

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

ARMÊNIO LANNES XAVIER NETO

**UM ESTUDO DA GÊNESE DOCUMENTAL DE PROFESSORES PARA
FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL COM VÁRIAS SENTENÇAS
MATEMÁTICAS**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**São Paulo
2021**

ARMÊNIO LANNES XAVIER NETO

**UM ESTUDO DA GÊNESE DOCUMENTAL DE PROFESSORES PARA
FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL COM VÁRIAS SENTENÇAS
MATEMÁTICAS**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob orientação da Professora Doutora **Maria José Ferreira da Silva**.

**São Paulo
2021**

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura _____

Local e Data

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

Xavier Neto, Armênio Lannes

Um estudo da gênese documental de professores
para função de uma variável real com várias sentenças
/ ArmênioLannes Xavier Neto. -- São Paulo: [s.n.],
2021.

338p ; cm.

Orientador: Maria José Ferreira da Silva.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica
de São Paulo, (Mestrado Profissional) -- Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, Programa de
Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. . I. Silva, Maria José Ferreira da. II.
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação
matemática. III. Título.

CDD

ARMÊNIO LANNES XAVIER NETO
UM ESTUDO DA GÊNESE DOCUMENTAL DE PROFESSORES PARA
FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL COM VÁRIAS SENTENÇAS
MATEMÁTICAS

Tese apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título de
DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Aprovado em: ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva (Orientadora) – PUC-SP

Prof. Dr. Luc Trouche - Institute Français de l'Éducation

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud - UFPA

Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori - PUC-SP

Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima – PUC-SP

Nunca seremos afortunados, nunca!

Simón Bolívar

A minha esposa Sônia, meu filho Gonçalo e a meus pais
Conceição e Moacir pelo seu amor e pelo apoio constante.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela bolsa cedida – Modelo Taxa – que foi de extrema importância para a realização desta pesquisa.

A presente tese se adere ao projeto internacional *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos* – PEA-MAT/DIMAT, financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, processo 2013/23228-7 e aprovado na Plataforma Brasil pelo comitê de ética do CEP/CONEP em 19/10/2015. Desenvolvido sob a coordenação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud e desenvolvido pelos grupos de investigação PEA-MAT da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil e DIMAT da Pontifícia Universidade Católica do Peru.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora **Maria José Ferreira da Silva**, pelo trabalho de orientação, o permanente apoio e confiança desde o curso de Especialização, passando pelo Mestrado e agora no Doutorado. Muito obrigado!

Ao Professor Doutor **Luc Trouche**, por ter me acolhido durante o estágio no Instituto Francês de Educação da Universidade de Lyon e na cidade de Montpellier, sempre com muita generosidade e companheirismo.

Aos membros da banca, Professora Doutora **Sonia Camargo Igliori**, Professor Doutor **Gabriel Loureiro de Lima** e Professor Doutor **Saddo Ag Almouloud** pelas sugestões e contribuições na tese.

À professa Doutora **Veronica Gitirana** e ao Professor Doutor **Fumikazu Saito** pela troca de ideias e as importantes contribuições na tese.

Aos Professores do Curso de doutorado do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP pela aprendizagem e convivência.

Aos colegas de curso **Carlos Alberto de Siqueira**, **Rafael Rix** da PUC-SP e **Jose del Carmen Orozco Santiago** da CINVESTAV-IPN, México, pela amizade e companheirismo.

À **Sônia Lopes Rezende de Melo** e **Gonçalo Xavier** pela grande ajuda na correção.

Agradecimento especial com muito carinho aos amigos **Adriano Doce**, **Anuar**, **Beat Schindler**, **Carolina Mendonça**, **Diego Amado**, **Fabio Schindler**, **Flávio Antônio**, **Gabriela Terra**, **Jacques**, **João Pedro**, **Márcio Mota**, **Paulo Mendes**, **Rodrigo Tardivo**, **Ronaldo Araújo**, **Ruth Sá**, **Ruth Vogelsang Schindler**, **Samuel Francisco**, **Suzanne Lima** e **Victoriano Fernandez**.

Aos **Funcionários** do programa de pós-graduação em Educação Matemática e da biblioteca da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP.

XAVIER NETO, A. L. **Um estudo da gênese documental de professores para função de uma variável real com várias sentenças**. 2020. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020. 367 páginas.

RESUMO

Esta pesquisa focou em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de função, tendo como quadro teórico a Abordagem Documental do Didático (ADD) e a Orquestração Instrumental (OI), e como sujeitos de pesquisa professores oriundos de escolas públicas e privadas da educação básica. O objetivo da investigação foi estudar de que maneira a construção de documentos para introduzir o estudo de função, com um coletivo de professores em uma formação continuada, pode impulsionar o desenvolvimento profissional desse grupo. Para tal fim, foi utilizada a metodologia de investigação reflexiva, que possui cinco princípios. Os três primeiros são dedicados aos acompanhamentos a longo prazo, dentro e fora da sala de aula e reflexivo do trabalho de documentação, enquanto os dois últimos são voltados à ampla coleta dos recursos materiais utilizados e produzidos e à confrontação permanente das opiniões dos professores a respeito de seu trabalho documental. Para procurar responder aos desafios específicos provocados pela problemática, inicialmente foram realizados estudos preliminares de natureza histórica, epistemológica e didática que trouxeram à tona detalhes da construção da definição formal de função e seu imbricamento com função com várias sentenças matemáticas (FVSM) de uma variável real. Tais estudos permitiram estruturar a formação continuada em duas fases: uma denominada preparação, e outra, estritamente vinculada à primeira, denominada execução. A fase preparação objetivou mapear recursos e conhecimentos dos participantes sobre o ensino de função, bem como compreender a estrutura de seu sistema de recursos. A fase execução foi destinada à vivência de um conjunto de situações viabilizadas por OIs, com o intuito de elaborar, aplicar e criticar uma sequência de situações educacionais (SSE), tendo como pano de fundo a apropriação de um modelo para introduzir o ensino de função a partir da FVSM. Os resultados obtidos durante a fase preparação permitiram compreender a estrutura do sistema de recursos dos sujeitos de pesquisa, e a identificação de seus conhecimentos possibilitou interpretar suas escolhas para introduzir o ensino desse tema. O acompanhamento das situações vivenciadas, ao longo da fase execução, permitiu identificar esquemas documentais e classes de situações mobilizadas para a construção de documentos, bem como inferir acerca do desenvolvimento profissional dos envolvidos. Em relação ao objetivo da investigação, pode-se afirmar que o estudo da construção de documentos foi observado quando os participantes resolviam, elaboravam, aplicavam ou criticavam a SSE, concluindo-se que a gênese documental foi adequada para acompanhar o desenvolvimento profissional dos participantes da formação continuada.

Palavras-chave: Gênese Documental. Orquestração Instrumental. Função de uma variável real com várias sentenças matemáticas. Formação continuada.

ABSTRACT

This research focused on the formation of mathematics teachers for the teaching of function with the Documentational Approach to Didactics (DAD) and Instrumental Orchestration (IO) as the theoretical framework and as research subjects' teachers from public and private schools of basic education. The objective of the investigation was to study how the construction of documents to introduce the study of function with a collective of teachers in a continuing education can boost the professional development of this group. For this purpose, the reflective investigation methodology was used, which has five principles. The first three are dedicated to long-term follow-ups, inside and outside the classroom and reflective of the documentation work, while the last two, focused on the extensive collection of material resources used and produced and the permanent confrontation of teachers' opinions regarding their documentary work.

To try to answer specific challenges caused by the problem, preliminary studies of a historical, epistemological and didactic nature were initially carried out, which brought to the fore details about the formation of the formal definition of function and its overlap with the Piecewise Defined Function (PDF). Such studies allowed to structure the continuing education that was organized to be developed in two phases: one called preparation and a second, strictly linked to the first, called execution. The preparation phase aimed to map the participants' resources and knowledge about teaching function, as well as to understand the structure of their resource system, while the execution phase was aimed at experiencing a set of situations made possible by IOs, in order to elaborate, apply and criticize a Sequence of Educational Situations (SES), having as a background the appropriation of a model to introduce the teaching of function from the PDF. The results obtained during the preparation phase made it possible to understand the structure of the research subjects' resource system and the identification of their knowledge made it possible to interpret their choices in introducing the teaching of the theme. The monitoring of the situations experienced by the subjects throughout the execution phase, allowed to identify documentary schemes and classes of situations mobilized for the construction of documents, as well as to infer about their professional development. Regarding the objective of the investigation, it can be said that the study of document construction was observed when the participants resolved, elaborated, applied or criticized the SSE, concluding that the documentary genesis was adequate to accompany the professional development of participants in continuing education.

Keywords: Documentational Genesis. Instrumental Orchestration. Piecewise Defined Function. Continuing Education.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – ESQUEMA DA GÊNESE DOCUMENTAL.....	31
FIGURA 2 – EXEMPLO DE RESR.....	33
FIGURA 3 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA PARA INTRODUIR FUNÇÃO (EVEN, 1990).....	55
FIGURA 4 - QUADRINHOS DA HQ “A TABUADA”	84
FIGURA 5 - REPRODUÇÃO DIGITAL DA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO COMO EXPRESSÃO ANALÍTICA	101
FIGURA 6 - REPRODUÇÃO DIGITAL DA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO	102
FIGURA 7 - EXEMPLO DE GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DESCONTÍNUA SEGUNDO EULER.....	103
FIGURA 8 - ILUSTRAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DE UMA CORDA	103
FIGURA 9 – FVSM REFERENTE A DEFORMAÇÃO DA CORDA (PEDAÇOS DE PARÁBOLAS).....	104
FIGURA 10 - INTRODUÇÃO DE FUNÇÃO – L1.....	115
FIGURA 11 - IDEIA DE FUNÇÃO - L1.....	116
FIGURA 12 - NOTAÇÃO DE FUNÇÃO – L1	116
FIGURA 13 - EXERCÍCIO DO TRIÂNGULO DE SIERPISNKI – L1.....	117
FIGURA 14 - EXERCÍCIO DO TRIÂNGULO DE SIERPISNKI (2) – L1	117
FIGURA 15 - EXEMPLO SOBRE A IDEIA DE FUNÇÃO – L2	118
FIGURA 16 - A DEFINIÇÃO FORMAL DE FUNÇÃO – L2.....	118
FIGURA 17 - A FVSM – L2	119
FIGURA 18 - EXEMPLO DA NOÇÃO INTUITIVA DE FUNÇÃO (1) – L3	120
FIGURA 19 - EXEMPLO DA NOÇÃO INTUITIVA DE FUNÇÃO (2) – L3	121
FIGURA 20 - DEFINIÇÃO FORMAL DE FUNÇÃO – L3.....	121
FIGURA 21 - REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES – L3.....	122
FIGURA 22 - EXERCÍCIO PROPOSTO A RESPEITO DE FVSM – L3.....	122
FIGURA 23 - USO DO RECURSO GEOGEBRA (1) – L3.....	123
FIGURA 24 - USO DO RECURSO GEOGEBRA (2) – L3.....	124
FIGURA 25 - EXEMPLO DE NOÇÃO INTUITIVA DE FUNÇÃO – L4	125
FIGURA 26 - EXEMPLO DE UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO – L4.....	126
FIGURA 27 - NOÇÃO DE FUNÇÃO – L5.....	126
FIGURA 28 - NOÇÃO DE FUNÇÃO – L5.....	127
FIGURA 29 - DEFINIÇÃO FORMAL DE FUNÇÃO – L5.....	127
FIGURA 30 – FVSM – L5	128
FIGURA 31 - NOÇÃO DE FUNÇÃO – L6.....	128
FIGURA 32 – OUTROS EXEMPLOS SUGERIDOS PELO PORTAL DO PROFESSOR - MEC.....	130
FIGURA 33 - EXPLORANDO A NOÇÃO DE FUNÇÃO (UNIDADE 24)	131
FIGURA 34 - ESTRUTURA DA ETAPA DE PREPARAÇÃO	134
FIGURA 35 - LISTA DOS QUESTIONÁRIOS PROPOSTOS AOS PARTICIPANTES NO AMBIENTE <i>MOODLE</i>	136
FIGURA 36 - QUESTIONÁRIO 1 - FORMAÇÃO	137
FIGURA 37 - QUESTIONÁRIO 2 - AMBIENTE DE TRABALHO ATUAL	137

FIGURA 38 - QUESTIONÁRIO 3 - TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO	138
FIGURA 39 - QUESTIONÁRIO 4 - TRABALHO COLETIVO	139
FIGURA 40 - QUESTIONÁRIO 5 - A MATEMÁTICA COMO ÁREA DE CONHECIMENTO E SEU ENSINO.....	140
FIGURA 41 - DIÁRIO DE BORDO - INSTRUÇÕES DE PREENCHIMENTO. AMBIENTE <i>MOODLE</i>	141
FIGURA 42 – ESTRUTURA DA FASE DE EXECUÇÃO.....	144
FIGURA 43 - AS SITUAÇÕES PROFISSIONAIS NA ETAPA DE ELABORAÇÃO COLETIVA DA SSE.....	146
FIGURA 44 - FÓRUM VIRTUAL DE DISCUSSÃO - ETAPA DE PREPARAÇÃO.....	162
FIGURA 45 - LINHA DE TEMPO DO FÓRUM DE DISCUSSÃO DURANTE A ETAPA DE PREPARAÇÃO.....	163
FIGURA 46 – LOCALIZAÇÃO DAS ESCOLAS DOS SUJEITOS DE PESQUISA NO MAPA DA CIDADE DE SÃO PAULO.....	166
FIGURA 47 – RESR DE GABRIEL.....	168
FIGURA 48 – MÁSCARA COM ANOTAÇÕES DO PLANO ANUAL DE MATEMÁTICA DA ESCOLA A.....	171
FIGURA 49 – RESR DE LUCAS	173
FIGURA 50 – PLANO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE FUNÇÃO ELABORADO POR LUCAS EM 2018	175
FIGURA 51 – RESR DE LUIZ	178
FIGURA 52 - PANORAMA DA OI-1 (ENCONTRO PRESENCIAL).....	183
FIGURA 53 - CENÁRIO DA OI-1 - GRUPO EM TRABALHO (ENCONTRO PRESENCIAL)	188
FIGURA 54 - PRIMEIRA SITUAÇÃO-PROBLEMA CONSTRUÍDA PELOS PARTICIPANTES.....	192
FIGURA 55 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FVSM DA ATIVIDADE 1 - QUESTÃO B	202
FIGURA 56 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FVSM DA ATIVIDADE 2 - QUESTÃO B.....	204
FIGURA 57 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FVSM DA ATIVIDADE 3 – QUESTÃO B	205
FIGURA 58 - SE-2	207
FIGURA 59 - SE-3	210
FIGURA 60 - PANORAMA DA SE-3 NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA.....	211
FIGURA 61 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FVSM DA SE-3	212
FIGURA 62 - CONTAS DE ENERGIA ELÉTRICA USADAS NA SE-4	213
FIGURA 63 - PANORAMA DO TRABALHO COM A SE-1	220
FIGURA 64 - RESOLUÇÃO DE PARTE DA ATIVIDADE 1 A (SE-1) ELABORADA POR GABRIEL.....	222
FIGURA 65 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FVSM DO EXERCÍCIO 1 (SE-1) ELABORADA POR GABRIEL	224
FIGURA 66 - ESBOÇO DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FVSM (SE-3) ELABORADA POR LUCAS	229
FIGURA 67 - ALTERAÇÃO DO ITEM (A) DA CONTA DE ÁGUA NO 6º FÓRUM VIRTUAL.....	236
FIGURA 68 - SOLUÇÃO DO ITEM B DA CONTA DE ÁGUA PROPOSTA POR BRUNO.....	237
FIGURA 69 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO. CONTA DE ÁGUA PROPOSTA NO FÓRUM VIRTUAL.....	238
FIGURA 70 - CONTA DE ÁGUA PROPOSTA POR FABÍOLA NO 7º FÓRUM DO <i>MOODLE</i>	244
FIGURA 71 - ESBOÇO DO ENUNCIADO DO PROBLEMA SOBRE A CONTA DE ÁGUA.....	247
FIGURA 72 - APLICATIVO DESENVOLVIDO POR BRUNO COM AUXÍLIO DE CONTROLE DESLIZANTE	251
FIGURA 73 - ATIVIDADE 1 (SE-1), SOLUÇÃO DO GRUPO 2 – ESCOLA A (LUCAS)	255
FIGURA 74 - ATIVIDADE 1 A (SE-1), SOLUÇÃO DO GRUPO 1 – ESCOLA A (LUCAS)	256
FIGURA 75 - ATIVIDADE 3 A (SE-1): SOLUÇÃO DO GRUPO 2 – ESCOLA A (LUCAS).....	257
FIGURA 76 - ATIVIDADE 1 B (SE-1), GRÁFICO DO GRUPO 3 – ESCOLA A (LUCAS).....	259

FIGURA 77 - ATIVIDADES 1 E 2 (SE-1) - ESCOLA C (LUIZ).....	260
FIGURA 78 - SD-1: ATIVIDADE 1 A, GABRIEL (1).....	265
FIGURA 79 - SE-1: ATIVIDADE 1 A, GABRIEL (2).....	266
FIGURA 80 - SE-1, ATIVIDADE 1 B - GABRIEL	266
FIGURA 81 - SE-1, ATIVIDADE 1 B - GABRIEL	268
FIGURA 82 - SE-2, PRIMEIRA PARTE DO MOVIMENTO (LUCAS)	268
FIGURA 83 - SE-2, DEMAIS PARTES DO MOVIMENTO (LUCAS)	269
FIGURA 84 - SE-2: NOÇÃO DE TAXA DE VARIAÇÃO – <i>KHAN ACADEMY</i> (LUCAS).....	270
FIGURA 85 - SE-2 (LUIZ)	271
FIGURA 86 - SE-2 (GABRIEL).....	273
FIGURA 87 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA SE-3: (LUCAS)	275
FIGURA 88 - RESOLUÇÃO DE UM GRUPO DE ALUNOS DA SE-3: (LUCAS)	276
FIGURA 89 - PROBLEMA SOBRE DESCONTINUIDADE: CADERNO DO ESTUDANTE: LUIZ (1)	276
FIGURA 90 - PROBLEMA SOBRE DESCONTINUIDADE: CADERNO DO ESTUDANTE: LUIZ (2)	276
FIGURA 91 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA SE-3 (GABRIEL)	277
FIGURA 92 - RESPOSTAS DE UM GRUPO À QUESTÃO 1 DA SE-4 (LUCAS)	280
FIGURA 93 - PARTE DA CORREÇÃO DA SE-4 FEITA NA LOUSA POR LUCAS	281
FIGURA 94 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA QUARTA SITUAÇÃO EDUCACIONAL – LUCAS	281
FIGURA 95 - ESBOÇO DO GRÁFICO DE UM DOS GRUPOS NA SE-4 (LUCAS)	283
FIGURA 96 - DEFINIÇÃO FORMAL DE FUNÇÃO PRODUZIDA POR UM GRUPO DE ALUNOS – LUCAS. (1).....	284
FIGURA 97 - DEFINIÇÃO FORMAL DE FUNÇÃO PRODUZIDA POR UM GRUPO DE ALUNOS – LUCAS. (2).....	284
FIGURA 98 - ITEM A DA SE-4 (LUIZ)	285
FIGURA 99 - ITEM C DA SE - 4 (LUIZ)	286
FIGURA 100 - ITEM D DA SE-4 DE LUIZ	286
FIGURA 101 - SE- 4, ATIVIDADE 1 B (GABRIEL).....	287
FIGURA 102 - SE - 4, ATIVIDADE 1 B (GABRIEL).....	288
FIGURA 103 - SE-4: ATIVIDADE 1 D (GABRIEL)	288
FIGURA 104 - COMPARTILHAMENTO DA SOLUÇÃO DA CONTA DE ÁGUA – GABRIEL.....	289
FIGURA 105 - DEFINIÇÃO FORMAL DE FUNÇÃO (1): GABRIEL.....	290
FIGURA 106 - DEFINIÇÃO FORMAL DE FUNÇÃO (2): GABRIEL.....	290

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 - CARGA HORÁRIA SEMANAL DE TRABALHO DOS PARTICIPANTES	152
GRÁFICO 2 - TEMPO DE EXPERIÊNCIA NO NÍVEL DE ENSINO ATUAL	153
GRÁFICO 3 - NÚMERO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA ESCOLA EM QUE TRABALHA ATUALMENTE.....	154

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - TRABALHOS DA CATEGORIA ALUNOS DO ENSINO BÁSICO.....	37
QUADRO 2 - TRABALHOS DA CATEGORIA ALUNOS DO ENSINO SUPERIOR	47
QUADRO 3 - TRABALHOS DA CATEGORIA PROFESSORES	54
QUADRO 4 - TRABALHOS DA CATEGORIA REFORMAS CURRICULARES.....	62
QUADRO 5 - CONDIÇÕES MATERIAIS E TECNOLÓGICAS NA INSTITUIÇÃO ATUAL	155
QUADRO 6 - TECNOLOGIAS UTILIZADAS NA PRÁTICA DE ENSINO E SEUS MOTIVOS	156
QUADRO 7 - INFORMAÇÕES OBTIDAS SOBRE TRABALHO COLETIVO - QUESTIONÁRIO 4	159
QUADRO 8 - TÓPICOS MATEMÁTICOS CONSIDERADOS DIFÍCEIS PARA ENSINAR - QUESTIONÁRIO 5.....	160
QUADRO 9 - PERFIL PESSOAL E PROFISSIONAL DOS PARTICIPANTES DA FORMAÇÃO	161
QUADRO 10 - DATA DOS ENCONTROS PRESENCIAIS E OBJETIVOS - OI-2	198
QUADRO 11 - SOLUÇÃO ESPERADA PARA A ATIVIDADE 1 – QUESTÃO A	201
QUADRO 12 - SOLUÇÃO ESPERADA PARA A ATIVIDADE 2 – QUESTÃO A	203
QUADRO 13 - SOLUÇÃO ESPERADA PARA A ATIVIDADE 3 – QUESTÃO A	205
QUADRO 14 - CONTRIBUIÇÃO DE GABRIEL PARA O FÓRUM VIRTUAL DA OI-2	218
QUADRO 15 - CONTRIBUIÇÃO DE LUCAS PARA O FÓRUM VIRTUAL DA OI-2	219
QUADRO 16 - CONTA DE ÁGUA PROPOSTA POR BRUNO - SE-4.....	233

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	19
2 PROBLEMÁTICA.....	24
2.1 REFERENCIAL TEÓRICO – ADD E OI.....	24
2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE FVSM	35
2.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE ADD E OI	60
2.4 JUSTIFICATIVA E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	90
2.5 OS PRINCÍPIOS DA METODOLOGIA REFLEXIVA.....	92
2.6 ORGANIZAÇÃO DA FORMAÇÃO CONTINUADA.....	95
3 ESTUDOS PRELIMINARES.....	98
3.1 ESTUDO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO	98
3.2 ESTUDO DIDÁTICO A RESPEITO DO ENSINO DE FUNÇÃO	108
3.2.1 DOCUMENTOS CURRICULARES NACIONAIS.....	108
3.2.2 LIVROS DIDÁTICOS E PORTAL ELETRÔNICO DO MEC.....	114
4 A FASE DE PREPARAÇÃO	134
4.1 SELEÇÃO DOS PARTICIPANTES E DOS SUJEITOS DE PESQUISA.....	135
4.2 ORGANIZAÇÃO DO AMBIENTE MOODLE.....	135
4.2.1 PLANEJAMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DOS QUESTIONÁRIOS.....	136
4.2.2 PLANEJAMENTO DO DIÁRIO DE BORDO	140
4.2.3 FÓRUM DE DISCUSSÃO.....	141
4.3 ORGANIZAÇÃO DE VISITAS AOS SUJEITOS DE PESQUISA.....	142
5 FASE DE EXECUÇÃO.....	143
5.1 ETAPA DE ELABORAÇÃO COLETIVA.....	145
5.2 ETAPA DE APLICAÇÃO	148
5.3 ETAPA DE CRÍTICA	148
5.4 VISITA FINAL AOS SUJEITOS DE PESQUISA	149
6 ANÁLISE DA FORMAÇÃO CONTINUADA.....	151
6.1 PARTICIPANTES E SUJEITOS DE PESQUISA.....	151
6.2 QUESTIONÁRIOS INFORMATIVOS	152
6.3 FÓRUM DE DISCUSSÃO	161
6.4 VISITAS INICIAIS AOS SUJEITOS DE PESQUISA.....	165
6.4.1 VISITA AO SUJEITO DE PESQUISA GABRIEL	166
6.4.2 VISITA AO SUJEITO DE PESQUISA LUCAS	172
6.4.3 VISITA AO SUJEITO DE PESQUISA LUIZ	176
6.4.4 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA FASE DE PREPARAÇÃO.....	180

6.5 ETAPA DE ELABORAÇÃO COLETIVA.....	182
6.5.1 SITUAÇÃO DE REFLEXÃO.....	182
6.5.1.1 OI-1.....	182
6.5.1.2 CONCLUSÕES SOBRE A SITUAÇÃO DE REFLEXÃO.....	196
6.5.2 SITUAÇÃO DE FORMAÇÃO.....	197
6.5.2.1 OI-2.....	198
6.5.2.2 CONCLUSÕES SOBRE A SITUAÇÃO DE FORMAÇÃO.....	239
6.5.3 SITUAÇÃO DE ORGANIZAÇÃO.....	240
6.5.3.1 OI-3.....	241
6.5.3.2 CONCLUSÕES SOBRE A SITUAÇÃO DE ORGANIZAÇÃO.....	252
6.6 ETAPA DE APLICAÇÃO.....	253
6.6.1 APLICAÇÃO DA SE-1.....	254
6.6.2 APLICAÇÃO DA SE-2.....	268
6.6.3 APLICAÇÃO DA SE-3.....	274
6.6.4 APLICAÇÃO DA SE-4.....	280
6.6.5 CONCLUSÕES SOBRE A ETAPA DE APLICAÇÃO.....	291
6.7 ETAPA DE CRÍTICA.....	292
6.7.1 SITUAÇÃO DE AVALIAÇÃO.....	292
6.7.1.1 OI-4.....	293
6.7.1.2 CONCLUSÕES SOBRE A SITUAÇÃO DE AVALIAÇÃO.....	304
6.7.1.3 VISITA FINAL COM OS SUJEITOS DE PESQUISA.....	305
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS.....	307
REFERÊNCIAS.....	318
APÊNDICE A – PROTOCOLO DE OBSERVAÇÃO.....	327
APÊNDICE B – MODELO DE DIÁRIO DE BORDO.....	328
ANEXO A - SSE.....	329
ANEXO – B: ATIVIDADES PARA O GEOGEBRA.....	333
ANEXO – C: SOLICITAÇÃO PARA ACESSO ÀS ESCOLAS.....	335
ANEXO – D: TERMO DE CONSENTIMENTO.....	336
ANEXO – E: TERMO DE CONSENTIMENTO - ALUNOS.....	338

1 INTRODUÇÃO

A presente investigação teve início com o desejo de dar continuidade a uma pesquisa de mestrado, que tratou do fenômeno da gênese instrumental do artefato simbólico função com várias sentenças matemáticas – FVSM de uma variável real junto a estudantes de 2º e 3º¹ anos do ensino médio.

A efetivação desse desejo se deu a partir de um processo de institucionalização local liderado por um professor, ocorrido em sala de aula durante a aplicação de uma das atividades da Sequência Didática – SD daquela pesquisa. Ao perceber que um grupo de estudantes apresentava dificuldades na compreensão da representação gráfica de uma FVSM que estava sendo esboçada na lousa, o professor decidiu recorrer a ferramentas existentes no software *GeoGebra*, com o intuito de possibilitar que o grupo visualizasse sua construção sob outra perspectiva e, eventualmente, superasse suas dúvidas. Aparentemente, o conjunto de ações realizadas posteriormente pelos estudantes, para construir representações gráficas de função, desencadeou a mobilização de esquemas de ação instrumentada que vieram a impulsionar suas gêneses instrumentais.

Esse simples cenário possibilitou conjecturar novas perspectivas de abordagem do problema, tendo em vista, de um lado, a importância desempenhada pelo planejamento do ensino no intuito de potencializar a aprendizagem, bem como, de outro, a natureza do tema matemático. A circunstância, de algum modo não prevista pelo professor, por certo permite supor que os recursos que o docente venha a selecionar para o planejamento e a execução de suas aulas - isto é, tudo aquilo que for desenvolvido e usado por professores e alunos em suas interações com a matemática, dentro e fora da sala de aula, assim como o conhecimento que possui a respeito do tema a ser ensinado - desempenham papel relevante.

Em busca de uma melhor compreensão quanto à importância desempenhada pela interação do professor com os recursos e as consequências desse fenômeno no ensino, foram realizadas investigações que apontaram essa

¹ Alunos de aproximadamente 16 a 17 anos, que tiveram contato com FVSM no 1º ano do ensino médio.

relação no âmbito da teoria da Abordagem Documental do Didático – ADD² como essencialmente criativa, pois, para conceber seu trabalho diário, o docente interage com um conjunto de recursos que são adaptados, revisados ou mesmo reorganizados de modo a possibilitar o planejamento e a implementação de sua atividade profissional. Segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p. 16, tradução nossa), “todo esse trabalho é chamado de documental, enquanto documentação refere-se ao que o professor produz para sua prática”.

Ao interagir com um recurso, ou vários recursos, “para um determinado objetivo didático, os professores desenvolvem esquemas de utilização específicos” (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018, p. 4, tradução nossa), passíveis de serem diferentes, dependendo dos hábitos e conhecimentos desses professores, ainda que tenham se referido a um mesmo recurso.

Esse quadro levou a introdução do conceito de documento “desenvolvido por um professor para um determinado objetivo didático no curso de uma gênese documental” (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018, p. 4, tradução nossa) como sendo uma entidade de natureza híbrida, formada por um conjunto de recursos e acrescida de um esquema de utilização. É exatamente esse processo, em cujo centro encontra-se o fenômeno da gênese documental, que nos interessa investigar.

A procura para entender com maior profundidade a relação dos professores com recursos incluiu a realização de um estágio doutoral no Institute Français de l'Éducation localizado na cidade de Lyon sob a orientação do Prof. Dr. Luc Trouche durante os meses de janeiro e julho de 2018. Ao longo desse período foi possível participar de cursos e seminários preparatórios à conferência *Re(s)ources* 2018³, bem como o intercâmbio com outros pesquisadores.

Em um dos cursos preparativos à conferência, intitulado ‘*Cadres didactiques pour l'integration des ressources*’, ministrado pelo Prof. Dr. Luc Trouche foi possível observar o desenvolvimento de ferramentas metodológicas para

² A Abordagem Documental do Didático – ADD é uma teoria da didática da matemática que será explicada no referencial teórico.

³ Conferência internacional realizada na cidade de Lyon em maio de 2018 que teve por objetivo de compreender a complexidade do trabalho do professor com recursos.

compreender a apropriação e implementação de situações profissionais por parte de docentes da educação básica para o ensino de diferentes conteúdos matemáticos, enquanto o seminário '*Points de vue croisés sur le développement de l'expertise documentaire des enseignants*', organizado pelas estudantes de doutorado Anita Messaoui e Chongyang Wang, ofereceu a possibilidade de refletir acerca da relação entre o desenvolvimento de recursos e a noção de expertise documental⁴ com base na experiência e prática dos professores.

Diferentemente da pesquisa de mestrado, em que o foco foi o processo de aprendizagem – no caso, da FVSM -, a perspectiva do estudo com recursos remete a um cenário mais voltado ao ensino. Sob esse prisma, em que a relação dos professores com os recursos e com seus conhecimentos contribui para a produção de documentos, outras três questões imbricadas parecem relevantes: a natureza do objeto a ser ensinado – no âmbito dessa investigação relacionada à FVSM -, isto é, como foi construído ao longo da história, sua abordagem didática e a formação do professor que irá ensiná-lo.

Sob a perspectiva histórica, pode-se afirmar que, motivados por problemas relacionados à física durante o século XVIII, vários matemáticos ajudaram a impulsionar o desenvolvimento da definição formal de função; ainda que não tivessem plena consciência disso, suas contribuições se deram, na verdade, a fim de contemplar a ideia de FVSM. Sabe-se que foi Euler, em meados do século XVIII, o primeiro a propor uma definição formal de função. Em sua obra *Introductio in analysin infinitorum*, de 1748, Euler definiu que uma função de quantidade variável “é uma expressão analítica composta a partir de quantidade variável e de números ou quantidades constantes” (EULER, 1748, p. 4, tradução nossa).

O fato de tal definição contemplar a existência de apenas uma expressão analítica inviabilizava a existência de FVSM e, conforme apurou-se posteriormente, a noção de descontinuidade. A identificação de função com sua expressão analítica passou a ser questionada, ainda no século XVIII, “no contexto de um problema relacionado à física, que se referia ao estudo de vibrações infinitamente pequenas

⁴ “Conjunto de competências cujo desenvolvimento requer dispositivos de sustentação específicos, tais como trabalho coletivo ou dispositivos de formação contínua”. (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018. p. 4, tradução nossa).

de uma corda em suas extremidades” (GOMES, 2015, p. 12), o que levou Euler a, posteriormente, rever suas ideias iniciais, concordar com a afirmação de “que se duas expressões analíticas coincidem em um intervalo, elas coincidem em todas as partes” (HUH, 2009, p. 14, tradução nossa) e propor uma nova definição formal de função que contemplasse a existência de FVSM.

Em relação à didática do ensino de função, ainda que os documentos curriculares nacionais não indiquem, estudos preliminares realizados ao longo da presente investigação revelaram uma tendência praticamente unânime tanto em livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD como também no portal do professor do Ministério da Educação e Cultura - MEC a propor o ensino de função no 1º ano do Ensino Médio – EM por meio daquelas classificadas como afim com uma única sentença. Do mesmo modo parece haver uma propensão dos professores a fazê-lo da mesma maneira, o que potencializa o surgimento de obstáculos didáticos durante o processo de aprendizagem de função.

Em face dessas questões de natureza histórica, epistemológica e didática, a definição de função estaria relacionada à FVSM, e talvez a noção de função pudesse não apenas ser introduzida por meio de um conjunto de recursos compostos por atividades envolvendo FVSM como também investigada com maior profundidade, por meio da gênese documental de professores da educação básica em um ambiente de formação continuada.

Esse quadro inspirou a elaboração de uma formação continuada, com o objetivo inicial de criar condições para a apropriação de um modelo para introduzir o ensino de função a partir da FVSM. Para que os participantes da formação se apropriassem desse modelo, foi planejada a vivência de um conjunto de situações viabilizadas pela articulação de Orquestrações Instrumentais - OI⁵.

Posteriormente, com o intuito de acompanhar a evolução da documentação desses professores, outras situações profissionais articuladas por OIs foram elaboradas, de modo que os professores pudessem, coletivamente, elaborar,

⁵ A teoria da Orquestração Instrumental - OI será explicada no referencial teórico.

aplicar uma Sequência de Situações Educacionais – SSE, e posteriormente, refletir sobre ela para introduzir o ensino de função na educação básica a partir da FVSM.

Tendo em vista essa problemática, desenvolveu-se um dispositivo metodológico alicerçado nos cinco princípios propostos pela metodologia de investigação reflexiva, que possibilitaram não apenas acompanhar o fenômeno da gênese documental do grupo de professores participantes como também especular a respeito das evoluções de seus sistemas de recursos, do desenvolvimento profissional e do processo de introdução do ensino de função do ano do EM com base na FVSM.

Esta tese, além desta introdução, é estruturada em sete capítulos. No capítulo 2 são apresentados: a problemática da pesquisa composta da apresentação do referencial teórico; uma revisão bibliográfica sobre FVSM, ADD e OI; a justificativa; a delimitação do problema, os princípios da metodologia reflexiva e a organização da formação continuada.

O capítulo 3 é dedicado aos estudos preliminares, constituídos por um conjunto de estudos de natureza histórica, epistemológica e didática. O capítulo 4 se ocupa da fase de preparação da formação continuada, e o capítulo 5, da fase de execução.

No capítulo 6 são apresentados os resultados e a discussão da formação continuada, além da análise dos dados obtidos. Por fim, o sétimo capítulo contém as considerações finais e perspectivas, nas quais são apontadas as conclusões, por meio da análise dos dados obtidos, além de expostas novas questões, que surgiram da investigação e que poderiam ensejar futuras pesquisas.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, será apresentado, inicialmente, o referencial teórico caracterizado pela ADD e OI, que se constituem na base teórica que deu suporte a toda investigação. Em seguida, serão apresentadas, nesta ordem: a revisão bibliográfica a respeito do ensino e da aprendizagem de FVSM, a revisão bibliográfica sobre a ADD, a justificativa a delimitação do problema, os princípios da metodologia de investigação reflexiva e, por fim, a organização da formação continuada.

2.1 REFERENCIAL TEÓRICO – ADD E OI

Diariamente, durante seu trabalho os professores interagem com uma gama de recursos, dentro e fora da sala de aula. Esse trabalho de natureza criativa, segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018), inclui seleção, modificação e criação de novos recursos, e é denominado trabalho documental, enquanto seus resultados são chamados de documentação do professor.

Para ilustrar essa relação e contextualizar a importância dos recursos na atividade docente, imaginou-se um cenário hipotético em que um determinado professor de matemática tenha decidido atualizar um material didático de apoio, utilizado nos últimos anos, para introduzir o ensino de função na educação básica. Esse material didático foi confeccionado, partindo do princípio de que explorar a noção intuitiva do tema é importante para desenvolver uma ideia de processo sobre o ensino de função, o que é fundamental para o professor promover a compreensão do tema.

Supõe-se que ele tenha chegado a tal constatação com base em dúvidas e questionamentos elaborados pelos estudantes e, seguindo sugestões de colegas da área de matemática na escola onde trabalha, tenha encontrado uma videoaula no portal Khan Academy na internet. Ao analisar o material, constatou que seu conteúdo poderia proporcionar a construção de uma noção intuitiva de função, uma vez que enfatiza a ideia de processo ao recorrer a uma máquina de entrada e saída, fazendo com que decida integrá-lo a outro material didático, utilizado em anos

anteriores, constituído por um conjunto de exercícios retirados de um e-livro e do livro didático adotado pela instituição onde trabalha. Finalmente, o professor organizou a maneira com que a atividade planejada se desenvolveria em sala de aula, decidiu que o trabalho teria início pelo estudo da videoaula do *site* Khan Academy. Em seguida, os estudantes deveriam trabalhar em duplas, resolvendo exercícios indicados no e-livro e livro didático e, posteriormente, devolvê-los em uma folha de tarefas para que fossem corrigidas e comentadas em uma próxima aula.

Várias questões podem ser levantadas a respeito desse exemplo, mas inicialmente, é possível identificar como sendo recursos utilizados pelo professor com o intuito de elaborar o material didático de apoio aos estudantes, a videoaula encontrada no *site* Khan Academy, o livro didático, o conjunto de exercícios retirados de um e-livro, as dúvidas e questionamentos dos estudantes e as sugestões de seus colegas. Os recursos concebidos para fins de ensino – circunstância do exemplo hipotético -, segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p. 2, tradução nossa) “são denominados recursos curriculares”, porém existem outros que não possuem tal finalidade, como por exemplo um artigo de periódico.

O trabalho profissional dos professores a partir de suas interações com os diversos recursos que utilizam no processo didático para elaborar e implementar suas aulas é o principal objetivo da ADD, teoria introduzida por Gueudet e Trouche (2008, 2009) que, tempos depois, recebeu contribuições de Gueudet, Pepin e Trouche (2012) e Gueudet (2019). A ADD baseia-se na Abordagem Instrumental proposta por Rabardel (1995) no âmbito da ergonomia cognitiva⁶ que, por sua vez, foi integrada à didática da matemática por intermédio de contribuições como as de Guin, Ruthven e Trouche (2005).

A Abordagem Instrumental distingue, fundamentalmente, um artefato disponível para um determinado sujeito de um instrumento. Um artefato está conectado a ideia

⁶ Ergonomia cognitiva, é a disciplina científica que visa a compreensão fundamental das interações entre os seres humanos e os outros componentes de um sistema e a profissão que aplica princípios teóricos, dados e métodos com o objetivo de otimizar o bem-estar das pessoas e o desempenho global dos sistemas. (FALSON, 2007, p.7 *apud* JESUS 2012, p.27).

do uso que o sujeito faz como meio para sua ação e que pode ser considerado como uma máquina, um objeto técnico, objetos e sistemas simbólicos, podendo ser definidos como materiais ou simbólicos. (RABARDEL, 2011, p.51, tradução nossa).

Por outro lado, um instrumento, segundo Rabardel (2011, p. 52, tradução nossa), “consiste em uma entidade mista formada por um artefato e um esquema, sendo também uma construção produzida pelo sujeito”. O processo em que um sujeito está envolvido em uma determinada ação, utilizando um artefato e acrescentando a ele seus conhecimentos para transformá-lo em instrumento, é definido como gênese instrumental.

A gênese instrumental, segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p. 4, tradução nossa), “combina dois processos: instrumentação e instrumentalização; o primeiro se refere ao surgimento e à evolução do componente artefato do instrumento, e o segundo, é relativo ao sujeito”. É importante pontuar que a chegada da Abordagem Instrumental no âmbito da Educação Matemática, correspondeu a um período em que os professores de matemática se defrontavam com a integração ao ensino e à aprendizagem de novas ferramentas tecnológicas, como a calculadora ou um software de geometria. Entretanto, essa abordagem não foi suficiente para explicar, segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p.2, tradução nossa), “a interação dos professores com os recursos”, sendo necessária portanto, outra teoria que pudesse compreender esse fenômeno.

Partindo da perspectiva existente na Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995), Gueudet e Trouche (2008) propuseram a ADD, acrescentando, de acordo com Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p.3, tradução nossa), “novas contribuições a partir dos trabalhos a respeito de engenharia documental de Pédaque (2006) e o estudo sobre materiais curriculares de Remillard (2005)”, para que o ponto de vista do recurso substituísse o de artefato, o de documento, o de instrumento e a gênese documental a de gênese instrumental.

Durante a interação com os recursos, núcleo fundamental da ADD, os professores desenvolvem esquemas de uso particulares, que não necessariamente são iguais aos dos estudantes, por serem profissionais e, ainda que utilizem um mesmo recurso, é provável que - dependendo de seus conhecimentos - tais esquemas sejam diferentes.

A noção de esquema é central na ADD e inspira-se nas contribuições dos campos conceituais de Vergnaud (1990). Os esquemas relacionados com a utilização de um artefato foram chamados por Rabardel (2011, p. 171, tradução nossa) “como esquemas de utilização”, estando associados às tarefas secundárias quando envoltas na gestão das características particulares do artefato, e primárias, quando orientadas ao objeto em atividade em que o artefato é um meio de utilização. Segundo Vergnaud, um esquema é

a organização invariante da conduta de uma classe de situações dadas. É nos esquemas que se devem investigar os conhecimentos em ato do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que essa ação seja operatória. (VERGNAUD, 1990, p.134, tradução nossa).

É possível compreender os conhecimentos que um determinado sujeito mobiliza durante uma ação por meio dos esquemas, por sua vez formados por quatro componentes:

- Objetivos da atividade (o objetivo caracteriza a classe de situações);
- Regras de ação e controle;
- Invariantes operatórios, que são os conhecimentos de dois tipos (associados): teoremas em ação, proposição considerada como verdadeira e conhecimentos em ato, conhecimento considerado como relevante e
- Possibilidades de inferências, de adaptação à variedade de situações. (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018, p. 5, tradução nossa).

Para fazer sentido a um indivíduo, de acordo com Vergnaud (1996, p. 189, tradução nossa), “um esquema sempre é aplicado a um tipo de situação em que o sujeito possa identificar objetivos principais e secundários”. Por outro lado, às regras de ação relacionam-se uma série de atividades destinadas a transformar a realidade em que um determinado sujeito está inserido. Os invariantes operatórios, por sua vez, são constituídos pelos

teoremas em ação (invariantes do tipo “fazer propostas”), que são as proposições elaboradas pelo sujeito e consideradas como verdadeiras sobre o real, e os conceitos em ação (invariantes do tipo “função proposicional” e “do tipo “argumento”), que são uma categoria do pensamento considerada pelo mesmo sujeito. (VERGNAUD, 1990, p.138, tradução nossa).

São os invariantes operatórios que permitem ao sujeito estabelecer uma conexão entre teoria e prática, pois é neles que repousa a operacionalidade dos esquemas, enquanto as inferências são componentes consideradas essenciais para entender como o pensamento é construído por um determinado sujeito.

Na abordagem instrumental, Rabardel (1995) fundamentou-se na definição formulada por Vergnaud (1990) a respeito de esquema, para propor dois tipos de esquemas: os de uso e os de ação instrumentada. Os esquemas de ação instrumentada estão relacionados à tarefa principal da atividade em que um sujeito está envolvido, isto é, segundo Rabardel (2011, p. 91, tradução nossa), “àquela em que o artefato é um meio de realização”, e os esquemas de uso referem-se às tarefas secundárias.

Na perspectiva da ADD, Messaoui (2020) trata de esquemas documentais como aqueles envolvidos diretamente com o trabalho documental, ou seja, todos aqueles que intervêm em situações de interações com recursos. Um esquema de ação documental, segundo a autora, é aquele relacionado às principais tarefas executadas pelo professor durante seu trabalho documental, e esquema de uso documental, os esquemas relacionados às tarefas secundárias. Cabe esclarecer ainda, nesse contexto, que a noção de situação se refere a situações profissionais que o professor enfrentará durante sua atividade profissional alinhada às proposições de Vergnaud (1996), em que a relação entre sujeito e artefato é proporcionada por uma situação que exigirá do indivíduo a mobilização de esquemas já existentes ou em desenvolvimento.

Ao longo de sua atividade profissional, o professor pode enriquecer seus esquemas, integrando a eles novas regras de ações ou mesmo desenvolver novos esquemas, e o resultado da interação entre os recursos e os esquemas de uso é denominado na ADD como um documento. Para Gueudet e Trouche (2010, p. 11, tradução nossa), “um conjunto de recursos gera, para uma classe de situações, durante uma gênese documental, um documento”.

Entretanto, a formação de um documento não é um processo simples e sua construção demanda um longo período. Segundo Hammoud (2012, p. 45, tradução nossa), “são as regularidades observáveis da atividade do professor, ou seus usos, que condicionam a construção de um documento”, ou seja, a utilização de um determinado recurso por um professor não necessariamente resultará em um documento. Isso se deve, segundo o autor, ao fato de o desenvolvimento de um documento continuar ao longo de seu ciclo de vida e, por essa razão, é difícil dizer com precisão em que estágio de sua vida será formado.

A partir dessa premissa, é possível refletir se as palavras recurso e documento seriam totalmente adequadas para descrever o que um professor produz em seu trabalho diário. Tais questionamentos levaram Hammoud (2012) a propor três conceitos na esfera da ADD para descrever os diferentes estágios do processo de desenvolvimento de um documento, denominados: recurso mãe, recurso filho e recurso-intermediário:

Entende-se por recurso-filho, tudo aquilo que o professor preparou e implementará em sua classe no final do estágio de design, isto é, o recurso finalizado em um dado momento que será implementado em aula, e que foi produto da mobilização e recombinação de recursos-mãe e recurso intermediário como sendo a versão intermediária do recurso-filho que ainda não foi totalmente finalizada. (HAMMOUD, 2012, p. 46, tradução nossa).

Para sustentar a relevância desses conceitos, o autor respaldou-se nas contribuições elaboradas por Gueudet e Trouche (2008), que apontaram a necessidade de considerar a combinação de diferentes recursos com um propósito didático, levando em conta a obediência de três níveis: o primeiro, relativo aos materiais utilizados, cuja origem poderia ser física ou digital, mas também incluindo artefatos como computador, arquivos ou softwares; um segundo nível, referente ao conteúdo matemático, que pode ser analisado sob a perspectiva das organizações matemáticas (OM), e, por fim, os elementos relativos ao funcionamento da aula, isto é, seu planejamento, observado sob a ótica das organizações didáticas (OD).

Considerando os três níveis preconizados por Gueudet e Trouche (2008), um recurso-filho voltado ao ensino de função deveria contemplar o devido suporte material para sua execução, incluir conteúdos matemáticos relacionados ao tema, bem como abranger elementos de sua organização didática ou, em outras palavras, a OI, com o propósito de gerir didaticamente os artefatos necessários para implementar uma determinada situação.

Na perspectiva do exemplo hipotético, seria possível identificar como recurso-filho o material didático final elaborado pelo professor com o propósito de apoiar a introdução ao ensino de função na educação básica, mediante a construção de uma noção intuitiva do tema. A combinação dos recursos que proporcionaram seu surgimento poderia, sob esse olhar, ser considerada como recursos-mãe.

Por outro lado, apenas uma observação ao longo do tempo e o uso regular que o professor viesse a fazer do recurso-filho trariam elementos para ‘classificá-lo’ como um documento. Sob tal ótica, o recurso-filho, elaborado pelo professor no exemplo utilizado na presente seção, deve ser considerado, segundo Hammoud (2012, p. 51, tradução nossa), “como um componente material do documento”.

Do mesmo modo, ao se analisar a presença dos três níveis que constituem o recurso-filho, é possível reconhecer evidências da existência de materiais utilizados com origem física, digital e elementos que caracterizam conteúdos matemáticos diretamente relacionados ao tema função. Igualmente, há componentes de uma organização didática, representados pela intenção do professor em organizar o trabalho mediante a disposição dos estudantes em duplas e na orientação de que o material produzido deveria ser devolvido em uma folha de tarefas. Diríamos, portanto, que a combinação de recursos-mãe escolhidos pelo professor poderia proporcionar o surgimento de um recurso-filho para a classe de situação relacionada ao objetivo daquela tarefa específica.

Em relação aos conhecimentos mobilizados pelo professor durante o processo, é possível supor relativamente à identificação de um esquema documental mobilizado por ele, cujo invariante ‘seria necessário trabalhar a ideia de processo’ poderia ser um de seus traços, corroborando a afirmação de Gueudet e Trouche (2010, p. 11, tradução nossa) de “que é no repertório de esquemas disponíveis que se baseia o funcionamento cognitivo de um professor”.

Os processos que constituem a formação de um documento, denominados gêneses documentais, integram duas dimensões: a de instrumentação e a de instrumentalização. Segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p.4, tradução nossa), “são os processos de instrumentação e de instrumentalização que dão pistas da natureza existentes nas interações professor-recurso”, já que estes revelam as práticas utilizadas pelo professor para planejar, replanejar ou planejar-em-uso de acordo com suas necessidades de ensino.

Figura 1 – Esquema da gênese documental



Fonte: Adaptado de Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p.4, tradução nossa).

Na Figura 1, é apresentado o esquema da gênese documental em que podemos observar suas dimensões, a instrumentação (quando os recursos instrumentam a ação didática do professor) e a instrumentalização, voltada ao processo de apropriação e modificação de recursos. Como na relação artefato-instrumento existente na gênese instrumental, na dialética recurso-documento o professor irá se apropriar de um recurso (ou um conjunto de) por meio da vivência dos processos de instrumentação e instrumentalização para uma determinada classe de situações. Todo esse processo, chamado de gênese documental, desenvolve-se continuamente ao longo do tempo, resultando na criação de um documento que, por sua vez, é entendido como uma entidade híbrida que associa recursos recombinações a um ou mais esquemas de uso construídos pelo professor para uso em uma determinada classe de situações.

Considerando o exemplo hipotético, a combinação dos recursos-mãe efetuada pelo professor, que deu origem a um recurso-filho projetado para uso em sala de aula, pode ter sido desencadeada por movimentos de instrumentação e instrumentalização. O movimento feito pelo professor, de se apropriar e/ou modificar os recursos videoaula, livro didático, e-livro, dúvidas dos estudantes e conselhos dos colegas caracteriza a dimensão da instrumentalização, enquanto a

influência exercida pelo conjunto de recursos no sentido de instrumentar sua ação didática, a dimensão da instrumentação.

Gueudet e Trouche (2010) consideram também que o conjunto formado por todos os recursos utilizados por um determinado professor é denominado sistema de recursos, e que os documentos produzidos por um professor não vivem sozinhos, pois estão articulados em um outro sistema, denominado sistema de documentos. De acordo com os autores, o sistema de documentos é constituído pelo sistema de recursos e dos saberes profissionais que impulsionam o desenvolvimento e a utilização desses recursos. Complementarmente, segundo Gueudet e Trouche (2012, p. 31, tradução nossa), “é comum que o professor compartilhe com outros colegas um trabalho de documentação que pode desenvolver um sistema de recursos compartilhados”, ainda que os diferentes membros desse grupo possam desenvolver esquemas diferentes para o mesmo recurso, o que resulta na formação de documentos distintos. A ADD também possibilita compreender, por meio do trabalho de documentação, a variedade de interações existentes no trabalho do professor, sejam elas de natureza coletiva, institucional ou social.

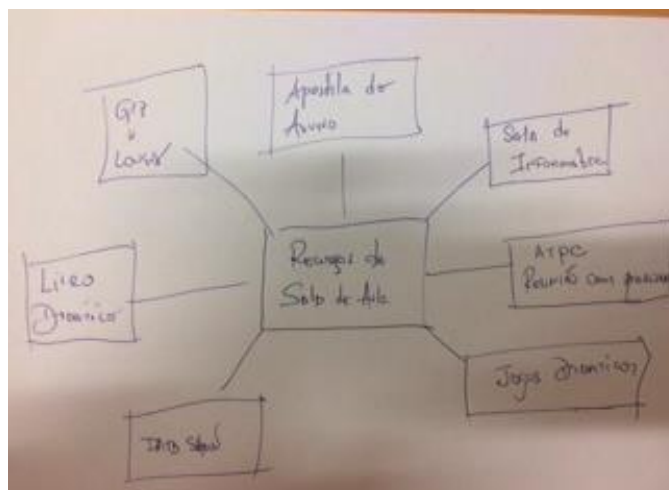
O sistema de recursos e de documentos dos professores ocupa uma importância central na ADD. Para identificá-los, algumas contribuições metodológicas têm sido propostas no âmbito da ADD, tais como a Representação Esquemática do Sistema de Recursos – RESR, proposta por Hammoud (2012), utilizada para solicitar aos professores descreverem suas interações com recursos, conforme pode ser observado em um exemplo disponibilizado na Figura 2.

Entretanto, a construção do esboço de uma RESR nem sempre traduz fielmente o sistema de recursos de um professor. Nesse sentido, Wang (2019) introduziu a ideia de Mapeamento Inferido do Sistema de Recursos (MISR), utilizado pelo pesquisador durante a realização de entrevistas como ferramenta para tentar esboçar um sistema de recursos mais próximo da realidade.

A fim de fazer uma alusão à sala de aula de matemática, Trouche (2004) a comparou a uma orquestra, utilizando o verbo orquestrar de forma metafórica para descrever o papel do professor como um maestro que dirige uma composição

executada por músicos com seus instrumentos, e assim introduzir, de maneira didática, a teoria da OI.

Figura 2 – Exemplo de RESR



Fonte: Xavier Neto, Silva e Trouche (2019, p. 308).

Nessa comparação, os alunos seriam os músicos, e os instrumentos musicais estariam assemelhados a instrumentos didáticos. A OI foi desenvolvida para, segundo Trouche (2004, p. 7, tradução nossa), “guiar os estudantes em suas gêneses instrumentais” e, portanto, carrega um sentido explícito de intencionalidade e é definida

como uma organização intencional e sistemática feita pelo professor, a fim de utilizar, em um ambiente de aprendizado, sobretudo rico em tecnologias digitais, vários artefatos que estão disponíveis em uma determinada situação matemática, com o propósito de guiar as gêneses instrumentais dos alunos. (DRIJVERS, 2012, p. 267, tradução nossa).

De acordo com Drijvers (2012), em uma orquestração, é possível distinguir três elementos: uma configuração didática, um modo de exploração e um desempenho didático.

A configuração didática trata do arranjo dos artefatos no ambiente em que ocorre a situação de aprendizagem, ou seja, se pensarmos na metáfora introduzida por Trouche (2004), poderia ser comparada com a escolha dos instrumentos musicais; um modo de exploração refere-se à maneira com que um professor decide colocar em prática o arranjo dos artefatos a fim de fazer valer suas intenções didáticas, enquanto um desempenho didático se refere, de acordo com Drijvers *et al* (2010, p. 216, apud Lucena, 2019, p.49) “ao desempenho alcançado pelo cenário

projetado, em que se faz possível verificar a viabilidade das intenções e o sucesso da realização da OI”.

A OI passa a ser um elemento importante de subsídio para a compreensão do trabalho documental, na medida em que, ao planejar uma aula para ensinar função, os professores têm uma preocupação manifesta com a aprendizagem dos estudantes e, para isso, orquestram o ambiente em que a aula acontecerá, a fim de guiar as gêneses instrumentais dos estudantes. Recentemente, uma contribuição a respeito do emprego de tecnologias digitais em sala de aula de matemática por meio de OIs foi proposta por Lucena (2019), ao introduzir a noção de Meta-Orquestração Instrumental – MOI, especificamente destinada à formação de professores.

Considerando o exemplo utilizado ao longo desta seção, pode-se dizer que, ao escolher uma situação matemática com o intuito de introduzir o ensino de função, determinando os artefatos que seriam disponibilizados aos estudantes, como o *site* Khan Academy ou os exercícios do e-livro, e definindo a organização de cada um dos participantes, o professor deu contornos à configuração didática da orquestra.

A forma como decidiu implementá-la, mesmo sabendo que poderia fazê-la de outras maneiras, caracterizou seu modo de execução. Por outro lado, para compreender o desempenho alcançado pelo cenário planejado e observar o sucesso da OI, ou, em outras palavras, como ocorreu a gênese instrumental dos estudantes, seria necessário dispor de elementos relativos aos resultados alcançados pela atividade e assim inferir o desempenho didático.

A seguir, com o objetivo de justificar cientificamente esta pesquisa, é apresentada a revisão bibliográfica, realizada em duas partes, uma para identificar as pesquisas mais recentes que estudaram a FVSM, e outra para aquelas que utilizaram em seu referencial a ADD e a OI.

2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE FVSM

O estudo a respeito da FVSM na área de Educação Matemática concentra-se, fundamentalmente, na investigação dos fenômenos de ensino e aprendizagem no âmbito da Educação Básica e Universitária.

As investigações encontradas foram selecionadas por meio de buscas no portal eletrônico de periódicos, teses e dissertações da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES⁷, nas bases de dados e citações da literatura científica e fontes de informação de nível acadêmico na *Internet* nos sites Springer⁸, Scopus⁹ e Taylor e Francis¹⁰ *online*, nas redes sociais científicas *Academia.edu*¹¹ e *Research Gate*¹² e por meio de indicações.

No portal eletrônico de periódicos, teses e dissertações da CAPES foi utilizado inicialmente como descritor, “ensino e/ou aprendizagem de função”, obtendo como resultado 2149 artigos, 188 livros, 56 dissertações, 29 recursos textuais, 21 teses e 2 atas de congressos. Em seguida, as buscas foram refinadas, inicialmente por meio da seleção de trabalhos na área de conhecimento da educação, obtendo como resultado 254 artigos, 4 livros, 17 dissertações e 4 teses e, a seguir, por meio da introdução das palavras “função com várias sentenças”, obtendo-se 35 trabalhos. Posteriormente, passou-se ao estudo das investigações selecionadas, em que foi possível perceber que vários dos trabalhos abordaram FVSM em meio ao estudo de função, e optou-se por descartar aqueles que, em nosso entendimento, tratavam FVSM de maneira muito superficial. Ao final do processo de levantamento, foram selecionados 7 trabalhos distribuídos da seguinte maneira: 1 tese, 5 dissertações e 1 artigo.

Estratégia semelhante foi utilizada nas bases de dados que reúnem publicações internacionais e nas redes sociais científicas. em que foi possível observar resultados muito similares. O processo de refinamento das buscas

⁷ <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>

⁸ <https://www.springer.com/br>

⁹ <https://www.scopus.com/home.uri>

¹⁰ <https://www.tandfonline.com/>

¹¹ <https://www.academia.edu/>

¹² <https://www.researchgate.net/>

resultou em 22 trabalhos, dos quais foram descartados os que abordavam FVSM de maneira marginal, o que proporcionou a seleção de 5 trabalhos artigos. Foram ainda acrescentados a esse grupo de 12 trabalhos, outros 2 artigos obtidos por meio de indicação e outros 4 objetos de busca em outras bibliografias (1 artigo, 1 tese e 2 dissertações) totalizando, ao final do processo de levantamento, 18 referências bibliográficas.

Os trabalhos foram mapeados e, a fim de que se pudesse organizá-los, optou-se por resumi-los considerando aspectos tais como: o(s) referencial teórico utilizado; a metodologia abordada; os objetivos; a abordagem referente às Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC e qual(s) conteúdo matemático se relacionou à FVSM.

Posteriormente, a fim de organizar as análises e compreender melhor a utilização da FVSM, estabeleceram-se as categorias relacionadas com os sujeitos das investigações escolhidas, ou seja, alunos do ensino básico, alunos do ensino superior e professores. A razão dessa escolha recaiu no interesse em descobrir de que forma as pesquisas selecionadas que tratam de FVSM se relacionaram com o ensino e/ou a aprendizagem. Em relação à categoria alunos do ensino básico, Quadro 1, foram localizados 10 trabalhos, o que representa mais da metade das investigações selecionadas.

Markovits, Eylon e Bruckheimer (1986) pesquisaram a importância que a aprendizagem da definição de função pode exercer em outras áreas do conhecimento, especialmente nas ciências naturais, mediante uma investigação sobre possíveis dificuldades e equívocos na compreensão da FVSM por estudantes da educação básica. Argumentaram que os alunos aprendem a definir função ainda no ensino básico e dominam suas representações e seus componentes, tais como domínio, imagem e regra de correspondência. Entretanto, quando se deparam com situações em que uma função é definida por várias sentenças, apresentam grandes dificuldades de compreensão. A fim de investigar tais dificuldades com maior profundidade, uma pesquisa foi feita junto a um grupo de aproximadamente 400 alunos do 9º ano (alunos com aproximadamente 14 anos de idade) nos EUA. Os autores desenvolveram uma grande variedade de problemas para explorar as

representações gráficas e algébricas de funções e propuseram sua resolução aos estudantes.

Quadro 1 - Trabalhos da categoria Alunos do Ensino Básico

Autor(es) e ano da publicação	Natureza do Trabalho / Origem	Título do trabalho
Markovits, Eylon e Bruckheimer (1986)	Artigo / Bibliografia de outro trabalho	<i>Functions Today and Yesterday</i>
Aldon (1995)	Artigo / Indicação	<i>Une Voiture À La Dérive</i>
Elia, Panaoura, Eracleus e Gagatsis (2006)	Artigo / Research Gate	<i>Relations Between Secondary Pupils' Conceptions About Functions and Problem Solving in Different Representations.</i>
Barreto (2009)	Tese / Portal CAPES	A análise da compreensão do conceito de função mediado por ambientes computacionais
Acevedo (2013)	Dissertação / Bibliografia de outro trabalho	<i>Propuesta de Enseñanza sobre la Modelación de Funciones por Tramos pasando de lo Concreto a lo Abstracto</i>
Geiger e Redmond (2013)	Artigo / Research Gate	<i>Designing mathematical modelling tasks in a technology rich secondary school context</i>
Vasconcelos (2015)	Dissertação / Portal CAPES	O conceito de função nas pesquisas dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (1987-2003)
Xavier Neto (2016)	Dissertação / Portal CAPES	Um estudo da Gênese Instrumental para a função de uma variável real com várias sentenças
Gonçalves e Allevato (2018)	Artigo / Portal CAPES	A resolução de problemas como proposta metodológica para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças
Silva (2018)	Dissertação / Portal CAPES	Estudo de função: uma proposta de reconstrução de atividades do Imagiciel mediadas pelo GeoGebra

Fonte: Produção do Pesquisador.

Os autores concluíram que os estudantes apresentaram dificuldades em identificar a FVSM quando as relações foram propostas algebricamente, pois não perceberam que regras diferentes de correspondência se aplicam a diferentes partes do domínio. Observaram também que os alunos pensam que uma função deve possuir a mesma regra de correspondência sobre todo o domínio e atribuíram tais dificuldades ao fato de a FVSM não ser abordada claramente nos materiais curriculares utilizados no ensino básico.

O relato de experiência organizado por Aldon (1995) referiu-se a um trabalho envolvendo aprendizagem de função, organizado para uma classe de alunos do Lycée, 1ère (alunos com aproximadamente 16 anos de idade) na França, que incluiu o uso de tecnologia digital. A experiência teve aproximadamente um ano de duração e faz parte de um projeto existente no currículo francês, que visava,

em relação à Matemática e especificamente ao campo da Álgebra, ensinar o conceito de função usando tecnologias computacionais.

De acordo com o relato produzido, um problema matemático foi proposto a uma turma de estudantes que, no processo de resolução, deveriam utilizar laptops e o software *derive*. Os alunos foram organizados em grupos de trabalhos e orientados a exercer o papel de matemáticos, passando para ‘o computador’ um esboço feito em papel da carroceria de um carro, com a condição de encontrar duas funções que modelassem o desenho. De acordo com Aldon (1995, p. 29, tradução nossa), a proposta “esteve articulada em dois eixos: consolidar a prática do cálculo literal e numérico em relação estreita ao estudo de funções”, além de permitir explorar equações, inequações e sistemas de equações e inequações lineares.

Segundo o autor, os estudantes foram organizados em grupos de 4 a 5 alunos que podiam realizar o trabalho fora do ambiente escolar. Durante aproximadamente 6 meses, foram periodicamente convocados pelo professor e tiveram que organizar seminários a fim de acompanhar o estágio em que se encontravam os trabalhos e esclarecer questões relativas à manipulação do *software*. O autor observou que, quando os grupos mobilizaram a noção de função polinomial, tentaram inicialmente resolver o problema construindo uma curva por meio de pontos conhecidos do desenho, mas verificaram que, ao escolherem 7 pontos, formavam um sistema composto por 8 equações e 8 incógnitas.

Um sistema dessa magnitude, de acordo com o autor, representou um obstáculo enorme aos estudantes, pois, além de não habitual, ocasionou problemas na interpretação dos resultados, uma vez que para esse tipo de sistema, os resultados possuíam cerca de 15 dígitos. A fim de superar tais adversidades, o software *derive* desempenhou um papel primordial, exercendo a função de calculadora, ainda que os primeiros desenhos produzidos pelos grupos apresentassem funções consideradas pelo autor como caóticas, o que naturalmente foi sendo aperfeiçoado com o desenrolar do tempo.

“A FVSM surgiu quando um aluno propôs a substituição das linhas do gráfico por parábolas (na verdade substituindo pedaços de linhas retas por pedaços de parábolas)” (IBID, p. 34, tradução nossa), a fim de tornar o desenho do carro menos obsoleto, e na percepção da existência de descontinuidade da função nas

junções de diferentes curvas, o que foi determinante para a construção da modelagem. A princípio, a solução foi refutada pelos outros grupos. Apesar da intervenção do professor no sentido de contemplar a solução proposta, os demais estudantes “continuaram suas pesquisas tentando obter uma função com uma única sentença para construir o modelo solicitado” (ALDON, 1995, p. 34, tradução nossa), pois, para a maioria deles, uma função não deveria possuir mais de uma sentença. Tal dificuldade foi atribuída “à existência de um obstáculo epistemológico ligado à definição formal de função preconizada por Euler durante o século XVIII” (IBID, p. 38, tradução nossa) e a hesitações de natureza histórica no estabelecimento do conceito de função.

Posteriormente, na parte final do trabalho, segundo o autor, os estudantes puderam elaborar uma ideia de função articulando a existência de várias sentenças, com a troca de impressões entre os grupos. Por fim, o papel do software foi preponderante no sentido de permitir que os estudantes resolvessem problemas que envolvem cálculos considerados difíceis para o alcance de seu nível de aprendizagem, além de tornar mais simples a construção da figura do carro.

A pesquisa de Elia et al. (2006) teve por objetivo investigar como um grupo composto por 179 alunos do 11º ano (alunos com aproximadamente 16 anos de idade) do ensino médio de uma escola pública no Chipre compreendia a definição de função. Para tanto, os autores desenvolveram um método fundamentado em um modelo proposto por Lesh que, segundo Elia et al. (2006, p.541, tradução nossa) “possibilita compreender o conhecimento que um determinado indivíduo tem a respeito de um conceito matemático”. Nesse sentido, um teste composto por 7 itens foi desenvolvido pelos autores e, posteriormente, administrado aos alunos. O quadro teórico integrou duas perspectivas: a teoria dos registros de representação semiótica desenvolvido por Duval e a compreensão, aquisição de conhecimento e solução de problemas, elaborado por Demetriou.

Os dados foram analisados descritivamente com auxílio do software estatístico SPSS, e os resultados apontaram que 35% dos alunos deram uma definição correta para função, 43,6%, uma definição ambígua e outros 13,4%, uma resposta incorreta. O estudo também apontou a existência de uma grande dificuldade em reconhecer a FVSM como sendo uma função “devido à necessidade

de coordenar várias representações, como, por exemplo, equações, gráficos, tabelas” (ELIA ET AL, 2006, p.546, tradução nossa). Nas conclusões, os autores revelaram a existência de dificuldades dos alunos em fornecer uma definição adequada para função e em resolver problemas que envolvam conversões de representações entre diversos tipos de registros.

O estudo de Barreto (2009) teve por objetivo analisar a compreensão do conceito de função em atividades mediadas por ambientes computacionais, por alunos do 1º ano do ensino médio (alunos com aproximadamente 15 anos de idade) de uma escola da rede pública da cidade de Fortaleza, no estado do Ceará. O autor, professor de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de bacharelado em Ciências da Computação, observou que os alunos ingressantes no curso universitário apresentavam dificuldades em compreender o conceito de função, especificamente em traçar gráficos de FVSM, o que considera importante para a compreensão de limites. Acrescenta, por exemplo, que

alguns alunos rejeitam que a relação do tipo $r(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ não é uma função uma vez que não aparece uma fórmula analítica nem a variável y está explicitamente em função da variável x . (BARRETO, 2009, p. 49).

O referencial teórico baseou-se nas contribuições de Ausubel, Vergnaud, Skemp e Vinner, que investigam o processo de formação de conceitos, e a metodologia teve enfoque qualitativo e quantitativo com o emprego de técnicas estatísticas para a análise dos dados, desde porcentagem e desvio-padrão até as mais complexas, como o teste t de *Student* e o algoritmo de Kolmogorov.

Na parte experimental da investigação, segundo o autor, os estudantes, organizados em grupos em um laboratório de informática, resolveram problemas de um módulo de atividades desenvolvidas pelo pesquisador usando os programas *Winplot* e *Graphática*. Os resultados indicaram que os ambientes computacionais para o ensino de função representaram uma poderosa ferramenta de aprendizagem do aluno e para identificar os principais obstáculos à construção de seu conceito. Ao trabalhar com as múltiplas representações oferecidas pelos softwares, “os alunos tiveram mais possibilidades de produzir significados aos conteúdos ligados ao conceito de função” (IBID, p. 279), uma vez que puderam interligar diversas representações, ampliando seu repertório de conhecimento.

A investigação de Acevedo (2013) teve como objetivo analisar, por meio de um estudo de caso, o desenvolvimento de uma modelagem matemática, utilizando diversas situações mediadas pelo uso do Geogebra, envolvendo problemas relacionados à FVSM, tendo como referenciais teóricos a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e as contribuições de George Polya, relacionadas ao planejamento e à resolução de problemas matemáticos. Durante tais situações de ensino, a modelagem foi utilizada como estratégia didática, a fim de que estudantes do Grau 11 (alunos com aproximadamente 15 anos de idade) do ensino médio colombiano resolvessem, com a ajuda do software *GeoGebra*, problemas, de uma sequência didática com foco em área e perímetro de figuras geométricas que envolviam equação, inequação, porcentagem, perímetro e área das figuras geométricas planas - triângulo, retângulo e quadrado -, volume de um cubo, variável dependente e independente, lei da função, construção de gráfico, domínio, contradomínio e imagem.

Antes da implementação da sequência, foi realizada uma prova diagnóstica composta por 8 problemas envolvendo FVSM em um contexto de modelagem e contendo funções afim e quadrática, cujo intuito consistiu em identificar “dificuldades dos estudantes para construir modelos, indo do concreto ao abstrato” (ACEVEDO, p. 77, tradução nossa). Os resultados mostraram que “18,4% dos estudantes apresentaram acerto nos problemas envolvendo FVSM composta apenas por funções afim, e apenas 2,7% nos modelos que abordavam FVSM abrangendo funções quadráticas” (IBID, p. 138, tradução nossa).

Por outro lado, após a proposição das situações mediadas pelo uso de tecnologia, de acordo com o autor, os percentuais alcançados para a construção de modelos envolvendo a FVSM contendo “funções afim aumentaram para 59,3%, e foram a 47,6% aquelas que trataram da função do tipo quadrática”, evidenciando a importância da proposição de situações de aprendizagem envolvendo FVSM mediadas pelo uso de tecnologia. O estudo também concluiu que os estudantes melhoraram os modelos inicialmente projetados quando vivenciaram experiências que evidenciaram a passagem do concreto ao abstrato a partir de atividades ajustadas à sua realidade pessoal, social e cultural.

A pesquisa de Geiger e Redmond (2013) investigou o potencial das ferramentas digitais no aprimoramento da aprendizagem de estudantes australianos do ensino básico em um projeto específico que envolvia modelagem matemática. A metodologia utilizada foi o estudo de caso cujo foco recaiu em acompanhar as etapas de preparação e implementação do projeto por parte de um professor e seus alunos do 11^o ano (alunos com aproximadamente 14 a 15 anos de idade) de uma escola pública na Austrália. O quadro teórico envolveu a utilização da gênese instrumental para compreender o processo de aprendizagem dos estudantes, enquanto as ações do professor foram monitoradas mediante a observação de sua relação com recursos criados e/ou mobilizados para implementar o projeto.

O trabalho de planejamento do professor foi meticuloso e incluiu o papel esperado para cada ferramenta digital escolhida como facilitadora das tarefas de modelagem. Cabe salientar, que para desenvolver o projeto, “os estudantes tiveram acesso quase que irrestrito às tecnologias digitais” (GEIGER; REDMOND, p. 122, tradução nossa), incluindo aplicativos específicos, acesso à internet e calculadoras com tecnologia CAS (Cálculo Algébrico Simbólico), já que seu uso é obrigatório nos programas curriculares do ensino médio daquele país.

O problema proposto aos estudantes consistiu na elaboração de um modelo matemático que possibilitasse compreender a relação entre a proliferação de algas em um ambiente aquático e a produção de CO_2 na atmosfera. O professor previu que para essa construção seria necessário a elaboração de um gráfico de dispersão e que para isso os estudantes utilizariam calculadoras CAS, o que requereria a mobilização de conhecimentos sobre FVSM, já que o gráfico com os dados envolvendo as variáveis pesquisadas sugere a existência de uma parte linear e outra exponencial.

Os pesquisadores observaram que, embora os estudantes fossem capazes de produzir um gráfico utilizando as calculadoras, poucos compreenderam que seria necessário utilizar uma FVSM para modelar os dados. A maioria dos alunos tentou modelar os dados utilizando uma única sentença e produziu resultados que obviamente não se encaixaram bem com o que foi solicitado. Em razão disso, vários deles solicitaram ajuda do professor, que os incentivou a examinar mais

cuidadosamente seus dados e a ajustar o modelo construído. Após certo tempo, dois estudantes de um grupo elaboraram um modelo a partir de FVSM e completaram a tarefa proposta. O professor solicitou a esse grupo que compartilhasse a solução encontrada, de modo a proporcionar a seus pares a compreensão de que o modelo buscado necessitava da mobilização da FVSM, ainda que um pequeno grupo tenha demandado uma atenção mais direta do docente.

De acordo com Geiger e Redmond (2013, p. 126, tradução nossa), “as ferramentas digitais disponibilizadas aos estudantes permitiram testar uma gama de funções para o modelo procurado, oferecendo um *feedback* imediato” e tornando o problema mais acessível. Para a tarefa de construção do modelo, os estudantes também necessitaram mobilizar conhecimentos matemáticos e, nesse sentido, segundo os autores, a tecnologia permitiu melhor conexão entre eles, na medida em que proporcionou com que fosse possível, por exemplo, a visualização de diferentes formas de representações das funções.

No processo de execução da tarefa o professor procurou antecipar como os alunos usariam as ferramentas digitais para construir o modelo matemático recorrendo à FSVM, o que foi fundamental, pois “ele teve de alterar a abordagem de sua aula quando os estudantes seguiram por um caminho não previsto inicialmente” (IBID, p. 126, tradução nossa). Por outro lado, os autores observaram que o professor utilizou o modelo elaborado corretamente por dois estudantes como um recurso e orquestrou a situação para que os demais pudessem compreender a conexão entre as ferramentas digitais e o objetivo da tarefa proposta.

Ao investigar 11 edições do Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, no período de 1987 a 2013, especificamente a respeito da aprendizagem de função, Vasconcelos (2015) identificou três temas que puderam ser interpretados como obstáculos à sua compreensão: “a redução do conceito a um/alguns de seus significados, a abordagem excessivamente formal e a má compreensão por parte do professor em relação a este conceito” (VASCONCELOS, 2015, p. 26). Para aprofundar o estudo, foi necessário, segundo o autor, recorrer às obras de Karlson e Caraça, investigar aspectos do seu desenvolvimento na

perspectiva lógico-histórica. O processo de formalização científica do conceito foi estudado para o autor investigar como ocorreu a manifestação da disciplinarização do conceito e como ele foi proposto em alguns documentos curriculares nacionais. A análise dos artigos considerou “procedimentos de análise de conteúdo na perspectiva de Bardin” (VASCONCELOS, p. 17) e mostrou que a importância da caracterização de função está relacionada a seu papel social, seu potencial articulador entre conteúdos da matemática e sua utilidade para outras ciências.

Em relação à FVSM, foi possível inferir a existência de investigações que se dedicaram à sua abordagem para a aprendizagem, tanto na educação básica como no ensino superior. Dentre os principais problemas à sua aprendizagem foram ilustrados a falta de compreensão dos estudantes com as sentenças que compõem a FVSM, pois “se o sujeito não compreende os significados de domínio e contradomínio, torna-se difícil diferenciar as sentenças” (IBID, p.104) e a formalização precoce de função na educação básica.

Ainda de acordo com o autor, métodos de ensino mais eficientes “especialmente na educação básica, estão mais relacionados à introdução mais contextualizada do conceito de função, ao uso de softwares em sala de aula (especialmente para explorar a representação gráfica)” (IBID, p. 131) e a uma interpretação articulada das várias formas de representação de uma função.

A pesquisa conduzida por Xavier Neto (2016) teve por objetivo acompanhar o desenvolvimento cognitivo de um grupo de alunos do 2º e 3º anos do ensino médio brasileiro, por meio do estudo do fenômeno da gênese instrumental da FVSM. A metodologia utilizada na investigação foi a Engenharia Didática e como referencial teórico, além da Abordagem Instrumental de Rabardel, empregou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Para investigar o fenômeno da gênese instrumental e o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, o autor elaborou uma sequência didática composta por um conjunto de atividades oriundas da geometria plana e do cotidiano social.

A transformação do artefato FVSM em instrumento pôde ser constatada quando os envolvidos no trabalho resolveram, de maneira individual ou coletiva, as atividades propostas “mediante à mobilização dos esquemas de uso, ação instrumental e ação coletiva, evidenciando o fenômeno da gênese instrumental”

(XAVIER NETO, p. 142). Nesse sentido, três estudantes foram acompanhados ao longo da aplicação da sequência, sendo que em um deles foi possível observar a experimentação dos processos da instrumentação e instrumentalização, enquanto que nos outros dois, tal percepção foi parcial, evidenciando a existência de algumas “dificuldades na identificação da FVSM como sendo uma função” (IBID, p. 112) pelo fato de os participantes entenderem que uma função deva ter uma mesma regra de correspondência sobre todo o seu domínio.

A análise da forma como os estudantes mobilizaram e/ou criaram os esquemas de utilização, por intermédio dos registros de representação semiótica, possibilitou verificar como ocorreu o seu desenvolvimento cognitivo e permitiu inferir o desenvolvimento de sua aprendizagem.

Gonçalves e Allevato (2018) desenvolveram uma proposta educacional para ensinar FVSM a alunos do 2º ano do ensino médio (alunos com aproximadamente 16 anos de idade), por intermédio de resolução de problemas para promover a aprendizagem significativa. O estudo que originou a proposta utilizou como metodologias a pesquisa participante e a análise documental¹³ mediante aplicação de uma sequência didática junto a 15 estudantes em uma escola particular da cidade de Ourinhos/SP, enquanto o referencial teórico baseou-se nas contribuições de David Ausubel. Segundo os autores, os problemas que integraram a proposta foram inspirados em livros didáticos, tendo como critério a valorização de habilidades em resolver problemas do cotidiano.

As atividades que integraram a sequência didática procuraram explorar diversos tipos de funções, tais como afim e quadrática, e procuraram explorar sua representação gráfica incluindo situações de descontinuidade, pois, de acordo com Gonçalves e Allevato (2018, p. 34), “o trabalho com FVSM exerce um papel relevante no ensino e na aprendizagem do conteúdo função, pois permite trabalhar com diversos tipos delas”, além de favorecer a resolução de problemas em diversos contextos, o que aproxima a matemática de outras disciplinas do currículo escolar.

Os autores também sugeriram que a resolução de problemas como estratégia de aprendizagem de FVSM “precisa ir além das atividades individuais,

¹³ No sentido de uma técnica relacionada a pesquisa qualitativa.

buscando promover, dentre outros aspectos, um ambiente de interação entre professor e aluno” (GONÇALVES; ALLEVATO, 2018, p. 20), para que as resoluções construídas pelos estudantes possam ser refletidas em um ambiente colaborativo e levem à apropriação do conceito.

A pesquisa de Silva (2018) teve como objetivo verificar como algumas construções referentes ao ensino e aprendizagem de função, presentes no *Imagiciel* e cinco cadernos com atividades desenvolvidas por pesquisadores franceses entre o final da década de 1980 e início da década de 1990, que não rodam mais nos computadores, poderiam facilitar a aprendizagem de função, em especial a FVSM com alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola particular da cidade de São Paulo. Para tanto, o autor reconstruiu as atividades existentes no ambiente do *Imagiciel* e dos cadernos com auxílio do *GeoGebra* e integrou-as a uma sequência didática especialmente desenvolvida para estudar aprendizagem do tema.

A metodologia utilizada envolveu elementos da Engenharia Didática, e o referencial teórico empregou a dialética ferramenta-objeto de Douady. A sequência didática priorizou a mudança do quadro geométrico para o tabular, deste para o geométrico e finalmente para o algébrico, por essa ser uma estratégia pouco utilizada nos livros didáticos e que permite um trabalho simultâneo de diferentes representações de uma mesma função. Essa tarefa foi elaborada para permitir a mobilização de conhecimentos pré-existentes dos estudantes, mas, diferentemente do esperado, “parte dos conhecimentos antigos dos alunos não estava totalmente mobilizável” (SILVA, p. 160), fazendo com que fosse necessária a revisão de alguns temas, como a semelhança de triângulos, domínio e contradomínio e construção de gráficos.

Silva (2018, p. 93) concluiu “que boa parte dos alunos desenvolveu um domínio do objeto matemático FVSM em intervalos reais, mais especificamente, FVSM polinomiais do 2º grau em intervalos reais” e, além disso, a mudança de quadros possibilitada pelos *Applet's*, seguindo os pressupostos da dialética ferramenta-objeto, auxiliou na compreensão de função.

Relativamente aos trabalhos selecionados na categoria alunos da educação básica, foi possível observar que os estudantes desse nível de ensino

apresentam dificuldades na compreensão de FVSM, conforme tratado, por exemplo, nos trabalhos de Markovits, Eylon e Bruckheimer (1986), Elia, et al (2006) e Geiger e Redmond (2013).

O cerne das dificuldades encontradas consistiu no fato de os alunos não perceberem que regras distintas de correspondência se aplicam a diferentes partes do domínio, ou que a existência de mais de uma sentença pode ser característica da formação de uma função.

Da mesma forma, conforme apontado, por exemplo, nas investigações de Gonçalves e Allevato (2018) e Silva (2018), também se observou a existência de dificuldades por parte desse segmento em reconhecer a FVSM como uma função, devido a necessidade em coordenar vários tipos de representações, especialmente a gráfica.

Em relação a segunda categoria relacionada aos alunos do ensino superior (Quadro 2), foram encontrados 5 trabalhos dentre os 18 selecionados.

Quadro 2 - Trabalhos da categoria Alunos do Ensino Superior

Autor(es) e ano da publicação	Natureza do Trabalho / Origem	Título do trabalho
Breidenbach, Dubinsky, Haws e Nichols (1992)	Artigo / <i>Springer</i>	<i>Development of the Process Conception of Function</i>
Oliveira (1997)	Dissertação / Portal CAPES	Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem
Lima (2008)	Dissertação / Portal CAPES	A Aprendizagem Significativa do conceito de função na formação inicial do professor
Huh (2009)	Tese / Bibliografia de outro trabalho	<i>Función Definida por Partes: Un Análisis Histórico-Didáctico referente a su tratamiento Escolar</i>
Chumpitaz (2013)	Dissertação / Bibliografia de outro trabalho	<i>La Génesis Instrumental: Un Estudio de los Procesos de Instrumentalización en el Aprendizaje de la Función Definida por Tramos mediado por el Software GeoGebra com estudantes de Ingeniería</i>

Fonte: Produção do Pesquisador.

A investigação de Breidenbach et al. (1992) teve dois objetivos: entender as dificuldades sobre o conceito de função em um grupo de estudantes universitários pertencentes a um curso de Bacharelado em Matemática de uma Universidade dos EUA (inclusive aqueles que obtiveram bons resultados ao longo do curso) e observar até que ponto um ambiente computacional favoreceu a

construção mais consistente do conceito, sob a lente da teoria APOS¹⁴ proposta por Dubinsky (1989). O grupo, composto por 59 alunos que, no momento da investigação, preparavam-se para tornarem-se professores de matemática do ensino médio ou fundamental, foi observado durante um semestre e tinha concluído todas as disciplinas de cálculo.

Os autores da pesquisa solicitaram aos estudantes que explicassem o significado de uma função e apresentassem exemplos. Esperavam que o grupo apresentasse respostas considerando que “compreender o conceito de função não se restringe a uma mera manipulação de fórmulas ou manipulação de diagramas de Venn, e deve incluir uma concepção de processo”. (BREIDENBACH et al., 1992, p. 247, tradução nossa).

As respostas obtidas nessa fase foram agrupadas em quatro categorias: pré-função, ação, processo e desconhecido. Uma resposta considerada como pré-função foi aquela em que o aluno pareceu não conhecer muito bem o conceito de função, como por exemplo, ‘uma equação matemática com variáveis’, ou mesmo ‘uma afirmação matemática para descrever algo’. Respostas categorizadas como ação foram aquelas que enfatizaram o ato de substituir variáveis por números, mas não fizeram referências a nenhum processo, como por exemplo, ‘uma função é algo que avalia uma expressão em termos de x ’, ‘uma função é uma combinação de operações utilizadas para se obter uma resposta’, ou mesmo ‘uma função é uma equação na qual uma variável é manipulada para se obter uma resposta’.

Por outro lado, as respostas que contemplassem uma concepção de processo deveriam mencionar claramente entrada, transformação e saída de maneira integrada e generalizada, tal como ‘uma função é algum tipo de entrada que, após processada, fornecerá algum tipo de saída’, ‘é uma operação que permite um determinado valor e retorna um valor correspondente’, enquanto aquelas respostas em que não foi possível identificar uma concepção foram classificadas como desconhecidas.

Os autores observaram que várias respostas sugeriram uma combinação dessas concepções, indicando que as quatro categorias poderiam não representar

¹⁴ Sigla referente aos termos na língua inglesa: *Action, Process, Object, Schema*.

fielmente estágios de desenvolvimento do conceito de função e sim maneiras diferentes de pensar a respeito do tema.

Em relação à FVSM, os resultados apontaram que, 21 dos 59 estudantes pesquisados apresentaram dificuldades em reconhecê-la como uma função, assim como hesitaram na interpretação de representações gráficas quando lhes foi solicitado operar com domínios envolvendo cenários de descontinuidade.

Nos dois meses seguintes, o grupo foi dividido em subgrupos com 4 a 5 componentes com o objetivo de criar uma atmosfera de cooperação, usando lápis e papel para resolver os problemas propostos, mas depois foi introduzido um ambiente mediado por computadores. O software utilizado foi o *ISETL*, “uma linguagem de programação interativa que possibilita implementar uma série de construções matemáticas com uma sintaxe similar à notação matemática padrão”, (BREIDENBACH ET AL., 1992, p. 254, tradução nossa) e que funcionava muito bem nos sistemas operacionais Macintosh e MS-DOS.

Em tal cenário, três instrumentos foram utilizados pelos autores para investigar possíveis concepções a respeito do conceito de função. O primeiro foi propor novamente ao grupo o que era uma função; o segundo, aplicado ao mesmo tempo, solicitou-lhes exemplificar três tipos diferentes de funções e no terceiro, aplicado tempos depois, esperava-se que os estudantes decidissem, a partir de uma lista com descrições de diferentes situações, se estas poderiam ser expressas por funções. Os autores observaram que, dos 170 exemplos dados pelos 59 estudantes, 69 envolveram situações com o *ISETL*: “O ambiente computacional sugere que as atividades propostas podem ter enriquecido a experiência matemática dos estudantes e, de certa forma, impulsionado seu pensamento a respeito de função” (IBID, p. 259, tradução nossa). Isso porque eles expressaram concepções de processo mais nítidas, se comparadas ao primeiro momento da investigação. Também foi possível observar, nessa fase, que apenas 9 dos estudantes continuaram não reconhecendo FVSM como uma função e/ou apresentaram hesitações em situações envolvendo descontinuidade.

A investigação de Oliveira (1997) foi voltada ao estudo do conceito de função com um grupo de estudantes universitários da disciplina de cálculo diferencial e integral do 1º ano de um curso de Engenharia em uma Universidade

particular do estado de São Paulo. O referencial teórico utilizado foi a dialética ferramenta-objeto de Douady, e a metodologia incluiu estudos históricos, epistemológicos e o emprego de uma sequência didática.

A autora traçou como hipótese a necessidade de colocar o aluno para agir em uma situação adidática, em que compreendesse as noções de correspondência, dependência e variação, e utilizasse o jogo de quadros e mudanças de registro de representação para a compreensão do que é uma função.

A análise *a posteriori* de uma sequência didática revelou que houve um avanço nas concepções dos alunos sobre o conceito de função, na medida em que “começaram a relacioná-lo com seus aspectos de variação, correspondência e dependência entre variáveis” (OLIVEIRA, p. 174), sendo que muitos identificaram diversas funções entre tabelas, gráficos e expressões algébricas.

As conclusões observadas indicaram que quando se depararam com a FVSM, os estudantes tiveram muitas dificuldades em reconhecê-la como uma função, entendendo-a como se fosse mais de uma função e representando cada sentença com um gráfico.

A pesquisa de Lima (2008) teve como objetivo descrever, mediante um estudo de caso, como um grupo de licenciandos em Matemática da Universidade Estadual do Ceará – UECE ressignificaram o conceito de função diante de uma proposta de aprendizagem baseada nos pressupostos teóricos de Ausubel. A metodologia planejada pelo autor foi executada em duas fases. Na primeira, foi feito um levantamento de conhecimentos prévios dos estudantes, e na segunda, a aplicação de um conjunto de atividades contou com a utilização do software *CMapTools*, desenvolvido especificamente para a construção de mapas conceituais.

De acordo com o modelo metodológico empregado na investigação, a participação do pesquisador foi intensa, o que também contribuiu não apenas para que os alunos estruturassem mentalmente o conceito de função, bem como para que o ressignificassem. A intervenção do pesquisador, no processo de ressignificação, foi dividida em 3 fases:

Fase 1 – Assimilação do conceito de função – Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora;
Fase 2 – Organização do Conceito de Função – Mapas Conceituais;
Fase 3 – Aplicação do Conceito de Função – Consolidação. (LIMA, 2008, p. 100).

Na Fase 1, o objetivo da inserção consistiu em proporcionar ao grupo o trabalho com o refinamento do significado de conceitos básicos que sustentam o conceito de função, tais como de expressão algébrica, variável dependente e independente, variável, equação e incógnita. Posteriormente, foram discutidos “novos conceitos relacionados ao conceito de função, aos conceitos de Dirichlet, do século XIX, e de Elon Lages Lima e Geraldo Ávila, do século XX” (LIMA, p. 101). A Fase 2 consistiu em apresentar o conceito de Mapa Conceitual com auxílio do programa *CMapTools*, de modo a compreender como os alunos organizavam mentalmente, de forma gráfica, os conceitos estudados, enquanto a Fase 3 teve o propósito de compreender como eles utilizavam o conceito de função na resolução de problemas, conforme os preceitos estabelecidos nos parâmetros curriculares nacionais.

A análise dos resultados seguiu “o princípio da assimilação preconizada por Ausubel” (IBID, p. 21), para identificar, ainda na etapa do levantamento, dificuldades e contradições apresentadas pelos alunos ao construírem o conceito de função. Tais dificuldades, segundo a autora, foram ainda mais agudas na etapa de intervenção, principalmente na relação entre os conceitos de função, domínio e contradomínio, tornando claras as dificuldades dos estudantes em identificar a FVSM como função.

O processo de ressignificação, segundo a autora, proporcionou aos estudantes a revisão de seus conhecimentos sobre o conceito de função quando se depararam com a FVSM, já que antes desse processo não a viam como uma função. Para eles, “uma função necessitava de uma única expressão, que deveria ser expressa através de uma igualdade” (IBID, p. 236), mas após a etapa de intervenção da pesquisadora, passaram a considerar que uma ou mais sentenças matemáticas podem fazer parte do mesmo domínio e, portanto, da mesma função.

A investigação também apontou, como possíveis causas dos equívocos acerca da maneira com o qual os estudantes se relacionam com a FVSM, a existência de problemas relacionados à formação dos professores que a ensinam

e a valorização da aprendizagem de procedimentos matemáticos em detrimento da aprendizagem conceitual.

A investigação de Huh (2009) teve como objetivo central estudar a aprendizagem da FVSM com um grupo constituído por alunos de um curso superior de matemática em uma Universidade na cidade do México, mas apresentou também outras questões relacionadas à compreensão histórica e matemática do tema.

A autora realizou estudos em livros e artigos que possibilitaram construir três análises: a primeira, de caráter histórico a respeito da construção do conceito de função; a segunda, de natureza pedagógica, a partir do estudo em livros didáticos utilizados pelos professores que ensinam FVSM no México e, por fim, uma análise cognitiva viabilizada pela aplicação de uma sequência didática desenvolvida pela autora.

Huh (2009, p. 54, tradução nossa) observou “que, tanto na construção histórica do conceito como no tratamento didático de hoje, o conceito de função é apresentado com ênfase em suas representações algébricas e gráficas”. De um lado, ela concluiu que, após a aplicação da sequência didática, que contou com auxílio do software *Sketchpad* (um editor gráfico orientado a objetos) os alunos relacionam FVSM a comportamentos gráficos considerados irregulares, ou, em outras palavras, que não podem ser representados por uma única expressão algébrica. De outro lado, também concluiu que a FVSM “e seu aspecto gráfico não favorecem uma análise profunda por parte dos alunos em relação a outros tipos de relações gráfico-funcionais” (HUH, p. 83, tradução nossa), ou seja, a análise do comportamento gráfico das funções permitiu que os estudantes envolvidos na tarefa fizessem reflexões similares àsquelas feitas por pensadores matemáticos do passado.

O trabalho de Chumpitaz (2013) teve por objetivo analisar, nas ações dos estudantes da disciplina Análise Matemática de um curso de Engenharia da Universidade de San Ignacio de Loyola, no Peru, o fenômeno da gênese instrumental durante a aprendizagem de FVSM mediada pelo software *GeoGebra*. O referencial teórico utilizado no trabalho foi a Abordagem Instrumental de Rabardel e a metodologia empregada recorreu à Engenharia Didática.

Duas questões investigativas foram construídas pelo autor: i) como uma sequência didática pode minimizar as dificuldades encontradas por estudantes quando instrumentalizam algumas propriedades do software *GeoGebra* durante a aprendizagem de FVSM e ii) como a mesma sequência pode minimizar as dificuldades dos estudantes, ao instrumentalizar propriedades da FVSM durante seu processo de aprendizagem fazendo uso do *GeoGebra*.

Durante a aplicação de uma sequência didática construída especificamente com o objetivo de coletar dados que viabilizassem responder às questões de investigação, o autor percebeu “que os estudantes mobilizaram esquemas de uso pré-existent que permitiram minimizar as dificuldades proporcionadas pelas atividades existentes na sequência” (CHUMPITAZ, p. 136, tradução nossa), além de constatar que as propriedades dos artefatos conservaram as funções adquiridas ao longo das transformações em instrumentos.

O estudo concluiu que os problemas projetados na sequência didática e que envolveram a utilização do software favoreceram uma melhor compreensão da FVSM. Neles foram abordados os seguintes temas matemáticos: lei da função, domínio, equação, construção de gráfico, inequação, sobreposição e redundância, além de continuidade.

Relativamente aos trabalhos selecionados na categoria - alunos do ensino superior-, foi possível observar que os estudantes desse nível de ensino apresentam dificuldades na compreensão de FVSM, especialmente quando defrontados com sua representação gráfica, conforme evidenciado em investigações como as de Breidenbach et al (1992) e Oliveira (1997). Tais trabalhos apontaram a existência de hesitações por parte dos estudantes, inclusive aqueles que pretendiam seguir a carreira docente, em interpretar representações gráficas quando lhes foi solicitado, por exemplo, operar em domínios e a presença de descontinuidade.

Essas dificuldades, por outro lado, foram atribuídas à existência de problemas relacionados à formação dos professores, conforme observado nas investigações de Lima (2008), que ensinam a temática no transcorrer da educação básica e normalmente priorizam procedimentos matemáticos em detrimento da

aprendizagem conceitual, além de atrelar o ensino de função a cenários representados por uma única sentença.

Em relação a terceira categoria, a dos professores (Quadro 3), foram encontrados apenas 3 trabalhos dentre os 18 selecionados.

Quadro 3 - Trabalhos da categoria Professores

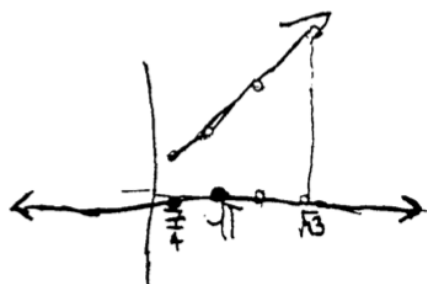
Autor(es) e ano da publicação	Natureza do Trabalho / Origem	Título do trabalho
Even (1990)	Artigo / <i>Springer</i>	<i>Subject Matter Knowledge for Teaching and The Case of Functions</i>
Bayazit (2006)	Artigo / Indicação	<i>The Influence of Teaching on Student Learning: The Notion of Piecewise Function</i>
Hatisaru e Erbas (2017)	Artigo / <i>Scopus Elsevier</i>	<i>Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes</i>

Fonte: Produção do Pesquisador.

A pesquisa de Even (1990) foi fundamentada no capítulo da revisão bibliográfica de sua tese, concluída na *Michigan State University* em 1989, que procurou investigar os conhecimentos, não apenas matemáticos, de professores que ensinam função na educação básica norte-americana. Os trabalhos selecionados pelo autor para essa revisão foram submetidos a critérios de análise que procuraram identificar os conhecimentos do professor para ensinar função e foram organizados em sete categorias: características essenciais, diferentes representações, formas alternativas de abordagem, profundidade do conhecimento, repertório básico, conhecimento e compreensão do conceito e conhecimento geral matemático.

O estudo identificou lacunas na compreensão de FVSM em boa parte dos trabalhos que, segundo Even (1990, p. 529, tradução nossa), são atribuídas “a uma imagem conceitual limitada existente na formação dos professores”. Um exemplo de tal evidência está ilustrado na Figura 3 em que, ao tentar responder se a representação gráfica era apropriada para introduzir o ensino de função, um expressivo grupo de futuros professores concluiu não se tratar de uma boa estratégia, argumentando, dentre outras razões, que a existência de descontinuidade representaria um obstáculo à sua compreensão, ou mesmo que os discentes não reuniriam capacidades de identificá-la como uma função.

Figura 3 - Representação gráfica para introduzir função (Even, 1990)



Fonte: Even (1990, p. 259).

A falta de exploração do ensino de função por diferentes estratégias de representações e formas de abordagem também foi considerada como evidência de um conhecimento superficial dos professores quanto ao conceito e, conseqüentemente, um empecilho para ensiná-lo.

Por outro lado, o autor percebeu que “os professores que possuem sólidos conhecimentos matemáticos para ensinar, dispõem de meios mais efetivos para ajudar seus alunos na compreensão do tema” (EVEN, p. 521, tradução nossa) e apontou, por exemplo, que eles tinham amplos conhecimentos relativamente ao desenvolvimento histórico da construção da definição de função, o que impactou positivamente a aprendizagem. O autor também pontuou a necessidade de um avanço qualitativo nos cursos universitários de matemática, assim como na formação dos futuros professores, como uma estratégia adequada para obtenção de melhorias no ensino de função na educação básica.

A pesquisa de Bayazit (2006) teve por objetivo analisar a influência que as práticas de ensino produzidas por dois experientes professores de matemática da educação básica, na Turquia, exercem no processo de aprendizagem da FVSM e foi feita com um grupo de alunos do 9º ano (alunos com aproximadamente 15 anos de idade) do ensino médio.

Por meio da proposição de alguns problemas matemáticos, o autor analisou, durante o processo de aprendizagem da FVSM, a influência exercida por duas concepções de ensino: ação e processo. Segundo Bayazit (2006, p. 148, tradução nossa), por um lado, “a primeira permite realizar manipulações mecânicas com a FVSM”, isto é, aqueles que possuem tal concepção comporiam duas FVSM

em um ponto em que as funções são definidas pelas expressões algébricas. Por outro lado, na concepção de processo, o sujeito é capaz de interiorizar ações e ainda falar “a respeito de um processo de função em termos de entrada e saída, sem ter necessariamente de executar todas as operações de uma função passo a passo” (BAYAZIT, p. 148, tradução nossa). Assim, a posse da concepção de processo possibilita que os alunos reconheçam um único processo de função, representado por mais de uma regra nos subdomínios, e que interpretem tal procedimento à luz da definição sem se esquecerem da propriedade da regra por sentenças, ou mesmo possuírem a capacidade de interpretá-la em um gráfico.

Em relação à observação das práticas de ensino dos 2 professores, a investigação concentrou esforços em buscar identificar em suas ações a presença das duas concepções, isto é, quando orientados para a ação, os atos instrucionais dos professores enfatizaram a manipulação passo a passo de procedimentos algorítmicos, mas quando orientados ao processo, a manipulação da definição foi uma ferramenta cognitiva.

Os resultados obtidos tornaram evidente que as diferenças entre as duas concepções de ensino produziram diferentes resultados na aprendizagem dos estudantes. Isso pôde ser observado nas ações dos dois sujeitos envolvidos, pois enquanto em um deles, o predomínio da prática orientada pelo processo encorajou os alunos a desenvolver uma concepção própria sobre FVSM, no outro professor, alinhado com a prática de ensino pela ação, produziu uma limitação na sua compreensão pelos estudantes. Essa constatação também pôde ser observada quando, durante as ações de ensino, o professor alinhado com a concepção de processo não apenas ilustrou propriedades da FVSM por meio de gráficos como procurou chamar a atenção dos alunos para as regras existentes nos subdomínios. Por sua vez, o segundo sujeito, alinhado à concepção de ação, essencialmente procurou envolver os estudantes com regras e procedimentos, o que produziu apenas uma competência procedimental.

As evidências produzidas pela investigação “sugerem que, para ajudar os alunos a adquirirem um conhecimento epistemologicamente correto e conceitualmente rico, ambos os professores deveriam abordar diferentes

representações da FVSM” (BAYAZIT, p. 161, tradução nossa) e estimular reflexões coletivas a respeito delas.

A pesquisa conduzida por Hatisaru e Erbas (2015) investigou o impacto que os conhecimentos matemáticos de professores do ensino médio de uma escola profissionalizante, na Turquia, tinham a respeito de função influenciaram a aprendizagem de seus alunos. A metodologia utilizada foi o estudo de caso, centrado na observação das ações de 2 professores durante 5 semanas com suas respectivas turmas.

Na Turquia, segundo Hatisaru e Erbas (2015, p.3, tradução nossa), “o conceito de função é introduzido pela primeira vez na 9ª série” (alunos com aproximadamente 15 a 16 anos de idade) e é ensinado de acordo com as diretrizes do currículo nacional que, dentre outras orientações, indica a utilização de determinados livros didáticos.

Inicialmente, os 2 professores submeteram-se a testes preliminares que tiveram por objetivo avaliar como dominavam o conceito de função, suas concepções, o domínio das diversas maneiras de representá-la e a capacidade de que dispunham para explicitar as dificuldades dos estudantes observadas ao longo de suas carreiras. Na sequência, os pesquisadores observaram os professores aplicarem um conjunto de 6 exercícios sobre o tema para um grupo de estudantes.

Os resultados apontaram que um dos professores organizou sua prática de ensino fundamentalmente com o objetivo de que seus alunos obtivessem bons resultados nos exames nacionais. Esse grupo de alunos teve grande dificuldade em reconhecer FVSM como uma função, e cerca de 2/3 dos estudantes não considerou um gráfico que exibia uma função descontínua como representante de uma função.

De acordo com Hatisaru e Erbas (2015, p.10, tradução nossa), esse professor “geralmente achava que a incapacidade dos alunos em compreender FVSM era a razão de seus erros”, ou apontava outros fatores que notadamente eram diferentes daqueles discutidos na fase inicial da pesquisa. O professor não mencionou ter feito qualquer abordagem de ensino a respeito das representações de uma função, pois achava mais difícil para os alunos compreendê-la.

Os alunos desse professor limitavam-se a copiar definições, explicações e textos oferecidos, suas interações foram passivas e/ou limitadas e, quando se depararam, por fim, com a representação gráfica de uma função descontínua, entenderam que aquela não poderia ser uma função porque estava vinculada à ideia de linearidade. Segundo Hatisaru e Erbas (2015, p.11, tradução nossa), um dos alunos afirmou que “função é uma operação matemática que não é útil na vida cotidiana, mas essencial para se obter sucesso nos exames finais”.

A outra professora, sujeito do estudo de caso, procurou explorar o conceito de função recorrendo a diferentes representações, especialmente a gráfica, considerando importante o domínio desse conceito pelos estudantes, e, de modo geral, preparou suas aulas sozinha, utilizando notas produzidas em anos anteriores. Para isso, procurou abordar mais os significados dos conceitos, iniciando, por exemplo, uma discussão em classe a respeito da interpretação de gráficos. Ainda que os pesquisadores tenham observado que, durante as aulas da professora, os alunos aparentemente ficavam entediados, fazendo com que ela abordasse alguns problemas superficialmente, nas respostas dos testes eles obtiveram melhores resultados, embora metade deles tenha afirmado que “ $y = 4$ não era uma função” (HATISARU; ERBAS, p. 18, tradução nossa).

As principais conclusões desse estudo apontaram que o conhecimento do professor a respeito de função está diretamente relacionado à aprendizagem dos alunos, e que influenciam suas práticas institucionais.

Relativamente aos trabalhos selecionados na categoria professores, foi possível constatar que os que possuem sólidos conhecimentos matemáticos para ensinar a temática conseguiram impactar positivamente a aprendizagem dos estudantes, como evidenciado, por exemplo, no trabalho de Bayazit (2006).

Observou-se também, que em geral, tais professores recorreram a diferentes representações para ensinar o tema - especialmente a gráfica -, bem como utilizaram uma ampla variedade de recursos para preparar e implementar suas aulas, conforme observado no trabalho de Hatisaru e Erbas (2015), com o intuito de viabilizar um ambiente mais favorável para a aprendizagem do tema.

Após analisar os trabalhos selecionados por meio do emprego das categorias de análise alunos da educação básica, alunos do ensino superior e

professores, observou-se que a maioria das investigações selecionadas se voltaram a temáticas envolvendo a aprendizagem de FVSM.

Possivelmente, tal tendência possa explicar por que as escolhas teóricas recaíram em referenciais teóricos como os da aprendizagem significativa de Ausubel, a Teoria da Dialética ferramenta-objeto de Douady, ou na Abordagem Instrumental, que foi particularmente utilizada em três pesquisas voltadas à aprendizagem de FVSM.

De acordo com a análise realizada nas categorias alunos do ensino básico e alunos do ensino superior, foi possível constatar que a maior parte dos problemas de aprendizagem de FVSM esteve relacionada à dificuldade dos estudantes em reconhecê-la como função. Com efeito, tal tendência pareceu estar relacionada ao fato de os discentes entenderem que uma função deveria possuir uma única sentença em seu domínio. Da mesma forma, observaram-se dificuldades no reconhecimento de função quando os estudantes - mesmo aqueles do ensino superior - foram confrontados com a representação gráfica que envolvia cenários de descontinuidade.

Em tais circunstâncias, parece necessário refletir a respeito da maneira como o ensino de função seria introduzido aos estudantes, haja vista que não apenas deve preceder o estudo dos diversos tipos de funções, mas também criar condições para a compreensão de sua definição, o que traz à tona o papel do professor nesse processo. Acredita-se, nesse contexto, que, ao introduzir o ensino de função, priorizando aquelas com uma única sentença e cuja representação gráfica reproduza um comportamento contínuo, o professor poderia produzir nos estudantes a ideia de que toda função deva possuir essa tendência, o que acarretaria a formação de um obstáculo de ordem didática.

De acordo com Brousseau (1983, p. 87, tradução nossa) esses tipos de obstáculos “são ligados ao sistema de ensino, ocorrem devido as decisões tomadas no sistema educativo ou pelo professor referente às suas escolhas didáticas para executar uma determinada situação de ensino”.

Apesar disso, foi possível observar nos trabalhos dessa categoria poucas investigações tratando do ensino do tema, ou ainda da problemática envolvendo o

professor que tratasse de maneira mais aprofundada essa questão. Cabe salientar o relato de algumas experiências potencialmente exitosas na compreensão do tema, tais como aquelas identificadas nos trabalhos de Aldon (1995), Chumpitaz (2013) ou Silva (2018), que procuraram articular recursos curriculares, como sequências didáticas e softwares, sem que, no entanto, ficasse patente o enfrentamento da questão a respeito da introdução ao ensino de função.

Por outro lado, nas poucas investigações encontradas na categoria de análise professores observou-se que a documentação e formação do professor foi determinante para o sucesso ou fracasso do processo de aprendizagem dos estudantes, revelando a importância do trabalho documental na vida profissional do professor.

Cabe mencionar ainda que em relação a ADD, teoria central da presente investigação, não foram encontrados estudos envolvendo a FVSM.

A seguir, será apresentada uma revisão da literatura a respeito a respeito da ADD e da OI.

2.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE ADD E OI

A ADD é uma teoria relativamente recente que tem sido utilizada como ferramenta para compreensão de fenômenos didáticos, diretamente relacionados ao trabalho de documentação e profissional do professor que ensina não apenas matemática, mas também outras áreas do conhecimento.

De acordo com Gueudet e Trouche (2008, p.199, tradução nossa), "o coração da atividade e do desenvolvimento profissional do professor de matemática ocorre na sua relação com os recursos" e é o fenômeno da gênese documental que permite compreender os contornos desse trabalho, pois é durante sua relação com um ou vários recursos que ele mobiliza esquemas particulares, integrando-os novas regras de ações que darão forma a um documento. O professor poderá também orquestrar o ambiente de aprendizagem em que se desenvolve uma determinada aula, não apenas arranjando sistematicamente o espaço onde ela ocorre, mas também articulando os artefatos existentes, com o objetivo de guiar a gênese instrumental de cada estudante.

As investigações encontradas foram selecionadas em buscas que envolveram consultas no portal eletrônico de periódicos, teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES¹⁵; as bases de dados e citações da literatura científica e fontes de informação de nível acadêmico foram pesquisadas nos sites *Springer*¹⁶, *Scopus*¹⁷ e *Taylor e Francis online*¹⁸, no portal de teses, dissertações e artigos francês *HAL*¹⁹, e as redes sociais científicas, nos sites *Academia.edu*²⁰ e *Research Gate*²¹.

No portal eletrônico de periódicos, teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES foram utilizados inicialmente os descritores “recurso”, “esquema de uso” e “esquema de utilização” que conduziram a 26 trabalhos. A busca foi então refinada com o emprego dos filtros “gênese documental” e/ou “orquestração instrumental” que possibilitaram a seleção final de 6 trabalhos.

Estratégia semelhante foi utilizada nas bases de dados que reúnem publicações internacionais e nas redes sociais científicas, que se mostraram muito similares em relação a quantidade dos trabalhos obtidos. No processo de refinamento das buscas, foram obtidos 31 trabalhos dos quais foram descartadas investigações que tratavam os temas pesquisados de maneira marginal, o que conduziu a 10 trabalhos na forma de artigo e 2 teses. O final do processo de levantamento nos dirigiu a 17 investigações, mapeadas em três categorias de análise, de acordo com os seguintes objetivos: reformas curriculares, formação continuada e práticas pedagógicas. Na categoria ‘reformas curriculares,’ encontram-se os trabalhos que tinham o objetivo de munir os professores de recursos que os auxiliem a implementar um novo programa. De acordo com as expectativas da instituição na categoria ‘formação continuada’, os trabalhos visaram entender se o ambiente potencializa a relação do professor com recursos. Na categoria ‘práticas pedagógicas,’ agrupamos os trabalhos que buscaram

¹⁵ <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

¹⁶ <https://www.springer.com/br>

¹⁷ <https://www.scopus.com/home.uri>

¹⁸ <https://www.tandfonline.com/>

¹⁹ <https://hal.archives-ouvertes.fr/>

²⁰ <https://www.academia.edu/>

²¹ <https://www.researchgate.net/>

identificar, especificamente, as relações entre a escolha do recurso e os processos de aprendizagem de um determinado conteúdo matemático.

Em relação à primeira categoria, relacionada às reformas curriculares (Quadro 4), foram encontrados apenas 4 trabalhos dentre os 17 selecionados.

Quadro 4 - Trabalhos da categoria Reformas Curriculares

Autor(es) e ano da publicação.	Natureza do Trabalho / Origem	Título do trabalho.
Hammoud (2012)	Tese / HAL	<i>Le Travail collectif des professeurs en chimie comme levier pour la mise en œuvre de démarches d'investigation et développement des connaissances professionnelles. Contribution au développement de l'approche documentaire du didactique</i>
Rocha, Wang e Trouche (2017)	Artigo / Springer	<i>Documentation Expertise and Its Development with Documentation Experience in Collectives: A French Case of Collective Lesson Preparation on Algorithmic</i>
Hammoud e Alturkmani (2018)	Artigo / Academia.edu	<i>Teachers' resource system and documentation work: the case of two physics-chemistry teachers in France and two chemistry teachers in Lebanon</i>
Messaoui (2020)	Tese / HAL	<i>Développement de l'expertise documentaire des professeurs dans des situations de mutation de leur enseignement: le cas de professeurs de mathématiques et d'anglais</i>

Fonte: Produção do Pesquisador.

A tese de Hammoud (2012) foi desenvolvida em um contexto de modificação curricular proposta na França, em 2010, que introduziu alterações em todas as áreas curriculares da educação básica. A pesquisa focou nos impactos causados por essa reforma no programa de ciências físicas e químicas, particularmente nas que proporcionaram a promoção de abordagens investigativas na disciplina de química, em especial, no trabalho profissional desenvolvido por grupos de professores que lecionam a disciplina.

O trabalho com recursos constitui a base do estudo de dois casos selecionados pelo autor, para evidenciar o processo de apropriação das alterações no currículo propostas por professores, especificamente na complexidade dos recursos e conhecimentos profissionais necessários para o desenvolvimento de atividades para o ensino de química, além de elementos para a compreensão do trabalho coletivo.

De modo a investigar essa realidade, a autora desenvolveu um modelo de análise alicerçado nos referenciais teóricos da ADD para compreender a relação do professor com recursos, do PCK (do termo em inglês) a fim de entender os

conhecimentos profissionais específicos mobilizados pelo professor a respeito de abordagens investigativas e da Teoria da Atividade a compreensão dos aspectos relacionados ao trabalho coletivo. A metodologia utilizada na investigação foi a do trabalho reflexivo proposta Gueudet e Trouche, e o acompanhamento das gêneses documentais ocorreu pelo tempo necessário para compreender em profundidade a relação de apropriação dos sujeitos de pesquisa e das novas estruturas curriculares propostas pela mudança curricular.

No processo de análise e discussão dos dados, a autora definiu 2 tipos de recursos: recursos-mãe e recursos-filho. De acordo com Hammoud (2012, p. 46, tradução nossa), “os recursos-mãe consistem no conjunto de recursos que o professor mobiliza para preparar seu ensino a respeito de um determinado tema”. A autora salienta que não é possível qualificar o que o professor concebe para ser implementado em sua aula como um documento, pois ele é construído ao longo do tempo, além de ser caracterizado por certas regularidades. Os recursos-filho, segundo Hammoud (2012, p. 47, tradução nossa), “são aqueles que o professor preparou e que implementará em sua sala de aula no final da fase design”, isto é, são aqueles relacionados não apenas ao resultado, mas também são produto dos recursos-mãe. A autora considerou que os recursos-mãe eram compostos por três níveis: o material que se refere à constituição do recurso (folha de papel, um software etc.), os conteúdos químicos e aqueles relacionados à organização didática e à OI, ou seja, a gestão didática dos artefatos existentes em um ambiente para a implementação de uma situação didática.

O estudo acompanhou a evolução da documentação de dois professores, o primeiro por dois anos em diversas comunidades profissionais e, o segundo, por um ano em comunidades existentes em uma escola do ensino médio. Os principais resultados indicaram que os PCKs dos professores investigados tinham uma relação direta com a situação didática em que estiveram envolvidos e ao conhecimento químico de que dispunham. Além disso, mostraram que o trabalho coletivo desempenhado pelos professores de química nas comunidades profissionais impulsionou o ciclo de vida dos documentos que foram sendo construídos e se constituíram em um importante suporte para seus sistemas de recursos. O estudo apontou ainda que a interferência dos sistemas de atividades

dos professores é um fator determinante para a evolução de sua documentação, já que impacta nos recursos, nas regras e nos estilos de pensamento dos docentes, o que interfere em seu conhecimento profissional.

Em outra investigação, que tratou das mudanças ocorridas no currículo nacional francês, em 2016, relativo à interdisciplinaridade, os pesquisadores Rocha, Wang e Trouche (2017) utilizaram a ADD com o objetivo de compreender os impactos de tais alterações no trabalho profissional de duas professoras de uma mesma escola na cidade francesa de Lyon, focando especificamente na seleção de recursos durante a preparação conjunta de uma nova lição, voltada à integração dos temas algoritmo e programação.

Essas duas professoras foram consideradas pelos autores com muita experiência profissional. A primeira foi selecionada por sua rica experiência com trabalhos em ambientes coletivos para o ensino de matemática, e a segunda, por ser parceira da primeira desde 1990. Além disso, contou o fato de ambas participarem de alguns coletivos virtuais disponibilizados aos professores franceses para preparação de aulas e interação com outros colegas sempre quando foi possível ter acesso a outros recursos.

Para analisar a documentação das professoras, por volta de maio de 2016, os autores filmaram a preparação de uma aula coletiva sobre algoritmos, “ocasião em que elas discutiram sobre planos de ensino e livros que poderiam ser adotados” (ROCHA; WANG; TROUCHE, p. 6, tradução nossa). Nesse contexto, alguns esquemas relacionados à seleção, modificação e adaptação de recursos puderam ser identificados. Os esquemas relacionados à seleção de recursos, por exemplo, “dependem da compreensão dos objetivos da atividade, dos conceitos relacionados ao tema e sua aplicabilidade” (IBID, p. 7, tradução nossa). Ao analisarem os objetivos propostos para o ensino de algoritmo em um livro, as professoras questionaram sua aplicabilidade, pois “a compreensão de variáveis e a noção de informação” (IBID, p. 7, tradução nossa) foram apresentados de maneira superficial.

Por outro lado, esquemas relacionados ao compartilhamento de recursos puderam ser observados durante os diálogos entre as professoras a respeito do mesmo livro. Para tanto, os autores classificaram três tipos de interações:

“discordâncias, conflitos e perguntas e respostas” (ROCHA, WANG; TROUCHE, p. 7, tradução nossa), como estratégia para identificá-los.

O estudo concluiu que a experiência em coletivos vivenciada pelas duas professoras não apenas as proveu de novos recursos, mas também possibilitou o surgimento de novos estilos de pensamento com relação ao planejamento de suas ações com respeito ao ensino de algoritmo e programação.

A investigação conduzida por Hammoud e Alturkmani (2018) teve por objetivo investigar semelhanças e diferenças causadas por alterações curriculares na França e no Líbano na documentação e sistema de recursos de professores de física e/ou química da educação básica e, para tanto, lançou mão das noções de recurso- mãe, recurso-filho e recurso-estruturante. A metodologia utilizada foi a investigação reflexiva e centrou-se no acompanhamento das práticas profissionais de dois professores franceses e outros dois docentes libaneses.

Inicialmente, os autores realizaram um estudo sobre o enfoque curricular que cada país dedicava ao ensino das disciplinas (química e física) e constataram que “no currículo francês, ambas estão intimamente associadas” (HAMMOUD; ALTURKMANI, p. 198, tradução nossa), sendo designadas como ciências físicas, enquanto no sistema educacional libanês são ensinadas separadamente.

Para compreender o sistema de recursos dos quatro professores, os pesquisadores utilizaram três ferramentas de coleta de dados: entrevistas semiestruturadas, representação esquemática do sistema de recursos (RESR) e coleta dos recursos produzidos pelos professores para ensinar as disciplinas em seus países. Por outro lado, a fim de analisar os dados obtidos, decidiram criar categorias de análise que possibilitassem compreender o impacto produzido no sistema de recursos dos professores pelo livro didático e outros recursos curriculares, pelo trabalho coletivo e por alguns aspectos específicos relacionados ao conteúdo das disciplinas que sofreram alteração em razão das mudanças curriculares.

Os autores constataram que os quatro professores utilizaram o livro didático como principal recurso-mãe no início de suas carreiras profissionais e, ao longo do tempo, esse *status* transformou-se em recurso-mãe secundário. Em virtude das alterações curriculares ocorridas na educação básica francesa, os

professores passaram a não mais distinguir a química da física durante seu ensino, porém “notou-se que um dos professores desenvolveu um interesse maior por conteúdos relacionados à física” HAMMOUD; ALTURKMANI, p. 203, tradução nossa), com menos ênfase em aspectos matemáticos.

Em relação às observações relacionadas com as atividades experimentais, “a coleta de recursos durante a realização das entrevistas aos professores” IBID, p. 204, tradução nossa) revelou que, embora figurassem com ênfase nos currículos dos dois países, esse tipo de atividade apareceu de maneira superficial na documentação dos professores libaneses, certamente devido às “condições materiais dos laboratórios daquele país” (IBID, p. 204, tradução nossa), mas relevantes no caso dos professores franceses.

As interações com colegas ou alunos, por outro lado, mostraram que esses recursos ocupam lugar central no sistema de recursos dos professores de ambos os países, “sendo inclusive identificado como um recurso estruturante de um dos professores franceses” (IBID, p. 206, tradução nossa). O papel dos coletivos no sistema de recursos dos professores, por sinal, foi considerado central pelos autores. No Líbano, por exemplo, “os dois professores especificaram a importância das redes sociais para sua atividade profissional (Facebook, WhatsApp e Telegram)” (IBID, p. 206, tradução nossa), especialmente durante a elaboração de avaliações. Os professores franceses, por sua vez, faziam parte de coletivos fora da escola, voltados especialmente à preparação de suas aulas.

Os autores concluíram que os livros didáticos continuam sendo importantes recursos curriculares para os professores dos dois países, mas “com o desenvolvimento tecnológico e da internet, os recursos digitais passaram a ocupar um lugar cada vez mais importante no sistema de recursos dos quatro professores” (IBID, p. 209, tradução nossa). Além disso, observaram que o sistema de recursos dos docentes atua em sintonia com o currículo e a atividade profissional, e ainda, que as dimensões coletivas desse trabalho ocupam um lugar central no sistema de recursos dos professores.

A tese de Messaoui (2020) foi concebida no âmbito das alterações curriculares propostas no currículo francês para o ensino médio da França em 2016. O estudo utilizou a ADD como principal referencial teórico para construir um

modelo metodológico, fundamentado na investigação reflexiva, que a autora denominou expertise documental de professores e utilizou para compreender a gênese documental nas ações de três professoras, duas de inglês e uma de matemática, quando preparavam lições após essas alterações curriculares.

Segundo Messaoui (2018, p.21, tradução nossa), “objetivou-se compreender o processo de classificação de um novo recurso pelos professores em seu sistema de recursos pré-estruturado”; para analisar os dados obtidos durante esse processo, recorreu-se à noção de esquema proposta no âmbito da ADD.

A reforma nos currículos franceses introduziu mudanças específicas em dois pontos: “a organização curricular [agora] segue um ciclo de três anos e novos temas foram introduzidos, como algoritmos na matemática e tecnologia e outras áreas do conhecimento” (MESSAOUI, p. 77, tradução nossa), fazendo com que fosse necessário aos professores lidar com novos recursos, especialmente os de origem digital. Para compreender esse processo, a autora estudou a maneira como uma professora de matemática e outras duas de inglês preparavam uma aula sobre os novos temas propostos pelo currículo e como classificavam um novo recurso para ensiná-los.

Depois de acompanhar as três professoras por dois anos, no âmbito da ADD a autora observou a contribuição teórica para a compreensão dos esquemas organizados em dois níveis: esquemas de uso e esquemas de ação instrumentais. A autora identificou ainda os esquemas documentais, aqueles envolvidos no trabalho documental, isto é, os que, de certa maneira, intervêm diretamente em situações de interações com recursos que foram classificados em dois tipos: os esquemas documentais de ação e os esquemas documentais de uso. Para a autora, os de ação relacionam-se às atividades primárias do professor, ou seja, correspondem às ações globais que transformam a atividade do sujeito, enquanto os de uso estão relacionados a tarefas secundárias relacionadas aos recursos.

Os dados foram coletados em momentos em que as professoras estiveram em ação, como por exemplo, quando preparavam uma aula no computador, ou então quando explicavam atividades de ensino relacionadas aos temas propostos pelo novo currículo durante a realização de uma entrevista semiestruturada.

Os dados obtidos referentes à situação de preparação de uma nova aula vivenciada pelas três professoras revelaram “caraterísticas comuns para o esquema de uso ‘classificação de recursos’ das docentes” (MESSAOUI, p. 312, tradução nossa), e as regras de ação desse esquema foram organizadas obedecendo a critérios de cronologia, nível de ensino e tipos de atividades. A autora inferiu a existência de invariantes operatórios desse esquema, que foram agrupados “em duas categorias: conteúdo de ensino e gestão da informação” (IBID, p. 316, tradução nossa). O nível de ensino refere-se ao conhecimento da organização escolar e do currículo, enquanto o segundo invariante diz respeito ao letramento digital.

Os principais resultados da pesquisa apontaram para a necessidade de um tempo ainda maior para o acompanhamento das gêneses documentais dos professores, que permita compreender com mais clareza eventuais alterações em suas práticas profissionais. Revelam ainda que a expertise em classificar recursos “está relacionada com a gestão da informação que, por sua vez está entrelaçada com a atividade de ensino do professor” (IBID, p. 402, tradução nossa).

Após a apresentação dos trabalhos selecionados na categoria reformas curriculares, foi possível perceber que as investigações mais recentes a esse respeito ocorreram na França, pois os quatro trabalhos selecionados tiveram relação com as reformas curriculares que entraram em vigor naquele país em 2016. Constatou-se que as modificações curriculares impulsionaram a criação de novos recursos, como observado no trabalho de Rocha, Wang e Trouche (2017) em que os docentes se dedicaram a elaborar recursos para integrar o tema algoritmo nas aulas de matemática. Do mesmo modo, observou-se que as alterações nos currículos proporcionaram o aparecimento de novos recursos em áreas diferentes da matemática, como constatado, por exemplo, no estudo de Messaoui (2020), em que professoras de inglês dedicaram-se a introduzir novos recursos dessa área do conhecimento com a ajuda da tecnologia digital, devido a exigências existentes na reforma curricular francesa no âmbito da educação básica.

Em relação à categoria formação continuada (Quadro 5), foram localizados apenas 4 trabalhos.

Quadro 5 - Trabalhos da categoria Formação Continuada

Autor(es) e ano da publicação.	Natureza do Trabalho / Origem	Título do trabalho.
Assis (2016)	Artigo/ <i>Academia.edu</i>	A gênese documental na formação de professores de Matemática: interações entre o livro didático e a geometria dinâmica
Ignácio e Pietropaolo (2016)	Artigo / Portal CAPES	Livros didáticos digitais: aspectos avaliativos em Orquestração Instrumental
Xavier Neto e Silva (2018)	Artigo / Portal CAPES	Abordagem Documental: Esquemas de uso no trabalho coletivo de professores para o ensino de sequências numéricas
Assis e Espíndola (2019)	Artigo / <i>Springer</i>	<i>Constitution of resource systems by prospective teachers – process of metamorphosis</i>

Fonte: Produção do Pesquisador.

O trabalho de Assis (2016) teve por objetivo investigar na formação inicial de professores de matemática a gênese documental para o uso de “sistemas de geometria dinâmica a partir de propostas do livro didático” (ASSIS, p.1). O referencial teórico apoiou-se na ADD e a metodologia consistiu em um estudo de caso com uma estudante de Licenciatura em Matemática, voltada ao desenvolvimento de uma proposta didática sobre a classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos, recorrendo ao uso do *GeoGebra*.

Segundo a autora, embora os documentos curriculares nacionais incentivem a utilização de tecnologias computacionais para o ensino de matemática na educação básica, os professores apresentam dificuldades quanto à sua utilização, ao conhecimento do objeto matemático, bem como ao planejamento e execução dessas propostas em sala de aula. Nesse sentido, “faz-se necessário pensar em ações que possibilitem a integração das tecnologias ao conjunto de recursos do professor” (ASSIS, 2016, p. 4), para que se torne sujeito de transformação e ressignificação da matemática, alavancando seu desenvolvimento profissional.

Em face dessa conjuntura e considerando ainda que o livro didático “é o principal recurso dos professores e o mais utilizado nas escolas” (ASSIS, p.5), a autora entendeu que o caminho para o desenvolvimento de propostas didáticas integrando esse recurso ao *GeoGebra*, poderia contemplar as proposições existentes nos documentos curriculares nacionais.

Para colocar em prática tal intento, a autora acompanhou o desenvolvimento de uma proposta didática que procurou integrar o livro didático destinado ao 8º ano (alunos com aproximadamente 13 anos de idade) do ensino fundamental ao software de geometria *GeoGebra*, durante a elaboração de um Trabalho de Conclusão de Curso – TCC, comandado por uma estudante do curso de Licenciatura em Matemática. A proposta incluiu também sua aplicação junto a estudantes de uma escola da educação básica em um município pertencente ao estado da Paraíba no transcorrer do ano letivo de 2016.

Alguns exercícios do livro didático, relacionados à identificação de triângulos, foram selecionados pela estudante e adaptados mediante a utilização de ferramentas do *GeoGebra*. Em seguida, a proposta foi aplicada em uma turma e, posteriormente readaptada, devido ao surgimento de questões relacionadas ao tempo disponível para seu desenvolvimento. Ao observar a intervenção da estudante em sala de aula e, posteriormente, confrontá-las com imagens gravadas em vídeo, a autora inferiu sobre alguns esquemas de ação que compreenderam os seguintes invariantes operacionais:

Os alunos aprendem melhor quando colocados em situações de descoberta e de experimentação; a diversidade de triângulos obtidos colaborou para uma compreensão mais ampla sobre os tipos triângulos e suas combinações; as “letras” que indicam os lados e os ângulos devem ser relativizadas; e os alunos devem utilizar a escrita simbólica para representar as relações entre os lados e os ângulos de acordo com a classificação. (ASSIS, 2016, p. 13).

O estudo concluiu que as dimensões do processo de gênese documental não ocorrem isoladamente e tampouco são definitivos, pois o processo de apropriação dos recursos, as modificações com o uso “e o desenvolvimento profissional estão conectados de forma próxima” (IBID, p. 14). No caso específico, alvo da pesquisa, constatou-se que a integração dos recursos do livro didático e do *GeoGebra* possibilitou a construção de documentos que podem ter aprimorado o desenvolvimento profissional da estudante de Licenciatura.

A investigação conduzida por Ignácio e Pietropaolo (2016) utilizou o quadro teórico da ADD e OI para orientar a coleta e a análise de dados, e a formação de grupo focal para promover uma entrevista com três sujeitos de pesquisa pertencentes a um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade em Pernambuco. Na ocasião do estudo, os sujeitos integravam um projeto que teve

por objetivo desenvolver parte de um livro digital didático – LDD, usando o *GeoGebra Book* sobre a introdução ao ensino de funções a partir da noção de covariação, voltada a estudantes do 9º ano do ensino fundamental (alunos com aproximadamente 14 anos de idade).

Os autores entenderam que “envolver professores em um ambiente de elaboração de recursos didáticos, como o livro digital” (IGNÁCIO; PIETROPAOLO, p. 3), requer uma reflexão a respeito de como selecionam e alteram recursos para o uso em sala de aula. Para tanto, perceberam que envolver o professor em formação em um projeto de elaboração de um livro didático poderia criar oportunidades para avaliar seu progresso durante atividades de estágio supervisionado.

A produção do livro incluiu também sua utilização em sala de aula e, em razão de os autores acompanharem as aulas dos professores, foi necessário analisar o papel deles enquanto articuladores de todos os demais recursos envolvidos na estratégia didática a ser posta em prática. Para tanto foi necessário, não apenas descrever minuciosamente suas escolhas, desde o conteúdo curricular até a avaliação e como cada aula foi organizada para atingir os objetivos planejados, como também “utilizar a Teoria da orquestração instrumental como estratégia de compreensão das ações de planejamento e atuação em sala de aula” (IBID, p. 5).

Uma vez acompanhadas as diversas etapas de criação e utilização dos recursos, os autores se concentraram em resgatar as memórias dos licenciandos sobre a experiência que passaram, construindo os grupos focais como grupos coletivos de conversação. Durante essa etapa, registaram que os licenciandos sentiram falta de alguma ferramenta que possibilitasse registrar e acompanhar as respostas dadas pelos alunos, o que evidenciou “a necessidade de extrapolar os recursos oferecidos para adequar os propósitos específicos de sala de aula” (IGNÁCIO; PIETROPAOLO, p. 9), pois o *GeoGebra Book* mostrou-se limitado para essa ação específica.

O uso de grupo focal foi considerado satisfatório para o resgate e investigação das memórias dos licenciandos a respeito da experiência em criar e utilizar um LDD e posteriormente utilizá-lo em sala de aula. Além disso, constatou-

se ter ocorrido um superdimensionamento do tempo utilizado para as aulas, mesmo quando houve correspondência entre as discussões previstas e aquelas desenvolvidas pelos estudantes, evidenciando a relevância da OI no planejamento e execução das ações didáticas que foram planejadas.

A investigação feita por Xavier Neto e Silva (2018) teve por objetivo investigar a gênese documental de um grupo de três professores do ensino médio durante a elaboração de uma sequência didática para ensinar Sequências Numéricas para alunos do 1º ano do ensino médio.

Dados preliminares coletados pelos autores indicaram que, para construir a sequência didática, os sujeitos valeram-se, fundamentalmente, dos recursos do livro didático e de materiais apostilados oferecido pelas instituições em que exerciam a docência, porém, ao desenvolverem uma das atividades, observaram que o ambiente *Moodle*, disponibilizado aos professores para compartilhamento e troca de informações, dinamizou o trabalho coletivo.

Os autores perceberam que um dos professores apresentava grande relutância em aceitar proposições dos demais participantes durante a elaboração de uma das atividades, mas essa atitude foi sendo modificada ao longo do processo, em razão das discussões coletivas proporcionadas pelo ambiente de formação. Em relação a esse sujeito os autores observaram, em suas ações subsequentes, “que o aceite da proposta dos colegas, enriqueceu seus esquemas, introduzindo novas regras de ação” segundo Xavier Neto e Silva (2018, p. 448), o que corrobora o pontuado por Gueudet, Trouche e Pepin (2018) de que, ao longo de sua atividade, o professor enriquece e desenvolve novos esquemas.

O estudo conduzido por Assis e Espíndola (2019) foi resultado da integração de duas investigações que tiveram por objetivo compreender a constituição do sistema de recursos de professores recém-graduados em matemática: “A metamorfose no sistema de recursos de um futuro professor de Matemática” (Assis, Gitirana e Trouche, 2018) e o trabalho documental na formação inicial para o ensino de equação do primeiro grau (Espíndola e Trgalová, 2018).

Segundo Assis e Espíndola (2019, p. 190, tradução nossa), “Assis, Gitirana e Trouche (2018) levantaram a hipótese de que os futuros professores produzem

uma metamorfose entre seus sistemas de recursos”, isto é, transformam um sistema de recursos, voltado ao estudo, em um outro, cujo objetivo é ensinar.

Por outro lado, de acordo com Assis e Espíndola (2019, p. 190, tradução nossa), “Espíndola e Trgalová (2018) afirmam que a constituição do sistema de recursos em professores recém-formados é impactada pelos recursos que foram vivenciados durante a graduação e a de seus professores”.

De acordo com Assis e Espíndola (2019), os sistemas de recursos de estudo e de ensino manifestam-se em duas formas: de situações distintas as de estudo e as de ensino. As situações de estudo estão relacionadas às experiências vivenciadas durante o curso universitário e referem-se àqueles conteúdos estudados nas disciplinas acadêmicas, sendo, portanto, atreladas à formação do professor. Por outro lado, as situações de ensino, independentemente do local onde ocorram, têm por intenção primordial o ensino e, dependendo da situação em que um recurso é utilizado, há uma tendência de o recurso de estudo transformar-se em recurso de ensino, sofrendo uma espécie de metamorfose inter-relacionada ao desenvolvimento profissional do professor.

Segundo os autores essa metamorfose pode ser analisada em três dimensões: o conteúdo, a estrutura e a natureza. O conteúdo de uma metamorfose refere-se a uma análise da perspectiva material dos recursos, isto é, tem o objetivo de identificar os recursos materiais utilizados durante o desenvolvimento de um conjunto de atividades em períodos de curta ou longa duração. O estudo da estrutura de uma metamorfose revela novas relações existentes entre os recursos e, finalmente, o estudo da natureza de uma metamorfose identifica as mudanças de *status* da atividade profissional do professor, ou seja, estuda a relação entre os esquemas profissionais relacionados a uma situação de ensino específica.

O primeiro estudo de caso envolveu uma professora que teve identificado em seu sistema de recursos de estudo e de ensino. O software *GeoGebra* foi organizado em quatro fases. A primeira focou na construção da trajetória documental e realização de uma entrevista para estabelecer relações entre eventos e recursos considerados importantes para o desenvolvimento profissional. Em seguida, a professora enviou aos pesquisadores algumas tarefas anteriormente desenvolvidas com o *GeoGebra*, tanto para o estudo como para o ensino, que

foram analisadas considerando os documentos que a professora produziu e utilizou posteriormente em aulas gravadas e permitiram o estudo dos esquemas mobilizados.

Considerando a dimensão de conteúdo da metamorfose, os autores identificaram o *Geogebra* como um recurso de transição entre os sistemas de estudo e ensino da professora. A análise relacionada à estrutura da metamorfose possibilitou inferir a importância dos recursos na sua vida profissional que, por conta do *GeoGebra*, “foi possível identificar que seu *status* inicial, atrelado à execução de uma tarefa, modificou-se e passou a apoiar as atividades desenvolvidas em sala de aula” (ASSIS; ESPÍNDOLA, 2019, p. 194). O estudo relacionado à dimensão da natureza da metamorfose permitiu aos pesquisadores compreender como a docente utilizou o *GeoGebra* para esquematizar a definição de triângulo equilátero durante a atividade em sala de aula. Esse esquema foi verificado na análise dos vídeos das aulas da professora a partir das regularidades observadas em suas regras de ação e identificação dos invariantes operatórios relacionados ao uso do *GeoGebra* e das propriedades geométricas que foram mobilizadas.

Em outro estudo de caso os pesquisadores procuraram compreender como a atividade profissional de futuros professores foi impactada por recursos estritamente recomendados por professores-tutores durante a formação acadêmica e até que ponto repercutiram no processo de constituição de seus sistemas de recursos. A noção de metamorfose possibilitou compreender de que modo cada futuro professor constituiu seu próprio sistema de recursos para o ensino, com base naqueles empregados por seus tutores.

A pesquisa utilizou-se da metodologia de investigação reflexiva e centrou-se no caso das ações de um professor que produziu atividades docentes em um curso intitulado Estágio Obrigatório, oferecido em uma universidade federal brasileira. O futuro professor estagiou por dois meses em uma escola, acompanhado por um supervisor dessa instituição e por um orientador do curso.

A pesquisa foi organizada em três fases. Na primeira, o sistema de recursos do sujeito foi inferido pelos pesquisadores por meio da análise de sua trajetória documental. Na segunda, analisaram um recurso destinado ao ensino de equação do primeiro grau, desenvolvido sob forma de lista de exercícios obtidos na *web*. A

terceira fase, relativa à prática de ensino, foi analisada por meio do plano de aula desenvolvido pelo professor, considerando os recursos utilizados e por entrevistas sistemáticas a respeito do processo de seleção dos recursos para compreender seus conhecimentos profissionais com a identificação dos invariantes operatórios e as regras de ação.

Para os pesquisadores Assis e Espíndola (2019, p. 199, tradução nossa), “a construção do sistema de recursos do sujeito de pesquisa foi inicialmente influenciada por orientação dos professores tutores e seus recursos”, entretanto, ao longo do estágio, o professor estagiário passou a selecionar outros tipos de recursos. Os autores consideraram que a noção de metamorfose se mostrou relevante e útil para analisar o processo de engajamento do futuro professor com recursos e para revelar aspectos de seu desenvolvimento profissional.

As pesquisas selecionadas na categoria formação estiveram mais voltadas ao estudo de temáticas matemáticas voltadas aos docentes em formação nos cursos universitários de Licenciatura. Apenas a pesquisa de Xavier Neto e Silva (2018) dedicou-se a investigar professores já formados no âmbito da educação básica.

De outra parte, as temáticas matemáticas que foram abordadas nas investigações foram claramente definidas e voltadas ao ensino de temas geométricos, sequências numéricas e função. Em todas as pesquisas selecionadas foi possível observar que o desenvolvimento e/ou mobilização de recursos impulsionou o desenvolvimento profissional dos professores. Novas contribuições teóricas no âmbito da ADD, como no caso da metamorfose de recursos elaborada por Assis (2016), possibilitam compreender a transposição dos recursos utilizados pelos professores durante a formação universitária e seu uso posterior durante a atividade profissional na educação básica.

Em relação à terceira categoria, relacionada às práticas pedagógicas (Quadro 6), foram encontrados 9 trabalhos dentre os 18 selecionados.

Quadro 6 - Trabalhos da categoria Práticas Pedagógicas

Autor(es) e ano da publicação.	Natureza do Trabalho / Origem	Título do trabalho.
Visnovska e Cobb (2013)	Artigo / Springer	<i>Classroom video in teacher professional development program: community documentary genesis perspective</i>
Kieran et al (2013)	Artigo / Springer	<i>Design researchers' documentary genesis in a study on equivalence of algebraic expressions</i>
Espíndola e Trgalová (2015)	Artigo / Portal CAPES	Trabalho documental e decisões didáticas do professor de Matemática: um estudo de caso
Miyakawa e Winslow (2017)	Artigo / Research Gate	<i>Paradidactic infrastructure for sharing and documenting mathematics teacher knowledge: a case study of practice research in Japan</i>
Lima e Trgalová (2018)	Artigo / Portal CAPES	Trabalho coletivo de professores de Matemática: um olhar na perspectiva da gênese documental
Lucena, Gitirana e Trouche (2018)	Artigo / Portal CAPES	O ensino de Matemática com integração de recursos digitais: um olhar sobre as aulas à luz da Orquestração Instrumental
Ratnayake e Thomas (2018)	Artigo / Springer	<i>Documentational genesis during teacher collaborative development of tasks incorporating digital technology</i>
Sayah (2019)	Artigo / Springer	<i>Evolution of a resource system: articulation of dynamic and static dimensions</i>
Almeida et al (2020)	Artigo / Portal CAPES	Banco Geométrico: Gênese Documental e Orquestração Instrumental

Fonte: Produção do Pesquisador.

O estudo de Visnovska e Cobb (2013) teve por objetivo compreender os impactos do uso de vídeos como forma de apoio ao processo de aprendizagem em uma comunidade de prática composta por professores de matemática do ensino médio em escolas de uma área urbana localizada no sudeste dos EUA. O caso selecionado para objeto de discussão no trabalho teve a duração de cinco anos e “originou-se de um estudo longitudinal, no qual um grupo de professores do ensino médio trabalhou com novos recursos para o ensino de temas estatísticos” de acordo com Visnovska e Cobb (2013, p. 1017, tradução nossa).

A gênese documental foi utilizada na investigação como ferramenta para compreender o processo de apropriação do recurso vídeo na vida profissional dos professores e, em paralelo, procurou identificar a existência de práticas colaborativas para inferir a respeito de uma gênese de caráter comunitário.

A metodologia utilizada foi a investigação reflexiva do trabalho documental, em que cada um dos participantes teve suas aulas gravadas separadamente, em vídeo, para serem projetadas no coletivo e provocarem intensos debates com relação às diferentes abordagens dos temas estatísticos explorados pelos participantes do projeto. De acordo com Visnovska e Cobb (2013, p. 1019, tradução nossa), “o acompanhamento das regularidades observadas no processo de

interação entre os professores, enquanto compartilhavam as experiências em vídeo”, possibilitou compreender a gênese comunitária.

Segundo os autores, a gênese documental foi identificada durante as ações dos professores e permitiu concluir que o uso do vídeo em sala de aula não só direcionou o aprendizado do grupo como também propiciou, a cada um dos participantes, a reflexão a respeito de diferentes abordagens para o ensino, além de criar condições para a construção de uma genuína comunidade de prática. O emprego do recurso contribuiu ainda para um engajamento mútuo entre os participantes em práticas de construções coletivas, estimulou perguntas esclarecedoras sobre as temáticas ensinadas, além do compartilhamento de problemas e/ou desafios que foram criados e/ou adaptados durante o período de formação.

A pesquisa de Kieran et al (2013) abordou o trabalho de documentação na atividade profissional dos pesquisadores durante a elaboração de documentos a respeito de equivalência de expressões algébricas para classes de estudantes do ensino médio no Canadá. Três documentos foram objeto da investigação: um primeiro, relativo a uma sequência didática concebida para utilizar ferramentas CAS; um segundo, preparado a partir das observações feitas pelos autores durante a aplicação dessa sequência em sala de aula, e um terceiro, que se constituiu do próprio trabalho de pesquisa elaborado pelos pesquisadores. A aplicação dos dois primeiros documentos foi viabilizada por OIs.

A equivalência de expressões algébricas é um conceito chave no cálculo algébrico por ter uma função crucial para a simplificação de expressões e resolução de equações. Seu ensino, segundo Kieran et al (2013, p. 2, tradução nossa), “é abordado superficialmente nos currículos canadenses e raramente é explorado além do significado cotidiano que representa para os estudantes”, ou seja, é comum associá-lo a expressões como “o mesmo que” ou “idêntico a tal valor”.

Em face disso, os pesquisadores desenvolveram um projeto de pesquisa com o objetivo de criar recursos para o ensino e a aprendizagem de equivalência de expressões algébricas, incluindo o uso da tecnologia CAS em razão da experiência que possuíam. Durante o tempo em que se dedicaram à construção dos recursos, procuraram documentar suas ações por meio de um diário, tendo em

vista que a história do trabalho de documentação foi um dos elementos utilizados pelos pesquisadores para compreender a gênese documental que experimentaram. Assim, a sequência didática, primeiro documento construído pelos pesquisadores, incluiu a utilização de diferentes recursos:

- a experiência dos participantes nas áreas da matemática, informática, didática, psicologia e experiência em design;
- a tecnologia CAS como ferramenta impulsionadora na aprendizagem do pensamento algébrico;
- a colaboração de consultores cuja experiência em didática, matemática e tecnologia CAS foram relevantes ao projeto;
- a participação de bolsistas de pós-doutorado;
- a colaboração de professores da 10^a série do ensino médio que forneceram feedback sobre as versões iniciais da sequência didática e que também fizeram sua aplicação em suas salas de aula;
- livros didáticos e materiais curriculares;
- os resultados de um pré-teste escrito administrado aos alunos dos professores participantes;
- a experiência passada de alguns dos participantes a respeito de equivalência algébrica e, por fim,
- os rascunhos iniciais da sequência de atividades geradas ao longo do processo de construção. (KIERAN et al, 2013, p. 5, tradução nossa)

Na construção do primeiro documento os autores identificaram uma combinação de recursos materiais e humanos, além do compartilhamento de conhecimentos dos participantes por meio de um intenso processo colaborativo. As discussões coletivas da equipe foram marcadas pelo engajamento de todos e, a cada rascunho construído, os pesquisadores justificavam suas ideias, considerando possíveis dificuldades dos alunos, tarefas adicionais a serem propostas ou ainda questões relativas ao tempo necessário para resolver as atividades propostas. Segundo Kieran et al (2013, p. 6, tradução nossa), “o processo documental, estimulado pelos comentários relacionados ao recurso material, foi constituído pelos conhecimentos dos participantes”, de modo que a versão final do documento identificada por “sequência de atividades para apoiar o aprendizado de equivalência de expressões algébricas” incluiu um conjunto de invariantes operatórios que foram objeto de refinamento ao longo de sua construção, além da definição das regras de ação que os pesquisadores empregaram em seu design.

Um dos invariantes operatórios definidos foi “que a sequência de atividades deveria ser baseada nos conhecimentos anteriores dos estudantes” (KIERAN et al, p. 4, tradução nossa), determinados por um pré-teste que demonstrou pouca

experiência dos alunos participantes com equivalência, mas algumas habilidades em determinadas manipulações algébricas.

A etapa seguinte da gênese documental caracterizou-se pela aplicação dessa sequência em sala de aula, enriquecida pela experiência dos professores e de seus alunos, e constituiu-se em um novo recurso que possibilitou o início de uma nova fase do processo de design. Durante cerca de duas semanas, professores e alunos da 10ª série (alunos com cerca de 16 anos de idade) trabalharam com a sequência de atividades que foi devidamente registrada por meio do uso de áudio e vídeo.

Durante a aplicação da sequência, os autores perceberam que uma das expressões propostas produzia uma restrição de domínio, e um problema em uma equação, detectado com auxílio do teste de equivalência CAS, mostrou que a atividade poderia sofrer modificações. Com isso, durante as discussões subsequentes, ficou claro que era necessário retomar o estudo matemático de sequência.

O processo que deu origem ao segundo documento foi muito similar ao primeiro, isto é, foram gêneses documentais que tiveram por característica a formação de ideias coletivas para a produção de documentos. O segundo documento, de natureza teórico-matemática e seu recurso correspondente, foi projetado como um complemento à sequência de atividades. Nas perspectivas de ensino e de aprendizagem de álgebra, “os dados obtidos em sala de aula provaram que esse recurso foi essencial para o entendimento de que a noção de domínio é fundamental na compreensão da equivalência de expressões algébricas” (IBID, p. 11, tradução nossa) bem como a integração das atividades propostas aos estudantes com as calculadoras simbólicas (CAS) permitiu a eles maior reflexão a respeito da noção de domínio.

O terceiro documento tratou de uma reflexão coletiva sobre o processo de gênese documental vivenciado pelo grupo para verificar se o processo de gênese documental era adequado para descrever e analisar a atividade dos professores durante o processo de design na elaboração dos documentos sobre equivalência de expressões algébricas. De acordo com Kieran et al (2013, p. 13, tradução nossa), “o documento de pesquisa acabado sob a forma de artigo não é apenas

uma questão de publicar resultados, mas um meio de capturar conhecimentos” que, de certa maneira, resume as descobertas encontradas e propicia uma reflexão do modelo teórico. Diferentes invariantes operatórios foram identificados nessa fase; um deles indicou que a experiência da equipe em conjecturar uma sequência para o ensino e a aprendizagem de equivalência de expressões e projetar recursos para apoiá-los deve ser compartilhado com a comunidade da Educação Matemática, o que resulta em uma regra de ação, pois o artigo oferece detalhes do processo em que os pesquisadores estiveram envolvidos.

O estudo concluiu que o quadro da gênese documental pode ser aplicado ao processo de compreensão das práticas profissionais dos pesquisadores e que a noção de esquema permite inferir a respeito de seu desenvolvimento profissional.

A pesquisa de Espíndola e Trgalová (2015) teve por objetivo analisar as práticas pedagógicas de um professor de matemática num trabalho documental relativo “à preparação do ensino e à implementação de uma aula sobre Função Exponencial” (IBID, p. 1) em uma turma do 1º ano do Ensino Médio (alunos com aproximadamente 15 anos de idade) na cidade de Recife.

Para analisar as decisões didáticas tomadas pelo professor, as autoras tomaram como referência o modelo de níveis da atividade do professor de Margolinas, “investigando de início a construção do projeto de Função Exponencial (nível +2) e aquele de uma aula sobre esta função (nível +1)” (ESPÍNDOLA; TRGALOVÁ, p.2). Mais tarde, dedicaram-se ao estudo da implementação do projeto de aula (nível +1) na turma de estudantes (nível 0) e as observações elaboradas pelo professor, dentre outros aspectos, a respeito das reações dos alunos (nível -1).

A pesquisa foi organizada em três fases pela via do estudo de caso. Inicialmente, as autoras visitaram a Escola e, por indicação da diretora da instituição, convidaram um professor de matemática para fazer parte do estudo. Nessa ocasião, o projeto foi detalhado ao docente, que se decidiu pelo tema Função Exponencial, visto tê-lo recentemente trabalhado com seus alunos.

Por meio de uma entrevista, as autoras procuraram levantar o perfil profissional do professor e, na sequência, o estudo desenvolveu-se em quatro etapas correspondentes aos quatro níveis propostos por Margolinas. O professor

de matemática tinha 34 anos de idade, 10 anos de experiência e 6 anos na instituição onde se desenvolveu o projeto. A respeito dos recursos existentes para apoiar seu trabalho docente, declarou “como sendo limitados indicando algumas vezes ter utilizado um equipamento multimídia para uso do programa *GeoGebra*”. (ESPÍNDOLA; TRGALOVÁ. p. 6).

Os instrumentos de coleta e análise dos dados utilizados na pesquisa incluíram entrevistas, mapa de recursos, observação de classe, vídeogravação e entrevista de autoconfrontação. Durante a elaboração de um esboço a respeito dos recursos que utilizava para ensinar Função Exponencial, as autoras puderam identificar os recursos do livro didático, internet e banco de questões de vestibulares. Posteriormente, ao longo da realização de uma entrevista, o professor “indicou utilizar um grupo de WhatsApp existente na classe de estudantes” (IBID, 11) para postar questões suplementares a fim de que os estudantes pudessem discutir as soluções entre si.

Segundo as autoras, o plano de aula elaborado pelo professor foi influenciado pelo documento curricular do estado de Pernambuco, mas indicou a existência de “conhecimento sobre o objeto matemático e sobre o modo como os alunos aprendem o mesmo” (IBID, p. 13), visto que a sequência a ser trabalhada pelo professor continha a apresentação da definição de funções, exemplos resolvidos e a proposição de um conjunto de exercícios a serem propostos aos estudantes. Além disso, sobre o “estudo do gráfico da Função Exponencial, dada a lei de função, na sequência os alunos fariam a representação de dados em tabelas e no plano cartesiano” (ESPÍNDOLA; TRGALOVÁ, p. 13).

A análise das decisões didáticas tomadas pelo professor na preparação e posterior implementação em sala de aula permitiu às autoras “inferir um certo número de fatores subjacentes a estas decisões” (IBID, p. 23). Em relação ao fator epistêmico–didático, por exemplo, a concepção do docente sobre aprendizagem do esquema “definição, exemplo e exercícios” (IBID, p. 23) orientou suas escolhas das atividades sobre a temática a serem ensinadas e a ordem em que foram propostas aos estudantes. Dessa forma, as autoras entenderam que a articulação entre a ADD e a análise das decisões didáticas referenciada no modelo dos níveis de atividades do professor revelou-se adequada à análise das práticas do professor.

Em outra investigação, Miyakawa e Winslow (2017) pesquisaram, por meio de um estudo de caso, o planejamento de lições feita pelo professor de matemática, com foco em seu desenvolvimento profissional. As lições de matemática, no Japão, são consideradas importantes para a aprendizagem e se constituem em um fenômeno de dimensões culturais. A fim de compreendê-las com maior profundidade, os autores investigaram o sistema de recursos de professores japoneses no momento de planejamento de suas aulas.

De acordo com Miyakawa e Winslow (2017, p. 4, tradução nossa), “a atividade de preparação das lições do professor japonês não é apoiada unicamente no livro didático”, mas em uma dialética coletivo-individual conhecida como estudo de lições. Essa experiência, de dimensões culturais, possibilita uma crítica permanente ao trabalho profissional desenvolvido pelo professor, pois em determinados momentos de sua carreira suas aulas são objeto de crítica de um coletivo do qual participa, juntamente com pesquisadores e outros professores da área de matemática.

Com o intuito de ilustrar uma situação concreta, o estudo procurou analisar as ações de um jovem professor com 7 anos de experiência profissional quando, perante um público formado por profissionais experientes de uma Associação de Professores de Matemática, ele apresentou o primeiro rascunho de um documento para uma pesquisa prática a respeito de ideias que tivera para o ensino de equações lineares, com o objetivo de despertar o interesse dos alunos. Os experimentos realizados por esse professor originaram um artigo em que ele apresentou seus resultados em uma conferência regional; após a exposição inicial, o docente ainda recebeu contribuições de um grupo de professores mais experientes.

O estudo concluiu que o design de uma aula criativa e bem-sucedida geralmente envolve vários elementos e não apenas o estudo de lição, visto de maneira isolada, sem considerar os aspectos culturais relacionados ao conteúdo. Os autores acrescentam que o ambiente de recursos para o desenvolvimento dessas atividades também é relevante, pois quando os professores estiveram envolvidos com uma variedade de mídias, livros didáticos, diretrizes curriculares e

aliados à experimentação sistemática com hipóteses, o resultado foi muito favorável para o desenvolvimento do trabalho docente.

A pesquisa de Lima e Trgalová (2018) teve por objetivo investigar um coletivo constituído por três professoras de matemática na França. As turmas eram formadas por alunos na faixa etária equivalente ao 6º ano do ensino fundamental brasileiro, de um colégio localizado em uma área rural. Dentre os recursos disponíveis, as professoras escolheram aqueles que consideravam mais pertinentes para um projeto de ensino de simetria axial, desde seu planejamento até sua concretização. Para coletar os dados, as autoras da pesquisa criaram um ambiente na Internet, de modo que as professoras disponibilizassem recursos e informações utilizados na preparação coletiva das aulas. Além disso, fizeram entrevistas semiestruturadas com as professoras, a fim de conhecer as motivações que as levaram a realizar um trabalho coletivo: como escolheram os recursos e seus critérios de seleção; que lugar os livros didáticos ocupavam em seus sistemas de recursos; qual a organização e o funcionamento do trabalho coletivo e, por fim, quais as vantagens e inconvenientes identificados no percurso realizado.

No que se refere ao trabalho colaborativo, o estudo centrou na compreensão da dialética coletivo/individual do trabalho documental e nos meios de comunicação (ideias, recursos e experiências) para construí-lo. Para compreender as ações das professoras, enquanto trabalhavam com recursos, a investigação apoiou-se na gênese documental, utilizando as noções de recurso-mãe e recurso-filho. As autoras constataram que as professoras, frequentemente, utilizavam recursos de páginas eletrônicas do Instituto de Pesquisa em Ensino de Matemática – IREM (sigla em francês) por considerá-las interessantes e de boa qualidade, e deixaram de utilizar os livros didáticos de maneira sistemática, senão para localizar exercícios.

Sobre o trabalho coletivo, as professoras explicitaram que ele não se limitou apenas à divisão de tarefas, mas “também permitiu diminuir a carga de trabalho de cada indivíduo no trabalho coletivo” (LIMA; TRGALOVÁ, p. 301) e consideraram como uma força do coletivo o fato de poderem utilizar e se beneficiar dos resultados do trabalho colaborativo.

Em seguida, era necessário tirar uma foto da tabela construída “e enviar por *bluetooth* para o computador da professora de forma que ela pudesse projetar as repostas” (LUCENA; GITIRANA; TROUCHE, p. 251) e apresentar as propriedades encontradas. Em relação ao conteúdo, os autores relacionaram o uso da tabela como recurso para o estudo das propriedades da multiplicação e da divisão, recorrendo à exploração da tabuada de multiplicação e de divisão e a “correlação com o padrão geométrico encontrado na tabela de dupla-entrada” (IBID, p. 251).

Outras variáveis referentes à configuração didática e ao modo de exploração dessa OI foram definidas, bem como os recursos a serem utilizados, os objetivos em relação aos recursos, a organização dos estudantes e seus papéis e o tempo para sua realização.

Os autores concluíram, entre outros resultados, que, ao se comparar alguns aspectos referentes ao uso da tabuada no vídeo e na HQ, ficou evidenciada a importância de um modelo de OI e da modelagem de situações de ensino de natureza sistemática e intencional com apoio de tecnologias digitais. “A experiência vivenciada pelos estudantes, pautada em tecnologias digitais associadas a recursos analógicos” (IBID, p. 259) tem sido um exemplo de integração de recursos à prática docente.

A pesquisa de Ratnayake e Thomas (2018) investigou a gênese documental de quatro grupos de professores do ensino médio do Sri Lanka, envolvidos em um projeto destinado a desenvolver um documento contendo atividades para o ensino de álgebra utilizando tecnologia digital. Os pesquisadores, por meio de seus conhecimentos profissionais, ajudaram os professores nas tarefas digitais, o que os conduziu a superar dificuldades com a utilização de tecnologias computacionais e ter mais segurança no ensino de conteúdos matemáticos.

Uma estrutura foi desenvolvida pelos pesquisadores para acompanhar as produções dos estudantes e colaborar para o desenvolvimento profissional dos professores. Esse arranjo, centrado no aluno, foi baseado na estrutura FOCUS, que foca no planejamento, entrega e revisão das aulas e se concentra em identificar, a cada lição produzida, possíveis dúvidas e um conjunto de ações para

os professores superá-las.

Os pesquisadores conjecturaram que, ao utilizar tecnologia digital na produção de atividades algébricas ricas em valor epistêmico, os professores necessitariam alinhar seus conhecimentos matemáticos e vivenciar um processo de gênese instrumental. O método desenvolvido incluiu três etapas. A primeira, composta de um questionário com questões semiestruturadas com o objetivo de traçar um perfil profissional de cada um dos participantes e uma tarefa em que deveriam projetar uma atividade utilizando o software *GeoGebra*. A segunda etapa, liderada pelo primeiro autor, constituiu de uma intervenção a respeito de ambientes educacionais ricos em tecnologia digital para orientar os professores na elaboração e planejamento de uma atividade. Na terceira etapa, os grupos de professores teriam que construir uma tarefa e “para isso escolheram trabalhar com gráficos de funções quadráticas, domínio e intervalo de funções explorados no *GeoGebra*” (RATNAYAKE; THOMAS, p. 3, tradução nossa).

Por meio da observação do processo de design das tarefas produzidas pelos grupos e da gênese documental como ferramenta de análise, os pesquisadores encontraram vários conjuntos de recursos que evidenciaram a mobilização de esquemas documentais de uso, de utilização e sociais e identificaram “que a intervenção feita pelo pesquisador melhorou significativamente a qualidade das tarefas produzidas” (IBID, p. 5, tradução nossa), o que evidenciou que os professores valorizavam a colaboração coletiva.

Em relação ao processo de desenvolvimento das tarefas colaborativas, o estudo concluiu que os grupos em que os professores estiveram mais à vontade para expressar suas ideias obtiveram melhores resultados, independentemente de sua composição. Considerando a dimensão da instrumentalização da gênese documental, o trabalho coletivo, para produzir uma tarefa, diminuiu a necessidade dos professores de reformular uma tarefa já existente, e, por outro lado, a capacidade de debater a estrutura FOCUS centrada no aluno influenciou a instrumentação dos professores, pois sua atenção se concentrou em melhor desenvolver a aplicação das tarefas.

A investigação de Sayah (2019) estudou as práticas profissionais de uma professora de matemática do ensino médio de uma escola particular na Argélia, em

um ambiente coletivo por meio da investigação reflexiva. Esse ambiente coletivo pertence a uma comunidade de prática do *Sésamath*, que discute o uso de recursos digitais. O trabalho da professora foi acompanhado por entrevistas que solicitava uma representação esquemática de seu sistema de recursos e as observações de uma sessão de trabalho coletivo que tinha como objetivo selecionar um recurso de *Sésamath* para o ensino de Geometria 3D.

A partir da representação esquemática do sistema de recursos e das entrevistas, o autor identificou os recursos materiais de que a professora dispunha para executar suas diversas tarefas docentes e os denominou de “dicionário de recursos”. O autor classificou os recursos em estáticos ou dinâmicos. No nível estático, estão as noções de recursos primário e estável, além de definir recurso-mãe ou seja, todos os recursos que não podem ser modificados, como, por exemplo, as diretrizes curriculares elaboradas pelo Ministério da Educação. Como primários, o autor entende aqueles recursos necessários para o professor desempenhar sua função docente. No nível dinâmico, cabe a noção de recurso intermediário, “que designa os recursos que o professor desenvolve a partir de um recurso mãe” (SAYAH, p. 209, tradução nossa), que evolua dialeticamente, podendo ser modificado ou ajustado por um indivíduo ou coletivo, como é o caso das interações entre professores ou entre professores e estudantes. Para Sayah (2019), a evolução desse processo tende a continuar ao longo do tempo, considerando que o percurso do recurso intermediário tende à estabilidade e, portanto, pode ser entendido como um recurso estável. Qualquer recurso, ainda que em caráter inativo, pertencente ao sistema de recursos de um professor, é considerado dinâmico e possui um *status* vivo.

A partir dessas descrições conceituais, o pesquisador compreendeu o sistema de recursos da professora sob seu aspecto estático, considerando apenas os recursos materiais e as relações existentes entre eles. Sendo assim, por uma gênese documental, identificou quatro processos que evidenciaram a existência de interações no sistema de recursos que caracterizam a dinâmica desse sistema: “preparação da lição, preparação do trabalho prático, avaliação e esclarecimento de dúvidas” (SAYAH, p. 212, tradução nossa).

O desenvolvimento profissional da professora foi acompanhado pela identificação de seus esquemas e classes de situações, isto é, pela identificação de invariantes operatórios e acompanhamento de sua evolução nos diferentes processos. Para o autor o sistema de recursos da professora evoluiu durante o período de acompanhamento, pois, inicialmente, ela contava com documentos oficiais, como livros didáticos e guias pedagógicos, e suas interações com a comunidade concentravam-se essencialmente em discussões a respeito de recursos intermediários. A análise do processo de preparação de uma avaliação utilizando a plataforma *Sésamath* deu origem aos esquemas a partir de “seleção, adaptação e transformação em um novo recurso” (IBID, p. 213, tradução nossa), o que possibilitou inferir invariantes operatórios e o desenvolvimento profissional da professora.

A investigação de Almeida *et al* (2020) teve intuito de analisar o processo de concepção e aplicação do jogo Banco Geométrico, que trata de poliedros. O trabalho teve como base teórica a ADD, OI e o modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), por proporcionarem compreender a conexão entre o desenvolvimento profissional do professor durante sua relação com recurso, e a coleta de dados foi feita à luz da Metodologia de Investigação Reflexiva. Segundo os autores, “o trabalho se inseriu em uma perspectiva de grupo de trabalho colaborativo entre licenciandos e professores de Matemática da UFPE e de uma escola de nível médio, EREM²²” (ALMEIDA *et al*, p. 2).

O Jogo Banco Geométrico – BG foi concebido por esse grupo de licenciandos, acompanhados, por um período de 18 meses, pelos pesquisadores, que estudaram as atividades do grupo a fim de compreender elementos de estabilidade e evolução de seu trabalho documental. Nesse período, o jogo foi aplicado a alunos do 1º ano do ensino médio.

Para utilização do Banco Geométrico com os alunos do 1º ano do EM pelo grupo de licenciandos, foram organizadas duas OIs, “uma voltada à demonstração técnica do jogo e outra, voltada ao trabalho de acompanhamento – exploração dos tipos e subtipos de tarefas e de técnicas sobre Poliedros” (IBID, p. 14). O

²² Escola de Referência em Ensino Médio (EREM).

desempenho didático dos alunos durante a OI para demonstração técnica do jogo demonstrou a necessidade de desenvolver um tabuleiro que pudesse ser impresso, a fim de contemplar um maior número de participantes e trazer indicações mais específicas sobre o jogo. Por outro lado, a OI referente ao trabalho de acompanhamento, exploração dos tipos e subtipos de tarefas e de técnicas presentes no jogo foi alterada durante sua implementação “em virtude do desempenho didático apresentado pelos alunos” (ALMEIDA et al, p. 17).

Para Almeida *et al* (2020, p. 18), as modificações realizadas no BG refletiram, dentre outros aspectos, “uma espécie de lapidação do trabalho documental e das OIs vivenciadas”, em termos de metaconhecimentos e reflexões a respeito do uso de jogos para o ensino de matemática.

Os trabalhos selecionados na categoria práticas pedagógicas estiveram voltados quase que integralmente a questões relativas à aprendizagem de diferentes temáticas matemáticas, como no caso de Visnovska e Cobb (2013), que se preocuparam em investigar os impactos causados pelo uso do recurso de vídeos no processo de aprendizagem de conteúdos relacionados à estatística, ou como evidencia o estudo de Ratnayake e Thomas (2018), dirigido à integração de recursos com origem digital na compreensão da álgebra para estudantes da educação básica.

Algumas contribuições teóricas no âmbito da ADD foram identificadas, como na investigação de Sayah (2019), que propôs as noções de recurso estático e recurso dinâmico em um contexto voltado à compreensão das interações no sistema de recursos dos professores enquanto preparavam lições para a aprendizagem de temas geométricos.

A análise realizada nos trabalhos selecionados ao longo das três categorias não apontou qualquer tipo de preferência pelo estudo de um determinado recurso, nem sugeriu que professores usem um determinado tipo de recurso em detrimento de outro. Pelo contrário, identificaram-se tendências em investigar o impacto da interação de diferentes recursos na atividade profissional dos docentes.

Observou-se ainda que nenhuma das investigações selecionadas sobre a ADD e a OI tratou especificamente da FVSM. Outros temas matemáticos foram abordados, tais como função exponencial, sequências numéricas e equivalência de

expressões algébricas, bem como outras áreas do conhecimento como química, física e inglês.

As investigações selecionadas que trataram do estudo da gênese documental invariavelmente apontaram a necessidade de um longo tempo de observação para a compreensão do fenômeno, e a identificação de esquemas documentais, como proposto por Messaiou (2020) no âmbito de tais estudos, possibilitou que se inferisse acerca do desenvolvimento profissional dos professores. Tais constatações permitiram que alguns dos estudos selecionados trouxessem contribuições para se interpretar com maior clareza a constituição do sistema de recursos e de documentos dos professores. Cabe destacar que as noções de recurso-mãe, recurso-filho e recurso-estruturante, propostas por Hammoud (2012) e empregadas em investigações como as de Lima e Trgalová (2018) também atuaram na mesma direção.

Para a compreensão dos conhecimentos utilizados pelos professores durante sua relação com os recursos, observou-se que a ADD foi articulada com outros quadros teóricos, tais como o PCK e a Teoria da Atividade, revelando uma nova tendência em compreender situações profissionais vivenciadas pelos professores, especialmente aquelas de caráter coletivo, como observado nas investigações de Hammoud (2012) e Almeida *et al* (2020).

Em geral, poucos estudos se dedicaram a articular os quadros teóricos da ADD e a OI. Tal tendência foi observada apenas em investigações voltadas à formação de professores em que situações profissionais foram articuladas por OIs a fim de que fosse possível compreender a relação dos professores com os recursos.

A seguir serão apresentadas a justificativa com os objetivos gerais e específicos da pesquisa e a delimitação do problema, por meio da questão de pesquisa.

2.4 JUSTIFICATIVA E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Considerando o que foi observado na revisão bibliográfica a respeito da FVSM, de um lado, foi possível constatar a existência de investigações, tanto a

nível nacional como internacional, que têm como foco, fundamentalmente, a aprendizagem no ensino básico. De outro lado, constatou-se que poucos estudos se debruçaram sobre a compreensão do conjunto de questões que fazem parte da problemática do professor, como observado, por exemplo, nos trabalhos de Even (1990), Bayazit (2006) e Hatisaru e Erbas (2017).

O conjunto de investigações estudadas apontou que o ensino de FVSM não ocorre de maneira exclusiva, mas, de forma tímida, atrelado ao de função, e revelou a existência de poucas pesquisas que tratam da formação continuada do professor, principalmente em relação a esse tema de ensino, o que, evidentemente, indica a necessidade de mais estudos.

Outro aspecto relevante foi a existência de uma relação direta entre a documentação do professor e a maneira como ensina, isto é, ao projetar e implementar suas aulas, o docente mobiliza e/ou desenvolve recursos e conhecimentos. De acordo com as investigações estudadas a respeito de ADD e de OI, o modo como o docente mobilizou ou desenvolveu recursos para o ensino impactou diretamente seu próprio desenvolvimento profissional e a aprendizagem dos alunos. Esse processo parece estar conectado à formação continuada do professor de modo a se relacionar com recursos que podem potencializar sua prática profissional. Diante disso, considera-se que seja importante conhecer, com maior profundidade o trabalho documental do professor que ensina FVSM por meio do estudo das dimensões que compõem o fenômeno da gênese documental em uma formação continuada, levando em conta que um conjunto articulado de OIs pode possibilitar a sistematização de situações profissionais e permitam compreender seu desenvolvimento profissional.

Com essa justificativa, apoiada na revisão bibliográfica e nas teorias da ADD e da OI, a seguinte questão de investigação foi elaborada:

Como ocorre a gênese documental da FVSM em professores da educação básica em um ambiente de formação continuada?

Em função dessa pergunta de pesquisa, definiu-se o seguinte objetivo geral: **investigar como ocorre a gênese documental em professores da educação básica em um ambiente de formação continuada durante a**

elaboração de documentos para a introdução do ensino de função a partir da FVSM.

Foram também definidos como objetivos específicos:

- Identificar os recursos que os professores selecionam para ensinar FVSM e como se relacionam com eles.
- Analisar os documentos que porventura utilizam para o ensino de FVSM e a maneira como, eventualmente, orquestram artefatos para a aprendizagem dos alunos.
- Observar o trabalho documental de professores que ensinam FVSM em seu ambiente de trabalho, a fim de identificar recursos e compreender quais esquemas de utilização são envolvidos.
- Observar o trabalho documental do professor que ensina FVSM em um ambiente coletivo de formação continuada, a fim de compreender o fenômeno da gênese documental.
- Identificar como ocorrem os processos de instrumentação – relativos aos sujeitos durante as ações de elaboração de documentos – e de instrumentalização – concernentes ao *status* de função que adquiriram, individualmente ou inseridos em um trabalho coletivo, a fim de compreender o fenômeno da gênese documental em suas duas dimensões.

Tendo em vista as pesquisas realizadas no âmbito da ADD utilizarem uma metodologia específica integrada ao quadro teórico e voltada especificamente ao estudo da documentação dos professores, entendeu-se adequado empregá-la na presente investigação a fim de obter respostas à questão de pesquisa. A metodologia, intitulada investigação reflexiva, juntamente com a organização da formação continuada, será apresentada na seção seguinte.

2.5 OS PRINCÍPIOS DA METODOLOGIA REFLEXIVA

A Metodologia de Investigação Reflexiva – MIR, constituída por um conjunto de princípios, serviu de suporte para projetar uma estrutura metodológica específica, com o propósito de investigar a elaboração de documentos para

introduzir o ensino de função a partir de FVSM por professores da educação básica em um ambiente de formação continuada.

Proposta inicialmente por Trouche, Gueudet e Pepin (2008) durante o desenvolvimento da ADD, essa metodologia surgiu da constatação de que o estudo do trabalho de documentação dos professores deveria considerar os seguintes elementos:

a diversidade dos recursos que alimentam esse trabalho e dele resultam, a variedade das interações (coletivas, institucionais e sociais) e o tempo para o desenvolvimento das gêneses documentais. TROUCHE; GUEUDET; PEPIN (2018, p. 8, tradução nossa).

Posteriormente, outras contribuições elaboradas por Gueudet, Pepin e Trouche (2012) e Trouche, Gueudet e Pepin (2018) vieram a enriquecê-la com a construção de seus cinco princípios fundamentais:

- 1º) Acompanhamento a longo prazo;
- 2º) Acompanhamento dentro e fora da sala de aula;
- 3º) Acompanhamento reflexivo do trabalho de documentação;
- 4º) Ampla coleta dos recursos materiais utilizados e produzidos no trabalho de documentação e
- 5º) Confrontação permanente das opiniões do professor a respeito de seu trabalho de documentação. (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018, p.7, tradução nossa).

O primeiro princípio da MIR, relacionado ao acompanhamento a longo prazo, visa munir o pesquisador com dados coletados em diferentes situações experimentadas pelo professor. O acompanhamento de longa duração objetiva trazer elementos do trabalho documental do professor que permitam compreender sua ação diante de diferentes classes de situações e, nesse sentido, algumas estratégias de acompanhamento a longo prazo são sugeridas no contexto da MIR, tais como a observação permanente do trabalho documental na sala de aula, em ambientes em que se deu a formação continuada, ou a realização de entrevistas em diferentes momentos.

O segundo princípio, alusivo ao acompanhamento do professor dentro e fora da sala de aula, tem por objetivo compreender a extensão do trabalho documental do professor. A natureza viva dos sistemas de recursos individuais dos professores exige um monitoramento contínuo para que se possa acompanhar sua evolução. Esse acompanhamento contínuo pode ser implementado por meio do

monitoramento das ações do professor em uma ampla variedade de locais que não apenas o universo presencial, incluindo, nesse contexto, os ambientes virtuais.

O princípio de acompanhamento reflexivo do trabalho de documentação tem por objetivo envolver o professor na fase da coleta de dados para proporcionar que o docente confronte seu trabalho documental com sua prática. O princípio de acompanhamento reflexivo do trabalho de documentação tem por objetivo envolver o professor na fase da coleta de dados para proporcionar que o docente confronte seu trabalho documental com sua prática. Como o professor produz documentos por meio da mobilização de recursos e conhecimentos, tal atividade resulta (deve/pode resultar) na modificação tanto de suas crenças como de sua prática profissional. Em face dessas circunstâncias, algumas ferramentas de coleta de dados que propiciam a reflexividade dos professores são sugeridas no contexto da MIR, tais como o diário de bordo, a representação esquemática de seu sistema de recursos e a entrevista. Paralelamente a isso, o estreitamento do vínculo entre os professores e a coleta de dados pode ser implementada por meio do estabelecimento do contrato metodológico nos moldes propostos por Sabra (2012).

O quarto princípio, relativo à coleta de todos os recursos materiais utilizados e produzidos pelo professor em seu trabalho documental, tem relação direta com o amplo significado do termo recurso, ou seja, ‘qualquer coisa’ que possa ser (re)utilizada e que, efetivamente, sirva de fonte para a atividade docente. Por sua abrangência, esse princípio se torna importante para a compreensão do processo de documentação do professor, não importando se os recursos são de origem convencional ou digital.

O quinto e último princípio proposto pela Metodologia de Investigação Reflexiva está relacionado com a confrontação permanente das opiniões do docente com seu trabalho de documentação e possibilita ao pesquisador “revisar dados coletados e sugerir que o professor interprete traços de seu trabalho documental” (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018, p. 6, tradução nossa). Esse princípio relaciona-se com a ideia de crítica e autocrítica do trabalho de documentação e, nesse sentido, algumas ferramentas de coleta de dados podem contribuir, como, por exemplo, a elaboração da representação esquemática do sistema de recursos do professor. A utilização dessa ferramenta, segundo Gueudet

e Trouche (2010, p. 11, tradução nossa). “pode favorecer o confronto do professor com a materialidade de seu trabalho documental”, bem como favorecer a construção de inferências por parte do pesquisador sobre aspectos da documentação, como a constituição de seu sistema de recursos.

Tendo em vista que o objetivo da investigação centrado no propósito de estudar a construção de documentos está diretamente associado ao desenvolvimento de gêneses, e que sua evolução, conforme abordado na seção 2.1, exige tempo para ser observada - da mesma forma que os esquemas, parte integrante desse processo -, entendeu-se como apropriado estruturar o planejamento de uma formação continuada, cuja organização é apresentada a seguir.

2.6 ORGANIZAÇÃO DA FORMAÇÃO CONTINUADA

A formação continuada foi planejada de maneira a possibilitar o acompanhamento da construção de documentos, considerando os princípios propostos pela MIR e tendo como pano de fundo a apropriação de um modelo para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM a partir de FVSM. Ela foi estruturada para ser desenvolvida em duas fases: a primeira, denominada preparação, e a segunda, estritamente vinculada à primeira, denominada execução.

A fase de preparação teve início no mês de junho de 2019 e se estendeu até a meados de agosto de 2019, com o objetivo de planejar as ações da formação continuada antes do período formativo propriamente dito. Procedeu-se, inicialmente, à escolha dos participantes e à organização das estruturas de acompanhamento de trabalhos documentais. Decidiu-se utilizar o ambiente virtual *Moodle* para o preenchimento de questionários informativos, o diário de bordo e a participação em um fórum de discussão e, posteriormente, definiu-se como ocorreriam as visitas iniciais aos sujeitos de pesquisa e as entrevistas semiestruturadas.

O objetivo dessa fase foi que as informações obtidas por meio do emprego de questionários e do fórum de discussão proporcionassem a elaboração de um perfil pessoal e profissional dos participantes, além de fornecer evidências sobre

recursos e estratégias utilizadas para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM. Da mesma forma, presumiu-se que o cruzamento desses dados obtidos por intermédio do diário de bordo e da visita inicial e realização de entrevista semiestruturada trouxesse elementos para a compreensão do sistema de recursos e conhecimentos utilizados para introduzir o ensino de função.

A fase de execução transcorreu entre os meses de agosto e dezembro de 2019 quando ocorreram encontros presenciais e à distância, fóruns de discussão, observações de aulas e ainda a visita final aos sujeitos da pesquisa.

A organização dessa fase foi pensada de modo a proporcionar aos participantes apropriação, elaboração, aplicação em sala de aula e crítica de uma sequência de situações educacionais - SSE para introduzir o ensino de função a partir de FVSM, junto a estudantes do 1º ano do EM, por meio da vivência de um conjunto de situações educacionais - SE viabilizadas pela articulação de OIs.

Para assegurar a implementação dos princípios do acompanhamento a longo prazo, contínuo e reflexivo, a ampla coleta de recursos produzidos e/ou mobilizados pelos participantes, além da confrontação permanente de suas opiniões sobre seu trabalho de documentação propostos pela MIR, a fase de execução foi dividida em quatro etapas: elaboração coletiva, aplicação, crítica e visita final aos sujeitos de pesquisa.

A implementação da primeira etapa, de elaboração coletiva, contou com situações idealizadas que requereram a organização de três OIs, desenvolvidas ao longo de encontros presenciais e com suporte do ambiente virtual *Moodle*. Nessa etapa, o intuito foi que a vivência de situações profissionais possibilitasse a apropriação por parte dos participantes de um modelo para ensinar função e que em seguida, mediante a mobilização e/ou concepção de recursos, se desse a organização coletiva de uma SSE para introduzi-lo a partir da FVSM junto a estudantes do 1º ano do EM.

A etapa de aplicação, da fase de execução, foi concebida com objetivo de observar a aplicação da SSE com alunos de 1º ano do EM dos sujeitos de pesquisa, enquanto, paralelamente, organizaram-se encontros presenciais e/ou a distância com suporte do ambiente *Moodle*, a fim de proporcionar o compartilhamento das experiências vivenciadas com os demais integrantes da formação.

O objetivo dessa etapa foi a aplicação da SSE junto a estudantes do 1º ano do EM, liderada pelos sujeitos de pesquisa, de modo a propiciar não só a continuidade do processo de apropriação do modelo para ensinar função como também o enriquecimento da SSE por meio do ingresso de outros recursos.

A etapa de crítica teve como meta promover aos participantes a vivência de uma situação de avaliação coletiva a respeito da aplicação da SSE e requereu a organização de uma OI. A intenção foi de que a vivência da situação permitisse o enriquecimento do documento SSE mediante a produção de crítica e reflexão da prática profissional, ocasião em que seria possível continuar o acompanhamento da evolução da documentação dos professores.

Por fim, a visita final teve por intento avaliar o impacto do processo formativo na elaboração de inferências acerca do trabalho documental dos sujeitos de pesquisa. Nela pretendeu-se que o processo formativo criasse condições para que os participantes refletissem sobre a importância de suas escolhas didáticas para introduzir o ensino de função, bem como sobre o papel desempenhado pelos estudantes nesse processo.

Com o propósito de ampliar a compreensão da problemática, decidiu-se realizar alguns estudos preliminares, de ordem histórica, epistemológica e didática, para complementar os já realizados e dar subsídios ao planejamento da formação continuada pretendida, que serão apresentados no próximo capítulo.

3 ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo são apresentados dois estudos: o primeiro deles é de natureza histórica e epistemológica, a respeito da construção da definição formal de função e seu imbricamento com FVSM e o segundo é um estudo didático sobre o ensino de função, em que se analisam documentos oficiais curriculares nacionais livros didáticos e o material digital para apoiar o trabalho do professor produzido pelo MEC.

3.1 ESTUDO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Primeiramente, é necessário esclarecer que este estudo se constituiu em uma narrativa de eventos históricos que tiveram por objetivo compreender o entrelaçamento entre função e FVSM. Em seu processo de construção, foi necessário relatar eventos que caracterizaram a história de função e organizá-los cronologicamente, para que o estudo não se limitasse à mera descrição de técnicas e conteúdos dissociados das circunstâncias históricas e sociais em que estavam inseridos.

No século XVII, segundo Rossini (2006, p.32), “a formação da ideia de função foi longa e tumultuada” e influenciada por questões não puramente matemáticas, mas do campo da Física, voltadas especialmente para problemas relacionados à procura de tangentes em curvas, que alavancaram seu desenvolvimento, na esteira de contribuições produzidas anteriormente por alguns matemáticos, como Descartes e Fermat, no âmbito do que veio a ser chamado de Geometria Analítica. Alguns desses problemas estiveram relacionados às invenções de novos instrumentos científicos, “ligados à metrologia, trazendo precisão às experimentações e mensurações com a introdução de medidas qualitativas de calor, pressão etc”. (ROSSINI, 2006, p. 34).

A ferramenta encontrada posteriormente para responder a essas questões foi o cálculo infinitesimal que, por sua vez, conduziu a matemática “na direção da rigorização e formalização.” (ROQUE, 2012, p. 343) Para a autora, no século XVII problemas e métodos de investigação geométrica predominavam na matemática,

e questões como encontrar tangentes à uma curva, calcular quadraturas ou retificar curvas influenciaram Newton e Leibniz a desenvolver métodos infinitesimais que lhes propiciaram maior grau de generalidade e unidade. A princípio, começa-se a fazer inferência à função de uma maneira mais clara graças à relação “que se estabeleceu entre a álgebra e a geometria, relacionando um gráfico com sua expressão analítica” (HUH, 2009, p. 10, tradução nossa).

Por meio de fórmulas simbólicas, Leibniz propôs regras para encontrar a derivada de somas, diferenças, produtos, quocientes, potências e raízes, utilizando um algoritmo que chamou de diferencial, que permitia “ir além dos métodos anteriores para calcular tangentes, ao incluir curvas transcendentess” (ROQUE, 2012, p. 354). Leibniz mostrou que novos métodos eram necessários para estudar a relação entre grandezas que, naquela época, não podiam ser tratados na álgebra ordinária, mas que, posteriormente, contribuíram para o surgimento da ideia de função como relação entre quantidades.

Segundo Roque (2012, p. 360), foi Leibniz “quem introduziu a palavra função em um artigo datado de 1684, quando discutiu o tratado dos senos do quarto de círculo, escrito por Pascal em 1659”, empregando as chamadas diferenciais dx e dy que ajudaram a fundamentar os métodos infinitesimais, ainda que não tenha proposto uma definição para função.

Enquanto para Leibniz, promover suas ideias utilizando infinitesimais era uma maneira de descobrir novas verdades, Newton esforçou-se, segundo Roque (2012, p. 364) “para expressar sua teoria em linguagem rigorosa, no caso, a geometria clássica”, procurando garantir uma continuidade histórica entre seus métodos e os dos antigos, na tentativa de explicar fenômenos ligados à mecânica. Ao contrário de Leibniz, Newton, talvez ciente das fragilidades dos novos procedimentos infinitesimais, “trabalhava bem seus argumentos antes de torná-los públicos e considerava o padrão da geometria grega mais adequado para transmitir suas ideias.” (ROQUE, 2012, p. 365)

As considerações narradas até aqui acerca das contribuições de Newton e Leibniz a respeito dos métodos infinitesimais, no contexto da Física, foram importantes para a construção da noção de função, mas foi a maneira rigorosa de elaborá-las que predominou na comunidade de matemáticos reunidos por volta de

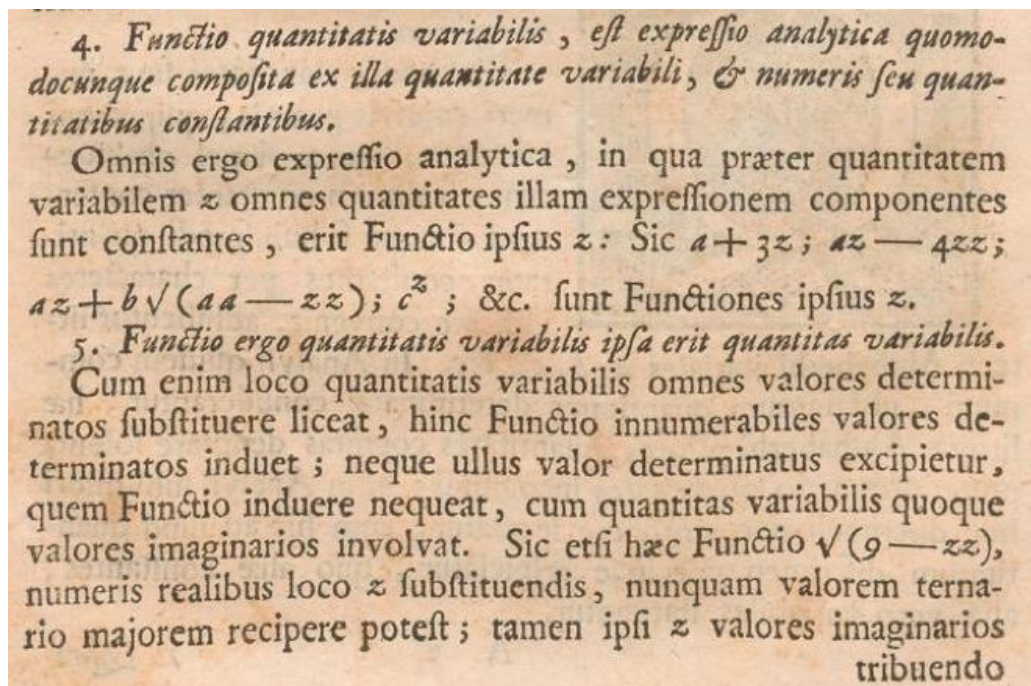
1700 na Academia de Ciências de Paris. Os métodos algébricos associados posteriormente aos nomes de “Euler e Lagrange representaram uma etapa seguinte na transformação da noção de rigor”. (ROQUE, 2012, p.369)

Em meados do século XVIII, segundo Huh (2009, p. 14, tradução nossa), “muitos matemáticos introduziram séries infinitas no estudo de curvas” e, a partir daí, segundo Roque (2012, p. 373), “a relação entre variáveis podia ser dada por uma série de potências finitas”, o que fez com que as séries se tornassem o meio mais geral para se estudar relações entre variáveis. Segundo a autora, a falta de um termo geral para exprimir quantidades arbitrárias, que dependem de outra quantidade variável foi o que, efetivamente, motivou o surgimento de uma definição de função, materializada pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli, que conduziu à uma definição formal, apresentada em 1718 na Academia de Ciências de Paris por Bernoulli.

A definição proposta por J. Bernoulli, de acordo com Youschkevith (1981, p. 35), segundo a qual “chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de alguma maneira que seja desta grandeza variável e de constantes”, não indica a maneira de construir funções a partir de variável independente, mas acredita-se, segundo Rossini (2006, p. 41) “que ele (Bernoulli) pensa nas expressões analíticas das funções conservando suas ligações com a geometria e a mecânica”.

Para Huh (2009, p.3, tradução nossa), “a primeira definição formal de função como expressão analítica foi proposta por Euler em 1748”, em um livro escrito em latim intitulado *Introductio in Analysin infinitorum*, cuja reprodução parcial pode ser observada na Figura 5.

Figura 5 - Reprodução digital da definição de função como expressão analítica



Fonte: ETH Zürich Bibliotek online, 2018.

Roque (2012, p. 374) considera “que foram os primeiros passos para que o cálculo infinitesimal pudesse ser reconstruído com base na análise algebrizada” e, para que se possa situar a definição dentro de um contexto histórico, é possível observar que ela ocorreu durante o século XVIII, cerca de quarenta anos antes da Revolução Francesa, período em que as transformações da matemática foram influenciadas “pela crescente valorização da técnica” (ROQUE, 2012, p. 280). Segundo Zuffi (2001, p. 3), “a partir daí, a ideia de função tornou-se fundamental na esfera da análise matemática, enquanto esteve implícita na Geometria Analítica de Fermat e Descartes e nos estudos de Newton e Leibniz no âmbito da Física”.

A definição original, constituída por sete itens, foi traduzida para o francês e publicada em 1797, na França, de acordo com Rossini (2006, p. 49), “na obra *Introduction à l'analyse infenitésimale* da qual podemos observar, especificamente na figura 6, os itens 4 e 5, sendo que o 4 tem a seguinte tradução para o Português:

uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira que seja, desta quantidade e de números ou de quantidades constantes. Assim, toda expressão analítica, que além da variável z contiver quantidades constantes, é uma função de z . Por exemplo: $a + 3z$, $az - 4zz$, $az + b\sqrt{aa - zz}$ etc. são funções de z . (ROSSINI, 2006, p.41).

Figura 6 - Reprodução digital da definição de Função

4. Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable x contiendra des quantités constantes, est une fonction de x . Par exemple, $a + 3x$; $ax - 4xx$; $ax + b\sqrt{a^2 - xx}$; cx ; &c, sont des fonctions de x .

5. Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même

Fonte: ETH Zürich Bibliotek online, 2018.

Interessa-nos destacar, entretanto, que, ao se observar detalhadamente o conteúdo do item 4 da definição postulada por Euler, pode-se dizer que ela não considera a possibilidade da existência da FVSM, na medida em que afirma que se trata de “uma expressão analítica”, ainda que buscasse, segundo Roque (2012, p. 375), “definir de modo preciso o que é uma ‘expressão analítica’, enumerando as operações por meio das quais ela poderia ser obtida”. No item 5 da definição, Euler acrescenta que “uma função de variável é também uma quantidade variável.” (ROSSINI, 2006, p. 41).

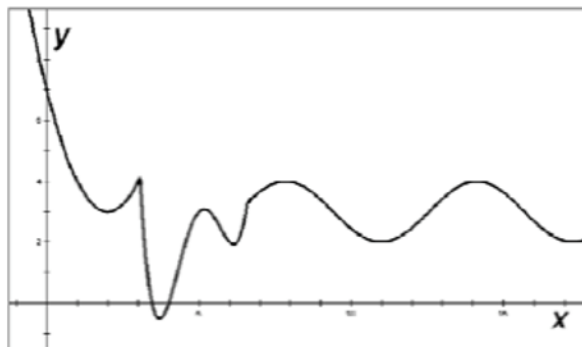
De acordo com essa definição, é possível imaginar que Euler estava se referindo a uma função como expressão analítica, mas seu entendimento se dava em termos de sua representação gráfica, pois, para ele, se uma curva correspondia a cada função, cada linha curva também deveria ser representada por uma função.

Segundo Huh (2009), para Euler, funções contínuas eram aquelas expressas por uma única expressão analítica, funções mistas como as que continham duas ou mais expressões analíticas; para funções descontínuas, Euler não apresentou uma definição, apenas mencionou que incluíam funções, trazendo indícios da existência da FVSM, ainda que não tivesse clareza de sua existência.

Essa tendência se reforça mais uma vez quando, pouco tempo depois, segundo a autora, Euler define funções descontínuas como sendo aquelas que tinham partes de curvas desenhadas arbitrariamente, que ele chamou de curvas mecânicas (Figura 7), como aquelas para as quais não há apenas uma equação

conhecida, trazendo, novamente, indícios de que na verdade procurava acomodar a ideia de FVSM quando se pudesse perceber “uma relação entre a representação gráfica e analítica da função” (HUH, 2009, p. 13, tradução nossa).

Figura 7 - Exemplo de gráfico de uma função descontínua segundo Euler

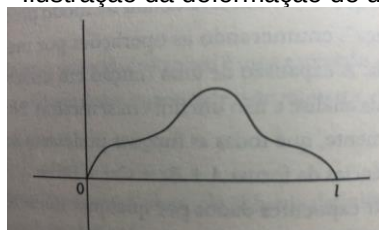


Fonte: Huh (2009, p. 12).

De acordo com Gomes (2015, p.12) “a identificação de função atrelado à expressão analítica passou a ser questionada, ainda no século XVIII, no contexto de um problema relacionado à física” que se referia ao estudo de vibrações infinitamente pequenas de uma corda por suas extremidades. Segundo Roque (2012), consistia em uma corda elástica, como a representada na Figura 8, com extremidades fixas em 0 e l , deformada até voltar à forma inicial e posteriormente solta. A corda começa a vibrar, e o problema em questão é determinar a função que a corda descreve em um instante t .” (ROQUE, 2012, p. 376).

Diversos matemáticos debateram esse problema de deformação da corda, tais como D'Alembert, que acreditava que as condições iniciais da corda deviam ser sempre representadas por uma expressão analítica, na forma de uma equação algébrica ou uma série de potências, o que levou Euler a rever suas proposições iniciais e concordar com o fato de “que se duas expressões analíticas coincidem em um intervalo, elas coincidem em todas as partes.” (HUH, 2009, p. 14, tradução nossa)

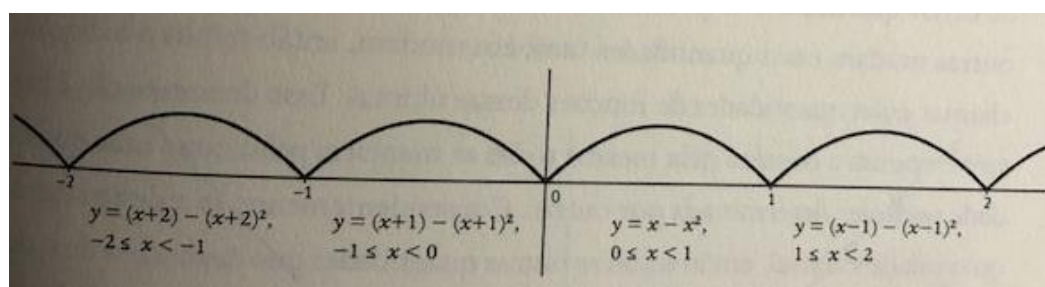
Figura 8 - Ilustração da deformação de uma corda



Fonte: Roque (2012, p. 376).

De acordo com Roque (2012, p. 397), para D'Alembert, a forma inicial da corda não podia ser dada “por um arco de parábola $y = x - x^2$, já que essa curva não é periódica.” Ele acrescenta que, baseado em argumentos físicos e geométricos, Euler não admitia essa restrição, já que para ele a forma inicial da corda pode ser dada por partes de parábolas desse tipo, “definidas em diferentes intervalos do eixo x ” (p. 397), como exibido na Figura 9, o que entretanto traz novamente indícios de FVSM como a função que poderia explicar o fenômeno físico referente à deformação da corda.

Figura 9 – FVSM referente a Deformação da corda (pedaços de parábolas)



Fonte: Roque (2012, p. 377).

Anos mais tarde, Daniel Bernoulli (filho de Johann Bernoulli), argumentaria que a forma inicial da corda é arbitrária e que a posição inicial de uma corda vibrante “pode ser representada por uma série infinita de termos trigonométricos, que deve ser considerada tão geral quanto uma série de potências” (ROQUE, 2012, p. 377).

É preciso deixar claro, portanto, que foi um problema relacionado com a corda vibrante – no âmbito da física – cuja discussão entre os matemáticos da época possibilitou ampliar a definição de função e incluir funções definidas por expressões analíticas por partes – o que pode ser mais uma vez evidenciado como FVSM e funções com expressão gráfica e sem expressão analítica.

Em face dessa circunstância, em 1753, D. Bernoulli publica um artigo em que propõe uma nova solução para esse problema e formula a seguinte definição de função:

chamamos de função várias quantidades dadas de alguma maneira, por uma quantidade (x) indeterminada e por constantes algebricamente ou transcendentemente”, tornando-se a primeira definição de função como expressão analítica. (HUH, 2009, p.14, tradução nossa).

Ainda que não tivesse clareza, mais uma vez nota-se a tentativa dos matemáticos em tentar acomodar FVSM em uma definição de função.

Da mesma forma, no prefácio da obra *Institutiones calculi differentialis* (Fundamentos do cálculo diferencial), publicado em 1755, Euler formula uma nova definição para função, não atrelada à expressão analítica que, de acordo com Roque (2012, p. 378) é a seguinte:

Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x , de qualquer maneira, ou que são determinadas por x , são chamadas funções de x .

Com a proposição dessa definição, Euler procurou afirmar que o principal aspecto da integração de equações diferenciais advindas de problemas físicos é que elas dão origem, segundo Roque (2012, p. 378) “a uma nova classe de funções ‘descontínuas’ dependentes de nossa vontade, ou seja, arbitrárias, que não precisam nem mesmo ser representadas por expressões analíticas”. Segundo Roque (2012, p. 379), Euler denominava essas funções de descontínuas, porque a noção de continuidade que propunha era distinta da atual por estar relacionada “à invariabilidade da expressão analítica que determinava a curva”. A ideia atual de descontinuidade foi debatida por volta de 1791, “por meio das contribuições de Louis Arbogast” (ROSSINI, 2006, p. 36), que utilizava o termo descontínuas. Na verdade, segundo Katz (2010, p. 742), “Euler tinha apenas uma vaga ideia da noção de domínio de uma função com a possibilidade concomitante de que as funções podem ser representadas” por expressões diferentes em várias partes de seu domínio.

Todo o processo de discussão do problema da corda vibrante, que potencializou o desenvolvimento da noção de função, propiciou que a análise algebrizada se tornasse hegemônica entre os matemáticos do século XVIII, sobretudo pelas contribuições de Euler e Lagrange, e levou à separação da análise matemática em relação à geometria hegemonzada pelo formalismo algébrico.

Finalmente, em 1837, a definição formal de função adquire um significado independente da noção de expressão analítica, quando Dirichlet apresentou sua definição de função: “ y é uma função de uma variável x , definida em um intervalo $a < x < b$, se a todo valor da variável x nesse intervalo corresponde um valor

definido da variável y ” (ROSSINI, 2006, p. 49). A essa definição, atrelou o seguinte exemplo: $f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x \in Q \\ b, & \text{se } x \in Q^c \end{cases}$ e observou que essa função não está dada por uma expressão analítica, de acordo com Huh (2009). Cabe destacar ainda que Euler trouxe grandes contribuições “para a linguagem simbólica e as notações que utilizamos hoje, entre elas o, $f(x)$ para denotar uma função de x ” (ZUFFI, 2001, p. 4), além da letra e para a base de logaritmos naturais.

A partir do século XIX, críticas às concepções de função e continuidade anteriormente apresentadas foram cada vez mais incisivas. As mais notórias se relacionavam a um problema da física que questionava como o calor se propagava em uma massa sólida, dadas certas condições iniciais, que foi solucionado pelo matemático e físico francês Jean-Baptiste Joseph Fourier. Segundo Roque (2012, p. 393), “ao fornecer a solução de um problema considerado somente em um intervalo, Fourier apresentava um recurso inovador em relação à definição de função pela sua expressão analítica”, mesmo não tendo demonstrado que uma função qualquer realmente pudesse ser representada por uma série trigonométrica em um intervalo, o que resultou em diversas críticas de matemáticos da época.

Dentre essas críticas, destacam-se as feitas por Dirichlet, mas com maior ênfase por Cauchy, que buscavam maior rigor à matemática e culminaram com o rompimento do intercâmbio com a física no transcorrer do século XIX. Como consequência, a abordagem da teoria dos conjuntos predominou na matemática, no início do século XX, e influenciou todas as suas noções centrais, principalmente, a de função.

Foi durante o século XX que a definição bourbaksita de função, elaborada a partir das contribuições de Dedekind e Cantor, predominou entre os matemáticos e inspirou a definição formal que se passou a aprender na escola, e, segundo Roque (2012, p. 474), tem o seguinte enunciado:

Sejam E e F dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é dita uma relação funcional se, para todo x pertencente a E , existe um único y pertencente a F , que possui a relação dada com x . Damos o nome função à operação que associa, desse modo, a todo elemento x pertencente a E , o elemento t pertencente a F que possui a relação dada com x ; y será dito o valor da função no elemento x . (ROQUE, 2012, p. 474).

Cabe salientar que essa versão foi posteriormente substituída por outra, conjuntista, que define função como subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos, E e F , não vazios e que elimina todas as ideias originais associadas à variação, porque a assume a partir da noção de conjunto com ênfase numérica. De acordo com Roque (2012, p. 474), tal definição não se concilia com a natureza de sua construção, o que dificulta “associar a noção dinâmica de função que aparece em situações físicas à definição formal, de natureza estática”, exemplificadas por curvas ou expressões algébricas como outras maneiras de concebê-la ao longo da história.

O presumido caráter estático da proposição bourbakista pode ser observado sob outros dois pontos de vista. Segundo Lima (1999, p. 9). “a atual definição de função como um conjunto de pares ordenados é estática” e sugere que a definição de função por correspondência é muito mais simples e intuitiva. De acordo com Huh (2009, p. 17, tradução nossa), “o motor principal da gênese do conceito de função está relacionado à ideia de variação”, mas as definições priorizam uma abordagem estática na medida em que sua exploração se dá por conjuntos.

Após o presente levantamento, observou-se que o debate envolvendo a elaboração da definição de função esteve relacionado à FVSM e que este partiu de problemas relacionados ao campo da física. Posteriormente, constatou-se que a matemática moderna bourbakista trouxe a definição de função para a relação entre conjuntos, acabando por influenciar seu ensino na educação básica, mas perdendo todo o contexto relacionado com a ideia de variabilidade.

Entendemos que os embates até aqui narrados, que, segundo Huh (2009, p.49, tradução nossa), são “de caráter científico entre os matemáticos do século XVIII”, permitiram o desenvolvimento da definição de função, a compreensão da FVSM e o imbricamento que existe entre elas; no entanto, ainda segundo Huh (2009), a compreensão de FVSM foi dificultada epistemologicamente pela ideia de se apresentar função por meio de uma única expressão e de comportamento contínuo e regular. Além disso, foi possível perceber que o contexto em que ocorreu o desenvolvimento desses saberes não foi unicamente matemático, mas também

está relacionado à física e possibilitou não apenas compreender a relação entre função e FVSM como impulsionar seu desdobramento posterior.

Finalmente, a narrativa histórico-epistemológica possibilitou compreender que a razão de ser da construção da definição de função estaria relacionada à FVSM e que talvez a noção de função pudesse ser introduzida por um problema envolvendo FVSM. Esse contexto provoca o surgimento de outras reflexões, desta feita de ordem didática e diretamente relacionadas à maneira com a qual repercutem no ensino. Para isso, outro estudo de caráter didático será apresentado a seguir.

3.2 ESTUDO DIDÁTICO A RESPEITO DO ENSINO DE FUNÇÃO

O objetivo desse estudo didático foi compreender o que determinam os documentos curriculares nacionais para o ensino de função, sua relação com FVSM e os recursos que porventura sugerem para implementá-lo, nos materiais curriculares do livro didático e no portal de apoio ao trabalho do professor do MEC.

3.2.1 DOCUMENTOS CURRICULARES NACIONAIS

O intuito deste estudo foi entender como os dois documentos curriculares nacionais, BNCC e PCN+, regulam ou sugerem o ensino de função na educação básica, bem como que recursos sugerem para realizá-lo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram introduzidos no país nos anos 1990, sem ter uma pretensão normativa, mas como referência para a planificação do currículo da Educação Básica no país.

Os PCN+, Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (BRASIL, 2000), tinham como objetivo oferecer orientações educacionais complementares aos PCN. Especificamente em relação à matemática, têm como eixo organizador do processo de ensino a resolução de problemas e, nesse sentido, sugerem que os currículos favoreçam o desenvolvimento de cenários que permitam a conexão de diferentes temas matemáticos e potencializem as relações com outras áreas do conhecimento. No entanto, de acordo com Xavier Neto (2016), a FVSM não é tratada nesse documento.

Por outro lado, o documento orienta a organização do ensino curricular de função do ensino médio, por considerá-lo estruturador para a aprendizagem de matemática. Nele, trata desse ensino no tópico “Álgebra: números e funções”, sugerindo que deva ser desenvolvido no ensino médio e que “esse tema trata de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos” (BRASIL, 2000, p. 4). Além disso, sugere que o ensino de funções permite ao aluno

adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e dos conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. (BRASIL, 2000, p. 121).

Os PCN+ preconizam ainda que todo esse percurso deve ser abandonado assim que a definição formal de função seja estabelecida, pois, para a análise de diferentes tipos de funções, o estudo de conjuntos e relações é desnecessário e sugere que o ensino

pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algebricamente e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizado e em parte deixado de lado, justamente com estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares. (BRASIL, 2000, p. 121).

Observou-se que as sugestões existentes nos PCN+, para o ensino de função, referem-se a algumas orientações didáticas, como por exemplo, não fazer uma abordagem excessivamente formal:

propondo soluções que levem os alunos a construir noções algébricas para a observação de regularidades em tabelas e gráficos, a investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-las simbolicamente, utilizar letras como variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas, propor situações-problema sobre variação de grandezas para que o aluno possa desenvolver a noção de função e utilizar software educativo que apresentem planilhas ou gráficos. (ROSSINI, 2006, p. 90).

Não há, por outro lado, qualquer menção ao fato de a definição de função constituir-se em um possível impedimento à compreensão de FVSM. Para Rossini

(2006, p. 91), “as sugestões encontradas nos PCN+ sobre variáveis e funções são muito abrangentes, havendo necessidade de uma ação efetiva para nortear o professor sobre seu uso”. No entanto, as sugestões desse documento, durante muitos anos, influenciaram diretamente a organização de materiais curriculares, como livros didáticos físicos e/ou eletrônicos largamente utilizados por docentes para suas aulas.

Por outro lado, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCNEM (BRASIL, 2006) “foram construídas a partir de várias discussões entre professores e uma equipe especializada na busca pela melhoria do ensino nas escolas públicas” (SILVA, 2013, p. 29) e, como resultado desses debates, foram apresentados uma série de orientações ao documento dos PCN+ em relação ao ensino de função.

Segundo as OCNEM (BRASIL, 2006), a orientação era de que se iniciasse o estudo de funções explorando as relações entre duas grandezas em diferentes situações cotidianas. Além disso, sugeriu que se desse ênfase à sua introdução, destacando o significado da representação gráfica das funções. Em relação ao uso de recursos, o documento complementou sugestões iniciais existentes nos PCN+, de modo que o ensino de função incorporasse o uso de programas de computador, sobretudo para a exploração de sua representação gráfica e para o uso de jogos.

Após um período, que começou com a introdução dos PCN no final dos anos 90 do século passado, a comunidade educacional brasileira debateu, de forma democrática, em todas as esferas da educação básica e universitária, a necessidade da construção de um documento nacional com características normativas que orientasse a escola básica. Essa ideia teve grande impulso e, posteriormente, materializou-se, no período compreendido entre 2002 e 2016, época da existência de governos democráticos e populares no Brasil, que culminaram com a construção da Base Nacional Comum Curricular – BNCC. O documento, inicialmente formatado para o ensino fundamental, foi rapidamente desfigurado a partir do golpe parlamentar ocorrido no país em 2016 e caiu em certo descrédito quando o Ministério da Educação e Cultura (MEC) esvaziou o debate com a comunidade escolar, gerando desconfiança geral quanto à sua eficácia.

Não obstante o desacordo, a BNCC dispõe que a área de matemática e suas tecnologias encontrem-se dispostas em um bloco, tanto no ensino fundamental 2º ciclo como no ensino médio e, a respeito de um dos objetivos desse ensino, afirma que “os estudantes desenvolvam habilidades referentes aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas” (BRASIL, 2019, p. 529) bem como define as ideias consideradas fundamentais para promover articulações entre as áreas – Números, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas – e o desenvolvimento do pensamento matemático.

O documento normatiza as competências e as habilidades a serem desenvolvidas no ensino médio na direção do letramento matemático, de modo que se tornem mais densas e eficientes para conteúdos que foram trabalhados no ensino fundamental, pois esse letramento deve desenvolver

competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. O letramento deve também assegurar que todos os estudantes reconheçam que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para compreender e atuar no mundo e para que também percebam o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e que pode também ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2019, p. 266).

A unidade temática de Álgebra apresentada no documento preconiza, tal como nos PCN+, que a noção intuitiva de função pode ser explorada por resolução de problemas que envolvam a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar regra de três), e ainda “que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação” (BRASIL, 2019, p. 271), além de desenvolverem técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano.

O documento propõe, especificamente, que o ensino de função comece no 9º ano do ensino fundamental segundo ciclo – EF2, com foco no estudo de suas representações numérica, algébrica e gráfica. Para esse ano escolar, o documento pretende o desenvolvimento de estratégias didáticas que possibilitem a evolução do pensamento algébrico para as noções de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade, a partir de: “desenvolvimento de uma

linguagem, estabelecimento de generalizações, análise da interdependência de grandezas e resolução de problemas por meio de equações ou inequações” (BRASIL, 2019, p.270). Nesse sentido, a BNCC normatiza a organização curricular para o ensino de função no 9º ano do EF2, na unidade temática álgebra, com os seguintes objetos de conhecimento:

Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.
 Razão entre grandezas de espécies diferentes.
 Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.
 Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis.
 Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.
 (BRASIL, 2019, p. 316).

Para cada um desses objetos de conhecimento, apontam a habilidade a ser desenvolvida, ou seja:

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
 (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
 (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
 (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. (BRASIL, 2019, p. 317).

Em relação ao ensino médio – EM, em sua competência específica 4, a BNCC preconiza que o ensino deva habilitar os estudantes a compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, “diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.) na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (BRASIL, 2018, p. 538) para, dentre outras questões, permitir o estabelecimento de relações, como ou sem o apoio de tecnologias digitais, entre as representações de cada tipo de função.

Na competência de número 5, duas habilidades específicas estão relacionadas à função, aconselhando-se o trabalho com relação entre números expressos em tabelas para representá-lo no plano cartesiano, a fim de proporcionar a criação de conjecturas e generalização no trabalho com função polinomial do 1º e 2º grau.

Diferentemente dos PCN+, a BNCC faz referência direta à FVSM na habilidade:

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 531).

Associada à competência específica 5, dispõe que “investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos” (BRASIL, 2018, p. 540), cujo desenvolvimento pressupõe um conjunto de habilidades relacionadas às capacidades de investigação e de produção de argumentos que podem emergir de experiências empíricas, como por exemplo, o trabalho envolvendo a aprendizagem de função por meio de contas de consumo.

Nos PCN+, a proposição de modelar situações-problema é sugerida para ocorrer durante o 1º ano do EM o que pode possibilitar, por exemplo, a construção de modelos descritivos que favoreceriam conexões de funções com outras áreas do conhecimento, enquanto na BNCC essa exploração é normatizada para o 3º ano do EM, isto é, no fim do ciclo da educação básica.

Em relação aos recursos propostos pela BNCC, o documento sugere a utilização de tecnologias digitais, “incluindo ou não *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra” (BRASIL, 2018, p. 539), mas salienta que eles precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, como estratégia para que se construa um processo de formalização de sua definição.

Diversamente dos PCN+, a BNCC se propõe, não apenas a regular os currículos nacionais, mas a influenciar diretamente a elaboração de materiais curriculares para o ensino de função. Nessa perspectiva, pareceu razoável ampliar o presente estudo, estendendo-o exatamente a tais materiais, por serem utilizados pelos professores em situação de ensino. Sendo assim, o estudo que será apresentado a seguir concentrou-se no foco dado ao ensino de função em materiais curriculares reconhecidos pela comunidade escolar como referências

didáticas, isto é, o livro didático (físico e/ou digital) e os materiais elaborados pelo portal de apoio ao trabalho do professor do MEC.

3.2.2 LIVROS DIDÁTICOS E PORTAL ELETRÔNICO DO MEC

O primeiro estudo apresentado na presente seção voltou-se aos livros didáticos, tanto na forma física como na digital. Para selecionar as obras realizou-se uma consulta ao *site* do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE, vinculado ao Ministério da Educação, que abriga o Plano Nacional do Livro Didático – PNLD²³, uma política pública com o objetivo de classificar livros didáticos por um guia que norteia a comunidade escolar quanto à confiabilidade didática de suas escolhas.

Consultou-se o Guia PNLD 2018 (BRASIL, 2018) para Matemática, que aponta as editoras que mais comercializaram livros didáticos no Brasil, e a partir delas, escolheram-se os seguintes livros didáticos recomendados para o ensino médio:

L1 - Matemática para compreender o mundo, Volume 1, da Editora Saraiva, cujos autores são Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz (2016);

L2 - Conexões com a Matemática, Volume único, da Editora Moderna, de autoria de Fabio Martins de Leonardo (2016);

L3 - Matemática: contexto e aplicações – Volume único, da Editora Ática, de autoria de Luiz Roberto Dante (2016);

L4 - Matemática: Ciências e Aplicações, da Editora Saraiva Educação, de autoria de Diegenszajn *et al* (2016);

L5 - Matemática 1, da Editora Moderna, de autoria de Manoel Paiva (2016); e

L6 - Quadrante. Matemática 1, 1º Ano, da Editora SM, de autoria de Eduardo Chavante e Diego Prestes (2016).

²³ “O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público”. (FNDE, 2020).

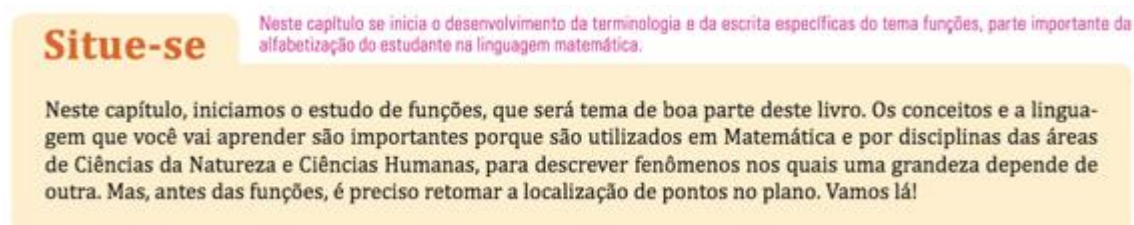
Cabe esclarecer que, em razão da publicação recente da BNCC, os livros selecionados estiveram atrelados às sugestões existentes nos PCN+. Decidiu-se analisar as obras selecionadas à luz dos estudos já realizados e, para isso, determinaram-se os seguintes critérios:

- como o conteúdo função foi organizado didaticamente;
- de que maneira foi abordada sua definição formal;
- como foi estudada a FVSM e
- quais recursos foram propostos para seu ensino.

Ao contrário dos demais livros didáticos propostos no *site* do FNDE, a obra *Matemática para compreender o mundo, volume 1*, da Editora Saraiva, cujos autores são Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz (2016), direcionada aos estudantes do 1º ano do EM, disponibilizou eletronicamente e de maneira integral seu conteúdo, sem que fosse necessário qualquer tipo de código ou senha. Nela, quatro capítulos foram dedicados ao estudo de função: estudo de funções; relações entre grandezas: Funções; Funções Afins e Funções Quadráticas.

Como o exemplar analisado foi destinado ao professor, há uma série de comentários no transcorrer dos capítulos que procuraram orientá-lo didaticamente, como o que se apresenta Figura 10, em que as autoras enfatizam, inicialmente, a importância de se explorar função como um tipo de relação entre grandezas, usar linguagem matemática específica e utilizar representações gráficas no plano cartesiano, além de recomendar a revisão de sistema cartesiano ortogonal por meio uma lista de exercícios.

Figura 10 - Introdução de função – L1



Fonte: Smoole e Diniz (2016, p. 70).

Em seguida, as autoras sugerem ao professor o trabalho com uma ideia de função de maneira informal, conforme exibido na Figura 11, utilizando exemplos que tratam de sua representação gráfica.

Figura 11 - ideia de função - L1

O objetivo maior dos itens que seguem é o conceito de função apresentado inicialmente de modo informal, antes da terminologia relacionada a esse conteúdo.

Nos exemplos, pela leitura e interpretação dos gráficos, o estudante se familiariza com os conceitos de crescimento ou decrescimento de uma função, valor de uma função em um ponto, sinal de uma função e raízes, antes do estudo específico das funções afim, quadrática e todas as outras.

Fonte: Smoole e Diniz (2016, p. 72).

Para prosseguir o desenvolvimento da proposta de apresentar função intuitivamente, as autoras se valem de uma primeira definição formal de função, como um

modo especial de relacionar grandezas. Nesse tipo de relação, duas grandezas, x e y , se relacionam de tal forma que: x pode assumir qualquer valor em um conjunto A dado e os valores que y assume dependem dos valores assumidos por x . (SMOOLE; DINIZ, 2016, p. 76)

Em seguida resolvem uma série de exercícios com ênfase na representação gráfica, em que é possível observar o predomínio de funções afim com comportamento contínuo e uma única sentença para representá-las. Sugerem que o professor explore as definições de domínio, contradomínio e conjunto imagem, enfatizando a notação de função - como pode ser observado na Figura 12 -, além de sua representação gráfica no plano cartesiano.

Figura 12 - Notação de Função – L1

A seguir, vamos analisar com mais detalhes alguns elementos de uma função, estabelecer a forma usual de representá-la e entender melhor o significado do seu gráfico.

Podemos indicar uma função f de A em B por:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

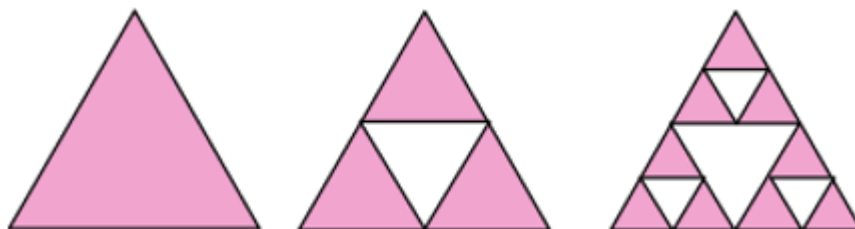
Fonte: Smoole e Diniz (2016, p.77).

Propõem ainda, que após a ênfase na notação, o docente explore vários tipos de funções, tais como afim e quadrática, além do estudo de inequações, mas não se encontrou um capítulo específico a respeito da FVSM.

É o caso do exercício apresentado na Figura 13, em que as autoras solicitam a elaboração da lei de formação da função a partir do segundo triângulo, seguida do esboço de seu gráfico, e orientam, em seu enunciado, que se observe o número de triângulos que compõe cada etapa de construção a fim de refletir sobre as seguintes questões: “você conseguiu observar alguma regularidade? Quantos

triângulos haverá na décima etapa de construção? É possível desenhar tantos triângulos?" (SMOOLE; DINIZ, p.70, 2016).

Figura 13 - Exercício do Triângulo de Sierpinski – L1

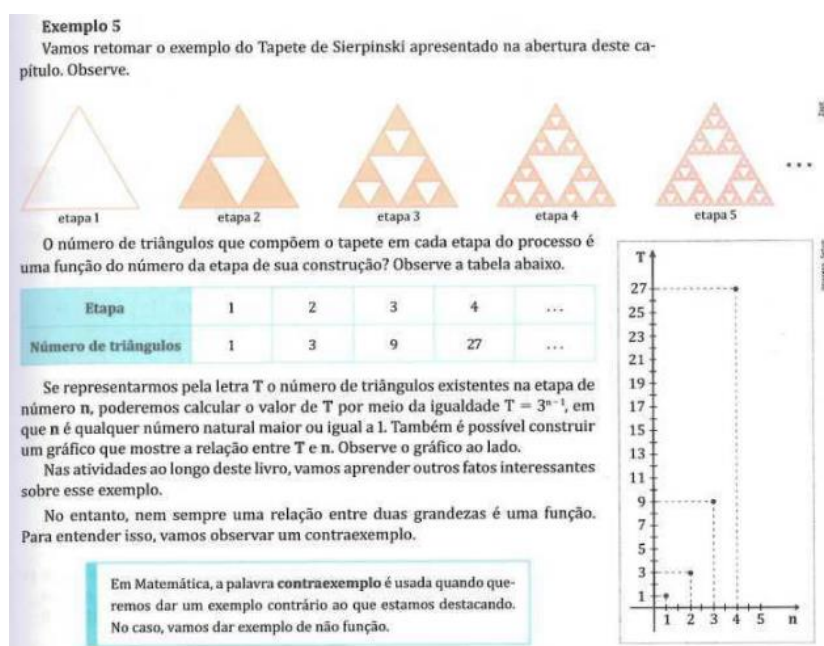


Fonte: Smoole e Diniz (2016, p.70).

Na unidade 2, o capítulo 3 apresenta um texto introdutório a respeito do matemático Walter Sierpinski, destacando os padrões utilizados para desenvolver o tapete que leva seu nome. No mesmo capítulo, as autoras retomam o exercício apresentando sua solução por diferentes registros de representação (Figura 14).

Já a utilização de recursos tecnológicos para o estudo de função aparece em uma seção específica denominada ‘Foco na Tecnologia: construindo gráficos de funções no computador’, e, para isso, sugerem o programa Excel, que dispõe de ferramentas para a construção de gráficos. Entretanto, observou-se que os gráficos explorados com esse recurso são monopolizados por funções afim a partir de tabelas normalmente oriundas de situações cotidianas.

Figura 14 - Exercício do Triângulo de Sierpinski (2) – L1



Fonte: Smoole e Diniz (2016, p. 77).

Cabe salientar ainda que não se observou qualquer abordagem para a elaboração da definição de função e que o excesso de formalismo apresentado na obra pode caracterizar um afastamento do que foi proposto pelos PCN+.

No segundo livro didático, *Conexões com a Matemática: volume único*, da Editora Moderna, cuja autoria é de Fabio Martins de Leonardo (2016), a elaboração da noção de função foi proposta por relações entre grandezas. Uma ideia inicial de função é explorada partindo de um exemplo (Figura 15); em um contexto do cotidiano, relaciona quantidade de pães e preço, por meio de uma tabela que procura explorar uma mudança de representação do registro numérico para o algébrico.

O autor sugere que uma regra de associação poderia ser estabelecida entre as variáveis quantidade de pães e preço pela construção de uma sentença que associe a ideia da existência de uma relação em que, a cada x corresponde um único y .

Figura 15 - Exemplo sobre a ideia de função – L2

1.1 A ideia de função no cotidiano

São muitas as situações cotidianas em que precisamos relacionar grandezas. Vejamos algumas.

Consumo. Sabendo que, em certa padaria, o preço do pão integral é R\$ 1,81 por unidade, podemos calcular o valor a ser pago em uma compra relacionando duas grandezas: a quantidade de pães comprados e o preço correspondente a essa quantidade. Assim:

Quantidade de pães	1	2	3	4	5	x
Preço (R\$)	1,81	3,62	5,43	7,24	9,05	$1,81x$

Fonte: Leonardo (2016, p.22).

Nos exemplos seguintes foi possível observar que o autor continuou a explorar a ideia de função com base em situações cotidianas, recorrendo, principalmente, a funções afim com uma única sentença, além de suas representações gráficas. Posteriormente, constatou-se que a definição formal de função foi apresentada como mostra a Figura 16.

Figura 16 - A definição formal de Função – L2

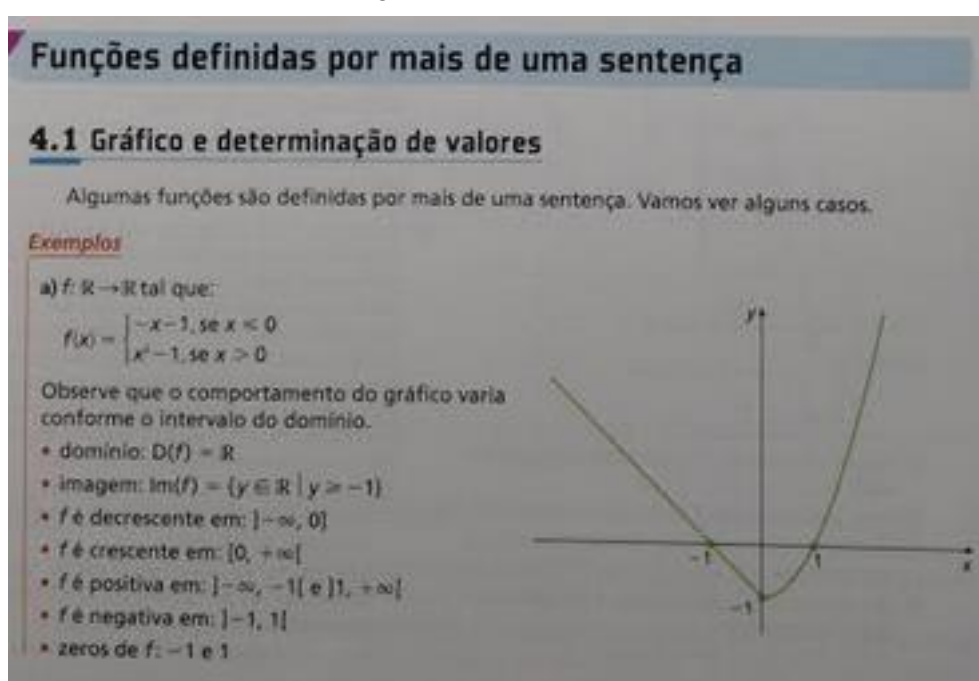
- Considerando dois conjuntos, A e B , não vazios, dizemos que f é uma função de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x de A , existe em correspondência um único elemento y de B . Representamos assim: $f: A \rightarrow B$

Fonte: Leonardo (2016, p. 26).

Para garantir a fixação da definição formal de função, o autor priorizou uma série de exercícios resolvidos e/ou propostos e, posteriormente, apresentou as noções de domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função. Não foi observado qualquer tipo de exploração histórica da elaboração da definição de função, mas observou-se um capítulo exclusivo para o estudo de FVSM, ainda que com foco exclusivamente em sua representação gráfica, como pode ser observado na Figura 17.

Cabe salientar, por fim, que identificaram-se exercícios propostos e/ou resolvidos, que envolviam descontinuidade, mas com o predomínio de cenários envolvendo funções afim.

Figura 17 - A FVSM – L2



Fonte: Leonardo (2016, p.41).

O livro é acompanhado de um recurso na forma de DVD que possibilita o acesso a uma biblioteca digital com textos que complementam o conteúdo apresentado no livro na forma de slides.

A terceira obra investigada, *Matemática: contexto e aplicações – Volume único*, da editora Ática e autoria de Luiz Roberto Dante (2016), começa por explorar a noção de função a partir de um problema cotidiano relacionado a um posto de combustível, como é possível observar na Figura 18.

Notou-se que o autor procurou enfatizar a construção de uma lei para relacionar a quantidade de litros com o preço e, em sua resolução, promoveu o uso de expressões como fórmula matemática ou regra da função para a lei da função.

Figura 18 - Exemplo da noção intuitiva de função (1) – L3

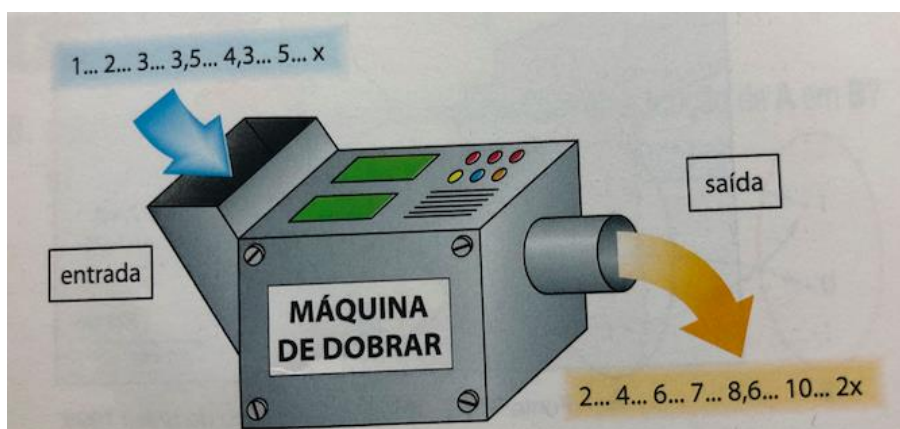


Fonte: Dante (2016, p.25).

O autor apresenta ainda outros dois exemplos que foram resolvidos à luz da noção intuitiva: um no contexto da geometria plana para relacionar a medida do lado de um quadrado com seu perímetro, e outro, que explorou a ideia de função como máquina de entrada e saída, como pode ser observado na Figura 19, em que podemos notar que o autor não utiliza apenas números inteiros, mas também racionais em sua escrita decimal. Essa maneira de abordar função, de acordo com Rossini (2002, p. 63), “remete a uma ideia de sua definição, dentro de uma

perspectiva dinâmica”, ainda que tal concepção não tenha sido aprofundada na obra.

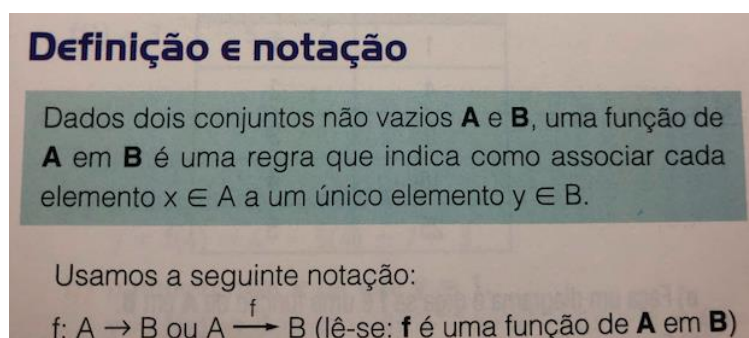
Figura 19 - Exemplo da noção intuitiva de função (2) – L3



Fonte: Dante (2016, p.26).

Em seguida, explorou a noção de função com ferramentas da Teoria dos Conjuntos e sua definição formal, como mostra a Figura 20.

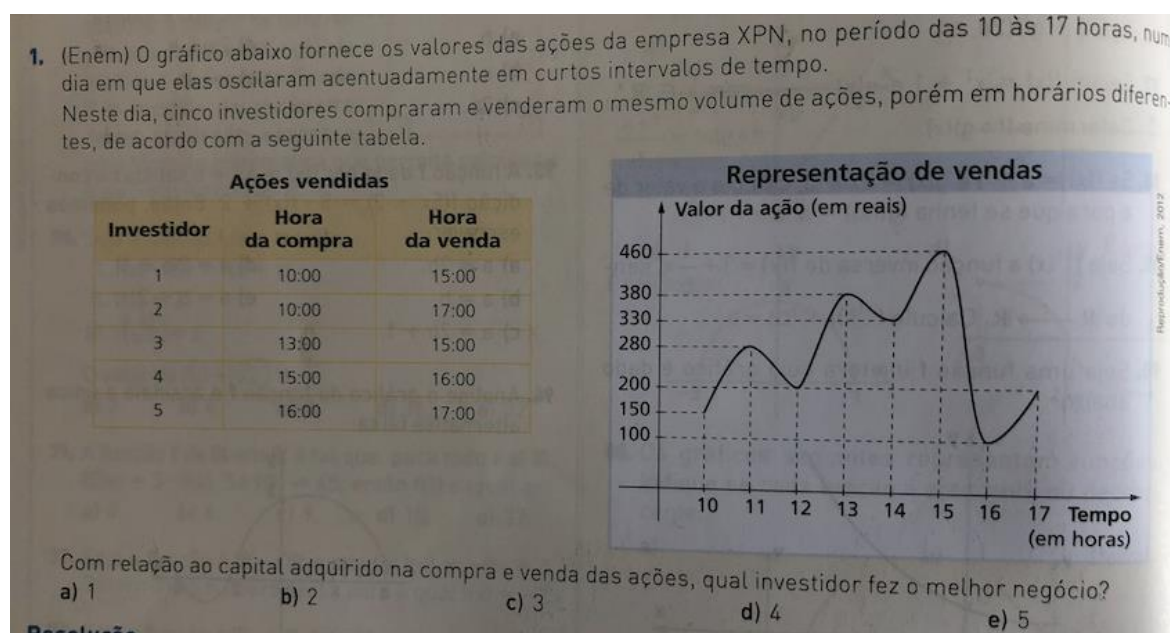
Figura 20 - Definição formal de função – L3



Fonte: Dante (2016, p.28).

As noções de domínio, contradomínio e conjunto imagem foram trabalhadas, posteriormente seguidas por uma grande quantidade de exemplos e exercícios similares, resolvidos e/ou propostos, tendendo para o trabalho com a definição de função por meio de funções representadas por uma única sentença, que evidenciam comportamentos funcionais marcados pela linearidade. A obra disponibilizou uma seção intitulada ‘Outros Contextos’ em que foi possível observar abordagens a diferentes formas de representação de função (Figura 21).

Figura 21 - Representações de funções – L3

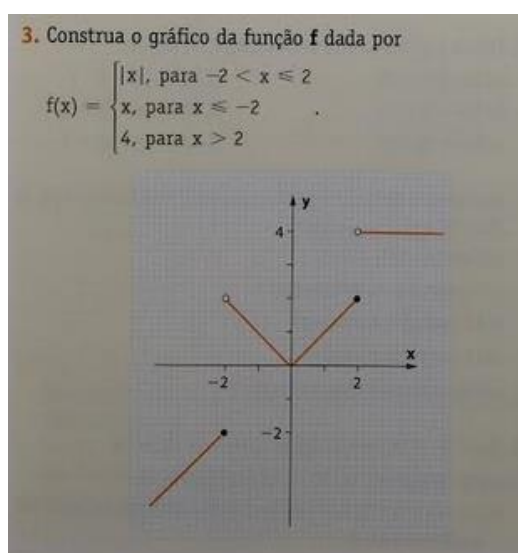


Fonte: Dante (2016, p.80).

O exercício anterior (Figura 21) foi retirado do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e sua resolução comentada utilizou tanto a tabela como o gráfico.

A FVSM é mencionada como um tipo específico de função inserida no estudo da função modular, mas em um dos exercícios (Figura 22) identificou-se o trabalho com a noção de descontinuidade.

Figura 22 - Exercício proposto a respeito de FVSM – L3

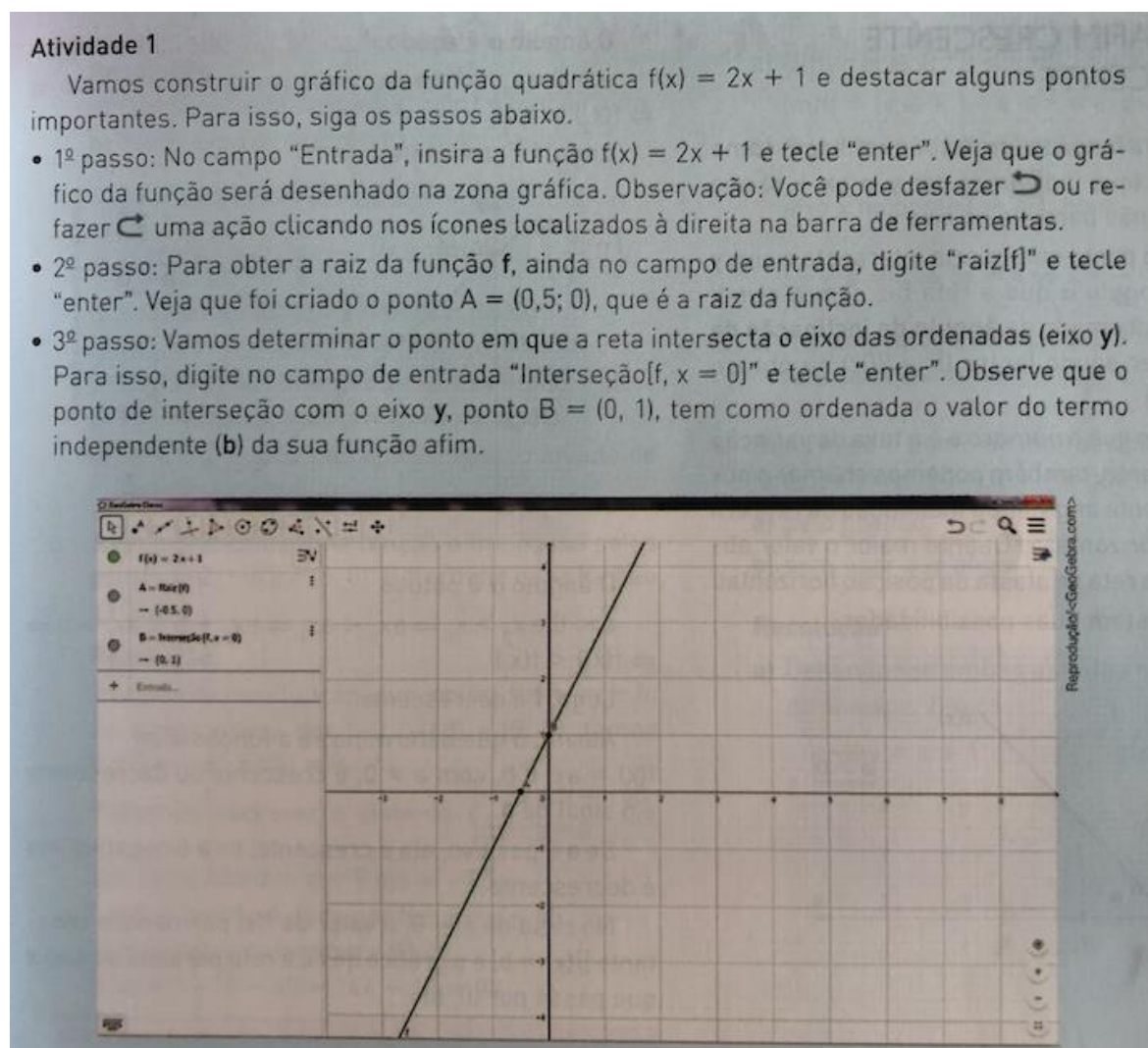


Fonte: Dante (2016, p.52).

A obra dispõe de uma seção específica intitulada 'Matemática e Tecnologia', em que o autor propõe a utilização de recursos tecnológicos para o

ensino de função, sobretudo para a elaboração de gráficos. Nessa seção, orienta a instalação e o uso do programa livre *GeoGebra* e apresenta duas atividades que envolvem a construção de gráficos. Na Atividade 1, Figura 23, o intuito é construir o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$ e usar o dinamismo do *GeoGebra* para manipular sua representação gráfica.

Figura 23 - Uso do recurso GeoGebra (1) – L3

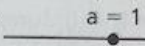
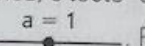
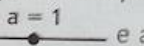


Fonte: Dante (2016, p.99).

Na segunda atividade, Figura 24, a ênfase da representação gráfica se dá por meio da utilização da ferramenta controle deslizante.

Figura 24 - Uso do recurso GeoGebra (2) – L3

Atividade 2

- 1º passo: Na barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do *mouse* inicialmente na opção "controle deslizante"  e, em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização (zona gráfica) e tecle "enter". Nesse instante, aparecerá o parâmetro **a** (com valor inicial igual a 1): . Repita a operação e insira também o parâmetro **b**.
- 2º passo: No campo "Entrada", insira a função $f(x) = ax + b$ e tecle "enter". Dessa forma, você terá o gráfico da função $f(x) = 1x + 1$.
- 3º passo: Agora você poderá observar significados importantes para os coeficientes **a** e **b**. Clique na bolinha do controle deslizante de **a**:  e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados). Observe o que acontece com o gráfico da parábola. Repita a operação para o controle deslizante de **b** (utilize um controle deslizante por vez).

Agora, responda às perguntas abaixo, tendo como base a função $f(x) = ax + b$.

- Qual é o efeito do parâmetro **a** no gráfico da função? *Ele é responsável pela taxa de crescimento (ou decrescimento) da função.*
- Qual é o efeito do parâmetro **b** no gráfico da função? *Ele indica em qual valor a função cortará o eixo **y**.*

Fonte: Dante (2016, p.99).

Entretanto, como se pode observar em ambas as atividades, o foco da utilização do recurso voltou-se a funções afim, com uma única sentença, sem que houvesse contextos envolvendo descontinuidade.

No capítulo 3 do livro didático estudado a seguir, *Matemática, Ciência e Aplicações, volume 1*, da coleção Conecte, da Editora Saraiva cuja autoria é de David Degenszajn *et al* (2016), o estudo de função é introduzido recorrendo à noção intuitiva por um conjunto de quatro exemplos comentados, sendo que no primeiro (Figura 25) apresenta uma tabela evidenciando o deslocamento de um ciclista, em metros - em um determinado intervalo de tempo - e em minutos, representado apenas por números inteiros.

Durante a resolução, eles utilizaram essa tabela para relacionar cada instante (x) a uma única distância (y), afirmando que a fórmula (ou lei) que relaciona y com x é representada pela expressão: $y = 600 \cdot x$ com y medido em metros e x em minutos. Nos quatro exemplos resolvidos posteriormente, os autores tratam de funções afim contendo uma única sentença, mantendo a noção intuitiva de função.

Figura 25 - Exemplo de noção intuitiva de função – L4

Tempo e espaço
 Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 600 m. Um ciclista treina para uma prova de resistência, desenvolvendo uma velocidade constante. Enquanto isso, seu técnico anota, de minuto em minuto, a distância já percorrida pelo ciclista.
 O resultado pode ser observado na tabela abaixo:

Instante (min)	Distância (m)
0	0
1	600
2	1200
3	1800
4	2400
5	3000
...	...

Fonte: Degenszajn (2016, p. 48).

Os outros três exercícios referem-se a questões do dia a dia - um problema sobre uma corrida de táxi, um sobre um corretor de imóveis e outro sobre um restaurante self-service -, todos abordando funções afim como uma única sentença.

Em um segundo momento dessa elaboração de uma noção intuitiva, os autores exploraram a ideia de função como uma relação entre conjuntos, sem qualquer abordagem à sua formação histórica, com o seguinte enunciado: “dados dois conjuntos não vazios A e B , uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de função de A em B ” (DEGENSZAJN *et al* 2016, p. 50). Na sequência, exploraram as noções de domínio, conjunto imagem e contradomínio vinculadas a essa definição.

A representação gráfica de função é discutida separadamente, por exemplos que exploraram as noções básicas de plano cartesiano e a construção de gráficos, porém enfatizam exemplos de comportamento regular e contínuo, como pode ser observado na Figura 26, em que o gráfico ilustra a relação entre taxa de desemprego mensal (nas seis principais regiões metropolitanas do Brasil) e tempo (entre outubro de 2011 a novembro de 2011) que determina uma função

associando o mês com a taxa de desemprego, apresentando em seguida sua lei de formação.

Figura 26 - Exemplo de uma representação gráfica da função – L4



Fonte: Degenszajn (2016, p. 52).

A FVSM foi tratada em um capítulo específico e estudada por representações gráficas que se relacionam com módulo de um número real, equações e inequações modulares.

A obra conta com recurso multimídia, por meio do acesso ao *site* da editora, onde é possível encontrar boa parte da obra na forma digital com possibilidade de interação, ainda que limitada à resolução de exercícios, sobretudo aqueles voltados ao ENEM e vestibulares nacionais.

O livro didático intitulado *Matemática 1*, da Editora Moderna, de autoria de Manoel Paiva (2016), começou sua abordagem ao estudo de função recorrendo a um exemplo comentado, como mostra a Figura 27.

Figura 27 - Noção de função – L5

Para exemplificar, vamos supor que uma torneira permaneceu aberta durante 6 minutos com a vazão constante de 25 litros de água por minuto.

Que volume de água terá despejado essa torneira 2 minutos depois de aberta?

Como a vazão é constante, 25 L/min, concluímos que o volume v , em litro, de água despejada 2 minutos depois da abertura da torneira é dado por:

$$v = 25 \cdot 2 \Rightarrow v = 50$$

Raciocinando de maneira análoga, podemos construir a tabela abaixo, que expressa o volume v , em litro, de água despejada, t minutos após a abertura da torneira.

t (minuto)	v (litro)
1	25
2	50
3	75
4	100
5	125
6	150

Fonte: Paiva (2016, p. 73).

O objetivo consistiu em explorar a ideia de correspondência para construir uma primeira formalização da noção de função, apresentada na Figura 28.

Figura 28 - Noção de função – L5

Dizemos que uma variável y é dada em **função** de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y .
A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de **lei de associação**, ou simplesmente lei entre x e y . Quando possível, essa lei é expressa por uma equação.

Fonte: Paiva (2016, p. 73).

Em seguida, um conjunto de exercícios foi proposto e/ou resolvido com predomínio de cenários que exploraram função afim com uma única sentença. No final dessa etapa, o autor apresentou uma definição formal de função (Figura 29) apoiada na noção de conjuntos numéricos sem apreciar qualquer aspecto histórico de sua construção.

Figura 29 - Definição formal de Função – L5

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação f de A em B é **função** se, e somente se, qualquer elemento de A está associado, através de f , a um único elemento de B . Adotaremos a notação $f: A \rightarrow B$ para indicar que f é uma função de A em B .

Fonte: Paiva (2016, p. 79).

Observou-se que o percurso proposto entre as duas definições envolveu a exploração da relação entre conjuntos com ênfase na notação em que a condição de correspondência entre os valores de x e y , existentes na primeira definição, foi chamada de lei de associação, ou simplesmente lei entre x e y , destacando que essa lei pode ser expressa na forma de equação.

Um capítulo específico, denominado ‘Ampliação de uma Notação e Estudo da Paridade de Funções’ foi destinado ao estudo da FVSM, a partir da exploração da função que representa o imposto de renda de um cidadão (Figura 30), sem recorrer a qualquer representação gráfica.

Figura 30 – FVSM – L5

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 21.453,24 \\ 0,075x - 1.608,99, & \text{se } 21.453,25 \leq x \leq 32.151,48 \\ 0,15x - 4.020,35, & \text{se } 32.151,49 \leq x \leq 42.869,16 \\ 0,225x - 7.235,54, & \text{se } 42.869,17 \leq x \leq 53.565,72 \\ 0,275x - 9.913,83, & \text{se } x > 53.565,72 \end{cases}$$

Fonte: Paiva (2016, p. 119).

A obra propõe um conjunto de recursos de ordem tecnológica para o estudo de função envolvendo o uso da internet e material complementar na forma digital que pode ser acessado no *site* da editora. Em geral, os recursos propostos para o ensino de função são para a construção de gráficos com limitada possibilidade de interação (a maior parte das abordagens se deram na forma de *applets*) ou vídeos contendo comentários a respeito de exercícios propostos em vestibulares e no ENEM.

O livro didático *Quadrante – Matemática 1*, da editora SM, cujos autores são Eduardo Chavante e Diego Prestes, apresenta a introdução da noção de função (Figura 31) por meio da publicidade de camisetas.

Figura 31 - Noção de Função – L6



Com essa informação, podemos construir um quadro relacionando a quantidade de camisetas e o valor a ser pago na compra delas.

O preço a ser pago depende da quantidade de camisetas compradas. Nesse caso, dizemos que a grandeza "valor a ser pago" é a **variável dependente**, geralmente indicada por y , e a grandeza "quantidade de camisetas" é a **variável independente**, comumente indicada por x . Essa relação de dependência caracteriza-se como uma função, pois para cada valor atribuído à variável independente (x) existe um único valor correspondente para a variável dependente (y). Isto é, para cada quantidade de camisetas existe um único preço.

Quantidade de camisetas	Valor a ser pago (R\$)
1	22
2	44
3	66
4	88
...	...
x	$22 \cdot x$

Fonte: Chavante e Prstes (2016, p. 38).

Esse problema foi resolvido com comentários, a partir de uma tabela fornecida no enunciado, que mostra a quantidade de camisetas e o valor a ser pago, todas com números inteiros, como suporte para relacionar variável dependente e independente. Após a elaboração da lei de formação da função que

representa esse problema, os autores apresentam noções de conjuntos numéricos como introdução à seguinte definição formal: “dados os conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B ($f: A \rightarrow B$) é uma regra (ou lei) que determina como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$ ”. (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 41).

Após essa apresentação, as noções de domínio, contradomínio, imagem e sistema cartesiano ortogonal de coordenadas são estudadas em exemplos que tratam de funções afim com uma única sentença. Vários tipos de funções foram estudados, tais como afim, quadrática etc., sem nenhuma alusão específica à FVSM.

A respeito dos recursos propostos para o ensino de função, observou-se que uma versão digital foi disponibilizada no *site* da editora, oferecendo acesso a algumas ferramentas, entre elas uma planilha eletrônica intitulada *BrOffice Calc* para auxiliar no processo construção e visualização de gráficos limitado a funções contínuas.

Consideraram-se também neste estudo os materiais curriculares eletrônicos disponibilizados pelo portal do professor *site* do Ministério da Educação e Cultura, que reúne cursos e materiais para apoiar professores do ensino básico do país. Diferentes estratégias e recursos para a organização de aulas são sugeridos ao professor, tais como o uso de computador, datashow (ou TV) e um link que possibilita baixar um arquivo do programa *PowerPoint* com sugestões adicionais ao docente.

Nesse portal localizou-se uma sequência de aulas que sugerem a introdução ao ensino de função por uma situação cotidiana relacionada à Copa do Mundo de Futebol, com o objetivo de explorar a relação entre duas grandezas, “de acordo com a habilidade H15 da matriz do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM de matemática” (BRASIL, 2020a). Para esse estudo, são identificados como conhecimentos mobilizáveis noções de conjunto, construção de uma sequência numérica e proporcionalidade, que deveriam ser tratadas previamente.

Para complementar o trabalho com função foi sugerido que o professor explorasse, com auxílio de um dicionário, o significado da palavra função, e alguns

exemplos foram sugeridos, como ‘a função de um goleiro é não permitir que a bola entre no gol’, ou ‘o jogo foi adiado em função do mau tempo’, que evidenciam uma relação de correspondência entre fatos (ou coisas) para, finalmente, explorar a ideia de que função é uma correspondência entre dois ou mais conjuntos. Outros exemplos também foram sugeridos pelo portal como o apresentado na Figura 32, em que se nota a exploração da ideia de associação por meio da noção de conjuntos, utilizada para construir a definição formal de função.

Figura 32 – Outros exemplos sugeridos pelo Portal do Professor - MEC



Fonte: BRASIL, 2020b.

Na seção intitulada ‘Materiais de Cursos’, é possível encontrar um conjunto de atividades denominado ‘Atividades de Apoio à Aprendizagem’, cuja unidade 24, intitulada ‘Estudos de Fenômenos Sociais’, explora a noção de função por relação entre grandezas, como pode ser observado na Figura 33.

Foi sugerido ainda que o docente desenvolva elaboração da lei de função por meio da observação de regularidades e dependência entre variáveis, como aludido nos PCN+, mas os exemplos propostos mobilizaram apenas funções afim com uma única sentença, e a FVSM não foi encontrada. Observou-se, nesse conjunto de materiais, uma preocupação em orientar os professores para o trabalho específico com a representação gráfica de função, e que os exemplos sugeridos, em grande parte, privilegiaram aquelas cujo comportamento era contínuo.

Figura 33 - Explorando a noção de função (Unidade 24)

Relação entre grandezas

Em diferentes profissões, a linguagem matemática é usada para expressar as relações entre grandezas, como na Engenharia, Física, Química, Biologia, Medicina, entre outras. Nessas situações, as grandezas são variáveis e podem estar ou não em uma relação de dependência. E se está, é diretamente ou inversamente proporcional.

Em cada situação descrita nas Atividades desta Aula, identifique as grandezas e observe a relação existente entre elas.

**Atividade 1** _____

Uma pessoa para exercitar-se costuma fazer caminhadas diariamente, mantendo um ritmo de 6km por hora, o que equivale a caminhar 100m a cada minuto.

- Identifique as grandezas envolvidas.
- Observe a relação entre elas.
- Complete a tabela.

Tempo (min)	15	20					
Distância percorrida	1500	2000					

**Atividade 2** _____

Nas corridas realizadas no Autódromo de Interlagos, uma preocupação está sempre presente: a relação entre distância percorrida e tempo.

O Autódromo de Interlagos

O circuito abriu suas portas no dia 12 de maio de 1940. Seu idealizador foi Louis Romero Sanson. O nome Interlagos foi dado por causa da sua localização, que abrigava muitos lagos, na Zona Sul de São Paulo. A primeira corrida realizada foi o Grande Prêmio São Paulo, vencida por Arthur Nascimento Júnior, que percorreu as 25 voltas da prova em 1 hora, 46 minutos e 44 segundos. Ele pilotava uma Alfa Romeo 3.500 cc. Depois da sua inauguração, somente em 1950 foram feitas grandes mudanças no circuito, visando à grande festa que aconteceria em 1954. Neste autódromo são realizadas as principais competições de Automobilismo do Brasil. É conhecido internacionalmen-

Fonte: BRASIL, 2020b.

Foi possível observar uma inclinação para propor o ensino de função começando por abordar a noção intuitiva de função apoiada na noção de conjuntos, seguida de exemplos oriundos do cotidiano, alguns extremamente incompatíveis com o nível de ensino, em que a lei que expressa a relação de funcionalidade geralmente representa funções afim com uma única sentença. Na sequência, a definição formal é apresentada, seguida do estudo das noções de domínio, contradomínio e imagem.

Constatou-se, da mesma forma, que nenhuma obra abordou a elaboração histórica da definição formal de função e que poucas proporcionaram cenários envolvendo outras áreas do conhecimento, como as ciências naturais, por exemplo. A noção de descontinuidade raramente foi mencionada, e a FVSM foi estudada

como um tipo especial de função, ocasionalmente vinculada ao estudo da função modular.

Em geral, com exceção da obra de Dante (2016), que propôs a utilização de um software livre (*GeoGebra*) para o trabalho com a representação gráfica de diferentes tipos de funções, a maioria dos livros didáticos pesquisados limitou-se a oferecer uma versão digital da obra, contendo poucas ferramentas e com ênfase na construção da representação gráfica de função em situações de continuidade. Por sua vez, o material didático proposto pelo MEC sugeriu a utilização de vários recursos, incluindo os digitais, além de sequências didáticas.

As diversas observações relacionadas à maneira com que função e seu imbricamento com FVSM foram tratadas ao longo dos estudos preliminares permitiram elaborar um conjunto de desfechos para algumas questões de ordem histórica, epistemológica e didática discutidas ao longo do presente capítulo.

Em relação ao estudo histórico e epistemológico, foi possível depreender que a razão de ser da elaboração da definição de função ao longo do tempo esteve relacionada à FVSM. Isso pôde ser constatado por meio da identificação de problemas relacionados ao campo da física que vieram impulsionar seu desenvolvimento, permitindo conjecturar que o ensino da noção de função pudesse ser introduzido por meio de problemas envolvendo FVSM.

Os estudos realizados nos documentos curriculares nacionais não indicaram que o ensino de função devesse priorizar uma determinada estratégia didática. Tais documentos expuseram, na verdade, a maneira como os temas matemáticos podem ser organizados nos currículos escolares.

Por outro lado, o ensino de função introduzido em livros didáticos e materiais produzidos pelo MEC revelou uma tendência em fazê-lo por meio de funções afim e a exploração de sua representação gráfica prioriza comportamentos contínuo e linear. Da mesma forma, não foram identificados quaisquer indícios de articulação da definição formal de função com sua história e/ou de seu imbricamento com FVSM. Especificamente, em relação à FVSM, foi possível constatar que ela foi apresentada como um tipo de função independente ou vinculada ao estudo de função modular.

Verificou-se ainda, no conjunto de obras didáticas investigadas, a existência de uma estratégia didática praticamente comum, que consiste em propor o ensino de função recorrendo a uma sequência de eventos comuns. Tal estratégia começa por introduzir o tema por meio de sua noção intuitiva, apoiando-se na Teoria dos Conjuntos e em exemplos oriundos de cenários cotidianos, tais como uma corrida de táxi ou o consumo de combustível de um automóvel, cuja relação de funcionalidade normalmente é expressa por funções afim com uma única sentença. Por fim, a definição formal é apresentada, seguida do estudo das noções de domínio, contradomínio e imagem. Com algumas exceções, as obras didáticas limitaram-se a propor o uso de recursos tecnológicos para o ensino de função balizados por versões digitais.

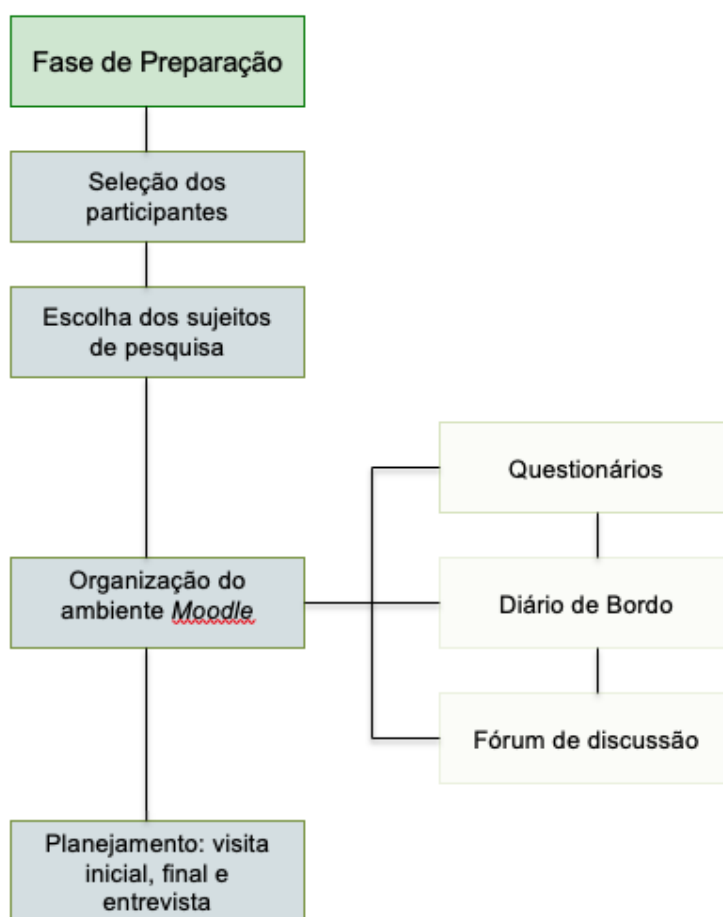
Esse quadro permite supor a importância desempenhada pelo professor em suas escolhas para ensinar função, que podem ser impactadas pelos recursos que seleciona, adapta ou mesmo produz para levar a cabo esse ensino.

Com o intuito de aprofundar e considerar as premissas colhidas neste estudo preliminar, conjugadas ainda aos princípios da metodologia de investigação reflexiva, foi elaborado um modelo de formação continuada para introduzir o ensino de função no 1º ano no EM apoiada em FVSM, cujos detalhes serão apresentados no item 4.

4 A FASE DE PREPARAÇÃO

Para dar início ao planejamento da formação pretendida nesta fase, ocorrido durante o período de junho até meados de agosto de 2019, estruturou-se o esquema exibido na Figura 34. Os objetivos foram: selecionar os participantes, dentre eles, escolher os sujeitos de pesquisa; organizar um ambiente virtual no *Moodle*; preparar e implementar um conjunto de questionários; determinar o funcionamento do diário de bordo e dos fóruns de discussão e planejar as visitas inicial e final, seguidas de entrevista aos sujeitos de pesquisa, de forma a obter os dados iniciais que permitiram organizar a fase de execução.

Figura 34 - Estrutura da Etapa de Preparação



Fonte: Produzido pelo autor.

4.1 SELEÇÃO DOS PARTICIPANTES E DOS SUJEITOS DE PESQUISA

Para selecionar os participantes,²⁴ utilizou-se como critério o pressuposto de que os professores ministrassem aulas de matemática para o 1º ano do EM, tendo em vista que é nesse ano letivo que se desenvolve o conteúdo de função, como sugerem os documentos curriculares nacionais.

Para tanto, durante o mês de junho 2019, a coordenação de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP divulgou, por meio de seu *site* na internet, um convite para que qualquer professor de matemática integrante da rede pública ou privada do estado de São Paulo que desejasse fazer parte de uma formação continuada, cujo propósito era ser parte de uma pesquisa sobre o ensino de função tendo como base a ADD. No convite foi informado que os encontros aconteceriam no campus da PUC-SP, aos sábados pela manhã, com duração de três horas, tendo início em agosto de 2019 e término em dezembro do mesmo ano.

Os sujeitos de pesquisa foram escolhidos no grupo de professores participantes, desde que o ensino de função a seus alunos do 1º ano do EM estivesse planejado para ocorrer durante o mês de novembro de 2019, pois nesse momento já estariam em formação por três meses.

O passo seguinte foi organizar o ambiente virtual *Moodle* que se apresenta na sequência.

4.2 ORGANIZAÇÃO DO AMBIENTE MOODLE

O segundo momento da fase de preparação consistiu em estruturar um ambiente virtual do tipo *Moodle* ²⁵ para ser utilizado em três modalidades: questionários, diário de bordo e fóruns de discussão.

²⁴ Os professores foram informados de que se tratava de uma pesquisa de doutorado e assinaram o termo de consentimento que se encontra no Anexo D, bem como a carta para entrar na escola, que se encontra no Anexo C.

²⁵ Segundo Assis (2010, p. 29), *Moodle* é um *software* livre destinado a auxiliar educadores a criarem cursos via Internet ou apoiar cursos presenciais. Este sistema de educação é também chamado de Sistema de Gerenciamento de Aprendizagem. Mais informações sobre o *Moodle* podem ser obtidas no Site <http://moodle.org> ”.

Os questionários tiveram por objetivo elaborar um perfil pessoal e profissional de cada participante e reunir informações que detalhassem seus conhecimentos e sua relação com recursos. A escolha dos temas apresentados e o conteúdo das perguntas foram adaptados de contribuições propostas por Gueudet e Trouche (s/d, p. 2) e versaram sobre ambiente de trabalho, trabalho coletivo, relação com as TIC e a ligação dos participantes com a matemática, tanto área do conhecimento como área de atuação profissional.

Entendeu-se também que o preenchimento de um diário de bordo no ambiente virtual seria capaz de oferecer detalhes das atividades dos participantes em um longo período e permitiria compreender, com mais precisão, os recursos utilizados, os conhecimentos e a natureza das atividades desenvolvidas pelos professores, tanto dentro como fora da sala de aula.

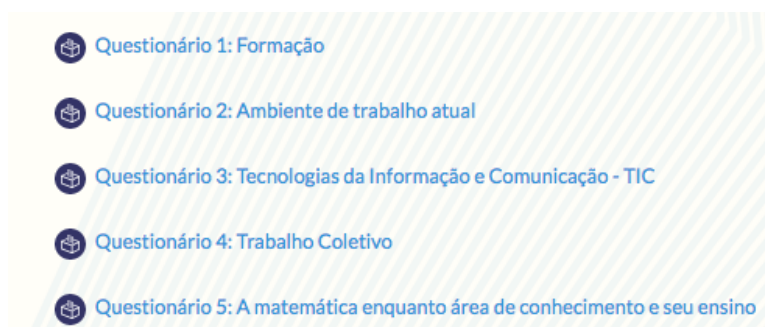
A utilização da ferramenta fórum de discussão *on-line* foi pensada para acompanhar discussões e troca de informações entre os participantes, o desenvolvimento da documentação, bem como para viabilizar a coleta de recursos utilizados e/ou produzidos, uma vez que é possível carregar ou descarregar arquivos durante as postagens.

No item 4.2.1 são apresentados os detalhes de como os questionários foram planejados ao longo da fase de preparação.

4.2.1 PLANEJAMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DOS QUESTIONÁRIOS

Cinco questionários foram planejados e elaborados, via formulários *online*, no ambiente *Moodle* e disponibilizados (Figura 35), para preenchimento por meio de links.

Figura 35 - Lista dos questionários propostos aos participantes no ambiente *Moodle*



Fonte: <https://moodle2019.pucsp.br/course/view.php?id=586>, 2019.

O primeiro questionário (Figura 36) teve por objetivo reunir informações a respeito da formação dos participantes.

Figura 36 - Questionário 1 - Formação

1. Qual sua formação no ensino fundamental?
☐ Não selecionado
☐ Regular
☐ Supletivo
2. Qual sua formação no Ensino Médio?
☐ Regular
☐ Supletivo
☐ Magistério
☐ Técnico
3. Qual sua formação Superior?

Fonte: Produzido pelo autor.

Pretendeu-se, com a proposição das três questões, conhecer a formação dos professores nos níveis da educação básica (fundamental e médio) e no ensino superior, para que se pudesse, posteriormente, compreender os impactos dessa formação em suas concepções para introduzir o ensino de função.

O segundo questionário (Figura 37) teve por objetivo reunir informações a respeito da experiência profissional e do ambiente de trabalho do participante, bem como, compreender a extensão de seus conhecimentos tecnológicos.

Figura 37 - Questionário 2 - Ambiente de Trabalho atual

1. Para quais as turmas leciona atualmente?
2. Qual sua carga horaria semanal?
3. Qual a experiência no nível de ensino em que leciona atualmente?
4. Qual o número de professores de Matemática existentes em sua escola?
5. Descreva as condições materiais existentes na sua escola: Você possui uma sala? Ela tem equipamentos informáticos? Quais? Você tem acesso a uma sala de informática? Com que equipamentos?

Fonte: Produzido pelo autor.

O conjunto das cinco questões foi proposto visando obter dados que permitissem compreender a realidade dos professores na educação pública e privada e, com isso, inferir questões acerca do que essas instituições disponibilizam para o professor que ensina função na educação básica.

O terceiro questionário, composto por 9 questões (Figura 38), pretendeu obter dados relacionados às TIC, a fim de conhecer o impacto que elas produzem na vida profissional e no conhecimento tecnológico geral dos participantes, além da gama de recursos relacionada às TIC que eles utilizam e como a integram ao ensino.

Figura 38 - Questionário 3 - Tecnologias da Informação e Comunicação

1. Você utiliza tecnologia em sua prática de ensino (calculadoras, softwares, sites, outros) ? Se sim, há quanto tempo?
2. Quais os motivos que o levaram a integrar a tecnologia em seu ensino? Atualizar-se na área da educação Matemática? Adaptar seu ensino à tecnologia já existente em seu local de trabalho? Para motivar os alunos? Para buscar recursos para seu ensino? Nenhuma das anteriores.
3. Em relação a pergunta anterior, especificaria algum outro motivo? Qual?
4. Há uma ferramenta tecnológica (TIC) que você utiliza mais frequentemente para o ensino? Se sim, qual e por quê?
5. Qual o principal papel que você atribui às TIC para o ensino? Contribui para a construção do conhecimento matemático dos alunos? Permite estabelecer uma conexão entre os conceitos matemáticas e seus significados? Para potencializar a atividade estudantil? Para possibilitar um ambiente colaborativo entre os alunos?
6. Em relação a pergunta anterior, especificaria algum outro motivo? Qual?
7. Na sua opinião, existe algum tema específico (na álgebra, aritmética, geometria, estatística) para o qual as TIC são relevantes na preparação de uma aula? Por quê?
8. Qual o papel desempenhado pelo computador em suas aulas? Principal? Secundário? Especifique.
9. O computador alterou sua atividade de preparação de suas aulas? Se sim, como? Você troca mais recursos (usando um *pendrive*, correio eletrônico, etc). Você modifica com mais frequência outros recursos preparados anteriormente. Você identifica os materiais que preparou em anos anteriores para suas aulas de maneira diferente.

Fonte: Produzido pelo autor.

Nesse sentido, esperou-se que as informações obtidas pelas nove questões trouxessem dados a respeito do impacto proporcionado pelo uso das TIC no trabalho documental dos professores e que revelassem como eles articulavam recursos curriculares de origem digital com outros de outra natureza para introduzir o ensino de função.

O quarto questionário, também composto por nove questões (Figura 39), foi dedicado a aspectos relacionados ao trabalho coletivo, com o objetivo de obter informações sobre o impacto causado por tal modalidade de trabalho na vida profissional dos participantes.

Figura 39 - Questionário 4 - Trabalho Coletivo

1. Você tem hábito de trabalhar com os colegas de sua escola? Se sim, qual é a natureza desse trabalho? Quando começou?
2. Em seu trabalho, você participa (ou participou) de outros grupos de professores de Matemática: associação, grupo de pesquisa, avaliação,?
3. Você participa de outros tipos de estruturas coletivas? Sindicato? Associação de pais? Associação de bairro?
4. Em relação a pergunta anterior, especificaria alguma outra estrutura coletiva? Qual? Quais as razões para sua participação?
5. Você já se envolveu em algum projeto coletivo profissional?
6. Qual era seu papel nesses projetos?
7. Quais seus motivos para se engajar em tais projetos?
8. Como você avalia o tempo que destinou a essas atividades coletivas?
 Alterou minha prática profissional?
 O trabalho coletivo leva muito tempo.
 Considero que o tempo gasto no trabalho coletivo é um componente de meu próprio tempo de ensino.
9. Em relação a pergunta anterior, especificaria algum outro motivo? Qual?

Fonte: Produzido pelo autor.

As questões propostas no quarto questionário também buscaram evidências sobre eventuais recursos utilizados pelos professores em um ambiente coletivo para ensinar função, posto que “a ADD leva em consideração o surgimento de várias formas de trabalho coletivo” (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018, p. 3, tradução nossa).

O quinto e último questionário, elaborado com quatro questões (Figura 40), foi idealizado para colher informações a respeito da relação entre o ensino dos participantes e a Matemática como área do conhecimento, com o objetivo de compreender eventuais dificuldades, convergências e estratégias didáticas do grupo.

Figura 40 - Questionário 5 - A matemática como área de conhecimento e seu ensino

1. Qual dos seguintes tópicos é mais difícil ensinar (nos níveis de ensino que você trabalhou)?
Álgebra
Aritmética
Estatística
Geometria
2. Explique as dificuldades encontradas para cada um dos tópicos que selecionou?
3. Quando você prepara uma aula, considera:
O nível médio dos alunos da classe?
O nível dos alunos menos bons da classe?
O nível dos melhores alunos da classe?
As necessidades particulares de alunos da classe?
4. Indicaria outros fatores que considera importantes? Quais?

Fonte: Produzido pelo autor.

A proposição das quatro questões buscou compreender como os professores avaliariam o protagonismo dos estudantes no ensino de matemática (e, conseqüentemente, de função), pois pretendeu-se abordar essa temática ao longo da fase de execução da formação continuada.

A seguir são apresentados detalhes do planejamento e da utilização do diário de bordo no ambiente virtual *Moodle*.

4.2.2 PLANEJAMENTO DO DIÁRIO DE BORDO

O diário de bordo, cuja apresentação se encontra no Apêndice B, é uma ferramenta utilizada para o acompanhamento do trabalho documental dos professores, por um longo período, dentro e fora da sala de aula.

A fim de orientar seu preenchimento na plataforma virtual, foram disponibilizadas instruções específicas aos participantes, apresentadas na Figura 41, porque se pretendeu que os dados obtidos por essa ferramenta de monitoramento contínuo permitissem compreender a natureza das atividades que o professor desenvolvia, tanto dentro como fora da sala de aula.

Figura 41 - Diário de Bordo - Instruções de preenchimento. Ambiente Moodle

Por que um diário de bordo?

O objetivo desse diário é permitir acompanhar diferentes aspectos do trabalho de um professor e poder precisar seu trabalho profissional diariamente.

Por isso, é necessário que nos diga, o mais precisamente possível, o trabalho que você realiza que, por exemplo, pode ser em sua escola, na presença dos alunos ou não; em sua casa; mas também em uma biblioteca, em uma formação contínua ou em uma reunião pedagógica, por exemplo. Além disso, pode tomar diferentes formas: compartilhado com um colega ou em um grupo, pesquisa na internet, correção de tarefas, encontro com pais de alunos...

Como preencher esse diário?

Propomos o preenchimento desse diário de bordo por algumas semanas, diariamente, registrando toda atividade que considerar relevante para o seu trabalho como docente. Indique, de cada atividade, os lugares, duração, protagonistas, recursos utilizados etc.

Se for necessário você pode anexar e enviar algum arquivo, imagem, um endereço da internet, uma foto etc.

[Iniciar ou editar a minha anotação no diário](#)

Fonte: <https://moodle2019.pucsp.br/course/view.php?id=586>, 2019.

Esperou-se que o texto explicativo (Figura 41) orientasse o preenchimento do diário de bordo de forma adequada e também auxiliasse o planejamento de uma primeira verificação de seu conteúdo durante as primeiras visitas aos sujeitos de pesquisa.

Na seção seguinte são explanadas as estratégias utilizadas para a organização dos fóruns de discussão virtual.

4.2.3 FÓRUM DE DISCUSSÃO

A utilização da estratégia fórum de discussão assíncrona teve por intuito viabilizar o acompanhamento contínuo e a longo prazo dos participantes da formação, tendo sido empregada tanto na fase de preparação como na de execução. Durante a fase de preparação, um fórum de discussão virtual foi elaborado especificamente com o objetivo de obter informações iniciais a respeito de recursos e conhecimentos utilizados pelos participantes para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM, enquanto na fase de execução foram planejados 11 fóruns que serviram de suporte ao desenvolvimento dos encontros presenciais.

A seguir são apresentadas as estratégias utilizadas para organizar as visitas aos sujeitos de pesquisa.

4.3 ORGANIZAÇÃO DE VISITAS AOS SUJEITOS DE PESQUISA

A fim de produzir inferências a respeito do impacto causado pela vivência da formação continuada no sistema de recursos dos sujeitos de pesquisa foram planejadas duas visitas presenciais: uma inicial, durante a fase de preparação, entre os dias 14 e 22/08/2019, e outra final, na fase de execução, no dia 07/12/2019.

A visita inicial foi planejada no formato de visita guiada, com o objetivo de conhecer os recursos utilizados pelos professores para introduzir o ensino de função, de modo que o acesso a esses recursos pudesse “fornecer ao pesquisador dados sobre o conhecimento dos participantes a respeito do assunto ensinado” (GUEUDET; TROUCHE, s/d, p. 4).

Para a visita inicial, foram planejadas entrevistas semiestruturadas com o propósito de compreender a hierarquia e funcionamento do sistema de recursos dos sujeitos de pesquisa, a organização de seu trabalho documental e seus conhecimentos sobre o ensino de função. Para tanto, durante as entrevistas empregou-se a Representação Esquemática do Sistema de Recursos – RESR, também empregada por Gueudet e Trouche (2010), e o Mapeamento Inferido do Sistema de Recursos (MISR), inspirado em uma contribuição elaborada por Wang (2019).

A visita final aos sujeitos de pesquisa teve por objetivo avaliar o impacto causado pela vivência da fase de execução da formação continuada nos sistemas de recursos empregados pelos participantes, e, com isso, elaborar inferências sobre quais recursos eventualmente passariam a ser utilizados para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM.

A seguir são apresentados pormenores do planejamento da fase de execução da formação continuada.

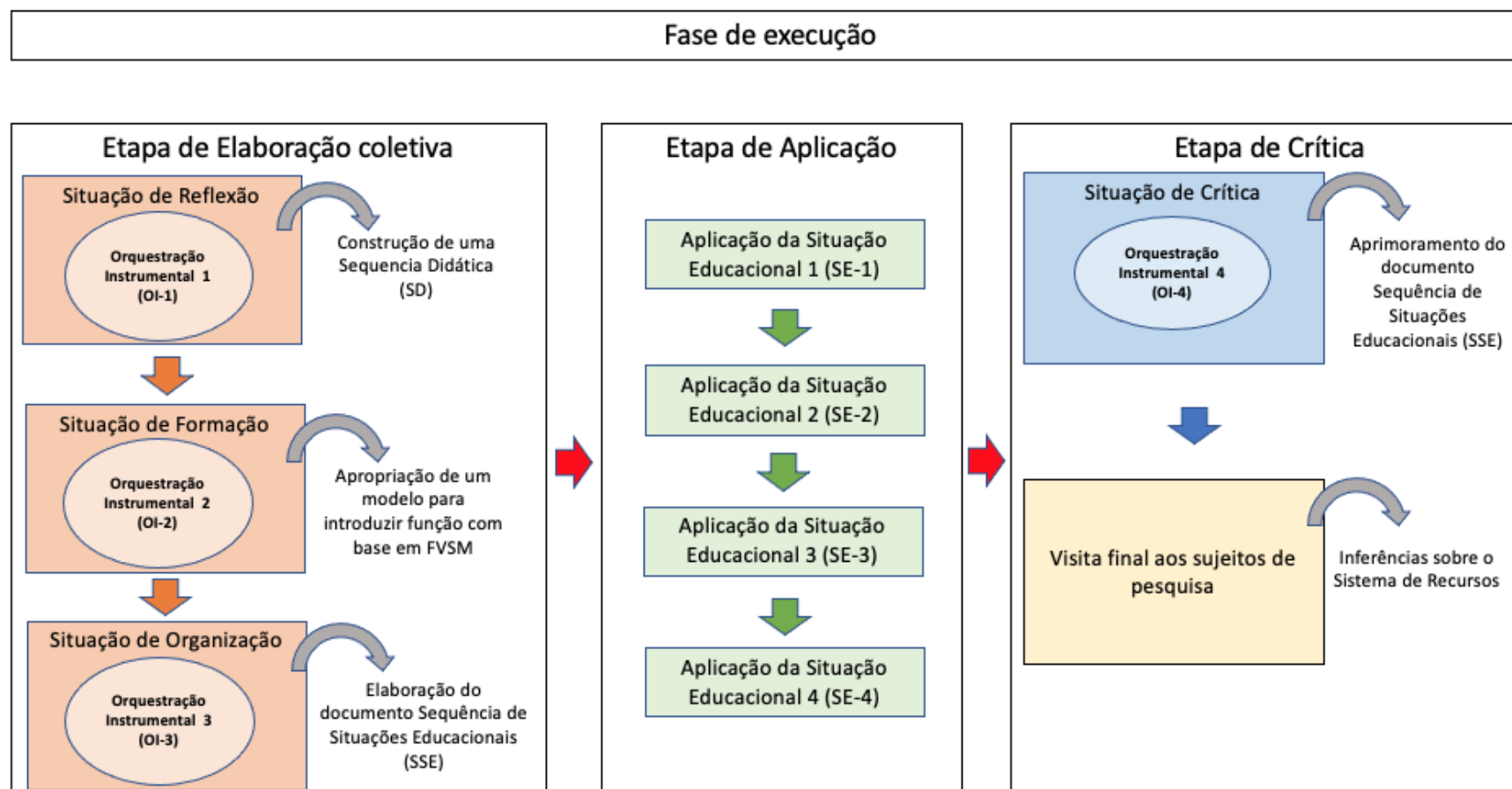
5 FASE DE EXECUÇÃO

Para dar continuidade ao planejamento da formação continuada, a fase de execução, que se desenvolveu no período de agosto até meados de dezembro de 2019, estruturou-se conforme exibido na Figura 42. Seus objetivos foram viabilizar a apropriação de um modelo para introduzir o ensino de função a partir da FVSM e a elaboração de uma SSE composta por um conjunto de recursos selecionados coletivamente para aplicação em sala de aula de alunos do 1º ano do EM. Tudo isso com o propósito de analisar a documentação dos sujeitos de pesquisa.

Para atingir os objetivos propostos e responder aos desafios específicos, a fase de execução foi organizada em quatro etapas: elaboração coletiva, aplicação, crítica e visita final aos sujeitos de pesquisa (Figura 42). Essa organização também foi inspirada em um modelo elaborado por Lucena (2019), que tinha como objetivo articular situações e Ols em um ambiente de formação continuada, objetivando empoderar os professores para conceber Ols que dessem suporte à gênese instrumental do estudante.

O dispositivo, adaptado às circunstâncias da presente investigação, consistiu na vivência de um conjunto de situações profissionais articuladas por Ols, adaptadas em função das fases de concepção de um documento - “preparação, concepção e implementação” (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018, p. 4, tradução nossa) -, que permitiu elaboração coletiva, aplicação e crítica de um documento composto por uma SSE, para introduzir o ensino de função apoiado em FVSM.

Figura 42 – Estrutura da fase de execução



Fonte: Produzido pelo autor.

A seguir é apresentado o planejamento idealizado para a etapa de elaboração coletiva.

5.1 ETAPA DE ELABORAÇÃO COLETIVA

A etapa de elaboração coletiva começou no final do mês de agosto de 2019, estendeu-se até meados de outubro do mesmo ano. Por intermédio da vivência com um conjunto de situações profissionais, buscou-se que os participantes, inicialmente, se apropriassem de um modelo para introduzir o ensino de função baseado em FVSM e, posteriormente, selecionassem recursos para produzir coletivamente uma SSE a ser aplicada a estudantes do 1º ano do EM.

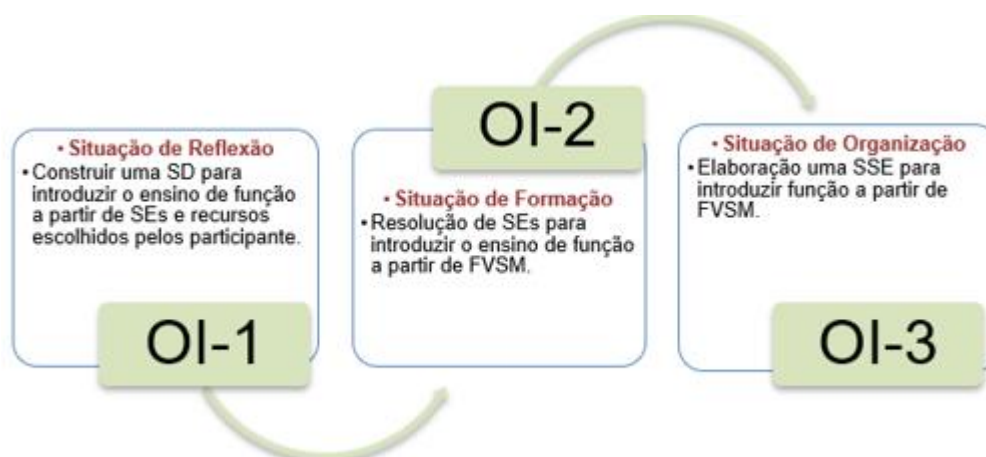
Para sua implementação, foram idealizadas três situações profissionais articuladas por OIs, cujos objetivos implicaram a organização de um total de sete encontros presenciais, apoiados por fóruns de discussão, com a presença de um observador responsável pelo preenchimento de um protocolo de observação com informações a respeito das ações, dos recursos e esquemas mobilizados durante o desenvolvimento das OIs.

A vivência da situação de reflexão, (Figura 43) foi pensada de modo a habilitar os participantes a refletir criticamente a respeito de suas escolhas para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM. Para colocá-la em prática foi organizada a OI-1, cuja configuração didática e cujo modo de execução foram intencionalmente pensados com a finalidade de propor aos participantes a elaboração coletiva de uma SD²⁶ para ensinar função mediante livre escolha de SEs e recursos. Durante sua construção, esperou-se que os participantes mobilizassem esquemas e classes de situações para responder às demandas suscitadas pela situação e, em face do que haviam evidenciado os estudos preliminares, estabeleceu-se como hipótese que a SD elaborada pelo grupo teria o predomínio de funções do afim e com uma única sentença.

²⁶ O termo ‘Sequência Didática – SD’ foi utilizado nessa situação específica apenas por se aproximar do cotidiano dos professores.

Previu-se que, se porventura os participantes decidissem explorar as representações das funções elaboradas em conjunto, certamente o fariam privilegiando aquelas com comportamento regular e contínuo, e que, para proceder ao ensino da SD, provavelmente partiriam de exemplos oriundos do cotidiano para, só então, explorar a noção intuitiva de função e apresentar sua definição formal, seguida das noções de domínio, contradomínio e imagem.

Figura 43 - As situações profissionais na etapa de elaboração coletiva da SSE



Fonte: Adaptado de Lucena (2019).

O desempenho didático da OI-1 deveria favorecer a produção de um balanço a respeito do que foi planejado e, eventualmente seria alterado durante a situação de reflexão, ocasião em que seria possível verificar a comprovação da hipótese levantada e as estratégias utilizadas pelo formador para questionar as escolhas feitas pelo grupo.

A segunda situação, de natureza formativa, objetivou que os professores se apropriassem de um modelo para introduzir o ensino de função apoiado em FVSM. A fim de atingir esse propósito, foi planejada a OI-2, cuja configuração didática e cujo modo de execução foram pensados de maneira a fazer com que os participantes se defrontassem com um conjunto de SEs. Essas, por sua vez, propunham propositalmente a introdução do ensino de função por meio da FVSM e foram selecionadas à luz das conclusões obtidas pelos estudos históricos, epistemológicos e didáticos apresentados no capítulo 3 desta tese. A situação não teve o propósito de ensinar matemática aos participantes, mas inseri-los em um cenário que procurou simular a introdução ao ensino de função por meio da FVSM em que eles desempenhavam o papel de estudantes do 1º ano do EM.

A identificação dos esquemas mobilizados pelos participantes ao longo da resolução das atividades propostas pelas SEs foi utilizada como parâmetro para avaliar o grau de apropriação do modelo, bem como os recursos e conhecimentos envolvidos para viabilizar seu ensino foram entendidos como elementos de acompanhamento da evolução da documentação elaborada por eles.

Para implementar a situação de formação, foram organizados quatro encontros presenciais durante o mês de outubro de 2019, precedidos pelo suporte de fóruns de discussão no ambiente *Moodle*.

Considerando que os participantes tivessem se apoderado do modelo para introduzir o ensino de função apoiado na FVSM durante a vivência das situações de reflexão e formação, a terceira situação - de característica organizativa - foi pensada de forma a criar condições para que o grupo elaborasse coletivamente um documento composto por uma SSE para ser aplicada a um grupo de estudantes do 1º ano do EM.

A fim de colocar em prática o planejamento idealizado para a situação de organização, foi planejada uma OI-3, cuja configuração didática e cujo modo de execução tiveram como eixo central o resgate das vivências experimentadas pelos participantes ao longo das OI-1 e OI-2, como estratégia para a organização da SSE. Para proceder com a organização da SSE, foi esperado que os participantes mobilizassem e/ou (re)adaptassem recursos provenientes de sua atividade profissional e, principalmente, integrassem aqueles já existentes, na forma de atividades, que fizeram parte da resolução coletiva de SEs durante a OI-2.

Finalmente, para implementar a situação de organização, foram planejados dois encontros presenciais durante o mês de outubro de 2019, que, como ocorreu nas situações vivenciadas anteriormente, foram precedidos pelo suporte de fóruns de discussão disponibilizados no ambiente *Moodle*.

A seguir, é apresentado o planejamento idealizado para a etapa de aplicação.

5.2 ETAPA DE APLICAÇÃO

A etapa de aplicação foi preparada para pôr em prática a SSE organizada durante a OI-3, continuar avaliando a apropriação do modelo em introduzir função apoiado na FVSM e acompanhar a evolução do processo de documentação dos sujeitos de pesquisa dentro da sala de aula.

Para dar suporte aos sujeitos de pesquisa durante a aplicação da SSE junto a alunos do 1º ano do EM nas escolas A, B e C, foram organizados dois encontros. O primeiro encontro foi presencial e outro ocorreu remotamente, mas ambos foram mediados por fóruns de discussão no ambiente *Moodle* entre o final do mês de outubro e meados de novembro de 2019.

Durante a aplicação da SSE, foi esperado dos sujeitos de pesquisa que continuassem a se apropriar do modelo desenvolvido pelo grupo para introduzir o ensino de função apoiado na FVSM, mediante a continuidade da mobilização de esquemas e recursos, sobretudo para fazer frente a novas questões levantadas por estudantes e participantes da formação. De igual maneira, esperou-se que processo de aplicação da SSE levasse os discentes a elaborar a definição formal de função e os sujeitos de pesquisa à produção de reflexões acerca de suas concepções ao ensiná-la.

No item 5.3 são apresentados os detalhes do planejamento da etapa de crítica da formação continuada.

5.3 ETAPA DE CRÍTICA

A etapa de crítica teve o propósito de promover a vivência de uma situação de avaliação coletiva sobre organização e aplicação da SSE. Para implementá-la, foi planejada a OI-4, que por sua vez demandou a organização de dois encontros presenciais, antecidos por fóruns no *Moodle* durante o mês de dezembro de 2019.

A configuração didática e o modo de execução da OI-4 foram pensados de modo a que os participantes tivessem acesso prévio ao conteúdo integral do conjunto de vídeos da aplicação da SSE realizada pelos sujeitos de pesquisa em

um ambiente de dados compartilhado, bem como às produções elaboradas pelos estudantes das Escola A, B e C. Imaginou-se que o uso desses recursos contribuiria na implementação do processo de acompanhamento reflexivo e favoreceria na confrontação do trabalho de documentação de participantes e sujeitos de pesquisa, haja vista terem sido utilizados com êxito em circunstâncias similares por Visnovska e Cobb (2013) e Kieran et al (2013).

Estabeleceu-se como hipótese que a vivência da situação de crítica articulada pela OI-4 permitiria aos participantes enriquecer a SSE, por meio de avaliações coletivas de natureza crítica sobre os recursos utilizados desde sua elaboração até a aplicação, quando continuariam a mobilizar esquemas e atualizar o documento composto por uma SSE.

A seguir é detalhado o planejamento idealizado para a realização da visita final aos sujeitos de pesquisa.

5.4 VISITA FINAL AOS SUJEITOS DE PESQUISA

Conforme planejado, a visita final aos sujeitos de pesquisa buscou compreender o impacto causado pela experiência da formação continuada nos sistemas de recursos por eles utilizados, bem como verificar seus conhecimentos sobre a introdução ao ensino de função no 1º ano do EM para, com isso, produzir inferências sobre a evolução de documentação que estavam elaborando.

Por se tratar de um grupo formado por três professores, decidiu-se realizar o encontro de cerca de 60 minutos após o último encontro presencial da etapa de crítica.

Durante a visita esperou-se confrontar os sujeitos de pesquisa “com a RESR confeccionada durante a visita inicial, a fim de observar o professor numa perspectiva de transformação de sua atividade profissional” (GUEUDET; TROUCHE, s/d, p. 6, tradução nossa). O propósito seria permitir que o participante, após a experiência vivenciada ao longo da formação continuada, avaliasse os recursos que eventualmente viria a mobilizar no futuro para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM, bem como os conhecimentos que porventura tivesse incorporado ao longo da formação.

Ao final desse encontro individualizado, o pesquisador esperou ser possível fazer inferências a respeito da evolução da documentação elaborada pelos sujeitos de pesquisa, impactados pela vivência das situações profissionais proporcionadas pela formação continuada.

A seguir, é apresentado o capítulo destinado a apresentação, discussão e análise dos resultados obtidos na parte experimental da investigação, destinada a formação continuada.

6 ANÁLISE DA FORMAÇÃO CONTINUADA

Este capítulo será dedicado à discussão dos dados obtidos durante a formação continuada. A descrição e análise dos dados obtidos foram organizados da seguinte forma: inicialmente são informados os participantes da formação continuada e, dentre eles os sujeitos de pesquisa, seguidos da análise dos dados provenientes dos questionários informativos, da discussão das informações obtidas em um fórum de discussão virtual das visitas iniciais aos sujeitos de pesquisa realizados durante a fase de preparação, e, por fim, das considerações.

Em seguida, foram analisados os dados provenientes da etapa da elaboração coletiva, ocasião em que foram detalhadas três situações referentes aos objetivos de reflexão - formação e organização da SSE com suas respectivas OIs -, seguida da etapa de aplicação, em que se acompanhou seu processo de aplicação com alunos procedentes da escola básica, a etapa de crítica, caracterizada pela análise de uma quarta OI, e finalmente, a visita final aos sujeitos de pesquisa realizada durante a fase de execução.

6.1 PARTICIPANTES E SUJEITOS DE PESQUISA

Conforme planejado pela coordenação de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, durante o mês de junho 2019, oito professores oriundos da rede privada e/ou pública foram selecionados para participar da formação e são identificados pelos nomes fictícios de: Alfredo, Antônio, Bruno, Fabíola, Gabriel, Lucas, Luiz e Luiza.

Pelo fato de já estarem em formação por três meses e atender ao critério de que o ensino de função a seus alunos do 1º ano do EM estivesse planejado para ocorrer durante o mês de novembro de 2019, os participantes Gabriel, Lucas e Luiz tornaram-se os sujeitos de pesquisa.

A seguir são analisados os dados obtidos por meio do emprego de questionários informativos.

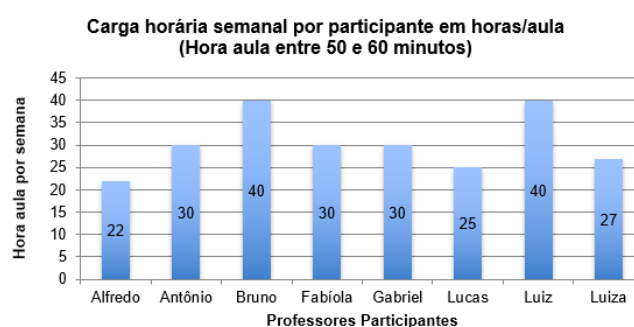
6.2 QUESTIONÁRIOS INFORMATIVOS

De acordo com as respostas obtidas no Questionário 1, foi possível observar que todos dispunham de formação regular no ensino fundamental e ensino médio, com exceção de Gabriel, que informou possuir formação técnica nesse quesito. Em relação à formação superior, Luiz informou ter licenciatura e bacharelado em matemática, Gabriel, em engenharia mecânica e todos os demais eram licenciados em matemática. Quanto ao tempo de docência em matemática, Alfredo informou ter sete anos de experiência, Antônio cinco, Bruno doze anos, Fabíola e Luiz dez anos, Gabriel dois anos, Lucas um ano e meio e Luiza vinte anos.

As informações obtidas na questão 1 do Questionário 2 revelaram que a metade dos participantes declarou trabalhar no ensino fundamental 2º ciclo e no ensino médio, enquanto a outra metade, somente no ensino médio.

No Gráfico 1 é possível observar a distribuição das respostas à questão 2 do Questionário 2 e nele pode-se notar que os (as) professores (as) de instituições públicas dispunham de uma carga horária semanal de trabalho maior do que aqueles da escola privada. Inferiu-se que tal cenário pudesse estar relacionado ao fato de o regime de contratação proposto pelas instituições públicas impor ao docente uma disponibilidade quase que integral, pois, segundo decreto número 8259 expedido em 29/05/2014 pela Presidência da República do Brasil, “o regime de trabalho dos (as) professores (as) nos institutos federais de educação poderiam alcançar até 40 horas semanais” (BRASIL, 2014), e a mesma situação é vivenciada por docentes contratados em concurso público no âmbito do estado e das prefeituras do estado de São Paulo.

Gráfico 1 - Carga horária semanal de trabalho dos participantes



Fonte: Produzido pelo autor.

O tempo de experiência dos participantes no nível de ensino em que lecionavam no momento de realização da formação continuada, questão 3, pode ser observado no Gráfico 2. Pode-se observar que os professores Antônio, Bruno, Fabíola, Luiz e Luiza dispunham de um maior tempo de experiência no nível de ensino em que lecionavam no momento de aplicação do questionário. Especulou-se que o fato de pertencerem à escola pública explicasse a existência de uma maior experiência no nível de ensino trabalhado, haja vista tais instituições estarem organizadas “de maneira a procurar vincular o docente em uma unidade de ensino a fim de que obtenha um melhor aproveitamento de suas potencialidades profissionais” (BRASIL, 2018, p. 218).

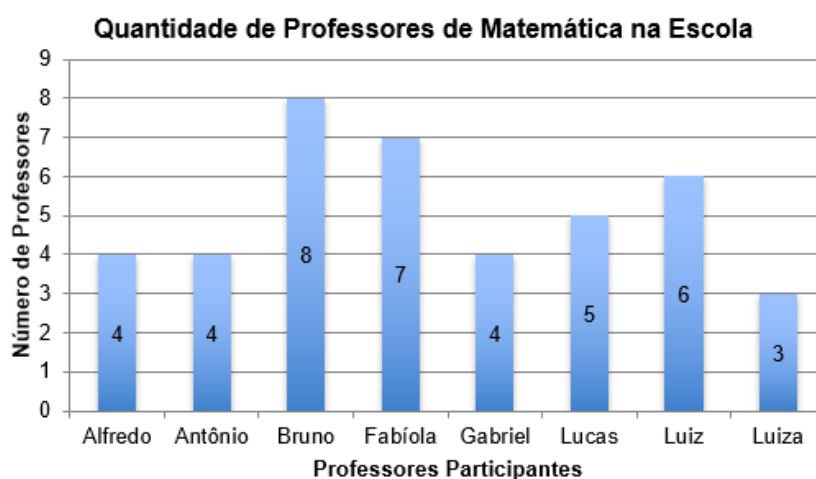
Gráfico 2 - Tempo de experiência no nível de ensino atual



Fonte: Produzido pelo autor.

No tocante ao número de professores de matemática (questão 4) nas escolas em que trabalhavam, as informações obtidas podem ser verificadas no Gráfico 3. Conjectura-se que o fato de pertencerem a escolas públicas possa explicar o fato de os participantes Bruno, Fabíola e Luiz terem informado a existência de um número maior de professores dessa disciplina nessas instituições do que os demais participantes.

Gráfico 3 - Número de professores de matemática na escola em que trabalha atualmente



Fonte: Produzido pelo autor.

Quando solicitados a descrever a infraestrutura e o acesso a tecnologias nas instituições em que trabalham, questão 5, os participantes responderam conforme disposto no Quadro 5. As informações nele contidas parecem retratar a conjuntura experimentada pela educação brasileira no que se refere à estrutura oferecida aos docentes da educação básica, já que, segundo uma investigação feita pelo Comitê Gestor da Internet no Brasil, no decorrer do ano de 2018, “mais de 60% das instituições escolares nacionais dispunham de acesso à *internet*” (CGI, 2018).

Quadro 5 - Condições materiais e tecnológicas na instituição atual

Nome	Condições materiais	Acesso a tecnologias
Alfredo	- Não existe uma sala específica para os professores de matemática; - Sala dos professores equipada com computadores sem impressora e - Máquina de xerox.	- Conexão à internet para alunos e professores; - Sala de aula equipada com datashow e computador para o professor; - Notebooks disponíveis para os estudantes; - Laboratório de Informática; - Acesso a plataforma <i>Moodle</i> e sistema de notas; - Estudantes possuem equipamentos particulares como tablet, celular e calculadora.
Antônio	- Não existe uma sala específica para os professores de matemática e - Sala dos professores equipada com dois computadores.	- Conexão à internet para alunos e professores; - Sala de aula equipada com datashow e computador para o professor; - Notebooks, calculadoras e tablets, disponíveis para os estudantes; - Laboratório de Informática e - Acesso a plataforma <i>Moodle</i>, sistema de notas e softwares como <i>Cabri 3D</i>, logo etc.
Bruno	- Não existe uma sala específica para os professores de matemática.	- Laboratório de Informática; - Estudantes possuem celulares e calculadoras particulares e - Acesso a sistema de notas.
Fabíola	- Não existe uma sala específica para os professores de matemática.	- Laboratório de Informática; - Estudantes possuem celulares e calculadoras particulares e - Acesso a sistema de notas.
Gabriel	- Não existe uma sala específica para os professores de matemática; - Sala dos professores equipada com computadores sem impressora e - Máquina de xerox.	- Conexão à internet para alunos e professores; - Sala de aula equipada com datashow e computador para o professor; - Notebooks disponíveis para os estudantes; - Laboratório de Informática; - Acesso a plataforma <i>Moodle</i> a sistema de notas; - Estudantes possuem equipamentos particulares como tablet, celular e calculadora.
Lucas	- Não existe uma sala específica para os professores de matemática; - Sala dos professores equipada com computadores sem impressora e - Máquina de xerox.	- Conexão à internet para alunos e professores; - Sala de aula equipada com datashow e computador para o professor; - Notebooks disponíveis para os estudantes; - Acesso a plataforma <i>Moodle</i> a sistema de notas; - Estudantes possuem equipamentos particulares como tablet, celular e calculadora.
Luiz	- Não existe uma sala específica para os professores de matemática;	- Laboratório de Informática; - Estudantes possuem celulares e calculadoras particulares e - Acesso a sistema de notas.
Luiza	- Não existe uma sala específica para os professores de matemática;	- Laboratório de Informática; - Estudantes possuem celulares e calculadoras particulares e - Acesso a sistema de notas.

Fonte: Produzido pelo autor.

Quanto aos dados obtidos no terceiro questionário a respeito das TIC, ou seja, referentes às tecnologias utilizadas durante a prática de ensino de matemática e sua motivação, questões 1 e 2, os participantes responderam conforme disposto no Quadro 6. De acordo com as respostas, foi possível constatar que a utilização

das diversas tecnologias mencionadas é bastante disseminada, e a motivação está principalmente relacionada com à busca de recursos para a prática de ensino.

Da mesma forma, as respostas fornecidas pelos participantes e exibidas no Quadro 6, possibilitaram constatar que a utilização das diversas tecnologias mencionadas é bastante disseminada, e a motivação está principalmente relacionada com à busca de recursos para a prática de ensino.

Quadro 6 - Tecnologias utilizadas na prática de ensino e seus motivos

Alfredo	- Calculadora, Sites como Khan Academy, datashow, videoaulas e Geogebra, Excel e PowerPoint.	- Buscar recursos para seu ensino; - Atualizar-se na área de Educação Matemática; - Adaptar seu ensino à tecnologia já existente em seu local de trabalho; - Versatilidade.
Antônio	Calculadora, sites como Khan Academy, datashow, videoaulas e Geogebra, Excel e PowerPoint.	- Buscar recursos para seu ensino; - Atualizar-se na área de Educação Matemática - Versatilidade.
Bruno	- Calculadora, Geogebra, Excel e PowerPoint.	- Buscar recursos para seu ensino; - Atualizar-se na área de Educação Matemática - Versatilidade.
Fabiola	- Calculadora, Geogebra, Excel e PowerPoint.	- Buscar recursos para seu ensino e - Versatilidade.
Gabriel	- Sites e videoaulas sem especificação, filmes, Geogebra, Excel e PowerPoint.	- Buscar recursos para seu ensino; - Atualizar-se na área de Educação Matemática e - Otimizar o tempo em sala de aula.
Lucas	- Sites e videoaulas sem especificação, filmes, Geogebra, Excel e PowerPoint.	- Buscar recursos para seu ensino; - Atualizar-se na área de Educação Matemática e - Otimizar o tempo em sala de aula.
Luiz	- Calculadora, Geogebra, filmes, Excel e PowerPoint.	- Buscar recursos para seu ensino; - Motivar os alunos e - Otimizar o tempo em sala de aula.
Luiza	- Sites da internet, filmes, calculadora e projetor.	- Buscar recursos para seu ensino; - Motivar os alunos; - Praticidade e - Otimizar o tempo em sala de aula.

Fonte: Produzido pelo autor.

Ainda na questão 2, três outros questionamentos foram feitos. O primeiro deles se referiu ao principal papel que atribuíam às TIC (questão 4) para sua prática e, com exceção de Luiza, todos os participantes selecionaram as opções “contribui para a construção do conhecimento matemático dos alunos”, “permite estabelecer uma conexão entre os conceitos matemáticos e seus significados” e “para potencializar a atividade estudantil”. Alfredo, Gabriel, Lucas e Luiz incluíram também a opção “para possibilitar um ambiente colaborativo entre os alunos”.

O segundo questionamento foi sobre a relevância do uso das TIC em um determinado tema específico para o ensino de Álgebra, Aritmética, Geometria e/ou Estatística (questões 5, 6 e 7). Antônio, Fabiola e Luiza declararam, sem especificar, que seu uso é importante em todos os temas. Gabriel pontuou sua

relevância na visualização das figuras planas na Geometria por meio de animações e Luiz relatou empregá-las no estudo do desenho geométrico. Bruno e Lucas, por sua vez, afirmaram que as TIC auxiliavam o estudo de funções, proporcionando a compreensão de vários conceitos básicos, como plano cartesiano, zero da função, crescimento e decrescimento, além do comportamento gráfico, e Alfredo, por fim, pontuou seu uso no trabalho com tabelas e gráficos e na elaboração de inferências na Estatística.

Em relação a um terceiro questionamento (questões 8 e 9), todos os participantes declararam que o papel desempenhado pelo computador em suas aulas é secundário, mas que as tecnologias associadas a ele alteraram suas atividades de preparo das aulas: seu uso facilitou a busca por outros tipos de metodologias de ensino mediante acesso a estratégias propostas em sites e videoaulas disponíveis na internet, assim como a organização das aulas, já que permitia a consulta a arquivos preparados em anos anteriores. Além disso, segundo os participantes, o computador também mobilizou uma série de procedimentos, como o emprego de *pen drive* para o transporte de arquivos, o compartilhamento das informações e a comunicação entre professores e alunos por meio do uso de correio eletrônico.

Em face das informações obtidas no questionário 3 foi possível perceber que o uso das TIC é uma prática corriqueira no trabalho dos professores participantes da formação. Todos informaram empregá-las em seu trabalho de ensino, especialmente fazendo uso do software *GeoGebra*, de calculadoras e sites com conteúdo matemático provenientes da internet, em conjunto com outros recursos, como, por exemplo, o livro didático. A principal razão informada para integrar esse tipo de tecnologia na sua prática profissional consistiu em buscar - ou mesmo desenvolver - recursos para sua prática de ensino. Observou-se com isso, que a articulação de recursos com a finalidade de ensinar temas matemáticos constatada nas respostas fornecidas pelos participantes está de acordo com a mesma tendência observada ao longo da revisão da bibliografia sobre a ADD e OI.

Essa combinação de recursos de curriculares materiais com ou sem origem digital faz parte de uma tendência à digitalização da informação e da comunicação. O desenvolvimento da internet, segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p. 2,

tradução nossa), “tem trazido grandes mudanças em termos de facilidade e rapidez, possibilitando o acesso a inúmeros recursos e à comunicação com inúmeros interlocutores”. Em relação à educação, segundo os mesmos autores, essa tendência tem provocado novos equilíbrios entre recursos estáticos e dinâmicos e impactado diretamente o trabalho documental dos professores.

Os dados obtidos no quarto questionário, dedicado a aspectos relacionados ao trabalho coletivo, apurou que quando indagados se tinham por hábito trabalhar com outros colegas na(s) instituição escolar em que eram docentes (questão 1), qual era sua natureza e quando haveriam começado, os participantes responderam conforme apresentado no Quadro 7. Nele é possível perceber que a elaboração do planejamento pedagógico da disciplina de matemática foi apontada como a modalidade de trabalho coletivo mais frequente do grupo. Depreendeu-se disso que essa modalidade, acrescida das experiências coletivas na participação em projetos interdisciplinares ou mesmo na organização das olimpíadas de matemática, pudesse ter proporcionado a alguns dos participantes uma evolução de sua prática docente, já que “a troca de experiências e de recursos para seu ensino em interações coletivas potencializa o desenvolvimento profissional” (SABRA, 2012, p. 276, tradução nossa). Nesse sentido, todos os participantes responderam que as experiências vivenciadas em um ambiente coletivo alteraram sua prática profissional, pois foi possível inteirar-se de outros conhecimentos e incorporá-los em sua prática.

Quadro 7 - Informações obtidas sobre trabalho coletivo - Questionário 4

Nome	Trabalho com colegas	Tipo de trabalho coletivo	Início do trabalho coletivo
Alfredo	Sim	- Construção do planejamento pedagógico da área de matemática;	4 anos.
		- Preparação das Olimpíadas de Matemática	2 anos.
		Projetos interdisciplinares.	4 anos.
Antônio	Sim	- Elaboração do planejamento pedagógico da área de matemática;	5 anos.
		- Preparação das Olimpíadas de Matemática	6 meses.
		Projetos interdisciplinares.	5 anos.
Bruno	Não	- Elaboração do planejamento pedagógico da área de matemática.	7 anos.
Fabíola	Não	- Elaboração do planejamento pedagógico da área de matemática.	6 anos.
Gabriel	Sim	- Elaboração do planejamento pedagógico da área de matemática;	2 anos.
		- Elaboração das Olimpíadas de Matemática	1 ano.
		- Projetos interdisciplinares.	2 anos.
Lucas	Sim	- Elaboração do planejamento pedagógico da área de matemática;	1, 5 anos.
		- Elaboração das Olimpíadas de Matemática	1 ano
		- Projetos interdisciplinares	1,5 ano.
Luiz	Sim	- Elaboração do planejamento pedagógico da área de matemática;	7 anos.
Luiza	Não	- Preparação das Olimpíadas de Matemática;	3 anos.
		- Projetos interdisciplinares	16 anos
		- Elaboração do planejamento pedagógico da área de matemática.	7 anos

Fonte: Produzido pelo autor.

A despeito de outras experiências coletivas vivenciadas fora do ambiente escolar (questões 2 e 3), os participantes Alfredo, Gabriel, Lucas e Luiz informaram serem filiados ao sindicato dos professores, enquanto Luiza e Fabíola disseram atuar em associações de bairro da região em que residiam.

As informações obtidas no quinto questionário apontaram os tópicos considerados como mais difíceis para ensinar (questões 1 e 2), acompanhados de suas respectivas razões. Eles estão apresentados no Quadro 8 e revelaram que o grupo considerava a maior parte dos temas matemáticos como fáceis de serem ensinados.

No que diz respeito ao ensino de função, as revelações foram importantes, na medida em que, segundo Brasil (2018, p. 160), esse “é considerado um tema centralizador das temáticas da matemática” e responsável pela viabilidade de

projetos interdisciplinares com outras áreas do conhecimento, constituindo-se em uma informação essencial para a construção da fase de execução da formação continuada.

Quadro 8 - Tópicos matemáticos considerados difíceis para ensinar - Questionário 5

Nome	Tópicos difíceis para ensinar	Motivo (s)
Alfredo	Geometria	Demonstração de propriedades elementares como altura, bissetriz e mediana.
Antônio	Nenhum	
Bruno	Álgebra / Estatística	Abstração e o desenvolvimento do pensamento algébrico / exercício lógico / Todo o campo da geometria analítica.
Fabíola	Álgebra	Abstração e o desenvolvimento do pensamento algébrico.
Gabriel	Álgebra	Abstração e o desenvolvimento do pensamento algébrico.
Lucas	Nenhum	
Luiz	Aritmética	Dificuldade com cálculos.
Luiza	Nenhum	

Fonte: Produzido pelo autor.

Relativamente à preparação das aulas (questões 3 e 4), todos os participantes informaram levar em consideração as necessidades particulares de seus os alunos, com exceção de Bruno. Nesse sentido, Alfredo e Luiza disseram não considerar o nível médio dos alunos em classe quando prepararam suas aulas; Alfredo, Luiza e Fabíola não levaram em consideração o nível dos alunos piores da classe, e Alfredo, Bruno e Lucas não levaram em conta o nível dos melhores alunos.

Após a apresentação das respostas obtidas nos cinco questionários, foi possível elaborar um perfil pessoal e profissional de cada um dos participantes, conforme exibido no Quadro 9.

A construção do perfil evidenciou informações sobre formação, experiência profissional, carga horária de trabalho, infraestrutura em que estava inserido, o papel das TIC em sua prática profissional, bem como aspectos do trabalho coletivo e tópicos da matemática considerados difíceis de serem ensinados.

Quadro 9 - Perfil pessoal e profissional dos participantes da formação

Alfredo , Licenciado em matemática, com sete anos de experiência profissional, quatro anos de experiência no ensino médio, trabalha em escola privada, tem carga horária de 22 horas semanais, as salas de aula da escola são equipadas com datashow e um computador para o professor, há notebooks disponíveis para os estudantes (quando solicitado pelo professor), as TIC têm papel secundário em suas aulas, existe trabalho coletivo na escola e ele considera a geometria um tópico difícil de ser ensinado.
Antônio , Licenciado em matemática, com nove anos de experiência profissional, cinco anos de experiência no ensino médio, trabalha na Prefeitura de São Paulo e em uma escola privada, tem carga horária de 30 horas semanais, em ambas as escolas existem salas equipadas com computadores, acesso à internet, calculadoras e tablets disponíveis aos alunos, as TIC têm papel secundário em suas aulas, existe trabalho coletivo na escola e ele considera não existir dificuldade em ensinar qualquer tópico da matemática.
Bruno , Licenciado em matemática, com 12 anos de experiência profissional, oito anos de experiência no ensino médio, trabalha no Instituto Federal da cidade de Itaquaquecetuba - SP, tem carga horária de 40 horas semanais, a instituição possui laboratório de informática onde é possível desenvolver atividades, os alunos possuem celulares pessoais, as TIC têm papel secundário em suas aulas, existe pouco trabalho coletivo na escola e ele considera álgebra e estatística tópicos difíceis de serem ensinados.
Fabíola , Licenciada em matemática, com dez anos de experiência profissional, sete anos de experiência no ensino médio, trabalha no Instituto Federal da cidade de Itaquaquecetuba - SP, tem carga horária de 30 horas semanais, a instituição possui laboratório de informática onde é possível desenvolver atividades, os alunos possuem celulares pessoais, as TIC têm papel secundário em suas aulas, existe pouco trabalho coletivo na escola e ela considera a álgebra difícil de ser ensinada.
Gabriel , Formado em engenharia mecânica, com dois anos de experiência profissional, dois anos de experiência no ensino médio, trabalha em duas escolas privadas, tem carga horária de 30 horas semanais, as instituições são equipadas com datashow e um computador nas salas de aula para o professor, há notebooks disponíveis para os estudantes (quando solicitados pelo professor) laboratório de informática, as TIC têm papel secundário em suas aulas, existe trabalho coletivo na escola e ele considera a álgebra difícil de ser ensinada.
Lucas , Licenciado em matemática, com um ano e meio de experiência profissional, um ano e meio de experiência no ensino médio, trabalha em escola privada, tem carga horária de 25 horas semanais, as salas de aula de sua escola são equipadas com datashow e um computador para o professor, notebooks disponíveis para os estudantes (quando solicitados pelo professor), as TIC têm papel secundário em suas aulas, existe trabalho coletivo na escola e ele considera não existir dificuldade em ensinar qualquer tópico da matemática.
Luiz , Licenciado em matemática, com 20 anos de experiência profissional, sete anos de experiência no ensino médio, trabalha em uma escola estadual e em uma municipal, da cidade de Embu Guaçu – SP, tem carga horária de 40 horas semanais, há laboratório de informática nas duas escolas onde trabalha, as TIC têm papel secundário em suas aulas, existe trabalho coletivo nas escolas e ele considera a aritmética difícil de ser ensinada.
Luiza , Licenciada em matemática, com 20 anos de experiência profissional, 16 anos de experiência no ensino médio, trabalha em uma escola estadual na cidade de São Paulo, tem carga horária de 27 horas semanais, na sua escola há laboratório de informática (com pouca utilização), os alunos possuem celulares pessoais, as TIC têm papel secundário em suas aulas, existe pouco trabalho coletivo na escola e ela considera não existir dificuldade em ensinar qualquer tópico da matemática.

Fonte: Produzido pelo autor.

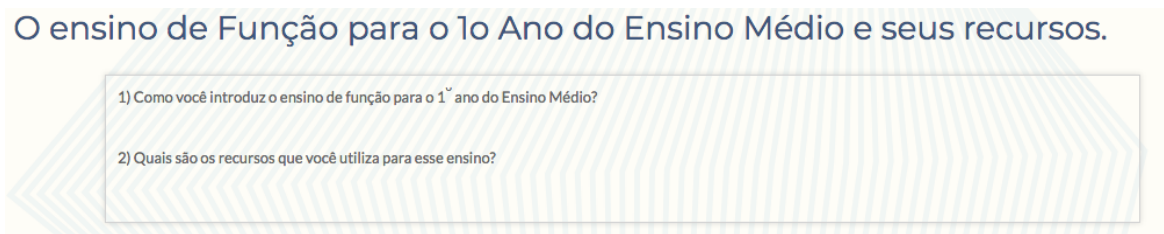
A seguir serão apresentadas as análises quanto ao fórum de discussão virtual ocorrido na fase de preparação.

6.3 FÓRUM DE DISCUSSÃO

Intitulado ‘o ensino de função para o 1º ano do Ensino Médio e seus recursos’, o fórum virtual da fase de preparação teve duas questões, conforme exibido na Figura 44. Para acessá-lo, os participantes foram orientados, por meio

do envio de um *e-mail*, com uma semana de antecedência, de que suas contribuições deveriam ocorrer entre os dias 31/7/2019 e 11/8/2019. Também foram encorajados a debater eventuais temas propostos por outros participantes ou pelo pesquisador ao longo da realização do fórum.

Figura 44 - Fórum virtual de discussão - Etapa de preparação



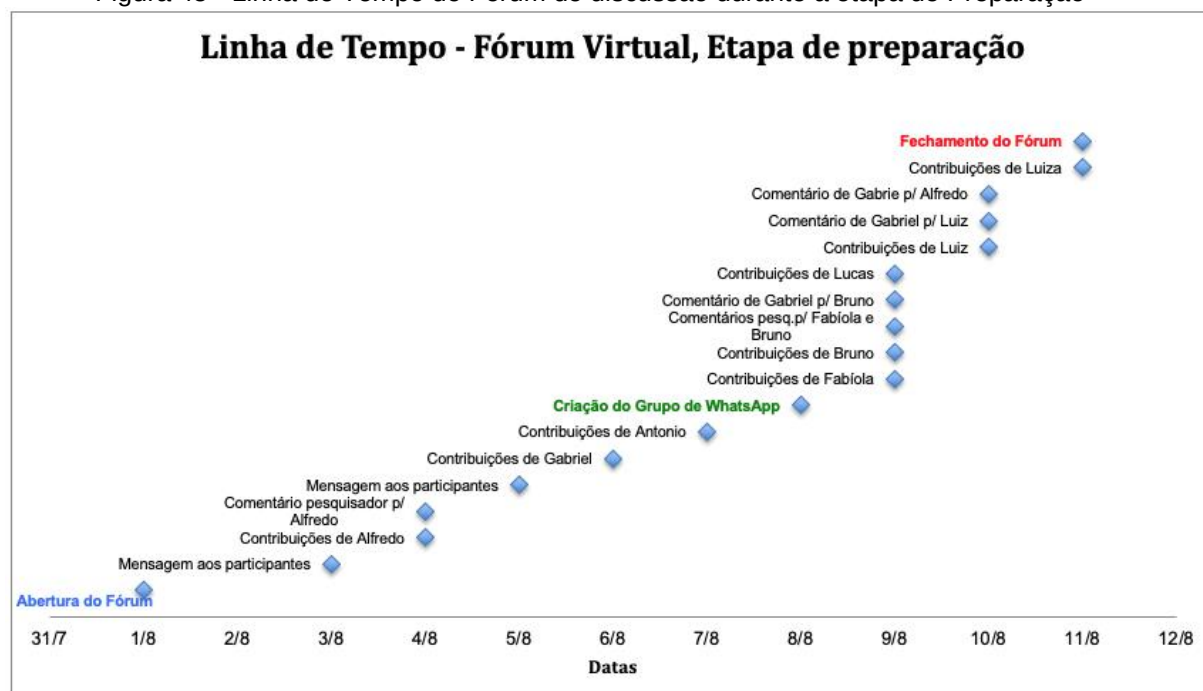
Fonte: <https://moodle2019.pucsp.br/course/view.php?id=586>, 2019.

No tocante à primeira pergunta, esperou-se que os participantes respondessem recorrendo a uma sequência de ações, cujo início teria por característica principal a exploração da noção intuitiva de função apoiada na noção de conjuntos. Em seguida, esperava-se que os professores propusessem a resolução de exercícios oriundos do cotidiano, valendo-se principalmente de funções afim com uma única sentença, e que, por último apresentassem a definição formal de função, acompanhada das noções de domínio, contradomínio e imagem, conforme sugerido nos estudos preliminares.

Sobre a segunda questão, foi esperado dos participantes o relato de suas experiências na introdução ao ensino de função no 1º ano do EM, articulando vários recursos curriculares - independentemente de sua origem -, corroborando as observações elencadas na seção 2.3.2.

Nos primeiros dias de funcionamento do fórum de discussão, poucas postagens foram realizadas, ainda que o pesquisador tivesse tentado mobilizar o grupo por meio do envio de mensagens eletrônicas, disponibilizadas por uma ferramenta de comunicação existente no *Moodle*. Como tal estratégia revelou-se ineficaz naquele momento, decidiu-se alterar a forma de comunicação com os participantes, recorrendo-se à criação de um grupo de discussão na multiplataforma de mensagens instantâneas para celulares *WhatsApp*. Na Figura 45, é possível observar uma linha de tempo que exibe as datas em que ocorreram as contribuições dos participantes e o momento em que ocorreu a criação do grupo de discussão no *WhatsApp*.

Figura 45 - Linha de Tempo do Fórum de discussão durante a etapa de Preparação



Fonte: Produzido pelo autor.

De acordo com as informações disponibilizadas na linha de tempo (Figura 45), é possível observar que, após a criação do grupo na plataforma *WhatsApp*, ocorreu um aumento significativo na quantidade de contribuições, permitindo supor que, se tal iniciativa tivesse sido feita com maior antecedência, possivelmente os debates e as interações entre participantes e pesquisador teriam ocorrido de forma mais intensa.

Relativamente à maneira como os participantes informaram como introduzir o ensino de função no 1º ano do EM, foi possível constatar que a maioria deles optou por uma sequência de ações iniciada pela exploração da noção intuitiva do tema apoiada na ideia de conjuntos, bem como recorreu a exemplos trazidos do cotidiano, o que acabou por validar a hipótese inicialmente apresentada. A temática cotidiana mais citada pelos professores foi a ‘corrida de taxi’; alguns relacionaram o valor da bandeirada com a distância percorrida, enquanto outros, o relacionaram ao consumo de combustível. Na mesma lógica, a maioria informou apresentar, após esse momento, a definição formal de função, com apoio da noção de conjuntos, fazendo uso de diagramas de Venn e formalismo algébrico, seguida do estudo das noções de domínio, contradomínio e imagem.

Esse tipo de estratégia em introduzir o ensino de função, aliás, é vista por Roque (2012) como conjuntista, por subtrair todas as ideias originais relacionadas à variação e pelo fato de essa manipulação ocorrer por intermédio da manipulação de fórmulas ou diagramas de Venn, o que, segundo Breidenbach et al (1992) não favorece a construção de uma concepção de processo sobre o tema.

Duas outras observações foram percebidas no transcorrer do fórum de discussão. A primeira delas recaiu sobre os tipos de funções utilizadas pelos participantes ao introduzir o ensino de função no 1º ano do EM. Com exceção da participante Fabíola, todos os demais optaram apenas por funções afim. Fabíola invariavelmente utiliza contas de consumo para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM.

A segunda questão esteve relacionada à maneira como os diferentes registros de representação de função foram exploradas durante a introdução de seu ensino. Foi possível observar que a maioria dos professores optou por sua representação no registro de representação gráfico, enquanto a utilização de tabelas, por exemplo, ocorreu esporadicamente. Essa propensão legitima algumas conclusões obtidas em uma investigação conduzida por Even (1990). Segundo o autor, o uso limitado de diferentes formas de representação da função pode impactar em uma aprendizagem deficiente do tema. Observou-se também que, durante a utilização da representação gráfica de uma função, nenhum dos participantes informou abordar a noção de descontinuidade, limitando-se apenas ao uso daquelas funções de comportamento linear e contínuo.

Conforme havia sido planejado ao longo da seção 3, os participantes informaram preferir articular diversos recursos para introduzir o ensino de função, independentemente de sua origem. Alfredo, por exemplo, relatou elaborar suas aulas partindo de um esboço com base em reflexões produzidas pelos estudantes em aulas passadas, selecionar materiais disponíveis na internet, ou mesmo utilizar fichas confeccionadas em anos anteriores e o livro didático para, então, planejar suas aulas. Somente após essa etapa, ele se decidiria a usar ou não o projetor, a lousa e o giz.

Outro cenário que ilustra a articulação de diferentes recursos curriculares ocorreu durante um diálogo entre o pesquisador e a participante Fabíola, em que

foi possível notar que a professora considerava importante preparar a introdução ao ensino de função articulando o uso de papel quadriculado e o programa *GeoGebra*.

A seguir são apresentadas as estratégias utilizadas para organizar as visitas aos sujeitos de pesquisa, bem como disponibilizadas as informações colhidas durante a primeira delas, ocorrida durante a fase de preparação da formação continuada.

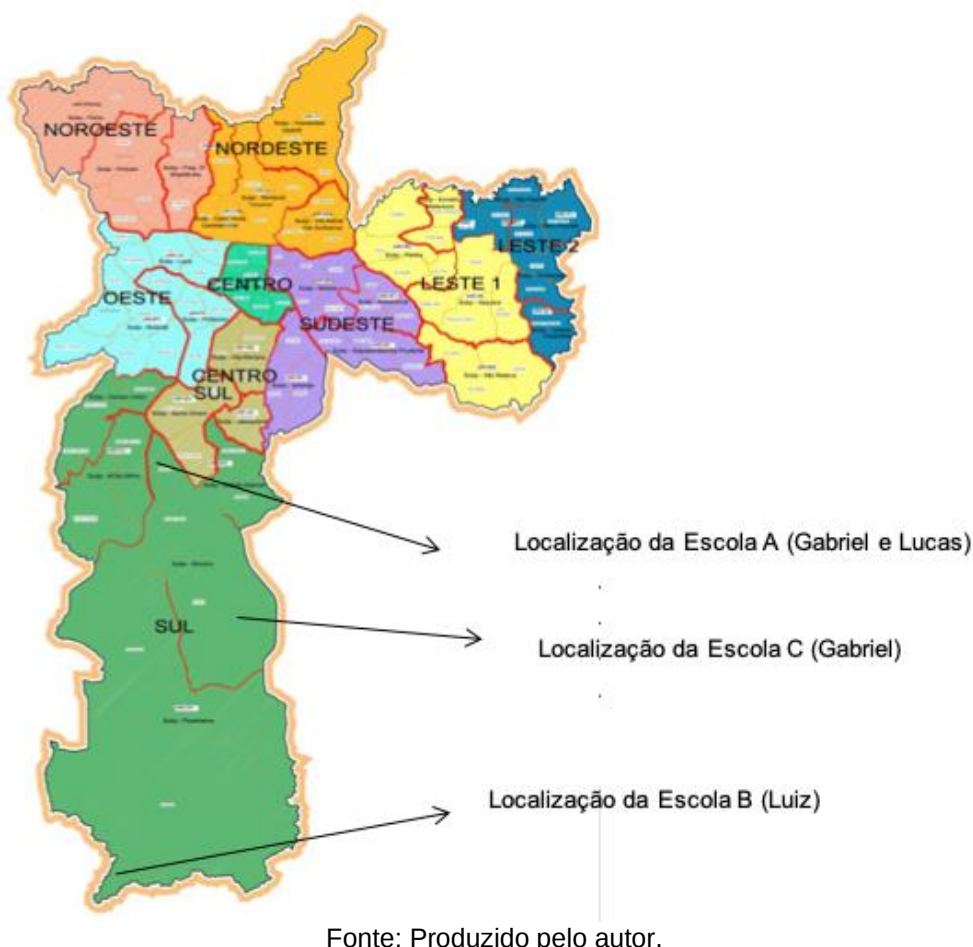
6.4 VISITAS INICIAIS AOS SUJEITOS DE PESQUISA

A primeira visita aos sujeitos de pesquisa ocorreu durante a fase de preparação e, para implementá-la, os três sujeitos de pesquisa foram contatados com antecedência pelo pesquisador, por meio do envio de e-mail e mensagens no grupo de *WhatsApp*. A fim de que a visita possibilitasse pleno acesso aos recursos utilizados para introduzir o ensino de função, foi solicitado aos três professores que o encontro ocorresse em suas residências. Entretanto, ao se tentar implementar o planejamento para efetivar o processo de visitas, houve resistências por parte dos sujeitos de pesquisa para que as mesmas ocorressem em suas residências, razão pela qual optou-se por realizá-las nas instituições em que eles exerciam sua atividade profissional.

A título de convenção, atribuiu-se o nome de Escola A para a instituição em que Gabriel e Lucas trabalhavam, Escola B, referindo-se ao local de trabalho do professor participante Luiz e, finalmente, Escola C, como sendo aquela em que Gabriel exercia a docência.

Na Figura 46 é possível identificar a localização geográfica das escolas em que os sujeitos de pesquisa exerciam a docência na cidade de São Paulo à época da realização das visitas. Cabe esclarecer que a instituição onde Luiz era professor está localizada em um município da região metropolitana da cidade de São Paulo, chamada Embu-Guaçu.

Figura 46 – Localização das escolas dos sujeitos de pesquisa no mapa da cidade de São Paulo



Fonte: Produzido pelo autor.

As visitas aos sujeitos de pesquisa ocorreram durante o mês de agosto de 2019 e aproximadamente 60 minutos de duração. No dia 14/08/2019, aconteceram as visitas a Gabriel e Lucas no recinto da Escola A e, em 22/08/2019, foi a vez de Luiz, na Escola B.

A seguir será apresentada a análise dos dados obtidos durante a visita inicial realizada com o sujeito de pesquisa Gabriel na Escola A.

6.4.1 VISITA AO SUJEITO DE PESQUISA GABRIEL

A visita inicial ao sujeito de pesquisa Gabriel ocorreu na biblioteca da Escola A e foi agendada previamente por meio de troca de e-mails e mensagens na plataforma *WhatsApp*. A fim de que a visita alcançasse os objetivos planejados, foi solicitado ao professor que comparecesse ao encontro munido de informações detalhadas sobre os recursos que utilizava na preparação e execução de suas aulas a respeito de função, tanto na Escola A como na C, e munido do diário de

bordo preenchido. Conforme planejado, durante a visita ao professor na Escola A, foi realizada uma entrevista semiestruturada para obtenção de informações sobre recursos e conhecimentos utilizados na introdução ao ensino de função e na reflexão sobre seu trabalho documental.

A Escola A, em que Gabriel trabalhava no momento da visita, é privada, voltada a um público de alto poder aquisitivo, localizada em um bairro da zona sul da cidade de São Paulo, tem cerca de 1000 alunos distribuídos nos três níveis de ensino básico (primário, fundamental e médio) e trabalha com uma proposta pedagógica socioconstrutivista.

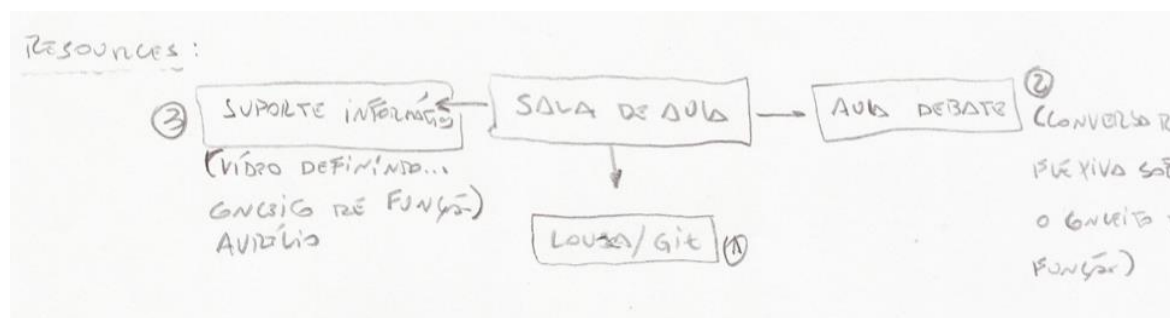
Nessa instituição, Gabriel exercia a função de professor auxiliar, tendo por atribuições colaborar com o trabalho dos professores especialistas em matemática nos níveis de ensino EF2 e EM (entre os quais encontrava-se Lucas) e, em parceria com uma psicopedagoga, desenvolver atividades voltadas a estudantes com dificuldades de aprendizagem. Sua carga horária semanal era de 20 horas, divididas da seguinte forma: 4 horas destinadas ao 1º ano do EM e as demais distribuídas entre as outras séries do EF2. Na escola C, onde Gabriel exercia a docência como professor especialista de matemática do 1º ano do EM, sua carga horária era de 10 horas semanais. A Escola C, também é privada, está localizada na zona sul da cidade de São Paulo, em um bairro que faz divisa com as cidades do grande ABC paulista, e é voltada a uma população de poder aquisitivo médio. Durante a realização da visita, a instituição contava com cerca de 700 alunos distribuídos nos níveis do EF2 e EM e seguia uma proposta pedagógica apostilada.

Questionado inicialmente a respeito do preenchimento do diário de bordo, Gabriel informou não ter tido tempo para fazer suas anotações, nem tampouco ter por hábito tomar notas tão detalhadas a respeito de seu trabalho. O pesquisador voltou a pedir que Gabriel procurasse utilizar o diário de bordo a partir de então, e mais uma vez esclareceu ao professor sobre a importância das anotações para sua investigação. No entanto, mesmo assim, o professor não se comprometeu a manter o diário de bordo.

Conforme planejado, foi solicitado que o participante refletisse sobre seu trabalho documental, confeccionando um esboço esquemático dos recursos que costumava empregar para introduzir função no 1º ano do EM. A RESR elaborada

por Gabriel pode ser observada na Figura 47 e se refere à maneira como ele preparava essa aula na Escola C, onde era professor especialista.

Figura 47 – RESR de Gabriel



Fonte: Produzido Por Gabriel.

No esboço elaborado por Gabriel, é possível perceber a existência de uma hierarquia, simbolizada pela numeração, que evidencia uma sequência de acontecimentos. Ao longo da entrevista, após a confecção do esboço, foi possível identificar que o item número 2 da RESR relacionava-se a um conjunto de dúvidas produzidas pelos estudantes ao longo das aulas, às quais eram consideradas essenciais para o processo de elaboração de suas aulas. Gabriel esclareceu também que o item número 3 do esboço referia-se aos recursos ‘videoaula e caderno com exercícios resolvidos dos principais vestibulares’, igualmente empregados por ele no preparo da introdução ao ensino de função.

As informações obtidas pelo esboço da RESR, a entrevista e conversas subsequentes possibilitaram elaborar a hipótese de que as dúvidas provenientes dos estudantes durante a realização das aulas, as videoaulas e dos exercícios resolvidos oriundos dos principais vestibulares consistiam em um conjunto de recursos-mãe para introduzir o ensino de função. De acordo com Hammoud (2012, p. 47, tradução nossa), “a identificação do recursos-mãe e do recurso-filho permite definir o conjunto inicial dos recursos mobilizados para preparar um determinado curso”.

Nesse sentido, com o intuito validar tal hipótese, foi solicitado a Gabriel que relatasse pormenorizadamente como utilizava esses recursos no preparo de suas aulas para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM. Ele informou que costumava iniciar o ensino preparando uma aula cujo tema principal era a noção de notação, pois considerava o assunto fundamental para a compreensão de

função, já que havia percebido, em anos anteriores, haver lacunas na aprendizagem do tema. Inferiu-se, portanto, que, ao longo de sua atividade profissional para introduzir o ensino de função, Gabriel desenvolveu um esquema documental cujo invariante ‘é importante para os estudantes compreender notação de função’ constituía-se em um de seus traços.

Durante a entrevista foi possível observar ficha preparada pelo professor, contendo uma tabela com alguns valores de “y” para a expressão $y = x + 1$ e, nela, uma solicitação para que os estudantes efetuassem seu preenchimento de forma a explorar a notação. Observou-se também que a ficha trazia uma solicitação adicional para que os estudantes construíssem gráficos dessas expressões com auxílio do *GeoGebra*. Segundo o professor, a utilização do software foi pensada no sentido de auxiliar os estudantes no desenvolvimento da capacidade de pensar não em termos de ‘eixos x e y’, mas estabelecendo uma correspondência entre os valores de ‘x em $f(x)$ ’, o que hipoteticamente favoreceria a apropriação da notação.

Questionado sobre as razões dessa escolha, Gabriel respondeu que a ficha tinha o objetivo de pautar o ensino da notação de função e, com isso, não apenas antecipar o enfrentamento de possíveis dúvidas dos estudantes a esse respeito, como também continuar com o planejamento traçado para introduzir seu ensino. O professor salientou que os exercícios da ficha eram atualizados sempre que possível, mediante consultas que fazia a videoaulas provenientes da internet, ou com base na seleção de um banco com questões resolvidas por ele de alguns vestibulares nacionais.

Apesar de a Escola C ser totalmente apostilada, Gabriel relatou que era possível introduzir o ensino de função, considerando a notação, pois após utilizar a ficha, procurava seguir orientações para formalizar a definição de função, seguida do trabalho com as noções de domínio, contradomínio e imagem, permeado pela resolução de exercícios em sala ou como tarefa para casa de modo que os alunos fixassem os conhecimentos.

Gabriel acrescentou que, para contemplar as exigências da instituição quanto ao uso da apostila, recentemente havia elaborado um roteiro contendo uma sequência didática sobre o que deveria ser abordado nas aulas, apoiada na estrutura do material apostilado. Como os exercícios da apostila eram, em sua

maioria, provenientes de vestibulares nacionais, utilizava um caderno particular, contendo uma série de exercícios resolvidos desses exames, além de incluir outros, provenientes de dúvidas que os estudantes manifestavam durante o transcorrer das aulas sobre função.

Cabe salientar, por outro lado, que as funções utilizadas na ficha e no roteiro, mencionadas pelo professor, tinham predomínio daquelas de funções afim com uma única sentença, como também sua representação gráfica era dominada por comportamentos linear e contínuo.

Como até aquele momento Gabriel não havia feito qualquer alusão à sua experiência com trabalho coletivo, o pesquisador procurou questioná-lo a esse respeito e obteve a informação de que, na Escola C, essa experiência resumia-se à participação em reuniões bimestrais, apenas com o objetivo de debater as notas obtidas pelos estudantes. Já na Escola A, o professor relatou duas experiências coletivas-em detalhes: o trabalho com uma psicopedagoga e a participação em um projeto de adequação curricular à BNCC.

Em relação ao trabalho com a psicopedagoga, Gabriel forneceu informações sobre a elaboração de materiais destinados a estudantes com dificuldades na aprendizagem em função, que contaram com a orientação da profissional. Segundo ele, a natureza desse material dependia muito do tipo de dificuldades que o estudante apresentava. Em 2018, por exemplo, eles adaptaram uma lista de exercícios produzida pelo professor especialista, inserindo comandas mais simples e diretas para um estudante que tinha dificuldades na interpretação de enunciados.

Em relação ao projeto de adequação curricular à BNCC, Gabriel explicou que ainda o trabalho estava em curso e ressaltou que todas as disciplinas necessitariam reformular suas concepções de área, planos de ensino anuais e sistemas de avaliação. No caso matemática, relatou que havia participado de encontros com seus colegas do EF2 e EM, para que alinhassem o processo de transição entre os níveis de ensino e discutissem uma concepção comum para a área. Ele ressaltou que, durante as discussões, foi planejada a adoção de novos livros didáticos, pois, de acordo com a nova BNCC, a introdução do ensino de função passa a ocorrer no início do 9º ano do EF2.

Usando seu computador pessoal, Gabriel acessou uma pasta compartilhada na rede de computadores da Escola A e exibiu um arquivo que pode ser observado na Figura 48. Nela observa-se a estrutura de um plano curricular anual de matemática, parte do projeto de adequação curricular à BNCC com algumas anotações pessoais (entre parênteses) destinadas a nortear sua intervenção em uma reunião futura com os colegas da área.

Figura 48 – Máscara com anotações do plano anual de matemática da Escola A



Plano Anual

Nome da Disciplina – Nome do Professor – Série/Ano Ano letivo –

1- Conceção da área/disciplina:
(Incluir na concepção o tópico “Princípios e Valores relacionados à disciplina”)

2- Competências e habilidades indicadas na relação disciplina/série.

3- Conteúdo acadêmico programado para cada trimestre: (Quando houver relação entre o eixo temático e a disciplina, descrever)

4- Estratégias didáticas:
(Tópico mais extenso do plano. Aqui, deve-se falar sobre tecnologias, tarefas de casa, recuperação paralela, produções de escrita/leitura/oralidade, tipos de aula, trabalho em grupo, caderno, reescrita (auto)crítica, dentre outros)

5- Critérios de avaliação

6- Instrumentos de avaliação:

7- Recuperação contínua/Apoio a aprendizagem:

Áreas extras do plano anual de matemática:

- “Fluxograma”: sequência de conteúdos em uma sequência, interligados por linhas, demonstrando quais conteúdos prévios são necessários para um próximo tema, e definindo portanto sua importância para o currículo do ano.
- Cenários de Investigação: de acordo com o texto base, de mesmo nome, escolhido pelo grupo de professores (SKOVSMOSE, Ole), o cenário de investigação é um ambiente aberto que envolve a realidade, onde os alunos possam se aventurar “livremente”, e a partir de necessidades que surgirem, os conteúdos permeiam a investigação.

Fonte: Produzido por Gabriel.

Ainda que a conversa sobre o plano anual elaborado pelo professor Gabriel não tivesse trazido novos elementos que sugerissem impactos em seu sistema de recursos para introduzir o ensino de função, observou-se que o trabalho documental era baseado em uma ampla variedade de recursos.

Em face da ficha com ênfase em notação produzida por Gabriel aparentemente ter sido utilizada por mais de um ano letivo, inferiu-se que o material tinha características de um documento, já que também foi possível identificar pelo menos um esquema atribuído a seu uso. Por outro lado, conjecturou-se que os

recursos-mãe utilizados pelo professor para introduzir o ensino de função eram constituídos por dúvidas produzidas pelos estudantes, videoaulas disponíveis na internet, exercícios resolvidos aplicados em vestibulares nacionais e ainda a apostila da Escola C. Deduziu-se ainda que o roteiro mencionado pelo professor possivelmente representava um recurso-filho, devido a seu emprego recente.

A seguir será apresentado a análise dos dados obtidos durante a visita inicial realizada com o sujeito de pesquisa Lucas ocorrida na Escola A.

6.4.2 VISITA AO SUJEITO DE PESQUISA LUCAS

A visita e a entrevista semiestruturada com Lucas ocorreu na biblioteca da Escola A, teve duração aproximada de 60 minutos e foi agendada com antecedência por meio da troca de e-mails e mensagens na plataforma *WhatsApp*. Assim como feito com Gabriel, o pesquisador solicitou que o professor comparecesse ao encontro munido dos recursos que costumava utilizar na preparação de suas aulas sobre função e do diário de bordo preenchido. Relativamente ao diário, observou-se que seu preenchimento sequer havia sido iniciado, e o professor alegou não ter compreendido as instruções no *Moodle*. Após o esclarecimento a respeito da importância do mesmo para a pesquisa, mesmo sem muita convicção, Lucas prometeu elaborar o diário a partir de então.

A instituição em que Lucas trabalhava é a mesma em que Gabriel exercia a docência. Na Escola A, Lucas era professor especialista de matemática, com uma carga horária semanal de 25 horas, distribuídas entre os anos finais do EF2 (8º e 9º anos - alunos de aproximadamente 13 a 14 anos) e o 1º ano do EM. No transcorrer da entrevista, e conforme planejado, Lucas foi convidado a esboçar um diagrama que representasse os recursos que normalmente utilizava para introduzir função no 1º ano do EM e o fez recorrendo a um editor de textos disponível em seu notebook pessoal, como pode ser observado na Figura 49.

Figura 49 – RESR de Lucas



Fonte: Produzido por Lucas.

O professor participante esclareceu que os recursos identificados pela cor azul na Figura 49 simbolizavam aqueles utilizados na preparação de suas aulas, enquanto os de cor amarela eram empregados durante sua execução. De maneira similar a Gabriel, foi possível observar no esboço uma estrutura hierárquica que, a princípio, apontava como recursos-mãe aqueles representados na cor azul. Para compreender melhor essa estrutura e a maneira como pretensamente o professor combinaria os recursos hipoteticamente identificados como recursos-mãe, foi solicitado que ele detalhasse seu uso no processo de introdução ao ensino de função no 1º ano do EM.

Durante a entrevista percebeu-se que Lucas havia desenvolvido, ao longo do tempo, uma estratégia própria para introduzir função, influenciado por sugestão de colegas da Escola A que considerava mais experientes. Cabe salientar que esse recurso não esteve presente no esboço de sua RESR apresentado na Figura 49, e sua identificação só foi possível por meio da entrevista.

Conforme foi possível depreender durante a visita, a estratégia de ensino utilizada por Lucas tinha início por uma revisão do sistema de coordenadas cartesianas, seguida do trabalho com as noções de conjuntos, noção de função, lei de formação, definição formal de função, domínio, contradomínio e imagem. Lucas relatou que, para viabilizar a estratégia planejada, procurava implementar algumas indicações de seus colegas, que sugeriram a ele permear todo o processo de introdução ao ensino de função, valendo-se de um exemplo oriundo do cotidiano relacionado ‘a corrida de táxi’, pelo fato de o mesmo ser de simples compreensão por parte dos estudantes.

As afirmações feitas por Lucas de que o emprego do exemplo sobre corrida de táxi era a maneira mais fácil de os alunos compreenderem a função pareceu ser um indício da existência de um invariante operatório pertencente a um esquema documental desenvolvido por ele ao longo de sua experiência profissional, com o objetivo de introduzir função no 1º ano do EM.

Para explicar em detalhes como procedia para introduzir o ensino de função, ele localizou em seu notebook uma apresentação criada com ajuda do programa *PowerPoint* contendo um enunciado do problema sobre a corrida de táxi, que havia sido empregada em suas aulas nos dois últimos anos letivos. Ele informou que, após projetar o arquivo com ajuda de um datashow, passava a resolvê-lo com auxílio de lousa e do giz para que os estudantes pudessem acompanhar ‘a mecânica envolvida no processo de resolução’ do problema. O planejamento da aula também incluía a construção da representação gráfica dessa função, feita exclusivamente por ele com auxílio do *GeoGebra*, bem como a aplicação de alguns exercícios disponíveis em livros didáticos.

Após essa etapa, Lucas ponderou considerar fundamental que os estudantes se apropriassem da noção de função de maneira mais autônoma e sem depender exclusivamente das iniciativas do professor. Para tanto, decidiu fazer uma experiência no ano letivo de 2018, quando estruturou um ambiente virtual do tipo *Moodle* para apoiar os estudos dos alunos num conjunto de links de acesso às listas de exercícios preparados em anos anteriores e a videoaulas sobre função ou temas correlatos, como, por exemplo, a ideia de conjuntos.

No transcorrer da visita, Lucas exibiu, em seu computador, a estrutura do ambiente *Moodle* com os links do que havia preparado em 2018 para apoiar o estudo de funções do 1º ano do EM. Um dos acessos direcionava para um conjunto de videoaulas disponibilizadas no site intitulado ‘*maismatemática*’. Questionado sobre a relevância de sua utilização, o professor argumentou considerá-las adequadas para as necessidades de seu curso, além de criarem condições de aprendizagem para a obtenção de bons resultados nos vestibulares nacionais e no ENEM.

Outros links do ambiente *Moodle* demonstraram direcionar os estudantes para listas de exercícios elaboradas por Lucas em anos anteriores e para arquivos

desenvolvidos com auxílio do *GeoGebra* que continham representações gráficas de diversos tipos de funções com o fim de auxiliar o processo de visualização. Ele explicou que as listas eram preparadas em sua residência, disponibilizadas no ambiente virtual para apoiar a fixação do conteúdo, juntamente com exercícios provenientes de vestibulares nacionais, além de livros didáticos de sua propriedade que eram digitalizados e utilizados conforme suas necessidades.

Durante a visita, o professor também exibiu parte de seu plano de estudos, implementado no ano de 2018 e exibido na Figura 50, sendo possível observar como o ensino da temática foi organizado sequencialmente. No ano letivo de 2019, o professor pretendia disponibilizar aos estudantes essa estrutura atualizada, com a inserção de outras videoaulas encontradas pelo professor na internet.

Ao ser questionado sobre a maneira como o plano tinha sido elaborado e qual sua importância para a introdução de função para o 1º ano do EM, Lucas relatou tratar-se de uma construção coletiva que envolvia a participação dos professores especialistas de matemática que trabalhavam com ele na Escola A. Segundo seu relato, pelo menos uma vez por mês o grupo se reunia para debater estratégias, desenvolver projetos pedagógicos a respeito da disciplina e trocar experiências sobre situações de aprendizagem com os estudantes.

Figura 50 – Plano de estudos sobre o ensino de função elaborado por Lucas em 2018

Objetivos da aprendizagem (conteúdo)

- Conceitos Primitivos da Teoria dos Conjuntos;
- Representação de um conjunto;
- Representação tabular, Representação por um diagrama de Venn, Representação por uma propriedade;
- Conjunto unitário e conjunto vazio, e conjunto Universo;
- Conjunto finito e conjunto infinito;
- Subconjunto e propriedades;
- União e propriedades da união;
- Intersecção e propriedades da intersecção;
- Diferença de conjuntos e propriedades da diferença de conjuntos;
- Conjunto Complementar e Complementar de um conjunto em relação a um universo;
- Problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos;
- Conjunto dos números naturais (N), inteiros (Z), racionais (Q), irracionais (R-Q) e reais (R);
- O eixo real;
- Intervalos reais;
- Sistemas de coordenadas;
- O conceito de função;
- A noção de função no cotidiano;
- Formalização do conceito de função;
- Relação entre conjuntos;
- Imagem de x pela função f ;
- Reconhecimento de uma função por análise gráfica;
- Função real de variável real;
- Estudo do domínio de uma função real de variável real;
- Raiz de uma função;
- Variação do sinal de uma função.

Fonte: Produzido por Lucas.

Nesse sentido, dois trabalhos desenvolvidos coletivamente foram mencionados por Lucas, um primeiro referente a um projeto, desenvolvido em 2018 sobre um tópico da matemática que visava iniciar o estudante no trabalho de pesquisa, e outro, referente à preparação para as Olimpíadas de Matemática. Paralelamente, os integrantes desse coletivo integrado pelos professores de matemática da Escola A também procuravam trocar informações em um grupo de *WhatsApp* a respeito de problemas e desafios matemáticos que eventualmente poderiam ser utilizados em suas aulas.

De acordo com as informações coletadas durante a visita, acrescidas daquelas obtidas na entrevista e do esboço da RESR, foi possível constatar que Lucas priorizava a introdução ao ensino de função recorrendo, essencialmente, a função afim com uma única sentença. Da mesma forma, foi possível inferir que o trabalho documental de Lucas estava alicerçado em uma ampla gama de recursos, e que a regularidade com que usava apresentação construída com auxílio do programa *PowerPoint* a respeito de uma corrida de táxi poderia indicar a presença de um documento, reforçada pelo fato da identificação de um esquema documental desenvolvido pelo professor ao longo de sua atividade profissional.

Tais informações levaram a inferir que o trabalho coletivo desenvolvido com os colegas de área, as fichas com problemas resolvidos de vestibulares, os livros didáticos e as videoaulas constituíam-se seus recursos-mãe, enquanto os arquivos do *GeoGebra* disponibilizados no ambiente *Moodle* voltado ao aprimoramento da aprendizagem da introdução ao ensino de função constituía um recurso-filho.

A seguir será apresentada a análise dos dados obtidos durante a visita inicial realizada com o sujeito de pesquisa Luiz ocorrida na Escola B.

6.4.3 VISITA AO SUJEITO DE PESQUISA LUIZ

Os procedimentos empregados para compreender o trabalho documental de Luiz foram os mesmos utilizados nas visitas realizadas aos outros dois sujeitos de pesquisa, quais sejam verificar quais recursos empregados e quais os conhecimentos o professor utilizou na introdução ao ensino de função no 1º ano do EM.

Luiz trabalhava na Escola B, é pública, vinculada ao estado de São Paulo e localizada em um município da grande São Paulo chamado Embu-Guaçu. A escola é especialmente frequentada por alunos cujas famílias têm baixo poder aquisitivo e residem nas redondezas da instituição. Na época da visita ao professor, a escola contava com cerca de 1850 alunos, distribuídos nos três níveis de ensino da educação básica e funcionava nos turnos diurno e noturno, sendo o último destinado apenas a estudantes do EM. Luiz exercia a função de professor especialista de matemática e sua carga horária semanal era de 40 horas, distribuídas entre o 9º ano do EF2 e o 1º e 2º anos do EM.

A visita teve lugar na sala dos professores da instituição, teve duração aproximada de 60 minutos e, assim como ocorrido com os outros dois sujeitos de pesquisa, foi previamente organizada por meio do envio de e-mails e mensagens na plataforma *WhatsApp*. Foi durante a troca de mensagens que o pesquisador solicitou que Luiz comparecesse à entrevista munido de notas sobre os recursos que costumava utilizar em suas aulas para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM, além do diário de bordo preenchido. De maneira similar aos outros dois sujeitos de pesquisa, Luiz argumentou não ter encontrado tempo suficiente para o preenchimento do diário de bordo, bem como não assegurou seu preenchimento para o futuro.

Conforme planejado, no transcorrer da visita foi realizada uma entrevista semiestruturada, em que inicialmente foi solicitado ao professor que produzisse um esboço esquemático (Figura 51) dos recursos normalmente utilizados para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM.

É possível perceber no esboço (Figura 51) elaborado por Luiz que a sala de aula ocupa um lugar central na estrutura hierárquica de recursos imaginada pelo professor. Nesse sentido, os itens localizados acima desse recurso provavelmente são recursos utilizados para elaborar suas aulas, enquanto os da parte inferior referem-se a cenários vivenciados dentro da sala de aula.

Figura 51 – RESR de Luiz



Fonte: Produzido por Luiz.

Ao longo da entrevista, Luiz esclareceu que, para introduzir o ensino de função, costumava partir de uma revisão sobre álgebra, pois os estudantes oriundos do EF2 chegavam ao EM com lacunas no aprendizado; só posteriormente, o professor selecionava algumas situações-problema para iniciar o processo de ensino do tema. O critério utilizado por ele para selecionar as situações-problema dependia do engajamento dos estudantes com a matemática, tornando tal ação um traço do esquema documental desenvolvido pelo professor. Luiz relatou dispor de várias situações-problema resolvidas ao longo dos anos de docência, que tinham diferentes níveis de dificuldade e estavam prontas para serem utilizadas, caso ele julgasse conveniente.

No ano de 2018, por exemplo, além do uso dos materiais disponibilizados pela apostila do Estado de São Paulo, o participante relatou ter utilizado duas situações-problema para introduzir o ensino de função: a primeira tratava da

tarifação de uma corrida de táxi, e a outra referia-se à equação horária de um movimento desenvolvido por um automóvel. A intenção foi, paralelamente ao estudo de função, aparelhar os estudantes do 1º ano do EM para aprenderem o movimento retilíneo na disciplina de física, o que, segundo ele, é preconizado pela nova BNCC.

Em 2019, entretanto, como o grupo do 1º ano do EM, segundo Luiz, ‘era muito difícil e não gostava de matemática’ (ele havida sido professor das turmas classes no ano anterior), suas expectativas não eram muito favoráveis. Sendo assim, ele tendia apenas a utilizar a tarifação da corrida de táxi, por considerar que o exercício auxiliaria os estudantes a compreender a noção de função. Essa decisão do professor possibilitou inferir a existência de um segundo esquema documental, no qual procurava enfatizar o uso da linguagem formal da matemática. Sendo assim, ele ensinava a noção de notação aos estudantes, e, sempre que possível proporia atividades sobre a construção de gráficos utilizando o *GeoGebra* ou mesmo acessando o *site Geek Lab*²⁷, já que dispõe de um banco de questões voltadas aos vestibulares nacionais.

Ao longo da visita, o professor disponibilizou uma das provas aplicadas no ano anterior, após ter introduzido o ensino de função, em que foi possível constatar uma ênfase excessiva em funções afim e linear. Ele relatou que as questões eram de múltipla escolha para que os estudantes se acostumassem com as provas dos vestibulares nacionais. Além desse, outros dois recursos elaborados por ele para introduzir o ensino de função também foram disponibilizados durante a visita: um trabalho sobre conjuntos numéricos que foi produzido de acordo com a seleção de problemas disponíveis em livros didáticos, e outro, exclusivamente sobre gráficos adaptado de problemas relacionados ao campo da física.

Foi possível perceber também que o professor recorreu a outras estratégias de ensino, como propor trabalhos em grupo, ou aulas dialogadas em outros ambientes, como o laboratório de informática. Durante o trabalho no laboratório de informática, por exemplo, Luiz relatou que procurava introduzir o

²⁷ O *Geekie Lab* é uma plataforma de aprendizagem adaptativa desenvolvida pela *Geekie*. Disponível em: <<https://site.geekie.com.br/blog/cinco-perguntas-respondidas-sobre-o-geekie-lab/>>. Acesso em: 23 janeiro de 2020.

ensino de função valendo-se de questões provenientes de vestibulares e do ENEM, que eram previamente selecionadas e apresentadas aos estudantes com auxílio do programa *PowerPoint*.

Questionado sobre sua experiência com o trabalho coletivo, o professor informou participar de reuniões periódicas com colegas da área de matemática, com o objetivo de debater temas como os documentos curriculares do estado de São Paulo ou a BNCC. Porém, segundo ele, a instituição não proporcionava ocasiões para a troca didática entre os professores a respeito de questões relacionadas ao ensino de matemática.

A estrutura do sistema de recursos de Luiz, representada no esboço de sua RESR, e ampliada com base na entrevista, permite inferir que seu trabalho documental estava apoiado numa ampla variedade de recursos articulados entre si.

Após a visita, foi possível inferir ainda que as situações-problema selecionadas por Luiz ao longo dos anos de atividade profissional, possivelmente, constituíam-se em documentos, dada sua utilização ter sido empregada com regularidade e ao fato de terem sido identificados dois esquemas documentais associados a esse uso. Por outro lado, a apostila disponibilizada pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, o *GeoGebra*, o *Geek Lab* e as questões resolvidas dos vestibulares e ENEM constituíram-se em seus recursos-mãe, enquanto provas e apresentações em *PowerPoint*, alguns de seus recursos-filho.

A seguir são apresentadas considerações sobre as informações obtidas ao longo da fase de preparação da formação continuada.

6.4.4 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA FASE DE PREPARAÇÃO

A aplicação dos questionários informativos possibilitou elaborar um perfil pessoal e profissional dos participantes da formação e com isso identificar convergências e discrepâncias acerca de cada um dos cinco temas investigados. Em relação aos sujeitos de pesquisa, observou-se que Luiz possuía ampla experiência profissional enquanto Gabriel e Lucas eram professores em início de carreira. Além disso, foi possível constatar que os três professores tinham em comum o fato de considerarem que as TIC exerciam um papel secundário em suas

aulas, além da existência de trabalho coletivo nas instituições de ensino em que exerciam a docência.

As sugestões propostas por Gueudet e Trouche (s/d) vão no sentido de que as visitas guiadas para conhecer os recursos dos professores ocorressem, preferencialmente nas residências dos sujeitos de pesquisa, haja vista presumir-se ser o local em que, provavelmente, se encontrariam os recursos empregados no ensino de função. No entanto, foi necessário realizar uma adaptação a tal encaminhamento, pois os professores ofereceram resistência a que isso acontecesse. Atribuiu-se tal comportamento a razões de ordem cultural, o que fez com que as visitas fossem feitas nas escolas em que os sujeitos exerciam sua atividade profissional.

A simples produção da RESR não foi suficiente para compreender a estrutura de sistemas de recursos dos sujeitos de pesquisa. Nesse sentido, a confrontação do esboço feito pelos professores com os dados obtidos ao longo da visita inicial e da entrevista, não apenas possibilitou uma melhor compreensão desse sistema como permitiu a identificação de recursos-mãe e recursos-filhos, bem como de documentos e esquemas envolvidos no processo de introdução do ensino de função no 1º ano do EM. Observou-se, por outro lado, que os três sujeitos de pesquisa tinham em comum o fato de articular recursos-mãe provenientes de exercícios resolvidos dos vestibulares nacionais, livro didático e/ou apostilas, corroborando observações encontradas a esse respeito e elencadas na seção 2.1.

Durante a visita inicial, as entrevistas e a análise dos dados obtidos no fórum de discussão, foi possível observar que os três sujeitos de pesquisa introduzem o ensino de função por meio de escolhas que recaem no uso de funções afim como uma única sentença, e, quando exploram sua representação gráfica, preferem gráficos cuja função apresenta comportamento regular e contínuo, corroborando com as observações apresentadas ao longo dos estudos preliminares.

Em relação aos tipos de recursos curriculares utilizados pelos professores para introduzir o ensino de função, percebeu-se não existir o predomínio de um determinado tipo em detrimento de outros, mas sim a combinação de vários deles com esse objetivo.

A seguir são apresentadas as análises dos dados obtidos durante a fase de execução da formação continuada que teve seu início marcado pela etapa de elaboração coletiva que se segue.

6.5 ETAPA DE ELABORAÇÃO COLETIVA

A etapa de elaboração coletiva desenvolveu-se ao longo de 7 encontros presenciais que foram organizados da seguinte forma: no dia 24/08/2019 desenvolveu-se a situação de reflexão, seguido da vivência da situação de formação nos dias 31/8, 21/9, 28/9 e 05/10/2019 e, por fim, da situação de organização nos dias 19/10 e 26/10/2019.

A seguir são analisados os dados obtidos durante a experimentação da situação de reflexão.

6.5.1 SITUAÇÃO DE REFLEXÃO

A situação de reflexão denominada 'refletir sobre a introdução do ensino de função no 1º ano do EM por meio da elaboração de uma SD' foi planejada dentro da classe de situações 'refletir sobre a introdução do ensino de função por meio da elaboração de uma SD' e teve por intuito estimular os professores a refletir sobre suas escolhas ao introduzir o ensino de função tendo como pretexto a construção de uma SD e mediante a utilização de recursos livremente selecionados por eles.

Para viabilizar a situação de reflexão e favorecer o acompanhamento contínuo e reflexivo do trabalho documental, bem como a coleta dos recursos produzidos, foi elaborada a OI-1, cujos detalhes são apresentados a seguir.

6.5.1.1 OI-1

Na presente seção são apresentados, pela ordem, a configuração didática e o modo de execução planejados para viabilizar a situação de reflexão, seguidos do desempenho didático alcançado pelo planejamento da OI-1.

Configuração Didática da OI-1

A situação de reflexão foi planejada para acontecer em um encontro presencial com duração de 3 h no campus da PUC-SP em 24/08/2019. Para

preparar e dar suporte às discussões do encontro, ao longo da semana que precedeu sua realização, foi organizado o 2º fórum de discussão coletiva no ambiente *Moodle*.

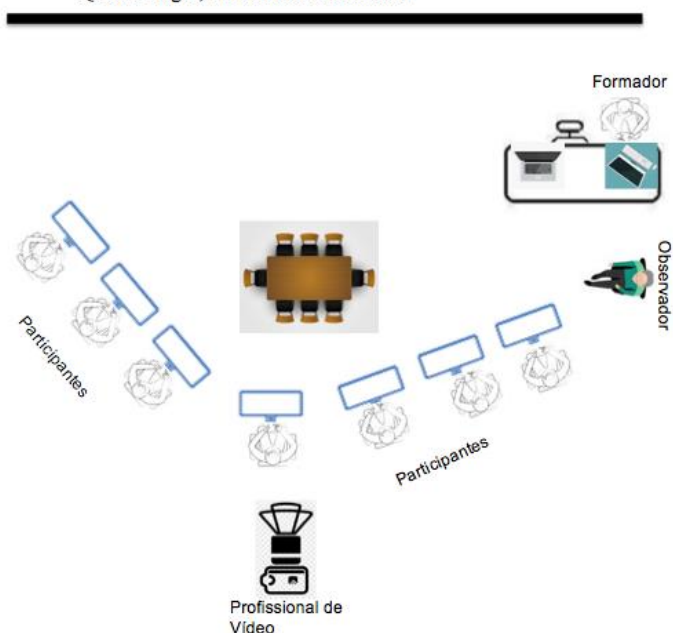
Inferiu-se supostamente que as postagens feitas pelos participantes desse fórum de discussão teriam o predomínio de atividades oriundas do livro didático e/ou apostilas e que tais recursos estariam eventualmente articulados com outros, de origem tecnológica, como por exemplo, uma aplicação do programa *GeoGebra*, visto que assim apontaram os estudos realizados ao longo da revisão bibliográfica apresentada na seção 2.3.

Por outro lado, esperava-se que as contribuições produzidas no 2º fórum de discussão aliadas a discussões planejadas para ocorrer ao longo do encontro presencial possibilitariam a mobilização de recursos e esquemas por parte participantes, de modo a proporcionar a elaboração da SD. Esta, por sua vez, serviria de pretexto para o formador questionar as escolhas feitas como introdução ao ensino de função – possivelmente composta por funções afim com uma única sentença –, abrindo caminho para a discussão acerca da importância da FVSM.

A organização do espaço físico para a realização do encontro presencial foi planejada de acordo com a Figura 52.

Figura 52 - Panorama da OI-1 (encontro presencial)

Quadro Negro, Tela Branca e *Datashow*



Fonte: Produção do autor.

Na Figura 52 é possível identificar a disposição inicial do grupo de participantes: o pesquisador exercendo a função de formador, o participante observador e um profissional de vídeo cuja tarefa consistiu em fazer o registro em áudio e vídeo do encontro. Também outros materiais, como lousa, giz, papel, lápis, borracha, caneta e acesso à internet foram disponibilizados aos professores como apoio à realização da situação de reflexão.

Modo de Execução da OI-1

A fim de que as discussões no fórum tivessem êxito, os participantes foram orientados pelo formador por meio do envio de e-mail e mensagens no grupo WhatsApp, que deveriam acessar o ambiente *Moodle* pelo menos em duas oportunidades: na primeira, para descarregar a(s) SE escolhida(s) para integrar a SD, acompanhado da (s) justificativa(s) para tal escolha e, na segunda, para responder a questionamento(s) acerca de contribuições elaboradas pelo formador e/ou outros participantes.

Estabeleceu-se que o período de contribuições ao 2º fórum de discussão deveria ocorrer entre os dias 16 a 23/8/2019.

Em razão do número reduzido de participantes, o trabalho foi organizado em um único grupo e os participantes foram informados pelo formador de que, na hipótese de alguma ausência, seria possível participar do encontro por meio de conexão remota viabilizada pelo aplicativo de comunicação *Skype*.

A dinâmica de execução do 1º encontro presencial realizado após o 2º fórum de discussão no *Moodle* foi pensada considerando-se o fato de ser a primeira ocasião em que todos se encontrariam na PUC-SP. A fim de organizar essa dinâmica e proporcionar a produção da SD, bem como estimular reflexões sobre as escolhas ao introduzir o ensino de função, organizou-se a seguinte pauta de trabalho:

- ✓ Apresentação: 5 minutos;
- ✓ Diários de Bordo: 15 minutos;
- ✓ Resgate das contribuições no fórum virtual: 45 minutos;
- ✓ Elaboração coletiva da SD: 60 minutos;
- ✓ Debate sobre a produção da SD: 45 minutos e

✓ Planejamento futuro: 5 minutos.

A fim de que os professores tivessem a oportunidade de conhecer detalhes a respeito da organização e funcionamento da formação, além de se conhecerem formalmente, foi planejada uma apresentação inicial com tempo aproximado de 5 minutos. Em razão de resistências quanto ao uso do diário de bordo, na sequência às apresentações, o formador esclareceu os docentes sobre a importância para o processo de coleta de dados da investigação.

Para dar início ao processo de elaboração da SD, foram reservados 45 minutos, destinados ao resgate de cada uma das contribuições feitas pelos participantes no 2º fórum de discussão virtual e outros 60 minutos para sua produção, em que seria possível a utilização de quaisquer recursos. Como se estabeleceu que a SD seria alicerçada em funções afim, com uma única sentença e por meio da articulação de diversos recursos, um debate mediado pelo formador foi planejado, com tempo de 45 minutos, com o intuito de provocar reflexões sobre as escolhas para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM e como pretexto para abordar a importância da FVSM. Após o debate, foram destinados cinco minutos para o formador informar ao grupo as próximas ações.

Quanto à execução da situação de reflexão, planejou-se que os dados seriam obtidos da seguinte forma: 1) vídeo operado por um profissional em comunicação, cuja câmera seria colocada em local estratégico da sala de aula, com de modo a captar as interações entre os participantes; 2) áudio recolhido com auxílio do telefone celular do pesquisador e do profissional em comunicação; 3) protocolo de observação (Apêndice A) preenchido por um observador para documentar o trabalho dos sujeitos de pesquisa; 4) diálogos escritos pelo grupo no 2º fórum de discussão virtual e durante o encontro presencial e 5) recursos mobilizados e/ou produzidos.

Para analisar os dados à luz do referencial teórico da ADD, planejou-se confrontar o conteúdo obtido por meio de áudio e vídeo com as notas produzidas pelo observador a fim de identificar esquemas documentais e recursos mobilizados para a produção da SD, com o propósito de produzir inferências a respeito do trabalho documental proporcionado pela vivência da situação de reflexão.

Desempenho Didático da OI-1

O 1º encontro presencial contou com a participação de todos os professores (as), com exceção da professora Fabíola, que comunicou não poder comparecer devido ao nascimento recente de sua filha.

Como planejado, a pauta dos trabalhos foi projetada pelo formador em uma lousa, seguida de explicação sobre a maneira como se daria a organização e o funcionamento da formação continuada. Nessa ocasião, foram informadas as datas de realização dos encontros presenciais e dos fóruns de discussão virtual.

O primeiro ponto debatido com o grupo de participantes foi a respeito do trabalho com o diário de bordo, já que nas visitas realizadas aos sujeitos de pesquisa durante a fase de preparação foram identificadas resistências quanto ao seu preenchimento.

Apesar de o formador ter frisado sua importância para a coleta e a análise dos dados no contexto da investigação, observou-se que a resistência quanto a sua utilização perdurou. Diante disso, inferiu-se, naquele momento, que a origem da recusa pudesse estar relacionada à cultura do professor, avesso a informar detalhes relacionados a seu trabalho, tornando necessário ajustar o contrato metodológico com o grupo. Segundo Sabra (2012, p. 67, tradução nossa), “os momentos de ruptura do contrato são momentos de disfunção” e o fato dessa ferramenta metodológica não se adaptar às condições de trabalho dos participantes fez com que houvesse necessidade de adaptação da metodologia inicialmente planejada, levando ao abandono dessa ferramenta como estratégia de coleta de dados.

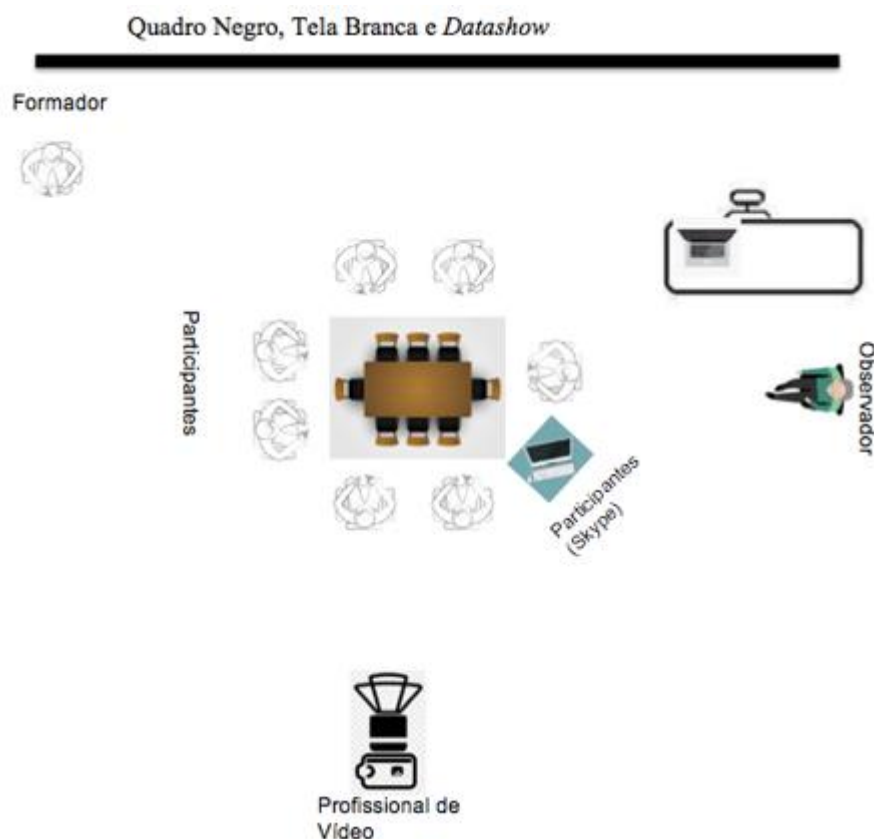
O 2º fórum de discussão virtual foi a pauta seguinte de discussão com o grupo, e dois aspectos foram observados. Por um lado, todos os professores postaram contribuições, informando possíveis situações-problema e recursos que poderiam ser utilizados em uma SD para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM, mas apenas dois deles (Gabriel e Bruno) justificaram suas escolhas. Por outro lado, a interação entre os participantes, apesar de incentivada pelo formador por meio de postagens, não se concretizou.

Em relação às contribuições feitas no fórum, o formador projetou cada uma delas em uma lousa, ocasião em que solicitou aos participantes que justificassem suas escolhas. Após ser questionado pelo formador, o sujeito de pesquisa Gabriel relatou que a proposta de introdução ao ensino de função no 1º ano do EM deveria priorizar a noção de notação pela importância de sua compreensão quanto à/para a definição formal de função, repetindo o que fora observado durante a visita presencial à escola em que trabalha. Luiz, outro dos sujeitos de pesquisa, defendeu a utilização de uma situação-problema envolvendo ‘uma corrida de taxi’, pois entendia ser de simples compreensão pelos estudantes. Lucas, por sua vez, entendeu necessário proceder inicialmente com uma revisão sobre conjuntos para só então introduzir uma situação-problema similar àquela proposta por Luiz. Os três sujeitos de pesquisa acrescentaram ainda a necessidade de se explorar a representação gráfica das funções por meio do uso de softwares como o *GeoGebra*, destacando que o uso de tecnologia é sugerido nos documentos curriculares nacionais.

Cabe esclarecer que as proposições feitas pelos sujeitos de pesquisa durante o 2º fórum de pesquisa não foram diferentes daquelas observadas durante as visitas presenciais nas escolas em que trabalhavam e tampouco divergiram dos outros participantes, alinhando-se ao que foi estipulado na hipótese inicial da situação de reflexão, isto é, de que as funções propostas pelos professores para introduzir o ensino de função obedeceriam à tendência em fazê-la por meio de funções afim com uma única sentença. A articulação entre os recursos propostos pelos professores durante as postagens também contemplou a hipótese idealizada para a situação.

Após a apresentação das postagens e das justificativas, o grupo dedicou-se à produção coletiva da SD, organizando-se em um grupo único (Figura 53) de trabalho, conforme previamente planejado.

Figura 53 - Cenário da OI-1 - grupo em trabalho (encontro presencial)



Fonte: Produção do autor.

Durante a produção coletiva da SD (Figura 53), o formador procurou descolocar-se ao longo da sala e em direção aos participantes a fim de interagir com o grupo que, por sua vez, distribuiu-se ao redor de uma mesa localizada no centro da sala de aula.

Após algumas hesitações iniciais, os professores começaram a dialogar sobre a quantidade de exercícios necessários para integrar a SD. De acordo com o diálogo transcrito a seguir, é possível observar que o grupo se demonstrou preocupado também com a quantidade disponível de aulas que teriam para introduzir o tema, com o fato de se os alunos pertenceriam a escola pública e/ou privada e com a natureza das situações-problema que poderiam integrar a SD.

Luiza: Ele (*o formador*) não falou nada de quantos exercícios é pra fazer. Fui perguntar, mas respondeu que a gente poderia decidir à vontade. Eu costumo iniciar função com no máximo dois (*exercícios*) porque fica mais fácil pra resolver depois ... e os alunos vão entender. Vocês acham que precisam mais exercícios?

Lucas: Depende, Luiza. A gente pretende o que com os exercícios? Introduzir e em seguida fazer a definição? ... Os exercícios vão ajudar a definir depois?

Luiza: Por quê? A gente define! Precisam ser exercícios simples porque o nível dos alunos no Estado ... vocês sabem.

Luiz: Tanto faz, eu acho. Nossa tarefa é construir a SD para qualquer aluno. Nós teríamos quantas aulas? A gente que define? O que vocês acham? Pode ser que a gente mesmo possa decidir isso.

Bruno: Podemos iniciar pelo problema do posto de gasolina e depois pensar em como fazer. Se vai apresentar algum mais difícil... Normalmente também dois exercícios ... Eu acho importante no primeiro, trabalhar com tabelas para que os alunos relacionem as variáveis. O segundo exercício pode trazer a geometria (*Bruno resgatou a situação-problema que postou no 2º fórum de discussão sobre Geometria, conforme segue*).

a) A diagonal (d) de um quadrado é dada em função do seu lado (x). Qual é a fórmula matemática que indica essa função?

b) O comprimento (C) da circunferência é dado em função do seu raio (r). Qual é a expressão que indica essa função?

c) O número de diagonais (d) de um polígono convexo é dado em função do número de lados (n) do polígono. Qual é a fórmula matemática que indica essa função?

As ações iniciais tomadas pelo grupo quanto à escolha por introduzir função recorrendo a temas cotidianos foi predominante, o que corrobora com observações feitas ao longo do estudo didático a respeito do ensino de função (seção 3.2) e conclusões encontradas nos estudos de Gonçalves e Allevato (2018). O recurso da situação-problema sugerido pelo participante Bruno no âmbito da Geometria Plana para introduzir o ensino de função seguiu a mesma lógica daqueles propostos pelos sujeitos de pesquisa Gabriel, Lucas e Luiz, isto é, com predomínio de funções afim e com uma única sentença, validando a hipótese estipulada para a situação de reflexão. A transcrição dos diálogos mostrou também que os professores tiveram a preocupação de abordar o processo de introdução ao ensino do tema, valendo-se de formas de representação - caso do uso de tabelas -, ratificando observações feitas nesse sentido por Elia et al. (2006).

O debate que se seguiu continuou a discussão sobre possíveis situações-problema que poderiam integrar a SD:

Gabriel: Aquele que fala do consumo, Bruno? (*Gabriel refere-se ao problema de um posto de combustíveis proposto por Bruno no fórum de debates*). Você tirou esses problemas de livros?

Bruno: Isso aí, Gabriel. Eu também acho legal porque traz a questão da base e do PCN também, né pessoal? (*Bruno refere-se à BNCC e ao PCN+*). Ah, tirei de livros, mas também da internet, esses problemas são bem conhecidos na net.

Luiza: Eu também conheço esse exercício do posto. Bem legal! Tenho um exercício sobre geometria para introduzir função que é mais fácil do que o

seu, Bruno! No Estado, a gente tem trabalhado um pouco com a geometria também, então eu acho que não tem como fugir disso ... As tabelas facilitam muito para a gente explicar e eles a relação entre as grandezas ... Dois exercícios são suficientes ... Podemos também usar esse aqui (Luiza resgata a situação-problema que propôs no 2º fórum de discussão):

Um supermercado vende produtos no atacado e no varejo, sendo que as vendas são considerados de atacado se o cliente comprar mais de 11 unidades de um mesmo produto. Sabendo que o preço de uma barra de cereal no varejo é R\$1,99 e no atacado é R\$1,65, escreva uma função definida por duas sentenças que represente o preço total Y em função da quantidade X dessa barra de cereal. Em seguida, verifique se o preço total é menor ao comprar 10 ou 12 unidades.

Observou-se na transcrição dos diálogos a existência de inquietações dos participantes nas atividades integrantes da SD que obedecessem aos preceitos existentes nos documentos curriculares nacionais. Inferiu-se que a recente implantação da BNCC no país possa ter impulsionado a escolha de atividades oriundas dos recursos do livro didático e da internet, confirmando observações realizada por Hammoud (2012) e Hammoud e Alturkmani (2018) de que alterações curriculares podem impelir o desenvolvimento da documentação e o sistema de recursos dos professores.

A transcrição dos diálogos a seguir evidencia que o grupo selou um consenso no tocante à quantidade de exercícios e ao número de aulas necessários para introduzir o ensino do tema:

Luiz: Dá para a gente discutir esse exercício (*proposto por Luiza no fórum, relacionado ao supermercado*) e mais outros. Creio que em duas aulas é possível introduzir... A maior dificuldade será eles entenderem. Vocês acham que deveríamos usar um exercício por aula?

Alfredo: Sim, eu concordo!

Gabriel: Concordo com o problema do combustível e mais outro que, sem dúvida, poderia tratar de geometria. Mas eu começaria com o do combustível e já falaria sobre relação, pensando nos conjuntos, pois mais adiante precisamos definir...

Bruno: Dois exercícios são suficientes, gente, e em duas aulas dá tempo...

A confrontação de diferentes pontos de vista observados durante o debate entre os professores trouxe, por outro lado, evidências da importância do trabalho coletivo no desenvolvimento de suas documentações, atestando o estudo desenvolvido por Losego (2015, *apud* Messaoui, 2020, p.111, tradução nossa) “de

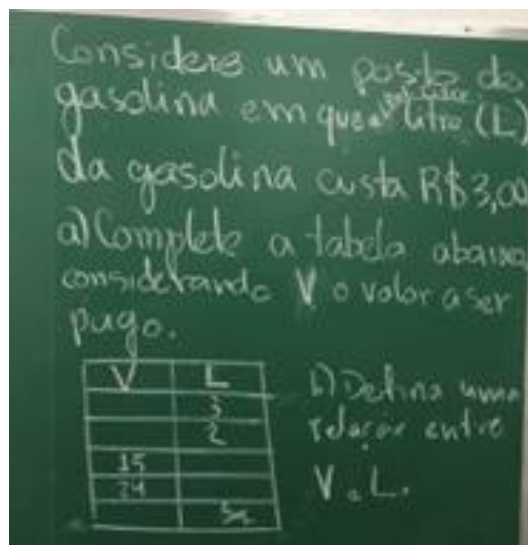
que podem se dar por meio de trocas verbais, materiais e preparação conjunta”, contribuindo para a experiência documental e ao exercício da reflexão individual.

De maneira consensual, os docentes decidiram elaborar dois problemas para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM, recorrendo fundamentalmente às sugestões trazidas pelos participantes Luiza e Bruno, que trataram de situações-problema envolvendo a geometria plana e o consumo de um posto de combustível. Eles também concordaram em que as atividades deveriam incluir o uso de tabelas a fim de facilitar a aprendizagem do tema por parte dos estudantes e que o tempo destinado à aplicação de cada uma delas deveria ser de 50 minutos. Por fim, ainda que não houvesse consenso quanto ao uso de recursos de origem tecnológica para a elaboração da representação gráfica das funções, optaram por utilizar o software *GeoGebra* para essa finalidade e decidiram que após essa etapa seria possível apresentar as noções de domínio, contradomínio e imagem e a definição formal de função.

A estrutura encontrada pelos professores em introduzir o ensino de função é similar àquela identificada no conjunto de obras didáticas investigadas no estudo didático apresentado na seção 3.2.2, cujos exemplos escolhidos para expressar as relações de funcionalidade eram completamente destoantes do nível (ensino médio). Além disso, o fato de decidirem explorar função somente por meio da forma de representação de uma tabela e relutarem ampliá-lo na forma gráfica, revela, de acordo com Even (1990, p. 521, tradução nossa), “um conhecimento superficial de seu conceito e, com efeito, um obstáculo para seu ensino”.

Posteriormente, o grupo decidiu que Luiza e Bruno escreveriam a proposta que fora construída na lousa (Figura 54), em que se pode ver o enunciado da primeira situação-problema: “Considere um posto de gasolina em que “L” é a quantidade de litros de gasolina e em que o custo unitário de cada litro do combustível é de R\$3,00”.

Figura 54 - Primeira situação-problema construída pelos participantes



Fonte: Produção de Luiza e Bruno.

A essa proposição, seguiram-se as seguintes questões:

a) Complete a tabela abaixo, considerando “V” o valor a ser pago:

V	L
	3
	2
15	
24	
	5/2

b) Defina uma relação entre “V” e “L”.

O problema 2, elaborado pelo grupo para ser resolvido na sequência, teve o seguinte enunciado:

Seja um quadrado cujo lado mede “l” e “p” é a medida de seu perímetro. Pede-se:

a) Estabelecer uma relação entre “p” e “l”. Qual seria essa relação?

b) Construa uma tabela da relação entre “p” e “l”.

Os três sujeitos de pesquisa e os participantes Luiza e Bruno monopolizaram a elaboração da SD. Para a classe de situações ‘refletir sobre a introdução do ensino de função por meio da elaboração de uma SD’, até o momento em que foi elaborada, a SD possibilitou constatar que Bruno mobilizou alguns recursos existentes em seu sistema de recursos, como a situação-problema a

respeito do posto de gasolina, e outra que tratava da diagonal de um quadrado. Da mesma maneira, Luiza encontrou em seu sistema duas atividades, uma delas a respeito de geometria, e outra sobre o supermercado, enquanto os sujeitos de pesquisa Gabriel, Lucas e Luiz mobilizaram as situações-problema sobre notação de função e a corrida de táxi.

Por meio dessa análise, também foi possível identificar o esquema documental de ação ‘preparar uma aula para introduzir função’, associado à situação proposta ao grupo. Tal esquema tem uma estrutura similar para os 5 participantes, sendo possível nele identificar um objetivo principal, objetivos secundários, regras de ação, invariantes operatórios e algumas inferências.

O principal objetivo desse esquema foi elaborar uma SD para introduzir função no 1º ano do EM, subdividido em seis objetivos secundários:

- ✓ verificar no conjunto de seus recursos quais elementos seriam considerados apropriados para essa finalidade;
- ✓ definir os objetivos da SD;
- ✓ criar um recurso com base nas informações selecionadas nos recursos consultados anteriormente;
- ✓ adaptar instruções e exercícios de acordo com os objetivos da ação;
- ✓ encontrar exercícios adicionais para alcançar os objetivos planejados e
- ✓ acompanhar o trabalho que foi realizado.

As regras de ação utilizadas para obter informações e controlar a situação, de acordo com Messaoui (2020, p. 160, tradução nossa), “estão completamente interligadas, mas permitem definir o modo operacional que dirige a atividade”. Bruno e Luiza, por exemplo, começaram fazendo um balanço dos recursos de que dispunham para essa situação e, em seguida, verificaram se os elementos existentes nesses recursos correspondiam ao que precisavam para então reutilizá-los.

Os principais parâmetros utilizados pelos cinco participantes para selecionar os recursos foram o nível dos alunos e a apresentação dos problemas pelo professor. De modo a tornar os exercícios mais claros para os alunos, eles propuseram o uso de tabelas e gráficos, e ainda que os demais participantes

tivessem oposto resistência quanto ao uso de gráficos, quando finalmente consideraram o trabalho finalizado, os dois passaram a redigir sua experiência.

O modo de operação desse esquema foi guiado por invariantes operatórios que puderam ser observados quando os cinco professores:

1. economizaram tempo consultando exercícios que já haviam postado no 2º fórum presencial;
2. a SD teve como base situações-problema já produzidas em anos anteriores, ou foram consideradas atuais;
3. as situações-problema selecionadas e propostas pelos professores estiveram de acordo com seus objetivos, isto é, no caso de Gabriel, por exemplo, priorizando a noção de notação, ou ainda na perspectiva de Luiza, alinhada com a maneira como o documento do estado de São Paulo propõe a introdução ao ensino de função no 1º ano do EM e
4. um outro invariante identificado a esse esquema esteve ligado à maneira como, segundo os professores, os alunos iriam trabalhar, o que justificou o uso de tabelas para facilitar esse trabalho.

As características do documento SD produzido pelo grupo e a maneira como os professores escolheram introduzir o ensino de função confirmaram a hipótese de que esse processo se daria por meio do predomínio de funções afim como uma única sentença. A identificação dos recursos e esquemas mobilizados tanto pelos três sujeitos de pesquisa como pelos participantes Luiza e Bruno indicaram que essa escolha se deu em razão de tornar mais simples a aprendizagem dos estudantes e facilitar o trabalho dos professores, caracterizando um processo de gênese documental.

Conforme planejado na configuração didática e no modo de execução da OI -1, o formador coordenou um debate na parte final do 1º encontro, destinado a produzir reflexões sobre as escolhas feitas pelos professores para introduzir o ensino de função, materializadas na construção coletiva da SD. Nesse sentido, o primeiro questionamento dirigido ao grupo procurou fazer com que os integrantes externassem razões matemáticas e/ou didáticas que justificassem o fato de terem escolhido situações-problema como estratégia para introduzir o ensino de função

para o ensino médio, e o formador ter considerado essas situações-problema extremamente elementares para o nível.

A transcrição dos diálogos a seguir desvenda algumas das razões elencadas pelos participantes.

Lucas: A tarefa de definir função fica mais simplificada para os alunos quando se explora um problema como o dos combustíveis porque é um tema das nossas vidas. Não adianta complicar nessa etapa e ficar (falando?) de funções exponenciais por exemplo. Eu não sei, mas eu sempre início a ensinar função assim...

Luiza: Eles (*alunos*) vão entender mais rapidamente ... e tabela é para isso, aliás. O mais importante é abordar temas da atualidade e depois ..., só depois formalizar.

Gabriel: Os problemas mais simples facilitam nossa vida.

Luíza: Todos os materiais do Estado sempre iniciam por funções mais simples. A gente não pode iniciar por funções trigonométricas, por exemplo. Para que complicar nessa fase? De novo, a ideia é começar por problemas simples para que o professor possa apresentar a definição do conceito. Não é fácil para os alunos compreenderem o que é função. Eu já estou há muito tempo na sala de aula e raramente vi facilidade na compreensão inicial de função, ainda mais se a gente complicar...

Alfredo: Os livros que eu conheço sempre iniciam assim, por problemas como o do posto de gasolina ou até mesmo aquele da corrida de táxi. Na internet tá cheio desses problemas. Vocês todos devem conhecer. Deve ser mesmo porque é mais fácil. Depois que eles (*alunos*) entendem a definição, normalmente trabalho com a quadrática e os outros tipos.

Os argumentos dos professores reforçaram mais uma vez as observações elencadas no estudo didático apresentado na seção 3.2.2, que constaram uma abordagem extremamente superficial para introdução ao ensino de função no ensino médio em materiais didáticos utilizados pelos docentes. O fato de escolherem funções consideradas 'mais simples' ensejou a elaboração de questionamentos por parte do formador, no sentido de esclarecer se a escolha estava relacionada a preferências por funções afim com uma única sentença e que acabou por se confirmar de maneira unânime.

Em face de tal constatação, o formador procurou criticar construtivamente as escolhas das situações-problema feitas pelos participantes para compor a SD, seja pelo fato de tornar banal o processo de introdução do ensino de função no ensino médio, seja por optar por funções afim, cujo domínio recaía unicamente 'nos reais', fazendo com que a compreensão de sua definição formal se tornasse muito limitada. Inferiu-se daí que o debate a esse respeito tenha proporcionado o surgimento de reflexões e questionamentos acerca do uso de funções com uma única sentença para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM e que

possivelmente essas reflexões tenham levado o sujeito de pesquisa Gabriel a propor a utilização de FVSM como estratégia didática.

A oportunidade levantada por Gabriel ensejou a possibilidade de abordar a introdução ao ensino de função por meio de FVSM, fazendo com que o formador aproveitasse a contribuição elaborada pelo professor como argumento para preparar o 2º encontro presencial, haja vista o tempo destinado à realização da situação de reflexão encontrar-se no final. A fim de dar suporte ao 2º encontro presencial, o formador criou no ambiente *Moodle* o 3º fórum de discussão e solicitou ao grupo contribuições por meio de situações-problema que abordassem o ensino de função no 1º ano do EM recorrendo a FVSM.

Por fim, com o intuito de compreender como a SD construída pelo grupo impactou no sistema de recursos dos sujeitos de pesquisa, foi perguntado se os três professores a utilizariam em sua atividade profissional cotidiana. Os três sujeitos de pesquisa, Gabriel, Lucas e Luiz, afirmaram que não utilizariam a SD, pois até aquele momento dispunham de estratégias didáticas consideradas adequadas para introduzir o ensino do tema, além do fato de terem concluído, por meio do processo de discussão com o grupo, que a estratégia centrada na priorização de situações-problema ‘mais fáceis’ com funções afim e com uma única sentença não necessariamente conduziria a uma aprendizagem satisfatória dos estudantes.

Os argumentos apresentados pelos sujeitos de pesquisa possibilitaram inferir que a situação de reflexão atingiu seu objetivo de proporcionar o surgimento de reflexões a respeito da limitação proporcionada pelo uso de funções afim com uma única sentença no processo de introdução ao ensino do tema, ainda que constatada a necessidade de aprofundá-lo nos próximos encontros da formação continuada.

6.5.1.2 CONCLUSÕES SOBRE A SITUAÇÃO DE REFLEXÃO

A vivência da situação de reflexão intitulada ‘refletir sobre a introdução do ensino de função no 1º ano do EM por meio da elaboração de uma SD’, objetivou elaborar questionamentos por parte dos professores participantes da formação continuada sobre suas escolhas para introduzir o ensino do tema, tendo como

cenário a produção coletiva de uma SD apoiada por um fórum de discussão virtual em que os sujeitos poderiam escolher livremente os recursos para sua elaboração.

A hipótese estabelecida inicialmente, de que a SD iria privilegiar funções afim com uma única sentença, sendo composta por situações-problema voltadas a questões cotidianas e pensadas para serem ensinadas aos estudantes do 1º ano do EM, por meio de uma sequência previsível de acontecimentos, foi integralmente confirmada pelas escolhas feitas pelos professores. De igual modo, percebeu-se que os participantes procuraram articular recursos, com o intuito de construir a SD sem que fosse privilegiado um tipo de recurso em detrimento de outro.

Durante esse processo, foi possível identificar esquemas documentais mobilizados pelos três sujeitos de pesquisa e seus componentes, bem como recursos anteriormente detectados durante as visitas presenciais que aconteceram na fase de preparação da formação continuada. Concluiu-se daí que as reflexões produzidas coletivamente pelo grupo, no sentido de questionar o uso de funções afim com uma única sentença para introduzir seu ensino, abriram a possibilidade de abordá-la na próxima etapa da formação continuada, tendo como base a FVSM.

Por fim, cabe mencionar que a tentativa de se utilizar o diário de bordo como ferramenta de coleta de dados tornou-se inviável devido ao aparecimento de resistências por parte dos professores em tomar notas tão minuciosas e frequentes. Tal comportamento poderia estar relacionado a questões de natureza cultural do professor brasileiro, ao contrário do que acontece em países da Europa e da Ásia, onde é largamente empregado com sucesso em investigações conduzidas por pesquisadores.

A seguir, serão analisados os dados obtidos durante a vivência da situação de formação.

6.5.2 SITUAÇÃO DE FORMAÇÃO

Em continuidade às considerações produzidas pelos professores durante a experimentação da situação de reflexão viabilizada pela OI-1, a situação de formação teve por objetivo criar condições para a apropriação de um modelo destinado a introduzir o ensino de função no 1º ano do EM com base em FVSM. O modelo, cujos detalhes estão apresentados na seção seguinte, foi composto por

um conjunto formado por quatro SEs, intituladas SE-1, SE-2, SE-3 e SE-4, tendo como base as constatações observadas ao longo dos estudos preliminares.

Dessa maneira, a situação proposta aos participantes consistiu em solicitar a resolução de cada uma das quatro SEs a partir da FVSM, ao mesmo tempo em que foi necessário avaliar sua viabilidade ao longo do processo de introdução ao ensino de função no 1º ano do EM que, por sua vez, fez parte da classe de situações ‘resolver e avaliar se uma SE é apropriado para introduzir o ensino de função’. Os recursos selecionados para o desenvolvimento da situação de formação estiveram estritamente vinculados às SEs e foram intencionalmente selecionados com o intuito de proporcionar a apropriação do modelo para introduzir o ensino de função fundamentado na FVSM.

Com o propósito de implementar a situação de formação, foi desenvolvida a OI - 2, cujos elementos são apresentados em seguida.

6.5.2.1 OI-2

Para viabilizar a situação de formação, foram planejados uma configuração didática e um modo de execução, que serão detalhados a seguir, acompanhados da verificação desse planejamento por meio da experimentação de seu desempenho didático, momento em que foi possível analisar, à luz do quadro teórico da ADD, como ocorreu o processo de apropriação por parte dos sujeitos de pesquisa do modelo para introduzir o ensino de função mediante o uso de FVSM.

Configuração Didática da OI-2

A situação de formação foi planejada para se desdobrar em quatro (Quadro 10) encontros presenciais, de tal maneira que em cada um fosse possível resolver uma SE, bem como avaliar sua viabilidade para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM.

Quadro 10 - Data dos encontros presenciais e objetivos - OI-2

Encontro Presencial	Objetivo	Data de realização
2º	Resgatar as discussões coletivas ocorridas OI-1 e resolver e debater a SE-1.	31/08/2019
3º	Resolver e debater a SE- 2.	21/09/2019
4º	Resolver e debater a SE-3.	28/09/2019
5º	Resolver e debater a SE-4.	05/10/2019

Fonte: Produção do autor.

Idealizou-se que o tempo total necessário para desenvolver a OI-2 seria de 12 horas (o mesmo tempo para a situação de reflexão) e cada um dos quatro encontros foi planejado para acontecer no campus da PUC-SP com duração de três horas cada um. Cabe esclarecer que a sequência dos encontros presenciais começou pelo 2º, a fim de respeitar uma ordenação criada com a situação de reflexão pois naquele momento ocorreu o 1º encontro presencial.

O espaço físico organizado para o 2º encontro presencial, para resolver as atividades e realizar o debate seguiu os parâmetros do 1º encontro.

Para apoiar a resolução coletiva da SE-1, durante a realização do 2º encontro e as discussões subjacentes quanto a sua viabilidade para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM, foi planejado o 3º fórum de discussão no *Moodle*. Os participantes foram informados de sua realização ainda durante o 1º encontro presencial assim como foram informados de que deveriam realizar postagens contendo possíveis situações-problema que abordassem o ensino de função tendo como base a FVSM. Diante disso, inferiu-se que eles possivelmente pudessem propor atividades sobre contas de consumo - como sugerem os documentos curriculares nacionais - ou ainda a exploração da representação gráfica de uma função, haja vista tal tendência ter sido observada no estudo didático a respeito do ensino de função elaborado no capítulo 3.

A escolha da SE-1, cujos detalhes são apresentados a seguir, contendo um conjunto de atividades com potencial de se tornarem recursos, foi pensada como parte da estratégia em proporcionar a apreensão do modelo, amparada nas constatações observadas ao longo dos estudos histórico-epistemológico e didático realizados no capítulo 3. Durante sua resolução, esperou-se que a apreciação coletiva de sua viabilidade para ser utilizada com a finalidade de ensinar função oportunizaria aos sujeitos de pesquisa a mobilização de esquemas documentais e conhecimentos matemáticos, possibilitando o acompanhamento de sua documentação.

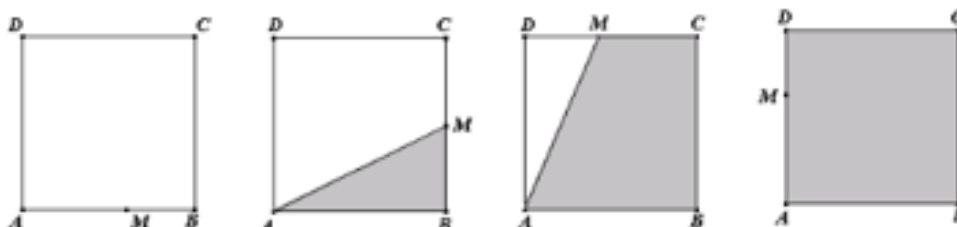
SE-1

A SE-1 foi concebida por Almouloud (2016), em um contexto intramatemático²⁸, inserida em um quadro geométrico bem conhecido dos estudantes e composta por funções afim, cujo enunciado é o seguinte:

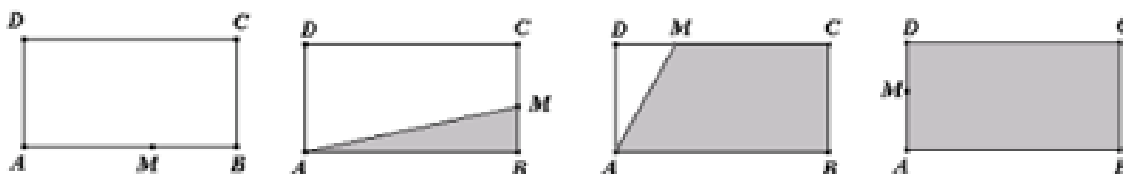
1. Um ponto M se desloca sobre o lado de um quadrado $ABCD$ cujos lados meçam 4 u.m. (fig. Abaixo). Chamaremos x a medida em cm do comprimento do trajeto de A a M .

a. Dê a área $a(x)$ da parte colorida, segundo a posição do ponto M .

b. Represente graficamente a aplicação correspondente.



2. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, sendo $ABCD$ um retângulo de comprimento 4 e largura 2 (fig. Abaixo).



3. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, $ABCD$ sendo, agora, um losango, cujos lados medem 4 u.m. e o ângulo $\hat{C}$ mede 60° .

Fonte: Almouloud (2016, p. 135).

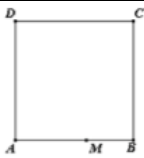
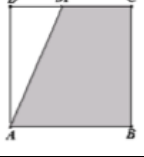
Tendo em vista as constatações obtidas nos estudos de natureza histórica e epistemológica apresentados na seção 3.1, entendeu-se que a SE-1 potencializaria o surgimento de reflexões acerca da maneira pela qual o ensino de função no 1º ano do EM poderia ser introduzido, na medida em que os recursos existentes nas atividades “focam na introdução do conceito de função polinomial do 1º grau cuja lei de formação é definida por sentenças” (ALMOULOU, 2016, p. 135).

²⁸ Segundo Laudaes (p. 6, 2013) “trata-se de abordagens de situações no interior da Matemática”.

As atividades existentes na SE-1 também podem suscitar, segundo Almouloud (2016, p. 129), “o surgimento de questões do tipo: o que os alunos vão fazer? o trabalho será desenvolvido em grupo? que instruções fornecer? que conhecimentos poderão ser socializados?”. Entende-se que o conjunto dessas questões poderia impactar o processo de discussão a respeito de sua viabilidade em introduzir o ensino de função com base na FVSM e, por conseguinte, o trabalho documental dos professores.

Dentre as possíveis soluções matemáticas das atividades propostas na SE-1, esperou-se que a resolução coletiva contemplasse uma construção como a exibida no Quadro 11 e que durante esse processo fossem avaliadas possíveis dificuldades a serem encontradas pelos estudantes do 1º ano do EM.

Quadro 11 - Solução esperada para a Atividade 1 – questão a

Deslocamento do ponto M	Ação esperada
	Identificar que não haverá área formada enquanto M deslocar-se pelo lado $\overline{AB}$. Isso ocorre quando $0 \leq x \leq 4$. Assim, a medida da área em relação a x será: $a(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 4$.
	Compreender que enquanto o ponto M pertencer ao lado $\overline{BC}$, observar que $x = AB + BM$ e que a área procurada é a do triângulo retângulo ABM, ou seja $A_{\triangle ABM} = \frac{AB \times BM}{2}$. Assim, a medida dessa área em relação a x será: $a(x) = 2x - 8$ se $4 \leq x \leq 8$.
	Entender que quando o ponto M percorrer o lado $\overline{CD}$, observar que seja identificada a figura do trapézio ABCM, cuja área é determinada por $A_T = \left(\frac{AB+CM}{2}\right) \times BC$. Sendo assim, como, $CM = x - 8$, a medida dessa área em relação a x será: $a(x) = 2x - 8$ se $8 \leq x \leq 12$.
	Quando o ponto M percorrer o lado $\overline{DA}$, espera-se que percebam que a área do quadrado foi varrida. Portanto, a última área em relação a x será: $a(x) = 16$ se $12 \leq x \leq 16$.

Fonte: Adaptado de Xavier Neto (2016).

Conjeturou-se também, que fossem identificados os conhecimentos referentes às noções de segmento; perímetro e área de figuras planas; estruturas aditivas e multiplicativas de números reais e de expressões algébricas; conhecimentos básicos de função; domínio e contradomínio; lei de formação e construção de gráfico, de modo a avaliar possíveis dificuldades que os estudantes

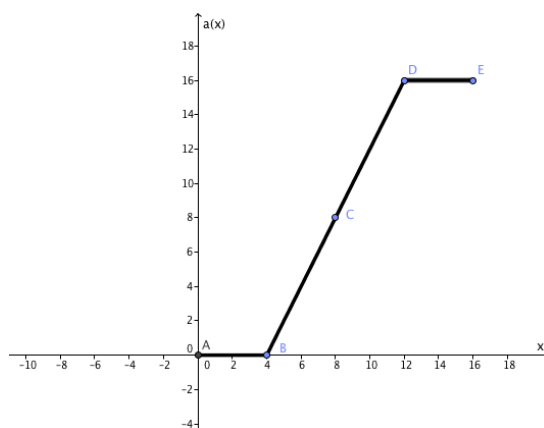
encontrariam para solucioná-lo, ainda que tais noções tivessem sido desenvolvidas durante o EF2. De acordo com Almouloud (2016, p. 136), “a função cuja lei de

formação é definida por $a(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 4 \\ 2x - 8, & 4 < x \leq 8 \\ 16, & 8 < x < 12 \\ 16, & 12 \leq x \leq 16 \end{cases}$ é a ferramenta adequada para

responder à questão 1a “ e a representação gráfica solicitada na questão 1b, como se apresenta na Figura 55.

De acordo com as respostas proporcionadas ao longo dos questionários informativos e as visitas realizadas nas escolas, avaliou-se que os sujeitos de pesquisa apreciariam a possibilidade do uso de recursos digitais para o ensino da questão b da atividade 1.

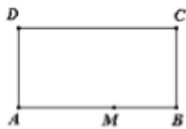
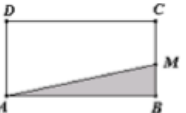
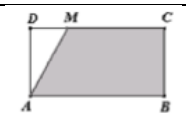
Figura 55 - Representação Gráfica da FVSM da Atividade 1 - questão b



Fonte: Xavier Neto (2016, p. 104).

Nesse caso, a mobilização desses recursos poderia ocorrer não apenas quando o ponto M estivesse deslocando-se pela figura plana do quadrado, mas também nas situações envolvendo o retângulo e o losango. Com relação à atividade 2, presumiu-se que uma das possíveis soluções matemáticas poderia ser semelhante à exibida no Quadro 12 ocasião em que as discussões coletivas levariam em consideração eventuais dificuldades que os estudantes pudessem apresentar.

Quadro 12 - Solução esperada para a Atividade 2 – questão a

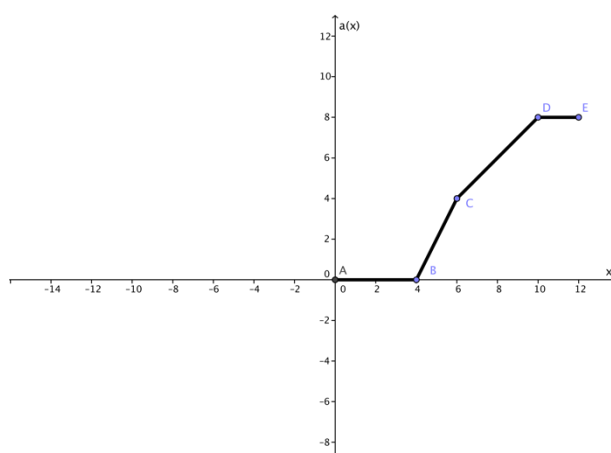
Deslocamento do ponto M	Ação esperada
	Identificar que não haverá área formada enquanto M deslocar-se pelo lado $\overline{AB}$. Assim, a medida da área em relação à x será: $a(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 4$.
	Compreender que enquanto o ponto M percorrer o lado $\overline{BC}$, a área considerada é a do triângulo retângulo ABM, cuja medida é dada por: $A_{\triangle ABM} = \frac{AB \times BM}{2}$. Assim, a medida dessa área em relação à x será: $a(x) = 2x - 8$ se $4 \leq x \leq 6$.
	Espera-se que quando o ponto M percorrer o lado $\overline{CD}$ percebam o trapézio ABCM, cuja medida de área pode ser expressa por: $A_T = \left(\frac{AB+CM}{2}\right) \times BC$. Sendo assim, aguarda-se que observem a medida dessa área em relação à x será: $a(x) = x - 6$ se $6 \leq x \leq 10$.
	Quando o ponto M percorre o lado $\overline{DA}$, espera-se que seja percebido que a área do quadrado já foi varrida. Portanto, a última medida de área será: $a(x) = 8$ se $10 \leq x \leq 12$.

Fonte: Adaptado de Xavier Neto (2016).

De maneira análoga à atividade 1 – questão a, esperou-se que durante as discussões coletivas os conhecimentos sobre noções de segmento; perímetro e área de figuras planas; estruturas aditivas e multiplicativas de números reais e de expressões algébricas; conhecimentos básicos de função, domínio, contradomínio, lei de formação e construção de gráfico fossem mobilizados pelos estudantes, bem como debatidas estratégias de como superar eventuais lacunas, ainda que os temas tenham sido abordados ao longo do currículo do EF2.

Quanto à lei de formação para responder à questão 2 a, esperou-se que fosse elaborada como $a(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 4 \\ 2x - 8, & 4 < x \leq 6 \\ x - 2, & 6 < x < 10 \\ 8, & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$, assim como a representação gráfica, solicitada na questão 2 b, conforme mostra a Figura 56.

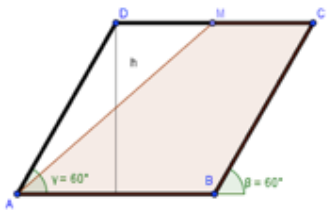
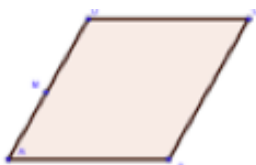
Figura 56 - Representação gráfica da FVSM da Atividade 2 - questão b



Fonte: Xavier Neto (2016, p. 105).

Quanto à questão da atividade 3, presumiu-se uma solução matemática semelhante à existente no Quadro 13. Do mesmo modo, durante o processo de discussão coletiva, esperava-se a identificação dos conhecimentos referentes às noções de segmento, perímetro e área de figuras planas, estruturas aditivas e multiplicativas de números reais e de expressões algébricas, além de conhecimentos básicos de função, tais como, domínio, contradomínio, lei de formação e construção de gráficos e relações trigonométricas, que levassem à avaliação de eventuais dificuldades encontradas pelos estudantes.

Quadro 13 - Solução esperada para a Atividade 3 – questão a

Deslocamento do ponto M	Ação esperada
	Enquanto M pertencer ao lado $\overline{AB}$, não haverá área, e isso ocorre quando: $a(x) = 0$, se $0 \leq x \leq 4$.
	Quando M percorrer o lado $\overline{BC}$, a área (total?) é (será?) representada por um triângulo com um dos ângulos iguais a 120° , cuja área será igual a $\frac{1}{2} \overline{AB} \overline{BM} \sin 120$. Nesse sentido, é possível encontrar a seguinte relação: $a(x) = \sqrt{3} (x - 4)$ se $4 < x \leq 8$.
	Enquanto M estiver percorrendo o lado $\overline{CD}$, o segmento $\overline{AM}$ varre uma área (que pode ser representada por um trapézio), que pode ser calculada pela diferença entre a medida da área do losango e a medida da área do triângulo ADM. Com isso, a expressão para a área neste trajeto é dada pela função: $a(x) = \sqrt{3} (x - 4)$ se $8 < x < 12$.
	Na última etapa, no trecho $\overline{AD}$, percebe-se que o segmento $\overline{AM}$ varre a área total do losango e assim é possível determiná-la pela expressão $2(\frac{\overline{AB} \overline{BC} \sin 120}{2})$. Nela, dentro dos parênteses, é calculada a área da metade do losango; por esse motivo multiplica-se por dois, o que garante como resultado uma área igual a: $a(x) = 8\sqrt{3}$ se $12 \leq x \leq 16$.

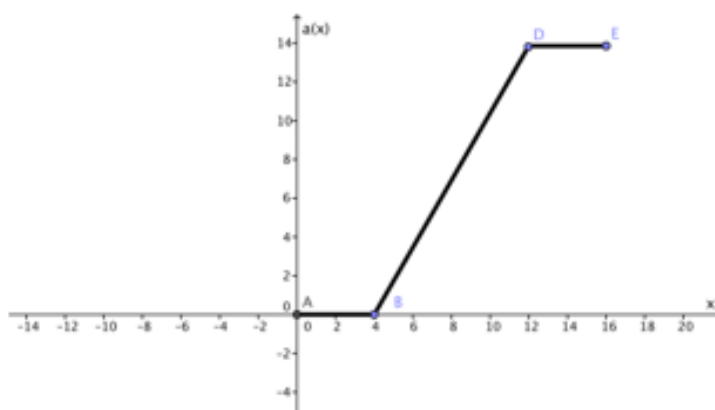
Fonte: Adaptado de Xavier Neto (2016).

A lei de formação correspondente deveria ser a:

$$a(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{3} (x - 4), & 4 < x \leq 8 \\ \sqrt{3} (x - 4), & 8 < x \leq 12 \\ 8\sqrt{3}, & 12 < x \leq 16 \end{cases} \quad \text{e, posteriormente, supôs-se que fosse}$$

elaborada sua representação gráfica solicitada fosse como a da Figura 57.

Figura 57 - Representação gráfica da FVSM da Atividade 3 – questão b



Fonte: Xavier Neto (2016, p. 105).

A seguir será apresentada a SE-2, acompanhada de seu enunciado, das razões que fundamentaram sua escolha para integrar a situação de formação e o que foi esperado durante o processo de discussão sobre sua resolução matemática e viabilidade em introduzir o ensino de função recorrendo a FVSM para estudantes do 1º ano do EM.

SE-2

De maneira análoga à estrutura planejada na primeira SE, para apoiar a resolução coletiva da SE-2, foi planejado um 3º encontro presencial. Juntamente a isso, para dar suporte à sua realização e possibilitar o acompanhamento do trabalho documental dos sujeitos de pesquisa, foi idealizado o 4º fórum de discussão no ambiente *Moodle*. Nesse sentido, os participantes poderiam ingressar no fórum durante a semana que precedeu a realização do 3º encontro presencial e compartilhar as soluções matemáticas e discussões referentes à SE-1, bem como eventualmente começar a debater sobre a SE-2. A essa altura da formação continuada, desejava-se um engajamento dos professores no sentido de uma participação efetiva quanto às contribuições de debates virtuais. O espaço físico onde se desenrolou o 3º encontro presencial foi organizado para ocorrer de maneira análoga à do 2º encontro.

A SE-2 foi concebida com o intuito de proporcionar aos participantes reflexões sobre o potencial representado pelo uso de recursos no âmbito das ciências naturais para introdução ao ensino de função no 1º ano do EM por meio da utilização de FVSM, valendo-se de outros tipos de funções que não aquelas do tipo afim. A atividade proposta (Figura 58) ocorre no campo da física, e uma de suas funções é do tipo polinomial do 2º grau, procurando assim contemplar constatações obtidas nos estudos preliminares a respeito da associação às ideias originais da construção da definição de função associadas à variação e seu imbricamento com FVSM.

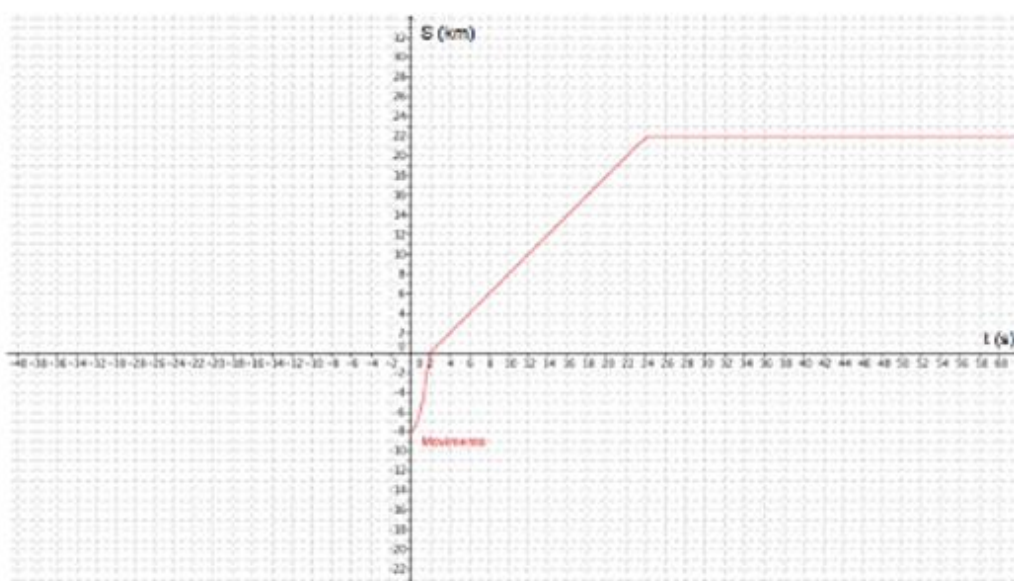
Dado que o conjunto formado pelas quatro SEs se constituiu em um modelo para introduzir função recorrendo a FVSM, procurou-se elaborar uma articulação entre elas. Para tanto, escolheu-se a função $y = 2x - 8$, presente na SE-1 para compor uma das sentenças existentes na SE-2, de forma a possibilitar reflexões

sobre a importância da reflexão a respeito do significado dessa mesma função para representar fenômenos distintos.

Figura 58 - SE-2

Um automóvel, localizado a 8 km de determinada cidade, passa a movimentar-se, partindo do repouso, e aumenta uniformemente sua velocidade até atingir o instante 2 s, quando chega à cidade (ver gráfico).

Do instante 2 s até o 24 s, o automóvel desenvolve velocidade constante, até atingir 22 km para, em seguida, permanecer em repouso. Que funções matemáticas auxiliariam a compreensão e o estudo gráfico desses movimentos?



Fonte: Produção do autor.

A articulação da física com a matemática também está prevista nos documentos curriculares nacionais. Os PCN+ trazem

uma sugestão de temas estruturadores que articulam competências e conteúdos sugerindo que movimento, variações e conservação da quantidade de movimento, energia e potência associadas aos movimentos, equilíbrios e desequilíbrios sejam organizados em um tema de ensino. (BRASIL, 2000, p.57).

Na BNCC, os temas que transitam nessas áreas do conhecimento foram tratados, segundo Brasil (2018, p. 13), “como temas contemporâneos transversais”, fazendo alusão concreta à possibilidade de sua conexão, na medida em que não pertencem a uma disciplina específica, mas transpassam as mesmas, atestando ainda que a diversidade de abordagens dessas temáticas podem ser positivas no

processo de aprendizagem, pois garantem a autonomia das redes de ensino e de professores.

Entendeu-se, portanto, que o contexto da cinemática, em que está assentada SE-2, não apenas proporcionaria contemplar as sugestões de interdisciplinaridade propostas nos documentos curriculares nacionais – ela é desenvolvida nos currículos escolares nacionais, concomitantemente ao ensino de função no 1º ano do EM – como também poderia fomentar o surgimento de reflexões sobre a introdução ao ensino de função apoiado em FVSM.

É possível observar no enunciado da atividade proposta pela SE-2 que um determinado automóvel desenvolveu, ao longo de sua trajetória, um o movimento uniformemente variado, que se iniciou acelerado, passou, em seguida para uma fase linear, e por último, para constante. Como consequência disso, a lei de formação da FVSM, que descreve o movimento efetuado pelo automóvel, é formada por sentenças cujas funções são do tipo quadrática, afim e constante.

Nesse sentido, esperou-se que, durante a resolução coletiva da SE-2, fosse avaliada a necessidade de se resolver a atividade proposta mobilizando uma série de conhecimentos sobre: estruturas aditivas e multiplicativas de números reais; expressões algébricas; conhecimentos básicos de função; domínio; contradomínio; lei de formação; noção de taxa de variação; função horária do movimento uniforme e uniformemente variado, equação do 1º e 2º grau e construção de gráfico.

A lei de formação correspondente ao movimento desenvolvido pelo automóvel deveria ser $S(t) = \begin{cases} 2t^2, 0 \leq t \leq 2 \\ t - 2, 2 \leq t \leq 24 \\ 22, t \geq 24 \end{cases}$. Em relação às possíveis

estratégias utilizadas para resolver a atividade, imaginou-se que os participantes avaliariam a possibilidade de que os estudantes pudessem utilizar conhecimentos sobre função horária para construir a função que descreve matematicamente a primeira parte do movimento; isso porque o tema é estudado concomitantemente ao estudo de função na disciplina de física durante o 1º ano do EM, além do fato de os estudantes terem tido acesso a outras noções relacionadas ao estudo das equações do 1º e 2º grau ao longo do EF2. Nesse contexto, avaliou-se também a possibilidade de considerar válida a preocupação em não se produzir um equívoco

quanto à compreensão do objeto matemático e sua representação, no caso específico, exibido na forma de equação.

No momento da resolução do problema em que o automóvel atinge a fase linear do movimento, pensou-se que as discussões sobre a viabilidade em introduzir o ensino de função por meio da SE-2 poderiam se dar a respeito da conveniência de os estudantes utilizarem a noção de taxa de variação para que fosse possível construir a função afim correspondente a essa parte da trajetória feita pelo automóvel. Essa expectativa se deve ao fato de esse conteúdo ser objeto de estudo de matemática durante todo o EF2, bem como do 1º ano do EM na disciplina de física, como pontua Silva (2017, p. 39): “os conhecimentos inerentes à taxa de variação podem ser explorados no estudo da Mecânica, quando se pode relacioná-los ao estudo do movimento”.

Na sequência, será apresentada a SE-3, seguida, pela ordem, da estrutura preparada para sua viabilização, seu enunciado e as razões que fundamentaram sua escolha para integrar o modelo de introdução ao ensino de função recorrendo a FVSM para estudantes do 1º ano do EM.

SE-3

Para alicerçar as discussões e reflexões acerca da viabilidade da SE-3 na introdução ao ensino de função, foi planejada a realização de um 4º encontro presencial e a construção do 5º fórum de discussão no *Moodle* com as mesmas características da SE-2.

O enunciado da atividade proposta pela SE-3 foi adaptado de um exercício existente na obra ‘Cálculo, Volume 1’, de James Stewart (Figura 59), e seu principal objetivo consistiu em proporcionar a reflexão sobre a introdução do ensino de função baseado em FVSM, por meio de cenário que envolvesse um tipo de descontinuidade.

Como tratado ao longo do estudo histórico-epistemológico sobre a definição de função, a elaboração de sua definição formal ocorreu de maneira a acomodar mais de uma expressão analítica e contemplar a ideia de descontinuidade. Nesse sentido, a proposição da SE-3 teve por objetivo considerar essas duas premissas, uma vez que é possível constatar que ambas são tratadas no escopo do problema sobre custos no correio de Hong Kong.

Figura 59 - SE-3

(Adaptado de Stewart, 2016). O custo C de enviar um envelope pelo correio depende de seu peso w . Embora não haja uma fórmula simples relacionando w e C , o correio tem uma fórmula que permite calcular C quando w é dado. A regra que o correio de Hong Kong utilizou, a partir de 2015, para o cálculo do custo para Taiwan é a seguinte: o custo é \$ 22,00 para 20 g ou menos, \$ 28,00 para 30 g ou menos e \$ 38,00 para 40 g ou menos e \$ 48,00 para 50 g ou mais.

w (gramas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 20$	22,00
$20 < w \leq 30$	28,00
$30 < w \leq 40$	38,00
$40 < w \leq 50$	48,00
...	...

Procure escrever matematicamente essa relação e construa seu gráfico!

Fonte: Produção do autor.

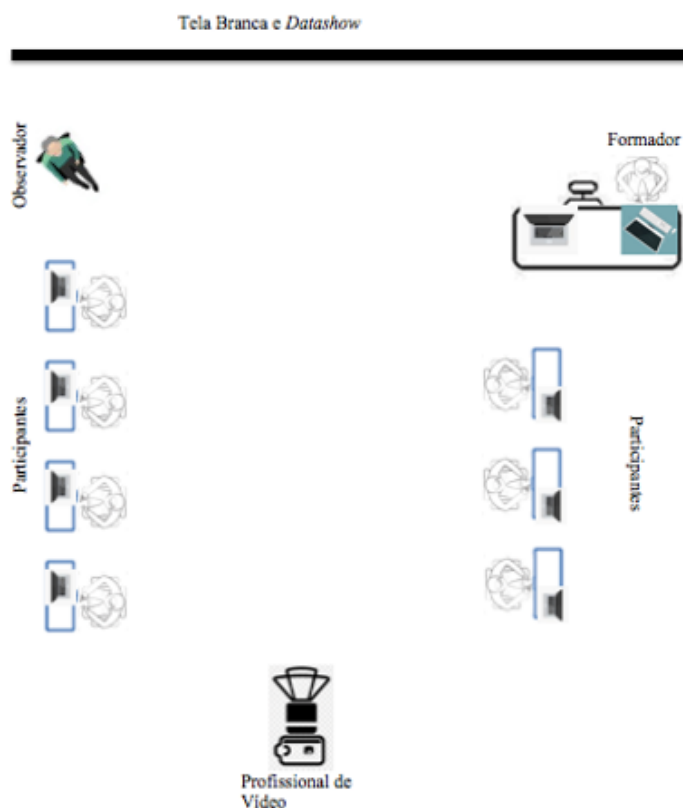
A descontinuidade explorada na SE-3 foi do tipo salto, em que há limites laterais em um determinado ponto, porém eles não coincidem, havendo “saltos” do valor da função. Entendeu-se também que a SE-3 suscitaria aos participantes reflexões a respeito da representação gráfica de função, como uma possível estratégia de mobilização da noção de descontinuidade. Como a SE-3 integrou o modelo para introduzir o ensino de função, procurou-se articulá-la à SE-2 por meio da função $y = 22$, de maneira idêntica à escolha feita na transição entre a primeira SE.

Para a produção da SE-3 previu-se a elaboração da representação gráfica da função que descrevia o modelo dos correios de Hong Kong; para tanto, o cenário em que ela se desenvolveu (Figura 60) sofreu uma alteração, pois esperou-se que o esboço gráfico fosse realizado por meio do uso de software num dos laboratórios de informática da PUC-SP.

A expectativa em relação à resolução matemática e à avaliação da viabilidade da SE-3 em introduzir o ensino de função no 1º ano do EM foi de que as discussões coletivas previssessem que os estudantes necessitariam mobilizar os seguintes conhecimentos: estruturas aditivas e multiplicativas de números reais e de expressões algébricas; noções básicas de função; domínio e contradomínio; lei de formação; continuidade e descontinuidade; estruturas aditivas e multiplicativas e construção de gráfico. Esperou-se que os debates trouxessem cenários que

pudessem possibilitar a superação de eventuais obstáculos para a elaboração da SE-3.

Figura 60 - Panorama da SE-3 no Laboratório de Informática



Fonte: Produção do autor.

Dessa forma, previu-se que os participantes iriam considerar o fato de que os estudantes teriam a impressão de que nos pontos descontínuos poderiam existir dois correspondentes a cada elemento pertencente ao domínio, já que, até então, estariam estabelecendo uma correspondência ponto a ponto, relacionando pontos do domínio com pontos do gráfico.

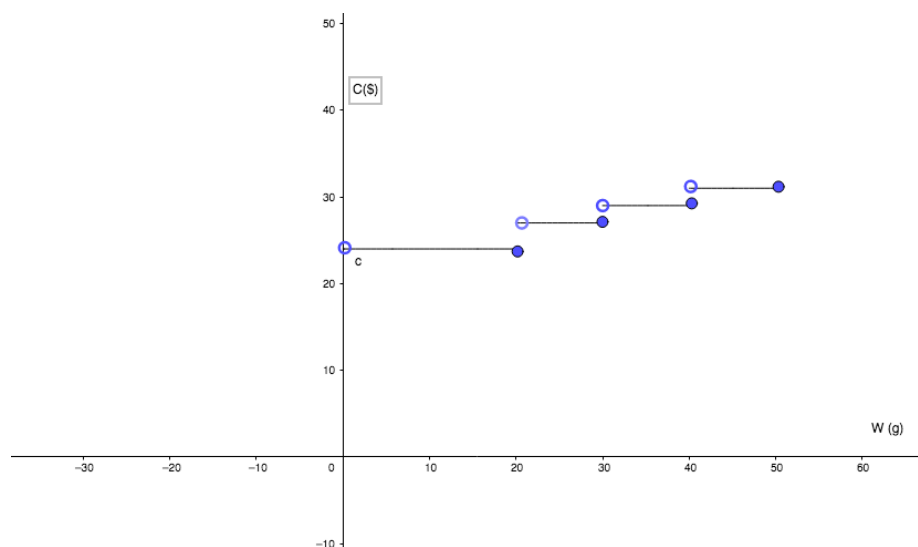
Por outro lado, ainda que a tabela oferecida no contexto do problema ajudasse na construção da função solicitada, esperou-se que o grupo considerasse o esboço do gráfico como alternativa real para que os estudantes não interpretassem que os números 20, 30, 40 e 50 tivessem mais de um correspondente. Nessa mesma linha de raciocínio, foi esperado que avaliassem a possibilidade de os alunos interpretarem cada trecho do gráfico e/ou sentença algébrica como uma função.

A lei de formação correspondente ao modelo em questão deveria ser

$$C(w) = \begin{cases} 22, & 0 < w \leq 20 \\ 28, & 20 < w \leq 30 \\ 38, & 30 < w \leq 40 \\ 48, & 40 < w \leq 50 \end{cases} \text{ e sua representação gráfica (Figura 61) evidenciando}$$

a descontinuidade do tipo 'salto'.

Figura 61 - Representação gráfica da FVSM da SE-3



Fonte: Produção do autor.

A seguir será apresentada a última das SEs (SE-4), integrante do modelo elaborado para introduzir o ensino de função tendo como base FVSM.

SE-4

Para proporcionar a resolução matemática e discussão acerca de sua viabilidade em introduzir o ensino de função no 1º ano do EM por meio da SE-4, foram planejados o 5º encontro presencial e o 6º fórum de discussão no *Moodle*, seguindo exatamente os mesmos moldes propostos na SE-3. O arranjo físico em que se desenvolveu o 5º encontro presencial - em um dos laboratórios de informática da PUC-SP - foi idêntico ao da SE-3, pois planejou-se disponibilizar aos professores a possibilidade de utilizar tecnologia digital durante as discussões coletivas.

A SE-4 foi elaborada a fim de possibilitar a introdução ao ensino de função no 1º ano do EM com base em FVSM, por meio da exploração de tema relacionado ao cotidiano social. O uso dessa estratégia para o ensino de função é apoiado nos documentos curriculares nacionais. Os PCN+ preconizam a importância em

contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas. (BRASIL, 2018, p.16)

De igual maneira, para a BNCC,

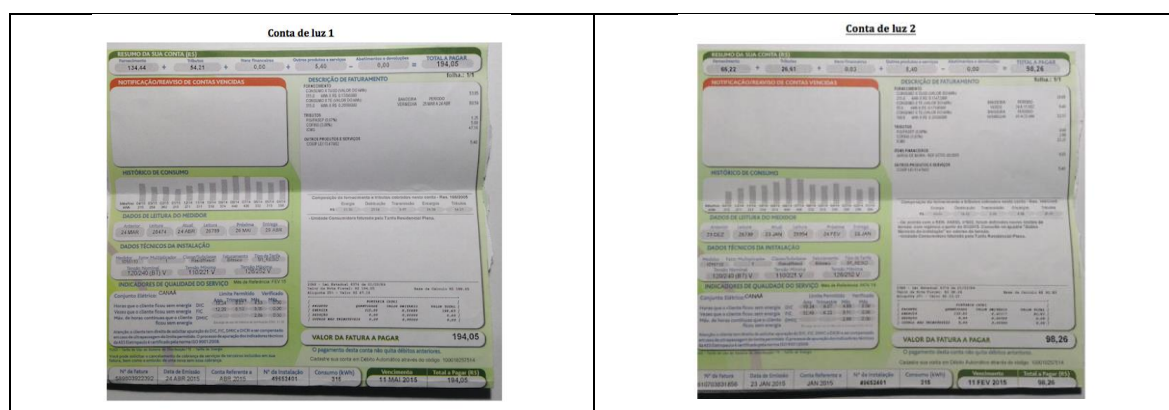
os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às questões dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p.527)

De forma suplementar, em relação à BNCC cabe salientar que na habilidade número 'EM13MAT405' há uma sugestão para o uso de contas de luz, água, gás etc. como estratégia específica para o ensino de FVSM.

Em face disso, adaptou-se uma atividade desenvolvida durante a pesquisa de mestrado do pesquisador, relacionada a conta de luz. Segundo Xavier Neto (2016, p. 72), “a atividade foi inspirada no material de uma oficina de apoio destinada à formação continuada para professores de matemática intitulada “Um xis em questão”, que foi analisada na dissertação de mestrado de Bovo (2004) e voltada à introdução ao ensino de função no EM por meio da FVSM. Na atividade desenvolvida por Xavier Neto (2016), duas contas de luz foram entregues a um grupo de estudantes do EM, juntamente com uma tabela informativa contendo faixas de cobrança de energia elétrica que deveriam auxiliá-los a produzir a FVSM.

No caso da SE-4, planejou-se entregar aos participantes as duas contas de luz (Figura 62) utilizadas na investigação de Xavier Neto (2016), como estratégia para refletir a respeito da viabilidade em introduzir o ensino de função com base na FVSM.

Figura 62 - Contas de energia elétrica usadas na SE-4



Fonte: Xavier Neto (2016).

Em seguida, foi planejado proceder com a discussão sobre a resolução matemática do problema/da função tendo como base o seguinte enunciado:

1. Observe as contas de luz selecionadas e anote o que (você) observou.
2. Quando analisado o valor a ser pago nas contas de luz, que variáveis encontrou?
3. Quais valores variam em função do outro?
4. Selecione uma das contas e anexe ao trabalho. Observe na conta selecionada o consumo do mês, o consumo dos últimos meses e o consumo a pagar. O que você observou?
Com relação às questões de 5 a 9: não considerar tributos, itens financeiros, outros produtos e serviços, abatimentos e devoluções.
5. Com relação à conta de luz selecionada, qual equação representa o consumo menor ou igual a 30KWH? Arredonde a tarifa para duas casas decimais.
6. Com relação à conta de luz selecionada, qual equação representa um consumo entre 31KWH e 100 KHW? Arredonde a tarifa para duas casas decimais.
7. Com relação à conta de luz selecionada, qual a equação para um consumo entre 101 e 220 KHW? Arredonde a tarifa para duas casas decimais.
8. Com relação à conta de luz selecionada, qual a equação para qualquer consumo superior a 220KWH? Arredonde a tarifa para duas casas decimais.
9. Como poderíamos representar uma lei que permitisse calcular o valor da conta para um consumo qualquer?
10. É possível representar as atividades 5, 6, 7 e 8 graficamente? Em caso positivo, você poderia fazê-lo usando lápis e papel? (XAVIER NETO, 2016, p. 126)

Durante o processo de resolução dos quatro primeiros exercícios da SE-4, foi esperado em relação ao exercício 1 a identificação do consumo de um ano, as faixas de cobranças diferentes, os impostos a serem pagos e o código de barras. Para o exercício 2, o valor do Imposto de Circulação de Mercadorias e Serviços – ICMS, o consumo e o valor do kwh. No exercício 3, esperou-se que o estudante percebesse que o valor do fornecimento e o valor do ICMS variam em função do consumo e, no exercício 4, que fosse observada a diferença entre o valor de consumo do mês corrente e os dos últimos meses, bem como qual tendência poderia ser projetada para o futuro.

A respeito dos exercícios de 5 a 9, desejou-se que os participantes avaliassem a necessidade de mobilização por parte dos estudantes dos conhecimentos sobre a noção função, intervalos, estruturas aditivas e multiplicativas, ao mesmo tempo em que poderiam avaliar eventuais dificuldades encontradas para resolvê-los. Com relação à construção gráfica solicitada no exercício 10, os participantes poderiam evocar o uso de programas de computador para auxiliar os estudantes na construção dos gráficos solicitados, uma vez que a análise dos questionários sobre as TIC realizada na seção 4.2.1 indicou a articulação desse recurso com outros de natureza curricular.

Modo de Execução da OI-2

A execução da SE-1, pensada para desenvolver-se durante o 2º encontro presencial, foi planejada de maneira similar à OI-1, ou seja, que o trabalho ocorresse em um único grupo devido ao número pequeno de participantes. Caso houvesse ausências, o notebook do pesquisador seria disponibilizado para participação remota, via conexão por *Skype*. Para colocar em prática a orquestra, a seguinte organização foi pensada:

- ✓ Apresentação da pauta: 10 minutos;
- ✓ Resgate das discussões sobre a SD elaborada no encontro anterior: 20 minutos;
- ✓ Resgate das contribuições no 3º fórum do *Moodle*: 30 minutos;
- ✓ Resolução matemática da SE-1 e debate coletivo sobre sua viabilidade para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM: 90 minutos e
- ✓ Balanço do trabalho realizado e planejamento futuro: 10 minutos.

Para dar início ao planejamento proposto, foram reservados 20 minutos destinados ao resgate das discussões ocorridas durante o 1º encontro presencial, como estratégia de conexão entre as discussões feitas durante a elaboração da SD e as críticas levantadas pelo formador sobre as escolhas feitas para introduzir função por meio da priorização de funções afim com uma única sentença e o papel da FVSM.

Sobre o resgate das contribuições feitas ao 3º fórum de discussões no *Moodle*, cujo objetivo consistiu em apresentar possíveis situações-problema que teriam potencial de introduzir o ensino de função tendo como base FVSM no 1º ano do EM, estabeleceu-se que os professores deveriam escolher atividades voltadas a temas cotidianos, conforme aventado na configuração didática da OI-2, o que oportunizaria a proposição da resolução coletiva da SE-1, desenvolvida em um contexto distinto relacionado à Geometria Plana.

Cabe salientar que a estrutura planejada para o modo de execução destinado ao desenvolvimento das demais SEs (SE-2, SE-3 e SE-4) foi similar, isto é, outros três encontros presenciais foram destinados a cada uma das SE mediadas pela proposição de outros três fóruns de discussão virtual no ambiente *Moodle*.

Imaginou-se obter os dados referentes à vivência da situação de formação da seguinte maneira: 1) vídeo operado por um profissional de comunicação, cuja câmera seria colocada em local estratégico da sala de aula e/ou laboratório de informática, com o intuito de captar as interações entre os participantes; 2) áudio recolhido com auxílio do celular do pesquisador e do profissional; 3) protocolo de observação preenchido por um observador para registrar o trabalho documental dos sujeitos de pesquisa; 4) diálogos produzidos pelo grupo nos quatro fóruns de discussão virtual e durante os quatro encontros presenciais e 5) recursos eventualmente mobilizados e/ou produzidos.

Para analisar os dados à luz do referencial teórico da ADD, estabeleceu-se como fundamental confrontar o conteúdo obtido por meio do áudio e do vídeo, com as notas produzidas pelo observador, a fim de identificar esquemas documentais e recursos mobilizados pelos sujeitos de pesquisa de modo a de mensurar o processo de apropriação do modelo em introduzir o ensino de função recorrendo à FVSM.

Desempenho Didático da OI-2

O desempenho didático da OI-2 obedeceu a ordem em que as quatro SEs foram vivenciadas ao longo do desenvolvimento da situação de formação. Tendo como foco as ações desenvolvidas pelos sujeitos de pesquisa, procurou-se comparar os resultados obtidos pela vivência da situação de formação com o planejamento proposto na configuração didática e modo de execução da OI-2 à luz do quadro teórico da ADD.

A SE-1

O 2º encontro presencial, planejado para a resolução matemática e a subsequente avaliação da viabilidade em introduzir o ensino de função no 1º ano do EM tendo como base a SE-1 contou com a colaboração de todos os participantes, com exceção de Bruno, que necessitou repor um dia de trabalho instituição de ensino em que leciona, enquanto Fabíola participou remotamente via conexão *Skype*. Após a leitura da pauta, durante aproximadamente 20 minutos o formador passou a resgatar as discussões sobre a elaboração da SD ocorridas no 1º encontro presencial sobre as escolhas feitas pelos participantes para elaborar a SD para introduzir o ensino de função, fundamentadas especialmente em funções

afim com uma única sentença. Essa estratégia objetivou preparar a discussão para a viabilidade em introduzir o ensino de função a partir da FVSM por meio da SD-1.

Durante o resgate dessas discussões, foram lembradas as argumentações utilizadas pelos professores para essa escolha, dentre as quais a de facilitar a aprendizagem e o trabalho do professor nesse processo. No transcorrer dessa parte do 2º encontro, Luiz argumentou que os professores precisavam adequar seu ensino às diretrizes propostas em livros didáticos, apostilas e/ou normativas curriculares adotadas pelas instituições de ensino em que trabalhavam, pois, segundo ele, invariavelmente a abordagem do ensino de função se dava por meio daquelas afim e com uma única sentença, geralmente em meio a situações cotidianas, como a do posto de combustível utilizada pelo grupo na SD.

O formador argumentou a Luiz, valendo-se de algumas observações feitas por Huh (2009): “Geralmente, quando os professores não possuem um conhecimento adequado do tema a ser ensinado, terminam por limitar-se ao uso do livro didático” (HUH, 2009, p. 16, tradução nossa), sem fazer qualquer tipo de reflexão sobre a relevância ou coerência dos conteúdos existentes. Acrescentou ainda que, mesmo havendo uma ampla variedade de recursos para introduzir o ensino de função (caso específico daqueles oriundos da internet), não existem garantias de que eles sejam compatíveis para introduzir o ensino de função sem que o professor tenha clareza de que suas escolhas equivocadas possam causar incompreensões. Por isso, voltou a exemplificar a importância da FVSM no processo de aprendizagem da definição de função.

Cabe lembrar o fato de que algumas investigações, como as de Visnovska e Cobb (2013), Assis (2016) e Lucena, Gitirana e Trouche (2018), têm se debruçado na integração de recursos como estratégia de aprendizagem de alguns temas matemáticos. Porém, segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p. 4, tradução nossa), “isso dependerá do desenvolvimento de novas competências e conhecimentos” que os professores precisarão desenvolver ao longo de sua atividade profissional, a fim de que possam aprimorar suas capacidades de design.

Ultrapassado o momento de resgate das discussões do encontro anterior, os 30 minutos seguintes foram dedicados a discussão das contribuições feitas

pelos participantes no 3º fórum do *Moodle*. A discussão coletiva a respeito das postagens teve início por meio de uma postagem feita por Gabriel (Quadro 14). Ao ser questionado pelo formador a respeito de suas razões para propor a situação-problema, o participante argumentou que costumava utilizá-la quando tratava de descontinuidade e para possibilitar o trabalho com notação de uma função.

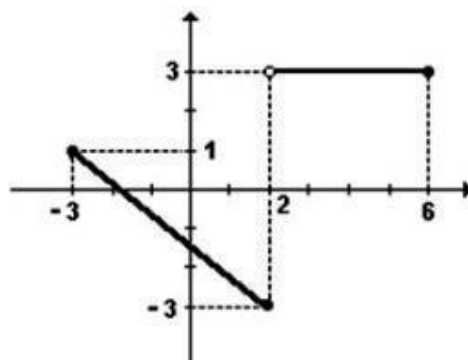
Quadro 14 - Contribuição de Gabriel para o fórum virtual da OI-2

Colegas, bom dia.

Segue minha sugestão para que seja dada a continuidade nos exercícios, trabalhando a introdução do ensino de função com a função de várias sentenças.

Os exercícios propostos buscam a interpretação do gráfico (em que há a coleta dos valores solicitados passando pelas descontinuidades), bem como a determinação e interpretação dos intervalos propostos.

1) Dado o gráfico da função $f(x)$, responda: qual o valor de $f(5) / f(-3) - f(2)$? Quais são os intervalos observados e o respectivo valor da função?



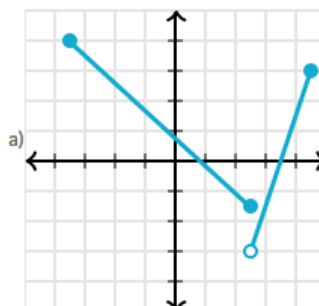
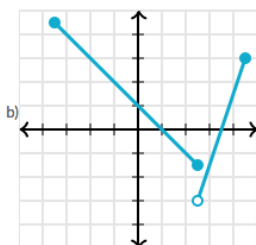
2) Dadas as funções abaixo, pede-se que se construam os gráficos correspondentes a elas:

a) $g(x) = -8$, para $-9 \leq x < 3$ e $g(x) = 4$, para $3 \leq x \leq 9$

b) $f(x) = 3$, para $-6 \leq x \leq -2$ e $f(x) = 4 - 2x$, para $-2 < x \leq 3$

3) Qual é o gráfico de $h(x)$, sabendo que

$h(x) = 2 - x$, para $-7 \leq x \leq 5$ e $h(x) = 3x - 21$, para $5 < x \leq 9$?



Fonte: <https://moodle2019.pucsp.br/course/view.php?id=586>, 2019.

A contribuição feita por Gabriel esteve alinhada com o que ele informou durante a entrevista pessoal realizada na Escola A, já que, naquela ocasião, relatou

dar ênfase à noção de notação durante o processo de introdução ao ensino de função. Pode-se inferir que a regularidade com que Gabriel utiliza esse recurso para introduzir o ensino de função caracterize uma classe de situações orientada por um esquema que leva em conta o invariante operatório ‘aprender notação facilita a aprendizagem de função’.

O formador contra-argumentou que, dentre outros, a situação-problema não parecia apropriada para introduzir o ensino de função tendo como base a FVSM pelo fato de presumir-se que a noção de descontinuidade seria parte do processo do ensino em um momento posterior. Outros participantes, como Alfredo, Bruno e Luiza, relataram utilizarem exercícios similares ao proposto por Gabriel quando estão ensinando função modular. Especificamente em relação à função modular, o argumento utilizado pelos três participantes pareceu estar em consonância com constatações obtidas na seção 3.2.2, em que determinados livros didáticos apoiados nos preceitos dos PCN+ costumam abordar a noção de descontinuidade e FVSM quando do ensino de função modular.

Uma segunda contribuição (Quadro 15) ao 3º fórum virtual partiu do participante Lucas.

Quadro 15 - Contribuição de Lucas para o fórum virtual da OI-2

A função real de variável real chamada "maior inteiro" é dada por $f(x) = [x]$ que associa a cada valor real x ao seu maior inteiro que seja igual ou menor que x . Assim, $f(1.5) = [1.5] = 1$, $f(7) = 7$ e $f(\pi) = 3$.
 Calcule:
 a) $f(4.27)$
 b) $f(10)$
 c) $f(-4)$
 d) $f(-7.25)$
 2) Construa o gráfico da função maior inteiro de x .
 3) A função maior inteira de x é contínua? Justifique.
 4) Abaixo temos uma tabela do cálculo do valor da conta residencial de uma residência do estado de São Paulo.
 g) construa o gráfico da função f .
 h) a função f apresenta pontos de descontinuidade? Justifique.

Fonte: <https://moodle2019.pucsp.br/course/view.php?id=586>, 2019.

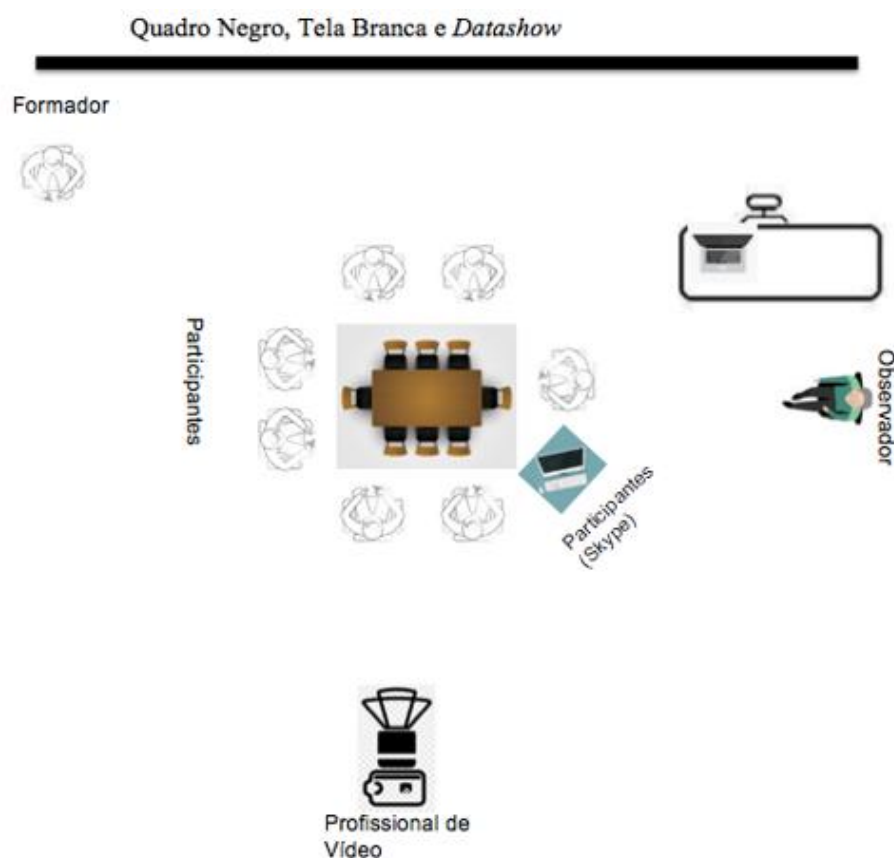
Após ser questionado pelo formador sobre as razões que fizeram com viesse a propor um exercício para abordar FVSM, Lucas esclareceu que, ao ler a postagem feita por Gabriel, também pensou no tema da descontinuidade. Ele recordou que funções elementares do tipo cosseno, seno, tangente etc são contínuas no domínio, por isso procurou selecionar um problema apresentado em

um livro didático que poderia ser aplicado para introduzir o estudo de continuidade/descontinuidade de funções. Os dois participantes ponderaram, entretanto, que ambos os exercícios por eles propostos no fórum tinham por objetivo fixar a noção de descontinuidade e não seriam apropriados para introduzir o ensino de função, segundo as observações do formador.

Conforme planejado, após o resgate das contribuições ao 3º fórum de discussão no *Moodle*, foi proposta ao grupo a resolução matemática e discussão sobre a viabilidade em introduzir o ensino de função por meio da SE-1. Nesse sentido, uma cópia impressa dos exercícios foi distribuída a cada participante, além de efetuar-se sua projeção na tela branca (*o formador enviou a SE-1 para Fabíola por e-mail*) existente na sala de aula em que ocorreu o encontro.

O arranjo do ambiente (Figura 63) em que se desenvolveu o trabalho com a SE-1 procurou privilegiar o trabalho em um único grupo, conforme planejado.

Figura 63 - Panorama do trabalho com a SE-1



Fonte: Produção do autor.

Os primeiros momentos de trabalho com a resolução da SE-1 foram marcados por uma certa relutância do grupo em trabalhar coletivamente,

rapidamente superados a partir do momento em que algumas dúvidas surgiram e a interação com o formador se intensificou. De modo geral, os participantes não apresentaram dificuldades em resolver matematicamente as atividades propostas pela SE-1; as discussões mais polêmicas aconteceram quando se avaliou sua viabilidade na introdução ao ensino de função e, nesse sentido, duas questões foram observadas: uma primeira, relacionada ao enunciado das atividades, e outra, referente aos intervalos dos subdomínios existentes nas sentenças da função.

Em relação ao enunciado das atividades da SE-1, os participantes entenderam que os estudantes apresentariam dúvidas quanto à sua compreensão. Luiz e Gabriel, por exemplo, argumentaram nessa direção, como é possível observar nos diálogos transcritos a seguir:

Luiz: O enunciado é confuso aqui... Por que não pede a função claramente? Se confunde a gente, vai confundir muito os alunos. Não sei o que vocês acham, mas o caderno do estudante do estado é mais direto

...

Gabriel: Luiz, repare que na letra a, está pedindo $a(x)$. Mas, sem dúvida que a redação do problema não ajuda. Acho que o problema é que as questões são abertas e é isso que vai confundir.

Luiz: Nossa! Isso mesmo! Na letra b, agora vejo também que fala de representação gráfica desse problema é essa função ..., mas tá difícil entender o texto. Imagine um aluno do 1º fazendo isso? A gente já deve pensar nisso ... ir se antecipando ...

É provável que a inquietação causada pelo enunciado não tenha sido devida a uma redação equivocada do texto original. De acordo com o que foi antecipado na configuração didática da OI-2, possivelmente isso pode ter sido provocado pelo contexto que permeou a situação-problema, dado que procurou provocar uma comunicação coletiva entre os estudantes, algo incomum na maioria dos enunciados disponível em livros didáticos ou mesmo no caderno do estado mencionado por Luiz. Esse fato motivou o surgimento de uma discussão sobre a maneira pela qual professores e estudantes poderiam enfrentar as dificuldades suscitadas pelos exercícios existentes na SE-1, haja vista seu enunciado desencadear a possibilidade de um protagonismo discente não vivenciado anteriormente pelos participantes.

Em relação ao argumento apresentado por Gabriel de que as atividades propunham questões abertas, o formador esclareceu que isso não correspondia à realidade. Com base em argumentos utilizados por Hatisaru e Erbas (2017, p. 5,

tradução nossa), “de que os problemas abertos possuem em geral mais de uma solução”, procurou-se argumentar que as atividades propostas na SE-1 não possuíam tal característica e que, portanto, os professores não deveriam esperar que os estudantes apresentassem mais de uma solução.

O segundo ponto de discussão trouxe indicativos de apropriação da atividade como estratégia para introduzir o ensino de função tendo como base FVSM. Luiz e Gabriel perceberam que os estudantes poderiam apresentar dúvidas quanto à construção dos subdomínios das sentenças da função e acabaram por envolver os outros participantes, como é possível observar na transcrição da fala a seguir:

Gabriel: Veja Luiz, creio que os alunos podem errar o intervalo III do problema do quadrado ... e os demais também tem o mesmo quadro ... (Gabriel refere-se às atividades envolvendo retângulo e Losango) O que você acha?

Para evidenciar o ponto a que se refere, Gabriel compartilha com Luiz e os demais participantes a sua resolução (Figura 64).

Figura 64 - Resolução de parte da atividade 1 a (SE-1) elaborada por Gabriel

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 0 \leq x \leq 4 \rightarrow \underline{q(x) = 0} \quad (\text{M.a.}) \\ \text{II)} \quad & 4 < x \leq 8 \rightarrow q(x) = \frac{4 \cdot (x-4)}{2} \rightarrow \underline{q(x) = 2x - 8} \quad (\text{M.a.}) \\ \text{III)} \quad & 8 < x < 12 \rightarrow q(x) = \frac{[4 + (x-8)] \cdot 4}{2} \rightarrow \underline{q(x) = 2x - 8} \quad (\text{M.a.}) \\ \text{IV)} \quad & 12 \leq x \leq 16 \rightarrow \underline{q(x) = (4)^2} \rightarrow \underline{q(x) = 16} \quad (\text{M.a.}) \end{aligned}$$

Fonte: Elaborado por Gabriel.

O intervalo III a que Gabriel se referiu está relacionado ao deslocamento do ponto M no lado $\overline{CD}$ da figura plana do quadrado, e a medida da área será calculada mediante o cálculo da medida da área do trapézio. A transcrição dos diálogos a que seguem mostra com maior nitidez os argumentos apresentados por Gabriel:

Luiz: Forma um trapézio ... eu acho que está certo o que você fez e a expressão também, não é? Por sinal, é a mesma coisa que acontece quando o ponto tá se deslocando no retângulo...

Formador: A formação do trapézio? Como os alunos construiriam os intervalos do subdomínio?

Gabriel: Eu uso no intervalo III como menor que 12, e o intervalo IV como maior ou igual a 12. Dá uma olhada aqui ... (*Gabriel solicita que sua construção seja observada*).

Formador: Como os alunos fariam, então?

Luiza: Os alunos vão fazer isso mecanicamente e nem vão perceber, vocês não acham? Vai rolar isso ... tenho certeza, porque eles não vão se ligar na formação da figura e relacionar com os intervalos. De todo jeito, eu acho é que com o que aprenderam no 9º, vão ter problemas com as sentenças ...

Gabriel: No intervalo III, a área pedida é a de um trapézio quando M está entre os pontos C e D, mas não está em C e nem em D. A base menor que está variando, pode olhar aqui (*Gabriel mais uma vez mostra ao grupo sua solução*)! Se M percorrer uma unidade de C indo até D, teríamos $x = 9$, então a base menor seria 1. Ou seja, $9 - 8 = 1$. Se M percorrer três unidades até C, indo até D, teríamos $x = 11$, então a base menor seria 3. Ou seja, $11 - 8$. Portanto, a base menor é $x - 8$, com $8 < x < 12$. Nós precisamos ter isso em mente como vocês tão falando, porque claramente vai surgir essa dúvida... Pra explicar melhor, inclusive, acho bem legal usar o livro 9º ano e até pegar um desses exercícios e resolver na lousa pra contextualizar, sabe ...

Na transcrição da fala de Gabriel apresentada anteriormente percebe-se que o professor procura antecipar um possível equívoco na elaboração do intervalo do subdomínio por parte dos estudantes e faz por meio dos indícios de apropriação do recurso relacionados a essa parte da atividade. Pode-se também inferir que ele mobilizou um esquema associado à classe de situação provocada pela necessidade de ensinar a atividade aos alunos, de que é parte o invariante operatório ‘claramente vai surgir essa dúvida’.

O debate coletivo a respeito do deslocamento do ponto M no lado $\overline{CD}$ da figura plana do quadrado também possibilitou que outros participantes se apropriassem do recurso com a finalidade de esclarecer possíveis dúvidas dos estudantes, conforme é possível observar na próxima transcrição:

Formador: Pela lógica então, quando $M = D$, o trapézio se torna um quadrado?

Luiz: Se poderia considerar um trapézio degenerado ... eu lembro disso quando fiz uns problemas na universidade ... então quando a gente tiver mesmo resolvendo, depois dos alunos construírem entre eles, poderíamos falar nisso aí, até pra ajudar mais ...

Gabriel: Em Geometria Plana no nível do ensino médio, a gente não fala nisso, isto é, um quadrado não é igual a um trapézio. As definições são diferentes e podem confundir os alunos. Além disso, não vi até agora introduzir função assim ..., por isso, essa atividade tem potencial para introduzir função, eu acho ..., mas, olha ... quando a área vai se aproximando da área do quadrado e não teria diferença analítica ...

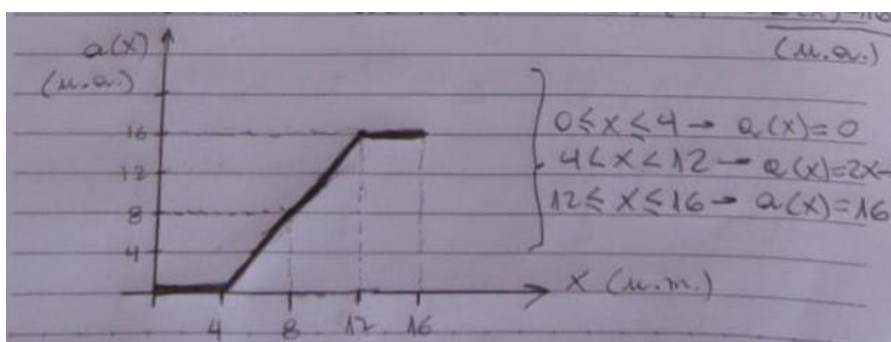
Formador: O que poderia acontecer com a interpretação dos alunos a respeito dos intervalos?

Lucas: Por isso que quando $12 \leq x \leq 16$, a área da figura é um quadrado e é igual a 16 ...

Gabriel: Mas na parte (III), apesar de ter calculado por área do trapézio e pela definição geométrica não fazer sentido, quando $M = D$, temos que no limite é 16 ... então não teria problema gráfico ou analítico e isso daria pra ser explorado tranquilamente. Olha aqui, no gráfico ...

Gabriel mostra aos demais participantes a representação gráfica da primeira atividade (Figura 65).

Figura 65 - Representação gráfica da FVSM do exercício 1 (SE-1) elaborada por Gabriel



Fonte: Elaborado por Gabriel.

De acordo com os diálogos e as produções elaboradas ao longo da discussão, foi possível constatar que Gabriel conseguiu externar claramente a maneira como elaborou o problema, evidenciando que seus conhecimentos se encontravam em uma forma operativa. É nessa forma de conhecimento, segundo Vergnaud (2013, p.134, tradução nossa), “que um sujeito é capaz não apenas de resolver um determinado problema e portanto, ser competente, mas de conseguir explicar seu processo de resolução aos colegas”.

A distinção entre as formas de conhecimento operativa e predicativa, propostas por Vergnaud (2013), de acordo com Messaoui (2020, p. 64, tradução nossa), “também são adequadas para descrever práticas documentais”. A resolução encontrada por Gabriel tornou-se um recurso material que foi compartilhado com Luiz, Lucas e alguns outros participantes nas formas de interações verbais e/ou durante a partilha das resoluções em papel, corroborando com as impressões colhidas por Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p. 6, tradução nossa) “de que quando os professores estão engajados em um trabalho documental coletivo, eles também podem desenvolver um sistema de recursos compartilhado”.

Relativamente à representação gráfica das FVSM nas atividades da SE-1, o formador questionou os participantes sobre a eventualidade da utilização de softwares. Luiz alegou que, em sua escola, ainda que houvesse um laboratório de informática, os professores não tinham por hábito usá-lo para desenvolver atividades de matemática devido a dificuldades com a grade horária, pois a maioria das disciplinas desenvolviam atividades no mesmo local, fazendo com que restasse pouco tempo para o desenvolvimento de projetos para todos. Por sua vez, Gabriel e Lucas entenderam viável articular a construção do gráfico a programas como o *GeoGebra*.

Um aspecto abordado pelo formador durante a resolução coletiva foi motivado pelo fato de que, diferentemente do que havia sido previsto no planejamento da configuração didática, o grupo não discutiu a possibilidade de os estudantes interpretarem as funções propostas nos exercícios como uma relação de proporcionalidade. Diante disso, o grupo pareceu perceber que tal incompreensão poderia acarretar uma produção equivocada das sentenças da FVSM.

O formador procurou ainda debater com o grupo a respeito das diferenças por meio das quais a SD elaborada coletivamente no 1º encontro presencial propunha a introdução ao ensino de função e das atividades existentes na SE-1, frisando a importância da FVSM no processo de aprendizagem envolvendo a compreensão da definição de função. Nesse sentido, ainda que as discussões a respeito da viabilidade da SE-1 em introduzir o ensino de função no 1º ano do EM eventualmente tivessem produzido desequilíbrios nas concepções dos participantes, naquele momento avaliou-se que apenas a vivência das próximas SEs poderiam trazer mais clareza a esse respeito.

Na última parte do 2º encontro presencial, acertou-se com o grupo que um 4º fórum de discussão sobre a introdução ao ensino de função apoiado em FVSM seria proporcionado no ambiente virtual *Moodle*. Nesse local, os participantes deveriam continuar a descarregar possíveis situações-problema que entendessem razoáveis para esse objetivo, cujas contribuições balizariam o próximo encontro presencial.

A SE-2

O terceiro 3º encontro presencial destinado ao trabalho com a SE-2 contou com a presença de todos os participantes, com exceção de Antônio, enquanto Fabíola, mais uma vez, participou remotamente, via conexão por *Skype*.

Conforme planejado, após a apresentação da pauta, os trabalhos foram iniciados pelo resgate da discussão realizada no encontro anterior, atividade que se estendeu por cerca de aproximadamente 20 minutos. Durante esse tempo, o formador procurou reforçar mais uma vez as diferenças existentes entre as escolhas feitas pelos participantes para elaborar a SD durante o 1º encontro presencial, bem como a proposta da SE-1 sobre introduzir o ensino de função recorrendo à FVSM. A estratégia teve por objetivo evidenciar duas maneiras de introduzir o ensino de função, tendo em vista o objetivo da situação de formação, qual seja proporcionar a apropriação do modelo de ensinar função por meio da FVSM.

O segundo momento do planejamento foi destinado à discussão das contribuições ao 4º fórum de discussão no *Moodle*. Foi constatado, entretanto, que grande parte dos participantes deixou de participar das atividades propostas, sendo necessário proceder a ajustes no contrato metodológico. De acordo com Sabra (2012, p. 67, tradução nossa), “a existência de uma certa cumplicidade dos participantes no envolvimento do projeto proposto” é condição para o estabelecimento de uma relação de confiança entre ambas as partes envolvidas no contrato, sendo necessário constantemente buscar ferramentas que visem aprimorá-lo.

Nesse sentido, propôs-se uma discussão com o grupo, na perspectiva de criar condições para um maior envolvimento com as contribuições no ambiente *Moodle*, argumentando-se sobre a importância desses dados para a investigação. Durante a discussão, os professores alegaram terem disposto de pouco tempo para acessar o ambiente na semana anterior e também na seguinte, em razão das demandas de trabalho nas escolas em que trabalham. Em face disso, acordou-se que, na semana seguinte, apenas os participantes que dispusessem de tempo fariam contribuições e, em contrapartida, ficou estabelecido um compromisso de maior envolvimento nos fóruns do *Moodle*.

Em seguida, objetivando dar continuidade aos trabalhos, foi solicitada ao grupo a resolução matemática da SE-2 e o estudo de sua viabilidade em introduzir o ensino de função nos mesmos moldes propostos no encontro presencial anterior. O formador abordou inicialmente a importância da contribuição das ciências naturais no processo de desenvolvimento da definição formal de função e o fato de uma das sentenças da atividade descrever um movimento acelerado representado por uma função polinomial do 2º grau.

Os participantes não apresentaram dificuldades em resolver matematicamente as atividades propostas pela SE-2, e o debate coordenado pelo formador centrou-se em sua viabilidade para introduzir o ensino de função junto aos estudantes do 1º ano do EM.

Um dos pontos discutidos foi levantado por Gabriel e centrou-se na possibilidade de os estudantes construírem os intervalos das sentenças de maneira equivocada. Ele ponderou que os números existentes na escala do gráfico existente na atividade poderiam ser mais legíveis e ainda uma questão com enunciado.

Formador: Qual é exatamente sua questão?

Gabriel: Considero que os alunos podem ter dificuldades em fazer os intervalos. As mudanças de velocidades em cada intervalo como instantâneas ... Apesar de serem fisicamente improváveis, a forma como o movimento é descrito sugere isso. É algo usual e recorrente nos exercícios de física. Mas pode ser evitado, eu acho.

Formador: Entendo. Os dados utilizados não se aproximam de uma situação real?

Gabriel: Sim, poderiam ser fisicamente reais. Dá impressão de que as questões são mesmo feitas por matemáticos. Mas a problemática é na física ... não podemos esquecer que estão (*os alunos*) estudando essa matéria ao mesmo tempo (*que função*) ... de qualquer maneira, eu mesmo acho que as questões são bem interessantes se pensarmos que queremos introduzir função pela função de várias sentenças ... é só uma preocupação minha mesmo ...

Bruno: Acho que não teria tanto problema, Gabriel. É um problema de física, na verdade, e conclama a construção de funções. É interessante que seja ao mesmo tempo do estudo na física porque dará sentido à introdução de função, e é mesmo apropriado aí falar de uma função quadrática por causa do MUV.

Gabriel: Você tem mais experiência do que eu, né Bruno. Pode ser que não aconteça, mas é uma preocupação ...

Percebe-se na colocação de Gabriel uma preocupação com o enunciado da atividade e sua compreensão por parte dos estudantes, o que levaria a pensar que isso poderia indicar um processo de apropriação da situação-problema. De acordo com Bellemain e Trouche (2016, p. 12), “os invariantes operatórios podem

evoluir no confronto com novas circunstâncias de ensino (novos recursos etc.)". Nesse sentido, é possível inferir que o esquema documental mobilizado por Gabriel para antecipar como seus alunos enfrentariam dificuldades na elaboração da FVSM devido a inconsistências no enunciado da atividade, pudesse estar se acomodando, com base na interação com as opiniões de seus colegas e do formador, bem como nas opiniões divergentes das suas.

Durante as discussões, ficou evidente que o grupo considerou a atividade apropriada para introduzir o ensino de função com base na FVSM em um contexto da física. Lucas, por exemplo, argumentou que a aplicação dessa atividade deveria ocorrer concomitantemente ao ensino da cinemática, pontuando que os estudantes mobilizariam conhecimentos sobre função horária para elaborar a função e que suas sentenças integrantes favoreceriam uma discussão posterior sobre a definição de função, sem que fosse necessário utilizar somente funções afim.

O sujeito de pesquisa Luiz, por sua vez, pontuou que a atividade não deveria ocasionar obstáculos aos estudantes para elaborar a FVSM, pois a atividade descreve o movimento do automóvel e seu contexto está de acordo com os preceitos da BNCC, que incentiva a elaboração de atividades interdisciplinares. Deduziu-se disso que Luiz desenvolvia um trabalho documental com o intuito de introduzir o ensino de função recorrendo à FVSM e articulando os recursos da SE-2 e a BNCC.

Na parte final do encontro, o formador lembrou o combinado com o grupo de participantes a respeito da participação no 5º fórum de discussão no *Moodle*, preparatório para o 4º encontro presencial, e solicitou ao sujeito de pesquisa Luiz que inserisse no ambiente virtual as soluções matemáticas das duas SEs debatidas, a fim de que todos tivessem acesso ao material produzido.

A SE-3

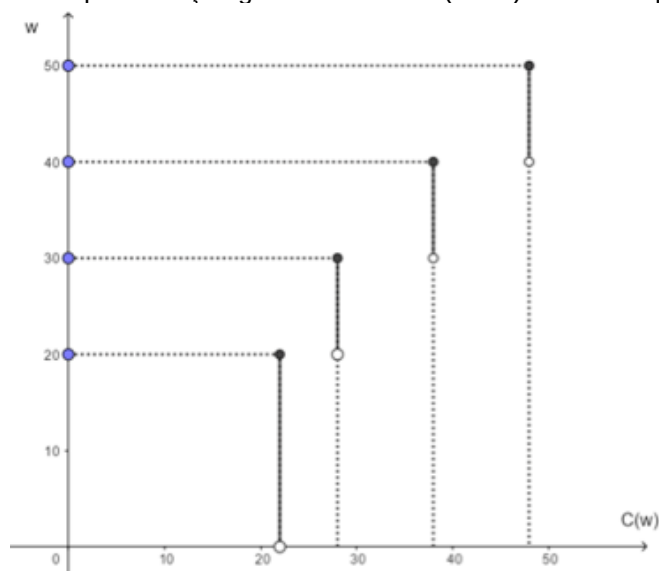
Conforme acertado previamente com o grupo, o 4º encontro presencial, destinado a debater coletivamente a SE-3, não contou com contribuições dos participantes no 5º fórum virtual. Identificou-se apenas a postagem de Luiz, contendo a resolução matemática da SE-1 e SE-2. Após a leitura da pauta dos trabalhos, os participantes foram orientados pelo formador para que comesçassem a debater as atividades propostas. Em razão do exercício suscitar o uso de

tecnologia digital para a elaboração de um gráfico, os participantes puderam utilizar os computadores disponibilizados, conforme planejado, em um dos laboratórios de Informática da PUC-SP. O encontro não contou com as presenças de Luiza e Antônio, enquanto Fabíola participou remotamente com auxílio do *Skype*. Após esse momento inicial, o formador solicitou ao grupo que iniciasse a resolução coletiva da SE-3, cujo objetivo central consistiu em propiciar reflexões sobre a introdução ao ensino de função alicerçado em FVSM por meio de atividades envolvendo um tipo de descontinuidade.

Repetindo a tendência dos encontros anteriores, os professores não tiveram dificuldades em resolver matematicamente as atividades propostas pela SE-3, e, em relação à representação gráfica da FVSM, foi possível observar algumas contribuições sobre sua viabilidade em potencializar a introdução ao ensino de função em contexto envolvendo descontinuidade.

Como o trabalho estivesse sendo desenvolvido em um laboratório de informática, Lucas utilizou o programa *GeoGebra* disponível em um dos equipamentos para elaborar a representação gráfica da FVSM suscitada pela SE-3. Ao fazê-lo, comentou que em algumas oportunidades os estudantes trocam os eixos do gráfico (Figura 66), possibilitando uma discussão que considerou apropriada para o aprendizado de função.

Figura 66 - Esboço da representação gráfica da FVSM (SE-3) elaborada por Lucas



Fonte: Elaborado por Lucas.

A transcrição do diálogo a seguir evidencia os detalhes apresentados por Lucas a respeito do cenário esboçado na Figura 66.

Formador: Lucas, poderia detalhar que cenário imaginou?

Lucas: A discussão com os alunos pode ser interessante porque vai possibilitar a gente discutir sobre domínio e imagem dessa função. Eu já vi isso acontecer algumas vezes, porque os alunos invertem os eixos, e daí, se o professor deixar passar, nem vão perceber que terá impacto, não é? Isso poderá fazer com que eles (*os alunos*) reflitam sobre as noções de domínio e imagem, e vai ajudar a definir função mais adiante, eu acho.

Alfredo: Sim, olhando esse gráfico, Lucas ... está correto, mas o que você fez foi a inversão dos eixos ... A gente podia então colocar as funções aí no *GeoGebra* pra ver a construção toda, e o Gabriel poderia ver como vai ficar o gráfico. Agora, uma coisa que me ocorre aqui ... que eu tô vendo, que ao inverter os eixos, naturalmente você está de fato modificando mesmo o domínio e (a) imagem. O *GeoGebra* pode ajudar nessa discussão, como uma maneira mais rápida ... sei lá ... mais direta de tratar isso ...

Gabriel: Sim, podemos fazer isso no *GeoGebra*, mas quero esclarecer apenas, enquanto um aluno chama um eixo de w que corresponderia às abcissas, né, você, no caso, viu que às vezes eles fazem uma inversão né, Lucas? Daí vão colocar como custo, não é Lucas? Então, naturalmente deveria ficar tudo paralelo ao eixo x ... as abcissas, no caso que você fala, fica tudo perpendicular ... tudo ortogonal, as abcissas... A gente poderia então pensar nessa possibilidade como uma maneira de viabilizar o ensino desse problema. Se a gente já tá vendo que pode acontecer, o *GeoGebra* poderia ajudar o pessoal enxergar a construção, não é?

Conforme foi possível observar, os participantes debateram alternativas para que o exercício fosse ensinado por meio de outras abordagens, entre elas a articulação de dois recursos curriculares, a atividade envolvendo o esboço do gráfico e o programa *GeoGebra*. O uso de tecnologias digitais, aliás, segundo os estudos feitos por Gonçalves e Breidenbach et al (1992), Lima (2008) e Silva (2018), sugerem que o ensino de função feito sob tais circunstâncias pode favorecer uma aprendizagem mais consistente.

Ao trazer à tona sua experiência com a troca dos eixos durante a construção de gráficos por parte dos estudantes, Lucas mobilizou uma classe de situação desenvolvida anteriormente ao longo de sua experiência profissional. A situação proposta fez com que ele desenvolvesse um esquema articulando os recursos do *GeoGebra*, a construção do gráfico proposto pela SE-3 e um cenário de inversão da ordenada e da abscissa. A afirmação 'isso poderá fazer com que os alunos reflitam sobre as noções de domínio e imagem' é uma regra de ação integrante do invariante operatório desse esquema. A combinação de elementos disponíveis e novos, segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p. 5, tradução

nossa), “com o intuito de atingir um certo objetivo didático”, está diretamente ligada ao desenvolvimento e/ou mobilização de esquemas.

Uma outra questão levantada pelo formador sobre a SE-3, mas pouco debatida, recaiu sobre a possibilidade de os estudantes apresentarem dificuldades com relação à construção do domínio da função, uma vez que poderiam interpretar que os pontos descontínuos teriam dois correspondentes. O sujeito de pesquisa Luiz entendeu que essa poderia ser uma ótima oportunidade para ensinar a noção de descontinuidade, tendo sido corrigido por Gabriel e os demais participantes que, nesse caso, entenderam que a SE-3 poderia ser ‘trabalhada com os estudantes’ sem a necessidade de ‘conceituar descontinuidade’.

Apesar de um certo grau de autonomia em resolver as SEs propostas ao longo dos últimos três encontros presenciais, não se teve clareza acerca da apropriação dos participantes em introduzir o ensino de função com base em FVSM. Paralelamente a isso, sabe-se também que a evolução do trabalho documental dos professores necessita, segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p. 8, tradução nossa), “de uma diversidade de recursos que alimente esse trabalho, além de uma variedade de interações (coletivas, sociais etc)”, indicando a necessidade de continuação do processo formativo idealizado pela situação de formação.

Na parte final do encontro, acertou-se com o grupo que o 6º fórum de discussão virtual seria proposto durante a semana, a fim de que os participantes avaliassem a possibilidade de introduzir o ensino de função fundamentado em FVSM por meio de uma conta de consumo.

A SE-4

O 5º encontro presencial, dedicado à resolução matemática e discussão da viabilidade em introduzir função por meio de uma conta de consumo ocorreu com a presença de todos os participantes. Conforme planejado, inicialmente informou-se a pauta do trabalho e, como das vezes anteriores, o formador retomou parte da discussão realizada no 4º encontro realizado na semana anterior, que tratou da SE-4, procurando focar sua intervenção no fato de a atividade ter envolvido a noção de descontinuidade. Tal estratégia foi escolhida pois a SE-4 poderia ensejar um

cenário de introdução de função com base na FVSM por meio da noção de descontinuidade.

Ao contrário dos encontros anteriores, dessa feita houve intensa contribuição por parte do grupo dos professores no 6º fórum de debates virtual durante a semana que precedeu o último encontro presencial da OI-2, o que demonstrou a importância da alteração feita no contrato metodológico ainda durante o 3º encontro presencial.

Um maior comprometimento dos participantes com a coleta de dados, supõe, de acordo com Sabra (2012, p. 68, tradução nossa), “uma reflexão sobre suas próprias atividades”. Segundo o autor, algumas ações podem estimulá-las, e a escolha de determinadas ferramentas, especialmente acordadas entre o pesquisador e os sujeitos de pesquisa, podem potencializar um maior êxito nos objetivos propostos entre ambas as partes. Inferiu-se, quanto ao cenário específico do fórum virtual, que o fato de o formador ter proposto uma discussão sobre a viabilidade em introduzir função por meio de uma conta de luz possa ter desencadeado uma mudança de atitude por parte dos professores. Cabe salientar que, de acordo com o que foi estabelecido no 4º encontro presencial, o formador fez uma postagem no 6º fórum do *Moodle*, inserindo a SE-4 e propondo sua discussão na semana que precedeu o 5º encontro presencial.

Diferentemente do que foi inicialmente pensado, o grupo foi construindo uma alternativa à proposta do formador. Um dos participantes (Bruno) realizou uma postagem no 6º fórum virtual (Quadro 16), propondo que, ao invés de utilizar uma conta de luz, o grupo optasse por uma outra conta de consumo (de água). Ele explicou que fez uso de sua própria conta de água, isto é, com dados reais, mas que, na segunda parte da situação-problema alterou-os, de maneira a proporcionar a elaboração de uma função descontínua.

Quadro 16 - Conta de água proposta por Bruno - SE-4

Irei transcrever um tipo de problema que pode ser aplicado para introduzir continuidade/descontinuidade de funções, tendo como referência uma questão do cotidiano dos alunos e que vai trazer a função de várias sentenças.

Conta de Água

Faixa de Consumo em m ³	Tarifa em R\$
Até 10 m ³	26,18 (Tarifa Mínima)
De 11 a 20 m ³	4,10 por m ³
21 a 30 m ³	10,23 por m ³
31 a 50 m ³	10, 23 por m ³
Acima de 50 m ³	11, 27 por m ³

Responda:

a) Qual seria o valor pago por uma família, se consumisse os seguintes valores: 7 m³, 10 m³, 11 m³, 13m³, 14 m³ e 25 m³?

b) Escreva uma função g que nos dá a cada valor x de consumo o valor da tarifa a pagar V . Considere o domínio da função o conjunto dos números inteiros não negativos e o contradomínio da função o conjunto dos números reais.

c) Construa o gráfico desta função g .

d) A função g apresenta pontos de descontinuidade? Justifique.

e) Vamos agora fazer uma pequena variação nessa tabela. Em geral, isso não é feito nas residências, mas, aqui iremos supor que a medição do consumo de água poderá ser fracionária, isto é, uma família pode consumir, por exemplo, 4,70 m³.

Assim, com essa reformulação, se a família consumir até 10 m³, ela irá pagar a tarifa de R\$ 26,18. Se a família consumir 10,45 m³, ainda pagará R\$ 26,18. Se o consumo for de 11 m³, o valor a pagar será de R\$ 30,28. Caso a família consuma 11,25 m³, pagará R\$ 30,28. Se consumir 11,90 m³, ainda pagará R\$ 30,28. Porém, caso a família consumir 12 m³ ou 12,50 m³ ou 12,99 m³, ela pagará o valor de R\$ 34,38.

Nesta nova situação, qual seria o valor pago por uma família, se consumisse os seguintes valores: 7 m³, 10 m³, 11 m³, 13m³, 13,25 m³, 14 m³ e 25 m³?

f) Escreva uma função f que nos dá a cada valor x de consumo o valor da tarifa a pagar V . Considere o domínio da função o conjunto dos números reais não negativos e o contradomínio da função o conjunto dos números reais.

g) Construa o gráfico desta função f .

h) A função f apresenta pontos de descontinuidade? Justifique.

Fonte: <https://moodle2019.pucsp.br/course/view.php?id=586>, 2019.

Os outros participantes da formação referendaram a proposta feita por Bruno, por meio de várias postagens. Luiz, por exemplo, concordou com a proposta feita, alegando que a conta de luz proposta pelo formador ainda teria de ser manipulada no sentido de se obter uma função descontínua. Gabriel e Lucas, por outro lado, concordaram que a conta de água proposta por Bruno era adequada nesse contexto, com a ressalva de que o item 'h' deveria ser reformulado. pois a ideia de descontinuidade deveria ser elaborada pelos estudantes.

Durante o debate ocorrido no 6º fórum do *Moodle*, após serem perguntados pelo formador sobre como as atividades exploravam a noção de descontinuidade, Gabriel, e posteriormente Lucas, argumentou que os itens existentes na letra 'e' da atividade foram na verdade inventados por Bruno. Segundo Lucas, os valores de 7, 10, 11, etc. foram criados com o intuito de que os alunos aprendessem a manipular a tabela 'conta de água', confrontando-a com o texto explicativo da atividade, e viessem a supor que a empresa que administra o fornecimento de água da cidade pudesse cobrar valores como 10,7 por exemplo. Obviamente, segundo Lucas, essa não é a realidade, pois a empresa cobra 10, 11 ou 12 etc., isto é, para desenvolver a ideia de descontinuidade seria necessário o trabalho com números racionais, logo, foi necessário manipular os dados.

Em face dessa circunstância não prevista, o formador decidiu apoiar a iniciativa dos professores, pois não apenas a ideia da conta de consumo continuava em questão, possibilitando que a introdução ao ensino de função fosse contemplada recorrendo ao uso de FVSM, como evidenciava um processo em curso de apropriação do modelo planejado pela situação de formação.

Tendo em vista a situação proposta, as ações de Bruno denotam que o participante desenvolveu um esquema documental para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM a partir da FVSM, valendo-se do recurso conta de água. Ele adaptou o recurso no sentido de favorecer o surgimento de uma descontinuidade, na medida em que era importante que os 'alunos descobrissem a noção de descontinuidade' por meio da construção das funções existentes no problema, o que configura a existência de um invariante operatório associado ao esquema. Inferiram-se nas ações de Bruno indícios de apropriação do modelo em introduzir função com base em FVSM, além do fato de suas contribuições terem desencadeado o movimento de Gabriel, Lucas e Luiz na mesma direção, por meio da mobilização do recurso.

O esquema em questão apresentou outras características, podendo-se identificar o objetivo principal, relacionado à introdução do ensino de função, apoiado em uma conta de consumo por meio da noção de descontinuidade. Alguns objetivos secundários também foram identificados, tais como: verificar no sistema de recursos a existência de algum recurso com características similares, criar um

recurso com base em informações selecionadas e adaptar as questões propostas de maneira a contemplar a noção de descontinuidade.

Inferiu-se que a conta de água original do participante Bruno e a SE-3 que abordou um tipo de descontinuidade pudessem ter o *status* de recursos-mãe para Bruno, Gabriel, Lucas e Luiz, enquanto a conta de água alterada pelas contribuições dos professores durante o fórum no *Moodle* representou um recurso-filho, com o objetivo específico em introduzir o ensino de função no 1º ano do EM explorando um cenário de descontinuidade.

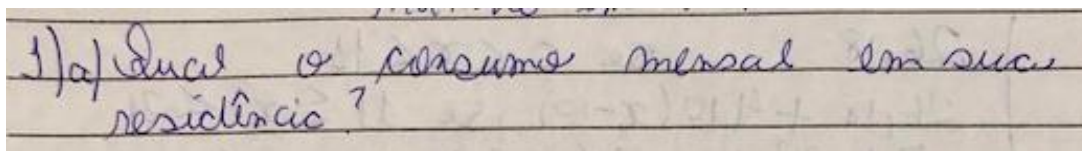
Dado que o debate virtual ocorrido no 6º fórum virtual acelerou as discussões sobre introduzir função por meio da conta de água proposta por Bruno, acrescidas das contribuições elaboradas por Gabriel, Lucas e Luiz, o formador dedicou o tempo de 90 minutos para a resolução matemática e a discussão da atividade. Como nos anteriores, o encontro ocorreu em um dos laboratórios de informática da PUC-SP, e o cenário físico em que se desenvolveu foi o mesmo disponibilizado no 5º encontro presencial.

Os três sujeitos de pesquisa lideraram a resolução matemática da SE-4 sobre a conta de água, e a discussão sobre sua viabilidade em introduzir o ensino de função e suas ações trouxeram indícios de apropriação do modelo tendo como base a FVSM. Quando questionados inicialmente pelo formador a respeito da organização em que as situações-problemas da SE-4 foram apresentadas no *Moodle*, foi possível observar que os professores se preocuparam em como a noção de descontinuidade poderia ser explorada na atividade. Gabriel ponderou que se deveria ter por princípio desafiar os alunos a resolver uma atividade sobre conta de água envolvendo função, sem que a noção de descontinuidade estivesse explícita no enunciado, pois entendia que a função deveria ser construída pelos estudantes ao longo do processo de sua resolução.

Nesse sentido, várias questões do enunciado original elaborado no *Moodle* foram alteradas. A primeira delas foi proposta por Luiz (Figura 67) e teve por objetivo lidar com a conta de água real, do cotidiano dos alunos. Ele argumentou que era mais apropriado solicitar dados sobre o consumo das residências deles como estratégia para elaborar a FVSM. Luiz argumentou que a nova BNCC propunha que tal atividade pudesse ser desenvolvida durante o ensino de função.

O professor relatou não ter experimentado a atividade com seus alunos, mas lembrou que esse procedimento foi proposto em um curso ministrado pela Secretaria de Ensino de São Paulo sobre o ensino de matemática na perspectiva da nova BNCC.

Figura 67 - Alteração do item (a) da conta de água no 6º Fórum virtual



Fonte: Elaborado por Luiz.

O fato de Luiz continuar a propor a introdução de modificações na atividade, com o objetivo de dar significado à aprendizagem dos alunos, denota que ele se apropriou do modelo em introduzir função com base na FVSM. Ao articular o recurso correspondente à sugestão existente na BNCC, com a conta de água elaborada no *Moodle*, Luiz também desenvolveu um esquema documental cuja assertiva ‘lidar com dados reais’ era parte integrante de um invariante operatório, cuja ação culminou com a alteração do recurso.

Em outro momento, após outro questionamento levantado pelo formador sobre a maneira pela qual os estudantes poderiam interpretar a tabela com os dados da conta de água, Gabriel, Luiz e outra participante continuaram aprimorando a atividade e trazendo novas evidências de apropriação do modelo.

Gabriel: Será que eles (*alunos*) ... vendo essa família de pontos, 7, 10 ... vão sacar que é uma função contínua?

Luiz: ... Na minha cabeça, como eu pensei ... eles iriam resolver por meio da tabela mesmo ... por aritmética mesmo ... lembrando que nem devemos falar da palavra descontinuidade, né?

Lucas: Mas precisamos ver essa tabela, porque tem valores repetidos, não é? O 10, 23 ...

Bruno: Puxa, eu não tinha nem reparado que os valores estavam repetidos.

Luiza: Porque, gente ... isso é a primeira coisa que os alunos vão notar ... vão dizer que tem erro ... E tem outra coisa ... até 50 vai pagar o mesmo? E qual a vantagem? A vantagem é pagar de 11 a 20 ou de 21 a 50?

Gabriel: Mas cuidado, Luiza, ali é por metro cúbico ... Na verdade, você está incrementando ... Até 10 paga um valor fixo, e aí de 11 a 20, está pagando 4,10 a mais ... De 21 a 50, na verdade, por cada um metro cúbico ... além daqueles 26 ... mais 10,23 por metro cúbico. O que pode acontecer mesmo é eles questionarem por que de 21 a 50 ... isso sim.

Em face da maneira como procuravam incorporar a noção de descontinuidade no contexto do problema, inferiu-se naquele momento que os sujeitos de pesquisa traziam evidências de sua apropriação ao modelo em

introduzir o ensino de função com base em FVSM, além do fato de essa integração corroborar com observações feitas por Breidenbach et al (1992, p. 227, tradução nossa) “de que o uso de descontinuidade pode propiciar o enriquecimento da experiência matemática a ser vivenciada pelos estudantes”, contribuindo para a compreensão de sua definição formal.

Outra evidência do processo de apropriação ocorreu quando o grupo discutiu a respeito da possibilidade de os estudantes apresentarem dificuldades durante a resolução do item b da SE-4 (Figura 68).

Figura 68 - Solução do item b da conta de água proposta por Bruno

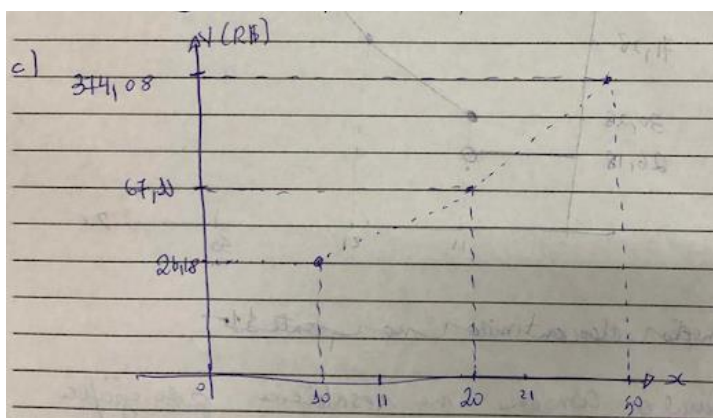
$$g(x) = \begin{cases} 26,18 & \text{Se } 0 \leq x \leq 10 \\ 26,18 + 4,10 \cdot (x-10) & \text{Se } 10 < x \leq 20 \\ 67,18 + 10,23 \cdot (x-20) & \text{Se } 21 < x \leq 50 \\ 374,08 + 11,27 \cdot (x-50) & \text{Se } x > 50 \end{cases}$$

Fonte: Elaborado por Luiz.

Segundo Lucas, o fato de o contradomínio estar situado no conjunto dos números reais e o domínio, não, eventualmente traria dificuldades aos estudantes. Do mesmo modo a construção da segunda sentença da função seria dificultada, devido à necessidade de se incluir a diferença $x - 10$, mas o professor poderia se contrapor a isso, sem que a sentença fosse revelada ao estudante, tendo sido acompanhado nesse raciocínio pelos demais professores.

Outro ponto suscitado pelo formador se deu a respeito da representação gráfica da FVSM (Figura 69) e quais cenários poderiam ser antecipados pelos professores quanto a sua elaboração. Conforme é possível observar na transcrição a seguir o grupo mostrou quanto a isso, alguma preocupação com a questão que envolvia descontinuidade.

Figura 69 - Representação gráfica da função. Conta de água proposta no fórum virtual



Fonte: Elaborado por Luiz.

Formador: Como vocês acham que (os alunos) poderiam responder?

Gabriel: ...Eu acho que essas respostas ainda vão dar na questão do domínio, então eu vejo que, se tiver dificuldade vai ser aí, porque não tem buraco aí, pois são só números inteiros. Foi aí que eu percebi que é contínuo ... Vamos ver aqui o gráfico (Gabriel refere-se ao Gráfico apresentado na Figura 87) ... No gráfico é que a gente costuma mostrar a descontinuidade para os alunos. ..., mas esse gráfico aqui que a gente fez vai ser tudo contínuo e teria que ter aqui pontos do domínio entre 10 e 11, que ele conseguiria encontrar valores da imagem ...

Luiz: E nesse caso como são números inteiros ... não tem ... então a função ... ela vai ser contínua já.

Antônio: Só se a gente fizer o seguinte, então ... deixar eles graficarem assim mesmo, e num segundo momento a gente entra na discussão, se é contínua ou não ... Retirando uma faixa, por exemplo ... E fazer a pergunta ... Deixou de ter relação?

Lucas: Vai ser descontínua, por que não teria reta no gráfico? É isso?

Bruno: Isso, vai saltando ... Essa reflexão será necessária ... Os alunos vão precisar fazer, né?

Gabriel: Exato, podemos discutir o gráfico com eles, evidenciando que os dados, por se tratar de números inteiros, estão evidenciando uma continuidade ... E aí vêm as provocações na letra 'e' ... As atividades vão levar eles (os alunos) a definir função sem que a gente precise falar de continuidade ou ficar só numa sentença, né?

A leitura do diálogo leva a crer que os conhecimentos mobilizados por Gabriel sobre a manipulação do domínio da função como estratégia de aprendizagem para a compreensão da noção de descontinuidade fizeram parte de um esquema documental desenvolvido ao longo de sua atividade profissional, cuja característica esteve relacionada à construção do esboço do gráfico da função. Normalmente, em problemas envolvendo uma FVSM, de acordo com Hatisaru e Erbas (2015, p. 17, tradução nossa), “se os alunos não fizerem um esboço do gráfico, poderão confundir as relações de correspondência, especialmente se envolverem algum tipo de descontinuidade”, pelo fato delas aparecerem em mais de uma sentença.

Por outro lado, entendeu-se que o compartilhamento de conhecimento matemático e didático entre os sujeitos de pesquisa, propiciado pela vivência situação de formação e envolvendo a conta de água, pode ter impactado em sua documentação, ratificando as impressões de Rocha, Wang e Trouche (2017, p. 288, tradução nossa) “de que a experiência desenvolvida pelos professores em coletivos amplia seu trabalho documental”.

Na parte final da discussão, o formador perguntou aos participantes sobre a eventualidade de utilizar o recurso do *GeoGebra* para esboçar o gráfico correspondente à letra ‘g’ da atividade como os estudantes. Lucas ponderou que essa estratégia didática talvez não fosse apropriada, pois entendia que as funções da SE-4 seriam de difícil manipulação por parte dos estudantes. Nesse sentido, o formador questionou se não seria apropriada a realização de um treinamento para uso do programa, voltado especificamente para a manipulação de funções, mas outros participantes não se mostraram muito favoráveis, possivelmente pelo fato de o encontro presencial estar chegando ao seu final.

Acertou-se com os participantes a realização do 7º fórum no *Moodle* precedendo o 6º encontro presencial, tendo por objetivo a proposição de atividades com o intuito de elaborar uma SSE para introduzir o ensino de função com base na FVSM para estudantes do 1º ano do EM, a ser aplicada nas escolas onde lecionam os sujeitos de pesquisa Gabriel, Lucas e Luiz. O participante Luiz ficou responsável por compartilhar com o coletivo, por meio de postagem no 7º fórum, a solução matemática da SE-4.

Avaliou-se, por fim, que a vivência da SE-4 possibilitou que os sujeitos de pesquisa tivessem avançado no sentido de apropriar-se da maneira de introduzir o ensino de função baseado em FVSM, sobretudo pelo protagonismo demonstrado em sua resolução matemática e, em seguida, na discussão sobre sua viabilidade.

6.5.2.2 CONCLUSÕES SOBRE A SITUAÇÃO DE FORMAÇÃO

Durante o transcorrer da situação de formação proporcionada pela OI-2, foi necessário repactuar o contrato metodológico com os participantes, a fim de que fosse possível obter um maior compromisso dos sujeitos de pesquisa com o processo de coleta de dados da investigação. O acerto revelou-se apropriado,

culminando num maior envolvimento dos professores no 6º fórum virtual, potencializando a obtenção de dados e ampliando a capacidade de acompanhamento de seus processos de documentação.

Com base nesses acompanhamentos, pode-se concluir que a vivência da situação de formação favoreceu a apropriação do modelo em introduzir o ensino de função com base na FVSM por parte dos três sujeitos de pesquisa, cada uma de uma maneira distinta.

Percebeu-se, durante o trabalho com a SE-1, que as contribuições iniciais de Gabriel estiveram alinhadas com seu sistema de recursos, período em que continuava a defender uma ênfase na noção de notação para introduzir o ensino de função. Confrontando tal evidência e o decorrer do debate com os demais participantes, identificou-se que ele mobilizou um esquema provocado pela necessidade de ensinar as atividades da SE-1, cujo invariante operatório ‘claramente vai surgir essa dúvida’ era parte integrante. Corroborando com observações feitas por Vergnaud (2013), o professor também demonstrou aos demais participantes a maneira como elaborou as atividades, evidenciando que os conhecimentos por ele mobilizados durante essa ação encontravam-se em uma forma operativa.

A seguir, serão apresentados os dados obtidos pela situação de organização, seguidos de sua discussão e análise.

6.5.3 SITUAÇÃO DE ORGANIZAÇÃO

A situação de organização intitulada ‘organizar uma SSE para introduzir o ensino de função com base em FVSM no 1º ano do EM’ está incluída na classe de situações ‘organizar uma SSE para introduzir o ensino de função’. Foi planejada visando criar condições para que os sujeitos de pesquisa desenvolvessem, no ambiente coletivo da formação continuada, o documento SSE posteriormente aplicado junto a estudantes de escolas em que esses sujeitos atuam, e, com isso, proporcionar a continuidade do acompanhamento dessa documentação. Para tanto, partiu-se do princípio de que os sujeitos de pesquisa haviam se apropriado do modelo para introduzir função a partir da FVSM por meio da vivência das situações de reflexão e formação.

De modo a viabilizar a situação de organização, e com isso a elaboração do documento SSE e o acompanhamento da documentação dos sujeitos de pesquisa, foi elaborada a OI-3, cujos detalhes são apresentados a seguir.

6.5.3.1 OI-3

Na seção corrente são apresentados a configuração didática e o modo de execução planejados para viabilizar a situação de organização e, por fim, o desempenho didático alcançado com o planejamento da orquestra.

A situação de organização foi planejada para acontecer em dois encontros presenciais, com duração de 3 horas, no campus da PUC-SP, nos dias 19 e 26/10/2019. Para preparar e dar suporte às discussões realizadas nesses encontros, foram organizados dois fóruns no ambiente *Moodle* durante as semanas que precederam as reuniões presenciais.

Entendeu-se que os sujeitos de pesquisa haviam se apoderado do modelo para introduzir o ensino de função com base na FVSM e mobilizariam recursos proporcionados pelas quatro SEs, além de outros de existentes em seus sistemas de recursos, com o fim de organizar o documento SSE para ser aplicado oportunamente junto a alunos das escolas em que exerciam a docência no ano de 2019.

Considerando o fato de a formação se desenvolver em um ambiente coletivo, esperou-se que as discussões a serem realizadas nos dois fóruns do *Moodle* fossem caracterizadas por contribuições que visassem a organização da SSE, a partir do modelo apreendido, com o acréscimo de outros recursos eventualmente propostos por seus participantes.

Tais contribuições viriam prover os encontros presenciais a serem liderados pelo formador, criando condições para a organização da SSE, ocasião em que seria possível acompanhar a construção do documento por meio da identificação de recursos e esquemas utilizados pelos sujeitos de pesquisa.

A organização do espaço físico para a realização dos dois encontros presenciais da situação de organização foi idêntica à realizada nos dois últimos encontros da OI-2, pois entendeu-se conveniente munir os participantes de

ferramentas tecnológicas para a organização da SSE, posto que as SEs que integram o modelo para introduzir o ensino de função conclamam a utilização de tecnologia digital.

Modo de Execução da OI-3

Para que as discussões nos fóruns do *Moodle* favorecessem o acompanhamento da documentação dos sujeitos de pesquisa, o formador reiterou - por meio do envio de e-mail, mensagens no grupo WhatsApp e avisos nos encontros presenciais - que os integrantes da formação continuada/participantes deveriam ingressar no ambiente virtual pelo menos em duas oportunidades em cada um dos fóruns. Sugeriu que, no primeiro ingresso, os participantes realizassem postagens propondo formas de organização da SSE, acompanhadas de justificativas matemáticas e/ou didáticas e, em um segundo momento, contribuíssem nos debates.

Durante a realização dos dois encontros presenciais, entendeu-se conveniente continuar com o trabalho em um único grupo, devido ao número reduzido de participantes, bem como dispor da alternativa por participação remota via conexão *Skype*, destinada àqueles (as) integrantes que eventualmente necessitassem se ausentar dos encontros.

A dinâmica de execução dos dois encontros presenciais foi pensada de maneira a proporcionar a organização do documento SSE bem como a identificação de esquemas e recursos utilizados pelos sujeitos de pesquisa. Para tanto, a pauta de trabalho visou dispor de mais tempo, de modo que os participantes se dedicassem ao máximo a esse trabalho, liderado pelo formador. Nesse sentido, organizaram-se os encontros da seguinte forma:

- ✓ Resgate das contribuições nos fóruns virtuais: 40 minutos;
- ✓ Debate coletivo sobre a organização da SSE: 120 minutos e
- ✓ Planejamento futuro: 5 minutos.

Planejou-se que os dados referentes à execução da situação de organização da SSE seriam obtidos da seguinte forma: 1) vídeo operado por um profissional em comunicação, cuja câmera seria colocada em local estratégico da sala de aula, com o intuito de captar as interações entre os participantes; 2) áudio

recolhido com auxílio do celular do pesquisador e do profissional de comunicação; 3) protocolo de observação preenchido por um observador para registrar o trabalho documental dos sujeitos de pesquisa; 4) diálogos produzidos pelo grupo nos fóruns de discussão virtual e ao longo dos dois encontros presenciais e 5) recursos mobilizados e/ou produzido, bem como o documento SSE.

A fim de proporcionar a análise dos dados obtidos na vivência da situação de organização da SSE à luz do referencial teórico da ADD, planejou-se confrontar o conteúdo obtido por meio de áudio e vídeo com as notas produzidas pelo observador, além da identificação de recursos e esquemas documentais mobilizados e/ou produzidos com o fim de inferir acerca da documentação dos sujeitos de pesquisa.

Desempenho Didático da OI-3

Todos os participantes da formação continuada estiveram presentes no 6º encontro presencial e o primeiro destinado à organização da SSE para introduzir o ensino de função para estudantes do 1º ano do EM, sendo que a participante Fabíola participou do encontro virtualmente por meio de conexão *Skype*.

Ao dar início ao 6º encontro presencial, o formador compartilhou com o grupo as postagens realizadas no 7º fórum do *Moodle*. Especificamente em relação a este fórum, foram observadas intensas contribuições, e em grande número, por parte dos participantes, que continuaram a discussão sobre a conta de água, dando início à organização da SSE.

Uma polêmica provocada pela participante Fabíola deu início ao debate virtual. A participante questionou a maneira pela qual a proposta da SE-4 havia sido elaborada, argumentando que até se poderia solicitar aos estudantes dados a respeito de suas contas de água, mas que a atividade já deveria ser proposta aos alunos por meio de uma conta de consumo real. Para sustentar sua argumentação, Fabíola inseriu em sua postagem uma imagem (Figura 70) de sua conta de água particular e propôs que o trabalho fosse repensado a partir dessa premissa, pois entendia que essa poderia produzir melhores resultados para a compreensão de função, até porque assim sugerem os documentos curriculares nacionais.

mais R\$ 4,94 referente ao valor da tarifa). De fato, nessa faixa de consumo há um salto no valor da taxa, resultando uma função com duas leis, isto é, $f(x) = 3,40x$ para $0 \leq x \leq 10$ e $f(x) = 34 + 3,94x$ para $11 \leq x \leq 20$.

O participante Lucas, por sua vez, observou que a conta de água proposta por Fabíola era proveniente de uma cidade do interior do estado de São Paulo onde ela residia e que havia lacunas sobre informações a respeito de outras faixas de consumo, além daquelas exibidas na imagem por ela postagem, e que informações inconsistentes poderiam inviabilizar a compreensão dos estudantes sobre o real objetivo da atividade.

Em razão disso, Lucas buscou respostas sobre as faixas de consumo no *site* da companhia de água da cidade em que Fabíola residia e encontrou uma tabela que apresentava os valores por m^3 e não por intervalos (faixas). Esses dados foram fundamentais para o debate, bem como outras informações relevantes para a construção do problema, tal como uma lei municipal que estabelecia o pagamento de um valor mínimo independentemente do consumo.

Com base nas ações de Lucas para articular esse conjunto de recursos, inferiu-se a existência de um processo de instrumentalização, pois segundo Gueudet e Trouche (2010, p. 58, tradução nossa), “o professor vai utilizar vários recursos a fim de adaptá-los ao seu propósito” e de instrumentação, haja vista o recurso da conta de água ter influenciado sua conduta.

Supôs-se também que para a classe de situação ‘organizar uma SSE para introduzir o ensino de função’, Lucas desenvolveu pelo menos um esquema documental, cujo objetivo principal consistiu em elaborar uma SE para introduzir o ensino de função com base na FVSM, tendo ainda, como objetivos secundários, buscar um conjunto de recursos e informações que fossem apropriados para essa finalidade. As regras de ação utilizadas para controlar a situação proposta tiveram início quando ele buscou recursos no *site* da companhia de água e encontrou a lei municipal que regulava o consumo na cidade e propôs um balanço sobre se as mesmas efetivamente serviriam para o objetivo proposto.

As postagens realizadas pelos professores Gabriel e Lucas fizeram com que Fabíola tomasse a iniciativa de propor outro ponto de discussão relacionado

ao uso da tecnologia no processo de integração da SE-4 à SSE. Para isso, ela trouxe detalhes sobre como costuma utilizar o programa *GeoGebra* no processo de compreensão da representação gráfica de função. A participante informou ter desenvolvido um material específico, chamado ‘coordenadas cartesianas’ que poderia ser adaptado pelo grupo a fim de integrar a SE-4. O material tinha por intuito propiciar a compreensão do conceito de par ordenado, ponto e eixos, identificando as diferentes abscissas e ordenadas por meio do uso do *GeoGebra*.

O formador questionou o grupo a respeito da possibilidade de adaptar o material proposto por Fabíola, salientando que as atividades solicitavam aos estudantes a marcação de diversos pontos cartesianos, valendo-se da interface geométrica proporcionada pelo programa, além de explorar a ferramenta entrada quando do trabalho com notação de função, o que eventualmente poderia ser válido como preparação para a elaboração da representação gráfica da FSVM componente da SE-4.

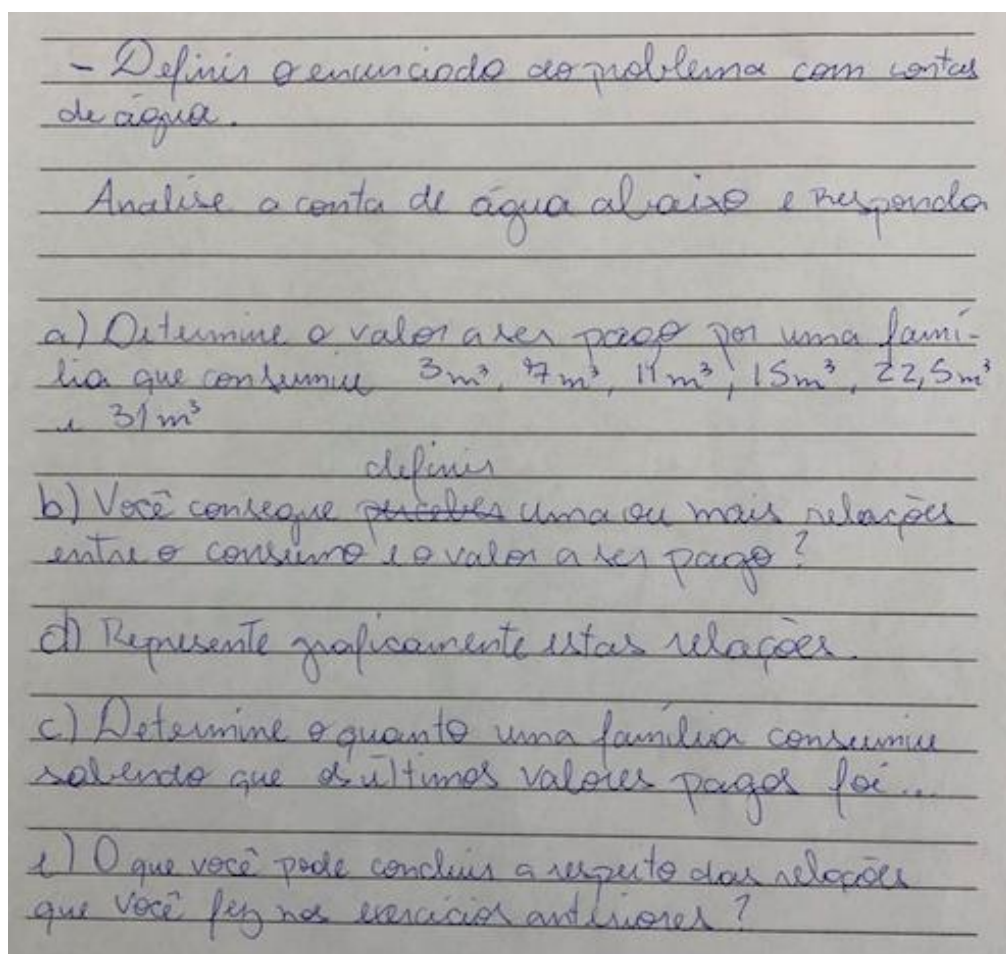
Ao analisar o material proposto pela professora, o formador notou a existência de um item chamado ‘treinamento’. que procurava enfatizar a relação existente entre uma função quadrática, seu gráfico e a identificação do vértice de uma parábola, o que poderia ser útil tendo em vista os objetivos planejados para a SE-4, e planejou resgatar essa discussão em um momento oportuno, em que o grupo voltasse a debater a utilização de tecnologia.

Após esse primeiro momento de resgate das postagens e discussões virtuais, o formador coordenou a discussão a respeito da organização da SSE para introduzir o ensino de função com base em FVSM. Para tanto, propôs ao grupo uma proposta de trabalho em três eixos: 1º) (re) elaborar a atividade sobre a conta de água a partir das discussões feitas no ambiente *Moodle*; 2º) avaliar a inclusão do *GeoGebra* nos problemas sobre a conta de água e 3º) organizar a SSE para introduzir o ensino de função a partir da FVSM.

A fim de reorganizar a atividade sobre a conta de água, inicialmente os participantes se debruçaram sobre seu enunciado. Foi possível observar que o participante Gabriel liderou a elaboração do enunciado (Figura 71), propondo que ele fosse mais direto e que conduzisse ao surgimento de um cenário de

descontinuidade, sem que fosse necessário alterar os dados originais da conta proposta por Fabíola.

Figura 71 - Esboço do enunciado do problema sobre a conta de água



Fonte: Elaborado por Luiza.

Isso ficou evidente na proposição feita por ele na letra 'd' do enunciado, pois entendia que a construção do gráfico seria determinante para a discussão acerca da existência de descontinuidade. Supôs-se que Gabriel tenha mobilizado um esquema documental, cuja característica consistia em relacionar a representação gráfica da FVSM proposta pelo recurso da atividade existente na SE-4 com o surgimento de um cenário envolvendo a noção de descontinuidade. Nesse sentido, deduziu-se também que estava em curso uma instrumentalização, visto que Gabriel estivera, na verdade, realizando uma adaptação nesse recurso.

A respeito de uma possível utilização do GeoGebra no contexto da SE-4, o formador entendeu ser importante que Fabíola detalhasse, via *Skype*, seus objetivos, pois percebeu que a postagem feita por ela no ambiente *Moodle* trazia

apenas explicações iniciais/superficiais/insuficientes. Na transcrição a seguir, é possível compreender detalhes da proposta da participante e a subsequente discussão travada pelos participantes acerca da viabilidade da utilização desse recurso no âmbito da SE-4.

Fabíola: Eu vou explicar aqui os meus objetivos com as atividades do que escrevi lá no *Moodle*. Pensei até em mandar um áudio no grupo de *WhatsApp*, mas vamos lá ... A atividade foi a primeira atividade que eu desenvolvi com os alunos do 1º ano e mostrei a interface do *GeoGebra*, mas como a maioria deles não tem contato com o programa ... eu fiz uma atividade simples para eles conhecerem o software ... Então por isso que eu peguei assim ... um conhecimento que eles já têm familiaridade e que a gente usa muito no ensino de funções, que são as coordenadas, né? ... As coordenadas cartesianas ... Então aí, pode parecer boba tá ... essa atividade, mas eu peço pra que eles marquem qual é a abscissa, qual é a ordenada, porque tem muito aluno que confunde, né ... a ordem ... então por isso que é par ordenado ... porque existe uma ordem ... Então vejam lá que o ponto (2,5) é diferente do ponto (5,2), porque eles são pontos diferentes e estarão em uma localização diferente ... E também porque ao longo do tempo eu percebi que tem aluno que confunde quando a ordenada é zero e abscissa é zero ... Então, como eles não conhecem o *GeoGebra*, eu pego essa atividade e trabalho com eles pensando em mostrar ... em apresentar o programa ... a interface do *GeoGebra*, e também pra sanar e esclarecer algumas dificuldades que eles possam ter em relação ao ponto cartesiano ... as coordenadas cartesianas.

Gabriel: Então essa primeira atividade é meio que exploratória do programa?

Fabíola: Sim ..., mas já no item 2 da atividade 1, eu peço pra que eles façam um gráfico ... e no gráfico olha qual é a imagem de determinado valor ... por exemplo $f(1)$, olhando no gráfico ... vejam que eu pedi lá ... quando x vale 1, qual é a imagem? ... Porque antes eu já tinha trabalhado a imagem de uma função ... e aí eu peço para calcular e pergunto: deu certo? É isso mesmo?

Lucas: E as outras partes ... a parte 3 e 4, eu vejo aqui que é mais pra gráfico ... pra interpretação do gráfico ..., mas não tem função de várias sentenças, né Fabíola?

Fabíola: ... Não tem, Lucas ... Eu tinha uma atividade no *GeoGebra*..., mas eu não sei onde tá mais ... sobre domínio da função ... pra que o aluno determinasse qual é o domínio da função. Então eu dava as funções e pedia para os alunos olharem no gráfico e determinar ... Aí tinha

$f(x) = \sqrt{x-2}$, $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ pra ver onde que a função estava definida ... só que eu perdi ... que pena, né? Mas dá pra tentar reformular e fazer aqui... porque é bem simples, e a gente poderia colocar várias funções também e fazer com que os alunos olhassem onde estaria definido ..., porque o próprio gráfico mostra, e aí inserir funções por partes começando por exemplo ... sei lá ... com $f(x) = \sqrt{x-2}$, essa função está definida a partir de x maior ou igual a 2 e o gráfico mostra ... tudo pra maior ou igual a 2 ... Isso poderia ser legal, porque quando não pudesse ser diferente de 2, aí ia ter aquele pico, né ... aquele pulo, melhor dizendo, de um pro outro ... Eu acho que os alunos compreenderiam bastante.

Após as explanações consistentes de Fabíola a respeito do potencial que o recurso poderia representar, ainda que eventualmente tivesse de ser adaptado, foi possível perceber que o grupo acatou as ponderações lideradas por Luiz. Na

opinião do professor, as duas primeiras atividades propostas por Fabíola, voltadas para a apropriação do programa *GeoGebra*, poderiam ser objeto de utilização ao longo da construção da SE, caso fosse necessário utilizar essa ferramenta durante a construção do gráfico. De acordo com Luiz, de fato, os estudantes poderiam não dispor de conhecimentos sobre o *GeoGebra*, e as duas primeiras atividades poderiam contribuir para os estudantes se apropriarem da ferramenta.

Questionado ainda a respeito do terceiro item da atividade, Luiz entendeu - e foi acompanhado pelos demais participantes - que sua proposição não se adequava ao objetivo da SE, pois, seria necessário produzir um conjunto de adaptações que acabariam por inviabilizá-la.

A preocupação de Luiz em adaptar a SE-4 com o intuito de introduzir o ensino de função com ênfase à noção de descontinuidade, e eventualmente utilizar o *GeoGebra*, corrobora as observações feitas por Acevedo (2013, p. 16, tradução nossa), “na qual o auxílio do programa *GeoGebra* oferece a possibilidade da construção de várias representações gráficas em um mesmo plano”, algo praticamente inviável se o suporte for lápis e papel.

Tendo em vista a visita realizada ao sujeito de pesquisa Luiz durante a fase de preparação, ocasião em que foi possível inferir a respeito da constituição de seu sistema de recursos, ficou claro que ele adaptou o recurso proposto por Fabíola para articulá-lo com outro, proveniente da SE-4, o que trouxe indícios de uma realimentação em curso em seu trabalho documental, ratificando as observações elaboradas por Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p. 4, tradução nossa) “de que a utilização de recursos como um processo interativo” desempenha um papel potencialmente transformador na atividade profissional docente.

Durante a semana que precedeu o 7º encontro presencial dedicado à organização da SSE, as discussões no 8º fórum de discussão no ambiente *Moodle* continuaram intensas, sendo que dois temas polarizaram o debate: o uso do *GeoGebra* e a organização da SSE.

Em relação ao uso do *GeoGebra*, a discussão ocorrida durante o 6º encontro presencial possivelmente possibilitou a retomada da discussão acerca de sua utilização. Em uma postagem realizada no 8º fórum de discussão no *Moodle*, o participante Bruno, que declarou dominar a ferramenta técnica do controle

deslizante existente no programa *GeoGebra*, desenvolveu uma aplicação referente à atividade 1 a da SE-1. A aplicação desenvolvida pelo professor tratava de uma animação do deslocamento realizado pelo ponto M na figura plana do quadrado, das áreas formadas e da representação gráfica da FVSM.

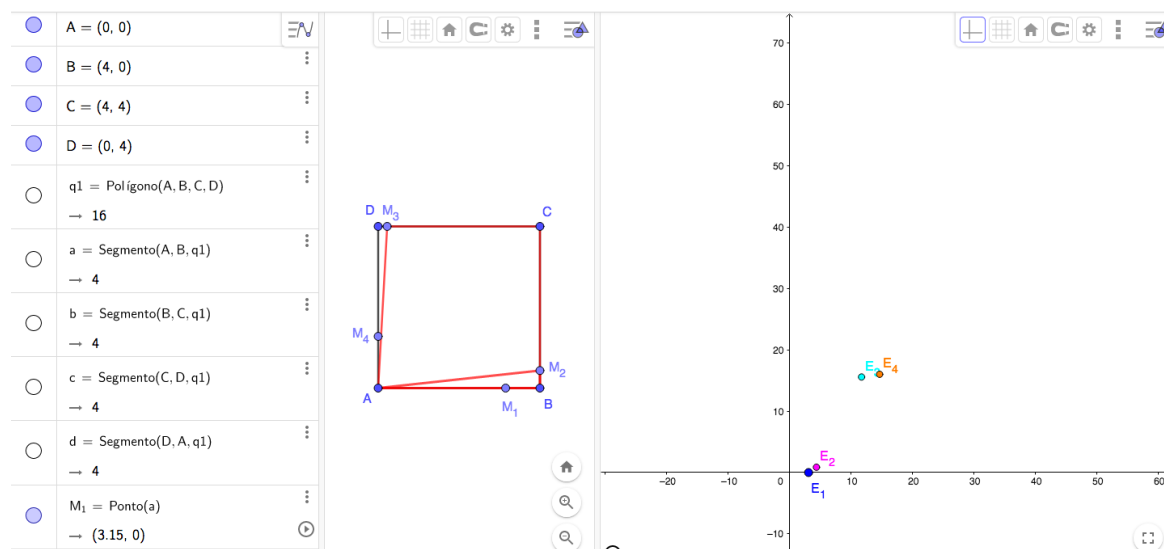
Ao ser questionado pelo formador sobre o intuito da aplicação, Bruno informou que ‘a ferramenta’ poderia ser utilizada no sentido de evidenciar a FVSM formada, além de, em seu entender, favorecer a visualização dos estudantes no tocante ao esboço gráfico da função solicitada pela atividade. Em resposta à postagem de Bruno, houve acordo praticamente unânime dos participantes (Luiza e Antônio foram os únicos a não realizar postagens no fórum de discussão no *Moodle*) sobre a necessidade de aprofundar a discussão a esse respeito ao longo do 7º encontro presencial.

De acordo com o que havia sido planejado na configuração didática e no modo de execução da OI-3, o formador iniciou o 7º encontro presencial, que contou com a presença de todos os participantes (Fabíola à distância, via conexão por *Skype*), resgatando as discussões produzidas no ambiente virtual e conclamando o grupo a debruçar-se, sob sua liderança, sobre a organização da SSE. Para nortear essa organização, o formador propôs que o trabalho se desse em três eixos: uso do programa *GeoGebra* proposto por Bruno; definição de quais seriam as SEs que iriam integrar a SSE e o encaminhamento prático de sua aplicação pelos sujeitos de pesquisa Gabriel, Lucas e Luiz nas Escolas A, B e C.

Relativamente ao uso do programa *GeoGebra* na SE-1, o formador solicitou que o participante Bruno explanasse sobre a aplicação da ferramenta por ele desenvolvida, fazendo uso do computador conectado a uma tela de projeção do laboratório de informática da PUC-SP.

Essa ferramenta referia-se ao deslocamento do ponto M na figura plana do quadrado, discutida ao longo da situação de formação na OI-2. A Figura 72 mostra a elaboração de Bruno, com auxílio da ferramenta controle deslizante do programa *GeoGebra*.

Figura 72 - Aplicativo desenvolvido por Bruno com auxílio de controle deslizante



Fonte: Produzido por Bruno.

Na transcrição dos diálogos a seguir, o participante explicou seus objetivos enquanto manipulava a aplicação para que fosse possível compreender seu funcionamento.

Bruno: ... Aqui é o esquema do GeoGebra ... Como vocês podem ver, o ponto M1 da área zero ... E aqui o M2 dessa parte rosa, que vai de área zero até área oito ... Aí quando tá no M3, precisa observar aqui na parte verde do gráfico, que tá indo até 16, e quando tá no M4, vai com área constante até 16, e o gráfico vai se formando com esse descolamento.

Gabriel: Você acha que a gente poderia usar o aplicativo quando fizer o gráfico? ... Quer dizer, quando ... fizerem o gráfico, daí a gente complementa projetando a animação?

Bruno: Exato ... Isso pode ser assim mesmo. Acho que aí os alunos podem entender o problema, porque vão ver todo o descolamento e o gráfico se formando, entende?

Formador: Mas eles não fariam o gráfico antes no papel, Bruno?

Bruno: Fariam, mas sei lá ... Os colegas que vão aplicar a sequência poderiam complementar para aqueles que não entenderam por que a visualização do problema todo pode permitir a compreensão também, né? ... Daí pensei que pode complementar ... O professor pode projetar no fim da explicação, quando ele resolver o problema 1 da atividade com o quadrado.

Liderados por Gabriel, que entendeu que a inclusão desse recurso na SE-1 poderia ser relevante para que os estudantes compreendessem a formação da área e sua relação com a FVSM formada, Lucas, Luiz e os demais participantes concordaram com a proposta. Gabriel, porém, fez uma ressalva, entendendo que a utilização desse recurso ficaria a cargo do professor que estivesse aplicando a SSE, isto é, caberia a ele avaliar se sua utilização era ou não conveniente para favorecer a aprendizagem de função. Nas ações tomadas por Gabriel, é possível identificar a dimensão de instrumentação da gênese documental, uma vez que o

recurso proposto por Bruno culminou por influenciar a maneira como Gabriel imaginou aplicar a SE-1.

Nesse sentido, foi possível identificar o desenvolvimento de um esquema documental, cujo invariante ‘poderia ser relevante para o professor para que os estudantes compreendessem a formação da área e sua relação com a FVSM formada’ era um dos componentes fomentados pela articulação entre os recursos da aplicação do *GeoGebra* e as atividades da SE-1.

Não houve controvérsias quanto à composição do documento SSE a ser aplicada pelos três sujeitos de pesquisa. Por conseguinte, observou-se que a SSE seria composta pelas quatro SEs, acrescida ainda do recurso da aplicação desenvolvida por Bruno no tocante à SE-1 e do treinamento para introduzir o aplicativo *GeoGebra*.

Com base em informações colhidas pelo formador junto aos sujeitos de pesquisa Gabriel, Lucas e Luiz, foi possível perceber que as instituições em que a SSE seria aplicada permitiram que os professores decidissem o tempo e a forma com que a SSE poderia ser aplicada. Assim, entendeu-se conveniente que sua aplicação devesse ocorrer em períodos do contraturno e na forma de oficinas, a fim de proporcionar um cenário menos formal aos estudantes bem como mais tempo para realizar as atividades. Acordou-se também que as atividades fossem distribuídas em até quatro tardes e ocupassem no máximo três semanas, pois durante o mês de novembro os estudantes normalmente estão envolvidos em várias outras atividades acadêmicas, como testes e provas finais.

Decidiu-se, por fim, que Gabriel disponibilizaria a todos a SSE (Anexo A), elaborada coletivamente, em uma postagem no 9º fórum do *Moodle*, voltado para as primeiras discussões sobre as aplicações da SSE nas escolas onde os sujeitos de pesquisa são docentes.

6.5.3.2 CONCLUSÕES SOBRE A SITUAÇÃO DE ORGANIZAÇÃO

Durante a experimentação da situação de organização, observou-se que os fóruns de discussões no *Moodle* desempenharam papel preponderante no acompanhamento da documentação dos sujeitos de pesquisa. O compartilhamento e a adaptação de recursos identificados ao longo dos fóruns contribuíram tanto para

que os três professores mobilizassem esquemas documentais como para a compreensão de suas gêneses documentais.

Os recursos incorporados à elaboração da SE-4 referentes à produção da conta de água protagonizaram grande parte do processo de organização do documento SSE, orientando o grupo sobre a inclusão de outros recursos e evidenciando a importância do trabalho coletivo proporcionado pelo ambiente de formação continuada.

No decorrer do desenvolvimento da situação de organização, constatou-se que, ao adaptar o recurso conta de água de maneira a contemplar um cenário de descontinuidade, o sujeito de pesquisa Gabriel evidenciou a dimensão de instrumentalização da gênese documental e, ao alterar suas ações diante da possibilidade de integrar o aplicativo desenvolvido por Bruno na SE-1, trouxe indícios de um processo de instrumentação.

Supõe-se que ao articular os recursos de uma tabela encontrada no *site* da companhia de água e uma lei municipal que regulava a cobrança de tarifas sugeriam a existência de um processo de instrumentalização. Da mesma forma, a adaptação sugerida por Luiz do recurso proposto por Fabíola para articulá-lo com outro, proveniente da SE-4, trouxe indícios de um processo de instrumentalização.

A seguir, será apresentada a análise dos dados obtidos durante a observação da aplicação da SSE feita pelos sujeitos de pesquisa Gabriel, Lucas e Luiz nas escolas A, B, C em que exerciam sua atividade profissional.

6.6 ETAPA DE APLICAÇÃO

A aplicação da SSE foi organizada conforme planejado durante a situação de organização, devendo ser estruturada para ocorrer no período do contraturno, no formato de oficina e, no máximo, em três semanas letivas. Para acomodar essa estrutura foi decidido que Lucas e Luiz iniciariam o trabalho com a SE-1 entre os dias 28 a 31/10/2019, e Gabriel faria o mesmo entre os dias 04 e 08/11/2019. O trabalho com a SE-2 e SE-3 foi pensado para acontecer concomitantemente, a partir da semana entre 04 e 08/11/2019, momento no que Lucas se ocuparia dessa tarefa na escola em que atua, enquanto Luiz e Gabriel fariam o mesmo de 11 a

14/11/2019. A etapa foi programada para se encerrar com a aplicação da SE-4 durante a semana compreendida entre 18 e 22/11/2019.

Durante a aplicação da SSE, planejou-se realizar o 8º e 9º encontros com o grupo, de forma a possibilitar que Gabriel, Lucas e Luiz pudessem continuar o processo de formação e compartilhar suas experiências. Para dar suporte a estes, foram idealizados o 9º e 10º fóruns de discussões no *Moodle*. O 8º encontro presencial foi planejado para acontecer no dia 02/11/2019, e o 9º encontro em 16/11/2019, à distância (via *Skype*), pois presumiu-se que nessa época a maioria dos participantes poderia estar envolvida com o processo de correção de provas, o que praticamente inviabilizaria um deslocamento até o campus da PUC-SP.

O processo de aplicação da SSE foi documentado por meio de áudio e vídeo e coube ao formador desempenhar essa tarefa. O material produzido durante as observações foi disponibilizado em uma pasta *Gdrive*, de maneira que todos os participantes tivessem acesso ao conteúdo remotamente.

Buscou-se analisar os dados obtidos de forma a identificar nas ações dos sujeitos de pesquisa indícios de apropriação do modelo para introduzir o ensino de função com base na FVSM, mediante a identificação de recursos e esquemas mobilizados e/ou desenvolvidos ao longo do processo de aplicação SSE.

6.6.1 APLICAÇÃO DA SE-1

Conforme planejado, Lucas foi o primeiro sujeito de pesquisa a aplicar a SE-1. Observou-se, entretanto, que antes de iniciá-la, ele procurou organizar as oficinas destinadas ao trabalho com a SSE e, para tanto, convidou estudantes de duas classes do 1º ano do EM da Escola A, dos quais era professor de matemática para tomar parte de um projeto. Informou aos estudantes que o projeto seria destinado à resolução de um conjunto de desafios matemáticos, cujo tema central seria informado no transcorrer de oficinas realizadas no período do contraturno, ou seja, em seis tardes, distribuídas ao longo de três semanas, entre 14h e 17h30.

Doze estudantes aceitaram o convite, que contou ainda com a participação de Gabriel, exercendo a função de professor auxiliar. Ao observar a lista de alunos inscritos, Gabriel e Lucas constataram que seis deles eram participantes da

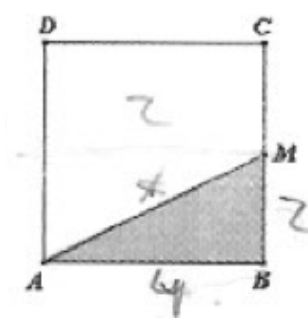
Olimpíada Paulista de Matemática e, com o intuito de equilibrar o trabalho, decidiram formar três duplas, distribuindo esses alunos de maneira equilibrada.

Cabe salientar que o grupo era conhecido de Lucas desde o 9º ano do EF2, bem como dispunha, segundo ele, de conhecimentos básicos de função, função afim e Teoria dos Conjuntos. A sala de aula em que as oficinas se desenvolveram estava aparelhada com computador conectado à internet à disposição do professor, lousa convencional, Datashow e, caso necessário, seria possível requisitar o uso de notebooks individuais com acesso à internet.

Para organizar a aplicação das SEs nos dias planejados, Lucas informou ao grupo participante que o trabalho seria organizado da seguinte maneira: os estudantes disporiam de duas horas e vinte minutos para a resolução da atividade em grupo, posteriormente haveria um intervalo de 30 minutos e, nos últimos 40 minutos, os professores fariam uma discussão sobre a atividade.

Durante a aplicação da SE-1, foi possível observar que, inicialmente, Lucas demonstrou incômodo em assumir o papel de mediador proposto pela atividade, não compreendendo quando deveria fornecer (ou não) instruções aos estudantes. Exemplo disso foi quando um dos grupos mostrou dificuldades em relação ao segundo deslocamento do ponto M na figura plana do quadrado, entendendo (Figura 73) que o ponto M deveria ser ponto médio do lado $\overline{BC}$.

Figura 73 - Atividade 1 (SE-1), Solução do Grupo 2 – Escola A (Lucas)



Fonte: Produção de Lucas.

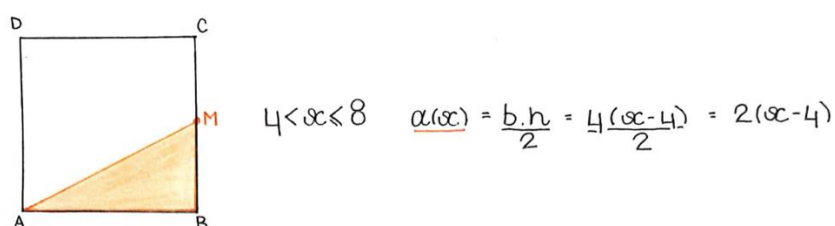
Ao invés de procurar entender as razões matemáticas que levaram os alunos a elaborar tal hipótese, Lucas preferiu induzi-los à resposta correta, por meio do questionamento transcrito a seguir:

Não seria $x - 4$? Isso aí não é ponto médio, não! E ainda acrescentando: - Quando não sabemos 'algo' em matemática, não representamos por x ?

O professor provavelmente também não se recordou de que a questão havia sido motivo de discussão durante a OI-2, ocasião em que se debateram estratégias para superar o problema envolvendo a ideia de grandeza e proporcionalidade que permeia a SE-1. Apesar de as atividades favorecerem sua atuação como mediador em determinado momento do trabalho e incentivar a autonomia dos alunos, a atitude de Lucas potencializou a perda de sentido da aprendizagem. Em tais circunstâncias, segundo Almouloud (2016, p.111), “os alunos não são convidados a pensar, mas simplesmente induzidos a executar o procedimento sugerido pelo professor”, o que, inclusive pode descaracterizar o saber a ser ensinado.

Por outro lado, Lucas manifestou surpresa ao constatar que outros dois grupos haviam resolvido a mesma questão com desenvoltura diferente do primeiro, isto é, sem solicitar ajuda mais direta para elaborar a FVSM. Ao perceber tal fato, ele sugeriu a um dos grupos que havia elaborado a atividade 1a corretamente (Figura 74) que auxiliasse os colegas em dificuldades por meio do compartilhamento do que haviam elaborado.

Figura 74 - Atividade 1 a (SE-1), Solução do Grupo 1 – Escola A (Lucas)



Fonte: Produção de Lucas.

Esse compartilhamento entre os grupos possibilitou que o grupo que havia apresentado dúvidas compreendesse que o ponto M não era o ponto médio do lado $\overline{BC}$ da figura do quadrado e, com efeito, contribuiu para que produzissem a FVSM solicitada no enunciado da atividade 1 a. Isso leva a crer que a decisão tomada por Lucas pode ter minimizado uma eventual perda de sentido na compreensão da situação-problema, pois permitiu aos estudantes “investigar e distinguir caminhos

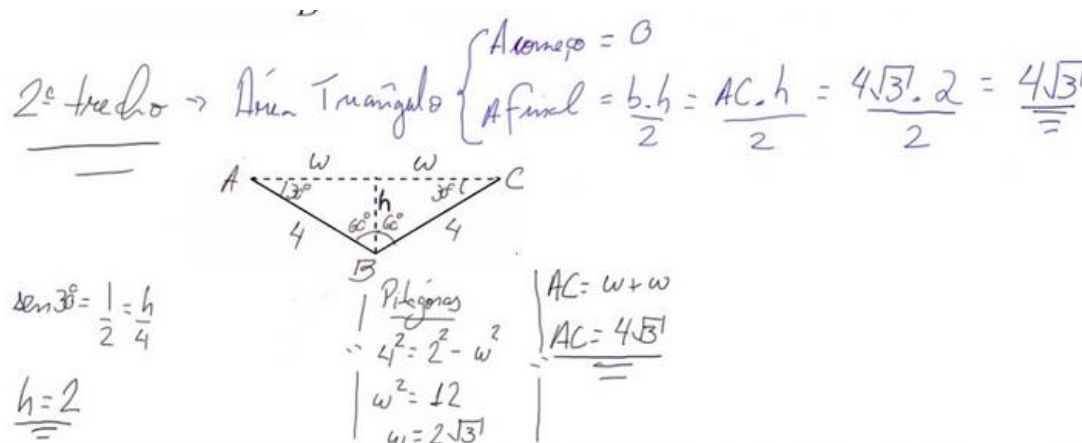
para resolver problemas” (ALMOULOU,2016, p. 113) e que adquirissem novos conhecimentos e saberes.

Apesar de um dos três grupos ter encontrado dificuldade durante o processo de resolução das atividades, constatou-se que, de modo geral, os estudantes identificaram a ideia de função e não tiveram dificuldades em elaborar as FVSM solicitadas. No primeiro dia de trabalho, as duas primeiras atividades da SE-1 foram completamente resolvidas, e no segundo dia, os grupos debruçaram-se sobre a terceira, acerca do deslocamento do ponto M na figura plana do losango.

Para efeito de análise da documentação de Lucas, dois outros aspectos destacaram-se durante a aplicação da SE-1 em sala de aula: a maneira como ele reagiu frente à solução apresentada por um dos grupos sobre a atividade 3 (ponto M deslocando-se pela figura plana do losango) e em relação ao esboço dos gráficos da FVSM elaborados pelos estudantes.

Em relação ao deslocamento do ponto M ao longo da figura plana do losango, Lucas percebeu que um dos grupos apresentava dificuldades em identificar a medida da área do triângulo ABM (Figura 75) e a medida do ângulo $\hat{B}$ como sendo 120° , mas optou em não resolver o exercício.

Figura 75 - Atividade 3 a (SE-1): Solução do Grupo 2 – Escola A (Lucas)



Fonte: Produção de Lucas.

Ao invés disso, resgatou uma ficha de trabalho desenvolvida no 9º ano do EF2, que tratava da comparação de dados obtidos experimentalmente, confrontados com uma tábua trigonométrica, tendo por objetivo encontrar regularidades no campo da Trigonometria. Nela, as noções de seno, cosseno e

tangente eram abordadas no mesmo contexto do que estava sendo proposto naquele momento. Os estudantes lembraram-se da atividade do 9º ano, pois tinham sido alunos de Lucas, e seu resgate contribuiu para que os integrantes desse grupo construíssem adequadamente a FVSM.

Do mesmo modo, a fim de enfrentar a dificuldade apresentada pelos estudantes na atividade 3 da SE-1, Lucas mobilizou o recurso ‘ficha de aula sobre razões trigonométricas’, existente em seu sistema de recursos, criando condições para que os alunos recordassem a noção de seno de um ângulo. Tal ação evidenciou um processo de instrumentalização, pois a adoção de um novo recurso, articulado com aquele existente na atividade 3 da SE-1 acabou por influenciar seu ensino. A articulação de diferentes recursos curriculares como estratégia para introduzir o ensino de função também foi observada com êxito nos trabalhos de Aldon (1995), Chumpitaz (2013) e Silva (2018).

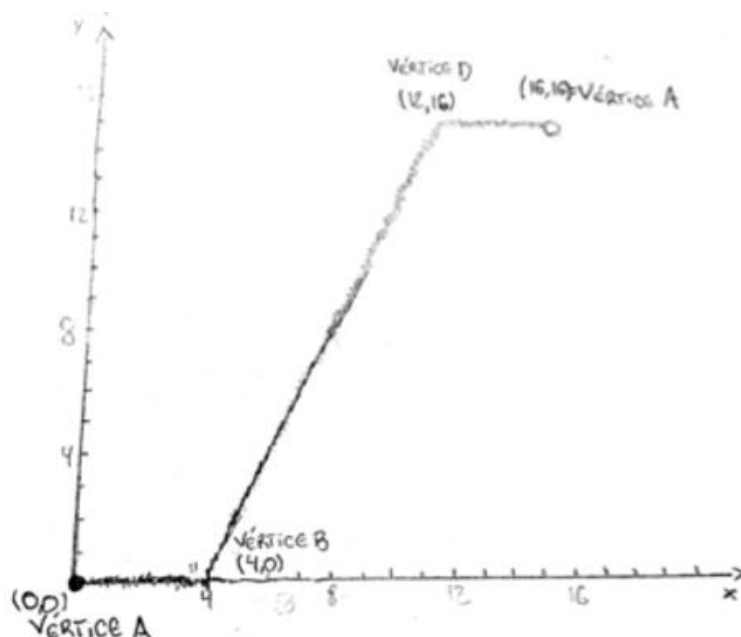
Em outro momento, ao constatar que um dos grupos construía escalas pouco claras ao esboçar o gráfico referente ao descolamento do ponto M na figura plana do quadrado (Figura 76), Lucas utilizou o programa *GeoGebra* disponibilizado no computador da sala de aula, com o intuito de evidenciar aos estudantes sua importância nos processos de construção e compreensão de um gráfico.

Foi possível observar que a construção elaborada por Lucas, com auxílio do *software GeoGebra*, despertou certo entusiasmo nos estudantes. Porém, ao perceber que eles não dominavam o programa, Lucas optou por não oferecer um treinamento, conforme havia sido planejado durante a organização da SSE, limitando-se a apontar diferenças entre a produção dos estudantes (Figura 76) e aquela obtida com auxílio do *GeoGebra*. Com efeito, a escolha do professor pode ter inibido a visualização de diferentes formas de representações das funções, cujo potencial foi observado no estudo Geiger e Redmond (2013).

Apesar disso, Lucas continuava a se instrumentar e recorrer ao *GeoGebra*, o que influenciou seu comportamento, corroborando com constatações semelhantes às obtidas na investigação de Ratnayake e Thomas (2018), que conjecturaram sobre a relevância da utilização da estrutura FOCUS na

instrumentação de professores que ensinavam função quadrática a estudantes do ensino médio no Sri Lanka.

Figura 76 - Atividade 1 b (SE-1), Gráfico do Grupo 3 – Escola A (Lucas)



Fonte: Produção de Lucas.

Na parte final da aplicação da SE-1, Lucas contou com o apoio de Gabriel para proceder à resolução integral da SE-1, ocasião em que foi possível observar que não tipificou as funções ao longo de sua explanação. Ele procurou evidenciar as relações de funcionalidade existentes nas três atividades propostas pela SE-1 e, diferentemente do que havia sido observado durante a entrevista inicial realizada na fase de preparação, não definiu função formalmente. Lucas e Gabriel utilizaram a lousa tradicional para as resoluções das atividades e, durante a construção do esboço das representações gráficas das FVSM, alternaram seu uso com o *GeoGebra*. Por fim, o professor comunicou ao grupo que a solução da atividade também se encontraria em um arquivo PDF, localizado em uma área do ambiente *Moodle* da classe, destinada especificamente ao trabalho das oficinas sobre função.

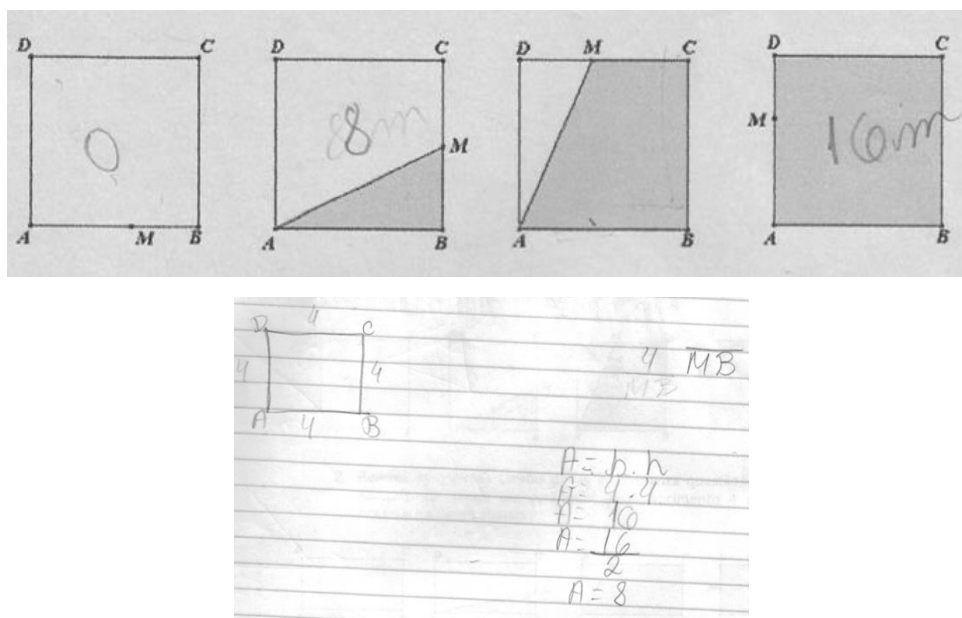
A aplicação da SSE na Escola C, liderada por Luiz, foi organizada em três oficinas com caráter não obrigatório no período do contraturno. Ele convidou estudantes de uma turma do 1º ano do EM, na qual era professor, para tomar parte do projeto, deixando evidente que ele tinha por objetivo o estudo de função. No convite enviado aos estudantes (por e-mail), foi informado que as três oficinas se

desenvolveriam em seis tardes, distribuídas ao longo de três semanas, no período compreendido entre 14h e 17h. Na primeira parte da atividade, os estudantes disporiam de duas horas para a elaboração das atividades e, após uma pausa de 40 minutos, haveria um balanço liderado pelo professor por cerca de 20 minutos.

Nove estudantes aceitaram o convite e, segundo Luiz, o grupo teve contato com a ideia de função, função afim, linear e quadrática durante o 9º ano do EF2 e Teoria dos Conjuntos no 1º ano do Ensino Médio. Durante a realização do 1º encontro voltado à aplicação da SE-1, os estudantes foram divididos em dois grupos e comunicados de que deveriam resolver um desafio no campo da geometria.

Tão logo o trabalho iniciou, observou-se que os estudantes apresentaram dificuldades durante a resolução das atividades 1 e 2, de maneira similar a um dos grupos da Escola A: entenderam que seria necessário encontrar um valor numérico para cada deslocamento do ponto M (Figura 77) ao longo dos lados das figuras planas do quadrado e do retângulo, evidenciando uma incompreensão relacionada à noção de grandeza.

Figura 77 - Atividades 1 e 2 (SE-1) - Escola C (Luiz)



Fonte: Produção de Luiz.

Apesar de a questão ter sido alvo de debates durante a discussão a respeito da viabilidade da SE-1 em introduzir o ensino de função, foi possível observar que Luiz optou por não responder imediatamente às dúvidas daqueles

que não conseguiam identificar uma relação de funcionalidade na atividade proposta, nem tampouco teve qualquer tipo de interferência que eventualmente pudesse levar a reflexões a respeito. Enquanto os estudantes tentavam resolver as atividades, constatou-se que Luiz anotava as dúvidas em um caderno que se encontrava sobre a mesa do professor daquela sala de aula.

Algumas das colocações feitas pelos alunos, ao se referirem à atividade proposta, de certa forma contrariaram o professor que, em certos momentos demonstrou alguma irritação. Dentre elas, os estudantes comentaram que geometria era muito difícil e que os problemas eram impossíveis de serem resolvidos. A pouca interação com o professor naquele momento pareceu produzir certa desmotivação dos estudantes, sendo possível inferir que a atividade não chegou a ser um desafio para eles(as).

Ao contrário do que havia sido debatido ao longo da formação sobre o potencial de protagonismo do estudante que a SE-1 embutia, Luiz optou por resolver as três atividades na lousa tradicional, duas no primeiro dia da oficina e outra no segundo. Durante a resolução, Luiz procurou responder a cada uma das dúvidas que havia documentado em seu caderno (inclusive a da Figura 77), bem como a outras que surgiram durante sua exposição, o que aparentemente diminuiu a sensação de desagrado dos estudantes, embora tenha sido possível observar uma ênfase na parte procedimental durante o processo de ensino da FVSM.

Tal evidência sugeriu uma prática de ensino orientada à ação que, segundo Bayazit (2006, p. 148, tradução nossa), “é marcada por manipulações mecânicas da FVSM”, e tem o potencial de produzir uma limitação de sua compreensão por parte dos estudantes. Ainda que possível, veracidade de tal hipótese só poderia ser comprovada ao longo das demais oficinas.

Notou-se que o professor sentiu-se mais à vontade para conduzir o processo de resolução do que transferir parte dessa tarefa aos estudantes e, em face dessa observação, entendeu-se que o fato de Luiz organizar uma lista com as principais dúvidas identificadas ao longo da oficina pareceu coerente com seu sistema de recursos, já que o *feedback* dos estudantes era um de seus recursos-mãe, conforme foi possível identificar durante a visita realizada na Escola C na fase de preparação da formação.

Aparentemente, ele não alterou sua prática profissional e continuou centralizando em si a maioria das ações para conduzir o processo de aprendizagem, por meio da mobilização de classes de situações que lhe eram familiares, mas não definiu formalmente função aos estudantes nem tampouco tipificou as que surgiram durante a resolução das atividades. Com relação à evolução de seu processo de documentação, percebeu-se que, a princípio, o professor não se apropriou inteiramente dos recursos existentes na SE-1, sobretudo da aceitação de um protagonismo dos estudantes para elaborar as FVSM a partir de seus conhecimentos.

No intervalo entre a aplicação da SE-1 efetuada por Lucas e Luiz e a liderada por Gabriel na Escola B, foi realizado o 8º encontro presencial destinado à continuidade do processo formativo, que contou com o suporte do 9º fórum de discussões no *Moodle*.

Com o intuito de munir o grupo com informações a respeito da aplicação da SE-1 pelos professores Lucas e Luiz, o formador disponibilizou a íntegra das imagens obtidas em vídeo em uma pasta do *Gdrive* e inseriu o link de acesso às mesmas em uma postagem no 9º fórum do *Moodle*. Durante a realização do 8º encontro presencial, as produções dos estudantes das escolas A e C foram disponibilizadas para consulta a todos os participantes.

Os participantes Alfredo, Antônio, Bruno e Luiza não puderam participar do 9º encontro presencial, alegando, entre outras razões, a necessidade de preparar as provas finais de seus alunos, enquanto Fabíola participou por meio de conexão *Skype*. Possivelmente esse quadro tenha resultado nas poucas contribuições do 9º fórum do *Moodle* que, em geral, limitaram-se a comentários superficiais sobre a participação dos professores Lucas e Luiz na aplicação da SE-1.

O formador procurou manter a estrutura de funcionamento do 9º encontro presencial, como ocorrido nos anteriores, iniciando pelo resgate das contribuições no fórum virtual e, posteriormente, as discussões sobre a experiência vivenciada pelos sujeitos de pesquisa. Em relação ao 9º fórum de discussão, os participantes relataram ter tido pouco tempo para assistir às aplicações feitas pelos professores e aos vídeos, segundo eles, extremamente longos.

Após essa etapa inicial do encontro, o formador solicitou que Lucas fizesse um relato de sua experiência com a SE-1 na Escola A. O professor descreveu em detalhes o trabalho, desde sua organização, passando pelas dúvidas trazidas pelos estudantes e suas próprias dificuldades com o trabalho. Segundo ele, a aplicação da atividade 1 a produziu inicialmente um certo incômodo pois, em sua opinião, os alunos não estavam acostumados a trabalhar sem a ajuda direta do professor. Essa visão inicial foi desfeita, segundo ele, ao se surpreender com o fato de os estudantes terem resolvido a maioria das atividades sem que fosse necessária uma intervenção mais direta.

Em face dessas observações e de suas reflexões durante o 9º encontro, inferiu-se que o processo de formação experimentada por Lucas ao longo da vivência das situações e da prática com o modelo de introdução ao ensino de função com base na FVSM poderiam estar impactando em sua documentação, haja vista ele não ter definido formalmente o objeto função e aceitar, ainda que em parte, o protagonismo dos estudantes em determinado momento do processo de aprendizagem da atividade.

Por sua vez, ao compartilhar sua experiência com o grupo de participantes a pedido do formador ao longo do 8º encontro presencial da etapa de aplicação da SSE, o participante Luiz afirmou que sua turma de estudantes era ‘péssima’. Indagado sobre o porquê pelo formador, relatou que, no momento da aplicação da SE-1, os estudantes não lembraram de ‘absolutamente nada’ dos conteúdos geométricos ou da noção de função do EF2 e que, em razão do curto tempo para execução da atividade, decidiu resolvê-la na lousa, sem deixar de afirmar ainda, ter tido convicção de que após suas explicações os alunos compreenderam a elaboração da FVSM.

Segundo Hatisaru e Erbas (2015, p. 11, tradução nossa), “normalmente professores que costumam apontar para a incapacidade dos alunos em compreender função como responsáveis por seus erros ou equívocos” são reflexo de um conhecimento insuficiente a respeito do tema, possivelmente relacionado a uma formação deficiente. Em face das circunstâncias relatadas por Luiz, deduziu-se que o processo formativo impactou muito pouco na documentação do professor,

e que apenas as próximas etapas da aplicação do documento SSE poderiam trazer mais evidências a esse respeito.

Após os relatos dos professores, acertou-se com o grupo que o encontro seguinte ocorreria à distância, em razão dos seus compromissos profissionais, e que nesse ínterim seria proposto o 10º fórum de discussão no *Moodle* com as mesmas características do anterior.

Conforme planejado, após a realização do 8º encontro presencial, coube a Gabriel proceder com a aplicação da SE-2 na Escola B.

Assim como os outros dois sujeitos de pesquisa, Gabriel organizou a aplicação da SSE na Escola B por meio de oficinas de caráter não obrigatório no período do contraturno. Ele convidou estudantes de duas turmas do 1º ano do EM das quais não era professor a tomar parte de um projeto que teve por objetivo o estudo de função. Informou-os de que o projeto ocorreria duas vezes por semana, durante um período de três semanas consecutivas, entre 14h e 17h30, e que a dinâmica dos encontros ocorreria da seguinte maneira: duas aulas de 70 minutos destinadas à construção em grupo, seguido de intervalo de 20 minutos e uma parte final voltada à resolução das atividades.

Oito estudantes aceitaram o convite e, de acordo com Gabriel, o grupo tivera contato com a ideia de função, função linear e afim no 9º ano do EF2 e teoria dos conjuntos no transcorrer do 1º ano do EM.

Antes que as oficinas tivessem início, o professor avisou aos estudantes que seria necessária a realização de aula preparatória, com o intuito de revisar noção de função, trigonometria e geometria plana. Para colocá-la em prática, Gabriel elaborou um recurso com situações-problema retiradas de livros didáticos e da internet. Essa decisão se deu por ele ter percebido lacunas a respeito desses conteúdos ao longo da aplicação da SE-1 com o grupo de estudantes da Escola A (ele havia participado do trabalho ao lado de Lucas, como professor auxiliar), bem como em função dos debates ocorridos no 8º encontro presencial durante a aplicação da SE-1.

Essas ações de Gabriel corroboram as constatações feitas por Messaoui (2020) sobre a importância do trabalho documental coletivo para o desenvolvimento

da atividade profissional do professor, trazendo indícios de um processo de instrumentalização.

Após desenvolver a revisão pretendida, Gabriel aplicou a SE-1 junto aos estudantes, adotando inicialmente uma atitude de observador. Quando um aluno encontrou dificuldades na resolução do terceiro movimento (Figura 78) do ponto M (lado $\overline{CD}$ da atividade 1 a), Gabriel solicitou-lhe que refletisse a respeito de sua construção, sugerindo uma breve consulta às notas tomadas durante a aula preparatória, especificamente sobre a figura plana do trapézio, pois os intervalos possivelmente poderiam não estar corretos.

Figura 78 - SD-1: Atividade 1 a, Gabriel (1)

$$\begin{aligned}
 1. \overline{AB} &= 0 \leq x \leq 4 \rightarrow A = 0 \\
 \overline{BC} &= 4 < x \leq 8 \rightarrow A = \frac{b-h}{2} \cdot 2 = \frac{x-4}{2} \cdot 2 = 2x-8 \\
 \overline{CD} &= 8 < x \leq 12 \rightarrow A = \frac{(B+b)}{2} \cdot 2 = \frac{(4+x-6)}{2} \cdot 2 = x-4 \\
 \overline{DA} &= 12 < x \leq 16 \rightarrow A = 16
 \end{aligned}$$

Fonte: Produção de Gabriel.

O movimento realizado pelo professor também evidenciou ter-se apropriado de uma discussão a esse respeito ocorrida durante a situação de formação, em que foi debatida a possibilidade de os estudantes não se atentarem ao fato de os intervalos da função eventualmente não indicarem a formação da figura plana do trapézio.

Apesar de o aluno e seu grupo terem corrigido a sentença correspondente ao movimento do ponto M na figura plana do trapézio, continuaram a apresentar dúvidas quanto à formulação dos intervalos da sentença (Figura 79).

Aproveitando-se da experiência dos colegas que o antecederam na aplicação da SE-1, Gabriel solicitou que outro grupo de alunos que havia feito a construção do exercício adequadamente expusesse sua resolução na lousa para os colegas que tinham dúvidas a respeito das sentenças, fazendo o papel de mediador.

Figura 79 - SE-1: Atividade 1 a, Gabriel (2)

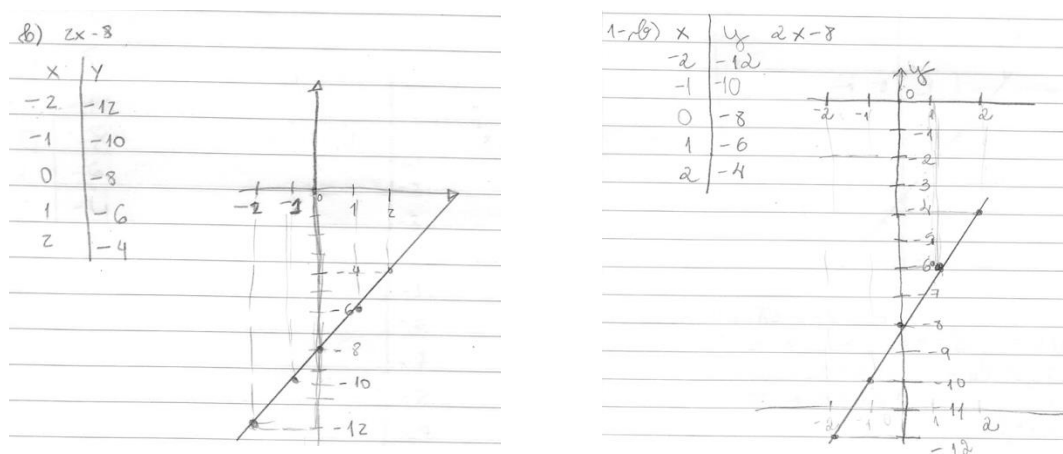
$AB \rightarrow 0 \leq x \leq 4 \rightarrow A=0$
 $BC \rightarrow 4 < x \leq 8 \rightarrow A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot (x-4)}{2} = 2x-8$
 $CD \rightarrow 8 < x \leq 12 \rightarrow \frac{(b+B) \cdot h}{2} = \frac{(x-8+4) \cdot 4}{2} = 2x-16+8 = 2x-8$
 $DA \rightarrow 12 < x \leq 16 \rightarrow 4 \cdot 4 = 16$

Fonte: Produção de Gabriel.

Percebe-se que o professor desenvolveu uma nova classe de situações para o objetivo de aplicar a SE-1 e a interação com os recursos apontados “são determinantes para seu desenvolvimento profissional, conduzindo-o a desenvolver capacidades de design frente os cenários didáticos que lhe foram apresentados”, (TROUCHE, GUEUDET; PEPIN, 2018, p.4, tradução nossa).

Ao observar que os esboços das representações gráficas elaboradas pelos dois grupos referentes à atividade 1 b (Figura 80) revelavam que os estudantes não haviam compreendido a função solicitada, Gabriel decidiu fazê-las na lousa tradicional. no sentido de mediar o processo de aprendizagem.

Figura 80 - SE-1, Atividade 1 b - Gabriel



Fonte: Produção de Gabriel.

Na transcrição dos próximos diálogos, é possível observar a maneira pela qual Gabriel tratou a questão:

Gabriel: O que tá acontecendo com o M (*refere-se ao ponto M deslocando-se pela figura plana do quadrado*)?

Aluno 1: Tá se movendo.

Gabriel: Exatamente, está se movendo ..., mas onde começou esse movimento?

Aluno 2: Em $\overline{AB}$.

Gabriel: E depois?

Aluno 2: Seguiu se movimentando até $\overline{BC}$, e depois até o final, quando fechou no quadrado ...

Gabriel: E o que vocês fizeram aí nos gráficos? Se o ponto M deu a volta completa no quadrado ... Vocês mesmo falaram que estava em movimento ... Faz sentido descrever isso com um gráfico para cada um desses deslocamentos separadamente, pessoal?

Aluno 1: Então aqui ... é um gráfico só, né? Porque é um único deslocamento por todo o quadrado ...

Aluno 2: Porque é uma função só, é por isso. É que eu determinei separado porque não tinha visto que era uma coisa só. Foi por isso.

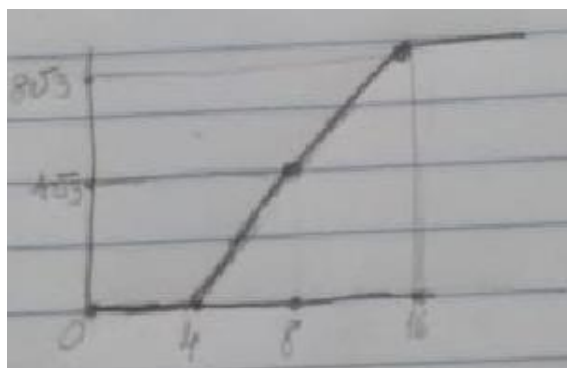
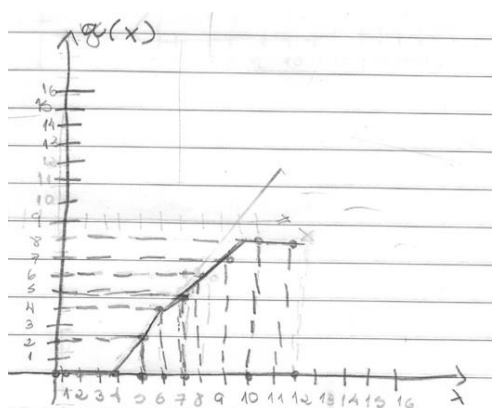
Aparentemente os estudantes apresentavam dificuldades em identificar a FVSM e, nesse cenário específico, conforme apontado por Markovits, Eylon e Bruckheimer (1986, p. 16, tradução nossa), “não percebiam que regras diferentes de correspondência, se aplicam a diferentes partes do domínio”. Diante disso, Gabriel decidiu utilizar o aplicativo desenvolvido por Bruno no *GeoGebra*, com auxílio do controle deslizante, o que, com efeito, potencializou a compreensão dos alunos com relação à construção da FVSM. Com base nessas ações, inferiu-se que o professor se apropriou da vivência na fase de instrumentação da gênese documental, pois utilizar o recurso do aplicativo construído pelo *GeoGebra* claramente influenciou suas decisões em face das questões apresentadas pelos estudantes.

Posteriormente, foi possível observar que os grupos de estudantes trabalharam de maneira praticamente autônoma nas atividades 2 e 3 da SE-1 (Figura 81), construindo, com auxílio de lápis e papel, as representações gráficas das FVSM correspondentes ao deslocamento do ponto M no retângulo e no losango.

Por fim constatou-se que Gabriel formalizou a resolução de cada uma das atividades propostas pela SE1, dando ênfase à ideia de correspondência entre variáveis, sem mencionar, em qualquer momento, a ideia de conjunto. Foi possível observar, durante sua explanação, que ele procurou não tipificar as funções existentes, deixando em aberto a elaboração da definição formal de função para outra oportunidade. O conjunto dessas ações possibilitou depreender alterações na

maneira de introduzir e ensino de função, visto não ter abordado a noção de notação, como fez durante a entrevista realizada na fase de preparação.

Figura 81 - SE-1, Atividade 1 b - Gabriel



Fonte: Produção de Gabriel.

6.6.2 APLICAÇÃO DA SE-2

Conforme planejado, Lucas foi o primeiro dos sujeitos de pesquisa a trabalhar com a aplicação da SE-2. Durante sua aplicação, foi possível observar algumas alterações em relação a como lidou com as dúvidas dos estudantes, posto não ter respondido diretamente às questões deles como havia feito durante a aplicação da SE-1. Um dos grupos de estudantes apresentou dificuldades na elaboração das leis das funções que descreviam o movimento uniformemente variável (Figura 82). Eles dividiram o movimento em três partes, nomeando uma função de h , quando se referia à primeira parte do movimento.

Figura 82 - SE-2, primeira parte do movimento (Lucas)

função h :

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$y = -8 + 0 \cdot x + \frac{a \cdot x^2}{2}$$

$$0 = -8 + \frac{a \cdot 2^2}{2}$$

$$8 = \frac{a \cdot 4}{2}$$

$$8 = 2a$$

$$4 = a$$

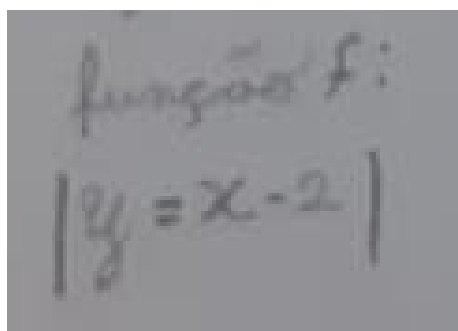
função h :

$$|y = 2x^2 + 8|$$

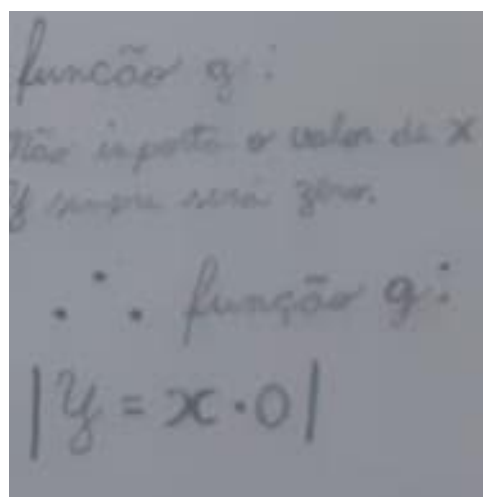
Fonte: Produção de Lucas.

estudantes resgataram a noção de equação horária do movimento aprendido na física, mas deixaram de definir seu domínio. Em relação às outras duas partes do movimento (Figura 83), o grupo chamou de ‘f’ a parte em que o movimento se desenvolveu linearmente e de quando o automóvel seguiu em velocidade constante.

Figura 83 - SE-2, demais partes do movimento (Lucas)



Handwritten text: função f:
 $|y = x - 2|$

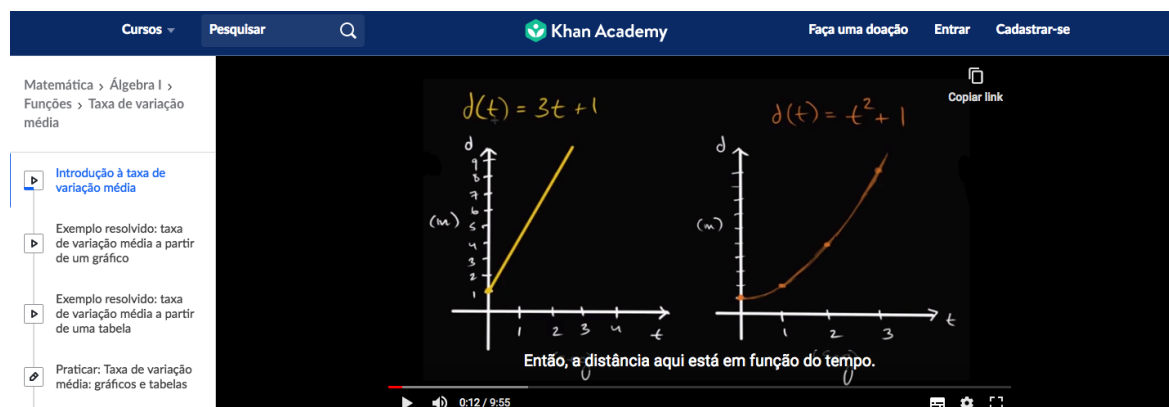


Handwritten text: função g:
 Não importa o valor de x
 y sempre será zero.
 ∴ função g:
 $|y = x \cdot 0|$

Fonte: Produção de Lucas.

Observando que novamente o grupo deixara de apresentar os intervalos do domínio da função, Lucas inicialmente chamou a atenção do grupo sobre o sinal da primeira função do movimento, sem indicar a solução do problema e, posteriormente, pediu que refletissem sobre sua construção, o que efetivamente potencializou sua associação com a concavidade da parábola ao movimento acelerado.

Por outro lado, Lucas notou que a função afim f foi apresentada sem que fosse possível elucidar como o grupo havia encontrado a expressão $y = x - 2$, conforme exibido na Figura 103. Ao questionar os estudantes, o professor inferiu que haviam lembrado da noção de taxa de variação e a utilizaram como estratégia de resolução. Porém, como não teve certeza do fato, resolveu discorrer sobre a noção de taxa de variação, a fim de verificar realmente se os estudantes haviam mobilizado essa noção. Para isso, acessou o computador da sala de aula e, utilizando-se do Datashow, projetou um vídeo do site *Khan Academy* (Figura 84), que explorava a noção por meio de alguns exemplos.

Figura 84 - SE-2: noção de taxa de variação – *Khan Academy* (Lucas)

Fonte: Khan Academy, 2019.

A ação de Lucas não se constituiu em uma surpresa, visto que durante a entrevista realizada na Escola A, ao longo da fase de preparação, foi possível observar que ele tinha por hábito utilizar o recurso ‘videoaula’ como suporte para seu trabalho documental. A articulação da videoaula existente em seu sistema de recursos com aquele proposto pela SE-2 trouxe indícios do processo de instrumentalização, posto que, aparentemente, um novo recurso foi incorporado ao seu sistema de recursos.

Após assistirem à videoaula, Lucas convidou os outros dois grupos a compartilhar na lousa suas construções relativas ao segundo movimento do automóvel, de tal maneira que o conjunto de iniciativas mobilizadas pelo professor criou condições para que o grupo efetuasse adequadamente a construção das funções.

Em face da mudança de atitude do professor quanto à maneira em mediar o processo de aprendizagem, inferiu-se que estas ações indicavam para um processo de instrumentação motivado pela articulação dos recursos da SE-2, da videoaula proveniente do site *Khan Academy* e das discussões feitas especificamente sobre esse ponto no 8º encontro presencial em que foi questionado pelo formador. A alteração observada na prática do professor se deu simultaneamente ao desenvolvimento de pelo menos um esquema documental, ratificando constatações observadas por Trouche, Gueudet e Pepin (2018, p.7,

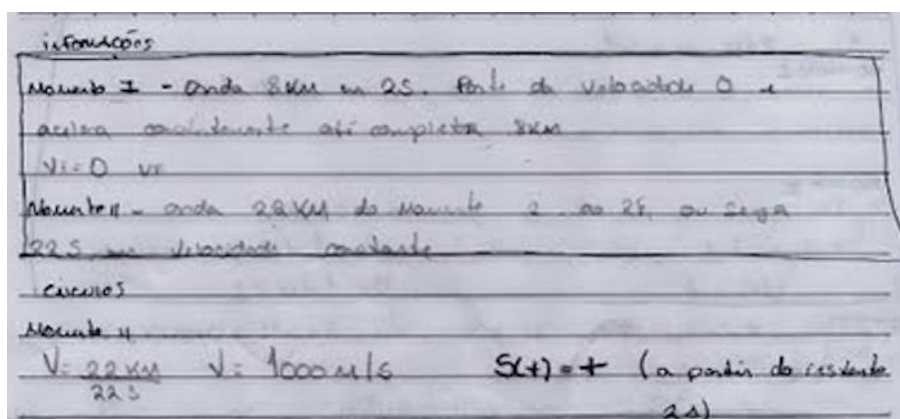
tradução nossa) “de que os conhecimentos do professor ajudaram a orientar suas escolhas ao selecionar os recursos” e implementar seu trabalho documental.

De maneira similar, na aplicação da SE-1 no final do encontro, destinado ao estudo da SE-2, Lucas solicitou o auxílio de Gabriel para formalizar a resolução da atividade aos estudantes. Durante a resolução, notou-se que as funções não foram tipificadas pelos professores e nem ocorreu uma formalização conceitual de sua definição, mas, em determinados momentos, observou-se que Lucas associou as etapas de descolamento do automóvel à ideia de par ordenado, pois o grupo havia estudado teoria dos conjuntos há pouco tempo.

O processo de aplicação a SE-2 junto aos alunos do 1º ano do EM na escola A pareceu ter representado uma evolução na documentação de Lucas, mas, por outro lado, sua visão a respeito da maneira como a definição formal de função deveria ser construída pareceu continuar atrelada a uma visão estática e menos “simples e intuitiva, relacionada à ideia de variação” (HUH, 2009, p. 17, tradução nossa).

Em relação à aplicação da SE-2 na escola onde Luiz atuava, observou-se que os dois grupos de estudantes participantes das oficinas mobilizaram conhecimentos sobre função horária do movimento (Figura 85), provavelmente por esse ter sido objeto de estudo na disciplina de física. Durante a realização da oficina, foi constatada uma mudança na atitude do professor frente às questões apresentadas pelos alunos, já que ele procurou mediar algumas delas sem indicar uma resposta.

Figura 85 - SE-2 (Luiz)



Fonte: Produção de Luiz.

Em determinado momento do trabalho, Luiz pediu a um dos grupos que escrevesse na lousa as leis das funções encontradas e incentivou outro grupo a confrontar suas respostas com as desses colegas. Um dos pontos debatidos naquele momento recaiu sobre a função de lei de formação $f(x) = x - 2$, referente à segunda parte da trajetória desenvolvida pelo veículo. Enquanto um dos grupos percebeu tratar-se da mesma função existente no segundo deslocamento do ponto M na figura plana do retângulo, outro grupo pensou tratar-se de uma função afim, pois o movimento do automóvel era constante, conforme haviam aprendido no estudo de cinemática com o professor de física.

Inferiu-se, naquele momento, que o hábito dos estudantes da escola C em tipificar as funções poderia ter sido produto da intervenção do professor de física, mas os diálogos transcritos a seguir revelaram tratar-se de algo relacionado com as escolhas feitas por Luiz para introduzir o ensino do tema, já que ele interveio na discussão dos grupos.

Luiz: Vocês poderiam resolver essa função usando a ideia de taxa (de variação) ... vocês lembram, né? Quando vocês fizeram aí essa resolução, lembraram disso, não foi?

Aluna 1: Professor, eu lembro mais ou menos, mas sei que era sobre gráfico ...

Luiz: Se a gente pensar, por exemplo, em $y = 3x + 1$, que também é uma função afim, o que significa isso, pessoal? Não indica quantas unidades o y varia, na medida em que o x varia uma unidade? Esse 3 da função $y = 3x + 1$, que multiplica o x ... esse 3 dá a ideia de variação ... Para cada unidade deslocada do x o seu y é deslocado 3 unidades positivas (pra cima no caso), indicando então que essa função é uma função crescente, ok?

Aluna 1: Então a gente pode perceber pelo gráfico ...

Luiz: Também ..., mas pode resolver matematicamente, ao invés de achar que é uma questão da física. Não é isso ... vocês podem usar essa ideia de taxa de variação aqui...aqui nesse problema.

Apesar de tipificar as funções, observou-se que Luiz procurou adaptar o recurso para responder às questões dos alunos, oferecendo com isso outra abordagem acerca da construção da função da SE-2, aparentemente diferente daquela ensinada pelo professor de física, evidenciando um processo de instrumentalização.

Em relação à aplicação da SE-2 liderada por Gabriel, foi possível observar que os dois grupos de estudantes tiveram várias dificuldades na construção das leis das funções e solicitaram diversas orientações ao professor. Um desses grupos (Figura 86) equivocou-se ao construir as sentenças.

Figura 86 - SE-2 (Gabriel)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 2 \\ 1 \cdot x & 2 \leq x \leq 22 \\ 22 & x > 22 \end{cases}$$

22 s
22 km
1 km/s

Fonte: Produção de Gabriel.

Os estudantes não conseguiram associar as trajetórias descritas pelo automóvel e as funções solicitadas na atividade, o que levou Gabriel a constatar a existência de lacunas em relação aos conhecimentos necessários para resolver as questões solicitadas. Ele procurou questionar os grupos sobre o que haviam estudado em de física até aquele momento, e os estudantes afirmaram ter estudado unidades do sistema internacional, vetores, os conceitos de velocidade média e instantânea e, no momento da realização da oficina, iniciavam a aprendizagem do movimento uniforme. Diante desse cenário, Gabriel decidiu resolver a segunda situação educacional de maneira dialogada com os dois grupos e, durante esse processo, pôde identificar a mobilização de alguns recursos com a finalidade de obter êxito no processo de aprendizagem.

Para explicar aos estudantes a primeira parte do deslocamento em que automóvel está desacelerando (função polinomial de 2º grau), Gabriel procurou recordar com o grupo as noções de equação do 1º e 2º graus, bem como os conceitos básicos do movimento uniformemente variado. Para isso, descreveu na lousa as leis de formação das funções horárias desse movimento, enfatizando o fato de serem similares àquelas usadas no movimento uniforme, que os estudantes estavam aprendendo naquele momento em física.

Com relação à segunda parte do movimento, o professor participante enfatizou a necessidade de resgatar a noção de taxa de variação como requisito para compreensão da função que explicava o deslocamento do automóvel e, para tanto, utilizou como recurso o programa *GeoGebra*. Ele esboçou o gráfico da função no software e escolheu aleatoriamente alguns pontos do trajeto linear para construir a função que explicava matematicamente a trajetória desenvolvida pelo automóvel, insistindo várias vezes na necessidade de os estudantes tentarem elaborar por si

próprios algumas as leis de formação de funções desse tipo. Nesse sentido, forneceu-lhes quatro esboços de gráficos no programa *GeoGebra*, mas ‘escondeu’ a janela de álgebra, a fim de que pudessem praticar a noção de taxa de variação e construir as expressões referentes aos gráficos solicitados.

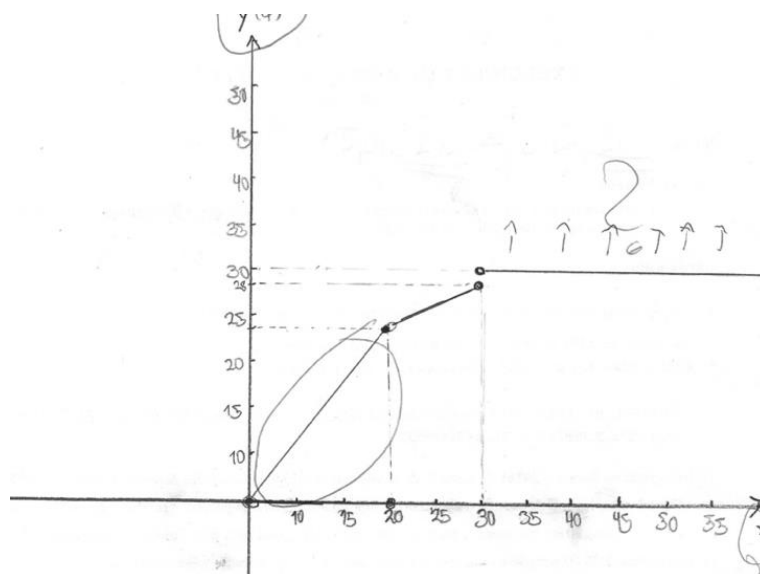
A estratégia de Gabriel revelou que, para alcançar o objetivo da atividade proposta pela SE-2, foi positivo mobilizar um recurso atrelado ao programa *GeoGebra* e um esquema documental que teve por um de seus invariantes o fato de considerar que os estudantes deveriam praticar autonomamente a construção de funções com emprego do software, ainda que, com efeito, tenha alterado a maneira como ele havia planejado ensinar a SE-2. Ao trabalhar com outras representações proporcionadas pelo *Geogebra*, o professor também pode ter produzido significados aos conteúdos ligados ao conceito de função, legitimando conclusões relatadas no estudo de Barreto (2009) a esse respeito.

A maneira como Gabriel procurou resolver a atividade sobre a FVSM com os alunos, não se restringindo a uma mera manipulação de fórmulas, evidenciou uma tendência, segundo Breindenbach et al (1992), a adotar uma concepção de processo.

6.6.3 APLICAÇÃO DA SE-3

Durante a aplicação da SE-3 na Escola A, em que Lucas exercia sua atividade, constatou-se que um dos grupos havia construído o gráfico (Figura 87) solicitado pela atividade de maneira equivocada. Sendo assim, Lucas incentivou o grupo a construir o gráfico utilizando o programa *GeoGebra* por meio do computador disponível na sala de aula, mesmo não tendo sido ministrado qualquer treinamento anterior. Observando que o grupo de alunos apresentava grande interesse em se apropriar da ferramenta, o professor conclamou os outros dois grupos a participar, a fim de confrontar suas produções feitas no papel.

Figura 87 - Representação gráfica da SE-3: (Lucas)



Fonte: Produção de Lucas.

É possível supor que o uso do programa tenha proporcionado aos estudantes perceber que todas as leis das funções existentes na SE-3 eram similares à terceira sentença do problema anterior, fazendo com que entendessem que as mesmas não poderiam ter inclinação, conforme ilustra o esboço da Figura 87.

Em nenhum momento da aplicação da SE-3 o professor tipificou as funções exploradas pela atividade, nem tampouco foi necessário explicar a noção de descontinuidade como havia sido planejado durante a situação de organização da formação continuada. Percebeu-se que os estudantes encararam a construção do gráfico com naturalidade, indicando a ocorrência dos intervalos abertos e fechados no domínio da função sem grandes complicações. Lucas perguntou várias vezes aos grupos quais seriam os valores a serem pagos quando a massa do objeto a ser enviado pelo correio tivesse 20,1g; 30g; 127g ou mesmo 0g respectivamente, e os estudantes respondiam aos questionamentos apoiando-se no esboço da representação gráfica da FVSM.

A vivência da SE-3 continuou a proporcionar uma evolução na documentação do professor Lucas, na medida em que ele refletiu acerca do uso do recurso *GeoGebra* e ajustou-o com o intuito de implementar seu trabalho documental no ensino do esboço da representação gráfica da SE-3.

Luiz, por sua vez, necessitou auxiliar um dos grupos de estudantes de sua escola que apresentava dificuldades na construção das sentenças da função (Figura 88), bem como para compreender o conceito de descontinuidade.

Figura 88 - Resolução de um grupo de alunos da SE-3: (Lucas)

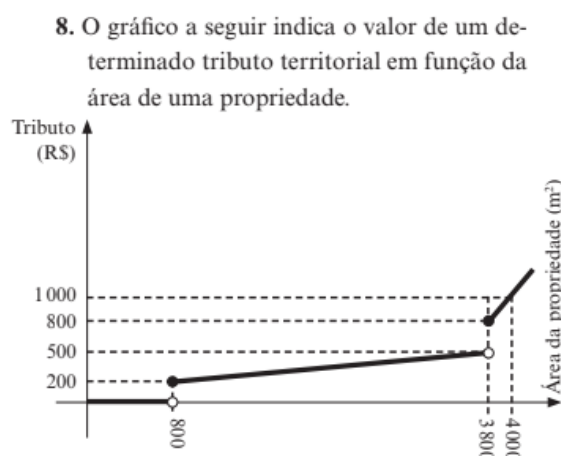
$$\textcircled{I} \quad C(w) = 9 + \left(\frac{1}{10} \cdot g\right) \quad \rightarrow \quad C(w) = w + \left(\frac{1}{10} \cdot w\right)$$

Seuente Para 20g

Fonte: Produção de Lucas.

Ao observar a produção, Luiz solicitou ao grupo que consultasse a página 71 do Caderno do Estudante do Estado de São Paulo (*material didático utilizado pelos estudantes*) e observasse o gráfico proposto no exercício 8 (Figura 89), pois entendeu que os alunos manifestavam incompreensões sobre a noção de descontinuidade.

Figura 89 - Problema sobre descontinuidade: caderno do estudante: Luiz (1)



Fonte: São Paulo (2017).

O professor chamou a atenção do grupo sobre a questão solicitada no item b (Figura 90) do exercício.

Figura 90 - Problema sobre descontinuidade: caderno do estudante: Luiz (2)

b) Existe algum tamanho de propriedade (em m²) cujo imposto cobrado seja exatamente 500 reais?

Fonte: São Paulo (2017).

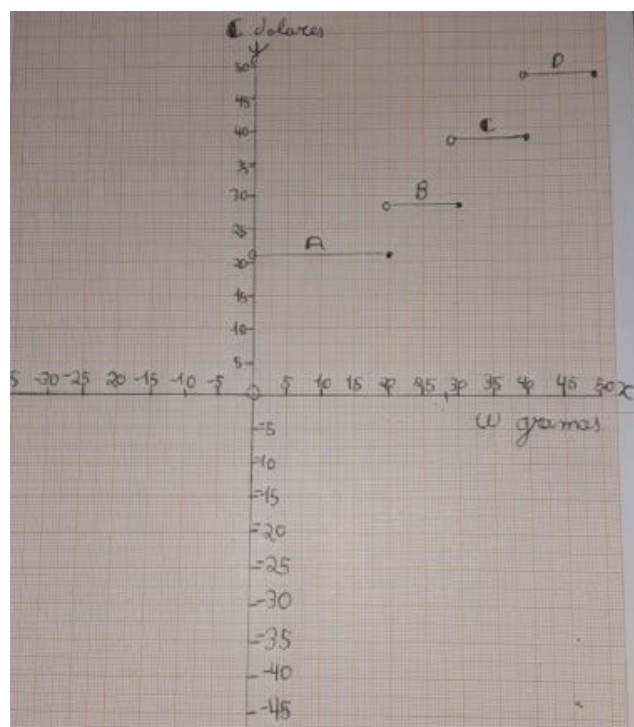
Antes de solicitar ao grupo que refletisse sobre as questões existentes na SE-3, Luiz debateu com os estudantes o item b do problema 8 (Figura 90). Durante a discussão, percebeu-se que o grupo havia compreendido que a resposta deveria

ser 'não', porque consultando a representação gráfica, o tributo de 500 reais estava indicado como um intervalo aberto. Em seguida, ele perguntou ao grupo qual deveria ser a sentença do tipo $y = mx + b$, com y sendo o tributo em reais e x a medida da área em m^2 , válida para o intervalo $800 \leq x < 3800$, com o intuito de que o grupo suplantasse a dúvida apresentada na atividade proposta pela SE-3.

A resolução do exercício em questão aparentemente fez com que os grupos de estudantes se envolvessem no processo de construção da atividade e suplantassem alguns obstáculos. A mobilização desse recurso curricular feita por Luiz possibilitou inferir que tal ação poderia indicar um processo de instrumentalização, posto que o professor adaptou o recurso para seu objetivo de proporcionar a compreensão da ideia de descontinuidade.

Em contrapartida, o sujeito de pesquisa Gabriel preparou antecipadamente algumas folhas de papel milimetrado para que os estudantes construíssem os gráficos solicitados pela atividade por meio do uso de papel e lápis (Figura 91). No decorrer da aplicação, constatou-se que, em nenhum momento, o professor tipificou as funções existentes na atividade, além de não definir formalmente a noção de descontinuidade, nem os grupos encontraram obstáculos para construir as funções solicitadas.

Figura 91 - Representação gráfica da SE-3 (Gabriel)



Fonte: Produção de Gabriel.

A adoção do recurso do papel milimetrado evidencia um processo de instrumentalização e a continuidade da evolução da documentação de Gabriel, proporcionada pela aplicação do documento SSE. Ainda que a formação continuada não tenha se voltado para a importância da OI no planejamento e execução das ações didáticas, a ação de Gabriel demonstrou o quão relevante pode representar a organização dos recursos para adequar os propósitos planejados para a sala de aula.

Adicionalmente a essa observação, constatou-se que Gabriel esteve preocupado em explorar diferentes possibilidades para debater com os estudantes o domínio dessa função. Para isso, ele questionou os grupos acerca dos intervalos do domínio e, ao que tudo indicou, o professor pretendia tratar de descontinuidade alterando o domínio da função como estratégia para que os estudantes se apoderassem dessa noção, sem que fosse necessário apresentar qualquer tipo de definição formal.

No intervalo compreendido entre o final da aplicação das SEs 2 e 3 e o início do trabalho com a SE-4, foi realizado o 9º encontro com os participantes da formação na modalidade à distância (via *Skype*), apoiada pelo 10º fórum de discussão virtual no *Moodle*. Apesar de o formador ter disponibilizado diversos links de acesso ao material em vídeo produzido pela aplicação das SEs 2 e 3 em uma postagem no 10º fórum, as interações e questionamentos aos sujeitos de pesquisa foram escassos. O 9º encontro presencial contou com a participação dos sujeitos de pesquisa Luiz e Gabriel, além dos professores Bruno e Fabíola. O professor e sujeito de pesquisa Lucas não pôde comparecer ao encontro, mas enviou por e-mail um relato a respeito de sua experiência.

Mantendo a estrutura utilizada no encontro anterior, o formador solicitou que os professores participantes fizessem um relato a respeito de suas experiências com o trabalho das SEs e, durante os mesmos, procurou realizar alguns questionamentos de maneira a compreender o processo de evolução de documentação por eles elaborada.

Após o relato de Luiz, o formador procurou compreender com maior clareza a decisão que havia tomado em utilizar o Caderno do Estudante Estado de São Paulo durante a aplicação da SE-3. Luiz explicou ter entendido que o exercício do

Caderno do Estudante era válido para auxiliar na reflexão sobre uma situação de descontinuidade diferente daquela proposta pela SE-3, pois considerou-a mais simples para a compreensão do grupo, o que permitiu que os estudantes elaborassem a lei da função solicitada.

Apesar da vivência das situações de formação e da organização proporcionada pela formação continuada, aparentemente Luiz manteve a compreensão de que a introdução ao ensino de função deveria ser, de certa forma, facilitada pelo professor. Isso pareceu evidente quando ele utilizou o recurso do exercício do 'Caderno', mobilizando um esquema documental cujo invariante tinha como característica 'tornar mais fácil a compreensão de função aos estudantes'.

Gabriel, por sua vez, foi questionado sobre as circunstâncias que o fizeram optar pelo uso do *GeoGebra* para auxiliar a compreensão dos estudantes quanto à representação gráfica das funções existentes nas atividades. Ele argumentou que optou pelo uso do programa porque entendia que a visualização da representação gráfica da função por meio eletrônico poderia trazer uma nova contribuição àquela feita no papel, pois os grupos de estudantes já haviam recordado da construção por meio do resgate das noções de equação do 1º e 2º graus desenvolvidas ao longo do EF2.

Solicitado a fornecer mais detalhes a respeito dessa escolha, Gabriel informou entender que o uso do *GeoGebra* nessas condições também favoreceu a compreensão dos estudantes sobre o domínio de cada uma das sentenças, pois durante a oficina, ele fez diversas experimentações com o objetivo de tentar ilustrar como eventuais alterações nos domínios impactariam no comportamento das funções e, conseqüentemente, em suas representações gráficas.

Considerou-se que o recurso 'debate em sala de aula com seus estudantes', que integrava seu sistema de recursos como um de seus recursos-mãe potencializou o desenvolvimento de um novo recurso com o qual Gabriel enfrentou o cenário proporcionado pela aplicação da SE-3.

Na parte final do encontro, o formador discutiu com os professores a respeito do planejamento da aplicação da SE-4, que finalizaria a etapa de aplicação da SSE, e sobre as possíveis estratégias que poderiam ser utilizadas para proporcionar a elaboração de uma definição formal de função por parte dos

estudantes. No debate que se seguiu, ficou evidente que Gabriel tinha claro que não deveria ser ele a elaborar essa definição, mas os estudantes, a partir de seus conhecimentos prévios e aqueles concebidos ao longo das oficinas.

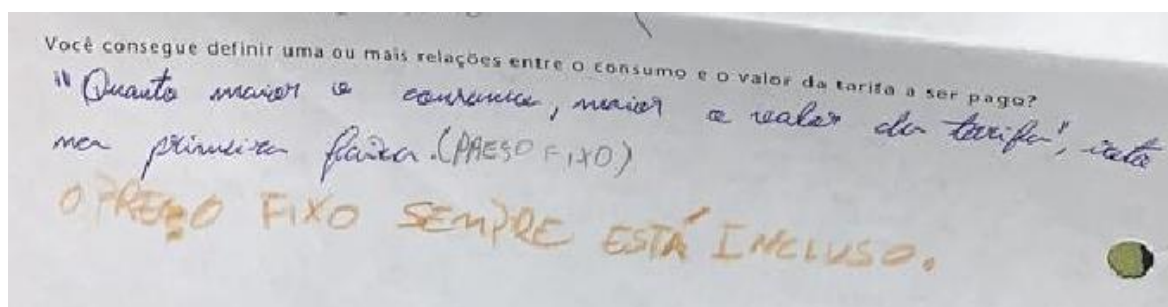
Luiz, por sua vez, manifestou dúvidas quanto à ‘capacidade’ de seus alunos para elaborar a definição de função mesmo com a vivência das SEs, fazendo com que o formador tivesse de refutá-lo, argumentando que essa não deveria ser a tarefa dos professores num processo coletivo de construção de conhecimento. Argumentou-se também que, mesmo na hipótese de uma construção considerada equivocada, ela poderia oportunizar o resgate de alguma das SEs no sentido de esclarecer dúvidas dos estudantes.

6.6.4 APLICAÇÃO DA SE-4

O fechamento das oficinas lideradas por Lucas deu-se durante a discussão a respeito da SE-4, referente à conta de água. Diferentemente das vezes anteriores, durante a aplicação foi possível observar que Lucas esteve preocupado com o tempo destinado à realização da atividade, visto considerá-la extensa demais para os dois dias programados. Em razão disso, o professor tomou algumas providências a fim de garantir que a atividade alcançasse os objetivos planejados dentro do tempo previsto.

Uma primeira providência pode ser observada (Figura 92) quando um dos grupos de estudantes respondeu a uma das questões propostas pela atividade sem uma abordagem matemática.

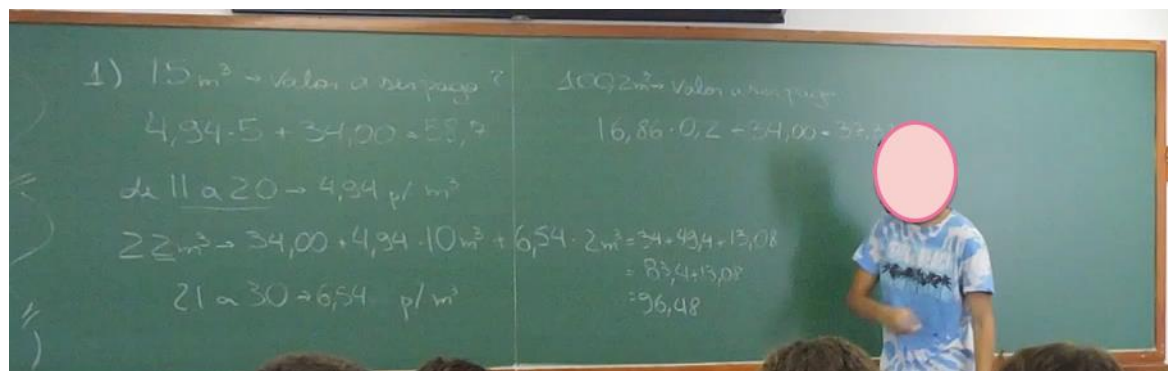
Figura 92 - Respostas de um Grupo à questão 1 da SE-4 (Lucas)



Fonte: Produção de Lucas.

Preocupado com o tempo, Lucas decidiu resolver essa e outras questões (Figura 93) na lousa, de maneira dialogada com os grupos de estudantes.

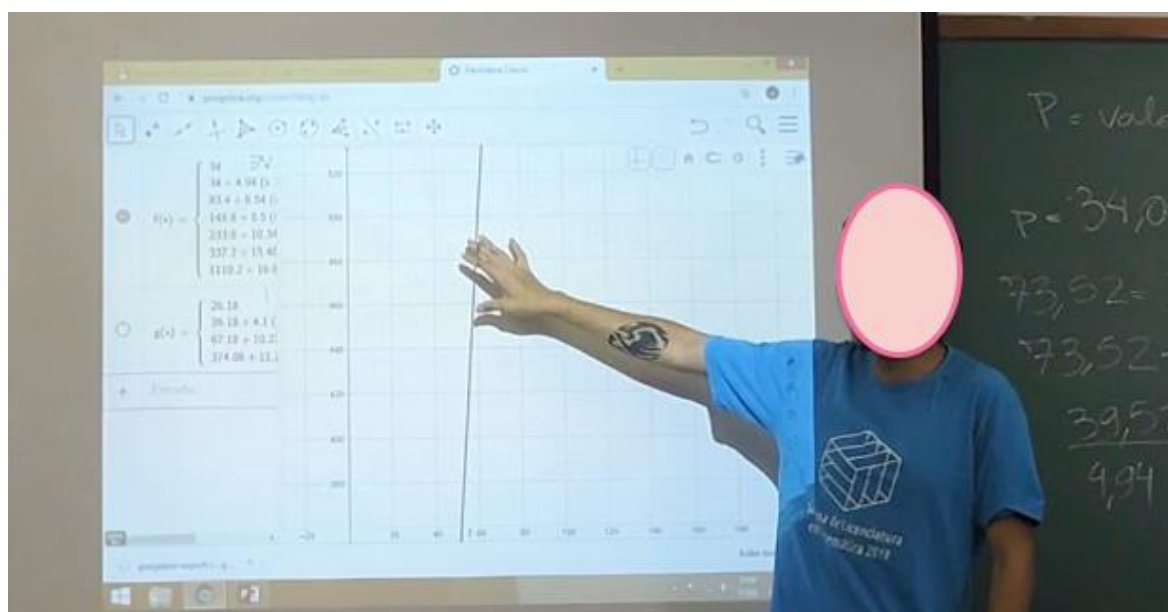
Figura 93 - Parte da correção da SE-4 feita na lousa por Lucas



Fonte: Produção de Lucas.

Como segunda providência, o professor elaborou um arquivo em *PowerPoint* com comentários a respeito das soluções da SE-4, caso necessitasse utilizá-los durante a etapa destinada a debatê-las com os grupos, bem como preparou previamente as representações gráficas das FVSM (Figura 94) no *GeoGebra*.

Figura 94 - Representação gráfica da quarta situação educacional – Lucas



Fonte: Produção do autor.

Diante dessas constatações, foi possível perceber que as respostas elaboradas pelos estudantes surpreenderam o professor, por sua vez extremamente envolvido na produção da SE-4 durante as situações de formação de organização da SSE. O ponto mais importante da SE-4 pareceu ter sido das

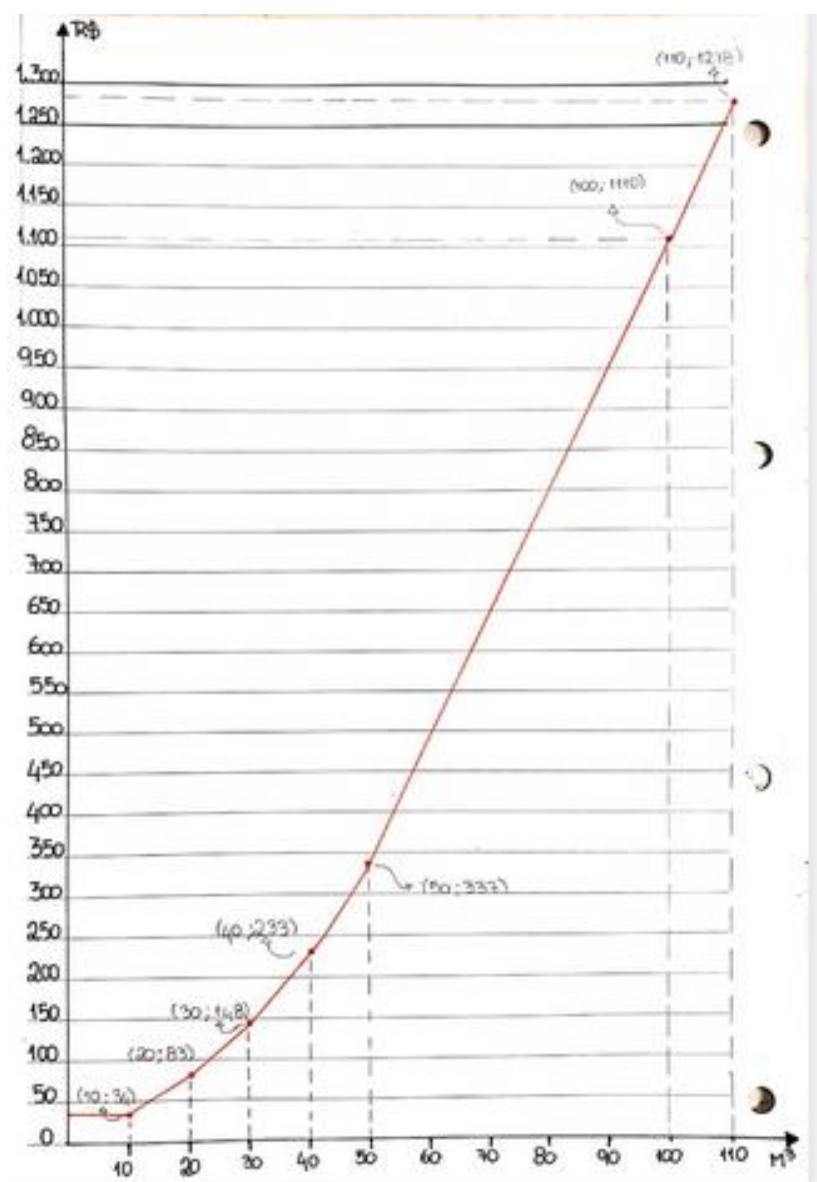
questões que envolviam descontinuidade, conforme anteriormente previsto ao longo dos debates entre o formador e os participantes.

Em um determinado momento, em que se debatia a representação gráfica da FVSM, um dos estudantes questionou o que ocorreria com os ‘buracos’, pois a princípio, ele achava estranho que a empresa de água pudesse ter prejuízo. Outra estudante, entretanto, apontou que não apenas a função construída estava correta - incluindo os ‘buracos’ -, como indicava que a empresa de água jamais perderia dinheiro na operação de cobrança do consumo, pois o valor em questão certamente seria cobrado na conta seguinte. A mesma estudante, aliás, indicou outro aspecto envolvendo o contexto da atividade, dessa feita sobre uma questão social a respeito da cobrança da conta de água. Ela dirigiu-se até a lousa e chamou a atenção dos colegas para a representação gráfica da função, indicando que a inclinação quase paralela dessa sentença no eixo y (referente ao maior consumo) produzia, na verdade, um menor valor a ser pago, suscitando, com isso, um debate interessante a respeito da desigualdade social embutida na cobrança da conta de água.

Quando um dos grupos apresentou o esboço do gráfico (Figura 95) sem identificar os pontos de descontinuidades, Lucas solicitou aos integrantes que respondessem quanto um consumidor deveria pagar se consumisse, por exemplo, $10,1 \text{ m}^3$ de água.

Ele também orientou aos integrantes do grupo que procurassem fazê-lo confrontando a tabela e o esboço do gráfico (Figura 95). Com a ajuda dos outros grupos, o apoio do próprio Lucas e do professor Gabriel, claramente observou-se que os estudantes desse grupo compreenderam que o esboço não tinha sido elaborado de acordo com os dados fornecidos. Ele insistiu com todos os grupos sobre a necessidade de construir o domínio da função para que se pudesse compreender com maior clareza as funções construídas.

Figura 95 - Esboço do gráfico de um dos grupos na SE-4 (Lucas)



Fonte: Produção de Lucas.

O acompanhamento das ações tomadas por Lucas no transcorrer da orientação dada aos estudantes com relação à representação gráfica da FVSM e o cenário envolvendo descontinuidade trouxe elementos sobre a evolução de sua documentação. Pode-se inferir que ele estava instrumentado pela SE-4 devido à maneira como orientou os estudantes a observarem os pontos de descontinuidade no gráfico, a fim de evidenciar a eles a ideia de descontinuidade.

Na parte final da atividade, e com o intuito de dar maior visibilidade ao cenário de descontinuidade que permeava a SE-4, Lucas mobilizou recursos do

GeoGebra, a fim de elaborar o esboço da representação gráfica da FVSM, e preparou um arquivo em *PowerPoint* contendo as soluções dos exercícios que foram explicados ao grupo com auxílio de Gabriel.

No encerramento da atividade, Lucas orientou os estudantes a construírem uma definição formal de função, apoiada nos conhecimentos construídos ao longo das atividades desenvolvidas nas oficinas e em anos anteriores. Ao se deparar com uma das definições formuladas (Figura 96), o professor argumentou ao grupo de alunos (as) sobre a necessidade de apresentá-la em linguagem matemática.

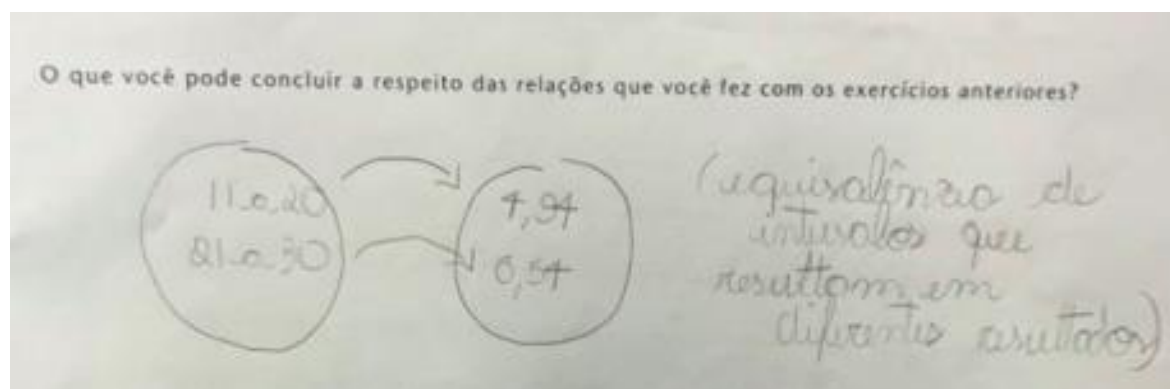
Figura 96 - Definição formal de função produzida por um grupo de alunos – Lucas. (1)

Definimos função por uma relação de 2 ou mais conjuntos estabelecida por uma lei de funções, isto é, uma regra geral.

Fonte: Produção de Lucas.

O mesmo foi feito com o grupo que apresentou certa dificuldade em apresentar a definição formal de função (Figura 97), ocasião em que o professor se apressou em tentar esclarecer os estudantes sobre a importância de apresentarem as definições em linguagem por ele considerada matematicamente adequada. A definição apresentada revela, portanto, as dificuldades dos alunos em fornecer uma definição adequada para função, validando observações realizadas por Elia et al. (2006), devido à necessidade de se coordenar, ao mesmo tempo, várias representações, como equações, gráficos e tabelas.

Figura 97 - Definição formal de função produzida por um grupo de alunos – Lucas. (2)



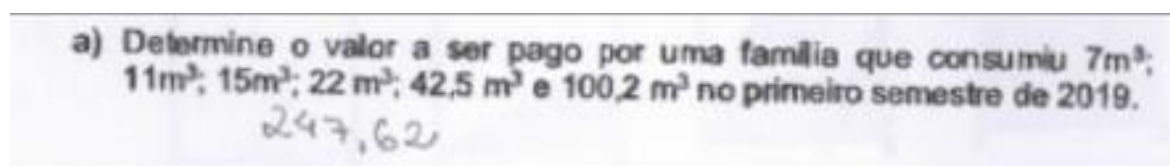
Fonte: Produção de Lucas.

O professor discutiu com os grupos acerca de uma definição formal de função e, nesse aspecto, pode-se constatar que procurou fazê-lo como um conjunto de pares ordenados, sem explorar a possibilidade de fazê-la como sendo uma relação de correspondência. Cabe salientar, porém, que Lucas não tipificou aos estudantes as diferentes funções abordadas ao longo das SEs - até mesmo quando tratou de ensinar-lhes sua definição formal –, o que pode ter contribuído para eles não tenham sido impactados por um obstáculo didático dessa natureza.

Ao contrário do que havia sido planejado inicialmente, a SE-4 foi desenvolvida na escola C, onde Luiz atuava, em apenas um dia letivo, devido a uma solicitação imprevista da diretora da instituição, que requisitou uma das tardes para desenvolver uma atividade pedagógica com os estudantes. Sem dúvida, essa alteração no planejamento impactou as ações de Luiz que, preocupado com o tempo de realização, centralizou em si grande parte dos encaminhamentos da atividade em detrimento de uma aprendizagem mais dialogada com os estudantes.

Isso ficou evidente tão logo ele percebeu certa demora dos grupos em resolver a questão 'a' da SE-4, ou mesmo quando constatou alguma incompletude nas respostas dadas (Figura 98). Luiz passou, então, a construir as soluções na lousa, apenas eventualmente dialogando com o grupo.

Figura 98 - Item a da SE-4 (Luiz)



Fonte: Produção de Luiz.

Apesar da resposta equivocada apresentada na Figura 98, ainda assim observou-se um grande envolvimento dos estudantes na elaboração da SE- 4. Um dos pontos mais polêmicos deu-se a respeito do exercício 'c' (Figura 99).

Em face da resposta apresentada, Luiz apontou aos estudantes que era necessário construir as leis das funções e não simplesmente informar as faixas de consumo com seu custo, mas percebeu que, embora elas não estivessem formalmente descritas, o grupo havia entendido cada uma das sentenças.

Figura 99 - Item C da SE - 4 (Luiz)

Depois problemas que o resultado era maior que 49,40 ($10 \times 4,94$) e então subtraímos 49,40 da soma, e fazíamos assim em diante ($- 65,40; 85,00 \dots$). Porém, caso subtraíssemos 49,40 e o resultado for menor que 65,40, dividiríamos o valor pela tarifa da faixa de 65,40 (6,30). O valor que obtivermos da divisão, somaríamos ao último valor da faixa anterior, assim, chegamos ao valor consumido.

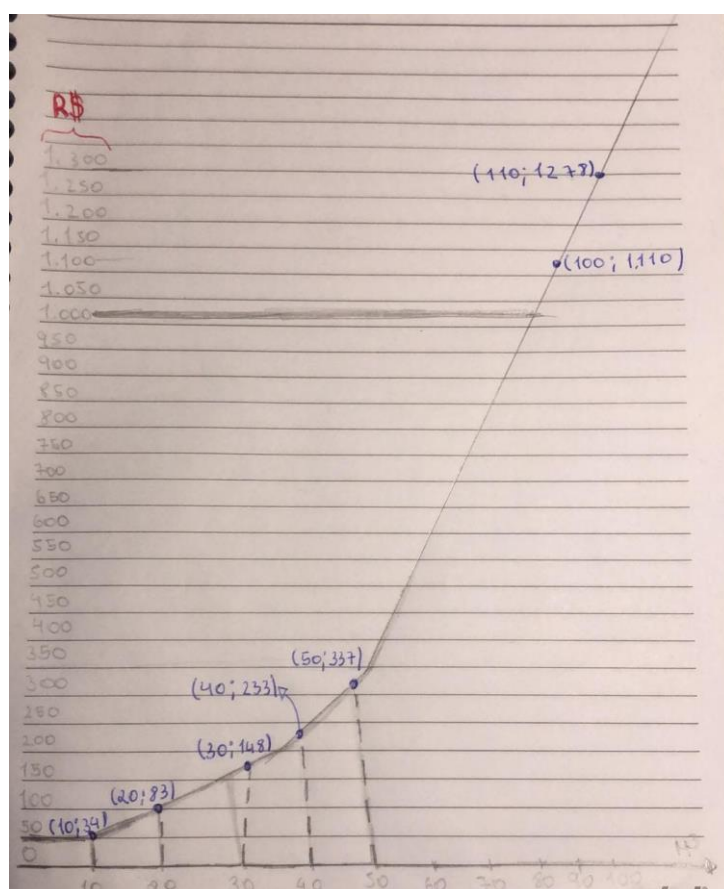
co com base nisso

R\$ 73,32	→ 18 m ³
R\$ 89,94	→ 21 m ³
R\$ 116,10	→ 25 m ³
R\$ 264,82	→ 43 m ³

Fonte: Produção de Luiz.

De maneira similar ao ocorrido com Lucas na Escola A, um dos grupos de estudantes da instituição onde Luiz lecionava construiu o gráfico (Figura 100) da SE-4 (item d) sem evidenciar os pontos de descontinuidade.

Figura 100 - Item d da SE-4 de Luiz



Fonte: Produção de Luiz.

Diferentemente de Lucas, que construiu a representação gráfica da FVSM com auxílio do *GeoGebra*, Luiz preferiu esboçá-lo na lousa tradicional, explicando aos estudantes os pontos em que havia descontinuidade, mas sem nomeá-la como tal.

Devido ao fato de o planejamento da oficina ter sofrido alteração por imposição da coordenação pedagógica da instituição, Luiz não pôde propor aos grupos que elaborassem uma definição formal de função, e o acompanhamento da evolução de sua documentação durante a aplicação da SE-4 ficou comprometido.

No entanto, conforme previsto, a terceira semana de aplicação da SSE na Escola B foi voltada à aplicação da SE-4. No início da atividade, Gabriel propôs aos grupos que trabalhassem em suas construções sem compartilhar entre si, solicitando a eles que deixassem esse momento para a parte final da oficina, alegando desejo de observar os grupos trabalharem mais autonomamente. Em determinado momento do trabalho, um dos grupos apresentou dúvidas quanto ao cálculo do valor da tarifa na faixa referente ao consumo entre 11 e 20 m³ da atividade 1 b, pois não incluiu na sentença da função o valor da primeira faixa.

Tal dúvida, aliás, foi objeto de debate no grupo de participantes da formação durante a situação de organização, especificamente no momento da elaboração da SE-4, já que os professores previram que os alunos não encontrariam dificuldades em responder qual seria o valor da tarifa quando a faixa de consumo estivesse entre 0 e 10 m³.

Em face disso, observou-se que Gabriel questionou-os no sentido de que ponderassem ser possível o valor da tarifa referente à 2ª faixa ser menor do que o da primeira. Tal questionamento visivelmente impulsionou o trabalho do grupo no sentido (Figura 101) de encontrar uma resposta adequada.

Figura 101 - SE- 4, atividade 1 b (Gabriel)

b) Você consegue definir uma ou mais relações entre o consumo e o valor da tarifa a ser pago?

$$\begin{aligned}
 0 < x \leq 10 &\rightarrow 34 \\
 11 \leq x \leq 20 &\rightarrow 34 + (x - 10) \cdot 4,94 \\
 21 \leq x \leq 30 &\rightarrow 34 + 49,4 + (x - 20) \cdot 6,54
 \end{aligned}$$

$31 \leq x \leq 40 \rightarrow 34 + 49,4$

Fonte: Produção de Gabriel.

Entendeu-se que a ação de Gabriel evidenciou que o professor estava instrumentado pelos recursos da SE-4, dado que reproduziu junto aos estudantes exatamente aquilo que foi construído ao longo da situação de organização da SSE, corroborando com observações feitas por Assis (2016) de que as dimensões do processo de gênese documental não ocorrem isoladamente, pois o processo de apropriação de recursos, suas modificações relacionadas a seu uso e o desenvolvimento profissional estão integralmente conectados.

A discussão sobre a descontinuidade das funções surgiu quando um dos grupos respondeu ao professor que para um dos valores solicitados na atividade 1c não haveria consumo (Figura 102), correspondendo exatamente ao que havia sido planejado durante a etapa de organização da SSE.

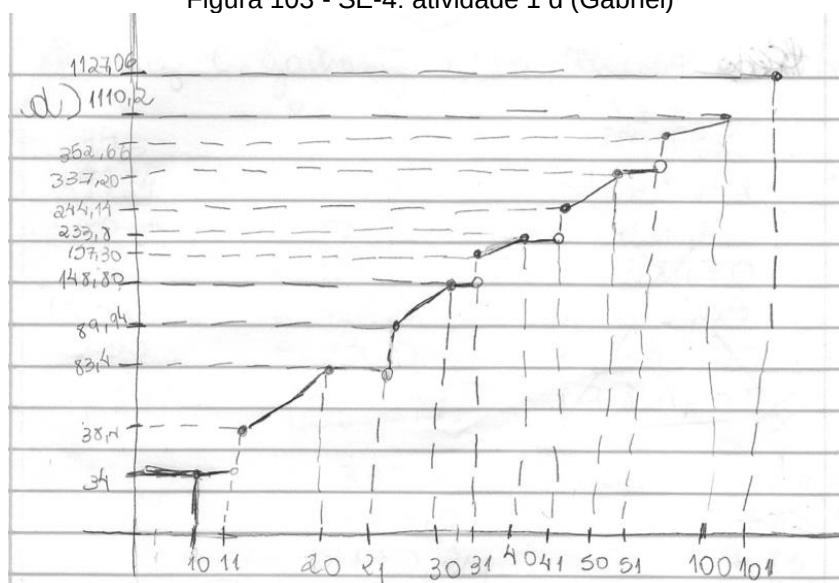
Figura 102 - SE - 4, atividade1 b (Gabriel)

- c) Determine o quanto uma família teria consumido se tivesse pago em um semestre R\$ 73,52; R\$ 89,94; R\$ 27,20; R\$ 83,40; R\$ 116,10 e R\$ 264,82.

Fonte: Produção de Gabriel.

Aparentemente por ter percebido que o cenário era favorável para explorar a noção de descontinuidade, Gabriel propôs ao grupo (Figura 103) que apresentasse a representação gráfica da função (parte d da atividade), pois gostaria de compreender como as relações entre o consumo e o valor a ser pago estariam nela representadas.

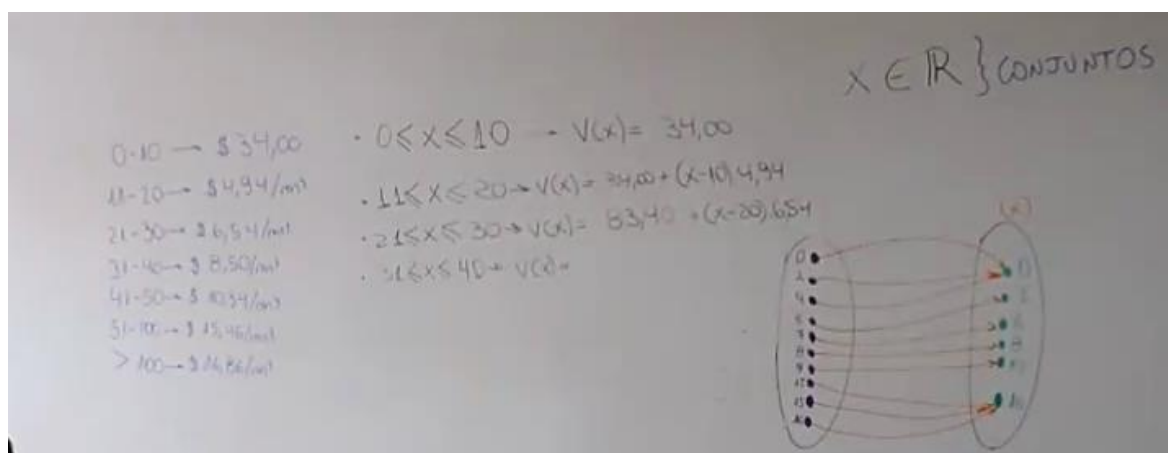
Figura 103 - SE-4: atividade 1 d (Gabriel)



Fonte: Produção de Gabriel.

O professor chamou a atenção desse grupo por não utilizar papel milimetrado na construção da representação gráfica, ponderando que, da maneira como o esboço tinha sido apresentado, a compreensão ficava prejudicada, haja vista que as escalas estavam apenas indicadas. A partir desse momento, Gabriel decidiu encaminhar a discussão com os grupos de estudantes, solicitando-lhes que não mais trabalhassem isoladamente, mas que compartilhassem na lousa (Figura 104) suas construções.

Figura 104 - Compartilhamento da solução da conta de água – Gabriel



Fonte: Produção de Gabriel.

No final da oficina, questionado pelo formador a respeito dessa ação, Gabriel relatou que tal estratégia teve por objetivo proporcionar que os estudantes confrontassem ao mesmo tempo as representações algébricas produzidas por eles e escritas na lousa digital existente na sala com outra representação, na forma gráfica, elaborada por ele, com auxílio do *GeoGebra*.

Segundo Gabriel, as duas representações da função seriam importantes no processo de compreensão da atividade, pois os grupos poderiam visualizá-las sob duas perspectivas, a gráfica e a algébrica. Além disso, segundo o professor, houve desejo de enfatizar a necessidade de se construírem gráficos com escalas precisas e diferentes daquelas elaboradas por um dos grupos no papel e, nesse sentido, o programa *Geogebra* consistia-se em uma ferramenta adequada.

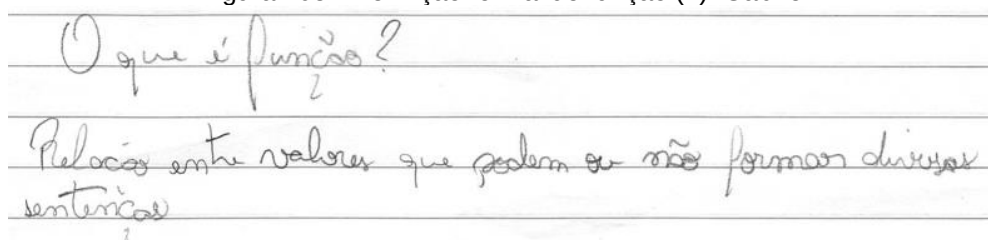
As ações de Gabriel ao mobilizar o recurso *Geogebra* para apoiar a compreensão dos estudantes na construção do gráfico da SE-4 corroboram com as observações elaboradas por Vergnaud (2011, p. 286, tradução nossa) “de que o conhecimento está ligado tanto à situação como ao sujeito que a implementa”.

Ou seja, Gabriel dispunha desse conhecimento, construído ao longo de sua trajetória profissional, e fez uso do mesmo durante o cenário de ensino da SE-4.

De maneira similar ao ocorrido durante a aplicação da SE-4 na Escola A, foi possível observar duas convergências nas ações de Gabriel quando comparadas com as de Lucas. A primeira deu-se sobre questões produzidas pelos estudantes a respeito da cobrança dos valores correspondentes aos pontos de descontinuidade. De maneira análoga à ação de Lucas, Gabriel procurou confrontar as funções produzidas e escritas na lousa pelos estudantes com sua representação gráfica projetada na lousa eletrônica da sala de aula, propiciando que os grupos de compreendessem que os valores cobrados seriam compensados na próxima conta.

A segunda (Figura 105) referiu-se a uma definição formal produzida por um dos grupos de estudantes em que se pode inferir ter sido influenciada pelas atividades envolvendo FVSM.

Figura 105 - Definição formal de função (1): Gabriel

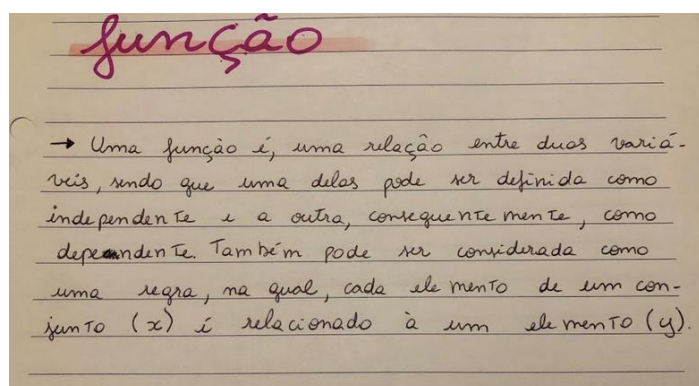


Fonte: Produção de Gabriel.

Ao se deparar com a definição construída pelo grupo, Gabriel ponderou que as definições matemáticas utilizam uma linguagem apropriada e que deveriam contemplar uma ideia de generalidade.

Outro grupo de estudantes (Figura 106) apresentou uma definição formal de função, reproduzindo uma relação de correspondência.

Figura 106 - Definição formal de função (2): Gabriel



Fonte: Produção de Gabriel.

Questionado pelo professor acerca da construção da definição, os estudantes pertencentes a esse grupo mencionaram terem adaptado alguns conhecimentos obtidos no EF2 com a experiência construída ao longo das atividades da oficina. Inferiu-se disso que Gabriel poderia ter ensinado função no transcorrer da formação continuada, desenvolvendo uma noção de processo e validando observações feitas por Bayazit (2006) de que tal concepção tem o potencial de encorajar os alunos a desenvolverem uma concepção própria sobre função.

6.6.5 CONCLUSÕES SOBRE A ETAPA DE APLICAÇÃO

No decorrer da aplicação da SSE, foi possível observar que os três sujeitos de pesquisa experimentaram diferentes processos de instrumentação e instrumentalização. Ao longo desse processo, continuaram a incorporar recursos e a mobilizar e/ou desenvolver esquemas documentais que trouxeram indícios a respeito da evolução do processo de documentação quando confrontados com as observações colhidas desde a realização das visitas nas escolas e a vivência das situações de reflexão, formação e organização.

O sujeito de pesquisa Lucas iniciou a aplicação da SE-1 encontrando grandes dificuldades em lidar com o protagonismo dos estudantes para resolverem as atividades propostas, mas, ao longo da aplicação das demais SEs, e durante as discussões com o formador e o grupo de participantes nos encontros da etapa, desenvolveu esquemas e se instrumentou com o recurso. Ele vivenciou o processo de instrumentalização ‘adaptar recursos com o intuito de aplicar a SE-3 e 4’, mas aparentemente continuou a entender que a definição de função deveria ser elaborada como um conjunto de pares ordenados.

O participante Luiz demonstrou resistências em aceitar o protagonismo dos estudantes, principalmente durante a aplicação da SE-1, e trouxe indícios da experimentação da dimensão de instrumentalização da gênese documental, ao adaptar recursos oriundos do Caderno de Estudos do Estado de São Paulo com os existentes na SE-3, e teve o acompanhamento de sua documentação prejudicado ao longo da aplicação da SE-4 devido a um evento não previsto. A julgar por suas ações e opiniões defendidas durante os encontros com o formador e demais

participantes, inferiu-se que Luiz alijaria os estudantes do processo de construção da definição formal de função, visto que, ao longo da aplicação das SEs pareceu estar alinhado a uma concepção de ensino de função voltada à ação.

Em contrapartida, o acompanhamento da evolução da documentação do sujeito de pesquisa Gabriel revelou que ele poderia estar engajado com uma definição de processo de função construída ao longo da vivência das situações proporcionadas pela formação. O professor apresentou indícios de ter experimentado ambas as dimensões da gênese documental, seja por adaptar novos recursos durante a aplicação das SEs, seja por ter desenvolvido esquemas que o levaram a alterar sua maneira de introduzir o ensino de função a partir da FVSM.

A seguir, serão analisados os dados obtidos durante a etapa de crítica da formação continuada.

6.7 ETAPA DE CRÍTICA

A etapa de crítica da formação continuada foi organizada para se desenvolver em dois encontros presenciais, que contaram com o suporte de dois fóruns no *Moodle*, e teve como intuito proporcionar aos participantes a experimentação de uma situação de balanço coletivo sobre a aplicação da SSE por meio de uma situação de avaliação, cujos detalhes serão apresentados a seguir e, em seguida, analisados à luz do referencial teórico da ADD.

6.7.1 SITUAÇÃO DE AVALIAÇÃO

A situação de avaliação da formação continuada foi intitulada ‘avaliar o processo de elaboração e aplicação da SSE para introduzir o ensino de função com base na FVSM no 1º ano do EM, como parte da classe de situações ‘avaliar o processo de elaboração e aplicação de uma SSE para introduzir o ensino de função’, e teve por objetivo proporcionar aos sujeitos de pesquisa a experimentação de um balanço geral do processo de elaboração e aplicação do documento SSE.

Para implementar a situação de avaliação e favorecer o acompanhamento da documentação dos professores, foi elaborada a OI-4, cujos detalhes são apresentados a seguir.

6.7.1.1 OI-4

Nessa seção, são apresentados os detalhes da configuração didática, o modo de execução e o desempenho didático alcançado pelo planejamento da OI-4.

Configuração Didática da OI-4

A situação de reflexão foi planejada para acontecer em dois encontros presenciais, com duração de três horas, no campus da PUC-SP. Em 23/11/2019 planejou-se a realização do 9º encontro presencial e, em 07/12/2019, o 10º encontro. Para preparar e dar suporte às discussões sobre esses encontros, ao longo das semanas que precederam sua realização, organizaram-se o 10º e 11º fóruns de discussão virtual no ambiente *Moodle*.

Os fóruns no *Moodle* foram preparados de forma a que os participantes pudessem ter acesso à SD e à SSE, bem como aos links de acesso ao material produzido em vídeo, com a aplicação das SEs pelos sujeitos de pesquisa disponibilizado em uma pasta *Gdrive*. Esperou-se que as postagens feitas pelos participantes trouxessem um balanço das atividades desenvolvidas ao longo da formação, envolvendo a elaboração e aplicação da SSE, e que novos recursos pudessem ser propostos para o aprimoramento do documento.

Durante os encontros presenciais, as contribuições produzidas nos fóruns seriam fundamentais para auxiliar a balizar as discussões de crítica da SSE, ocasião em que se previu a continuidade da evolução da documentação dos sujeitos de pesquisa, por meio da mobilização de outros recursos e esquemas documentais que eventualmente levariam à atualização da SSE.

A organização do espaço físico para a realização dos encontros presenciais foi o mesmo utilizado na OI-3, com o pesquisador exercendo a função de formador, participante observador e um profissional de vídeo, cuja tarefa consistiu em fazer o registro em áudio e vídeo dos encontros. Outros materiais de

apoio à realização do encontro, tais como, lousa, giz, papel, lápis, borracha, caneta e acesso à internet foram providos aos participantes, de forma a apoiar a realização da situação de avaliação.

Modo de Execução da OI-4

A fim de que as discussões nos fóruns do *Moodle* impactassem na elaboração da situação de crítica, os participantes foram orientados, por meio do envio de um e-mail e do disparo de mensagens no grupo de *WhatsApp*, a dar suas contribuições ao primeiro fórum no período compreendido entre 17/11 e 22/11/2019 e, no segundo, de 23/11 a 06/12/2019. A organização foi pensada da seguinte forma: no momento de sua constituição, o formador faria uma postagem disponibilizando a SD e SSE para download, além de indicar o caminho para acesso à pasta do *Gdrive* em que os vídeos com a aplicação da SSE estariam disponíveis para consulta, bem como as regras de funcionamento dos debates virtuais.

Para pôr em prática a situação de crítica, os participantes agregariam novos recursos à SSE, por meio do resgate das seguintes experiências experimentadas ao longo da formação:

- SD: ocasião em que foram convidados a construir uma SD, partindo de documentos que costumavam utilizar para introduzir o ensino de função;
- SSE: organizada durante a OI-3, com o intuito de introduzir o ensino de função baseado em FVSM e
- Aplicação da SSE: vivência da aplicação da SSE.

Com o objetivo de colocar em prática tal planejamento, foram desenvolvidos uma configuração didática e um modo de execução, apresentados a seguir.

Configuração didática da OI-4

Levando em consideração que, ao propor a situação de crítica, esperou-se analisar a evolução do processo de documentação dos participantes por meio da organização de uma nova SSE, algumas providências relacionadas à sua

estruturação foram tomadas, levando em conta o papel das pessoas envolvidas, a organização do espaço em que se desenvolveria e o tempo de sua duração.

Para tal, foram organizados:

- dois fóruns de debates no ambiente *Moodle*;
- dois encontros presenciais com duração de três horas cada um, nos dias 23/11 e 07/12/2019 respectivamente, e
- uma pasta no *Gdrive* contendo os vídeos com a aplicação da SSE feita pelos professores Gabriel, Lucas e Luiz.

A proposição dos fóruns de debates no *Moodle* foi planejada para que se pudesse acompanhar o processo de evolução da documentação dos participantes durante um período mais amplo do que aquele reservado aos encontros presenciais, de maneira a favorecer a continuidade das reflexões sobre seu trabalho de elaboração e aplicação das SE. Durante a realização, esperou-se ter acesso a eventuais recursos que viessem a ser mobilizados e/ou desenvolvidos pelo grupo ao longo das discussões, bem como identificar esquemas documentais utilizados durante as ações de elaboração da nova SSE.

A organização dos encontros presenciais teve por parâmetro a experiência vivenciada nas outras OIs, isto é, além dos participantes, teriam participação o pesquisador, exercendo a tarefa de formador, um participante observador com a função de acompanhamento da evolução do processo de documentação dos professores e um profissional de vídeo encarregado de transpor o material produzido para a forma de vídeo e áudio. Para contribuir com o andamento do encontro, além das discussões ocorridas no *Moodle*, todo o material produzido pelos alunos durante a aplicação da SSE estaria à disposição do grupo de participantes e o arranjo físico do espaço dos dois encontros seria o mesmo da OI-3, de forma que todos os participantes tivessem computadores e acesso à internet à disposição.

Durante a realização dos encontros presenciais, acreditou-se ser possível acompanhar o fenômeno da gênese documental, tanto porque os participantes poderiam refletir sobre sua experiência, ao elaborar e aplicar as SE, como pelo fato de as mesmas terem sido canceladas pelo feedback dos estudantes e por meio de discussões que aconteceram durante todo o processo de sua aplicação.

Em relação ao uso do conteúdo produzido em vídeo durante a aplicação da SSE, disponibilizada em uma pasta do *Gdrive* e compartilhada com todos os participantes, esperou-se que o material servisse de apoio para a produção de reflexões, tendo em vista que o acompanhamento da prática por meio desse recurso poderia contribuir para a elaboração da nova SSE. A prática do uso de vídeo como forma de apoio à produção de reflexões em um ambiente de formação, aliás, foi utilizada com êxito na investigação Visnovska e Cobb (2013), contribuindo para a elaboração de recursos voltados ao ensino de temas estatísticos.

Modo de execução da OI-4

O ponto de partida da orquestra incidiu sobre o andamento do ambiente *Moodle* e, para isso, os participantes foram orientados por meio de um e-mail e do disparo de mensagens no grupo de *WhatsApp* a fazer suas contribuições ao 10º fórum no período compreendido entre 17/11 e 22/11/2019, e ao 11º, de 23/11 a 06/12/2019. A organização se deu da seguinte forma: no momento da constituição, o formador faria uma postagem disponibilizando a SD e a SSE para download, além de indicar o caminho de acesso à pasta do *Gdrive* em que estariam disponíveis para consulta os vídeos com a aplicação da SSE, bem como informar as regras de funcionamento dos debates virtuais.

Em relação ao funcionamento do debate no *Moodle*, os participantes deveriam efetuar pelo menos duas postagens: na primeira, deveriam propor um tópico relacionado ao processo de elaboração e/ou aplicação da SSE para ser debatido coletivamente e, no segundo ingresso, comentar alguma postagem ou participar de algum debate eventualmente proposto, de maneira a criar condições para a produção de crítica acerca do trabalho desenvolvido durante a formação. Caso o tópico proposto contivesse referência ao material de vídeo disponível no *Gdrive*, seria preciso indicar detalhes acerca do arquivo e marcar os momentos de início e final do trecho escolhido para comentário.

A dinâmica planejada para o desenvolvimento das ações no 9º encontro presencial foi a seguinte:

- Informe da pauta de trabalhos: 5 minutos;
- Resgate das discussões ocorridas no *Moodle*: 60 minutos;

- Balanço das ações durante a elaboração da SD, SSE e sua aplicação: 100 minutos e
- Planejamento futuro: 10 minutos.

No final do primeiro encontro, um dos participantes produziria um resumo a respeito de possíveis reflexões produzidas pelo grupo acerca dos processos experimentados durante a SD, a SSE e a aplicação da SSE, a ser materializado na forma de postagem em um fórum preparatório ao 10º encontro presencial, ocasião em que seria possível continuar as ações de crítica e atualização do documento SSE.

Para implementar o segundo 10º encontro presencial, a seguinte estrutura foi idealizada:

- Informe da pauta de trabalhos: 5 minutos;
- Resgate das discussões ocorridas no *Moodle*: 30 minutos;
- Atualização da SSE: 120 minutos e
- Finalização: 10 minutos.

No transcorrer do segundo encontro presencial, planejou-se a atualização da SSE, produto de reflexões produzidas pelos participantes ao longo da experimentação da situação de crítica. A fim de recolher o documento produzido, imaginou-se que, ao longo do processo de discussão coletiva, um dos participantes seria encarregado da organização de sua digitação, com ajuda de software específico, de maneira a postar o resultado da construção coletiva em um dos fóruns de discussão do *Moodle*.

Os dados referentes a execução da situação de reflexão seriam obtidos da seguinte forma: 1) vídeo operado por um profissional de comunicação, cuja câmera seria colocada em local estratégico da sala de aula, com o intuito de captar as interações entre os participantes; 2) áudio recolhido com auxílio do telefone celular do pesquisador e do profissional de vídeo; 3) protocolo de observação preenchido por um observador para registrar o trabalho documental dos sujeitos de pesquisa; 4) diálogos produzidos pelo grupo nos fóruns de discussão virtual e durante os encontros presenciais; 5) arquivos digitais eventualmente anexados às postagens nos fóruns e 6) recursos mobilizados e/ou produzidos, incluindo a atualização da SSE.

Para analisar os dados sob a perspectiva da ADD, foi programada a transcrição integral dos áudios, em confrontação com as imagens geradas pelas filmagens, bem como as observações colhidas pelo participante observador sobre as ações dos sujeitos de pesquisa durante a OI-4. Durante a atualização da SSE, projetou-se identificar recursos e/ou esquemas documentais mobilizados pelos participantes, de maneira a compreender a evolução da documentação elaborada por eles.

Desempenho Didático da OI-4

Durante a semana que precedeu o 9º encontro presencial, os sujeitos de pesquisa Gabriel, Lucas e Luiz fizeram postagens no fórum de discussão no *Moodle* sobre aspectos críticos referentes aos processos de elaboração da SSE e sua aplicação junto aos estudantes. Adicionalmente, Fabíola e Bruno postaram questões e interagiram com o formador e sujeitos de pesquisa.

A postagem feita por Gabriel tratou da SE-2 envolvendo o contexto da física. Como o objetivo da situação era proporcionar um balanço crítico, o participante argumentou que, durante o encontro em que se decidiu incluí-la na SSE para introduzir o ensino de função com base em FVSM, ele havia sugerido que o enunciado da atividade sobre o deslocamento do automóvel deveria considerar um cenário real. Em sua opinião, um enunciado mais próximo da realidade faria com que os estudantes mobilizassem com mais naturalidade as noções de taxa de variação e função horária utilizadas durante o aprendizado da cinemática na disciplina de física.

Questionado pelo formador a respeito da falta que essas informações teriam provocado na aplicação da SE-2, Gabriel argumentou que se tratava de uma atividade considerada de natureza interdisciplinar e que o trabalho com dados reais era uma imposição necessária. Em face disso, inferiu-se que o aprimoramento proposto no recurso SE-2 sugerido por Gabriel corroborou com observações feitas por Messaoui (2020) de que o desenvolvimento do conhecimento profissional é inseparável da prática reflexiva na perspectiva do trabalho documental e, portanto, suas reflexões contribuíram para o aprimoramento da SSE.

O participante Lucas, por sua vez, sugeriu debater um trecho de vídeo de cerca de 12 minutos de duração, referente ao processo de aplicação da SE-4 na

escola em que atuava, ocasião em que gostaria de compartilhar com o grupo algumas reações surpreendentes dos alunos e que, na sua opinião, possibilitariam refletir a respeito do tema da descontinuidade.

Luiz, por outro lado, não propôs um trecho de vídeo específico sobre sua experiência com a aplicação da SSE, mas em sua postagem informou ao grupo que gostaria de fazer um balanço sobre sua experiência em introduzir o ensino de função por meio da SE-1, por entender que o contexto da atividade dificultaria sua resolução por parte dos estudantes.

Bruno e Fabíola, por sua vez, propuseram ao grupo aprofundar o processo de reflexão sobre o uso do *Geogebra*, pois consideraram que os professores que aplicaram a SSE acabaram por utilizá-lo em cenários que não haviam sido discutidos durante sua elaboração.

O 9º encontro presencial foi realizado sem a participação de Alfredo, Antônio e Luiza, que alegaram distintas razões para suas faltas. Fabíola participou via conexão *Skype*. Conforme planejado, inicialmente foi feita a leitura da pauta e, em seguida, o resgate das contribuições produzidas no ambiente *Moodle*. No caso específico da proposta de Lucas, o formador projetou o trecho do vídeo selecionado para discussão.

Em resposta à crítica do enunciado da SE-2 relacionada à física, feita por Gabriel, o formador sugeriu que ele produzisse uma proposta para uma nova redação da atividade a fim de que a mesma pudesse ser objeto de discussão. O formador sugeriu, inclusive, que isso poderia ser feito no próximo fórum de debates com participação de todo o grupo.

Gabriel novamente ponderou que o enunciado contendo dados reais faria com que os estudantes mobilizassem com maior naturalidade a noção de taxa de variação e função quadrática. Em relação a SE-2, sugeriu também que houvesse uma preparação prévia de sua aplicação, a exemplo do que fizera com a SE-1, como por exemplo, a projeção de uma vídeoaula contendo noções de taxa de variação e/ou uma revisão sobre movimento uniforme de forma a melhor prepará-los.

A ação proposta por Gabriel revelou que ele continuava se instrumentalizando, por meio da adoção de novos recursos para serem integrados aos existentes na SE-2. Da mesma forma, também desenvolvia um processo de instrumentação ao lidar com o recurso da SE-2, pois desenvolveu um esquema documental cuja característica principal consistia em trabalhar com dados reais.

O balanço feito por Luiz centrou-se na situação educacional acerca da geometria plana (SE-1). Para ele, a maneira de aplicar a atividade não era adequada, visto que os estudantes da escola em que leciona tiveram grandes dificuldades em trabalhar sem a tutela do professor. Ele ponderou que a introdução ao ensino de função deveria ser pautada com o professor desenvolvendo o papel de condutor do processo de aprendizagem, e não era essa a proposta da SE-1, na medida em que transferia para o aluno em alguns momentos essa prerrogativa. Agregou ainda, que os estudantes esperam que o professor lhes ensine matemática e não o contrário, e, nesse sentido, entendia que o fato de o professor resolver a atividade traria mais resultados na aprendizagem do tema.

Questionado pelo formador a respeito de uma possível alteração na maneira de introduzir o ensino de função, Luiz relatou que o processo de construção e implementação da SSE não alterou suas convicções, isto é, ele entendia não existir margem para os estudantes elaborarem uma definição formal de função sem auxílio do professor, até porque os materiais adotados pelo estado de São Paulo não permitem modificações nesse sentido.

O trecho em vídeo selecionado por Lucas, como contribuição ao processo de crítica da SSE, referiu-se à aplicação da SE-4 na Escola A, cujo cenário consistia em introduzir o ensino de função apoiado em FVSM, explorando o tema da descontinuidade. No vídeo é possível observar os estudantes debatendo sobre os valores da tarifa nos pontos de descontinuidade, tendo como base a representação gráfica da função construída com auxílio do *GeoGebra* que havia sido projetada na lousa eletrônica da sala de aula. No diálogo transcrito abaixo é possível observar algumas razões que levaram Lucas a selecionar o trecho em questão:

Formador: Você poderia explanar o que proporia como reflexão ao grupo?

Lucas: É o seguinte ... Vocês vejam que a aluna em nenhum momento falou que não tinha função ali, vocês viram? Ela disse que naqueles valores da tarifa ... tudo aquilo era função. Sabe, eu quis trazer esse ponto

para vocês hoje porque a gente teve muita preocupação com a descontinuidade quando a gente discutiu a conta de água, e ali, naquele momento, eu mesmo fiquei muito surpreso.

Gabriel: Sim, eu queria também falar desse ponto, porque eu temia que teria muito problema na conta de água devido a descontinuidade, ... mas não foi assim ...

Formador: Explique o que de fato o surpreendeu, por favor.

Lucas: O que eu achei mesmo e o que me surpreendeu foi que se a gente ... eu falo da gente (*professores*) ... a gente atrapalha muitas vezes os alunos, ... porque olha ali, nós acertamos que não iríamos definir nada, e foi muito difícil para mim, por exemplo, ter que me controlar às vezes ... e na prática nós não falamos de nada sobre descontinuidade, e os alunos viram ali que era função. Então eu acho mesmo que esse foi um grande ganho ... Eu acho que foi um dos meus aprendizados e por isso quis mostrar pra vocês. Então eu queria dizer também que ter usado o *GeoGebra* facilitou meu trabalho naquela hora que tava falando da última pergunta da atividade.

Durante sua explanação, Lucas compartilhou com os participantes as produções dos grupos de estudantes da Escola A, indicando detalhadamente as partes do vídeo em que era possível confrontar seus argumentos, cotejando-as ainda com as produções obtidas pelos estudantes das escolas B e C, para que fosse possível realizar uma comparação nas produções feitas pelos estudantes.

Por meio das reflexões trazidas por Lucas, foi possível inferir que o professor continuou mobilizando outros recursos a partir das questões trazidas pelos estudantes, caso específico do *GeoGebra*, e o fato de considerar-se surpreso com as elaborações dos estudantes no cenário da descontinuidade pode indicar que ele passou a considerá-los sob outra perspectiva no processo de aprendizagem de função. O professor continuou a se instrumentalizar, posto que utilizava “diferentes recursos, desviando-os de seus objetivos iniciais, colocando-os a serviço de seus próprios objetivos” (GUEUDET; TROUCHE, 2010, p. 7, tradução nossa).

Em relação ao uso de tecnologia, os participantes Fabíola e Bruno sugeriram que o uso do *GeoGebra* em determinados momentos produziu ganhos ao processo de aprendizagem de função. Os participantes relataram ter assistido a alguns trechos dos vídeos compartilhados na pasta *gDrive*, bem como ouvido atentamente os relatos dos colegas durante os encontros que ocorreram paralelamente à aplicação da SSE. Em particular, observaram que teria sido apropriado incluir um treinamento sobre o uso do programa como preparação ao processo de aplicação da SSE, haja vista que os estudantes não apenas se

interessaram quanto a seu uso como sua utilização foi determinante para que compreendessem a noção de descontinuidade por meio da representação gráfica da FVSM na atividade sobre a conta de água.

Questionados pelo formador a respeito da importância da SSE no processo de construção da definição formal de função, com exceção de Luiz, todos os demais consideraram a experiência relevante, pontuando que não foi necessário o professor tipificar funções para conduzir esse processo, mas foi importante observar/considerar a dificuldade dos estudantes em utilizar a linguagem matemática adequada.

Nesse ponto, o formador procurou evidenciar como identificou as concepções de ensino utilizadas por Gabriel e Lucas (não foi possível para Luiz fazê-lo na instituição em que atua), ao mediar a elaboração da definição formal de função feita pelos alunos e as eventuais consequências que poderiam causar no processo de aprendizagem.

Um balanço crítico a respeito da construção da SD, da SSE e sua aplicação foi feito em seguida, coordenado pelo formador. Observou-se que os participantes se apropriaram da ideia de introduzir o ensino de função apoiado na FVSM, ainda que não tenham externado alterar sua prática no futuro. Nesse sentido, percebeu-se que as restrições impostas pelos currículos e/ou a organização propostos em obras didáticas físicas ou eletrônicas constituíram-se em importantes argumentos utilizados pelos professores como obstáculos para a implementação de uma abordagem a seu ensino com base em FVSM.

Na parte final do encontro, estipulou-se que Gabriel faria um relato das reflexões produzidas pelo grupo, que seria divulgado sob forma de postagem no 11º fórum preparatório para o próximo encontro a ser organizado pelo formador, e que os participantes refletiriam a respeito de uma possível atualização da SSE durante debates no ambiente *Moodle*. Com relação a isso, a maioria das contribuições proporcionadas pelo grupo de participantes ao 11º fórum do *Moodle*, que precedeu o 10º e último encontro presencial, centraram-se na manutenção da estrutura existente na SSE.

A esse respeito, os participantes Bruno e Fabíola, entretanto, continuaram a ponderar sobre a necessidade de integrar o uso de tecnologia em todas as SEs,

enquanto Gabriel e Lucas propuseram incluir uma revisão preparatória sobre geometria plana e taxa de variação, bem como concordaram sobre a necessidade de avaliar cada uma das situações no que diz respeito ao uso de tecnologia digital. Em sua postagem, Luiz propôs que o uso do livro didático (ou apostila, no seu caso) também poderia ser um elemento útil para auxiliar os estudantes na resolução das atividades, entendendo que esse tipo de material tem a vantagem de ser elaborado em uma linguagem mais próxima do cotidiano social em que os discentes estão inseridos.

No 10º encontro presencial destinado à discussão sobre uma eventual atualização da SSE, novamente ausentaram-se os participantes Luiza, Antônio e Alfredo, enquanto Fabíola participou das discussões com auxílio da uma conexão por *Skype* proporcionada pelo formador. Em conformidade com o que havia sido planejado, o grupo debruçou-se sobre o trabalho de considerar ou não adequado introduzir alterações na estrutura da SSE como alternativa para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM.

Conforme observado nas discussões do *Moodle*, a maioria dos professores concordou em manter a estrutura inalterada por entenderem que a SSE tinha atingido o objetivo de introduzir o ensino de função a partir de FVSM. Entretanto, algumas alterações foram inseridas no processo de aplicação da SSE, o que acabou por determinar, de fato, uma atualização. Gabriel sugeriu a criação de uma etapa introdutória à aplicação da SSE-1, que consistiria em uma ampla revisão dos temas relacionados à geometria plana trigonometria, taxa de variação e um treinamento do uso do software *GeoGebra*. Cabe salientar que a integração de recursos pautados em tecnologias digitais com outros de outra natureza, como proposto por Gabriel, “tem se constituído em um exemplo de alteração da prática docente” (LUCENA; GITIRANA; TROUCHE, p. 251), favorecendo a aprendizagem dos estudantes.

Em relação ao treinamento para utilização do *GeoGebra*, Lucas sugeriu que o mesmo se apoiasse na proposta apresentada por Fabíola durante a elaboração da SSE, mas algumas modificações foram feitas (Anexo B) no sentido de torná-la, segundo eles, mais adequada ao contexto da SSE-1. Nesse sentido, o foco deveria ser o domínio das ferramentas básicas do programa, aplicadas ao

ensino de função, e, para tanto, mantiveram a primeira atividade sugerida por Fabíola, porém incluindo uma FVSM na atividade 2, destinada ao esboço de gráficos e trabalho com notação.

Questionado pelo formador a respeito da SE-2, Gabriel considerou relevante certificar-se de que os estudantes haviam tido contato com a noção de função horária do movimento na disciplina de física. Caso o conteúdo não tivesse sido abordado no currículo do 1º ano do EM, ele entendia adequado avaliar a validade da aplicação da SE-2, ou mesmo pensar na possibilidade de um prazo maior para isso. Em relação à possibilidade de mudança no enunciado, o participante alegou não ter tido tempo de elaborar uma sugestão.

Quanto às duas outras situações educacionais, os três sujeitos de pesquisa consideraram não haver necessidade de produzir qualquer alteração, apenas entraram em acordo sobre o uso do *GeoGebra* concomitantemente com o papel milimetrado, porque isso poderia contribuir com o processo de construção das representações gráficas da FVSM, bem como auxiliar na superação de eventuais obstáculos com a elaboração das escalas no plano cartesiano.

6.7.1.2 CONCLUSÕES SOBRE A SITUAÇÃO DE AVALIAÇÃO

A experimentação da situação de crítica da SSE, viabilizada pela OI-4, possibilitou que os sujeitos de pesquisa Gabriel, Lucas e Luiz continuassem a mobilizar e/ou desenvolver recursos e esquemas para a elaboração de uma atualização da SSE.

Ao longo da situação, foi possível observar que o balanço da elaboração das outras SEs e a aplicação da SSE trouxeram novos elementos que permitiram continuar o acompanhamento da evolução da documentação dos participantes.

Nesse sentido, percebeu-se que Gabriel apropriou-se inteiramente da estratégia de introduzir função recorrendo à FVSM, enquanto os outros dois professores a utilizaram apenas parcialmente. Inferiu-se, a princípio, que o participante Luiz não havia se apropriado da SSE, preferindo manter sua própria maneira de introduzir o ensino de função.

Novos recursos foram incorporados à SSE durante seu processo de elaboração, destacando-se o uso de *sites* da internet e do software *GeoGebra*, evidenciando o processo de evolução da documentação dos sujeitos de pesquisa proporcionado pela vivência das situações na formação continuada.

6.7.1.3 VISITA FINAL COM OS SUJEITOS DE PESQUISA

A visita final aos sujeitos de pesquisa foi realizada na parte final do último encontro dedicado à situação de crítica, foi realizada em um dos Laboratórios de do campus da PUC-SP e durou aproximadamente 60 minutos.

Durante a visita foi realizada uma entrevista semiestruturada simultaneamente com os três sujeitos de professores e seu conteúdo foi gravado em áudio, com o auxílio do celular do pesquisador. Em conformidade com os princípios metodológicos do acompanhamento reflexivo do trabalho documental e da confrontação permanente das opiniões do professor sobre seu trabalho de documentação, a entrevista teve por objetivo compreender o impacto proporcionado pelos processos de elaboração, aplicação e crítica da SSE em seus sistemas de recursos a fim de que se tivesse clareza da evolução da documentação.

Questionados a respeito de como, futuramente, encarariam a introdução do ensino de função no 1º ano do EM, após a vivência de um conjunto de situações profissionais ao longo da formação continuada, os três sujeitos de pesquisa pronunciaram-se de maneira um pouco distinta.

Lucas externou que certamente utilizaria a SE-4 que tratava da conta de água, além de outros recursos mobilizados ao longo da formação, tais como o *GeoGebra* no processo de esboço da representação gráfica da FVSM, bem como da videoaula disponível no *site Khan Academy* para explorar a noção de taxa de variação. Ele alegou também que não seria possível utilizar as quatro SEs em um curso regular, a menos que fosse por meio de oficinas, e que procuraria adaptar seus cursos a fim de evitar introduzir o ensino de função exclusivamente por funções afim com uma única sentença e comportamento regular. Isso leva a crer que, após a vivência na formação, que seu MISR eventualmente poderia incluir

alguns dos recursos mencionados durante a entrevista, não sendo possível afirmar se teriam status de recursos-mãe.

O sujeito de pesquisa Luiz, por outro lado, declarou que não alteraria sua maneira de introduzir o ensino de função no 1º ano do EM e que continuaria reproduzindo a estratégia proposta pelos materiais didáticos da Secretaria Estadual de Ensino do Estado de São Paulo. O participante esclareceu que sua experiência docente, construída ao longo de anos de docência, fazia com que ele tivesse convicção de que essa escolha representava uma garantia de bons resultados a seus alunos nos vestibulares nacionais e no ENEM. Por outro lado, admitiu incluir, futuramente, a SE - 2 e 3 em seus cursos, caso estivesse tratando de abordar o ensino de função por meio de cenários que envolvessem a interdisciplinaridade ou mesmo a matemática financeira, fazendo supor que seu MISR, após o período de vivência da formação continuada, não sofreria grandes alterações, se comparada à visita inicial, feita durante a fase de preparação.

Gabriel, o terceiro sujeito de pesquisa, externou que a experiência vivenciada na formação continuada o fez refletir acerca da maneira como vinha introduzindo o ensino de função. O professor disse estar convencido de que esse processo deveria ser feito a partir da FVSM, e que, futuramente, não pretenderia fazê-lo por meio da ênfase exclusiva de funções afim com uma única sentença e com comportamento regular. Afirmou ainda que procuraria integrar a SSE em suas estratégias didáticas para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM. Considerou fundamental planejar adequadamente o ensino do tema, por meio de aulas preparatórias e oficinas, com a finalidade de proporcionar aos estudantes amplo acesso a tecnologias, como por exemplo o programa *GeoGebra*, levando a imaginar que, futuramente, seu MISR poderia incluir a SSE como um novo recurso.

A seguir serão apresentadas as considerações finais da investigação.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Esta pesquisa constitui-se de uma formação continuada para investigar como ocorre a gênese documental em professores da educação básica durante a elaboração de documentos para a introdução de função a partir da FVSM. A proposição desta investigação foi responder à questão: Como ocorre a gênese documental da FVSM em professores da educação básica em um ambiente de formação continuada?

A elaboração da delimitação desta questão foi procedida inicialmente de uma revisão da literatura a respeito da ADD e da OI que apontou a existência de investigações mais voltadas aos docentes em formação nos cursos universitários de Licenciatura, sobretudo em Matemática. A revisão bibliográfica sobre os dois quadros teóricos também evidenciou que, ao longo do desenvolvimento do trabalho documental, os professores articulam vários recursos, bem como necessitam um longo tempo de acompanhamento para a compreensão da gênese documental e da construção de inferências acerca de seu desenvolvimento profissional por meio da identificação de esquemas.

Observou-se uma relação direta entre a documentação do professor e a maneira como ensina, que poderia ser potencializada por meio do desenvolvimento de recursos em um cenário de formação continuada, calcada na articulação dos quadros teóricos da ADD e OI, para um conjunto de situações profissionais. Nesse cenário, a OI teria por finalidade dar suporte à gênese documental de professores, mediante o desenvolvimento de configurações didáticas e modos de execução que proporcionariam a integração de recursos no ensino, além do desenvolvimento e compartilhamento do sistema de recursos de seus participantes.

Uma segunda revisão da bibliografia voltada exclusivamente à FVSM revelou que a maioria das investigações selecionadas estiveram mais centradas na aprendizagem, sendo que poucas delas estivessem relacionadas diretamente com a formação continuada no âmbito da educação básica, ou que se vinculassem à ADD. Concluiu-se que, ao introduzir o ensino de função, priorizando aquelas com uma única sentença e comportamento contínuo, o professor poderia produzir nos

estudantes a ideia de que toda a função deva seguir essa tendência, o que acarretaria na formação de obstáculo de ordem didática.

Com o objetivo de ampliar a compreensão dessa problemática, decidiu-se realizar alguns estudos preliminares, de ordem histórica, epistemológica e didática a respeito da definição de função, para complementar os já realizados na revisão da literatura.

Por meio de um estudo histórico e epistemológico sobre a elaboração da definição de função no período compreendido entre meados do século XVII e o século XX, chegou-se à conclusão de que sua razão de ser estaria relacionada à FVSM. O estudo apontou também que o contexto em que ocorreu o desenvolvimento desses saberes não foi unicamente matemático, mas também está relacionado à física, e possibilitou compreender o imbricamento entre função e FVSM.

Em decorrência dessas constatações, foram elaborados estudos didáticos para compreender o que determinam os documentos curriculares nacionais para o ensino de função, sua relação com FVSM e os recursos que esses documentos sugerem para implementá-lo, presentes nos livros didáticos do PNLD e no portal de apoio ao trabalho do professor do MEC.

Os estudos realizados nos documentos curriculares nacionais não indicaram que o ensino de função devesse priorizar uma determinada estratégia didática, mas a maneira como os temas matemáticos poderiam ser organizados nos currículos escolares. Apurou-se, por sua vez, no conjunto de obras didáticas investigadas, uma inclinação a propor o ensino de função recorrendo a uma sequência, isto é, as obras começam por abordar a noção intuitiva de função apoiada na noção de conjuntos, seguida de exemplos oriundos do cotidiano, alguns extremamente incompatíveis com o nível do ensino médio, em que a lei que expressa a relação de funcionalidade geralmente representa funções afim com uma única sentença. Por fim, a definição formal é apresentada, seguida do estudo das noções de domínio, contradomínio e imagem, sendo que em algumas dessas obras foram sugeridas a articulação de recursos, em especial os de ordem tecnológica, como estratégia de ensino.

Esse cenário permitiu inferir que talvez a noção de função pudesse ser introduzida por um ou mais problemas envolvendo FVSM e serviu de base para uma formação continuada com o intuito de investigar o fenômeno da gênese documental de professores da educação básica.

Com o propósito de alcançá-lo, foi desenvolvido um dispositivo apoiado nos cinco princípios propostos pela metodologia de investigação reflexiva - MIR, de modo a acompanhar a evolução da documentação de três sujeitos de pesquisa, identificados pelos nomes de Gabriel, Lucas e Luiz, escolhidos em um coletivo formado por oito participantes. A formação continuada teve duração de 30 horas, distribuídas entre os meses de agosto e dezembro de 2019, e foi estruturada em duas fases imbricadas: preparação e execução.

A fase de preparação teve por objetivo planejar as ações da formação continuada antes do período formativo propriamente dito e, nesse sentido, dedicou-se à organização das estruturas de acompanhamento do trabalho documental dos sujeitos de pesquisa. Para tanto decidiu-se utilizar o ambiente virtual *Moodle* para o preenchimento de questionários informativos, o diário de bordo e a participação em um fórum de discussão e, posteriormente, definiu-se como ocorreriam as visitas iniciais aos sujeitos de pesquisa e as entrevistas semiestruturadas.

Diferentemente de outras investigações no âmbito da ADD, os dados obtidos na fase de preparação revelaram resistências por parte dos sujeitos de pesquisa quanto à utilização do diário de bordo e à realização de visitas guiadas para o acompanhamento da elaboração de recursos em suas residências; pareceu-nos que tais resistências se deveram a questões relacionadas à cultura desses professores, possivelmente avessos a compartilhar detalhes de sua atividade profissional. Com o intuito de superar tais adversidades, decidiu-se realizar as visitas nas escolas em que os professores exerciam sua atividade profissional, alcançando-se êxito quanto à obtenção de dados a respeito da constituição e hierarquia de seus sistemas de recursos.

Para que os professores refletissem acerca da constituição do sistema de recursos por eles utilizado para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM, propôs-se a elaboração da RESR e, de modo para a compreender sua constituição e a hierarquia, optou-se por utilizar a noção de MISR, por meio da identificação dos

recursos-mãe e recursos-filho. Os dados a respeito da constituição e hierarquia do sistema de recursos dos sujeitos de pesquisa revelaram a presença do recurso-mãe 'questões e/ou fichas com problemas resolvidos do ENEM e vestibulares' como comum aos três professores, podendo eventualmente indicar a existência de uma preocupação com a preparação e resultados desses exames.

A análise das informações obtidas também confirmou a tendência observada na revisão da literatura, que mostrou a articulação de vários recursos-mãe, especialmente o livro didático e os de ordem digital, como o *GeoGebra*, além de demonstrarem que os sujeitos de pesquisa introduziam o ensino de função no 1º ano do EM, notadamente por funções afim, com uma única sentença e comportamento contínuo.

Com relação à maneira pela qual os professores orquestravam artefatos para a aprendizagem dos estudantes, supõe-se, a partir da confrontação de entrevistas semiestruturadas e análise da constituição de seus sistemas de recursos, que as configurações didáticas e os modos de execução priorizavam uma estratégia centrada em aulas expositivas, eventualmente dialogadas com algum uso de tecnologia digital centrada no professor, além de lousa e giz.

Por outro lado, as informações obtidas por meio do preenchimento dos questionários informativos possibilitaram construir um perfil pessoal e profissional dos professores, indicando, dentre outras constatações, que dois dos sujeitos de pesquisa, Gabriel e Lucas, eram iniciantes na carreira docente, atuando em escolas privadas, enquanto, Luiz, o terceiro, tinha mais de cinco anos de experiência profissional na escola pública. Os três professores apresentaram desenvoltura no trabalho com as TIC e experiência em trabalho coletivo.

A fase de execução foi planejada de modo a proporcionar aos participantes apropriação, elaboração, aplicação em sala de aula e crítica de uma sequência de situações educacionais – SSE, para introduzir o ensino de função a partir de FVSM, junto a estudantes do 1º ano do EM, por meio da vivência de um conjunto de situações educacionais - SE viabilizadas pela articulação de OIs. A articulação de um conjunto de OIs constituiu-se no sustentáculo para a gênese documental de professores, na medida em que suas configurações didáticas e modos de execução vieram oportunizar o desenvolvimento e a integração de recursos, bem como a

mobilização e/ou desenvolvimento de esquemas documentais de seus participantes.

A fim de garantir que os princípios da MIR fossem colocados em prática, a fase de execução foi dividida em quatro etapas: elaboração coletiva, aplicação, crítica e visita final aos sujeitos de pesquisa.

A etapa de elaboração coletiva dispôs de três situações profissionais nomeadas reflexão, formação e organização, que demandaram a organização de três OIs, organizadas por meio de encontros presenciais e com suporte do ambiente virtual *Moodle*. Constatou-se que a vivência da situação de reflexão, viabilizada pela OI-1 com os três sujeitos de pesquisa confirmou a hipótese, inicialmente estabelecida, de que a SD elaborada coletivamente iria privilegiar funções afim com uma única sentença, sendo composta por situações-problema voltadas a questões cotidianas e pensada para ser ensinada aos estudantes do 1º ano do EM, por meio de uma sequência previsível de acontecimentos.

Além disso, percebeu-se que os professores procuraram articular recursos com o intuito de produzir a SD, sem que fosse privilegiado um tipo de recurso em detrimento de outro, mas de modo articulado, com a finalidade de tornar o ensino mais fácil e sem considerar algum tipo de protagonismo no processo de aprendizagem. Conjecturou-se acerca da mobilização de um esquema documental de ação comum aos três sujeitos de pesquisa, sendo possível nele identificar um objetivo principal, objetivos secundários, regras de ação e invariantes operatórios.

A experimentação da situação de reflexão proporcionou ao formador questionar as escolhas feitas pelos sujeitos de pesquisa para introduzir o ensino de função por meio daquelas afim e com uma única sentença, abrindo a perspectiva de fazê-lo com base na FVSM, bem como possibilitou inferir, com base na confrontação dos dados obtidos durante as visitas e a vivência da situação de reflexão, que a maneira pela qual os professores orquestravam artefatos para o ensino de função não sofrera alterações.

Baseadas nos estudos de natureza histórica, epistemológica e didática, quatro SEs foram selecionadas para a vivência da situação de formação. A SE-1, concebida por Almouloud (2016), foi escolhida por estar inserida em um quadro geométrico bem conhecido dos estudantes e composta por funções afim utilizadas

para introduzir o ensino de FVSM. A SE-2 trazia situações-problema relacionadas ao campo da física, por suscitar o uso da noção de taxa de variação e compunha-se por funções afim e quadrática, enquanto a SE-3 possibilitava a exploração de um cenário envolvendo um tipo de descontinuidade (salto) e era composta por funções afim. Por fim, a SE-4 foi selecionada pelo fato de explorar um tema relacionado ao cotidiano social (conta de consumo) e conter funções afim.

Durante a experimentação da situação de formação promovida pela OI-2, constatou-se que a repactuação do contrato metodológico culminou num maior envolvimento dos professores nos fóruns virtuais do *Moodle*, o que potencializou a obtenção de dados e ampliou a capacidade de acompanhamento dos processos de documentação, corroborando com constatações feitas por Sabra (2012). Além disso, foi possível inferir que a vivência da situação de formação favoreceu a apropriação do modelo para introduzir o ensino de função com base na FVSM por parte dos três sujeitos de pesquisa, cada um à sua maneira.

O acompanhamento da evolução da documentação dos sujeitos durante a experimentação dessa situação mostrou que, apesar do fato de Gabriel inicialmente continuar defendendo uma ênfase na noção de notação para introduzir o ensino de função, tal concepção aparentemente mudou durante a resolução coletiva das SEs e da discussão a respeito de sua viabilidade para introduzir o ensino de função com base em FVSM liderada pelo formador. No decorrer dessa etapa, Gabriel desenvolveu e/ou mobilizou esquemas documentais, enquanto os recursos existentes nas SEs influenciavam sua prática, o que nos levou a inferir, com base na confrontação dos dados obtidos ao longo da fase de preparação e na vivência da situação de formação, que ele possa tenha se apropriado do modelo mencionado.

Ao longo da SE-3, Lucas, por sua vez, trouxe elementos que possibilitaram deduzir que estava se apropriando do modelo. Isso se deu quando ele mobilizou uma classe de situação desenvolvida ao longo de sua experiência profissional, por meio do desenvolvimento de um esquema que teve por objetivo principal articular ferramentas existentes no *GeoGebra* para a construção de gráficos e atividades da SE-3 o que coincidiu com a estrutura hierárquica de seu sistema de recursos,

identificada durante a visita guiada em que se observaram os recursos por ele utilizados na fase de preparação da formação.

No caso de Luiz, deduziu-se que, durante a vivência da SE-2, ele impulsionou seu trabalho documental articulando os recursos da SE-2 e da BNCC. O fato de propor a introdução de modificações nas atividades da SE-4, com o objetivo de dar significado à aprendizagem dos alunos, mostrou, naquele cenário, que ele teria se apropriado do modelo para introduzir função com base na FVSM.

Durante a experimentação da situação de organização, observou-se que os fóruns de discussões no *Moodle* desempenharam papel preponderante no acompanhamento da documentação dos sujeitos de pesquisa, possibilitando que os três professores mobilizassem recursos e esquemas documentais, contribuindo para a compreensão de suas gêneses documentais.

Observou-se que os recursos incorporados na construção da SE-4, referentes à elaboração da conta de água, protagonizaram grande parte do processo de organização do documento SSE, tendo sido a partir dessa elaboração que o grupo decidiu incluir outros recursos, evidenciando a importância do trabalho coletivo proporcionado pelo ambiente de formação continuada. Nesse contexto, o formador decidiu tomar uma decisão *ad-hoc* no sentido de proporcionar a inserção de um cenário de descontinuidade proposto pelos professores, diferentemente do que havia sido planejado na configuração didática e no modo de execução da OI-3.

No decorrer da situação de organização, constatou-se que, ao adaptar o recurso conta de água de maneira a contemplar um cenário de descontinuidade e integrar o aplicativo desenvolvido no GeoGebra, o sujeito de pesquisa Gabriel revelou respectivamente as dimensões da instrumentalização e da instrumentação de sua gênese documental.

Lucas, por sua vez, com o intuito de readaptar a SE-4, ao articular os recursos de uma tabela encontrada no *site* da companhia de água e numa lei municipal que regulava a cobrança de tarifas, apresentou indícios de um processo de instrumentalização.

A vivência da situação de organização da SSE, por outro lado, não contemplou um arranjo de OIs com o intuito de aplicar o documento junto aos estudantes dos sujeitos de pesquisa, o que nos levou a concluir ser essa lacuna uma limitação do estudo.

A etapa de aplicação foi pensada tendo como objetivo observar a aplicação da SSE com alunos de 1º ano do EM dos sujeitos de pesquisa. Paralelamente, organizaram-se encontros presenciais e/ou a distância, com suporte do ambiente *Moodle*, a fim de proporcionar o compartilhamento das experiências vivenciadas pelos demais integrantes da formação. Durante o acompanhamento da etapa de aplicação do documento SSE, algumas convicções a respeito das gêneses documentais dos sujeitos de pesquisa foram mais bem delineadas.

O acompanhamento da evolução da documentação do sujeito de pesquisa Gabriel revelou que ele poderia apresentar indícios mais claros de ter experimentado ambas as dimensões da gênese documental ao aplicar o documento SSE junto a estudantes do 1º ano do EM, seja por adaptar novos recursos durante a aplicação das SEs, seja por ter desenvolvido esquemas que eventualmente poderiam levá-lo, no futuro, a alterar sua maneira de introduzir o ensino de função a partir da FVSM.

Lucas encontrou grandes dificuldades em lidar com o protagonismo dos estudantes do 1º ano do EM para resolver as atividades propostas, mas vivenciou o processo de instrumentalização ao adaptar recursos, com o intuito de aplicar a SE-3 e 4. Entretanto, aparentemente, continuou a entender que a definição de função devesse ser elaborada como um conjunto de pares ordenados.

Luiz também apresentou dificuldades em aceitar o protagonismo dos estudantes, principalmente durante a aplicação da SE-1, mas trouxe indícios de experimentação da dimensão de instrumentalização da gênese documental, ao adaptar recursos oriundos do Caderno de Estudos do Estado de São Paulo e os existentes na SE-3. Suas ações e opiniões apresentadas durante os encontros com o formador e os demais participantes, porém, demonstraram que ele estaria alinhado a uma concepção de ensino de função voltada à ação.

Deduziu-se disso que a aplicação da SSE pode ter potencializado a compreensão de função por parte dos estudantes, ainda que a maioria das

definições formais construídas por eles estivessem desprovidas de linguagem matemática. É provável que a concepção de Gabriel sobre a maneira de ensinar a definição formal de função tenha sido alterada para uma ideia de processo, visto que um dos grupos de seus alunos a definiu como sendo uma ideia de correspondência.

A etapa de crítica, vinda na sequência, teve como intento proporcionar aos participantes a vivência de uma situação de avaliação coletiva sobre a aplicação da SSE e empreendeu a necessidade da organização de uma OI. A ideia foi de que a situação possibilitasse o aprimoramento do documento SSE por meio do desenvolvimento de crítica e reflexão da prática profissional, ocasião em que seria possível continuar o acompanhamento da evolução da documentação dos professores.

Nesse sentido, a vivência da etapa de crítica da formação possibilitou aos sujeitos de pesquisa atualizarem o documento SSE por meio da inclusão de outros recursos e do desenvolvimento de outros esquemas documentais. Percebeu-se, durante a vivência da situação, que Gabriel pode ter se apropriado da estratégia em introduzir função recorrendo à FVSM, enquanto os outros dois professores o fizeram apenas parcialmente. A inclusão de recursos provenientes da internet e do software *GeoGebra* evidenciaram a continuidade do processo de evolução da documentação e a atualização do documento SSE, com vistas a uma futura (re) utilização.

Finalmente, a visita final aos sujeitos de pesquisa objetivou avaliar o impacto do processo formativo na elaboração de inferências acerca do trabalho documental dos sujeitos de pesquisa, por meio da confrontação dos dados obtidos ao longo da fase de preparação e da vivência das situações profissionais da fase de execução. Pretendeu-se com isso que o processo formativo pudesse criar condições para que os professores refletissem acerca da importância de suas escolhas didáticas para introduzir o ensino de função, bem como sobre o papel desempenhado pelos estudantes nesse processo.

Deduziu-se, ao longo das entrevistas, que Lucas utilizaria os recursos da SE-4 a respeito da conta de água para introduzir o ensino de função com base na FVSM no 1º ano do EM, bem como outros recursos, mobilizados ao longo da

formação, tais como o *GeoGebra*, no processo de esboço da representação gráfica da FVSM, e a videoaula disponibilizada no *site Khan Academy* para explorar a noção de taxa de variação.

Ainda que tenha admitido futuramente incluir a SE - 2 e/ou a 3 em seus cursos, quando estivesse ensinando função em meio a cenários de interdisciplinaridade, ou mesmo matemática financeira, supôs-se que o sistema de recursos de Luiz não sofreria grandes alterações, se comparado com aquele observado durante a visita inicial à escola em que era docente. Com efeito, a atitude de Luiz, ao considerar apenas situações extra matemáticas como as únicas adequadas para introduzir conceitos matemáticos, revelou a existência de dificuldades em afastar-se de sua zona de conforto.

As observações realizadas acerca da evolução da documentação do sujeito de pesquisa Gabriel ao longo do processo formativo nos levaram a deduzir que seu sistema de recursos pode ter sido alterado pela vivência das situações proporcionadas pelo processo formativo.

Em relação ao objetivo principal da presente investigação, pode-se afirmar, que o estudo sobre a produção de documentos quando os sujeitos de pesquisa resolviam, elaboravam, aplicavam ou criticavam as SEs integrantes do documento SSE, por meio da mobilização e/ou desenvolvimento de recursos e esquemas documentais.

Nesse sentido, resgatando a questão de pesquisa - “Como ocorre a gênese documental da FVSM em professores da educação básica em um ambiente de formação continuada?” -, considerando o que foi apresentado ao longo da investigação, é possível concluir que a gênese documental se deu por meio dos processos de instrumentação e instrumentalização na elaboração do documento SSE utilizado nas ações de elaboração, aplicação e crítica dos professores Gabriel, Lucas e Luiz, tendo sido adequada para acompanhar a evolução do desenvolvimento profissional dos três docentes.

O fato de a noção de documento estar atrelada ao seu uso, aliado à ideia de que a gênese documental, é um fenômeno cujo acompanhamento se dá em longos períodos de observação enseja a perspectiva de novas investigações como consequência deste trabalho. Nesse sentido, entende-se que dar continuidade ao

acompanhamento dos sujeitos de pesquisa por meio do uso do documento SSE poderia trazer mais elementos a respeito da evolução de sua documentação, elucidar com maiores evidências o acerto da escolha em introduzir o ensino de função no 1º ano do EM com base na FVSM, bem como trazer elementos acerca da importância da OI no processo de planejamento e aplicação do documento SSE.

REFERÊNCIAS

- ACEVEDO, S. A. C. **Propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto**. Tese de doutorado. Colombia: Universidad Nacional de Colombia. 2013.
- ALDON, G. Une voiture à la derive. **Repères-IREM**. n. 21, p. 27-44, 1995.
- ALMEIDA, M. S.; ESPÍNDOLA, E. B. M.; COSTA, P. R.B.; MELLO, T. L.; DAMASCENA, J. S. Banco Geométrico: Gênese Documental e Orquestração Instrumental. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**. V.5. n.1. p.01-22. Florianópolis (SC). 2020.
- ALMOULOUD, A. S. Modelos de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**. Florianópolis (SC). v. 11. n. 2. p. 109-141. 2016.
- ASSIS, F.C. **Diálogo Didático Matemático na EaD: Uma Perspectiva para o Ensino e Aprendizagem em Fóruns no Moodle**. Tese de Doutorado. UFPE. 2010.
- _____. A gênese documental na formação de professores de Matemática: interações entre o livro didático e a geometria dinâmica. **I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**. Mato Grosso do Sul. Brasil. 2016.
- ASSIS, F. C.; ESPÍNDOLA, E. Constitution of resource system by perspective teachers – process of metamorphosis. In: **Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B. (eds) The Resource Approach to Mathematics Education**. p. 197-256. 2019.
- ASSIS, C.; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. The metamorphosis of resource systems of prospective teacher: From studying to teaching. In V. Gitirana, T. Miyakawa, M. Rafalska, S. Soury-Lavergne, & L. Trouche (Eds.), **Proceedings of the re(s)ources 2018 international conference**. p. 39–42. Lyon: ENS de Lyon. Retrieved on November 8th, 2018, at <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01764563>. 2018.
- BARRETO, A. L. O. **A análise da compreensão do conceito de função mediado por ambientes computacionais**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Ceará. 2009.
- BAYAZIT I. The Influence of Teaching on Student Learning: The Notion of Piecewise Function. **International electronic journal of Mathematics Education**, V. 5, n. 3. p. 146-164. Turquia. 2006.
- BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. In: **I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**. Mato Grosso do Sul. 2016.

BOVO, A. A. **Formação Continuada de Professores de Matemática para o uso da Informática na Escola: Tensões entre proposta e implementação.**

Dissertação de Mestrado. Unesp Rio Claro. 2004.

BRASIL. PCN+. **Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação e Cultura. 2000.

_____. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Ministério da Educação. 2006.

_____. **Presidência da República do Brasil. Decreto. No 8.259 de 29/05/2014.** Disponível em: < <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/2014/decreto-8259-29-maio-2014-778837-norma-pe.html> >. Acesso em: 18 de Jan de 2020. 2014.

_____. **BNCC. Base Nacional Curricular – Ensino Médio.** Ministério da Educação. Brasil. 2018.

_____. **BNCC. Base Nacional Curricular – Ensino Médio.** Ministério da Educação. Brasil. 2019.

_____. **Matriz de Referência ENEM.** Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf >. Acesso em: 22 de Fev de 2020. 2020a

_____. Portal do Professor. **O conceito de função no contexto da copa do mundo.** Disponível em: < <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=49176> >. Acesso em: 25 de Fev de 2020. 2020b.

BREINDENBACH, D.; DUBINSKY, ED.; HAWKS, J.; NICHOLS, D. Development of the process conception of functions. **Educational Studies in Mathematics.** n.23. p.247-285. Kluwer Academic Publishers. Netherlands. 1992.

BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques.** Reserches en didactique des mathématiques. n. 4. 2, 165-98.1983.

CGI. Comitê Brasileiro de Informática. Disponível em: < <https://www.cgi.br/> >. Acesso em: 15 de Jan de 2020. 2018.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante. Matemática 1, 1º Ano.** 2ª Edição, São Paulo. Editora SM. 2016.

CHUMPITAZ, L. D. M. **La génesis instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software Geogebra con estudiantes de ingeniería.** Dissertação de mestrado. PUC / Peru. 2013.

DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações. volume único**, 3ª edição, São Paulo, Editora Ática, 2016.

DE LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática 1º Ano**. São Paulo. Moderna. 2016.

DIEGENSZAJN ET AL. **Matemática: Ciências e Aplicações**. 2ª edição. São Paulo, Editora Saraiva. 2016.

DRIJVERS, P. Teacher Transforming Resources into Orchestrations. In: **From text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development**. pp. 265-281. 2012.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVMEIJER, K. The Teacher and the Tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin Heidelberg, v. 75. n. 2. p. 213-234, Springer Netherlands, 2010.

DUBINSKY, ED. A learning theory approach to calculus. **Proceedings of the St. Olaf Conference of Computer Algebra Systems**. Northfield. Minnesota. 1989.

ELIA, I.; PANAOURA, R.; ERACLEOUS, A.; GAGATSIS, A. Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in diferente representations. **International Journal of Science and Mathematics Education**. n.5(3). p.533-556. Research Gate. 2006.

ESPÍNDOLA, E.; TRGALOVÁ, J. Trabalho Documental e Decisões Didáticas do Professor de Matemática: um estudo de caso. **Em Teia**. Vol. 6. No 3. 2015.

_____. The documental work in the initial formation of a mathematics undergraduate in training for the teaching of first-degree equation, In: V. Gitiranaet al. (Eds.). **Proceedings of the re(s)ources 2018 international conference**. (p.57-60). Lyon: Ens de Lyon. 2018.

ETH ZÜRICH BIBLIOTHEK ONLINE. Disponível em:< <https://www.library.ethz.ch/en/> >. Acesso em 27 Nov. 2018.

EULER, L. 1748. **Intruductio in Analysin Infinitorum**. Reprint Springer Heidelberg. 1980.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching and the case of fucntions. **Educational Studies in Mathematics**. n.21. p.521-544. Springer Link. 1990.

FALSON, P. Natureza, Objetivos e conhecimentos de Ergonomia: elementos de uma análise cognitiva da prática. In: FALZON, P. (Org.). **Ergonomia**. São Paulo. Editora Blucher, 2007.

FNDE. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Programas do Livro**. Ministério da Educação. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro>. > Acesso em 11 Fev 2020. Brasil. 2020.

GEIGER, V.; REDMOND, T. Designing mathematical modelling tasks in a technology rich secondary school context. In: Margolinas, C. (Ed). Task Design in Mathematics Education. **Proceedings of ICMI Study 22**. Oxford. 2013.

GOMES, R. R. **As concepções de função de Frege e Russell: um estudo de caso em Filosofia e História da Matemática**. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista – Rio Claro. São Paulo. 2015.

GONÇALVES R.; ALLEVATO, N. S. G. A resolução de problemas como proposta metodológica para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças. **Revista do Programa de Pós-Graduação em Ensino – Universidade Estadual do Norte do Paraná – RPEPE**. v.2, n.2, p.27-47. 2018.

GUEUDET, G. Studying Teachers' Documentation Work: Emergence of a Theoretical Approach. In L. Trouche, G. Gueudet, e B. Pepin (Eds.), **The 'resource' approach to Mathematics Education**. Springer series Advances in Mathematics Education (pp. 447-489). Cham: Springer – Vidéo de la conférence ayant donné naissance à ce chapitre, sous-titrée en français, à cette adresse http://video.ens-lyon.fr/ife/2018/2018-05-28_003_Ressources2018_Ghislane_Gueudet_v1.fr.mp4. 2019.

GUEUDET, G.; PEPIN, B; TROUCHE, L. (Eds.). **From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development**. New York: Springer. 2012.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Du travail documentaire des enseignants : Genèses, collectifs, communautés. **Éducation et didactique**. n. 2(3). p. 7-33. <Disponível em: <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342> >. 2008.

_____. Conceptions et usages de ressources pour et par les professeurs, développement associatif et développement professionnel. **Dossiers de l'ingénierie éducative**. n. 65. p. 76-80. <Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00459434>>. 2009.

_____. Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.). **Ressources vives: Le travail documentaire des professeurs en mathématiques**. p. 57-74. Lyon: PUR. 2010.

_____. Teachers' work with Resources: Documentational Genesis. In: **From text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development**. Editors: Gueudet, G., Pepin, B., Trouche, L.. pp. 23-41. 2012.

GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument. New York: **Springer**. 2005.

HAMMOUD, R. **Le Travail collectif des professeurs en chimie comme levier pour la mise en œuvre de démarches d'investigation et le développement des connaissances professionnelles. Contribution au développement de l'approche documentaire du didactique**. Tese de doutorado. L'Université Claude Bernard Lyon 1 e L'Université Libanaise. 2012.

HAMMOUD, R. ; ALTURKMANI, M. D. Teachers' resource system and documentation work: case of two physics-chemistry teachers in France and two chemistry teachers in Lebanon. **Proceedings of the Re(s) sources 2018 International Conference**. Editors: Gitirana V., Miyakawa T., Soury-Lavergne, S., Trouche, L., pp. 83-88. Lyon. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01764563v3/document>, pp. 74-82. 2018.

HATISARU, V.; ERBAS, A.K. Mathematical knowledge for teaching the function concept and student learning outcomes. **International Journal of Science and Mathematics Education**. n.15(4). p.703-722. Springer Link. 2017.

HUH, Y. E. **Función definida por partes. Un análisis histórico – didáctico referente a su tratamiento escolar**. Tese de Doutorado. Universidad Autónoma de Yucatán, México. 2009.

IGNÁCIO, R. S.; PIETROPAOLO, R. C. Livros Didáticos Digitais: Aspectos Avaliativos em Orquestração Instrumental. **I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**. Mato Grosso do Sul. Brasil. 2016.

INEP. **Sobre o INEP**. Disponível em: <<http://inep.gov.br/sobre-o-inep>> <Acesso em 5 Mar. 2019.

JESUS, G. B. **As construções geométricas e a Gênese instrumental: o caso da mediatrix**. Tese de Doutorado. São Paulo: PUC-SP, 2012.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa. 2010.

KHAN ACADEMY. Introdução à taxa de variação média. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/math/algebra/algebra-functions/functions-average-rate-of-change/v/introduction-to-average-rate-of-change>> <Acesso em 16 Mar. 2019.

KIERAN, C.; BOILEAU, A.; TANGUAY, D; DRIJVERS, P. Design researchers' documentational genesis in a study on equivalence of algebraic expressions. **ZDM Mathematics Education**. n. 45. p.1045-1065. 2013.

LAUDARES, J. B. O Conceito e a Definição em Matemática: Aprendizagem e Compreensão. **Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba. 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise – Volume 1**. 14 Ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. 1999.

LIMA, L. **A aprendizagem significativa do conceito de função na formação inicial do professor de matemática**. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2008.

LIMA, I.; TRGOLOVÁ, J. Trabalho coletivo de professores de Matemática: um olhar na perspectiva da gênese documental. **Ensino de Matemática em Debate**. PUC / SP. v.5, n.3, p.289-304. 2018.

LOSEGO, P. Les enseignants novices et la collaboration. In C. Amendola, B. André, & P. Losego (Éds.). **L’insertion subjective d’enseignantes novices. Le cas de l’enseignement primaire dans le canton de Vaud** (pp. 57-76). <Disponível em: https://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/uer-agirs/th%c3%a9matiques%20AGIRS/Insertion%20professionnelle/Rapport_INSE_RSU_B_nov_15.pdf >. 2015.

LUCENA, R. **A Instrumentada Pixton@**. História em Quadrinhos. Disponível em <http://lematec.net.br/1/res/hq01/hq1.png>. 2013.

_____. **A Tabuada Pixton@**. História em Quadrinhos. Disponível em <http://lematec.net.br/1/res/hq02/toi.hq2.png>. 2016.

_____. **Metaorquestração Instrumental: um modelo para repensar a formação de professores de Matemática**. Tese de Doutorado. UFPE. 2018.

LUCENA, R.; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. O ensino de Matemática com integração de recursos digitais: um olhar sobre as aulas à luz da Orquestração Instrumental. **Ensino de Matemática em Debate**. PUC / SP. v.5, n.3, p.238-261. 2018.

MARKOVITZ, Z.; EYLON, B-S.; BRUCKHEIMER, M. **Functions Today and Yestarday**. Learning of Mathematics p.18-24: F1M Publishing Association, Montreal, Canadá. 1986.

MESSAOUI, A. **Développement de l’expertise documentaire des professeurs dans des situations de mutations de leur enseignement: le cas de professeurs de mathématiques et d’anglais**. Tese de Doutorado. L’Ecole Normale Supérieure de Lyon. 2020.

MIYAKAWA, T; WINSLOW. C. Paradidactic infrastructure for sharing and documenting mathematics teacher knowledge: a case study of practice research in Japan. **Journal of Mathematics Teacher Education**. n. 22. P. 281-303. 2017.

OLIVEIRA, N. **Conceito de Função: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. Dissertação de Mestrado. PUC / SP. 1997.

PAIVA, M. **Matemática 1**. 3ª edição. São Paulo, Editora Moderna. 2016.

PÉDAUQUE, R. T. **Le Document à la lumière du numérique**. 2006.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains**. Paris. Armand Colin. 1995.

_____. **Los Hombres y las Tecnologías: visión cognitiva de los instrumentos cognitivos**. Tradución de Martin Acosta Gempeler. Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Colômbia. 2011.

RATNAYAKE, I.; THOMAS, M. O. J. Documentational Genesis during teacher collaborative development of tasks incorporating digital technology Background and Theretical Framework. **Conference: Resources 2018: Understanding Teachers' Work Throught Their Interactions with Resources for Teaching**. Lyon. France. 2018

REMILLARD, J. T. Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. **Review of Educational Research**. 75(2), 211-246. 2005.

ROCHA, K. M.; WANG, C.; TROUCHE, L. Documentation Expertise and Its Development with Documentation Experience in Collectives: A French Case of Collective Lesson Preparation on Algorithmic. **Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching**, pp. 285-292. Lyon. 2017.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Ed. Zahar. 3^a ed. Rio de Janeiro. 2012.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias**. Tese de doutorado. São Paulo : PUC-SP, 2006.

SABRA, H. **Contribution à l'étude du travail documentaire des enseignants de mathématiques: les incidents comme révélateurs des rapports entre documentations individuelle et communautaire**. Tese de Doutorado. L'Universite Claude Bernard Lyon 1. 2012.

SAYAH, K. Evolution of resource system: articulation of dynamics and static dimensions. In: Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B. (eds) **The Resource Approach to Mathematics Education**. p. 207-222. 2019.

SÃO PAULO. **Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo. Caderno do Professor: Matemática, Ensino Médio, 1^a Série**. Volume 1. Nova edição 2014-2017. São Paulo. 2017.

SILVA, E. R. **Uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica**. Tese de Doutorado. PUC / SP. 2017.

SILVA, H. N. Estudo de Função: **Uma proposta de Reconstrução de atividades do Imagiciel mediadas pelo Geogebra**. Dissertação de Mestrado. 2018.

SILVA, J. M. **O ensino do conteúdo Funções na Escola de Ensino Médio José Paulo de França na cidade de Mari – PB: o que dizem os professores?**

Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba. 2013.

SMOOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo 1**. São Paulo, Saraiva. 2016.

STEWART, J. **Cálculo: Volume I**. Cengage Learning. 8ª ed. 2016.

TROUCHE, L. Managing the Complexity of Humam/Machine Interactions in Computerized Environments: Guiding Student Karlson s' Command Process Through Instrumental Orchestrations. **International Journal of Computers for Mathematical Education**. n. 281. 2004.

_____. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. **Recherches en didactique des mathématiques**. n. 25. p. 91-138. 2005.

TROUCHE, L.; GUEUDET, G.; PEPIN, B. Documentational Approach to Didactics. In S. Lerman (Ed.). **Encyclopedia of mathematics education**. Cham: Springer. 2018.

_____. A Abordagem Documental do Didático. **HAL**. Adaptação ao Português: Assis, C. E Rocha K. Revisor: Igliori, S.< Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02664943v1/document> >. 2020.

VASCONCELOS, L. O. **O conceito de função nas pesquisas dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (1987-2013)**. Dissertação de Mestrado. São Carlos: UFSCAR – São Paulo, Brasil. 2015.

VERGNAUD, G. La teoria de los campos conceptuales. CNRS y Université René Descartes. **Reserches en Didáctica des Mathématiques**. v. 10. p. 133-170. Traducción de Juan D. Godino. 1990.

_____. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa. Instituto Piaget. p. 155-191. 1996.

_____. Toward a cognitive theory of practice. In A. Sierpiska, & J. Kilpatrick (Eds.), **Mathematics education as a research domain: A search for identity** (pp. 227-241). Dordrecht: Kluwer. 1998.

_____. Au fond de l'action, la conceptualisation. In: J. M. Barbier (Éd.), **Savoirs théoriques et savoirs d'action**. 3a ed. p. 275-292. France: Presses Universitaires de France. 2011.

_____. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Infancia y Aprendizaje**, n. 36, p. 131-161. 2013.

VISNOVSKA, J.; COBB, P. Classroom video in teacher professional development program: Community documental genesis perspective. **ZDM: the international journal on mathematics education**. n. 45(7). p.1017-1029. 2013.

WANG, C. **An Investigation of mathematics teachers' documentation expertise and its development in collectives: two contrasting cases in China and France**. Tese de Doutorado. Univsersité de Lyon. 2019.

XAVIER NETO, A. L. **Um estudo da Gênese Instrumental para a função de uma variável real com várias sentenças**. Dissertação de mestrado. PUC-SP. 2016.

XAVIER NETO, A. L.; SILVA, M. J. F. Abordagem Documental: Esquemas de uso no trabalho coletivo de professores para o ensino de sequências numéricas. **Ensino de Matemática em Debate**. PUC / SP. São Paulo, v. 5, n. 3, pp. 438-452. 2018.

XAVIER NETO, A. L.; SILVA, M. J. F.; TROUCHE, L. A construção de atividades para o ensino de sequências numéricas: Uma análise pela lente da Abordagem Documental do Didático. **Educação Matemática e Pesquisa**. PUC / SP. 2019.

YOUSCHKEVITCH, A. P. Le concept de function jusqu'au milieu du XIXe siècle. In: **Fragments d'histoire des Mathématiques**, Brochure A. P. M. n. 41, p-7-67, 1981.

ZUFFI, E. M. et al. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, n. 9/10, p.10-16. 2001.

APÊNDICE A – PROTOCOLO DE OBSERVAÇÃO

PROTOCOLO DE OBSERVAÇÃO

Nome do Professor(a) Observador:

Data do encontro presencial:

Fase da Formação Continuada:

Etapas:

(Solicita-se observar os fenômenos da gênese documental, recursos e esquemas documentais mobilizados e/ou desenvolvidos ao longo da atividade por meio das interações e/ou ações dos participantes de acordo com o objetivo da fase/etapa da formação continuada. Durante a elaboração de suas notas, pede-se descrever minuciosamente a ação observada, identificando ao longo da mesma todos os elementos que fizeram parte do processo de documentação observada).

ESPAÇO PARA O PREENCHIMENTO DAS OBSERVAÇÕES

[illegible]

APÊNDICE B – MODELO DE DIÁRIO DE BORDO

Diário de Bordo

Data:

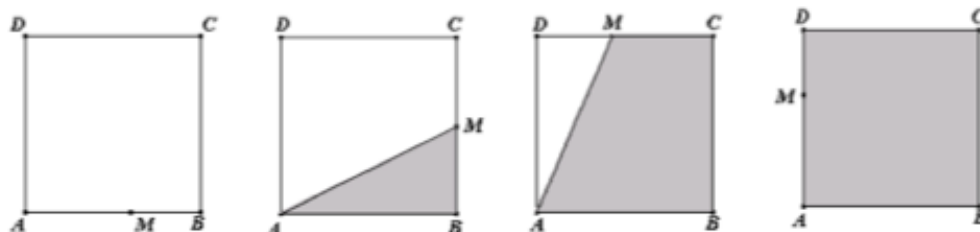
Número da atividade	Tipo de atividade (e tema matemático, se relevante)	Local	Horário	Participantes	Recursos utilizados	O que foi produzido	O que foi guardado / onde?	Comentários
1								
2								
3								
4								

ANEXO A - SSE

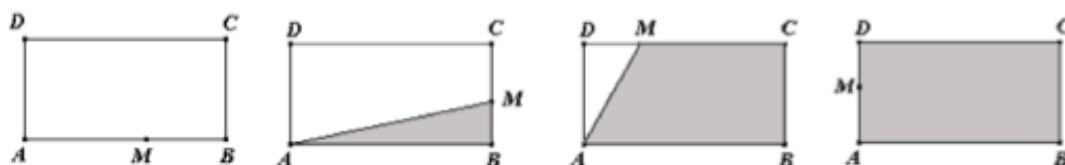
SE-1

PROBLEMA.

- Um ponto M se desloca sobre o lado de um quadrado $ABCD$ cujo cada lado mede 4 u.m. (figura abaixo). Designamos como x a medida referente ao comprimento do trajeto de A até M .
 - Expresse a área $a(x)$ da parte colorida, segundo a posição do ponto M ;
 - Represente graficamente a aplicação correspondente



- Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, e considere $ABCD$ como sendo um retângulo de comprimento 4 e largura 2 conforme a figura abaixo.



- Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão e considere $ABCD$ como sendo um losango cujos lados medem 4 u.m e o ângulo $\hat{C} = 60^\circ$

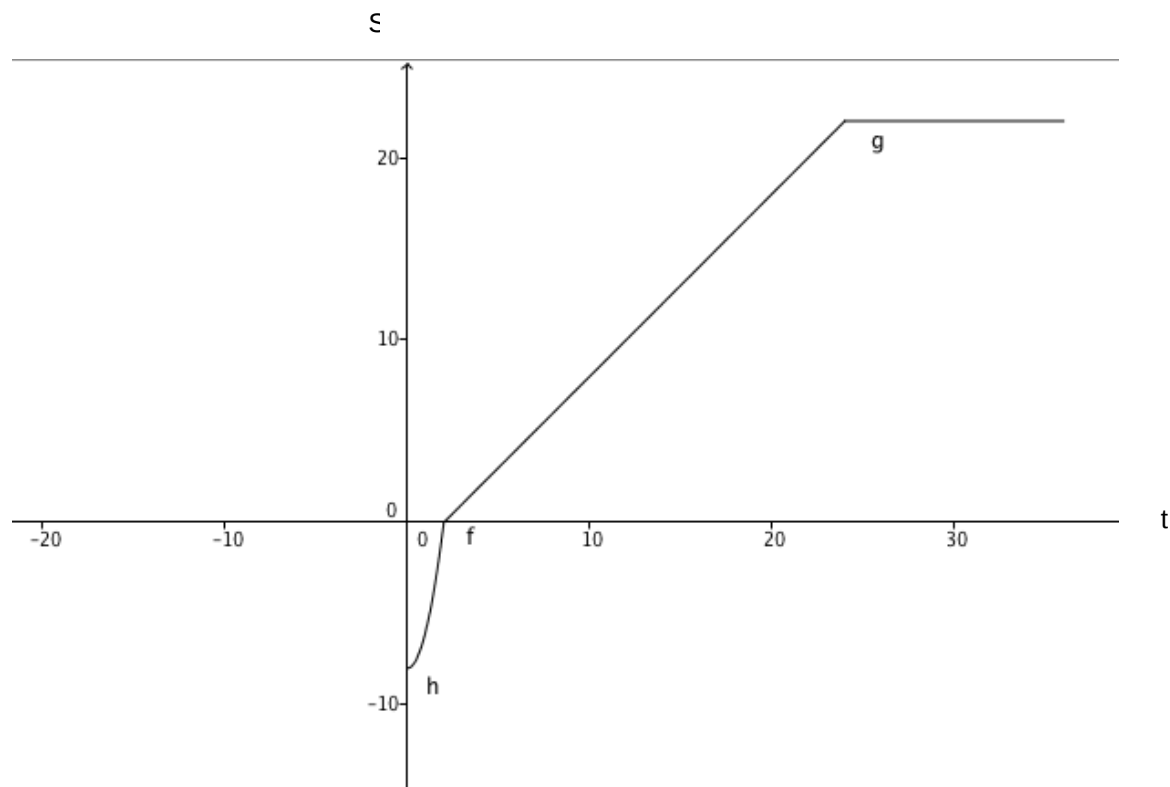
Fonte: *Collection Mathématiques IPN, 1991, Rep. De Mali, 9^o année e 10^o sciences, Hatier – Librairie Nouvelle*

SE-2

Um determinado automóvel está localizado a 8 km de uma cidade, quando começa a aumentar uniformemente sua velocidade, partindo do repouso, até o instante 2 s, quando chega a cidade, como mostra o gráfico abaixo.

Do instante 2 s a 24 s, agora com velocidade constante, se desloca até a posição de 22 km para, em seguida, permanecer em repouso.

Que funções matemáticas ajudariam a compreender o estudo gráfico desses movimentos?



SE-3

(Adaptado de Stewart, 2016). O custo C de enviar um envelope pelo correio depende de seu peso w . Embora não haja uma fórmula simples relacionado w e C , o correio tem uma fórmula que permite calcular C quando w é dado. A regra que os correios de Hong Kong utilizaram a partir de 2015 para correspondência para Taiwan é a seguinte: o custo é \$ 22,00 para 20 g ou menos, \$ 28,00 para 30 g ou menos e \$ 10,00 para cada 10 g ou fração adicionais a partir daí.

w (gramas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 20$	22,00
$20 < w \leq 30$	28,00
$30 < w \leq 40$	38,00
$40 < w \leq 50$	48,00
...	...

Escreva a função $C(w)$ e construa seu gráfico.

SE-4

Analise a conta de água e a tabela com a relação de cobranças abaixo:

DADOS DO PROPRIETÁRIO							
[REDACTED]							
LOTE	QUADRA	SETOR	ROTA	SEQUÊNCIA	FATURA		
31	25	17	20	2320	00000314297510004		
826100000007 - 861603040002 - 003142975105 - 004170920195							
HISTÓRICO DO CONSUMO			DESCRIÇÃO DA FATURA				
MÊS/ANO	DIAS	m3	VALOR ÁGUA		41,70		
07/2019	29	16	VALOR ESGOTO		41,70		
06/2019	28	18	OUTROS		2,76		
05/2019	32	14					
04/2019	33	16					
03/2019	30	18					
02/2019	28	16					
01/2019	29	18					
12/2018	33	13					
11/2018	30	10					
10/2018	30	10					
09/2018	33	11					
08/2018	30	12					
			Descrição				
			SALDO REMANESCENTE		2,76		
			FAIXA	TARIFA	TARIFA	UTILIZADO	
				ÁGUA	ESGOTO	VALOR	
						VALOR	
						ÁGUA	
						ESGOTO	
			1 a 10	1,70	1,70	10	17,00
			11 a 20	2,47	2,47	10	24,70
INFORMAÇÕES			RESULTADO DA ANÁLISE DA ÁGUA				
Hidrômetro	Y16G022782		PADRÕES ESTABELECIDOS PELA PORTARIA Nº 2914/2011				
Data Leit. Atual	29/08/2019		MINISTÉRIO DA SAÚDE RESOLUÇÃO SS 65/2006				
Data Leit. Anterior	30/07/2019		SISTEMA: PALESTRA				
Leitura Atual	484		Data da análise: 31/07/2019				
Leitura Anterior	464						
Consumo	20						
Residencial	1						
Tipo de Tarifa	PADRÃO						
Ocorrência	0	Normal					
Dias Consumo	30						
Média	16						
Previsão Próxima Leitura	30/09/2019						
			Parâmetro	Valor Máximo	Valor Médio Mês		
			cloro resid livre	0,2 - 2,0 mg/L	0,86 mg/L		
			fluoretos	0,6 - 0,8 mg/L	0,66 mg/L		
			pH	6,0 - 9,5	7,68		
			turbidez	5 UT	0,58 UT		
			cor	15 UH	0 UH		
			coliformes Totais	ausentes/100 ml	Ausente		
			E.coli	ausentes/100 ml	Ausente		

Tabela com a relação de valores da tarifa:

Faixa de consumo inferior	Faixa de consumo superior	Valor tarifa (R\$/m³)
0 a 10		34,0
11	20	4,94
21	30	6,54
31	40	8,50
41	50	10,34
51	100	15,46
>100		16,86

- a) Determine o valor a ser pago por uma família que consumiu 7m^3 ; 11m^3 ; 15m^3 ; 22 m^3 ; $42,5\text{ m}^3$ e $100,2\text{ m}^3$ no primeiro semestre de 2019.
- b) É possível definir uma ou mais relações entre o consumo e o valor da tarifa a ser pago?
- c) Determinar o quanto uma família teria consumido se tivesse pago em um semestre: R\$ 73,52; R\$ 89,94; R\$ 83,40; R\$ 116,10 e R\$ 264,82.
- d) Representar graficamente estas relações.
- e) Quais relações são possíveis estabelecer com os problemas anteriores?

ANEXO – B: ATIVIDADES PARA O GEOGEBRA

Atividade 1

1) No campo de entrada digite os pontos abaixo.

$A = (2, -5)$	$B = (-5, 2)$	$C = (3, 2)$	$D = (-3, 3)$
$D = (0, 1)$	$E = (1, 0)$	$F = (0, 0)$	$G = (5, -3)$

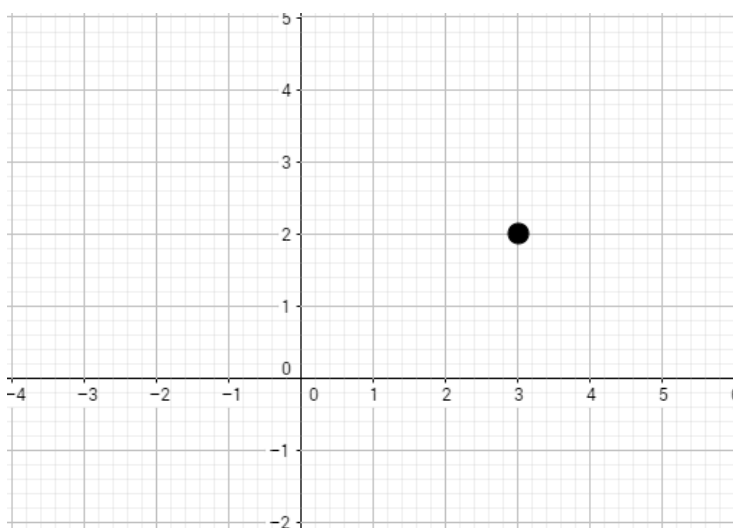
- Na área de trabalho que tipo de construções geométricas foram obtidas?
- Observe o item A, com suas palavras como você explicaria essa posição para um amigo?
- Embora A e B utilizem os mesmos números 2 e -5, eles não apresentam a mesma localização. Por que isso aconteceu?
- Abra um novo arquivo no Geogebra e coloque os pontos abaixo no plano cartesiano.

$A (3, -1)$	$B (0, 3)$	$C (5, 5)$	$D (1, -2)$
-------------	------------	------------	-------------

Atividade 2

1) Paulo e Maria estão estudando sobre coordenadas cartesianas. Os dois realizaram uma avaliação que possuía o seguinte exercício:

Observe o plano cartesiano abaixo.



Observe o diálogo entre eles.



Qual dos jovens apresenta a resposta incorreta? Como você o ajudaria a resolver corretamente a questão?

Atividade 3

1. Marcar os pontos abaixo no plano cartesiano localizado na interface Geométrica do Geogebra, e completar a tabela abaixo;

	Abcissa	Ordenada	Ponto		Abcissa	Ordenada	Ponto
a)	-2	3		e)	-1,7	-3	
b)	0	-5		f)			(3,3)
c)			(-2,5)	g)	4	0	
d)			(5,-2)	h)			(1,5;-1)
e)			(1,3,5)	i)	0	2	

Embora os pares ordenados $(-2,5)$ e $(5, -2)$ estejam compostos pelos mesmos elementos eles não apresentam a mesma localização. Explique por que isso ocorre?

2. Usando a ferramenta “ENTRADA”, escreva as relações abaixo, analise os gráficos produzidos e preencha o quadro abaixo.

I) $y = -2x + 3$			
a) $x = 1$	b) $x = 2,5$	c) $x = 3$	d) $x = 0$
e) $x = -2$	f) $x = -1$	g) $x = 20$	h) $x = -4$
Qual o valor de x quando:			
a) $y = 5$	b) $y = 3$	c) $y = -5$	d) $y = 1$
II) $y = x^3 + 3$			
i) $x = 0$	j) $x = -2$	k) $x = 1$	l) $x = -1$
Qual o valor de x quando:			
e) $y = -5$	f) $y = 11$	g) $y = 3$	

ANEXO – C: SOLICITAÇÃO PARA ACESSO ÀS ESCOLAS



Pontifícia Universidade Católica – São Paulo

São Paulo, 12 de Março de 2019.

A/c _____

Prezada Professora

Vimos por meio deste, solicitar que o pesquisador Armênio Lannes Xavier Neto, aluno do curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP e que desenvolve uma pesquisa cujo tema intitula-se “Um estudo da gênese documental para função de uma variável real com várias sentenças”, possa desenvolver uma coleta de dados na Escola _____ junto aos Professores de Matemática _____.

A referida coleta, prevista para ocorrer nos meses de Julho e Agosto de 2019, ocasião em que o tema será ministrado, consiste de entrevistas a respeito dos recursos que os professores da instituição utilizam para ministrar suas aulas a respeito do tema matemático objeto da pesquisa, além da participação em suas aulas quando estes estiverem ministrando o assunto com seus alunos. Nessa ocasião, solicitamos com que o pesquisador possa fazer uso de equipamentos de áudio e vídeo de sua propriedade a fim para registrá-las.

Certos da boa acolhida deste, despedimo-nos

Mui atentamente,

Professora Bárbara Lutaif Bianchini

Coordenadora do PEPG em Educação Matemática

Rua Marquês de Paranaguá, nº 111 – Consolação – São Paulo SP

Tel. _____

ANEXO – D: TERMO DE CONSENTIMENTO

Você está sendo convidado (a) a participar, como voluntário, de uma pesquisa. Após ser esclarecido (a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outra é do pesquisador responsável. Em caso de recusa você não sofrerá nenhum tipo de penalidade. Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato com a Comissão de Ética – Edifício Reitor Bandeira de Mello, sala 63 – C, na Rua Ministro Godoi, 969 – Perdizes – São Paulo – SP – CEP: 05015-001 – Tel./FAX (11) 3670-8466 – e-mail: cometica@pucsp.br

1. Título do Projeto: “Um Estudo da Gênese Documental de Professores para Função de uma Variável Real com Várias Sentenças Matemáticas”.

2. O objetivo desta pesquisa é investigar de que maneira a formação continuada pode ajudar aos professores a refletir, organizar, experimentar e criticar sequências de situações didáticas sobre o ensino de função na educação básica, por meio de recursos.

3. Durante a pesquisa você será solicitado a participar de alguns encontros para realizarmos um conjunto de atividades. As identidades dos participantes serão preservadas.

4. As discussões surgidas, gerenciadas pelo investigador principal, Prof. Armênio Lannes Xavier Neto, serão observadas, fotografadas e filmadas. Os protocolos serão recolhidos e deles serão tirados os dados qualitativos.

5. Os dados analisados serão utilizados de forma sigilosa. As imagens e sons obtidos por meio da filmagem das atividades só serão utilizados pelo principal investigador para esclarecer dúvidas que possam surgir durante a análise dos protocolos e das observações.

6. Somente no final do estudo poderemos concluir a presença ou não de algum benefício, na forma de propostas de abordagens de ensino diferentes da atual, para a o ensino de Função.

7. Garantia de acesso: em qualquer etapa do estudo, você terá acesso aos profissionais responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas. O principal investigador é o doutorando Armênio Lannes Xavier Neto, e-mail: eltche@gmail.com, tel. (11) 970270572; e a orientadora é a Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva, e-mail: zeze@pucsp.br. Ambos podem ser encontrados na Pontifícia Universidade Católica São Paulo – Campus da Rua Marquês de Paranaguá, 111 – Consolação – 01303-050 – São Paulo SP-Brasil – tel. (11) 3214-7210-Ramal 7210.

8. É garantido a liberdade de retirar o consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, sem qualquer prejuízo à continuidade do seu vínculo com a Instituição.

9.Direito de confidencialidade –As informações obtidas, assim como as imagens e sons obtidos pela filmagem serão analisados no conjunto de participantes, não sendo divulgada a identificação de nenhum destes.

10.Direito de ser mantido atualizado – Os resultados parciais das análises serão compartilhados, à medida que foram obtidos.

11.Despesas e compensações: não há despesas pessoais para o participante em qualquer fase do estudo. Também não há compensação financeira relacionada à sua participação.

12.Os dados analisados serão utilizados somente para esta pesquisa. Acredito ter sido suficientemente informado a respeito das informações que li ou que foram lidas para mim, descrevendo o estudo “Um Estudo da Gênese Documental de Professores para Função de uma Variável Real com Várias Sentenças Matemáticas”. Eu discuti com o doutorando Armênio Lannes Xavier Neto a minha decisão em participar desse estudo. Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos a serem realizados, seus desconfortos e riscos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que minha participação é isenta de despesas. Concordo voluntariamente em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidade ou prejuízos ou perda de qualquer benefício que eu possa ter adquirido, ou no meu atendimento nesta unidade de ensino.

São _____ Paulo,
/ /

Assinatura do aluno / representante legal

(Somente para o responsável do projeto)

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste paciente ou representante legal para a participação neste estudo.

Assinatura do responsável pelo estudo

ANEXO – E: TERMO DE CONSENTIMENTO - ALUNOS



Pontifícia Universidade Católica – São Paulo

Convidamos o (a) Sr (a) para participar da pesquisa de doutorado um estudo da Um estudo da gênese documental para função de uma variável real com várias sentenças, sob a responsabilidade do pesquisador Armênio Lannes Xavier Neto, a qual pretende conhecer como ocorre o ensino e a aprendizagem desse tema matemático.

Sua participação é voluntária e se dará por meio da participação na aula de matemática quando o professor da classe abordará o tema referente previstas para ocorrerem no mês de Novembro de 2019.

A pesquisa não oferece riscos aos participantes uma vez que a coleta de dados será realizada por meio da observação. Os benefícios da participação serão da possibilidade de estudo e/ou revisão do conteúdo matemático.

Se depois de consentir em sua participação o (a) Sr (a) desistir de continuar participando, tem o direito e a liberdade de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, seja antes ou depois da coleta de dados, independente do motivo e sem nenhum prejuízo a sua pessoa. O (a) Sr (a) não terá nenhuma despesa e também não receberá nenhuma remuneração. Os resultados da pesquisa serão analisados e publicados, mas sua identidade não será divulgada, sendo guardada em sigilo. Para qualquer informação, o (a) Sr (a) poderá entrar em contato com o pesquisador no endereço na Rua Marquês de Paranaguá, 111 – Consolação, São Paulo – SP, 01303-050, pelo telefone .

Consentimento Pós-Informação

Eu, _____, fui informado o que o pesquisador quer fazer e porque precisa da minha colaboração, e entendi a explicação. Por isso, eu concordo em participar do projeto, sabendo que não vou ganhar nada e que posso sair quando quiser. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinada por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

Assinatura do Participante

Data: ____ / ____ / ____