, sobre o movimento periódico do pêndulo, para que possa ativar essas ideias ou fortalece-las com uma atividade concreta.

Os itens 3 e 4 da Atividade 1 visam avaliar conhecimentos prévios de alunos que não apresentaram entendimento sobre a periodicidade e também ampliar o conhecimento dos alunos que demonstraram entendimento sobre o assunto.

4.3 ATIVIDADE 1: ITENS 3 E 4

Esses itens podem ser considerados como organizadores prévios do conhecimento periodicidade. Para Moreira (2012) os organizadores prévios são estratégias de ensino que têm por objetivo suprir as deficiências de um subsunçor ou a falta dele, esse organizador pode ser uma aula, demonstração, filme, e etc. Nesse caso foi utilizado um experimento. De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980) quando indicam que, para a construção de um primeiro subsunçor o aprendente depende de uma experiência concreta, no qual o sujeito consiga agir e verificar as informações levando essas a sua estrutura cognitiva.

3. Com barbante, madeira, régua, uma bolinha de gude, um cronômetro e um celular construa o seguinte experimento:



Nesse experimento utilizei um aplicativo no celular denominado “fast burst camera lite” e tirei fotos do movimento do pêndulo em relação à régua. É importante que a foto consiga registrar os dados do cronômetro, pois você deve construir junto ao professor um gráfico utilizando a distância em função do tempo da bolinha em relação ao centro.

Esse aplicativo consiste em tirar várias fotos por segundo, com ele é possível observar a posição do pêndulo em relação ao comprimento em vários momentos da oscilação, neste

sentido foi possível observar o tempo e posição do pêndulo, com isso foi construído um gráfico (comprimento x tempo).

Assim nessa atividade o aluno desenvolve novamente o gráfico proposto na atividade anterior, mas agora a partir de uma situação concreta. Em seguida busca-se que alunos exponham o que entenderam a partir do que visualizaram. Logo, com essa construção estrutura-se um modelo do movimento do pêndulo, sendo possível com ele dar as noções de período de um movimento oscilatório.

4. A partir da construção do gráfico o que podemos observar sobre o movimento do pêndulo? Você continua pensando da mesma maneira sobre o movimento? Explique.

Como informado anteriormente, essa atividade busca fortalecer as ideias de periodicidade para os alunos que já as dispõem, também busca garantir a inserção desse conhecimento para os alunos que não o dispõem em sua estrutura cognitiva. Para Moreira (2012) a construção dos primeiros subsunçores se dá por meio de processos de inferência, abstração, discriminação, descobrimento, representação, envolvidos em sucessivos encontros do sujeito com instâncias de objetos, eventos, conceitos. Ele destaca que a aquisição desses primeiros subsunçores depende muito de experiências concretas que também podem ser mediadas pelo professor.

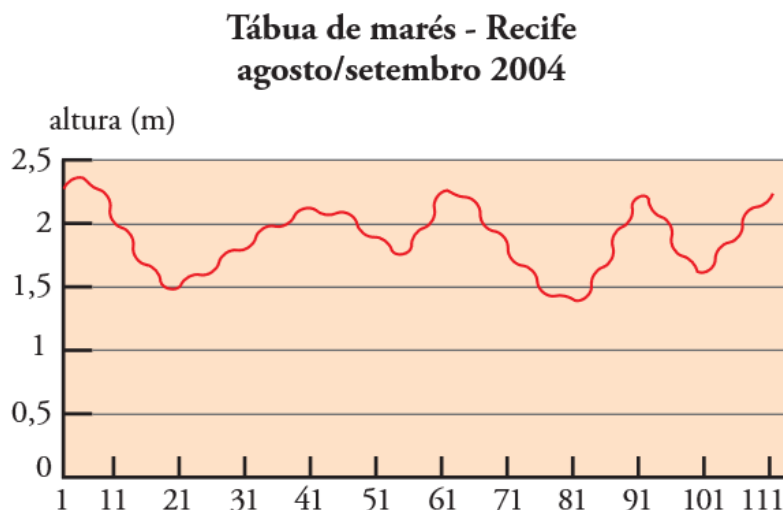
4.4 ATIVIDADE 2: ITENS 1 E 2

A Atividade 2 tem o objetivo de levar o aluno a compreender que o índice pluviométrico de uma cidade é um fenômeno periódico, e assim motivar o entendimento das funções trigonométricas que foram ensinadas posteriormente. Aqui também é relacionado o conceito às situações reais próximas ao contexto dos alunos. Com o uso da modelagem é possível relacionar o conhecimento matemático a situações reais.

O uso dessa situação vai ao encontro das ideias de Barbosa (2011) que descreve que na modelagem devemos privilegiar situações reais a situações fictícias.

Vale ressaltar que existem vários outros fenômenos que tratam a periodicidade, e que em muitos deles podem até ser mais simples que o índice pluviométrico, um exemplo é o nível da água do mar. No Caderno do aluno do 2º ano é possível ver um exemplo dessa situação:

Figura 4: Tábua das Mares (Caderno do Aluno)



Fonte: Caderno do Aluno SEE-SP

Ao utilizar esse fenômeno é possível ver vários ciclos em um curto período de tempo, diferentemente do estudo dos índices pluviométrico, mas essa situação não é tão próxima da realidade dos alunos estudados nessa pesquisa. Assim, a escolha pelo índice pluviométrico ocorreu não apenas pelos seus ciclos, mas também pelo conhecimento que os alunos já tinham do fenômeno, sendo preciso caracterizar o que seria esse índice.

O índice pluviométrico de uma cidade é indicado com o uso de um aparelho chamado pluviômetro, esse indica a quantidade de chuva em uma região, sua escala se dá em mm (milímetros), mas como o índice de chuva pode ser dado por uma medida de comprimento? Para responder isso, devem-se trabalhar alguns conceitos de transformação de unidades:

Primeiro lembrar que:

1000 ℓ (litros) equivalem a 1 m³ (metro cúbico);

1 m (metro) equivalem a 1000 mm (milímetros)

Logo:

1 m³ (metro cúbico) equivale ao volume de cubo que tem 1 m² (metro quadrado) de área da base e altura de 1000 mm (milímetros)

Assim temos:

1000 ℓ equivalem a 1 m² x 1000 mm

Desse modo, quando o pluviômetro indicar 1000 mm, temos que em uma área de 1m² choveu 1000 ℓ

Assim:

1mm no pluviômetro equivale a uma chuva de 1 ℓ/m²

1 cm (centímetro) que equivale a 10 mm é equivalente a uma chuva de 10 ℓ/m².

Sabendo como é caracterizado o índice pluviométrico seguem-se os itens a serem abordados na atividade 2:

A cidade de Itapeccerica da Serra é localizada em uma região de São Paulo e por estar em uma área de serra, seus habitantes moram em encostas de morros, então em épocas de chuva é comum ver na cidade séries de desmoronamentos, como o último ocorrido em dezembro de 2015.

Deslizamento deixa três mortos em Itapequerica da Serra

Deslizamento atingiu três casas e sete pessoas foram soterradas. Chuva forte atingiu região metropolitana de São Paulo neste sábado.

Do G1 São Paulo



Um deslizamento em **Itapequerica da Serra**, na Grande São Paulo, provocou três mortes. Sete pessoas foram soterradas na noite deste sábado (26), de acordo com o Corpo de Bombeiros, mas uma vítima ainda não foi encontrada e as buscas continuam. Dez equipes com 35 homens foram enviadas para atender a ocorrência.

Fonte: Globo.com, 2015

A defesa civil do município costuma medir diariamente o índice pluviométrico da cidade como mostra o quadro a seguir:

2014	
Mês	Índice médio (cm)
Janeiro	6,4
Fevereiro	5,8
Março	6,6

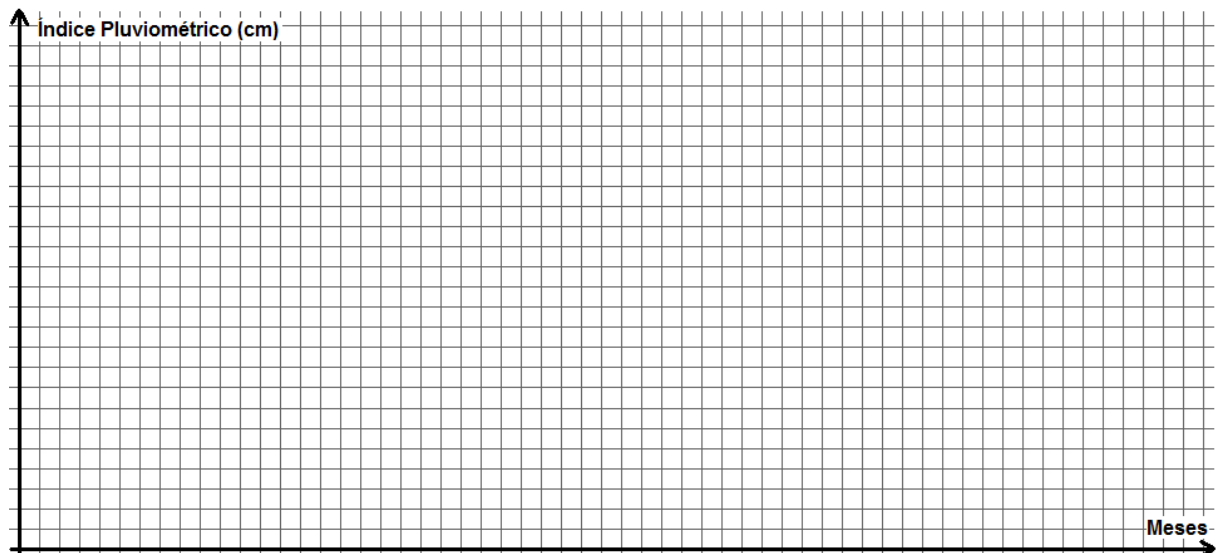
2015	
Mês	Índice médio (cm)
Janeiro	9,2
Fevereiro	6,2
Março	5,2

Abril	2,2
Maio	0,2
Junho	0
Julho	0
Agosto	0,3
Setembro	1,3
Outubro	3,3
Novembro	2,4
Dezembro	7,7

Abril	0,9
Maio	1,2
Junho	0,2
Julho	3,1
Agosto	0
Setembro	4
Outubro	3,5
Novembro	5,5
Dezembro	11,8

Fonte: Defesa Civil do Município, 2016

A partir desse quadro construa um gráfico de barras e responda às seguintes questões:



1. O que foi possível perceber em relação aos meses e ao índice pluviométrico? Explique.

-
-
2. Seria possível a prefeitura do município prever as épocas de desmoronamento e assim fazer intervenções? Explique.
-
-
-

Nesses itens 1 e 2 da Atividade 2 busquei ativar os conhecimentos prévios dos alunos sobre a periodicidade das chuvas para que eles construam o gráfico e observem a periodicidade do fenômeno, e que consigam perceber a importância de um modelo matemático, evidenciando que pode auxiliar na previsão de acontecimentos e facilitar ações de intervenção.

4.5 ATIVIDADE 3: ITENS DE 1 A 11

Essa atividade busca relacionar o movimento de uma bolinha presa a uma roda de bicicleta com a construção de uma tabela de projeção vertical (seno) e projeção horizontal (cosseno). O movimento que tratamos aqui é o movimento da bolinha com a bicicleta parada. A atividade tem por objetivo utilizar um objeto que que os alunos conhecem. Concorro com Miras (2006) que introduz:

[...] conhecimentos prévios são os fundamentos da construção dos novos significados. Uma aprendizagem é tanto mais significativa quanto mais relações com sentido o aluno for capaz de estabelecer entre o que já conhece, seus conhecimentos prévios e o novo conteúdo que lhe é apresentado como objeto de aprendizagem [...] se nos colocamos na perspectiva do aluno, na lógica da concepção construtivista, é possível afirmar que sempre podem existir conhecimentos prévios a respeito de novo conteúdo a ser aprendido, pois, de outro modo, não seria possível atribuir um significado inicial ao novo conhecimento. (MIRAS, 2006, p. 61-62).

Destaco ainda que, para Ausubel, Novak e Hanesian (1980) a essência da aprendizagem significativa é que, as novas ideias devem ser relacionadas a algum aspecto relevante do conceito existente na estrutura cognitiva do aluno, como exemplo eles destacam imagens, símbolos e proposições. Fazendo isso os autores acreditam que os alunos terão predisposição para aprender, outro aspecto importante na aprendizagem significativa.

Segue a atividade:

O ciclismo traz benefícios físicos e emocionais, contribuindo muito para a qualidade de vida. “Como atividade aeróbica, gera perda de peso, ajuda a equilibrar a pressão e os níveis de triglicérides. Também trabalha equilíbrio e confiança, além de relaxar e combater o estresse. Praticada com bom senso e na medida da forma física de cada um, a atividade quase não tem restrições”, além disso, existem pessoas que adoram decorar suas bicicletas, seja com adesivos ou outros acessórios colocados na roda ou em outras partes da “bike”.

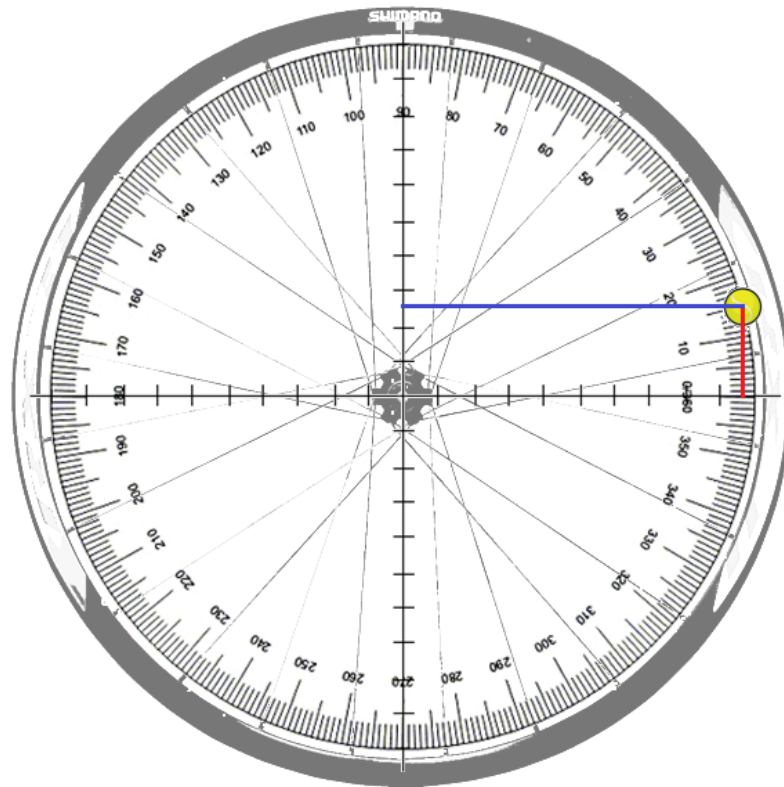


Felipe, um aluno do 2º série do ensino médio adora andar de bicicleta e em sua roda ele costuma colocar uma bolinha de tênis como mostra a figura.



Quando o mesmo estava aprendendo funções periódicas na escola, decidiu fazer uma representação do movimento dessa bolinha em relação ao eixo vertical e horizontal tomando por referência os ângulos.

Obs.: Considere o tamanho total do raio da roda da *bike* como 1 (unitário), assim cada subdivisão (será dividida em 10 partes) do transferidor equivale a 0,1.



1. Complete a tabela a seguir, usando a imagem acima: (Utilize a régua)

Ângulo	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Horizontal	0,96					
Vertical	0,26					

Ângulo	105°	120°	135°	150°	165°	180°
Horizontal						
Vertical						

Ângulo	195°	210°	225°	240°	255°	270°
Horizontal						
Vertical						

Ângulo	285°	300°	315°	330°	345°	360°/ 0°
Horizontal						
Vertical						

Essa atividade tem por objetivo fazer com que o aluno consiga observar o ângulo que tem por lados o eixo da bicicleta e o segmento que une o centro da roda com o da bolina, na direção anti-horária, e indicar o porcentual da distância da mesma em relação aos eixos vertical e horizontal. Esse tipo de atividade tem as condições de ser significativa, pois busca relacionar os conhecimentos prévios dos alunos com o novo conhecimento.

Cabe ressaltar que o movimento trabalhado nessa atividade é o movimento da bolinha na roda com a bicicleta parada, embora seria possível fazer um estudo com a bicicleta em movimento, uma cicloide.

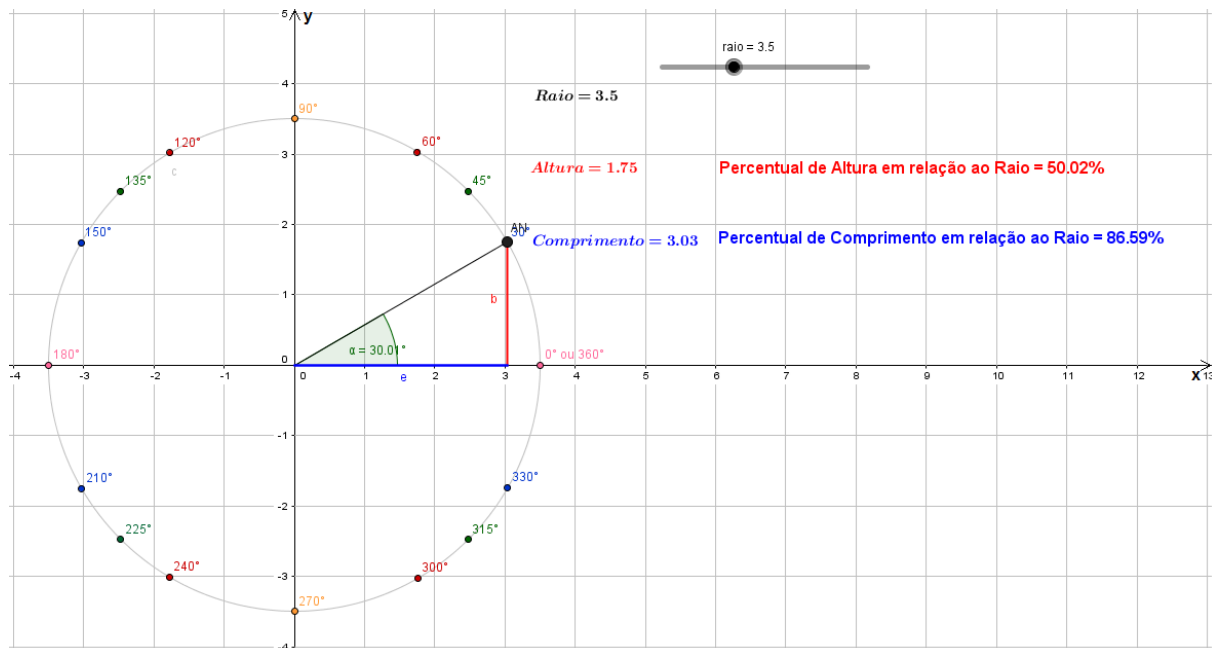
Segue os itens:

2. O que você conseguiu observar a partir da construção da tabela? Explique.

3. Se a circunferência tiver um tamanho diferente os valores da tabela mudariam? Explique.

Quero perceber se o aluno entende que o porcentual não muda com a mudança do tamanho da circunferência. Em minha prática percebo que esse é um obstáculo cognitivo para o aluno. O item 3 da atividade 3, utiliza o GeoGebra (Figura 4) para ancorar esse conhecimento na estrutura cognitiva, potencializando a aprendizagem do conceito de funções trigonométricas, com os alunos que demonstram entender a relação periódica ou construindo uma ponte cognitiva para aqueles que não conseguem comprovar essa aprendizagem.

Figura 5 - Atividade de Consolidação (GeoGebra)



Fonte: Autoria do pesquisador

A imagem da Figura 5 mostra como a atividade proposta foi apresentada aos alunos, sem o objetivo de ensiná-los a construir o ciclo trigonométrico, pois eles já tinham essas ideias consolidadas. A intenção foi fazer com que eles usassem a ferramenta e percebessem as características principais do seno, projeção no eixo vertical (altura) e cosseno, projeção no eixo horizontal (comprimento). A atividade apresenta também o raio da circunferência/bolinha como sendo 100% com o objetivo de utilizar como subsunçor o conceito de porcentual.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) evidenciam muito entusiasmo com o uso da tecnologia para a educação, eles indicam que o computador pode desempenhar um papel fundamental nas necessidades dos alunos, que programas educacionais confirmam eficiência na aprendizagem em relação ao ensino convencional, porém os autores alertavam:

[...] Para sermos verdadeiramente eficientes não só precisamos de equipamentos sofisticados [...] computador algum jamais pode ser programado com respostas para todas as questões que os alunos possam fazer. E nas áreas de conhecimento menos estabelecidas, a discussão e a interação aluno-aluno e aluno-professor são essenciais para a aprendizagem (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.323).

Nessa pesquisa, aceitando o que dizem esses autores, foi utilizada a tecnologia para favorecer a aprendizagem, contudo tomando como referência que o

professor deve criar estratégias para tal e intervindo quando necessário com vistas a uma aprendizagem significativa.

4. Utilize o aplicativo GeoGebra para responder os seguintes itens:

a) Qual é a altura (projeção vertical) e o comprimento (projeção horizontal) e seus percentuais quando o ângulo vale 30° e o raio 20 u.m.?

b) Qual é a altura (projeção vertical) e o comprimento (projeção horizontal) e seus percentuais quando o ângulo vale 45° e o raio 60 u.m.?

c) Qual é a altura (projeção vertical) e o comprimento (projeção horizontal) e seus percentuais quando o ângulo vale 60° e o raio 10 u.m.?

d) Qual é a altura (projeção vertical) e o comprimento (projeção horizontal) e seus percentuais quando o ângulo vale 30° e raio 100 u.m.?

Os itens 5 e 6, são propostos para verificar se o aluno conseguiu estruturar esses conceitos de periodicidade de forma significativa, ou seja, se ele consegue responder às questões, sem o auxílio do *software*.

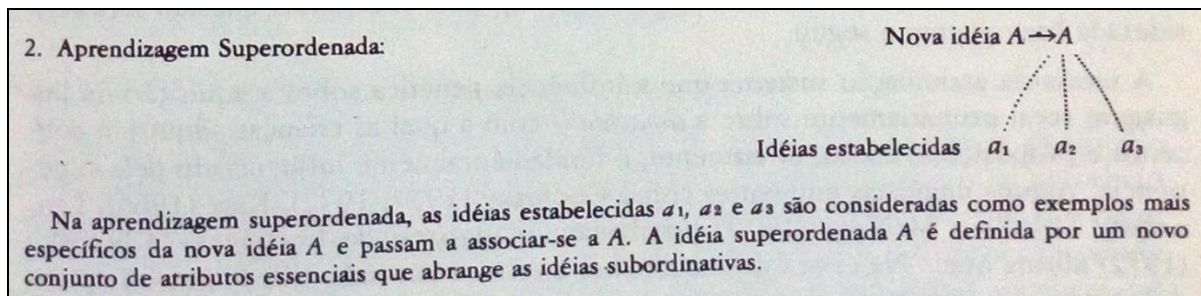
5. Sem utilizar o GeoGebra responda se o raio da bicicleta tiver um comprimento de 30 m e se o segmento que une a bola ao centro da circunferência estiver fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, qual será a distância da bola em relação ao eixo vertical?



6. Se fizéssemos a tabela com números cada vez maior o que aconteceria com as projeções? Quais seriam os valores das projeções horizontal e vertical dos ângulos 390° e 570° ? Explique.

O intuito com esses itens (1 a 6) é que o aluno conseguisse construir uma aprendizagem significativa subordinada ou superordenada (Figura 5), que para Ausubel, Novak e Hanesian (1980) é a aprendizagem em que os novos conhecimentos potencialmente significativos adquirem significados para o estudante, em um processo de ancoragem cognitiva. Ou seja, o aprendiz consegue relacionar as ideias preexistentes em sua mente (periodicidade e movimento da bicicleta) para elaborar uma nova ideia. Perceber que por mais que o valor do raio aumente a relação entre raio, projeção vertical e projeção horizontal continuam as mesmas, e ainda se as medidas dos ângulos forem aumentando os valores de suas projeções voltam a se repetir com periodicidade.

Figura 6 – Aprendizagem Superordenada



Fonte: Ausubel, Nokav e Hanesian 1980, p. 34

Para Ausubel (1963) quando se selecionam os conceitos para serem trabalhados, deve-se determinar como ocorrerá a sequência dos estudos. Propõem-se dois princípios que nortearam essa pesquisa: diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. No caso usei a diferenciação progressiva, de acordo com Ausubel (1963) para o qual as ideias e os conceitos devem ser preferencialmente trabalhados em uma ordem crescente de especificidade, dos mais simples para os mais específicos. Para justificar, ele utiliza dois motivos (AUSUBEL, 1978, apud, MOREIRA, 2014, p. 169):

1. É menos difícil para seres humanos captarem aspectos diferenciados de um todo inclusivo previamente aprendido, do que chegar ao todo a partir de suas partes diferenciadas previamente aprendidas.
2. A organização do conteúdo de certa disciplina, na mente de um indivíduo, é uma estrutura hierárquica na qual as ideias mais inclusivas e gerais estão no topo da estrutura cognitiva.

Assim compreendo que as atividades estão ancoradas nas ideias já estabelecidas no cognitivo do indivíduo, na realização e construção das ideias a partir das atividades anteriores proposta nessa sequência. Os itens do 7 ao 11, partem do mesmo princípio.

7. Ao considerar o ciclo trigonométrico, foi trabalhado algumas simetrias, pensando no eixo horizontal temos o cosseno e em relação ao eixo vertical temos o seno. Assim complete a tabela a seguir:

Ângulo (graus)	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
Seno	0,26											
Cosseno	0,96											

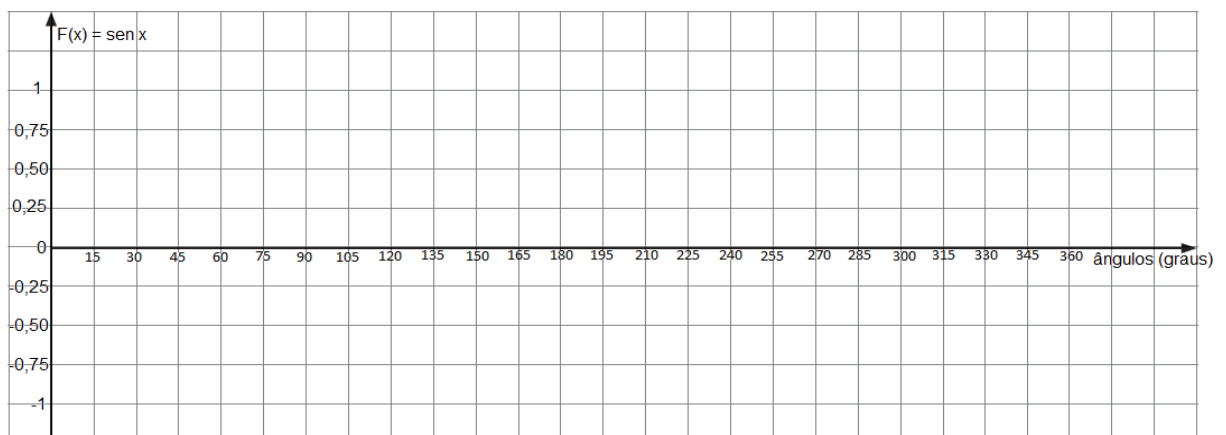
Ângulo (graus)	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360 ou 0
Seno												
Cosseno												

8. Existe alguma relação entre os ângulos? Explique.

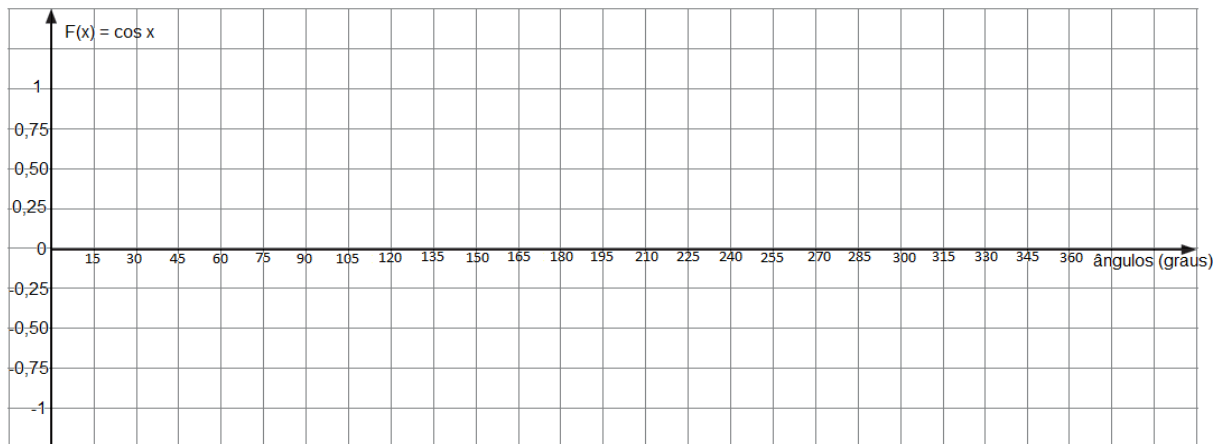
9. Existe alguma relação entre as funções seno e cosseno? Explique.

10. Com auxílio da tabela construída no item 3, construa os gráficos das funções:

a. seno



b. Cosseno



11. O que ocorreria se os ângulos continuassem aumentando suas medidas? Justifique a resposta, se necessário faça um esboço da situação.

Para os itens (7 a 11) é utilizada a reconciliação integrativa: consiste no princípio que a instrução deve explorar as relações entre os conceitos e ideias, apontando similaridades e diferenças significativas e reconciliar discrepâncias reais ou aparentes (MOREIRA, 2014, p.57).

Nesse processo, a disponibilidade das ideias âncoras e a organização dos conteúdos de modo que exista uma articulação entre as ideias podem favorecer a aprendizagem significativa.

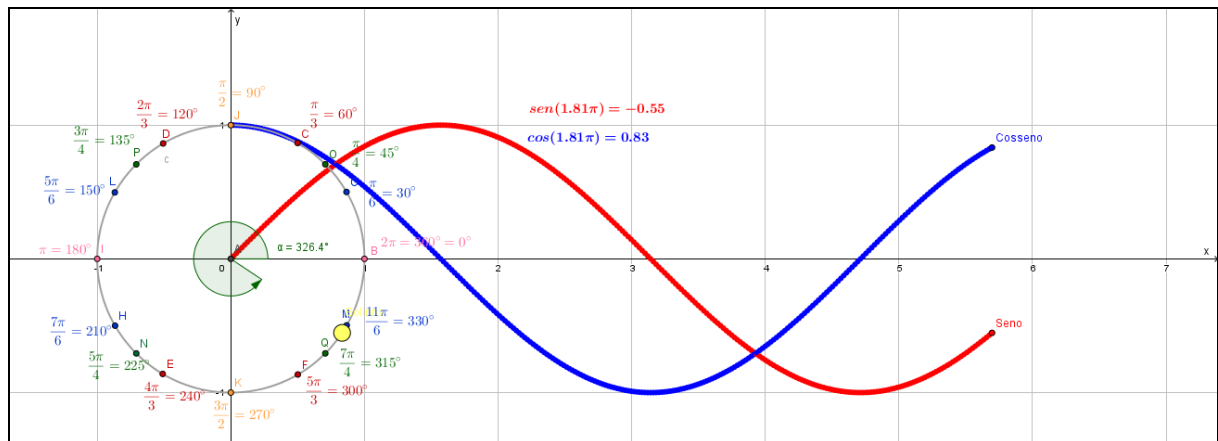
4.6 ATIVIDADE 3 (ITENS 12 E 13)

Essa atividade busca evidenciar o que foi aprendido até agora pelo educando, fazendo com que o mesmo internalize as ideias de função periódica e entenda que esse tipo de função aparece em algumas situações do seu cotidiano.

Igualmente aqui é usado o GeoGebra para que o aluno fortaleça o que já foi construído na sua estrutura cognitiva.

Novamente foi proposta a atividade pronta no *software* e os alunos tiveram que manuseá-la para responder os itens da Atividade 3 (Figura 6).

Figura 7 – Atividade de consolidação (GeoGebra)



Fonte: Autoria do pesquisador

12. Utilizando o GeoGebra responda se os seus gráficos do item anterior estão representando as funções seno e cosseno. Justifique.

Ao mesmo tempo é recorrida à tecnologia para reforçar os conhecimentos adquiridos. No item 13 da Atividade 3 quero verificar se os estudantes conseguiram estabelecer relações entre o índice pluviométrico e as funções periódicas (trigonométricas seno e cosseno).

13. Existe alguma relação entre os índices pluviométricos da cidade e as funções periódicas seno e cosseno? Qual a importância do estudo dessas funções? Explique.

Nesse item 12, o objetivo é que os estudantes compreendam e confirmam entendimento sobre o fenômeno apresentado e seu modelo, destaco que as funções trigonométricas seno e cosseno não representam o índice pluviométrico da cidade, e que é um conceito matemático que pode expressar esse fenômeno de modo a possibilitar que usemos esse conhecimento para inferir informações do fenômeno, tornando o ensino dessas funções, no ensino médio, de forma significativa.

As atividades propostas nessa pesquisa podem ser desenvolvidas de forma individual ou em grupos, porém, para ocorrer uma aprendizagem significativa, o professor deve organizar a atividade de modo a ocorrer uma maior circulação de informação, e que os alunos coloquem seus saberes em jogo e discutam propostas de solução para os problemas. Nessa pesquisa as atividades foram realizadas em grupo para garantir esse processo.

Gurnee (1962 apud AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.102), por exemplo, considerou que a aprendizagem em grupo amplia as condições da aprendizagem individual, pois o aluno mais bem sucedido nas atividades auxilia os menos sucedidos do grupo. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) também evidenciavam que a atitude de um aluno auxiliar aos outros, faz com que esse consolide sua compreensão sobre o conhecimento e da mesma forma os outros também avançam.

Concordo com os autores, que as atividades partem do mesmo pressuposto. Designo também que o professor tem papel fundamental na realização da sequência, pois ele deve perceber como os alunos estão em cada momento, não é necessário deixar com que o aluno construa o conhecimento sozinho, nesse sentido o professor deve fazer uma ponte cognitiva em cada atividade, questionando-os e apresentando algumas propostas de solução. Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p.12) dizem “a facilitação da aprendizagem é a própria finalidade do ensino”. Os

autores também não fazem defesa para uma aprendizagem por recepção ou por descoberta, pois para eles a aprendizagem automática ou significativa depende da ação do professor. E ela será significativa, se o material de ensino for potencialmente significativo, isto é, deve se relacionar com a estrutura cognitiva do estudante, de forma não arbitrária e não literal.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DESENVOLVIDA PELOS ALUNOS

Inicialmente foi apresentado aos 25 alunos da 3ª série do ensino médio a proposta de trabalho e entregue os termos de aceitação para a participação da pesquisa (Anexo 1), também foi explicado o que era a modelagem, e se eles estavam dispostos a fazer parte da pesquisa¹⁶. Vale ressaltar que o pesquisador é professor da turma, e assim sendo a aplicação da pesquisa aconteceu no período de aula com o material elaborado pelo professor.

Para Ausubel, a verdadeira natureza da educação enquanto instrução adequadamente fornecida implica seleção, organização, interpretação e arranjo sequencial de material de aprendizagem – relativa à aquisição de conhecimento – e em experiências de pessoas pedagógicas e academicamente competentes, posto que não é um processo de autoinstrução baseado em ensaio-e-erro (ARAGÃO, 1976, p.10).

A turma foi dividida em grupos de até 5 integrantes, ficando a cargo dos alunos escolherem seus pares, e essa formação foi mantida até o fim da sequência didática, a escolha por desenvolver a atividade em grupos se deu, pois o trabalho em grupo possibilita aos alunos compartilharem suas ideias, facilitando o processo de aprendizagem, esse pressuposto está de acordo com as ideias de Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Sanches (1978) que consideram importante a interação dos alunos no processo de aprendizagem.

Burak e Aragão (2012) sinalizam que atividades em grupo favorecem a discussão, propiciando uma maior assimilação do conhecimento a ser aprendido, e nesses grupos o confronto de ideias faz surgir respostas relevantes, para a compreensão das relações cognitivas.

5.1 AULA 1

Os itens 1 e 2, da Atividade 1 tinham por alvo analisar como cada grupo colocava em jogo os seus conhecimentos. No grupo 1, os alunos apresentavam questionamentos como, indagavam se era para considerar ou não a resistência do

¹⁶ Vale destacar esta pesquisa foi aprovada pelo comitê de ética sob o número CAAE: 78950517.4.0000.5482

ar, se a velocidade da bolinha era constante ou variável, e nesse grupo eles buscavam saber qual era o caminho certo da resolução. Claramente uma vontade de não errar, efeito do contrato didático desenvolvido com os alunos ao decorrer dos anos de sua vida escolar. Assim foi colocado a eles que, o importante não era o acerto ou o erro e sim o caminho do processo de resolução usado para resolverem as atividades, nesse grupo um dos integrantes em primeiro momento não demonstrou interesse pela atividade, mas como os outros membros estavam envolvidos em resolver, fez com que ele buscasse auxiliar o grupo. Percebi nesse caso que a formação de grupos foi importante, pois levou um aluno com desinteresse a resolver a atividade, se envolver e buscar com o grupo uma resposta.

No grupo 2 os alunos discutiram a atividade e foi possível observar que eles simulavam com as mãos o movimento do pêndulo, eles descreveram que cada um pensava algo sobre a atividade, mas que finalmente concordaram e apresentaram uma resposta.

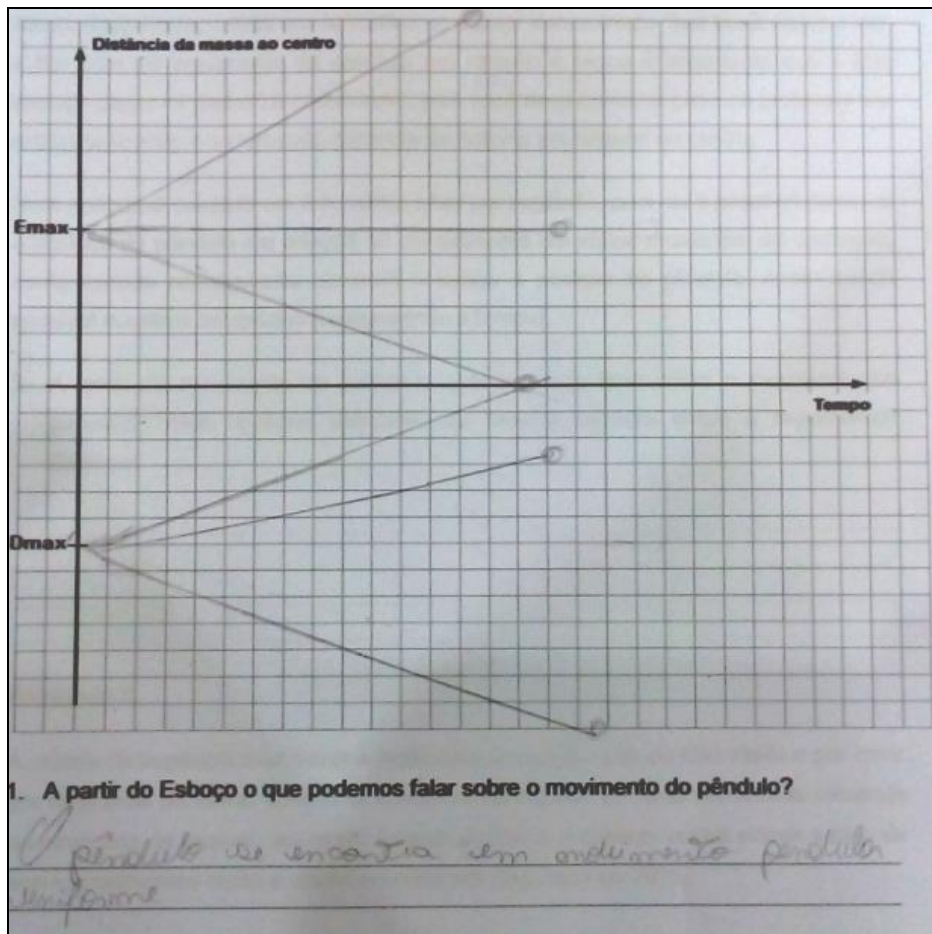
O grupo 3 discutiu como o grupo 1, várias grandezas físicas que poderiam ser relacionadas com a atividade, desse modo eles falavam termos como aceleração e velocidade, associando com o movimento do pêndulo.

Os grupos 4 e 5 usaram desenhos para elaborar estratégias de resolução, claramente esses desenhos lhes davam uma ideia do fenômeno proposto nessa atividade.

Em todos os grupos foi possível ver o envolvimento dos alunos, de maneira geral discutiam as diversas possibilidades de resolução.

Nesse primeiro dia os alunos resolveram a Atividade 1, devendo descrever basicamente os seus pensamentos sobre o movimento do pêndulo. Seguem os protocolos de respostas de cada grupo:

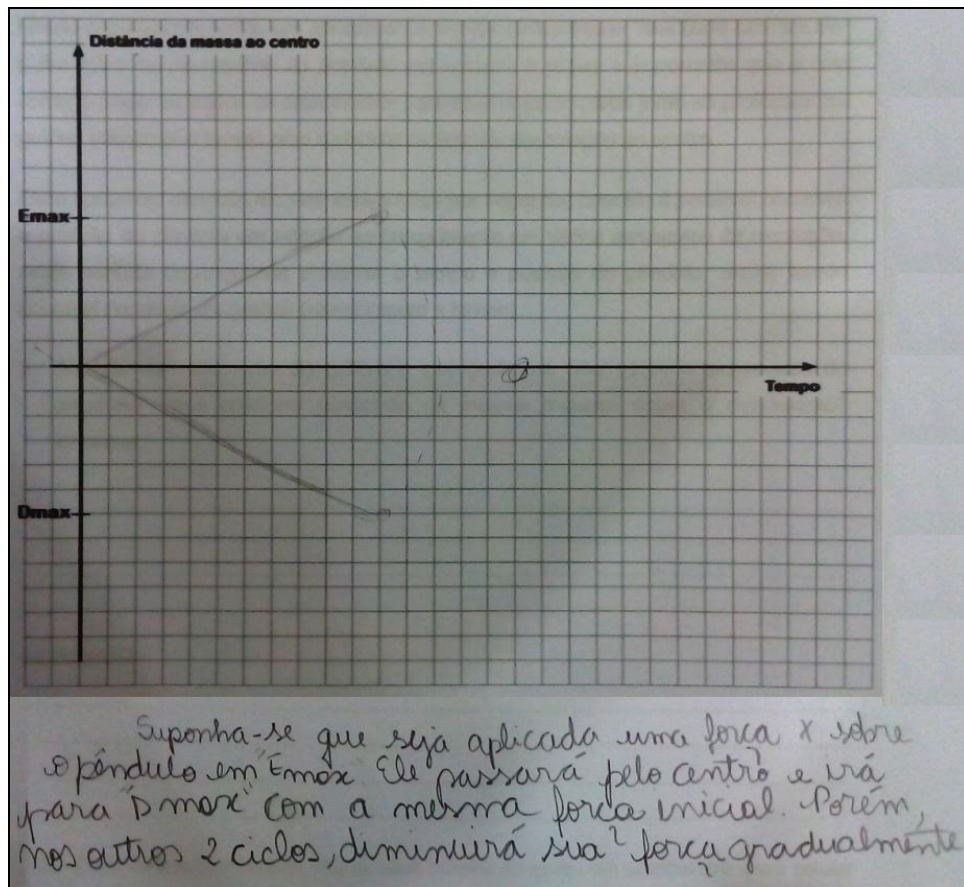
Figura 8 – Protocolo da Atividade 1: Grupo 1



Fonte: Dados da Pesquisa

No grupo 1 os participantes não conseguiram comprovar entendimento da atividade, mas mostraram conhecimentos de outras disciplinas, que para eles podem ter alguma relação com o conhecimento exposto, assim eles descreveram que o movimento do pêndulo é “pendular uniforme”, claramente uma associação ao movimento uniforme já trabalhado em Física. Observando o gráfico, percebi que eles não pareceram entender o que significa a palavra esboço, mas entenderam a situação física, pois evidenciaram o movimento do pêndulo. Introduzo o não entendimento da atividade devido a palavra esboço, pois ao auxiliá-los nos itens 3 e 4, da Atividade 1, eles compreenderam o que era esperado no item 1. Desse modo eles tentaram colocar o desenho de um pêndulo. Ausubel (1963) já descrevia que para ocorrer uma aprendizagem significativa o aluno precisa ter subçunsosres adequados para o novo conhecimento, pois se eles não existirem, mesmo com uma atividade potencialmente significativa, a aprendizagem não acontece.

Figura 9 - Protocolo da Atividade 1: Grupo 2

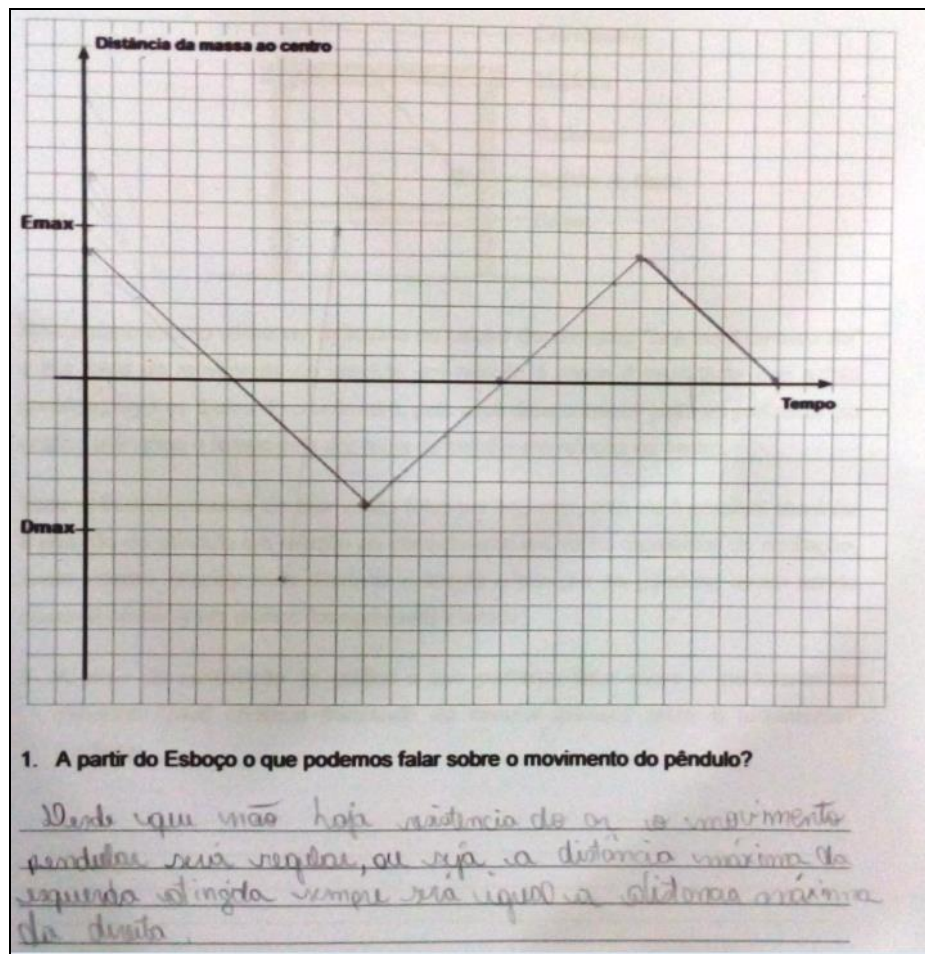


Fonte: Dados da Pesquisa

Nesse grupo, os alunos assim como no grupo 1, não demonstraram ter entendimento sobre o que seja esboço, ou seja, eles não conseguiram compreender que esboço é uma representação do movimento do pêndulo no plano cartesiano, colocando então apenas o desenho do pêndulo na malha quadriculada. A explicação dos alunos sobre o movimento foi correta, mas eles desconsideraram uma informação importante no texto (desprezar a resistência do ar).

Tanto o grupo 1 quanto o grupo 2 evidenciaram ter conhecimento sobre o pêndulo, mas em ambos a falta de saber o que é um esboço foi fundamental para a não realização da atividade corretamente.

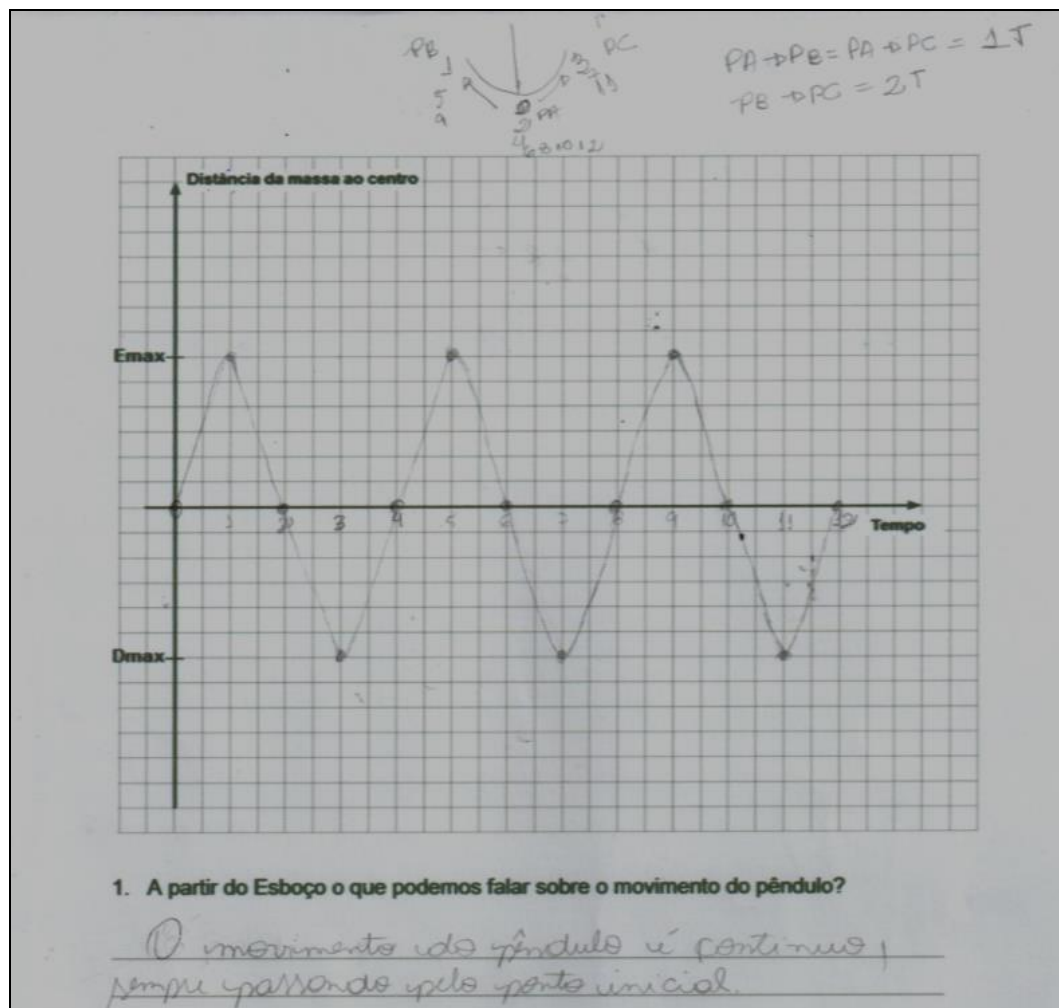
Figura 10 - Protocolo da Atividade 1: Grupo 3



Fonte: Dados da Pesquisa

Aqui o grupo mostra entendimento da situação, destacando em sua resposta que se não existe resistência do ar, a medida da distância da esquerda seria igual a da direita. Eles sabem o que é um ciclo, mas ao fazer a atividade não leram a informação que indicava que o esboço deveria ter pelo menos 3 ciclos. Para Ausubel (1963) no decorrer da aprendizagem significativa o aluno expõe o que entendeu da situação descrita pelo professor, isso não significa que ele fez errado, apenas não compreendeu totalmente a situação, e caso o professor invalide a atividade, o aluno poderá tender a uma aprendizagem mecânica, pois em situações assim o aprendiz pode querer “decorar” um material de ensino para dar as resposta esperadas pelo professor, nesses casos o professor não deve invalidar as repostas, mas mostrar os acertos e erros cometidos pelo aluno.

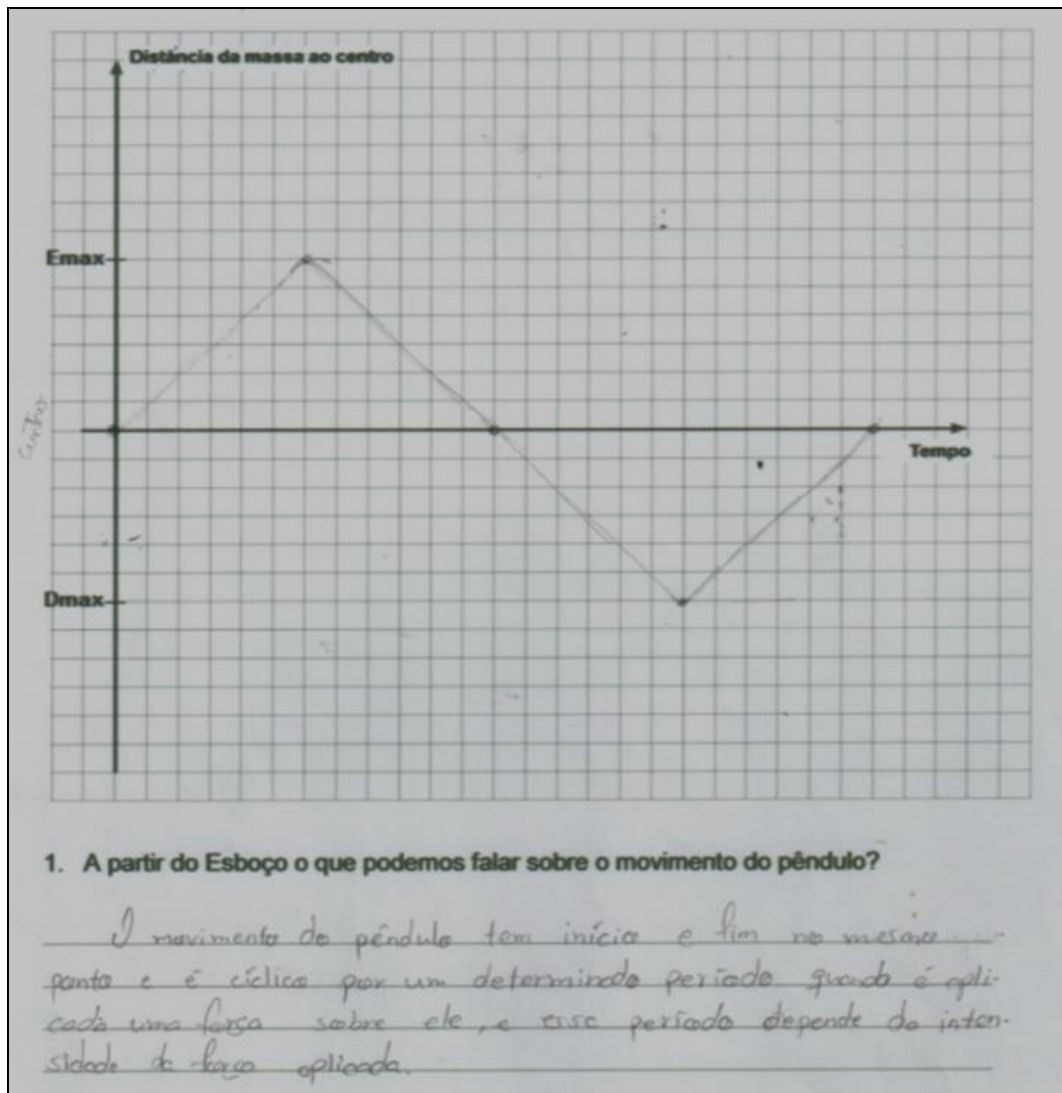
Figura 11 - Protocolo da Atividade 1: Grupo 4



Fonte: Dados da Pesquisa

Esse grupo compreendeu os ciclos (fez os três indicados no enunciado), entendeu que o movimento na esquerda é igual ao movimento na direita evidenciando isso na parte superior do gráfico colocando um desenho do movimento do pêndulo com as seguintes “expressões” $PA \rightarrow PB = PA \rightarrow PC = 1T$ e $PA \rightarrow PB = 2T$. Mas os participantes do grupo não leram a informação que descrevia que o movimento se iniciava na esquerda. Para esse grupo posso dizer que a atividade foi potencialmente significativa, pois os alunos conseguiram completar adequadamente o que era esperado. Uma atividade só é potencialmente significativa, se o aluno consegue chegar na resposta pretendida ou próxima do esperado pelo professor.

Figura 12 - Protocolo da Atividade 1: Grupo 5



Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo 5, assim como os grupos 3 e 4 entenderam a situação, colocaram em sua justificativa que o movimento é cíclico e tem começo e fim no mesmo ponto, claramente provando entendimento do significado de ciclo, no entanto, eles não leram que o movimento começa na esquerda e que seria necessário ter pelo menos três ciclos. Esse grupo também tem subsunsores suficientes para construir o novo conhecimento.

A Atividade 1 (itens 1 e 2) buscou perceber quais os conhecimentos prévios dos estudantes, para que o item 2 pudesse fortalecer esses subsunçores ou criar um novo, a partir de uma situação concreta. Pois Ausubel, Novak e Hanesian (1980) destacam que os novos subsunçores são desenvolvidos em reais para o aprendiz.

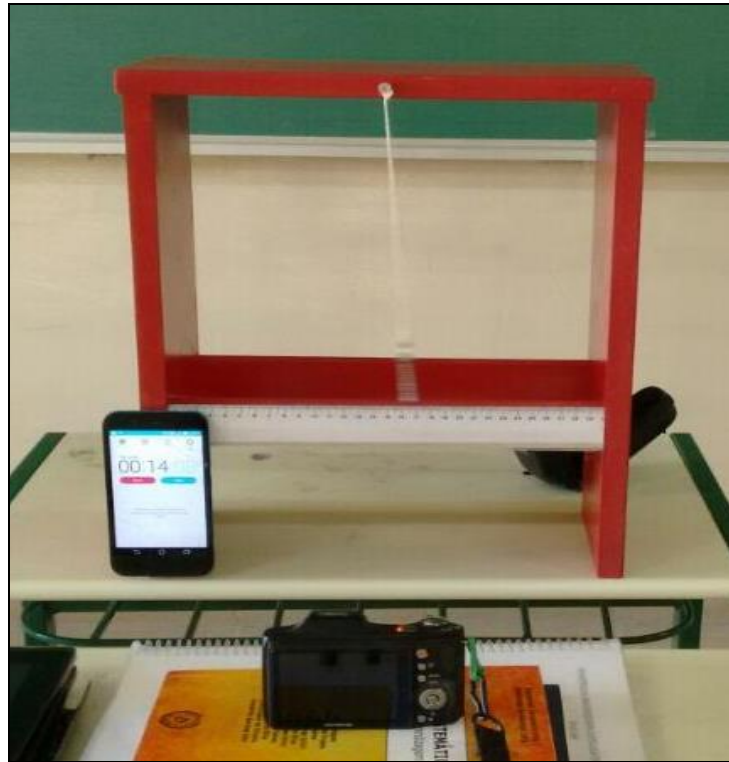
5.2 AULA 2

Os itens 3 e 4 da Atividade 1 tinham como objetivo fortalecer os conhecimentos prévios dos estudantes, para aqueles que já tinham subsunçores adequados, ou criar um subsunçor para aqueles que não mostram entendimento na Atividade 1 (itens 1 e 2).

Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) destacam que com o uso da modelagem os alunos deixam de serem meros observadores passando a ser coparticipantes no processo de aprendizagem, alterando a concepção de que o professor ensina e passando a admitir que o conhecimento não esteja somente no sujeito e nem no objeto, mas na interação entre eles, ou seja, a construção do conhecimento deixa de ser uma ação aplicada pelo professor, o conhecimento nesse processo é uma interação entre objeto matemático, professor e aluno.

Para essa atividade de exploração do movimento de pêndulo simples, o professor trouxe experimento em que com o auxílio de uma câmera e um cronometro, permitiria construir um gráfico desse movimento do pêndulo. Em um primeiro momento a ideia era que os alunos construíssem esse experimento. Após análise o professor jogou melhor a exploração dos elementos do experimento, pois a elaboração dispenderia de muito tempo. Tanto a construção do experimento quanto as fotografias foram conduzidas pelo professor, pois assumo que a perspectiva proposta por Ausubel (1963) que diz que a aprendizagem receptiva tem tanta eficiência quando a aprendizagem por descoberta, desde que o professor construa uma situação com um potencial significativo, assim o professor/pesquisador apresentou para os alunos a proposta da atividade e realizou o experimento conforme mostra a Figura 13:

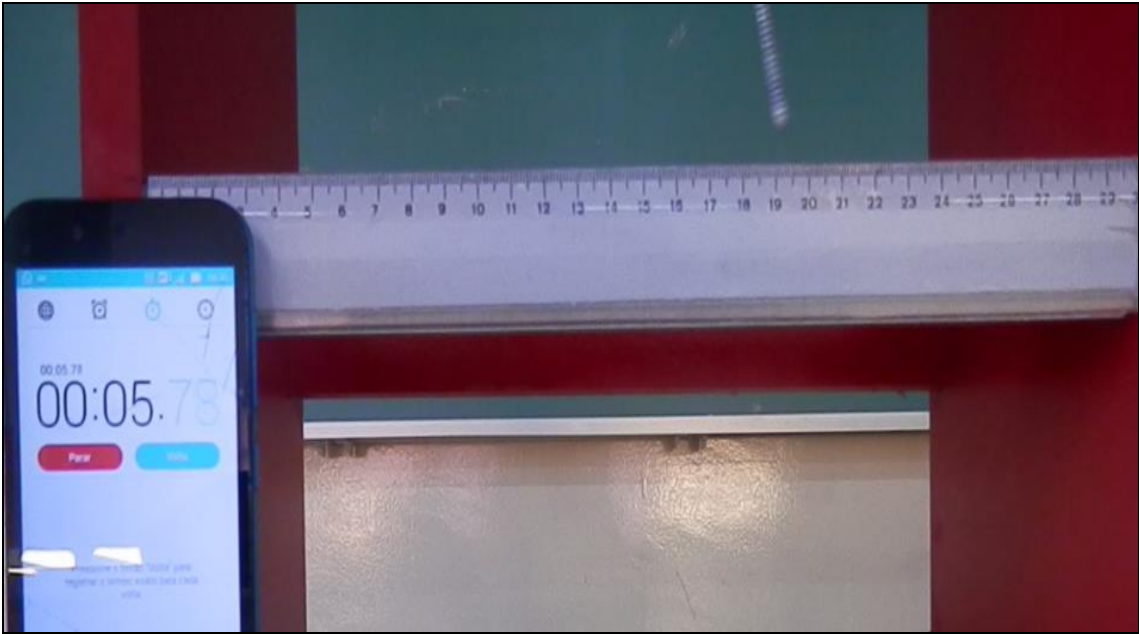
Figura 13 - Experimento Pêndulo Simples



Fonte: Autoria do pesquisador

Os alunos ficaram atentos com a construção do experimento. Um integrante do grupo 3, auxiliou o professor na construção de uma tabela com os valores obtidos pelas fotos da câmera digital. Com o seu uso foi possível obter uma sequência de fotos do movimento realizado pelo pêndulo. Durante essa atividade os alunos ficaram observando o movimento do pêndulo, enquanto o professor e um aluno do grupo 3 realizavam o experimento. Posteriormente o professor deixou os alunos realizarem o experimento. Os valores obtidos nessa ação estão indicados na Figura 15. A Figura 14 mostra como eram as fotos:

Figura 14 - Experimento Pêndulo Simples 2



Fonte: Aatoria do pesquisador

A partir dessas imagens foi possível obter 20 (vinte) valores que foram registrados pelo professor no quadro (Figura 15).

Figura 15 - Dados a partir do Pêndulo

Tempo	Distância	Tempo	Distância
		8,10	-3
4,80	3,5	8,28	-6
5,03	6,5	8,47	-0,5
5,2	0		
5,39	-6		
5,59	-4,5		
5,78	4,5		
5,97	6		
6,16	-1		
6,35	-6		
6,54	-3		
6,72	4,5		
6,91	6		
7,11	-2,5		
7,42	-6		
7,53	-3,5		
7,70	6		
7,89	4,5		

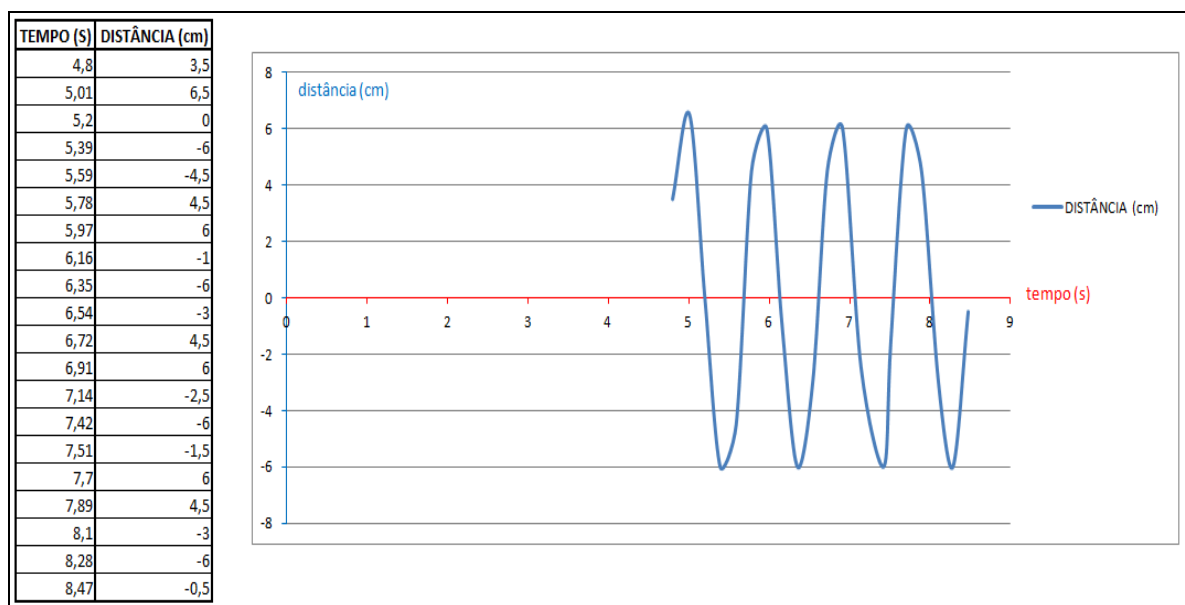
Fonte: Aatoria do pesquisador

Com esses valores, um dos alunos, com auxílio de um computador fez um gráfico com o Excel (Figura 16), enquanto ele realizava essa ação. O professor questionava os alunos sobre o tipo de gráfico que poderia ser construído com dados do quadro. Eles fizeram referência aos esboços construídos na Atividade 1, alunos dos grupos 3, 4 e 5 colocaram suas ideias, enquanto os alunos dos grupos 1 e 2 mostraram que haviam cometido um deslize na atividade, confirmando que o erro deles era a falta de compreensão de esboço de um gráfico e que agora haviam entendido a atividade anterior.

Aqui o professor assumindo as ideias da TAS, fez intervenções com os alunos, de modo a ensiná-los, o que era o período de um movimento (fenômeno) cíclico e como era possível obter esse dado.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) destacam que a aprendizagem acontece em vários encontros e desencontros com o novo conhecimento.

Figura 16- Construção no Computador

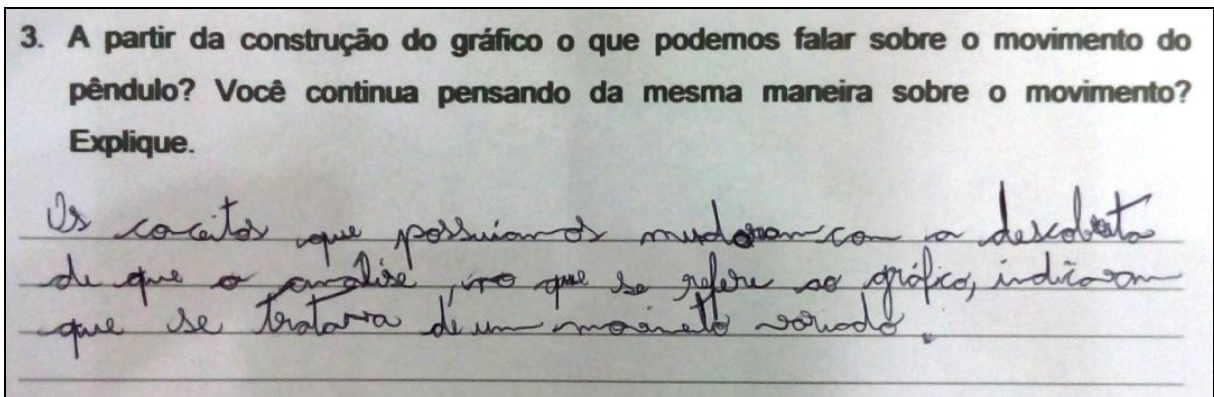


Fonte: A autoria do pesquisador

Após a construção desse gráfico, foi solicitado aos grupos que respondessem ao item 3 da Atividade 1.

No que segue estão as respostas dos grupos e análise das mesmas feita pelo pesquisador.

Figura 17 - Protocolo da Atividade 1: Grupo 1

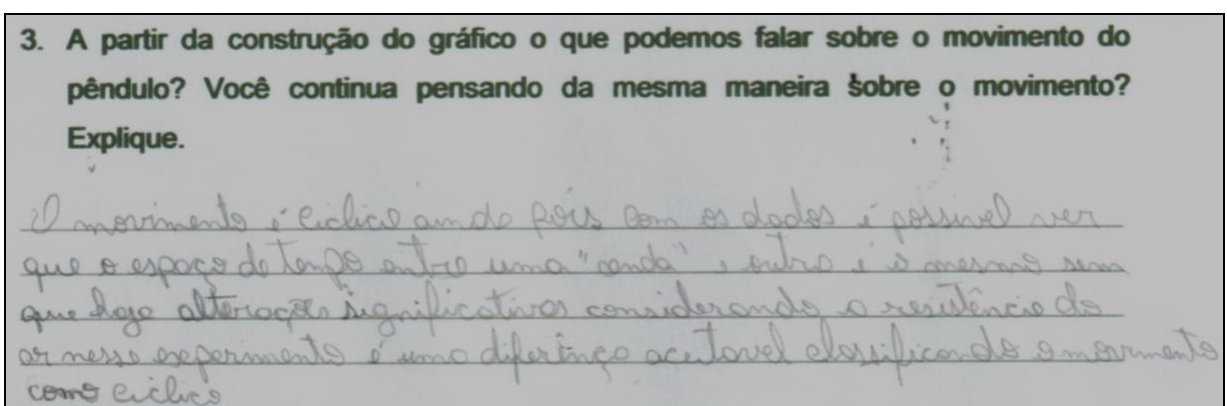


Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo informa que mudou de opinião quanto ao movimento, com a construção do gráfico no computador, pois percebeu que o movimento não era uniforme (movimentos com velocidades constantes). No processo da aprendizagem significativa são importantes os encontros e desencontros com o conceito novo.

Aragão (1976, p.16) destaca que uma experiência significativa de aprendizagem gera, por sua vez, uma mudança modificando a organização cognitiva existente, tornando-a mais ampla, mais clara, mais substancial e estável ou duradoura.

Figura 18 - Protocolo da Atividade 1: Grupo 2

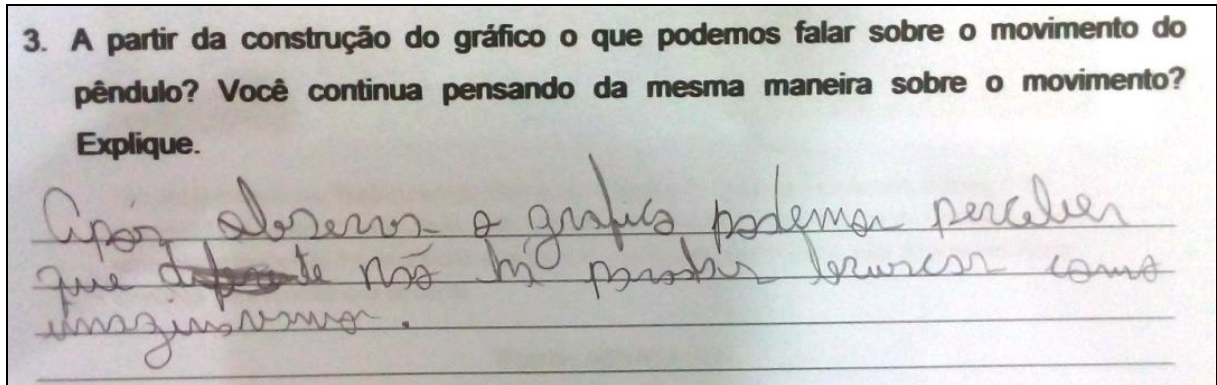


Fonte: Dados da Pesquisa

Aqui eles confirmaram o entendimento de um ciclo ou período de oscilação, evidenciando que “não há alterações significativas considerando a resistência do ar”, claramente percebe-se que, para esse grupo a atividade teve um potencial significativo, fazendo com que os participantes chegassem a alterar o esboço

construído no item 2 da Atividade 1, tornando-o mais parecido ao do movimento real. Esse grupo alterou a imagem construída na malha fazendo um esboço parecido ao gráfico obtido no *software Excel*.

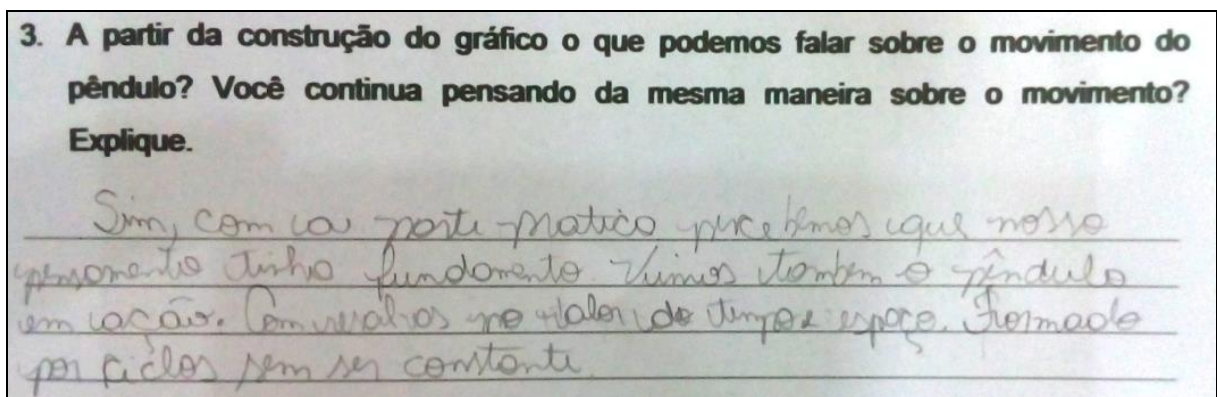
Figura 19 - Protocolo da Atividade 1: Grupo 3



Fonte: Dados da Pesquisa

Eles afirmaram que não há diferenças entre o que eles pensavam e o gráfico construído, isso já era esperado, pois na realização da Atividade 1 (itens 1 e 2) na qual se buscava identificar os subsunçores dos alunos, eles já compreendiam os movimentos cíclicos.

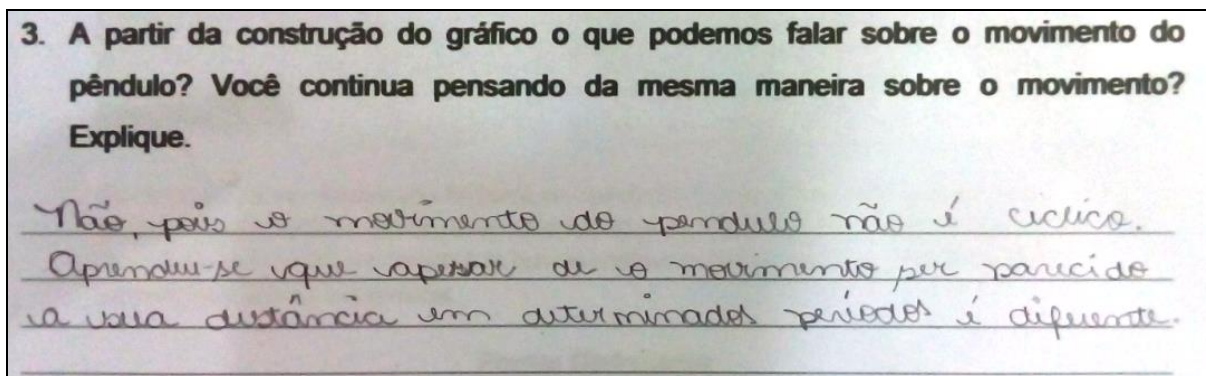
Figura 20 - Protocolo da Atividade 1: Grupo 4



Fonte: Dados da Pesquisa

Assim como o grupo 3, esse grupo evidencia que seus conhecimentos prévios já eram suficientes e adequados, mas sinaliza que no experimento existem ciclos, mas os mesmos não são constantes. Para os grupos 3 e 4 a atividade experimental foi importante para fortalecer os conhecimentos que eles já tinham sobre os movimentos periódicos.

Figura 21 - Protocolo da Atividade 1: Grupo 5



Fonte: Dados da Pesquisa

Os alunos do grupo 5 aqui refizeram suas respostas relativas ao item 2, que estavam incorretas. Pela observação feita infiro que a causa dessa alteração foi a incompreensão da explicação feita pelo professor, ou seja, essa explicação sobre período e ciclo teve efeito nos alunos diferentemente do esperado.

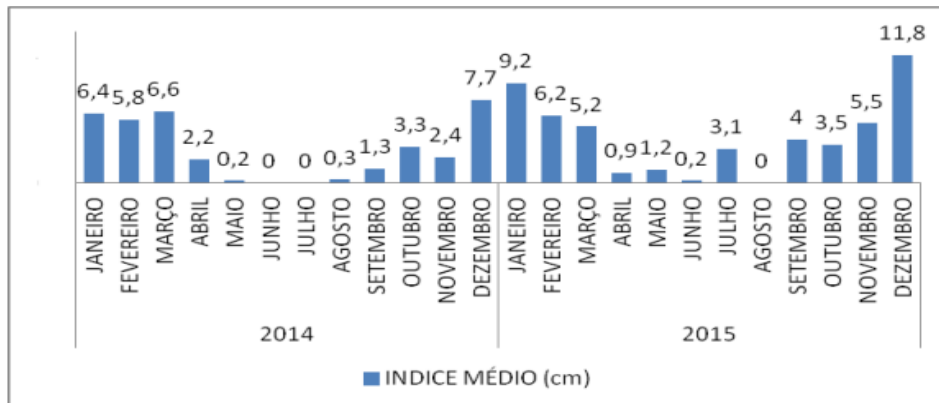
Ausubel, Novak e Hanesian (1980) indicavam que no decorrer da aprendizagem, algumas ideias ainda não estão estáveis na estrutura cognitiva do aprendiz, fazendo com que ele cometa alguns erros.

5.3 AULA 3

A Atividade 2 (itens 1 e 2) tratou de uma situação que acontece no município de Itapecerica da Serra, que é o deslizamento de terras que atinge inúmeras casas, fazendo com que a defesa civil tenha o seu trabalho ampliado. Durante a realização dessa atividade, os alunos deveriam construir gráficos sobre o índice pluviométrico da cidade em questão, realizando a leitura do item. Na construção do gráfico foi perceptível um grande envolvimento dos alunos, dado ao fato que os mesmos moram no município ou em regiões próximas. Bassanezi (2015) e Barbosa (2001) destacam, em seus textos, que para um processo efetivo de modelagem, o aluno deve trabalhar problemáticas próximas à sua realidade, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) identificam que para a aprendizagem ser significativa para o aluno, o mesmo deve se reconhecer no novo aprendizado.

Na construção do gráfico de barras era esperado que os alunos construíssem gráficos semelhantes ao indicado na Figura 22.

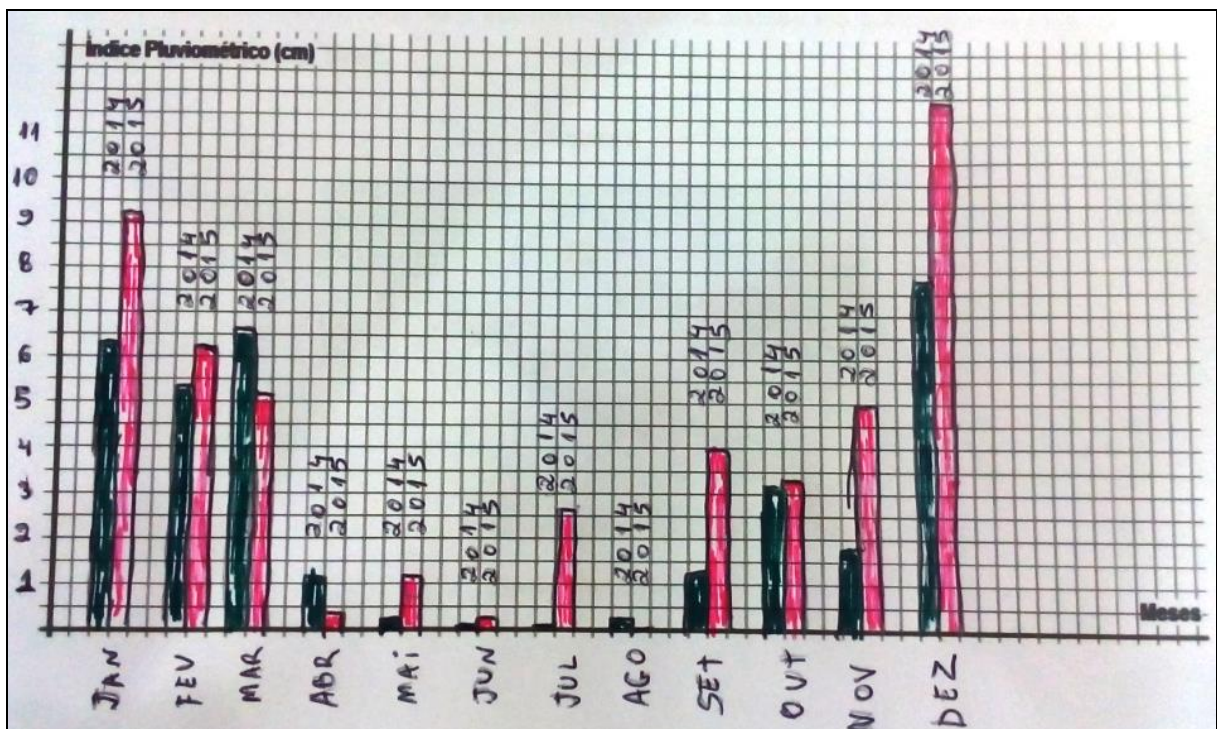
Figura 22 - Dados Esperados pelo professor



Fonte: Autoria do pesquisador

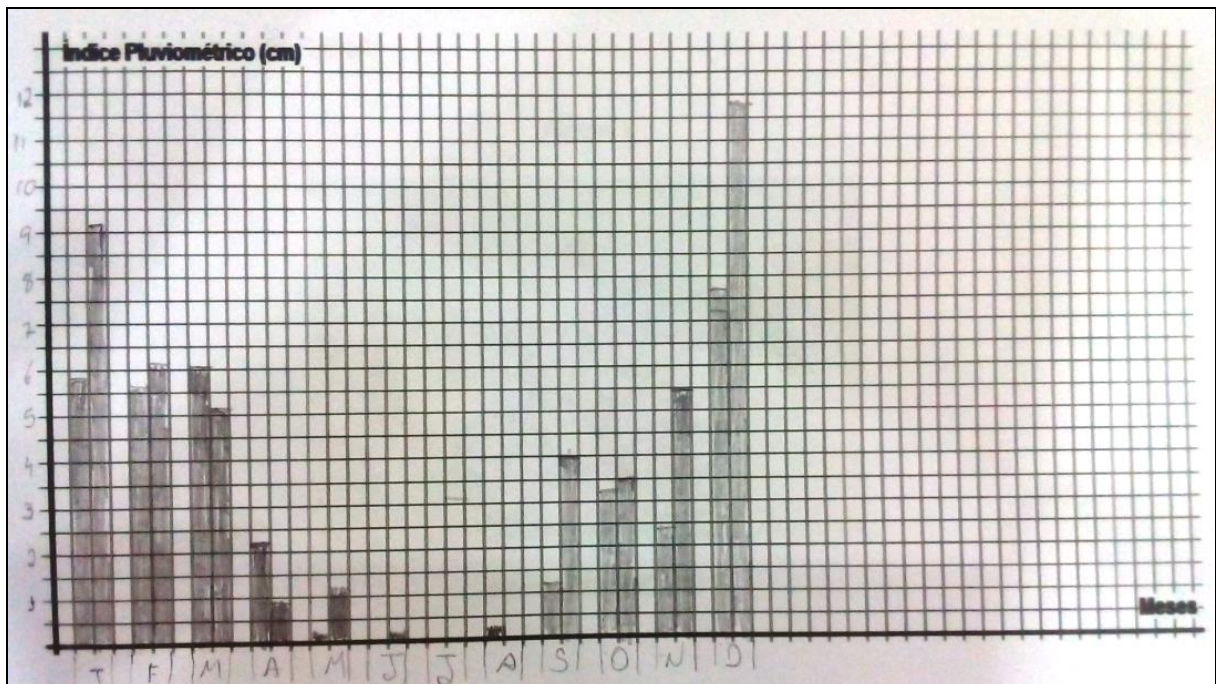
Ao realizarem as atividades, todos os grupos fizeram a construção de um gráfico comparativo do mês, ou seja, no mês de janeiro colocavam os dados de 2014 e 2015, em fevereiro e nos meses subsequentes, eles usaram a mesma forma como mostram as figuras abaixo.

Figura 23 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 1



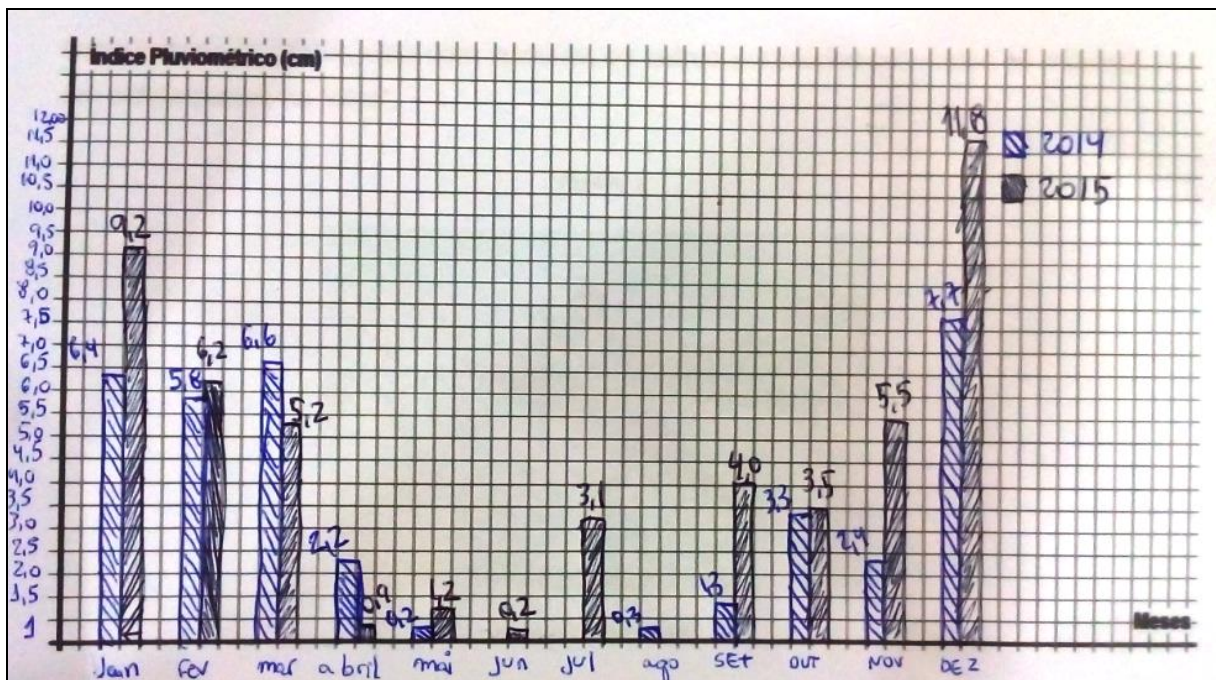
Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 24 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 2



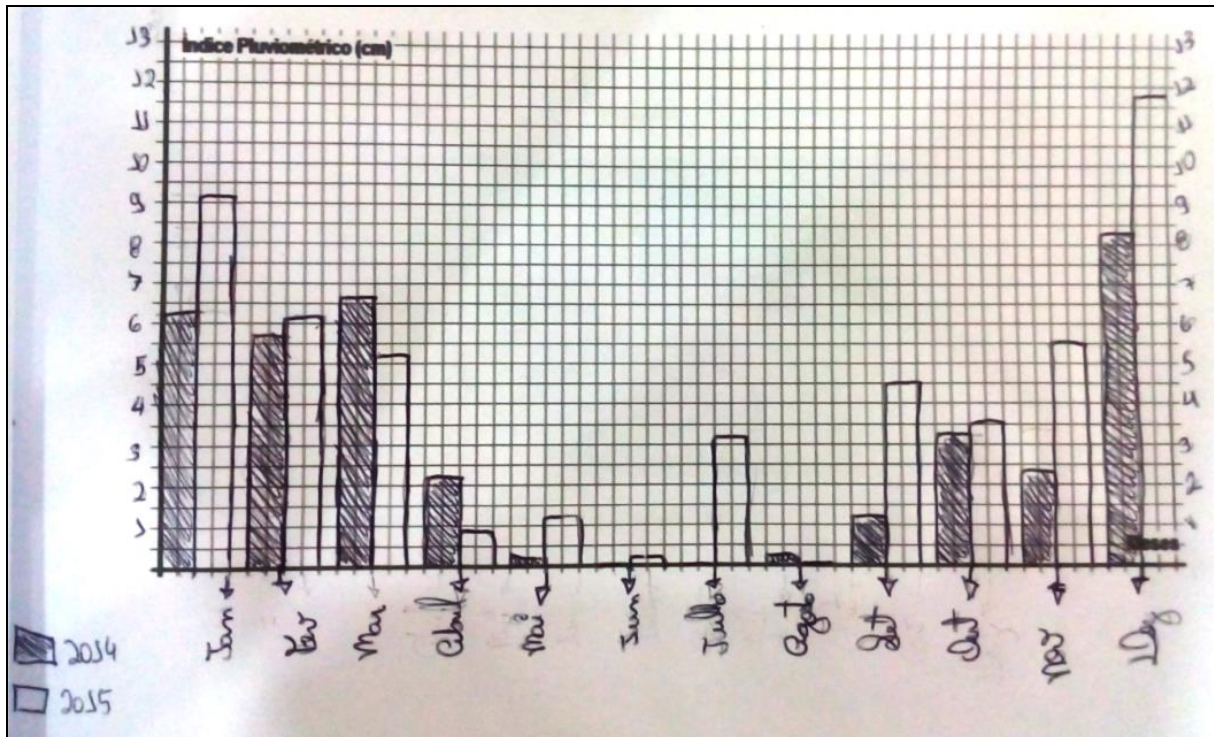
Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 25 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 3



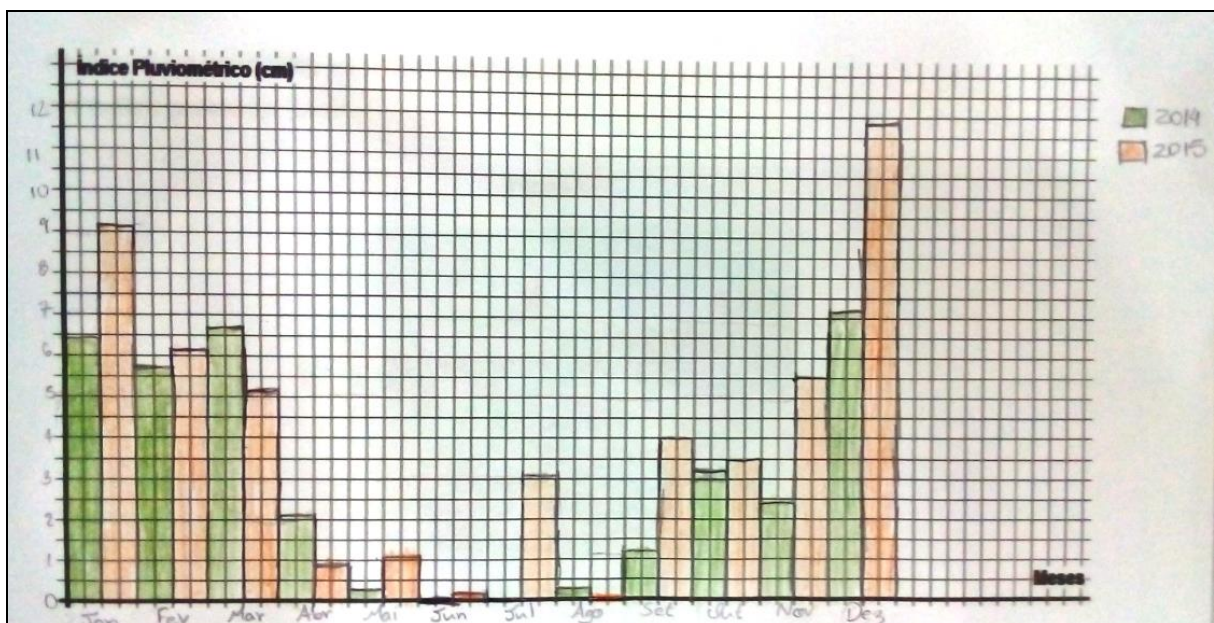
Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 26 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 4



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 27 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 5



Fonte: Dados da Pesquisa

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) compreendem que o aluno faz a representação daquilo que entende da proposta apresentada pelo professor, e que essa representação é a sua verdade do conhecimento que ele entendeu, se o

professor invalida essa representação, pode gerar uma tendência do aluno a uma aprendizagem mecânica, assim é necessário que o professor reavalie o seu esperado. Analisando a construção por parte dos grupos, foi observado que todos eles fizeram a representação correta do que era solicitado, sendo apenas necessário que eles percebessem o ciclo das chuvas que pode ser visualizado na construção deles, assim como na construção esperada pelo professor, embora acredite que a construção esperada era mais significativa, pois seria facilitada a visualização dos períodos. Devemos entender que a aprendizagem é singular e cada um associa o conteúdo à sua maneira. Após essa construção eles responderam duas questões.

As questões foram respondidas como o esperado por todos os grupos, eles apresentaram respostas parecidas, destacando que o maior índice de chuvas ocorre nos meses finais e iniciais do ano (verão) e o menor índice acontece no meio do ano (inverno). Dessa maneira eles evidenciam que a prefeitura do município teria condições de fazer intervenções para os casos de desmoronamento, assim houve indicações de que a atividade atingiu o objetivo e levou os alunos perceberem que as chuvas também ocorrem em ciclos, e dessa maneira o fato de ser possível modelar esse fenômeno implica em minimizar os problemas que ocorrem com as chuvas nessa cidade. Outro ponto importante a destacar na Atividade 2 (itens 1 e 2) é que os alunos conseguiram responder, atendendo aos objetivos propostos. As Figuras 28 a 32 evidenciam esse fato.

A modelagem nessa atividade fez com que os alunos questionassem as ações políticas no município, perceberam que os órgãos públicos deixam de realizar intervenções para resolver os problemas da população. O que preenche as condições, indicadas por Bassanezi (2015) que o uso de modelagem no ensino pode fazer com que o aluno seja mais crítico e reflexivo nas situações que ocorrem em seu meio.

Figura 28 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 1

1. O que foi possível perceber em relação aos meses e o índice pluviométrico? Explique.

É possível perceber um aumento significativo do índice pluviométrico de abril para frente se compararmos os diferentes meses.

2. Seria possível a prefeitura do município prever as épocas de desmoronamento e assim fazer intervenções? Explique.

Sim, pois em ambos os anos os períodos de grandes chuvas são no começo e no fim da seca.

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 29 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 2

1. O que foi possível perceber em relação aos meses e o índice pluviométrico? Explique.

nos meses referentes a estação da verão o índice pluviométrico foi maior em contrapartida nos meses referentes ao inverno os índices foram menores

2. Seria possível a prefeitura do município prever as épocas de desmoronamento e assim fazer intervenções? Explique.

sim pois sabendo-se que no verão os índices são maiores pode-se presumir que nesta época haverá mais chuvas acarretando em maiores riscos de desmoronamento com estas informações é possível fazer previsões para tal

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 30 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 3

1. O que foi possível perceber em relação aos meses e o índice pluviométrico?

Explique.

pode-se perceber que nos meses do meio do ano o índice pluviométrico quase não existe, as chuvas ocorrem em grande quantidade no verão enquanto que no inverno quase não há chuvas.

2. Seria possível a prefeitura do município prever as épocas de desmoronamento e assim fazer intervenções? Explique.

Certamente, visto que as chuvas são distribuídas em determinada estação do ano, ou seja, neste período está mais propenso a situações de desmoronamento.

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 31 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 4

1. O que foi possível perceber em relação aos meses e o índice pluviométrico?

Explique.

Que os maiores índices pluviométricos foram registrados no período do verão, nos primeiros e últimos meses do ano.

2. Seria possível a prefeitura do município prever as épocas de desmoronamento e assim fazer intervenções? Explique.

De certa forma sim, pois partindo do princípio de que os maiores períodos de chuva foram registrados entre os últimos meses do ano e os primeiros, a prefeitura poderia usar como base para saber em que período deveriam fazer intervenções para prevenir esses problemas.

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 32 - Protocolo da Atividade 2: Grupo 5

1. O que foi possível perceber em relação aos meses e o índice pluviométrico? Explique.

foi possível perceber que os índices pluviométricos estão relacionados com as estações do ano. Nas meses de verão chove muito mais do que nas meses de inverno.

2. Seria possível a prefeitura do município prever as épocas de desmoronamento e assim fazer intervenções? Explique.

Sim, pois é sabido a época do ano em que chove mais e é justamente nessa época em que existem mais chances de desmoronamentos.

Fonte: Dados da Pesquisa

A Atividade 2 (itens 1 e 2) foi significativa para todos os grupos, crédito esse resultado ao fenômeno do índice de chuvas da cidade, pois os alunos conseguiram se reconhecer no contexto trabalhado. Bassanezi (2015) já referenciava que se o modelo é próximo ao contexto do aluno, ele se dispõe ao aprendizado, isso vai ao encontro dos pressupostos da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 1963) que indica que quanto mais um aluno sabe sobre um determinado assunto, esse conhecimento será uma boa âncora para o novo conhecimento. Burak e Aragão (2012) concordam que no processo da Modelagem o estudante atribui significados ao que ele aprende, em função de sua experiência de mundo.

5.4 AULA 4

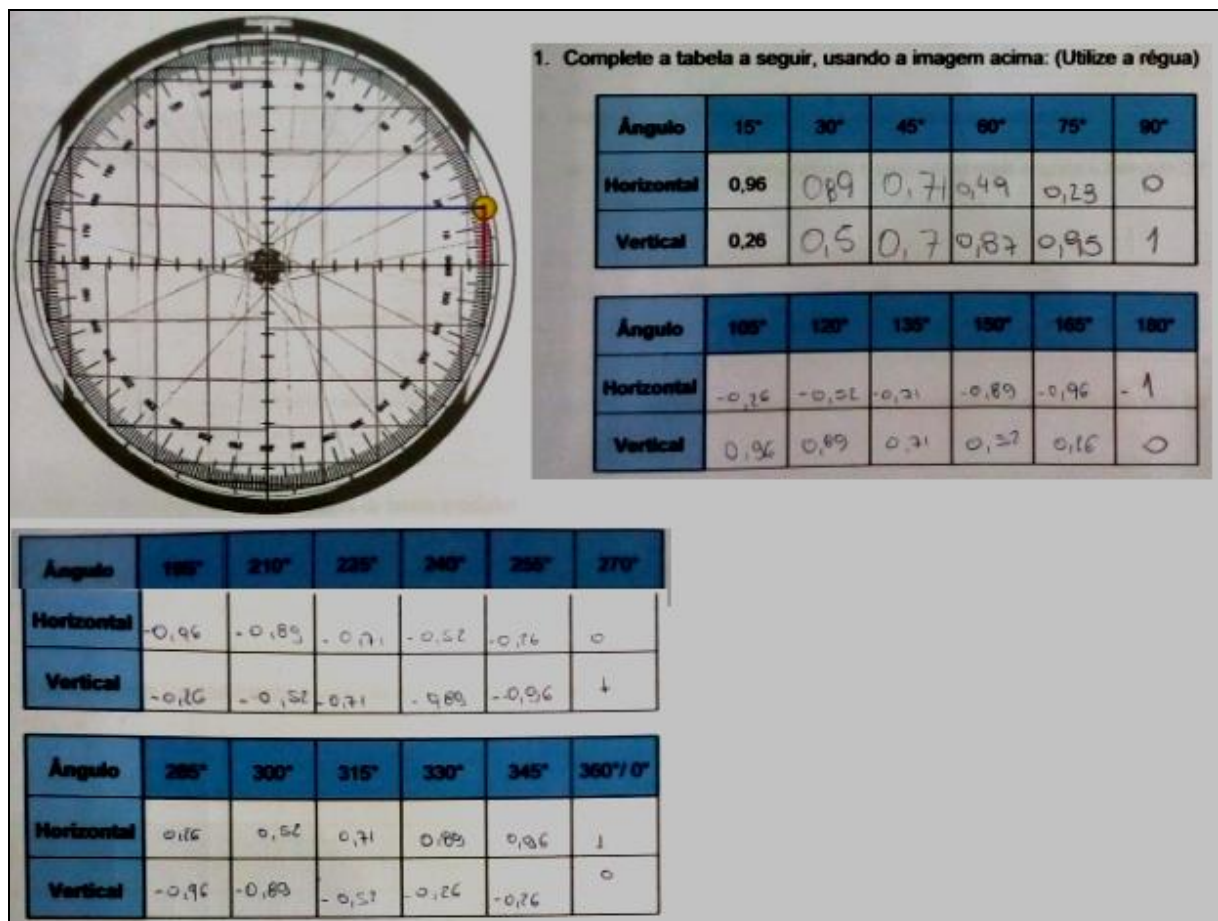
Nessa aula os grupos leram um texto¹⁷ sobre o ciclismo, no qual era apresentada uma temática que levava o aluno a reconhecer o ciclo trigonométrico e em seguida preencher uma tabela proposta na Atividade 3.

Buscava-se com o texto ativar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema proposto. Considero esse texto como sendo um organizador prévio expositivo.

¹⁷ Texto apresentado na atividade 3, p. 55.

Os grupos realizaram a atividade com certa facilidade, mas o grupo 1, não apresentou interesse em responder os questionamentos ou entender o preenchimento da tabela, por várias vezes o professor fez intervenção nesse grupo, vale ressaltar que no processo da aprendizagem significativa, se o aluno não tem a intencionalidade de aprender significativamente, o aprendizado não acontece. No entanto, acredito que quando o aluno não se identifica com o assunto proposto, o mesmo não sente vontade para abstrair o novo conhecimento, desse modo a atividade não teve um potencial significativo para o grupo 1, em um primeiro momento. Por essa razão o professor conversou com o grupo de modo que os membros se motivassem a realizar a atividade.

Figura 33 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 1

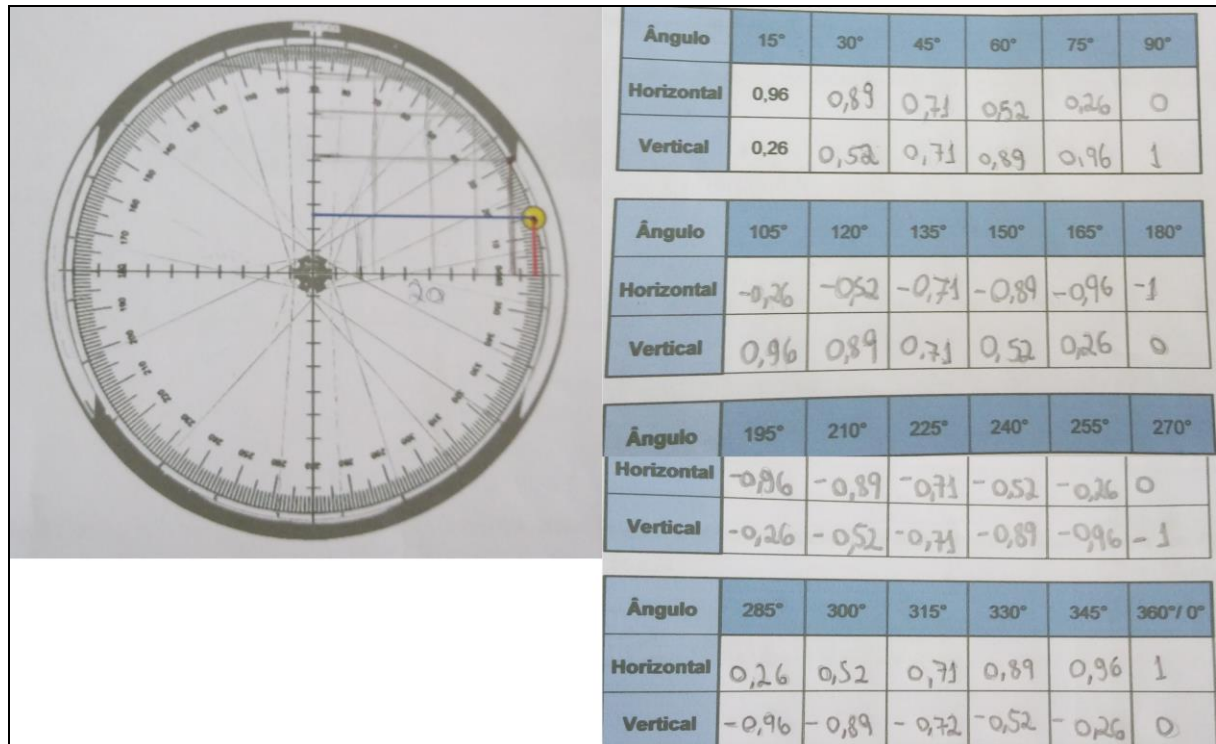


Fonte: Dados da Pesquisa

Embora o grupo ficasse disperso durante a atividade, eles conseguiram responder corretamente todos os campos em branco das tabelas, mas vale ressaltar

que os alunos não perceberam a regularidade das projeções, sendo necessário que eles preenchessem todos os ângulos da tabela.

Figura 34 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 2

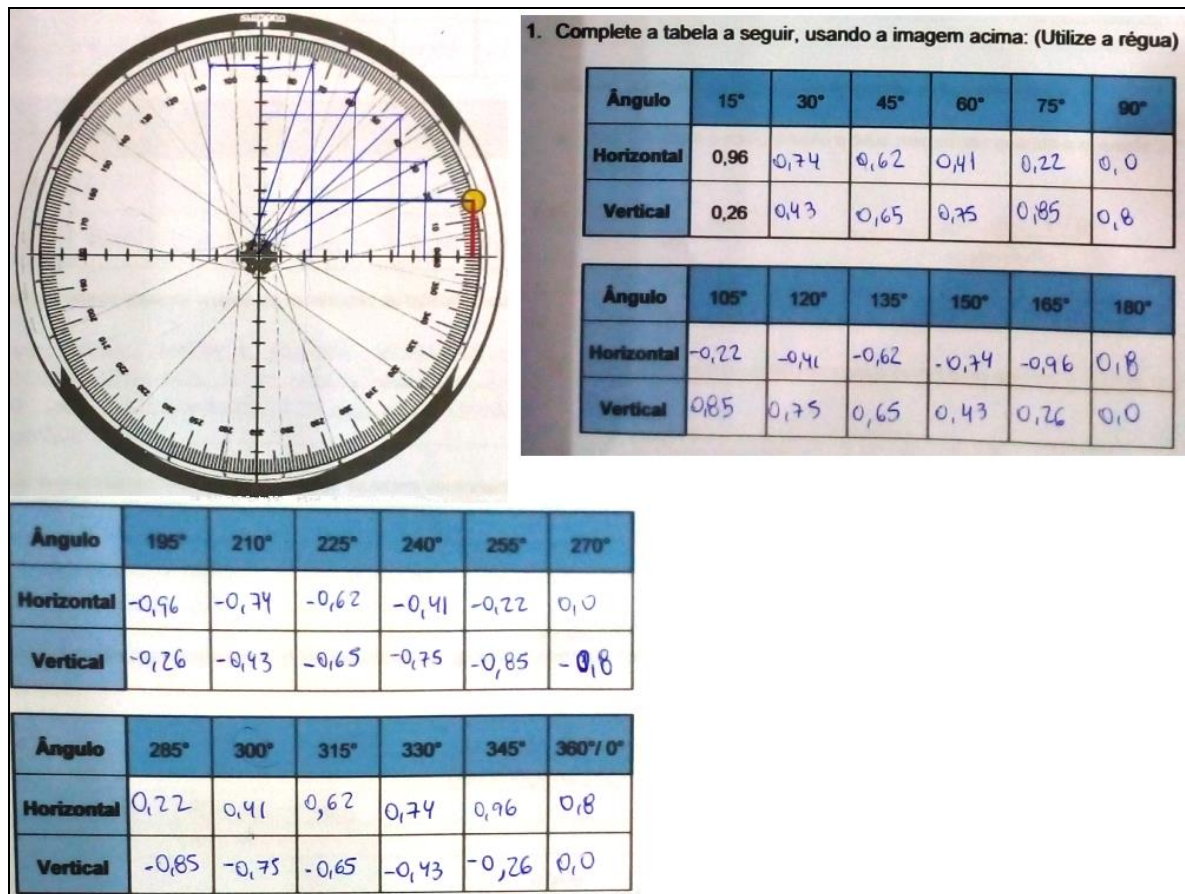


Fonte: Autoria do pesquisador

O grupo 2 conseguiu resolver facilmente essa atividade, e ainda percebeu que existia uma regularidade das projeções conforme as medidas dos ângulos fossem aumentando, desse modo não precisou fazer indicações no “ciclo trigonométrico”.

Aragão (1976) informa que, quando a aprendizagem é significativa o aluno consegue estabelecer o conhecimento em sua estrutura cognitiva, de modo a expor o conhecimento sem a necessidade de uma situação concreta.

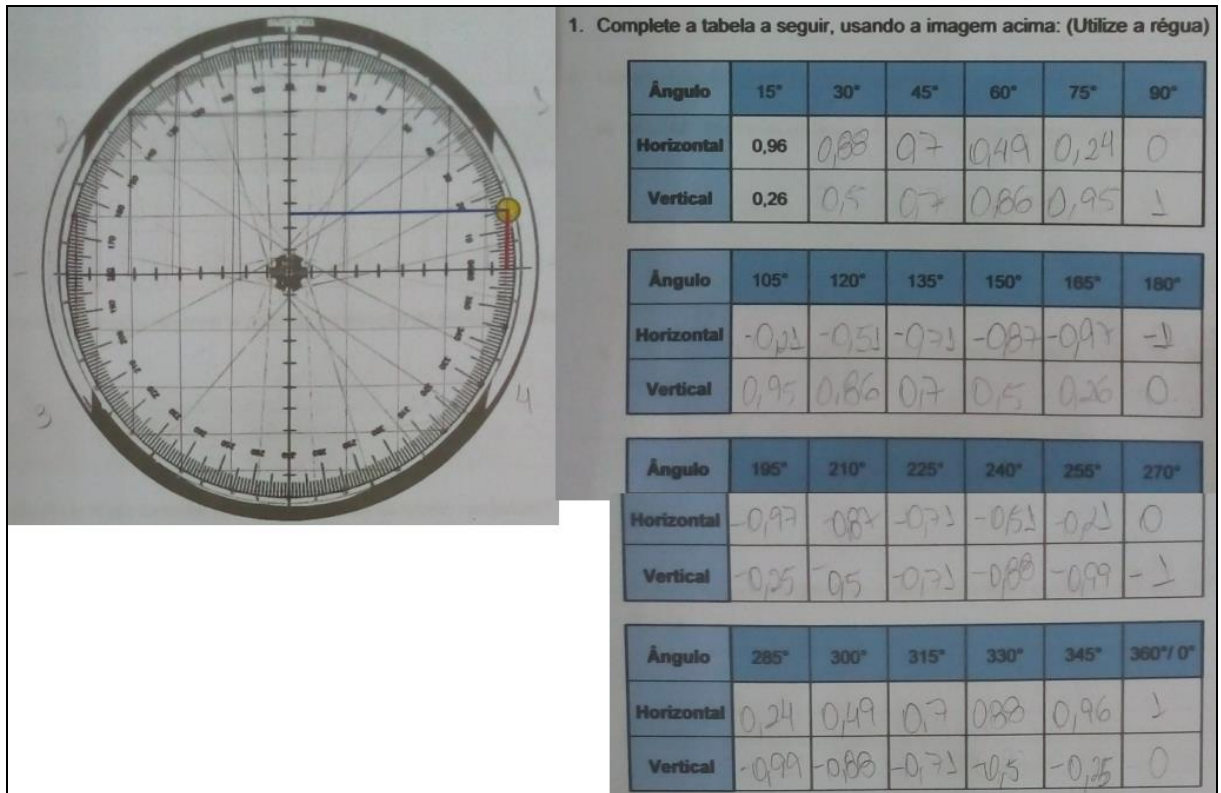
Figura 35 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 3



Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo 3 pareceu ter entendimento da regularidade do movimento, todavia ao considerar o tamanho do raio como um segmento com origem no centro da circunferência e o extremo na borda interior à mesma, os dados obtidos estavam errados e em consequência preencheu a tabela de maneira errônea. A atividade para eles foi significativa, pois perceberam a regularidade, mas o erro da obtenção do raio o levou a respostas incorretas.

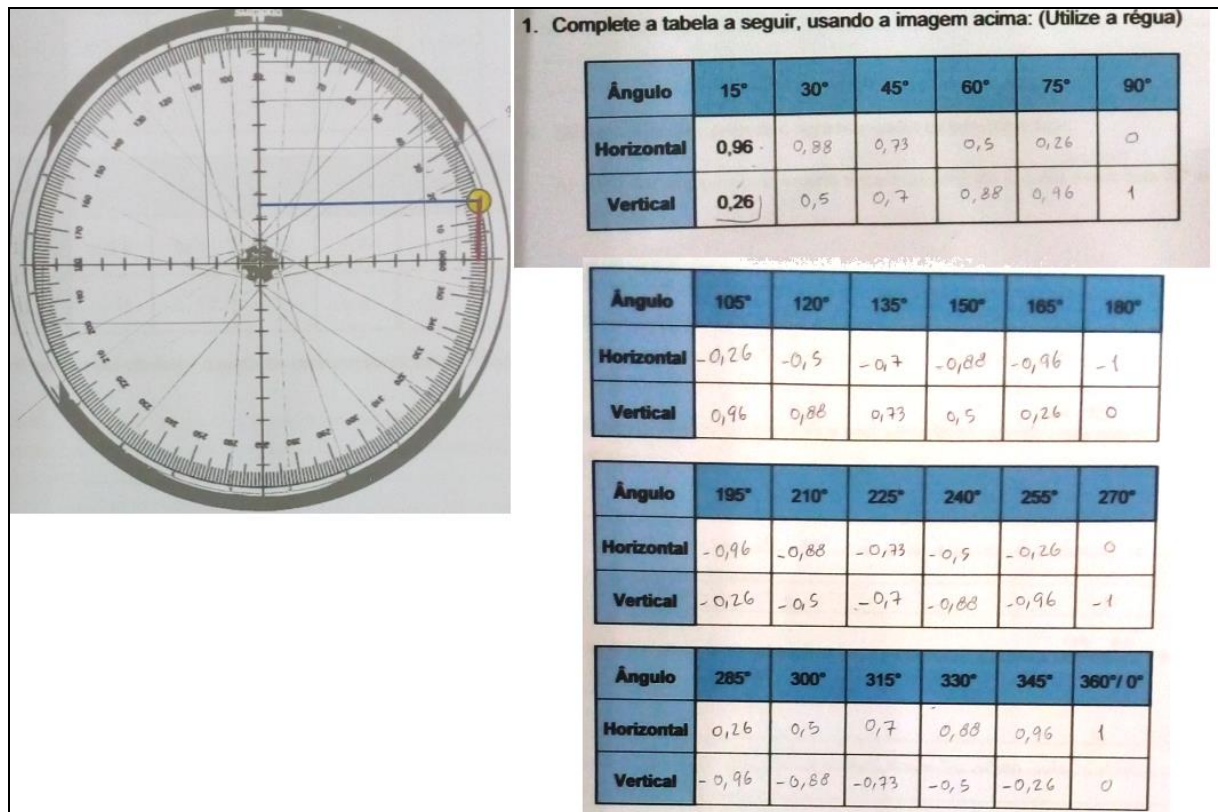
Figura 36 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 4



Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo 4 apresentou conhecimento do que era um quadrante, pois em sua construção há os números (1,2,3 e 4), mas não conseguiu identificar a regularidade, e por isso fez todas as indicações em todos os quadrantes, ainda assim registrou os valores corretos na tabela. Percebe-se aqui claramente uma subsunção derivativa. Burak e Aragão (2012) descrevem que esse tipo de subsunção ocorre quando o conceito a ser aprendido é um exemplo específico de um outro estabelecido na estrutura cognitiva, ou na aplicação de uma proposição geral anteriormente aprendida, como nesse caso.

Figura 37 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5



Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo 5 também pareceu ter entendimento da regularidade do movimento e registrou corretamente os valores na tabela, esse grupo foi o mais ativo durante as atividades, seus membros discutiram constantemente buscando os melhores caminhos para as respostas.

Os itens da Atividade 3 tinham por objetivo fazer os alunos evidenciarem o que entenderam na construção da tabela. Seguem as respostas.

Figura 38 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 1

2. O que você conseguiu observar a partir da construção da tabela? Explique.

Com a construção da tabela foi possível observar que os números diminuíam proporcionalmente no horizontal, e aumentam no vertical.

3. Se o círculo tiver um tamanho diferente os valores da tabela mudariam? Explique.

Não, pois continuaria sendo um círculo com uma circunferência de 360° .

Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo 1 ao responder o item 2, destacou o que ocorre no primeiro quadrante, mas não enxergou a tabela em sua totalidade, desse modo a resposta apresentada é coerente com o que acontece apenas no primeiro quadrante. No item 3, percebe-se que ele, mesmo com uma resposta não elaborada, entende que os valores não mudam. Lembro que para a realização dessa atividade, esse grupo precisou de um tempo maior que os outros e não mostrava empenho para a sua realização, precisando do professor para motivar a realização da atividade.

Figura 39 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 2

2. O que você conseguiu observar a partir da construção da tabela? Explique.

Há uma equivalência periodicamente em ângulos opostos a posição era exatamente o oposto e em ângulos sem opostos a posição era invertido.

3. Se o círculo tiver um tamanho diferente os valores da tabela mudariam? Explique.

Os valores mudariam pois a escala real seria para a sequência como mantido.

Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo 2 percebeu a regularidade, após a construção da tabela, mas não percebeu que os valores não se alteram quando o tamanho da circunferência aumentava, os estudantes ainda não percebiam a razão a/b sendo a a projeção do ângulo e b o raio da circunferência. A partir desse ponto de vista o número a não pôde exceder o número b , fazendo com que a razão a/b seja menor ou igual a 1. Deste modo, os valores do seno e cosseno não podem ser maiores que 1.

Figura 40 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 3

2. O que você conseguiu observar a partir da construção da tabela? Explique.

Existe um padrão, então é possível relacionar os ângulos e o que vai determinar se os valores serão positivos ou negativos será o quadrante em que a coordenada se encontra

3. Se o círculo tiver um tamanho diferente os valores da tabela mudariam? Explique.

Sim, porém também haveria um padrão. Como a circunferência fosse maior os valores também seriam maiores

Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo 3 percebeu que existia um padrão nos valores da tabela, isso fica evidenciado nas duas respostas, quando coloca a palavra “padrão”, mas em relação às ideias de razão não apresenta entendimento, pois considera que em uma circunferência maior os valores da relação medida da projeção/medida do raio também seriam maiores. Vale ressaltar que o grupo tem alguns subçunsos desse conteúdo, pois em nenhum momento, até aqui, foi utilizada a palavra circunferência e os alunos a usaram para construir sua resposta.

Figura 41 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 4

2. O que você conseguiu observar a partir da construção da tabela? Explique.

Que temos 4 partes (quadrantes), em que temos pontos que se cruzam, mudando apenas os sinais. Exemplo: na vertical do quadrante 1, e o mesmo valor do quadrante 3, com o sinal invertido.

3. Se o círculo tiver um tamanho diferente os valores da tabela mudariam? Explique.

Não, pois a circunferência sempre tem 360° .

Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo 4 apresentou ter alguns subsunçores, evidenciou a palavra quadrante, também conseguiu perceber o padrão na construção da tabela, e como preencher a tabela. Sobre o item 3, também não constrói uma resposta elaborada, mas consegue evidenciar que os valores não mudarão.

Figura 42 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5

2. O que você conseguiu observar a partir da construção da tabela? Explique.

É possível observar que os quadrantes pares, assim como os ímpares possuem os mesmos valores porém com alterações nos sinais dependendo do ponto estudado no eixo.

3. Se o círculo tiver um tamanho diferente os valores da tabela mudariam? Explique.

Não, caso montarem a mesma escala, os valores se manteriam.

Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo 5 apresentou entendimento em relação ao padrão, destacando que os valores são os “mesmos com sinais diferentes”, ainda mostrou ter conhecimento em relação às ideias de razão, no momento em que coloca que, os valores se mantêm os mesmos quando a circunferência altera sua escala.

A partir da análise dos resultados da tabela e questões, percebe-se que os alunos adquiriram um aprendizado significativo, precisando de adequações em relação às ideias de razão, e que entendessem que em uma circunferência a razão perímetro/diâmetro sempre gera o mesmo valor.

5.5 AULA 5

Para essa aula, a proposta era fazer os grupos utilizarem o *software* GeoGebra, com o objetivo de validarem as ideias corretas estabelecidas, a razão perímetro/diâmetro ou de alterarem os pensamento errôneos sobre essa razão, mas a ação que era proposta não pôde se concretizar, pois o laboratório de informática estava inativo, desse modo, o professor/pesquisador utilizou-se de um *notebook* fornecido pela escola e o *Datashow*, e apresentou para os alunos a proposta (Figura 42). Nessa apresentação utilizou-se desse *software* movendo alguns de seus acessórios, mostrando o padrão que era solicitado no item 2 da Atividade 3 e também mostrando que aumentando o tamanho do raio da circunferência, os valores não mudavam. A aprendizagem receptiva significativa foi utilizada em toda a atividade.

Na explicação da atividade, pelo professor/pesquisador foram introduzidos os conceitos de seno e cosseno. Para isso utilizou-se da ideia de que o raio tem o comprimento total (100%) e que cada projeção da bolinha na horizontal e vertical apresentava um percentual desse raio. Por exemplo, no caso em que ângulo formado pelo eixo horizontal da circunferência e o segmento que une o centro da circunferência à bolinha é 30° as projeções vertical e horizontal apresentam respectivamente os percentuais 50% e 87%.

Nessa atividade foi utilizada a teoria da aprendizagem receptiva significativa que é caracterizada pela forma de proposta do ensino: o conceito a ser aprendido é apresentado aos alunos sem a necessidade que os mesmos estruturam esse conhecimento. Aragão (1976) define que nessas circunstâncias o aluno precisa compreender e incorporar o que lhe foi apresentado em sua estrutura cognitiva para uma futura utilização.

Ausubel (1963) não define essa forma de aprender como menos eficiente que a aprendizagem por descoberta, pois no processo da aprendizagem receptiva, o

aluno utiliza um conjunto de ideias preexistentes para relacionar com o que o professor ensina.

Figura 43- Apresentação da atividade aos alunos



Fonte: **Autoria do pesquisador**

Após explicar os conceitos e os alunos acompanharem a utilização do *software* GeoGebra, percebeu-se que eles se motivaram para fazer as outras atividades, possivelmente pelo uso da tecnologia. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) destacavam que a tecnologia pode influenciar de modo positivo o processo de aprendizagem. Iniciando as atividades percebi que os subitens a, b, c e d do item 4 da atividade 3, apresentavam alguns erros de digitação, a palavra raio estava posta no lugar da palavra ângulo e em todos os subitens aparecia o ângulo de 30° , assim fiz com que os alunos alterassem esse valor. O destaque desse erro é importante para evidenciar que, por mais que o professor prepare sua atividade deve sempre revisar mais de uma vez, pois um erro na preparação pode trazer consequências. Os alunos conseguiram resolver as atividades conforme o esperado, como pode ser evidenciado nos seguintes resultados:

Figura 44 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 1

4. Utilize o aplicativo geogebra para responder os seguintes itens:

a) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{ângulo}raio vale 30° e raio 20 u.m.

$30^\circ = 0,89$ e $0,52$ (comprimento e altura)
 $20 \text{ u.m.} = 10$ e 18

b) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{ângulo}raio vale 45° e raio 60 u.m.

$45^\circ = 0,71$ e $0,7$
 $60 \text{ u.m.} = 30$ e 42

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 45 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 1

c) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{ângulo}raio vale 60° e raio 10 u.m.

$60^\circ = 0,52$ e $0,87$
 $10 \text{ u.m.} = 5$ e 9

d) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{ângulo}raio vale 30° e raio 100 u.m.

$30^\circ = 0,89$ e $0,52$
 $100 \text{ u.m.} = 89$

Fonte: Dados da pesquisa

Os grupos conseguiram estabelecer as razões entre os percentuais das projeções horizontal e vertical com o comprimento do raio, mostrando uma aprendizagem significativa.

Figura 46 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 2

4. Utilize o aplicativo geogebra para responder os seguintes itens:

a) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{ângulo} ~~raio~~ vale 30° e raio 20 u.m.

A altura vale 10 u.m, 50% da altura total
 O comprimento vale 18 u.m, 90% do comprimento total

b) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ~~raio~~ ^{ângulo} vale 45° e raio 60 u.m.

A altura vale 42 u.m, 70% do valor total
 O comprimento vale 42 u.m, 70% do valor total

$$60 \overline{) 100} \quad \begin{array}{r} 0,6 \\ \times 70 \\ \hline 42 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 47 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 2

c) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ~~raio~~ vale 30° e raio 10 u.m.

ângulo 60°
comprimento = 522
altura = 90%

comprimento vale 50 u.m
altura vale 9 u.m

d) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ~~raio~~ vale 30° e raio 100 u.m.

ângulo
Altura = 52 u.m
comprimento = 89 u.m

Fonte: Dados da pesquisa

Para esse grupo encontrar a razão entre as projeções e o raio foi significativo, pois ele conseguiu relacionar a noção de razão com mais facilidade em relação aos demais.

Esse grupo utilizou ideias preestabelecidas (porcentagem) para resolver as situações apresentadas.

Figura 48 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 3

4. Utilize o aplicativo geogebra para responder os seguintes itens:

a) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{Ângulo vale} raio vale 30° e raio 20 u.m.

$$\begin{array}{l} 0,88 = 88\% - x \quad x = 17,6 \\ 100\% - 20 \end{array}$$

Altura: 10 u.m.
Comprimento: 17,6 u.m.

$$\begin{array}{l} 0,5 = 50\% - x \quad x = 10 \\ 100\% - 20 \end{array}$$

b) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{Ângulo 45°} raio vale 30° e raio 60 u.m.

$$\begin{array}{l} 100\% - 60 \\ 0,7 = 70\% - x \quad x = 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100\% - 60 \\ 70\% - x \quad x = 42 \end{array}$$

Altura: 42 u.m.
Comprimento: 42 u.m.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 49 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 3

c) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{Ângulo 60} raio vale 30° e raio 10 u.m.

$$\begin{array}{l} 0,49 = 49\% \\ 0,86 = 86\% \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 49 - x = x = 4,9 \\ 100 - 10 \end{array}$$

Altura: 8,6 u.m.
Comprimento: 4,9 u.m.

$$\begin{array}{l} 86 - x = 8,6 \\ 100 - 10 \end{array}$$

d) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{Ângulo} raio vale 30° e raio 100 u.m.

$$\begin{array}{l} 0,88 = 88\% \\ 0,5 = 50\% \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100 - 100 \\ 88 - x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100 - 100 \\ 50 - x \end{array}$$

Altura: 50 u.m.
Comprimento: 88 u.m.

$$\begin{array}{l} x = 88 \\ x = 50 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Esse protocolo indica o mesmo resultado observado no grupo 3.

Figura 50 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 4

4. Utilize o aplicativo geogebra para responder os seguintes itens:

a) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{ângulo}raio vale 30° e raio 20 u.m.

Seu seno vale $\frac{20}{c} = \frac{100}{50} = 100 \cdot c = 1000 \quad c = 10$

Cosseno vale $\frac{20}{c} = \frac{100}{83} = 100 \cdot c = 1760 \quad c = 17,6$

Sendo assim sua altura 10 u.m e seu comprimento 17,6 com percentual de 50% e 83% do raio.

b) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{ângulo}raio vale 30° e raio 60 u.m.

Seno = $\frac{60}{c} = \frac{100}{70} \quad 4200 = 100 \cdot c \quad c = 42$

Cosseno $\frac{60}{c} = \frac{100}{70} \quad 4200 = 100 \cdot c \quad c = 42$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 51 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 4

* Conversão de todos os valores da tabela para porcentagem.

Assim fica 42 u.m sua altura e comprimento e os percentuais iguais a 70% do raio

c) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{ângulo}raio vale 30° e raio 10 u.m.

Cosseno = $\frac{10}{c} = \frac{100}{49} \quad 10 \cdot c = 49 \quad c = 4,9$

Seno = $\frac{10}{c} = \frac{100}{86} \quad 10 \cdot c = 86 \quad c = 8,6$

Dessa forma temos 8,6 u.m de altura e 4,9 u.m de comprimento, com porcentagem de 86% e 49% do raio respectivamente.

d) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ^{ângulo}raio vale 30° e raio 100 u.m.

Seno $\frac{100}{c} = \frac{100}{50} \quad c = 50$ e Cosseno $\frac{100}{c} = \frac{100}{88} \quad c = 88$

Logo temos 50 u.m de altura e 88 u.m de comprimento e não iguais os percentuais do raio

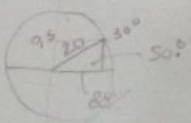
Fonte: Dados da pesquisa

Nesse grupo foi utilizada regra de três simples para facilitar as relações trigonométricas, ele ainda evidência que transformou a tabela da atividade anterior para percentuais.

Figura 52 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5

4. Utilize o aplicativo geogebra para responder os seguintes itens:

a) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o ~~raio~~ ^{ÂNGULO} vale 30° e raio 20 u.m.



$$27 \cdot \frac{50}{100} = 10$$

$$27 \cdot \frac{88}{100} = 17,6$$

9

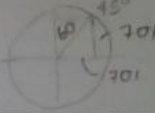
1 88
+ 88
176

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 53 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5

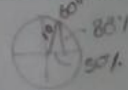
Quando o ângulo vale 30° e o raio 20 u.m. a altura vale 10 u.m. e o comprimento vale $17,6 \text{ u.m.}$

b) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o raio vale 30° e raio 60 u.m. ANG. 45°

 $60 \cdot \frac{74}{100} = 42$

Quando o ângulo vale 45° e o raio 60 u.m. a altura e o comprimento valem 42 u.m.

c) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o raio vale 30° e raio 10 u.m. ANG. 60°

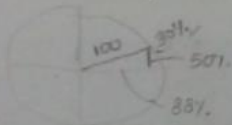
 $10 \cdot \frac{50}{100} = 5$ $10 \cdot \frac{88}{100} = 8,8$

Quando o ângulo vale 60° e o raio 10 u.m. a altura vale 5 u.m. e o comprimento $8,8 \text{ u.m.}$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 54 - Protocolo da atividade 3: Grupo 5

d) Qual é a altura e comprimento e seus percentuais quando o raio vale 30° e raio 100 u.m.

 $100 \cdot \frac{50}{100} = 50$ $100 \cdot \frac{88}{100} = 88$

Quando o ângulo vale 30° e o raio 100 u.m. a altura vale 50 u.m. e o comprimento 88 u.m.

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo 5 também utilizou ideias de porcentual para apropriar das razões utilizadas nos subitens, mas em suas construções faz desenhos para representar as respostas, parece que isso foi usado como apoio na construção do conhecimento por parte do grupo.

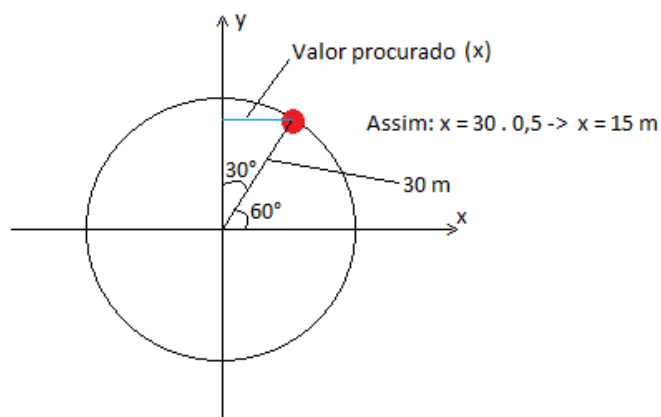
De modo geral os alunos ao estabelecerem as razões entre medida das projeções/comprimento do raio, se utilizam das ideias de porcentual. Para Ausubel (1963) a construção de um novo conhecimento se dá a partir dos conhecimentos preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz, certamente as ideias de porcentual foram âncoras para a construção do novo conhecimento.

5.6 AULA 6

Essa aula ocorreu no mesmo dia que a aula 5, o objetivo era que os grupos respondessem dois itens (5 e 6), que pretendiam verificar se eles compreenderam as razões construídas no item 4. O item 6 busca levar o aluno a perceber o movimento cíclico que a bolinha descreve e que os valores das razões voltam a se repetir para ângulos que se diferem pelo número de voltas.

Os grupos tiveram dificuldades em resolver o item 5 da Atividade 3, pois não entenderam o que era solicitado. O professor sugeriu que os alunos refletissem sobre a atividade, o esperado era que eles construíssem a seguinte representação (Figura 55) e chegassem a uma resposta com o auxílio da tabela construída.

Figura 55- Resultado esperado pelo professor



Fonte: Autoria do pesquisador

Para o item 6 era esperado que os alunos entendessem que os ângulos apresentados tinham as mesmas projeções dos ângulos de 30° e 210° , e percebessem que eles diferiam a menos do número de voltas.

Seguem as atividades desenvolvidas pelos grupos:

Figura 56 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 1

5. Sem utilizar o geogebra responda se o raio da bicicleta tiver um comprimento de 30 m e a bola estiver fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, qual será a distância da bola em relação ao eixo vertical?



6. Se fizessemos a tabela continuar aumentando os seus valores o que aconteceria? Quais seriam os valores de comprimento e altura dos ângulos 390° e 570° ? Explique.

$390^\circ = 0,89 \times 0,52$ (os valores seriam "problematizados")

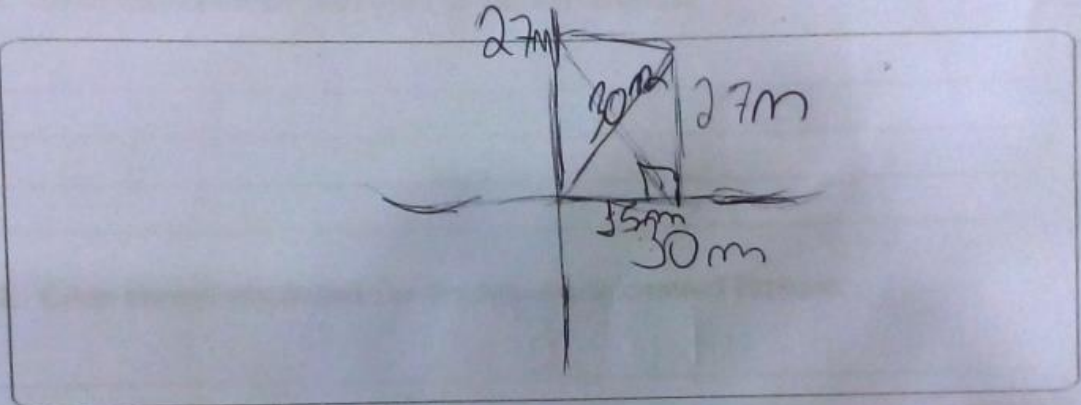
$570^\circ = 0,89 \times 0,52$

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo 1 conseguiu fazer os cálculos referentes ao exposto, no entanto o texto da atividade foi um obstáculo para eles. Aqui os subsunçores referentes às compreensões de texto não eram suficientes para os alunos desenvolverem essa atividade. Enquanto o outro item eles compreenderam parcialmente o esperado, evidenciando os valores das razões de forma correta, mas não confirmaram perceber que as razões correspondentes de 390° e 570° não são iguais.

Figura 57 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 2

5. Sem utilizar o geogebra responda se o raio da bicicleta tiver um comprimento de 30 m e a bola estiver fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, qual será a distância da bola em relação ao eixo vertical?



6. Se fizéssemos a tabela continuar aumentando os seus valores o que aconteceria? Quais seriam os valores de comprimento e altura dos ângulos 390° e 570° ? Explique.

30° 210°

390° altura igual a 52% do valor total e comprimento igual a 89% , ângulo equivalente a 30°

570° , altura igual a 89% e comprimento igual a 52% do valor total

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo 2 apresentou no item 5 da Atividade 3 a resposta correta, entretanto não evidenciou os cálculos realizados. Já no item 6, os alunos utilizaram as ideias de porcentual, colocando respostas modularmente corretas, mas não evidenciando que as razões correspondentes a 390° são diferentes dos valores de 570° .

Figura 58 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 3

5. Sem utilizar o geogebra responda se o raio da bicicleta tiver um comprimento de 30 m e a bola estiver fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, qual será a distância da bola em relação ao eixo vertical?

$$\begin{array}{r} 30\text{ m} = 49\% \\ \times - 100 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} X = 61,22 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 60-100 \\ X - 86 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 60-100 \\ X - 49 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} X = 29,4\text{ m} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 61,22 = 100 \\ \times - 86 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} X = 52,65 \\ \hline \end{array} \quad \text{O comprimento vale}$$

a distância do eixo vertical da
 bola até o eixo vertical seja de 29,4 m

6. Se fizéssemos a tabela continuar aumentando os seus valores o que aconteceria? Quais seriam os valores de comprimento e altura dos ângulos 390° e 570° ? Explique.

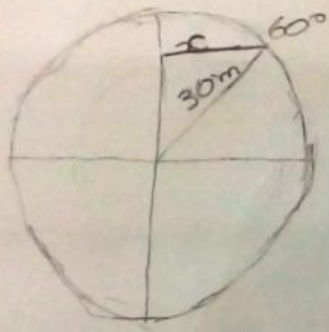
$$\begin{array}{l} \text{horizontal} = 0,88 \\ 390^\circ = \text{vertical} = 0,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{horizontal} = -0,88 \\ 570^\circ = \text{vertical} = -0,5 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo 3 assimilou o cálculo, mas o enunciado do item 5 para esse grupo também foi um obstáculo, na construção de respostas é necessário que os alunos compreendam o que se pede, assim a habilidade de interpretação desse enunciado é um subsunçor fundamental, e quando o mesmo não se encontra firmemente disponível na estrutura do aprendiz, ele deixa de aprender ideias fundamentais na construção de um novo conhecimento. Para o outro item 6, percebe-se que eles conseguiram chegar à resposta esperada de forma significativa.

Figura 59 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 4

5. Sem utilizar o geogebra responda se o raio da bicicleta tiver um comprimento de 30 m e a bola estiver fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, qual será a distância da bola em relação ao eixo vertical?



$30 - 100$
 $r \quad 50$

$r = \frac{1500}{100}$

$r = 15$

Altura igual a 15 m.

$30 - 100$
 $y \quad 83$

$y = \frac{2640}{100}$

$y = 26,4$

Comprimento vale 26,4 m

6. Se fizéssemos a tabela continuar aumentando os seus valores o que aconteceria? Quais seriam os valores de comprimento e altura dos ângulos 390° e 570° ? Explique.

$\frac{360}{30} = 12$
 $\frac{360}{210} = 1,71$
 $\frac{360}{300} = 1,2$

Se continuar aumentando ultrapassamos 360°

fazendo sempre que pode ir de perto de início de

continuando dando voltas. logo $390 - 360$ vale 30°

e $570 - 360 = 210^\circ$

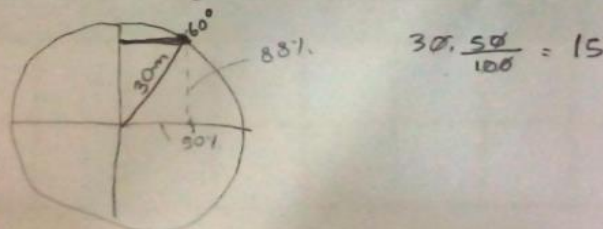
Fonte: Dados da pesquisa

Novamente o texto apresentado foi um obstáculo, os cálculos foram realizados corretamente, mas aqui eles não conseguiram perceber onde estaria a razão p/r^* para aquele ângulo, e não chegaram ao resultado esperado. Para o item 6, eles não apresentaram resultados, mas descreveram que as razões p/r para os ângulos 390° e 570° são iguais as relativas a 30° e a 210° , de modo significativo.

* Medida da projeção pela medida do raio.

Figura 60 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5

5. Sem utilizar o geogebra responda se o raio da bicicleta tiver um comprimento de 30 m e a bola estiver fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, qual será a distância da bola em relação ao eixo vertical?



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 61 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5

Diagrama de uma bicicleta representada por um círculo com um raio de 30m. Um ângulo de 60° é formado entre o raio e a horizontal. A distância da bola ao eixo vertical é indicada como 15m.

$30m \cdot \frac{50}{100} = 15m //$

A distância da bola até o eixo da vertical quando ele se faz um ângulo de 60° e o raio da bicicleta vale 30m, é 15m.

6. Se fizéssemos a tabela continuar aumentando os seus valores o que aconteceria? Quais seriam os valores de comprimento e altura dos ângulos 390° e 570° ? Explique.

$\frac{390^\circ}{-360^\circ} = \frac{30^\circ}{50^\circ} //$ $\frac{570^\circ}{-360^\circ} = \frac{210^\circ}{210^\circ} //$

Nada aconteceria, pois apenas os valores da altura mudam e os valores ficam constantes. E os valores de comprimento e altura dos ângulos 390° e 570° vão ser iguais aos valores dos ângulos de 30° e 210° respectivamente.

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo 5 apresentou as duas respostas (itens 5 e 6) de modo significativo, esses itens tiveram sentido para o grupo, pois evidenciam o valor da distância no item 5 e compreenderam como surgem os valores das razões relativas aos ângulos 30° e 210° , evidenciando conhecimento da periodicidade.

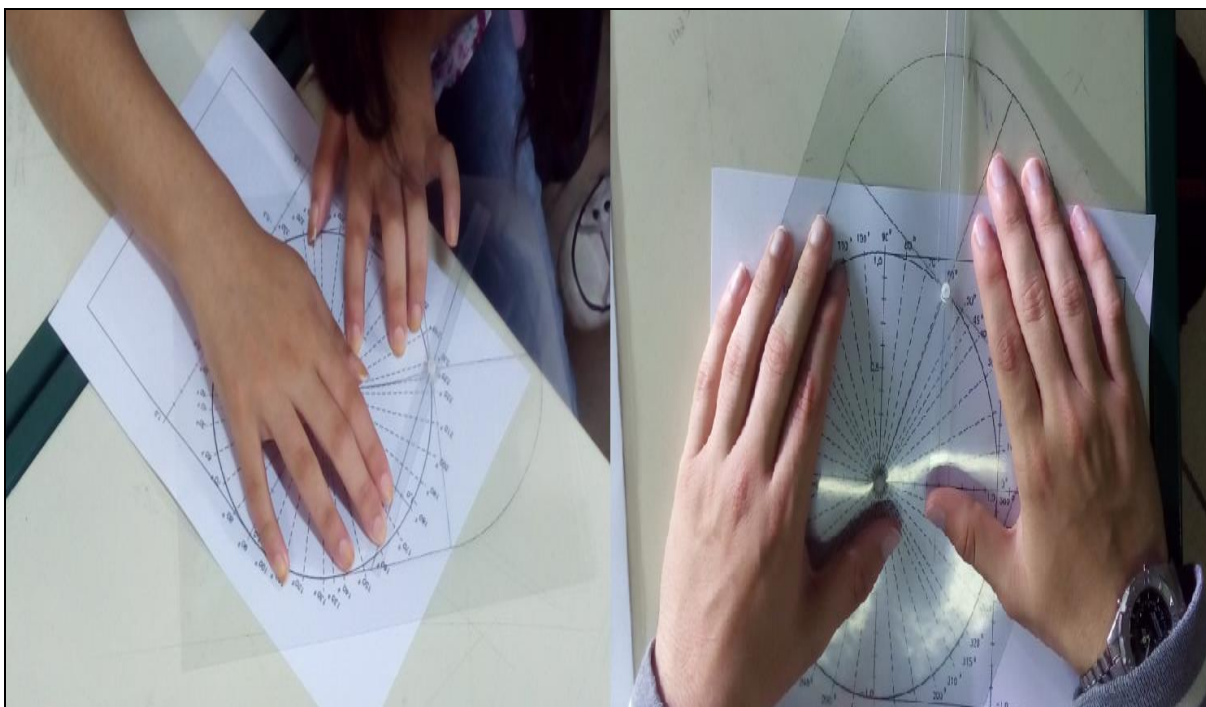
De modo geral, percebo que a interpretação do texto foi um obstáculo cognitivo para os grupos em relação ao item 5, aqui a ação do professor precisou ser mais ativa de modo a facilitar a aprendizagem dos alunos, ou seja, fazer com que os alunos compreendessem o texto.

5.7 AULA 7

Na aula 7 foi utilizado o ciclo trigonométrico (Figura 62) desenvolvido a partir do trabalho de Klein (2009), esse ciclo tinha como objetivo auxiliar a construção da tabela de seno e cosseno. Nessa aula o professor/pesquisador explica o que são esses valores e suas simetrias. Aragão (1976) indicava que o professor precisa criar estratégias para relacionar o conhecimento novo à estrutura cognitiva do aluno. A partir disso os alunos são levados a fazer o preenchimento da tabela com o uso do material. O uso do material de Klein (2009) fortificou as ideias já estabelecidas e mostrou de forma concreta o que eles já haviam construído, além disso, eles em grupo conseguiram fazer as relações entre essa tabela e a tabela do item 1 da Atividade 3. Isso foi significativo, pois eles encontraram uma relação entre o real (movimento da roda da bicicleta com ela parada) e o conhecimento matemático (ciclo trigonométrico e os valores do seno e cosseno).

Os alunos indicaram que a variação dos valores do seno e do cosseno era um modelo para as projeções vertical e horizontal da bolinha em movimento colocada no aro na roda da bicicleta, como proposto no item 1 da Atividade 3.

Figura 62 - Circulo trigonométrico da dissertação de Klein



Fonte: Autoria do pesquisador

Após o preenchimento da tabela, os alunos deveriam responder questões (itens 7 a 11) que tratavam das relações entre o seno e o cosseno, e depois definir essas funções (entender que para cada ângulo existia um número entre -1 e 1 ou iguais a eles) e construir o gráfico dessas funções, e ainda responder uma questão sobre como ficaria o gráfico, se as medidas dos ângulos fossem maiores (item 11). Vale evidenciar que a atividade poderia levar os alunos a perceberem as propriedades trigonométricas referentes a ângulos complementares e suplementares, mas em nenhum dos resultados analisados vimos essa informação evidenciada. Percebi que poderia ter sido previsto para esse momento o trabalho de apresentar uma relação como:

$$\text{sen}(\alpha) = \text{cos}(90^\circ - \alpha) \text{ Para } 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

Seguem as respostas dos grupos:

Figura 63 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 1

7. Ao trabalhar no círculo trigonométrico conseguimos trabalhar algumas simetrias, pensando no eixo horizontal temos o cosseno e em relação ao eixo vertical temos o seno. Assim complete a tabela a seguir. (Utilize o transformador para ângulos)

Ângulo (graus)	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
Seno	0,26	0,49	0,71	0,87	0,96	1	0,96	0,87	0,71	0,52	0,26	0
Cosseno	0,96	0,87	0,71	0,52	0,26	0	-0,26	-0,52	-0,71	-0,87	-0,96	-1

Ângulo (graus)	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360 ou 0
Seno	-0,26	-0,50	-0,71	-0,87	-0,96	-1	-0,96	-0,87	-0,52	-0,26	-0,26	0
Cosseno	-0,96	-0,87	-0,71	-0,52	-0,26	0	0,26	0,52	0,71	0,87	0,96	1

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo construiu a tabela com valores com aproximação, e trocou o valor do cosseno pelo do seno no caso do ângulo de 60° .

Figura 64 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 1

8. Existe alguma semelhança entre os ângulos? Explique.

As semelhanças é que os valores de seno e cosseno se repetem

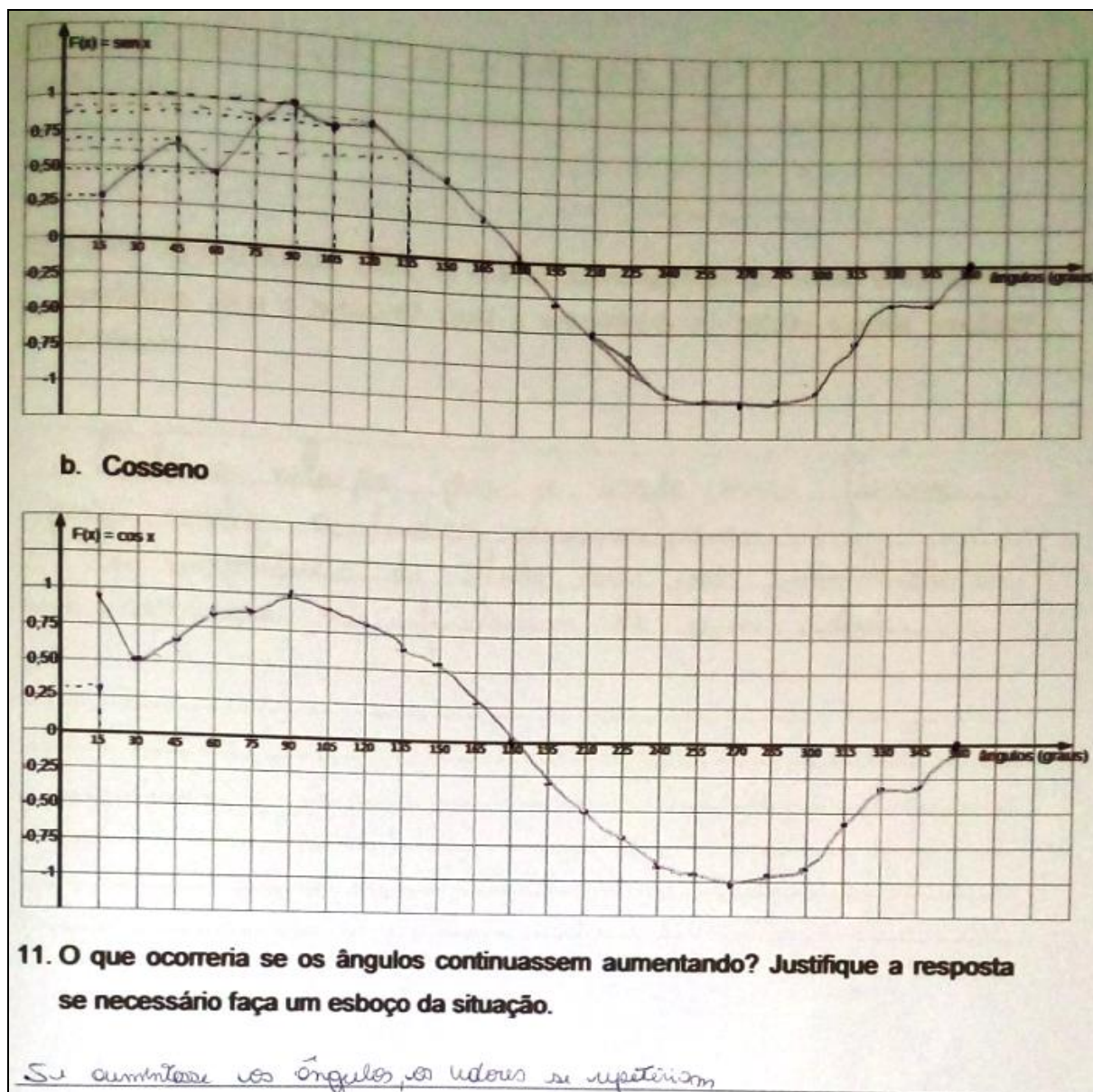
9. Existe alguma relação entre as funções seno e cosseno? Explique.

A relação é que os números são iguais sendo alguns positivos e outros negativos em alguns casos

Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos perceberam que existem relações entre os senos e cossenos dos ângulos, mas suas justificativas não foram suficientes para evidenciar que eles entenderam as propriedades trigonométricas referentes a ângulos complementares.

Figura 65 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se que o erro cometido na tabela influenciou na construção do gráfico, mas isso não foi um obstáculo para eles entenderem que, o gráfico tem um comportamento cíclico/periódico.

Figura 66 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 2

7. Ao trabalhar no círculo trigonométrico conseguimos trabalhar algumas simetrias, pensando no eixo horizontal temos o cosseno e em relação ao eixo vertical temos o seno. Assim complete a tabela a seguir. (Utilize o transformador para ângulos)

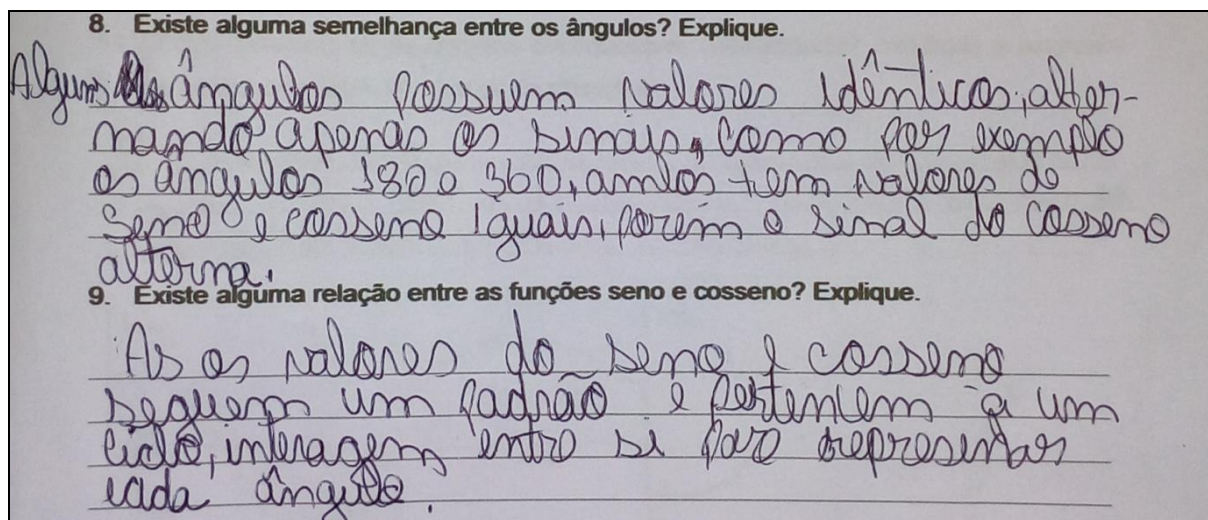
Ângulo (graus)	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
Seno	0,26	0,47	0,71	0,89	0,97	1,00	0,97	0,89	0,71	0,47	0,26	0
Cosseno	0,96	0,88	0,71	0,50	0,22	0	-0,22	-0,50	-0,71	-0,88	-0,96	-1,00

Ângulo (graus)	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360 ou 0
Seno	-0,26	-0,47	-0,71	-0,89	-0,97	-1,00	-0,97	-0,89	-0,71	-0,47	-0,26	0
Cosseno	-0,96	-0,88	-0,71	-0,50	-0,22	0	+0,22	+0,50	+0,71	+0,88	+0,96	+1,00

Fonte: Dados da pesquisa

Para esse grupo não existiu dificuldade no preenchimento da tabela, foi comum o grupo fazer referência à tabela construída no item 6, uma indicação do entendimento do que estava sendo proposto. Percebe-se uma subsunção correlativa, quando a nova ideia é uma extensão, elaboração, modificação ou qualificação de conceitos anteriormente aprendidos.

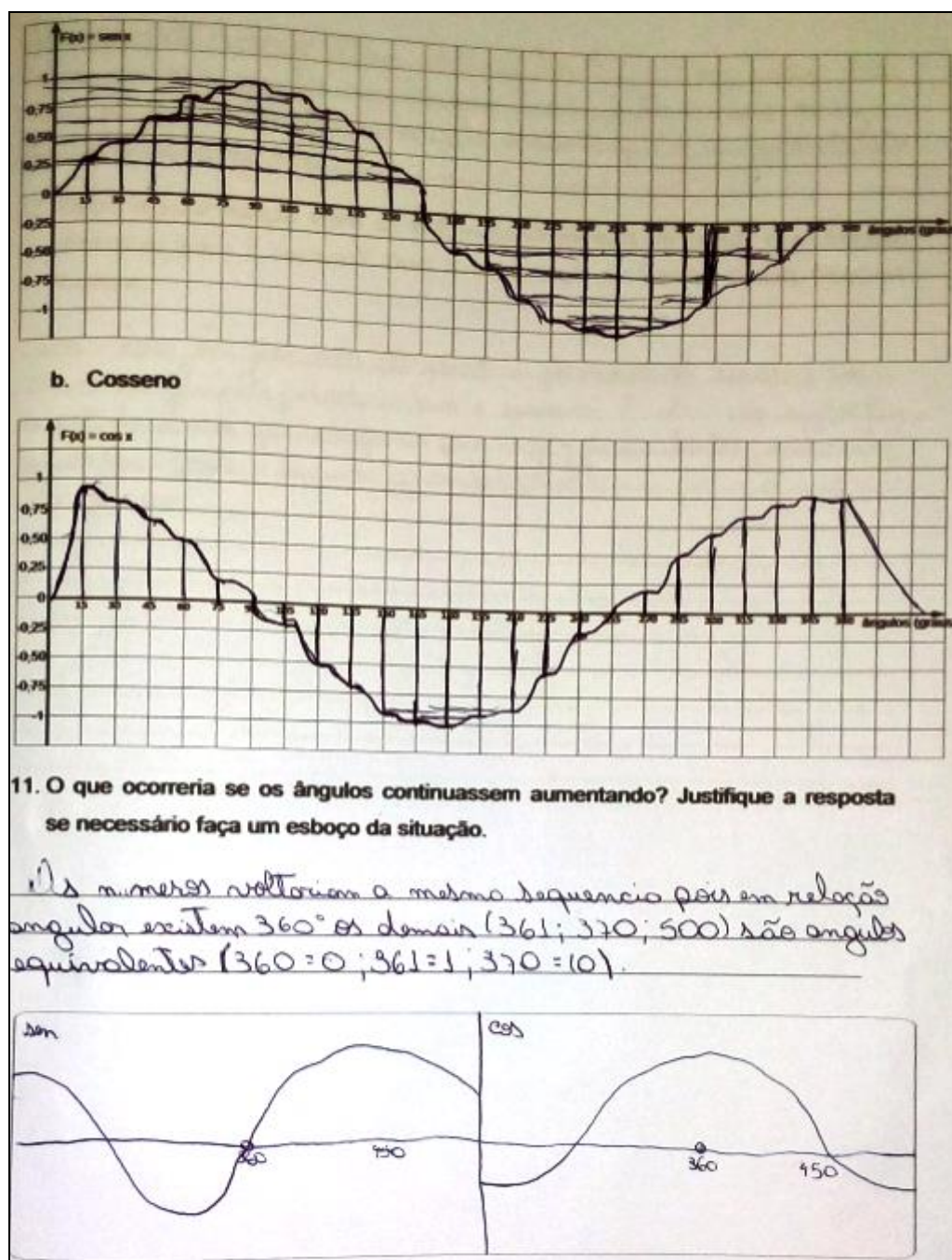
Figura 67 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa

Aqui os participantes do grupo 2 demonstram ter o entendimento de propriedades trigonométricas quando destacam no item 8 os cálculos de seno e cosseno de 180° e 360° , indicando que “os ângulos 180° e 360° , tem valores de seno e cosseno iguais, porém o sinal do cosseno se alterna”.

Figura 68 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa

Eles compreenderam que o gráfico da função tem movimento periódico, evidenciando que os valores do seno e do cosseno dos ângulos 360° , 361° e 370° são iguais aos dos ângulos 0° , 1° e 10° , respectivamente. A construção do gráfico pelos alunos ajudou parcialmente a compreensão. Vale lembrar que eles evidenciaram a igualdade do seno e do cosseno dos ângulos 360° e 0° , sem representa-los dessa forma. Uma justificativa para esse erro é que na tabela os

valores 0° e 360° aparecem na mesma célula, também vale ressaltar que eles deixam de indicar x e y nos eixos do plano cartesiano, uma prática comum vista em meus anos como professor.

Figura 69 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 3

7. Ao trabalhar no círculo trigonométrico conseguimos trabalhar algumas simetrias, pensando no eixo horizontal temos o cosseno e em relação ao eixo vertical temos o seno. Assim complete a tabela a seguir. (Utilize o transformador para ângulos)

Ângulo (graus)	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
Seno	0,26	0,50	0,71	0,88	0,98	1	0,98	0,88	0,71	0,50	0,26	0
Cosseno	0,96	0,87	0,71	0,5	0,26	0	-0,26	-0,5	-0,71	-0,87	-0,96	-1

Ângulo (graus)	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360 ou 0
Seno	-0,26	-0,50	-0,71	-0,88	-0,98	-1	-0,98	-0,88	-0,71	-0,50	-0,26	0
Cosseno	0,96	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0	0,26	0,5	0,71	0,87	0,96	1

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 70 - Protocolo da atividade 3: Grupo 3

8. Existe alguma semelhança entre os ângulos? Explique.

Sim, os ângulos estão relacionados entre si, por exemplo o ângulo de 15° apresenta os mesmos valores de $\sin$ e $\cos$ do ângulo de 165° , a diferença seria dada pela posição do ângulo, ou seja, o sinal de positivo ou negativo depende do quadrante que os ângulos se encontram.

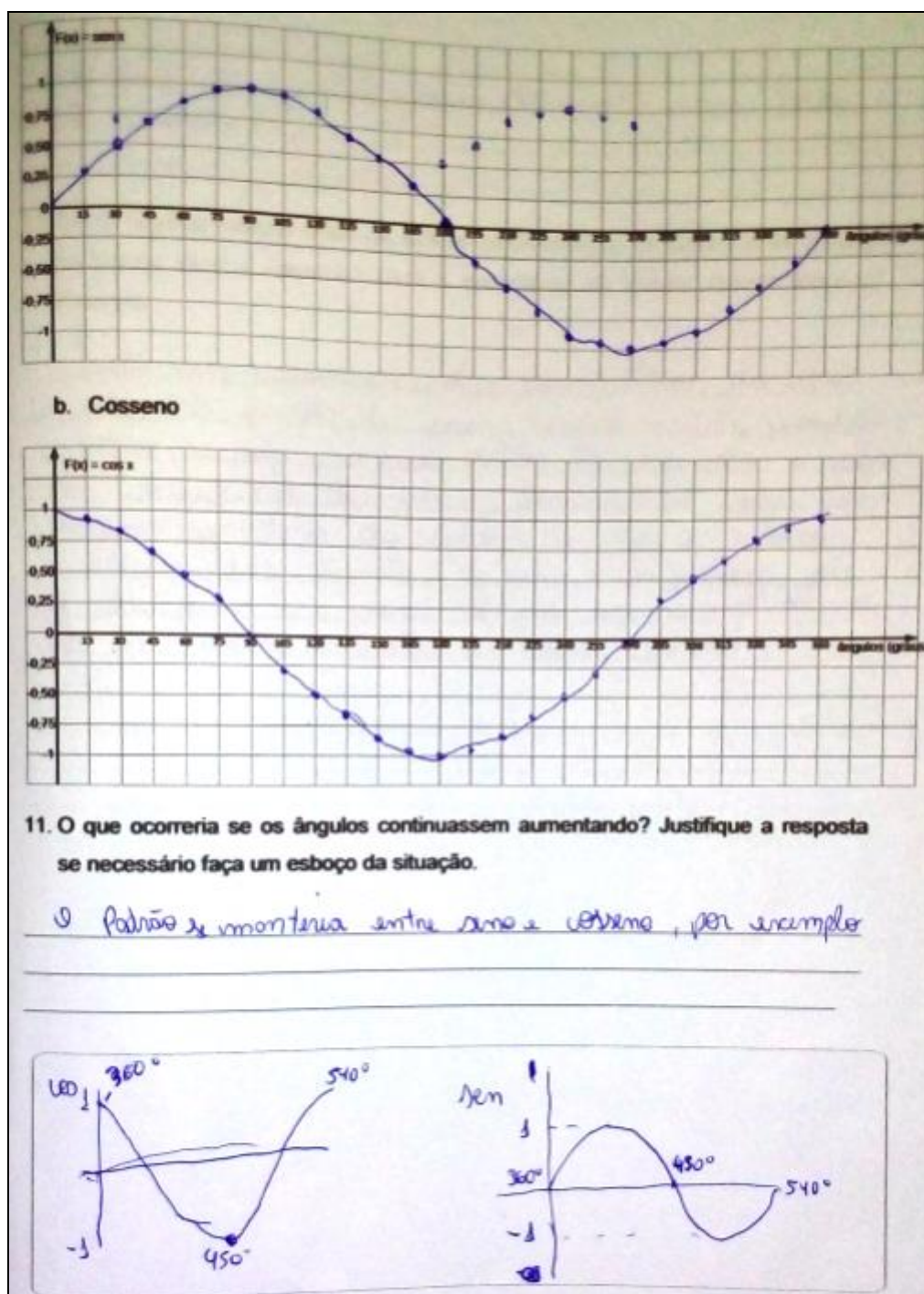
9. Existe alguma relação entre as funções seno e cosseno? Explique.

Após observar os ângulos nota-se que seno e cosseno se encontram em um ciclo ~~de~~ além de que quando o valor do seno está crescendo, o do cosseno diminui, o contrário também é verdadeiro.

Fonte: Dados da pesquisa

A frase que eles usaram “quando o seno cresce o cosseno diminui”, pode nos levar a entender que eles compreendem as propriedades trigonométricas de ângulos suplementares e complementares. No item 8, esses alunos deixam de colocar $\sin(x)$ e $\cos(x)$ em suas argumentações. Em minha prática docente percebo que os alunos, em geral, deixam de utilizar os registros dos objetos matemáticos de forma adequada.

Figura 71 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 3



Fonte: Dados da pesquisa

Novamente eles perceberam o comportamento das funções trigonométricas seno e cosseno, e os esboços dos gráficos dessas funções confirmam que eles compreenderam a propriedade cíclica.

Figura 72 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 4

7. Ao trabalhar no círculo trigonométrico conseguimos trabalhar algumas simetrias, pensando no eixo horizontal temos o cosseno e em relação ao eixo vertical temos o seno. Assim complete a tabela a seguir: (Utilize o transformador para ângulos)

Ângulo (graus)	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
Seno	0,26	0,5	0,71	0,9	0,99	1	0,98	0,5	0,73	0,9	0,99	-1
Cosseno	0,96	0,89	0,71	0,3	0,25	0	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	0

Ângulo (graus)	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360 ou 0
Seno	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	0
Cosseno	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	1

Obs: Os valores de seno e cosseno estão invertidos, porém os sinais estão certos.

Fonte: Dados da pesquisa

Na construção da tabela eles trocaram os valores de seno pelo do cosseno para os ângulos, cujas medidas estão entre 105° e 180° , mas tiveram percepção dos sinais dos valores senos e cossenos nesse quadrante, ainda assim, perceberam esse erro da troca e fizeram uma ressalva no item.

Figura 73 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 4

8. Existe alguma semelhança entre os ângulos? Explique.

Todos os quadrantes os ângulos se repetem, contudo com sinais diferentes. Exemplo: 15° e 195° (-180° que refere-se a meio esfera), fica 15° só que no terceiro quadrante.

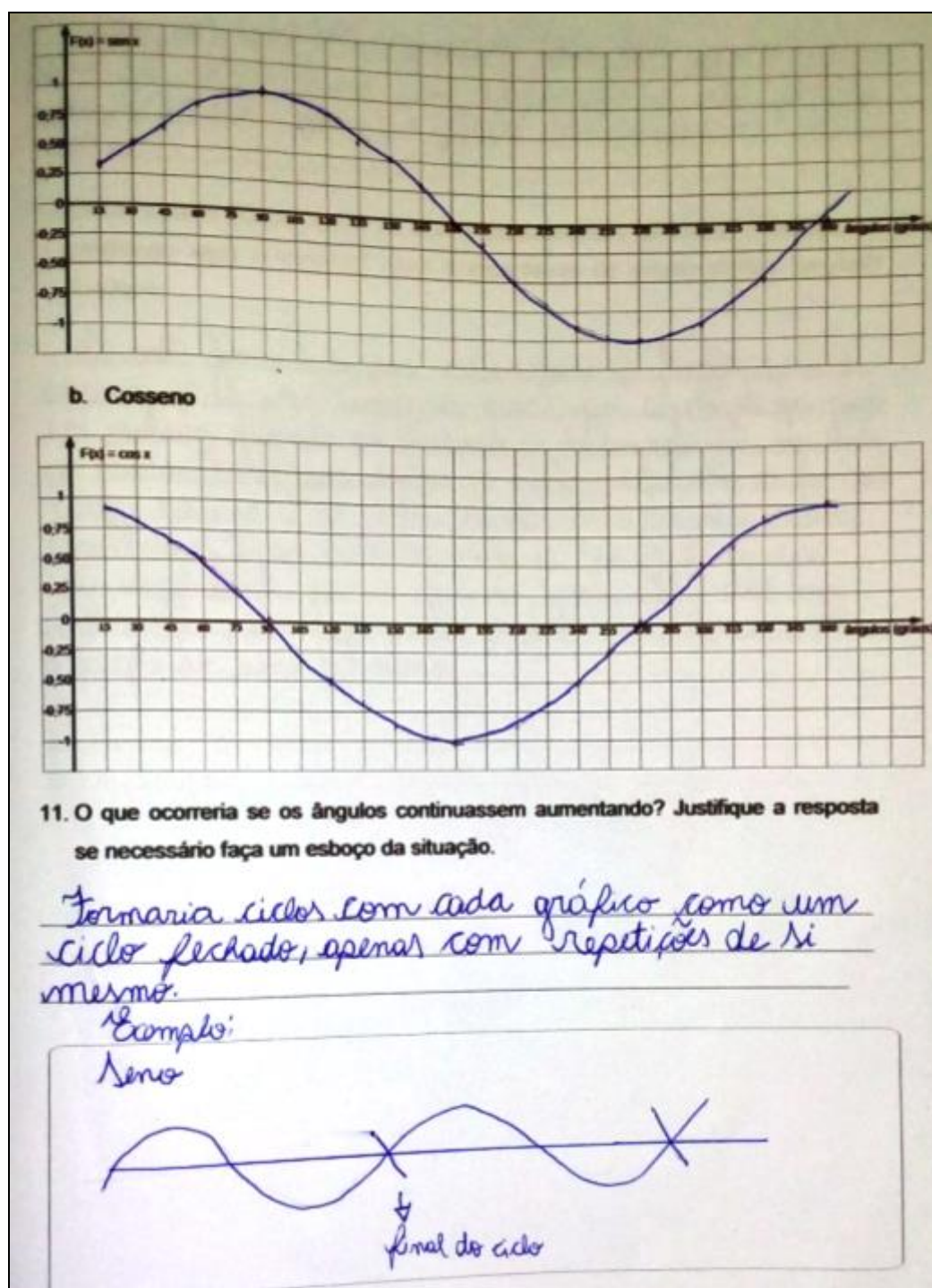
9. Existe alguma relação entre as funções seno e cosseno? Explique.

Quando o seno está ascendendo o cosseno está em regressão, ou seja, eles decompõem-se. Por exemplo, quando seno começa no zero ele vai até 1, no mesmo momento o cosseno vai de 1 ao zero.

Fonte: Dados da pesquisa

A exemplificação do grupo referente à variação do seno ser (projeção) de 0 ao 1 para os ângulos os quais o cosseno varia de 1 ao 0 é um entendimento da relação $[\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)]$ Para $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, claro que evidenciada apenas pela descrição escrita do movimento.

Figura 74 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 4



Fonte: Dados da pesquisa

Na representação gráfica eles descrevem o final de cada ciclo ou o período das funções trigonométricas representadas e respondem significativamente que os valores dessas funções têm repetições, isso se deve ao fato de serem funções periódicas.

Figura 75 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5

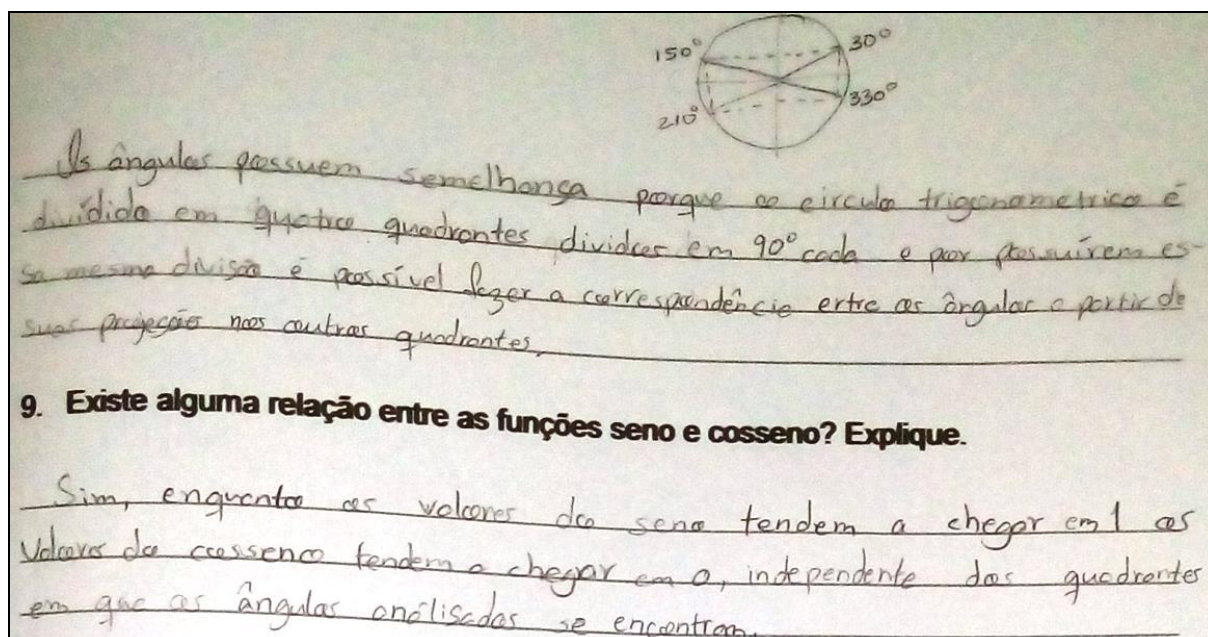
7. Ao trabalhar no círculo trigonométrico conseguimos trabalhar algumas simetrias, pensando no eixo horizontal temos o cosseno e em relação ao eixo vertical temos o seno. Assim complete a tabela a seguir. (Utilize o transformador para ângulos)

Ângulo (graus)	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
Seno	0,26	0,5	0,7	0,88	0,92	1	0,96	0,88	0,7	0,5	0,26	0
Cosseno	0,96	0,88	0,7	0,5	0,44	0	0,26	-0,5	-0,7	-0,88	-0,96	-1

Ângulo (graus)	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360 ou 0
Seno	-0,26	-0,5	-0,7	-0,88	-0,92	-1	-0,96	-0,88	-0,7	-0,5	-0,26	0
Cosseno	-0,96	-0,88	-0,7	-0,5	-0,44	0	0,26	0,5	0,7	0,88	0,96	1

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 76 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5



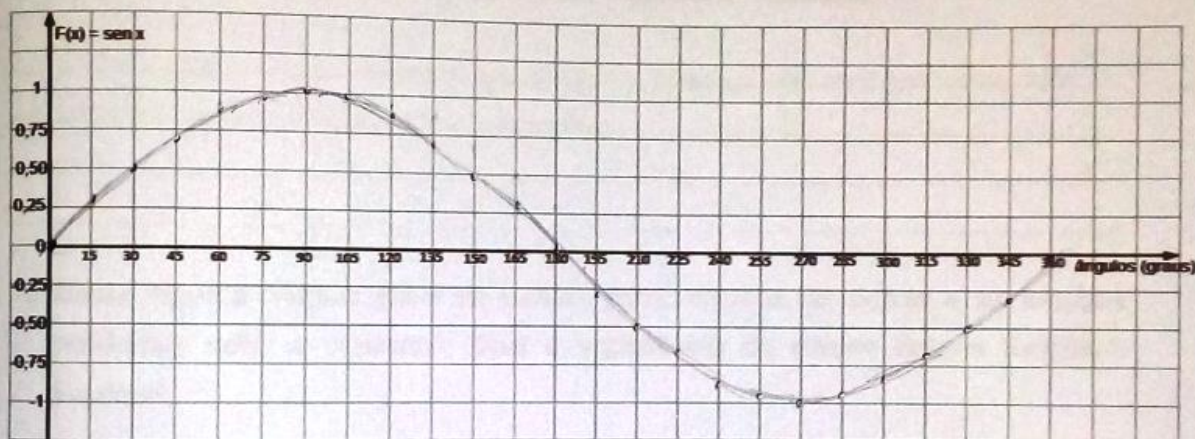
Fonte: Dados da pesquisa

Eles evidenciaram a igualdade das razões pela construção do desenho, indicando que cada quadrante tem seu “sinal”, enfatizaram que nos quadrantes essas razões têm valores iguais e finalmente que, “entre 0° e 90° o seno tende a chegar ao 1 e o cosseno a chegar a 0”. Um entendimento da relação trigonométrica relativa aos ângulos complementares.

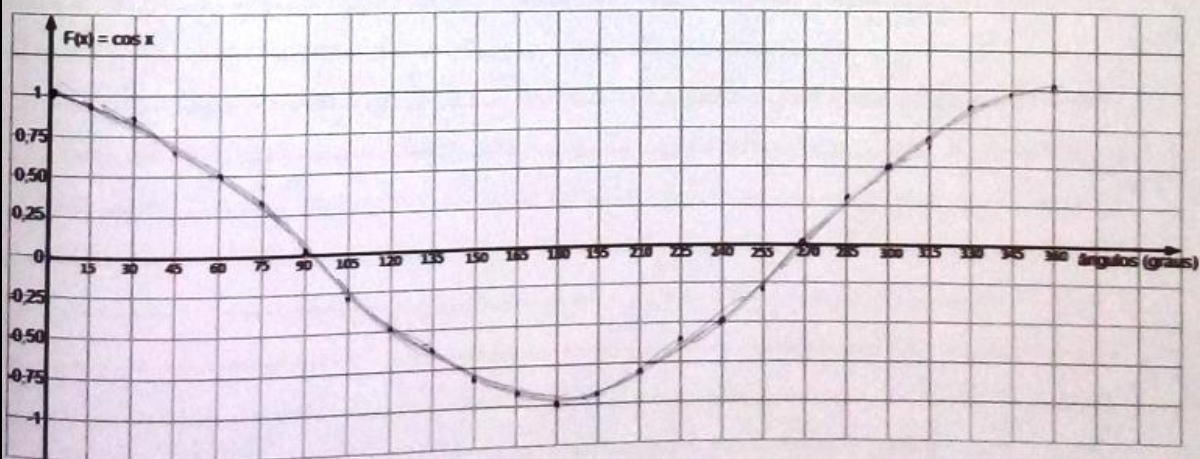
Figura 77 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5

10. Com auxílio da tabela construída no exercício 3. Construa os gráficos das funções:

a. seno

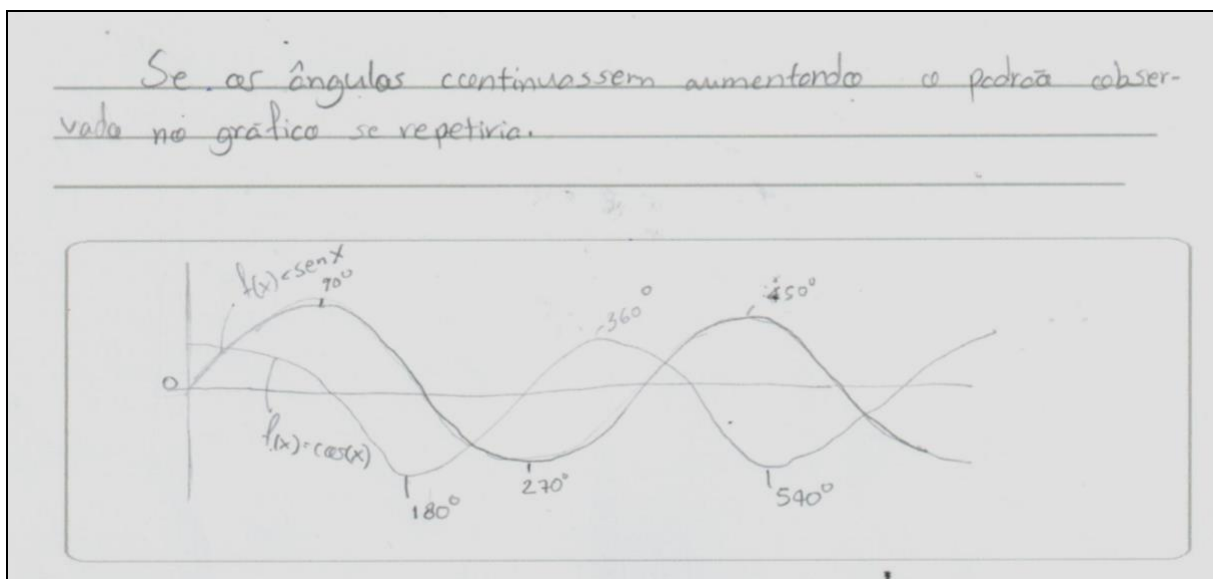


b. Cosseno



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 78 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5



Fonte: Dados da pesquisa

Ficou evidenciado o entendimento do grupo na construção do gráfico das funções, percebendo seu comportamento periódico ou cíclico.

De modo geral, a atividade foi significativa para os alunos, pois eles conseguiram fazer relações com o movimento da roda da bicicleta e interpretaram as relações entre as funções trigonométricas seno e cosseno, ficando necessária uma relação algébrica¹⁸, que para esse momento não havia sido prevista, assim a atividade propiciou não só uma construção concreta com o uso do material, mas uma construção do conceito abstrato, pois eles conseguiram ir além do exposto no material e claramente a atividade propiciou uma subsunção correlativa. Além de eles indicarem as funções seno e cosseno respectivamente como $f(x) = \sin(x)$ e $f(x) = \cos(x)$, mas não colocaram o x e y nos eixos.

5.8 AULA 8

A aula é iniciada com a apresentação do *software* GeoGebra, novamente a apresentação foi feita pelo professor/pesquisador (Figura 79), pois a escola estava com a sala de computação interditada. Dessa forma, o professor apresentou aos alunos os gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno, a partir do movimento de um ponto no ciclo trigonométrico. Pretendia-se fazer os alunos

¹⁸ Relação apresentada na página 112.

reforçarem as noções elaboradas nos itens anteriores. Durante a apresentação do *software* foi possível perceber um grande envolvimento dos alunos, a tecnologia propiciou essa implicação. Enquanto a apresentação ocorria, os alunos destacavam que tinham feito gráficos que se assemelhavam ao desenvolvido pelo programa.

Figura 79 – Atividade apresentada aos alunos pelo professor



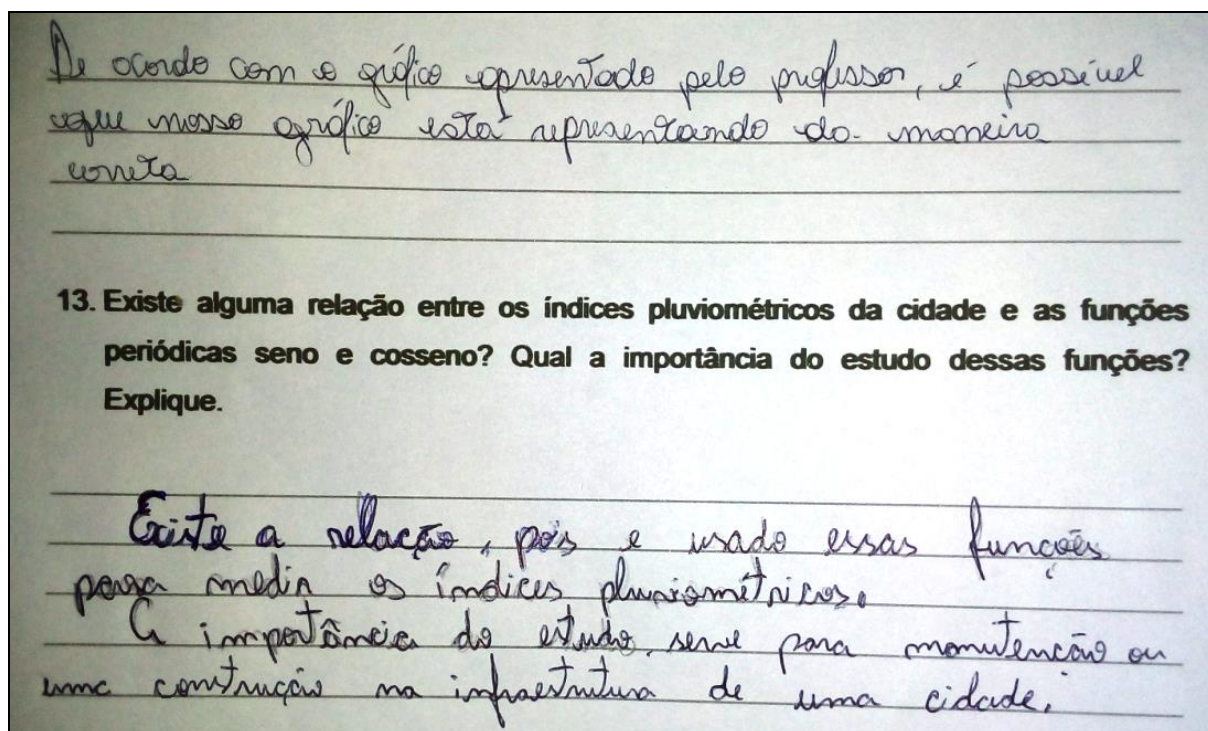
Fonte: Autoria do pesquisador

Nessa aula, também foi levantada uma questão que buscava relacionar o índice pluviométrico trabalhado em uma das atividades (Atividade 2) com as propriedades das funções trigonométricas seno e cosseno, construídas nas atividades que se valeram do movimento de uma bola presa no aro de uma roda de bicicleta (Atividade 3, item 1) e o ciclo trigonométrico. O objetivo era observar se eles conseguiam perceber que, tanto o índice pluviométrico quanto o movimento da bola presa no aro da roda da bicicleta (projeções vertical e horizontal) e as funções trigonométrica têm ciclos e se repetem, sendo possível uma representação matemática desses fenômenos (um modelo).

Buscou-se com a questão, que eles expusessem as ideias abstratas desse conhecimento e assim analisar se o aprendizado foi além do esperado, se tornando um novo subsunçor na estrutura cognitiva dos alunos.

Seguem as respostas dos grupos:

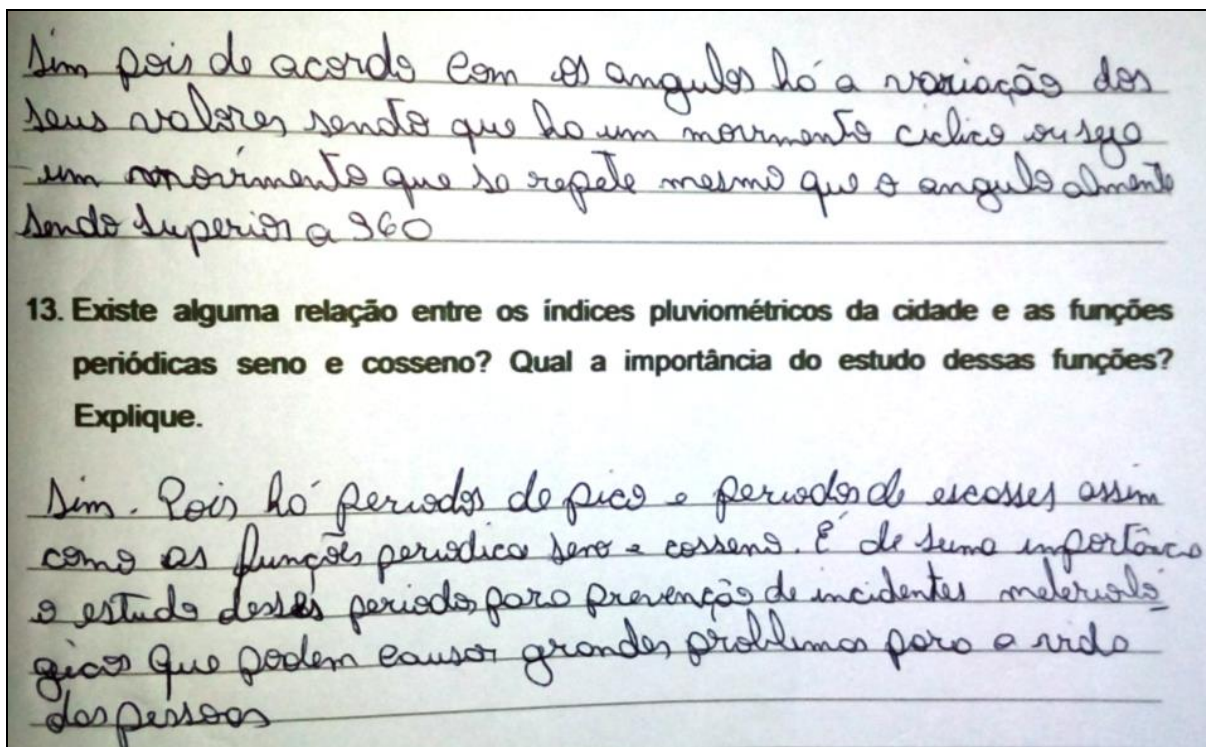
Figura 80 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa

O grupo apresentou entendimento sobre os ciclos do índice pluviométrico, e afirmou que é possível criar estratégias de prevenção, mas pensou que as funções seno e cosseno podiam representar esses índices, o que é esperado, pois se tratam de funções periódicas. Não discuti com eles que na realidade o índice de chuvas é representado por uma função periódica, mas não as funções utilizadas nessa pesquisa. Aragão (1976, p. 40) descrevia que, durante a fase da aprendizagem, significados vagos, difusos, ambíguos ou errôneos podem emergir, isso se dá principalmente quando o aluno não tem autocrítica suficiente para indicar respostas precisas.

Figura 81 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa

É importante perceber que os alunos conseguiram relacionar os movimentos, destacando que eles são cíclicos, e saber isso dá subsídios para fazer intervenções. Eles não cometeram erros ao relacionarem o índice pluviométrico com as funções seno e cosseno, compreendendo que as funções trigonométricas estudadas não são modelos do índice de chuvas, reconheceram que os conhecimentos de funções trigonométricas se relacionam com o contexto real, e identificaram que elas não são iguais aos índices, o grupo demonstrou atingir os objetivos propostos para essa sequência.

Figura 82 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 3

12. Utilizando o geogebra responda se os seus gráficos do exercício anterior estão conseguindo representar as funções seno e cosseno. Justifique.

Sim, os gráficos seguem o mesmo modelo dos

13. Existe alguma relação entre os índices pluviométricos da cidade e as funções periódicas seno e cosseno? Qual a importância do estudo dessas funções? Explique.

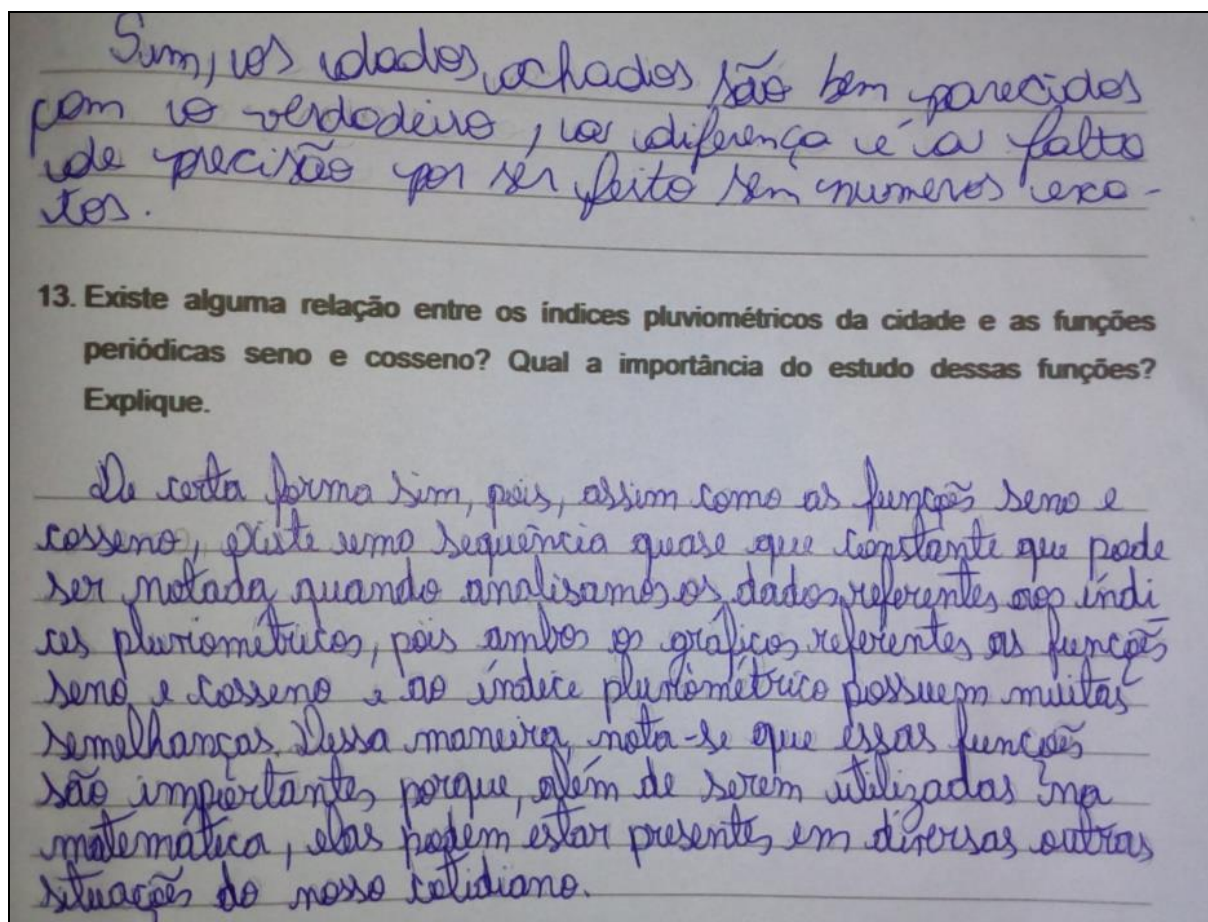
Junto aos ~~índices~~ índices pluviométricos da cidade quanto as funções de seno e cosseno existe um ciclo repetitivo, ou seja, há um padrão. Por exemplo: o gráfico da representação dos índices pluviométricos segue um mesmo modelo do gráfico de seno e cosseno.

Estudar estas funções é de suma importância pois as utilizamos em nosso cotidiano ~~sem~~ automaticamente seja na música de esportes ou outras situações.

Fonte: Dados da pesquisa

Eles citam que os gráficos descreveram um “padrão”, percebendo que esses gráficos apresentam mesmas características (períodos), aqui eles colocaram que o índice pluviométrico tem o “mesmo modelo das funções seno e cosseno”, isso não evidência um erro, pois a palavra modelo aqui é usada como uma substituição da palavra padrão. Na resposta deles é possível perceber que eles não veem as funções seno e cosseno como iguais a função que poderia representar o índice de chuvas. Finalmente eles destacaram que esses tipos de funções aparecem em seu cotidiano, isso se deu graças ao processo de modelagem, tanto do pêndulo como do movimento da bola no aro da roda da bicicleta, pois ele forneceu aos alunos condições de relacionar o conteúdo com fatos reais, gerando assim um aprendizado com significado.

Figura 83 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 4



Fonte: Autoria do pesquisador

Em relação ao item 12 é importante evidenciar que os alunos perceberam que fizeram um gráfico parecido, mas o aplicativo conseguiu fazer com maior eficiência, por ter maior precisão dos valores.

Na segunda resposta os estudantes destacaram que os gráficos das funções seno e cosseno e dos índices são cíclicos, e constatando que a variação dos índices pluviométricos e das funções não são iguais, mas que se comportam de forma semelhante, e novamente destacam que esse tipo de função aparece em situações reais.

Figura 84 - Protocolo da Atividade 3: Grupo 5

12. Utilizando o geogebra responda se os seus gráficos do exercício anterior estão conseguindo representar as funções seno e cosseno. Justifique.

Sim, pois as nossas gráficas seguem a mesma modelo da gráfica apresentada no geogebra.

13. Existe alguma relação entre os índices pluviométricos da cidade e as funções periódicas seno e cosseno? Qual a importância do estudo dessas funções? Explique.

Sim, porque assim como as funções periódicas seno e cosseno os índices pluviométricos da cidade obedecem um ciclo periódico com pontos máximos e mínimos.

É importante estudar essas funções porque elas servem como base para o estudo de coisas no cotidiano em que se observa a repetição de ciclos.

Fonte: Dados da pesquisa

Observa-se que eles compreenderam que os índices pluviométricos e as funções trigonométricas seno e cosseno assumem valores diferentes e que elas não têm a mesma representação gráfica. Porém os alunos mencionaram que se trata de situações periódicas, apresentando pontos máximos e mínimos, e identificam que essas funções (seno e cosseno) são base para o estudo de movimentos do cotidiano que têm repetições.

A partir do desenvolvido pelos grupos na aula 8, foi possível observar que eles construíram significativamente os conceitos propostos e souberam relacionar as situações do cotidiano deles e as atividades propostas.

A sequência propiciou a geração de novos subsunçores significativos na estrutura cognitiva dos alunos, ou seja, eles conseguiram estabelecer uma relação entre os fenômenos periódicos e as funções trigonométricas.

CONCLUSÕES

Nesta dissertação foi desenvolvida uma sequência, cujo objetivo foi levar os alunos relacionarem noções prévias sobre movimentos periódicos, de modo que elas ancorassem os conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno.

Inicialmente foram apresentados nessa pesquisa os aportes teóricos da modelagem matemática (Capítulo II) e da teoria da aprendizagem significativa (Capítulo III), incluindo as concepções sobre modelagem de (Bassanezi (1990 e 2015), Beltrão (2009), Barbosa (2009 e 2011) e Biembengut (1990, 2007 e 2009). Inclui também constructos teóricos sobre a TAS Ausubel (1963 e 1980) e considerações sobre essa teoria de Aragão (1976) e Moreira(1993, 1999, 2010, 2012 e 2014).

Nos outros dois Capítulos (IV e V) estão a sequência didática, o esperado de cada atividade e como foi ancorada a sequência na TAS e na modelagem. Finalmente, no Capítulo V são evidenciadas as respostas dos alunos e como essas se articulam com os referenciais utilizados.

Com a sequência didática busquei atender o objetivo da pesquisa, ou seja, fazer com que os alunos relacionassem movimentos periódicos conhecidos por eles, aos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno, com vistas a nortear o desenvolvimento da sequência a pressupostos da teoria da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 1963) e utilizando como estratégia de ensino a modelagem matemática.

No desenvolvimento dessa sequência foi possível perceber que a teoria e a estratégia de ensino se complementavam, pois para a teoria da aprendizagem significativa o novo conhecimento é desenvolvido a partir de conhecimentos já estabelecidos na estrutura cognitiva no aprendiz, enquanto que a modelagem apoia a construção do conhecimento a partir de fenômenos naturais de interesse e/ou conhecidos pelos alunos.

Tanto na estratégia de ensino quanto na teoria, para o aluno aprender algo novo deve ter conhecimentos relevantes que o sustente. Além disso, para a teoria

da aprendizagem significativa, o aluno só aprende quando se dispõe a essa aprendizagem, buscando entender o novo conhecimento e o adquirir. A estratégia de ensino descreve que no processo da modelagem, devemos trabalhar fenômenos de interesse do aluno, para que o mesmo se disponha ao aprendizado.

Desse modo, um ensino desenvolvido com a modelagem e referenciado na teoria da aprendizagem significativa, como é o caso, potencializa o aprendizado de um novo conhecimento por parte dos alunos, como evidenciam algumas pesquisas (SANTOS (2014), BELTRÃO (2009) e BURAK (1992)).

O trabalho desenvolvido com o grupo pesquisado indicou que a teoria e a estratégia de ensino foram eficazes, pois, os alunos conseguiram construir o conhecimento proposto às funções periódicas de modo significativo, com o auxílio das atividades propostas na sequência didática, estabelecendo relações do novo conhecimento com ideias que eles já tinham.

A pesquisa procurou estabelecer as estratégias para o ensino das funções, na relação entre o movimento da bola presa no aro da roda da bicicleta (projeções vertical e horizontal) e o ciclo trigonométrico. Os alunos fizeram, com o auxílio da sequência de ensino uma reconciliação integrativa, modificando uma ideia já estabelecida e vendo que ela é muito mais abrangente. A sequência fez com que eles fossem elaborando o conceito das funções trigonométricas seno e cosseno, desse modo, fazendo uma diferenciação progressiva, pois se percebe que os alunos foram aprimorando os conceitos de periodicidade, conseguindo diferenciar as ideias preexistentes desse tipo de movimento e as assimilando como uma representação das funções trigonométricas.

No desenvolvimento das atividades foram admitidos os conhecimentos dos alunos sobre os índices pluviométricos e alguns movimentos naturais (pêndulo simples e movimento da bola presa no aro da roda da bicicleta) de modo que eles ancorassem a aprendizagem, eles tinham os conhecimentos prévios que sustentariam a aprendizagem, e para os casos em que esses conhecimentos não estivessem bem estabelecidos na estrutura cognitiva, foram utilizadas no trabalho situações concretas (experimento e simulações com auxílio do *software* GeoGebra), para consolidar esses conhecimentos.

Ao decorrer da sequência aconteceram algumas situações não esperadas, falta de computador para os grupos e duas atividades com problemas de digitação.

O professor/pesquisador não se preocupou em realizar os acertos durante a atividade, pois estava ancorado na perspectiva da aprendizagem receptiva significativa, na qual para Ausubel (1963) é eficiente como a aprendizagem por descoberta.

O principal objetivo dessa dissertação é responder duas questões que a nortearam: (a) A modelagem na sala de aula, nas condições da escola pública de hoje, pode levar o aluno a ser protagonista do seu aprendizado acarretando uma aprendizagem significativa? (b) As estratégias de ensino norteadas pela modelagem e referenciadas pela teoria da aprendizagem significativa potencializam o aprendizado dos alunos relativo às funções trigonométricas seno e cosseno?

Ao iniciar essa pesquisa percebia, a partir da minha experiência como professor do ensino médio, que o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno não eram assimilados pelos alunos, pois eles ao serem avaliados, não mostravam entendimento em questões que trabalhavam ideias de período, ciclo, movimentos periódicos e suas possíveis representações. Isso me fez desenvolver essa pesquisa elaborando e aplicando uma nova estratégia de ensino. Obtive como resultado que a modelagem proporcionou aos alunos um favorecimento no aprendizado.

Para subsidiar a modelagem como estratégia de ensino, decido utilizar também uma teoria de aprendizagem, pois ela poderia garantir que a construção do conhecimento por parte dos alunos seria significativa e também poderia me auxiliar a verificar se os alunos conseguiram consolidar os conceitos estudados. Na modelagem, uma das dificuldades apontada era a adequação da atividade ao currículo escolar, assim as leituras de Beltrão (2009) e Barbosa (2011) foram eixos para a situação modelada, pois eles apresentavam como possibilidade, o uso da modelagem, sendo o professor o responsável pela elaboração do fenômeno e atividades que gerassem o modelo.

Tinha por objetivo fazer com que os alunos modelassem fenômenos da sua realidade, foi utilizado como ancoragem o índice pluviométrico de um município,

para que eles utilizassem esse fenômeno e se apropriassem dos conceitos de funções trigonométricas. Essa situação resultou que eles percebessem e entendessem os fenômenos cíclico e/ou periódicos, e concluíssem que a matemática tem potencialidade para expressar fatos da vida cotidiana. Ainda nesse processo, a modelagem na situação estudada permitiu que os mesmos questionassem situações políticas (perceber que a prefeitura pode agir para minimizar os problemas da população em catástrofes envolvendo a chuva).

Bassanezi (2015) já indicava que muito mais que um modelo matemático, a modelagem leva o aluno a questionar problemas da humanidade e isso os tornam mais reflexivos sobre as situações reais.

A apresentação de um experimento foi algo motivador para os alunos, na escola as aulas de Física são teóricas e eles não tinham contato com esse tipo de estratégia. Assim, eles não tinham na escola, contato com situações reais. O objetivo foi que eles observassem o movimento oscilatório de um pêndulo e associassem a uma representação gráfica, e a partir dessa construção gráfica, percebessem períodos do movimento do pêndulo.

Finalmente foi apresentado o movimento da bola presa no aro da roda da bicicleta com ela parada (projeções vertical e horizontal), claramente algo já vivenciado por eles e com esse movimento os alunos construíram uma tabela que foi relacionada aos valores das funções trigonométricas seno e cosseno.

O trabalho utilizou a modelagem em todas as aplicações, primeiro o movimento do pêndulo simples, a ideia do movimento e sua representação com auxílio *software* Excel, posteriormente o modelo dos índices pluviométricos, que garantia o entendimento de ideias referentes a ciclos e períodos, e como esse conceito se apresenta na realidade dos alunos, por fim, o movimento da bola presa no aro da roda da bicicleta (projeções) que propiciou o estudo das funções seno e cosseno.

Assim nessas atividades a modelagem possibilitou que se explorasse estratégias de ensino, com o uso da tecnologia (GeoGebra e Excel), experimento físico (pêndulo simples), situações políticas e naturais (índice pluviométrico) e finalmente situações comuns (bola presa no aro da roda da bicicleta). Foi perceptível

a construção do conhecimento por parte dos alunos, pois eles nas respostas apareceram várias ideias significativas, perceber a relação entre o real e o conhecimento escolar, ideias de estatística e resoluções não matemáticas, muitas vezes essas ideias não eram esperadas pelo professor.

Esses alunos comprovaram que uma situação de modelagem propicia um aprendizado com significado e principalmente reflexivo, incluindo até situações de sua vida, como é o caso das chuvas. Também se percebe que essa estratégia de ensino foi eficaz para o ensino das funções trigonométricas, e os alunos dispostos em grupos participaram efetivamente do seu processo de aprendizagem, precisando de poucas orientações do professor para validar as situações expostas por eles, desse modo, muito mais que uma resposta certa, eles se colocaram como autônomos no processo de aprendizagem dessa sequência, a Atividade 2 (itens 1 e 2) evidenciam que mesmo não seguindo o esperado pelo professor, obtiveram a resposta desejada.

Do ponto de vista matemático, essa sequência não apresentou problema para ser realizada pelos alunos, eles conseguiram um bom desempenho em quase todas as atividades propostas. Na atividade a qual pedia o esboço do movimento do pêndulo, a dificuldade dos alunos foi não conhecer a palavra esboço, mas como essa pesquisa referenciou-se na teoria da aprendizagem significativa, compreende-se que o professor pôde agir para auxiliar os alunos na construção de novos conceitos, visto que a aprendizagem para Ausubel, em grande parte, se deve a recepção de conhecimentos.

O grande obstáculo nesse tipo de ação é imposto para o professor, pois deve elaborar propostas de ensino que contemplem os conhecimentos já adquiridos pelos alunos, e isso não é uma tarefa fácil, ainda assim é perceptível o aprendizado e interesse dos alunos por essa abordagem, em que eles tomam a ação no processo de aprendizagem.

Como perspectivas futuras, as atividades propostas na sequência de ensino dessa dissertação de mestrado poderão ser utilizadas por vários professores no sítio www.ensinomatematica.com.br, e a partir desse uso, posso elaborar uma pesquisa sobre a implementação da modelagem no ensino das funções periódicas em

diferentes contextos de ensino. Essa pesquisa tem importância para a educação matemática, pois ela oferece uma perspectiva para o ensino das funções periódicas, que leva a aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. ; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro, ano 17, n. 22, p. 19-36, 2004.

ARAGÃO, R. M. R. Teoria da Aprendizagem Significativa de David P. Ausubel: sistematização dos aspectos teóricos fundamentais. Tese de Doutorado, FE/UNICAMP. Campinas, 1976.

AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D., HANESIAN, H. Educational psychology. New York: Holt, Rinehart and Winston. Publicado em português pela Editora Interamericana, Rio de Janeiro, 1980.

AUSUBEL, D.P. The psychology of meaningful verbal learning. New York: Grune & Stratton, 1963, 255p.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001.

_____, J. C.. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. Alexandria (UFSC), v. 2, p. 65-85, 2009

BASSANEZI, R. C. Modelagem como metodologia de ensino de matemática. In: Actas de la Séptima Conferência Interamericana sobre Educación Matemática. Paris: UNESCO, 1990. p. 130-155.

_____, R.C. Modelagem Matemática: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BELTRÃO, M. E. P. Ensino de cálculo pela Modelagem Matemática e aplicações: teoria e prática. 2009. 323f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. Alexandria, v. 2, n. 2, p. 7-32, 2009.

_____, M. S. Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1^o e 2^o graus. Rio Claro: IGCE/UNESP, 1990. 210p. (Dissertação, Mestrado).

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N.. Modelagem Matemática no Ensino. São Paulo – SP: Contexto 2007

BODIN, A., L'évaluation du savoir mathématique, Bulletin de l'APMEP n°369, Avril 1989.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

BRUCKI, Cristina Maria. O uso de modelagem no ensino de função exponencial. 2011. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

BURAK, D. Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

BURAK, D.; ARAGÃO, R.M.R. A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa. Curitiba: CRV, 2012.

EDWARDS, D; HANSOM, M. Guide Modelling. Boca Ratom: CRC Press, 1990.

IGLIORI, S.B.C. A Noção de "Obstáculo Epistemológico" e a Educação Matemática. In Educação Matemática. Uma (Nova) Introdução, p - 113 - 142, Educ, 2010.

KLEIN, M. E. Z. O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias da Aprendizagem significativa e dos campos conceituais. 2009. - Dissertação de Mestrado e Educação Matemática Pontifícia Universidade Católica, Porto Alegre.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. - Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo, E.P.U., 1986. 99p.

MARTINS, F. ; VIEIRA, M. ; REIS, D. ; RIBEIRO, C. Ensinar através da modelação matemática: uma primeira discussão baseada numa experiência de ensino no 4.º ano de escolaridade- Exedra Vol. 8, Nº 2, pp. 165 - 180, 2013.

MEYER, J. F. C.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. Modelagem em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

MIRAS, M. O ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In: COLL, C. O construtivismo em sala de aula. São Paulo: Editora Ática, 2006. p.57- 76

MOREIRA, M. A. Teoria de Aprendizagem, 2.ed.ampl.-[Reimpr.]-São Paulo : E.P.U., 2014, p. 159-174.

_____, M. A. Aprendizagem significativa. Brasília: Editora da UnB. 1999.

MOREIRA, M. A. e BUCHWEITZ, B. Novas estratégias de ensino e aprendizagem: os mapas conceituais e o Vê epistemológico. Lisboa: Plátano Edições Técnicas. 1993.

MOREIRA, M. A. Mapas conceituais e aprendizagem significativa. São Paulo: Centauro Editora, 2010.

_____, M. A. Aprendizagem Significativa: A Teoria e Textos Complementares. São Paulo: Editorial LF Editora, 2012.

PIRES, R. F.; MAGINA, S. M. P. . O uso da modelação matemática na construção do conceito de função. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife. Anais do XIII CIAEM. Recife, 2011

PONTE, J. P., MATOS, J. M., ABRANTES, P. (1998). Investigação em educação matemática: Implicações curriculares. Lisboa: IIE.

RIBEIRO, M.R.R.C.; JUNIOR, A.T: Funções trigonométricas: conhecimentos prévios dos estudantes do ensino médio. V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil.

SANTOS, R. F. O uso da modelagem para o ensino da função seno no ensino médio. 2014. Dissertação de Mestrado e Educação Matemática Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SANTOS, D. B. M. Um Panorama De Pesquisas Sobre O Uso Da Modelagem Matemática No Ensino Médio: 2010 A 2014. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

SADOVSKY, P. O ensino da Matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios. São Paulo: Ática, 2010.

SANCHES, I. Compreender, agir, mudar, incluir: da investigação-ação à educação inclusiva. Revista Lusófona de Educação, v. 5, n. 5, p. 127-147, 2005.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias. São Paulo: SEE, 2009.

STOCCO, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. Matemática: Ensino Médio, volume 2, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

ANEXO I**TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE DADOS E IMAGEM**

Eu, _____
portador da Cédula de identidade nº _____, inscrito no CPF
sob nº _____, residente à Rua
_____,
nº _____, na cidade de _____, AUTORIZO o uso de
minha imagem e qualquer material entre fotos e documentos por mim apresentados
(ou do menor _____ sob minha
responsabilidade), para ser utilizado no trabalho **O ENSINO DE FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS COM O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA SOB A
PERSPECTIVA DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.**

A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da
imagem acima mencionada em todo território nacional e no exterior, em todas
as suas modalidades e, em destaque, das seguintes formas: (I) home page; (II)
cartazes; (III) divulgação em geral. Por esta ser a expressão da minha vontade
declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a
título de direitos conexos à minha imagem ou a qualquer outro.

São Paulo, _____ de _____ de 2016.

Assinatura