

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

CLEDERSON PASSOS ALVES

**INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE FUNÇÃO NO NONO ANO DO
ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DE FUNÇÃO DEFINIDA POR
VÁRIAS SENTENÇAS**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**SÃO PAULO
2022**

CLEDERSON PASSOS ALVES

**INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE FUNÇÃO NO NONO ANO DO
ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DE FUNÇÃO DEFINIDA POR
VÁRIAS SENTENÇAS**

Trabalho apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC- SP, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Professora Maria José Ferreira da Silva

**SÃO PAULO
2022**

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação de Mestrado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____

Data: _____

E-mail: cledersonalves@hotmail.com

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

A474 Alves, Clederson Passos
 INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE FUNÇÃO NO NONO ANO DO
 ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DE FUNÇÃO DEFINIDA POR
 VÁRIAS SENTENÇAS. / Clederson Passos Alves. -- São
 Paulo: [s.n.], 2022.
 82p. il. ; 21 x 29,7 cm.

 Orientadora: Maria José Ferreira da Silva.
 Dissertação (Mestrado)-- Pontifícia Universidade
 Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós
 Graduados em Educação matemática.

 1. Teoria da Situações Didáticas. 2. Teoria de
 Registros de Representação Semióticas. 3. Engenharia
 Didática. 4. Introdução ao Conceito de Função. I. da
 Silva, Maria José Ferreira. II. Pontifícia
 Universidade Católica de São Paulo, Programa de
 Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III.
 Título.

CDD

CLEDERSON PASSOS ALVES

**INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE FUNÇÃO NO NONO ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL POR MEIO DE FUNÇÃO DEFINIDA POR VÁRIAS SENTENÇAS**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como
exigência parcial para obtenção do título de Mestre em
Educação Matemática

Aprovado em: ____/____/____

Banca Examinadora

Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva (orientadora)

Prof. Dr. Renato Mendes Mineiro - FMU

Profa. Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho – PUC-SP

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- CAPES pela bolsa concedida, processo nº 88887.465136/2019-00, fundamental para a realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Em especial a professora Doutora Maria José Ferreira pelo permanente trabalho de orientação e confiança desde o início do curso. Serei eternamente grato.

Aos membros da banca examinadora, Doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Doutor Renato Mendes Mineiro por todas as contribuições realizadas.

Agradeço a todos os familiares que colaboraram para o desenvolvimento deste, em especial à minha esposa Milena Baptista Alves e filhas pelo apoio, carinho e paciência.

Aos colegas de curso e da vida em especial o professor Mestre Mario Alberto Zambrana Vernizzi.

Aos Professores do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP pela aprendizagem.

E a todos que contribuíram de forma direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

ALVES, C. P. **Introdução ao conceito de função no nono ano do ensino fundamental por meio de função definida por várias sentenças**. 2022. Dissertação de Mestrado Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar a construção e significados para o conceito de Função em alunos do nono ano do Ensino Fundamental por meio de situações que tratam de Funções Definidas por Várias Sentenças matemáticas. Apoiados nas Teoria das Situações Didáticas (TSD) e Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), elaboramos e/ou adaptamos uma sequência didática com o intuito de apresentar o objeto matemático em estudo. Adotamos como metodologia os pressupostos da Engenharia Didática, por isso realizamos os estudos prévios incluindo o desenvolvimento do conceito de Função e os estudos dos documentos oficiais que regem a Educação Básica no Estado. Aplicamos a sequência em oito alunos de uma escola pública da capital Paulista, mas somente os dados de quatro alunos foram analisados devido os problemas no equipamento de gravação. Durante o desenvolvimento da sequência percebemos todas as fases da TSD e as conversões de registros da TRRS e com base nos resultados obtidos, consideramos que foi validada a nossa engenharia didática, haja vista, que ao final da sequência os alunos foram capazes de construir significados para o conceito de Função.

Palavras-chave: Teoria da Situações Didáticas. Teoria de Registros de Representação Semióticas. Engenharia Didática. Introdução ao Conceito de Função.

ABSTRACT

The present work aims to analyze the construction and meanings for the concept of Function in students of the ninth year of Elementary School through situations that deal with Functions Defined by Several Mathematical Sentences. Based on the Theory of Didactic Situations (TSD) and Theory of Registers of Semiotic Representation (TRRS), we elaborated and/or adapted a didactic sequence to present the mathematical object under study. We adopted the assumptions of Didactic Engineering as a methodology, so we carried out previous studies including the development of the concept of Function and the studies of the official documents that govern Basic Education in the State. We applied the sequence to eight students from a public school in the capital of São Paulo, but only data from four students were analyzed due to problems in the recording equipment. During the development of the sequence we realized all the phases of the TSD and the conversions of TRRS records and based on the results obtained, we considered that our didactic engineering was validated, given that at the end of the sequence the students were able to construct meanings for the concept of Function.

Keywords: Theory of Didactic Situations. Theory of Semiotic Representation Records. Didactic Engineering. Introduction to the Function Concept.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - EXERCÍCIO 1(A)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 2 – EXERCÍCIO 1 (B)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 3 - EXERCÍCIO 1 (C)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 4 - EXERCÍCIO 1 (D) - LEO	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 5 - EXERCÍCIO 1 (D)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 6 - EXERCÍCIO 1 (E)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 7 - EXERCÍCIO 1 (F)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 8 - EXERCÍCIO 1 (F) - CAIO	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 9 - EXERCÍCIO 1 (F) – VERSÃO FINAL	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 10 - EXERCÍCIO 1 (G)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 11 - EXERCÍCIO 2 (A)	55
FIGURA 12 - EXERCÍCIO 2 (B)	55
FIGURA 13 - EXERCÍCIO 2 (C)	56
FIGURA 14 - EXERCÍCIO 2 (D)	56
FIGURA 15 - EXERCÍCIO 3 (A)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 16 - EXERCÍCIO 3 (B)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 17 - EXERCÍCIO 3 (C)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 18 - EXERCÍCIO 3 (D)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 19 - EXERCÍCIO 4 - CAIO	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 20 - EXERCÍCIO 4	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 21 - EXERCÍCIO 5 (A) - LEO	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 22 - EXERCÍCIO 5 (A) – PARTE 1	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 23 - EXERCÍCIO 5 – (A) PARTE 2	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 24 - EXERCÍCIO 5 (A) - PARTE 3	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 25 - EXERCÍCIO 5 (B)	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 26 - EXERCÍCIO 6 (A) - PARTE 1	74
FIGURA 27 - EXERCÍCIO 6 (A) - PARTE 2	75
FIGURA 28 - EXERCÍCIO 6 (A) - PARTE 3	75
FIGURA 29 - EXERCÍCIO 6 (B)	75

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - TRABALHOS SELECIONADOS	14
QUADRO 2 - REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES PARA FUNÇÃO	30

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 PROBLEMÁTICA	14
2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
2.2 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA E JUSTIFICATIVA	24
2.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	25
2.4 REFERENCIAL TEÓRICO	27
2.4.1 <i>Teoria das Situações Didáticas – TSD</i>	27
2.4.2 <i>Teoria de Registros de Representação Semiótica – TRRS</i>	29
3 ESTUDOS PRÉVIOS	32
3.1 O DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO	32
3.2 A FUNÇÃO EM DOCUMENTOS CURRICULARES DO ENSINO FUNDAMENTAL	37
4 A PESQUISA	41
4.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA	41
4.2 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO	41
4.3 ANÁLISE E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA	42
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	78
ANEXO A – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	82

1 INTRODUÇÃO

Em meados de dezembro, numa roda de conversa com os alunos do 1º ano do Ensino Médio, em uma instituição que prevê o ensino de funções para o primeiro semestre do ano, a partir de teoria dos conjuntos, percebi que muitos não haviam compreendido a noção de Função mesmo depois de trabalhado esse conhecimento durante meses. Após essa conversa, comecei uma reflexão sobre o significado desse objeto matemático nos processos de ensino e de aprendizagem desses discentes, logo cheguei à conclusão de que o problema estava no processo de ensino e que precisava compreender os fenômenos que envolvem a construção dos conhecimentos matemáticos.

A falta da compreensão do objeto Função, gera lacunas no processo de aprendizagem de qualquer cidadão, em especial, para aqueles que desejam seguir áreas como Administração, Biologia, Economia, Engenharia, Física, Química entre outras. Segundo Ponte (1990), o conceito de função é considerado um dos mais importantes de toda a Matemática.

Por outro lado, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) vincula a habilidade “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. ” (BRASIL, 2018, p. 317) ao nono ano do Ensino Fundamental em vez do primeiro ano do Ensino Médio conforme era orientado nos Parâmetros Curriculares Nacional (PCN+) de 2002.

Partindo dessa problemática, nossa pesquisa visa estudar uma proposta para iniciar o ensino de Função em alunos do nono ano do Ensino Fundamental utilizando uma sequência didática adaptada do doutorado de Xavier Neto (2021) desenvolvida no grupo Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática (PEAMAT) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), do qual fazemos parte, que trata essa introdução por Função Definida por Várias Sentenças com o intuito de que os alunos possam construir significado a esse objeto matemático.

A escolha desse conceito, para apresentar a ideia inicial de Função é interessante pois, possibilita expressar matematicamente muitos fenômenos que se relacionam por meio de variáveis, como por exemplo, a tarifação do imposto de renda,

que funciona de forma diferente para diferentes faixas salariais uma vez que a alíquota do desconto varia conforme o salário do trabalhador, outra situação típica que pode ser modulada por uma Função Definida por Várias Sentenças é o encher e o esvaziar de uma caixa d'água. A velocidade que ela enche é diferente da que ela esvazia, pois, os fluxos são diferentes. E quando considerado o volume d'água na caixa, a função que descreve a entrada d'água é crescente e a saída decrescente. Além disso, não encontramos na base de dados da CAPES, TEDE e Academia.edu pesquisas que tratam desse assunto.

A sequência foi elaborada a partir da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau e da Teoria dos Registros de Representações Semiótica (TRRS) de Raymond Duval e foram adotados como metodologia pressupostos da Engenharia Didática. Temos como hipótese que essa atividade permitirá melhor compreensão das relações de dependência e das noções de domínio e imagem de uma Função.

A estruturação desse trabalho compreende cinco capítulos, sendo o primeiro esta introdução. No segundo capítulo, passamos a delimitar nossa problemática, em que iniciamos com uma revisão bibliográfica acerca das pesquisas que tratam da introdução do conceito de Função, delimitamos nosso problema de pesquisa, com a questão de pesquisa e os objetivos esperados, justificamos a presente investigação, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados e finalizamos com o referencial teórico afim de subsidiar a construção de uma base de conhecimentos para a introdução do ensino de Função.

No terceiro capítulo, realizamos um estudo prévio sobre o desenvolvimento do conceito de função, o conceito de função adotado em nossa pesquisa e um breve estudo sobre Funções Definidas por Várias Sentenças matemáticas que será parte de nosso objeto de estudo e finalizamos com uma breve investigação sobre como os documentos oficiais propõe esse conceito.

No quarto capítulo, iremos apresentar os sujeitos de pesquisa, a descrição da aplicação e as análises e validação da sequência estudada.

Por fim, no quinto capítulo, apresentamos nossas considerações finais, em que iremos retomar os aspectos que considerarmos relevantes na presente investigação e sugestões para estudos futuros.

2 PROBLEMÁTICA

No que segue, neste capítulo, apresentamos a revisão bibliográfica, a delimitação do problema de pesquisa e justificativa, os procedimentos metodológicos que embasam essa pesquisa e por fim o referencial teórico.

2.1 Revisão bibliográfica

Os trabalhos foram selecionados por meio de buscas nas bases de dados no catálogo eletrônico de teses e dissertações da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES. Foi utilizado como descritor, “Introdução do conceito de função”, obtendo duas teses, três dissertações e um artigo como resultado. Dentre essas pesquisas, uma tese e duas dissertações não estão disponíveis para consulta e o artigo tem como objetivo analisar o trabalho dos professores com a modelagem matemática, por isso o descartamos. Utilizando a mesma estratégia no Sistema de Publicação Eletrônica de Teses e Dissertações – TEDE foram encontradas seis dissertações, dentre essas pesquisas, resolvemos descartar quatro, dentre essas há uma que já foi descartada anteriormente, pois o tema tratado foge dos objetivos da nossa pesquisa. Na rede social científica Academia.edu, não foi encontrado nenhum resultado, por fim, acrescentamos uma dissertação e um artigo obtido por indicação e selecionamos outras duas dissertações pela bibliografia de outros trabalhos. Assim, nossa revisão foi realizada com oito trabalhos que estão elencados no Quadro 1.

Quadro 1 - Trabalhos selecionados

Autor(es) e ano da publicação	Natureza do trabalho/Origem	Título do trabalho
Lopes (2003)	Dissertação / Portal TEDE	A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino
Basso (2006)	Tese / bibliografia de outro trabalho	Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do ensino fundamental
Martins (2006)	Dissertação / Bibliografia de outro trabalho	Análise da dialética ferramenta-objeto na construção do conceito de função
Botta (2010)	Dissertação / Portal TEDE	O ensino do conceito de função e conceitos relacionados a partir da resolução de problemas
Santana et al (2010)	Artigo / Indicação	Introdução ao conceito de função: uma análise pela perspectiva da organização praxeológica
Araujo (2013)	Dissertação / Portal CAPES	Propostas de atividades para a introdução do conceito de função no ensino fundamental

Xavier Neto (2016)	Dissertação / Indicação	Um estudo da gênese instrumental para função de uma variável real com várias sentenças
Ferreira (2016)	Tese / Portal CAPES	Introdução ao conceito de função: uma proposta com o software SIMCALC no ensino fundamental

Fonte: Produção do pesquisador

Lopes (2003), fundamentado nos elementos teórico propostos por R. Duval e B.J. Caraça, desenvolveu e aplicou uma sequência de ensino em uma classe de oitava série do ensino fundamental (nono ano) com o objetivo de apresentar a introdução do conceito de função por meio da função afim. De modo mais específico o pesquisador avaliou os fenômenos didáticos ocorridos na resolução de problemas envolvendo a conversão do registro gráfico de uma função afim para o algébrico e vice-versa.

Esta pesquisa revela a importância da utilização de múltiplas representações no processo de conceitualização de função, favorecendo a coordenação entre as variáveis visuais pertinentes no registro gráfico e os correspondentes valores categoriais no registro algébrico.

Após as análises, Lopes (2003) conclui que a diversidade de representações e a conversão entre elas foram fundamental para a apreensão do objeto matemático Função. Como o nosso intuito é iniciar a sequência didática com situações problemas e geométricas que permitirá ao aluno realizar tratamentos e conversões de representações em diversos registros elaborada a partir da Teoria dos Registros de Representações Semiótica (TRRS), consideramos relevante este trabalho para a nossa pesquisa.

A pesquisa de Bassoi (2006) faz uma análise sobre o ensino de função observando a prática de um professor em sala de aula e como esse utiliza e mobiliza as formas de representar esse conceito. O objetivo desta tese foi identificar e analisar os registros de representação semiótica usados por uma professora e seus alunos de oitava série (nono ano) em aulas de matemática sobre funções. O suporte teórico dessa pesquisa é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de DUVAL (1995), que permite investigar a compreensão em matemática por meio das representações semióticas.

A autora declara que o impacto da tecnologia, sobre a maneira como as funções matemáticas podem ser representadas e manipuladas, está conduzindo educadores matemáticos a repensarem o modo como as funções são ensinadas.

A autora conclui que devido à diversidade de representações do mesmo objeto matemático, o uso de diferentes registros de representação, não só para tratamentos do mesmo objeto, mas principalmente na conversão de registros nas diferentes formas de linguagem (natural, aritmética, algébrica, entre outras) auxiliou na caracterização do objeto matemático e teve um papel relevante na compreensão dos alunos, o que sugere-se seja levado em conta na elaboração de propostas de ensino de conteúdos matemáticos escolares. Esta conclusão reforça a ideia de nos apoiarmos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para estudarmos a construção do significado da noção de função.

A pesquisa realizada por Martins (2006), teve como objetivo de investigar o ensino e a aprendizagem do conceito de função no Ensino Fundamental. Apoiado na Teoria dos Registros de Representações Semióticas e baseado nos princípios da Engenharia Didática como metodologia, o autor procura confirmar e validar uma estratégia de ensino por meio de uma sequência didática baseada na dialética ferramenta–objeto que crie as condições para a introdução deste conceito a partir de conhecimentos que os alunos já possuem.

O autor relata que o tratamento dado ao conceito de função no processo de ensino, muitas vezes prioriza a relação entre conjuntos ao invés de relacionar grandezas, segundo o autor, esse fato é uma das causas que possibilitam aos alunos a não utilizarem o conceito de função como ferramenta na resolução de atividades ligadas a esse conceito. Esse fato explica as razões para estudarmos a ideia do conceito de função em alunos do nono ano do Ensino Fundamental, por meio uma sequência didática que trata de Funções Definidas por Várias Sentenças embasada nos pressupostos da Engenharia Didática. Pois, segundo a autor, abordagens realizadas em sala de aula pautadas na repetição, memorização e definição têm se mostrado ineficientes na construção desse conhecimento.

Botta (2010), pesquisou sobre o ensino e à aprendizagem do conceito de função, no Ensino Fundamental e Médio, fazendo uso da Metodologia de Ensino Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e, também, fazendo uso de análise de erros e concepções errôneas.

Em sua pesquisa, a autora aborda alguns temas que dizem respeito ao conceito de função, a evolução histórica do conceito de função, função como um subtema da álgebra, concepções errôneas e dificuldades que têm os alunos para relacionar as

várias formas de representação de funções. E temas que dizem respeito à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tais como a gênese e a evolução histórica dessa metodologia, assim como os vários pontos de vista a respeito de resolução de problemas.

A metodologia utilizada conhecida como Metodologia de Romberg, recomenda uma série de passos, são eles:

- *Identificar um fenômeno de interesse.* Toda pesquisa começa com uma curiosidade a respeito de um particular fenômeno do mundo real.
- *Construir um modelo preliminar.* Um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do Fenômeno de Interesse e procura ver como esses aspectos estão relacionados. Então, os apresenta em um modelo.
- *Relacionar o fenômeno de interesse e o modelo preliminar a ideias de outros pesquisadores.* Uma importante atividade é a de examinar o que outras pessoas pensam sobre o Fenômeno de Interesse e determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar, ou modificar o Modelo Preliminar proposto.
- *Elaborar questões específicas ou fazer uma conjectura “sensata”.* Este é um passo chave em um processo de pesquisa porque, quando se examina um particular fenômeno, um número de questões potenciais inevitavelmente surge.
- *Selecionar uma estratégia geral de pesquisa para se obter evidências.* A decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões selecionadas, da visão de mundo na qual estas questões estão situadas, do Modelo Preliminar que se construiu a partir do “Fenômeno de Interesse”, e da Conjectura ou Pergunta que foi levantada. Estratégias auxiliares podem ser criadas.
- *Selecionar procedimentos específicos.* Como auxiliares ao Procedimento Geral selecionado. Para responder as questões específicas, que foram levantadas é preciso coletar evidências. É neste passo que as técnicas usualmente ensinadas em cursos de Métodos de Pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra; como reunir

informação (entrevistar, questionar, observar e testar); como organizar a informação coletada, e assim por diante.

- *Coletar informação.* Este passo pode ser direto uma vez que se tenha decidido coletar certas informações para construir um argumento a respeito das questões levantadas.
- *Interpretar a informação levantada.* Neste estágio, o pesquisador analisa e interpreta as evidências que foram coletadas frente ao Problema de Pesquisa identificado.
- *Transmitir resultados para outros.* Ser membro de uma comunidade de pesquisa implica na responsabilidade de informar aos outros membros sobre a investigação completada e ouvir seus comentários e críticas
- *Antecipar a ação de outros.* Fornecidos os resultados de uma particular investigação, todo pesquisador está interessado no que virá a seguir e, então, antecipar ações posteriores de outros.

Em um relato pessoal, descreve sua experiência como professora do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e de como chegou no fenômeno de interesse, que se refere ao ensino-aprendizagem do conceito de função. Ela reuniu trabalhos relacionados à questão, realizados por outros pesquisadores, artigos de pesquisa, documentos oficiais referentes a reformas e padrões curriculares.

Botta (2010) traz uma discussão sobre os três princípios de aprendizagem considerados fundamentais no processo de ensino e aprendizagem da matemática presentes no livro *How Students Learn: mathematics in the classroom (National Research Council, 2006)*, são eles: Os professores devem levar em conta as pré-concepções dos alunos; A compreensão requer conhecimento fático e estruturas conceituais; Uma abordagem metacognitiva permite que o estudante se automonitore, discute também sobre as concepções errôneas e erros cometidos pelos alunos, tipificando algumas das concepções errôneas mais comuns em quatro categorias:

- *Supergeneralização*, se um estudante toma um conceito, um princípio ou um procedimento que é verdadeiro para uma classe e o estende para outra classe. Ou se um estudante toma um procedimento e o usa como um conceito então o estudante está supergeneralizando.
- *Superespecialização*, se um estudante impõe, numa classe inteira, uma propriedade de alguma subclasse, então o estudante está

superespecializando. Ou, se um estudante adiciona alguma restrição a um conceito, princípio ou procedimento que não é uma característica de uma classe inteira, então o estudante está superespecializando.

- *Tradução incorreta*, muitos erros ocorrem como consequência de traduções que os estudantes fazem entre formas de representação, como: palavras, símbolos ou fórmulas, tabelas e gráficos. Tais traduções são frequentemente encontradas e cada tipo de tradução, por exemplo de palavras para símbolos, tem dificuldades associadas a ela.
- *Concepções limitadas*, se a concepção errônea de um estudante tem origem na falta de um conceito, princípio ou procedimento, ou se o estudante tem apenas uma compreensão limitada daquele conceito, princípio ou procedimento, então o estudante está usando uma concepção limitada.

Segundo a autora, a compreensão dos erros é uma ferramenta importante no processo de ensino e aprendizagem, podendo indicar ao professor, tanto novas estratégias de ensino, quanto erros didáticos que ele próprio possa estar cometendo.

Botta (2010), após análises de trabalhos realizados por alunos das diferentes séries escolhidas - 6^a, 7^a, e 8^a do Ensino Fundamental, e 1^o, 2^o e 3^o anos do Ensino Médio - com o propósito de diagnosticar as concepções errôneas relacionados com a introdução, a evolução e a aplicação do conceito de função, ao fazer uso da resolução de problemas, antes mesmo de terem sido formalizados os conteúdos matemáticos necessários à sua resolução, a autora conclui que, a introdução do conceito de função nas diversas séries do Ensino Fundamental II, já podem ser introduzidas já a partir do 6^o ano, com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Ela sugere aos professores, educadores e produtores de currículo, que a introdução do conceito de função e de outros a ele relacionados não precisa ocorrer necessariamente apenas no primeiro ano do Ensino Médio, pois acredita que esse trabalho com alunos pode ocorrer muito antes, e que a introdução de função pode ser antecipada. Analisando essa pesquisa, principalmente as análises citadas acima e os documentos oficiais que orienta a Educação Básica no país, decidimos a etapa escolar dos sujeitos de pesquisa que irão fazer parte deste estudo.

Santana et al. (2010) realizaram uma análise de conteúdo de livros didáticos de Matemática para o nono do Ensino Fundamental em que os autores buscam identificar de que forma esses livros abordam a introdução ao conceito de função. Para a análise crítica das estratégias utilizadas, os autores pautaram-se na Organização Praxeológica presente na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999), referente os tipos de Tarefas, Técnicas, Tecnologias e Teorias. Na análise dos tipos de tarefas propostas nos livros escolhidos, os autores observaram a abordagem histórica do conceito de função, se esta possibilita a fase adidática, conforme a Teoria das Situações Didática de Brousseau (2008), se apresentam diferentes tipos de registros e suas devidas conversões, presentes na teoria de Registro de Representação Semióticas de Duval (2003) e se apresentam algum tipo de obstáculo didático.

Segundo os autores ao organizar uma praxeologia matemática a fim de trabalhar a construção de significados do conceito de função, é relevante que o docente desenvolva essa organização na perspectiva de situações didática e adidática. Para eles, os autores de livros didáticos deveriam contemplar situações problema em uma perspectiva em que o aluno possa trabalhar de forma autônoma e, aos poucos, ir construindo o seu aprendizado por meio da investigação, tentativas e descobertas. Tal fato, contribuiu na escolha do aporte teórico dessa pesquisa.

A pesquisa revela que a organização praxeológica presente nos três livros escolhidos, ao tratar da introdução ao conceito de função, pouco contemplam situações-problema que possibilitem o aluno se colocar enquanto ator principal, construindo sua própria trajetória de aprendizagem. Neste sentido, os autores concluem a relevância do professor de matemática conhecer os objetos matemáticos e a importância de entender e compreender os conceitos que estão relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem.

Segundo eles, saber diferenciar conversão e tratamento pode ser um passo inicial, dentre outras alternativas do professor, para dar sentido ao ensino de Matemática e contextualizar o seu saber, não apenas no sentido de buscar as aplicações dos saberes nas práticas cotidianas dos alunos, mas, principalmente, buscar significar o saber matemático pelo saber matemático, usando diferentes representações e realizando variados tratamentos e variadas conversões do objeto matemático, podendo assim, constituir uma aprendizagem significativa ao aluno.

Essas contribuições julgamos extremamente importante para nossa pesquisa, haja vista que, nosso que parte do nosso objetivo é analisar a construção e significados para o objeto matemático Função.

O estudo de Araújo (2013) teve por objetivo propor exercícios direcionados à familiarização do aluno ao conceito de função desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, fazendo com que venha a construir esse conceito de forma natural adquirindo maior habilidade na resolução de problemas de um modo geral, possibilitando o desenvolvimento de atitudes positivas perante a Matemática e diminuindo o impacto gerado por este tópico, apresentado a partir do nono ano.

Segundo o autor, na construção dessas atividades foram considerados, os graus de complexidades de acordo com os quatro níveis de compreensão do aluno proposta por Tinoco (1998), as várias formas de representação do conceito de função, obtidas através de sua evolução histórica e a organização da Educação Básica Fundamental do Sistema Estadual de Ensino SEERJ, que se refere a organização curricular do ensino fundamental que está dividida em dois segmentos e cada um deles em dois ciclos:

1º segmento – 1º ciclo $\left\{ \begin{matrix} 2^{\text{º}} \text{ ano} \\ 3^{\text{º}} \text{ ano} \end{matrix} \right.$, 2º ciclo $\left\{ \begin{matrix} 4^{\text{º}} \text{ ano} \\ 5^{\text{º}} \text{ ano} \end{matrix} \right.$

2º segmento – 3º ciclo $\left\{ \begin{matrix} 6^{\text{º}} \text{ ano} \\ 7^{\text{º}} \text{ ano} \end{matrix} \right.$, 4º ciclo $\left\{ \begin{matrix} 8^{\text{º}} \text{ ano} \\ 9^{\text{º}} \text{ ano} \end{matrix} \right.$

Para os alunos do 2º e 3º ano do ensino fundamental as atividades propostas deverão considerar o conhecimento informal da criança, seu pensamento com base na percepção visual e suas ações espontâneas, o que em termos aplicados ao conceito de função se traduz em reconhecimento de dependência, leis de formação simples e visuais, construção de tabelas, e gráficos de setores e colunas.

As atividades propostas para os alunos do 4º e 5º ano apresentam situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, a aproximação da noção de número racional, através da compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações fracionária e decimal.

A matematização e a abstração inicia-se com os alunos do 6º e 7º ano, estas atividades apresentavam situações de variáveis dependentes e independentes, gráficos cartesianos simples e o reconhecimento de domínio.

Para os alunos dos anos finais do ensino fundamental, são introduzidas atividades de generalização tais como a escrita de expressões analíticas, distinção entre equação e função, construção e interpretação de gráficos convencionais e não convencionais, e caracterização de relações funcionais.

Consideramos esses fatos relevantes no estudo de Araújo (2013) para o desenvolvimento de nossa pesquisa, principalmente na conclusão em que chama a atenção à possibilidade da construção de um referencial que oriente o aprendizado desse objeto matemático ao longo dos anos da Educação Básica.

Segundo o autor, se trabalharmos desde os primeiros anos com mediação intencional e competência os estímulos dos alunos, com atividades que envolvam o conceito de função, seguindo os avanços da sua construção histórica e acompanhando o amadurecimento matemático do jovem, ao chegar ao Ensino Médio o aprendizado do uso dessa ferramenta se dará de forma espontânea, uma vez que o aluno já se encontrará familiarizado com suas aplicações e termos próprios, podendo então se aprofundar nos detalhes do tema sem os traumas tantas vezes observados.

Xavier Neto (2016), teve por objetivo acompanhar o desenvolvimento cognitivo de um grupo de alunos do segundo e terceiro ano do Ensino Médio, por meio do estudo do fenômeno da gênese instrumental para função de uma variável real com várias sentenças. A metodologia utilizada no trabalho foi a Engenharia Didática e teve como referencial teórico a Abordagem Instrumental de Rabardel e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval a partir dos quais elaborou uma sequência didática composta por um conjunto de atividades envolvendo geometria plana e situações do dia a dia. Durante a aplicação da sequência que foi trabalhada individual e coletivamente ficou constatada a transformação do artefato função de uma variável real com várias sentenças em instrumento.

Segundo o autor essa transformação se deu ao fato “mediante à mobilização dos esquemas de uso, ação instrumental e ação coletiva, evidenciando o fenômeno da gênese instrumental”. Desse modo, os estudantes foram acompanhados durante a aplicação da sequência, em que foi possível observar a experimentação dos processos da instrumentação, que são relativos ao sujeito, instrumentalização que se referem ao surgimento e à evolução dos componentes artefato do instrumento e

algumas dificuldades, principalmente na hora de identificar o artefato função de várias sentenças como sendo uma função.

Xavier Neto (2106) concluiu que, os estudantes mobilizaram e/ou criaram os esquemas de utilização por meio dos registros de representação semiótica, que permitiu verificar como se deu o desenvolvimento cognitivos dos sujeitos de pesquisa.

Esses fatos são consideráveis para a nossa pesquisa, tendo em vista que o autor se baseou na Teoria dos Registros de Representação Semiótica como aporte teórico e apoiou-se na Engenharia Didática como metodologia no desenvolvimento do seu estudo, no entanto, adotaremos em parte essas contribuições.

A pesquisa de Ferreira (2016), tem como objetivo discutir quais Obstáculos Epistemológicos surgem ao introduzir ideias relacionadas ao conceito de Função com alunos de nono ano do ensino fundamental por meio de um coletivo pensante (alunos, atividades e recurso computacional), e quais são as potencialidades do *software SimCalc* enquanto integrante desse coletivo que colaboram com a superação dos obstáculos evidenciados. A pesquisa está embasada na teoria dos Obstáculos Epistemológicos para o Ensino de Funções proposta por Sierpinska e é de cunho qualitativo. Foi estruturada de acordo com alguns elementos da metodologia do *Design Experiment*. Segundo o autor, em meio as pesquisas já existentes no campo da Educação Matemática em torno dessa temática, ainda são poucas que discutem a introdução do conceito de Função no ensino fundamental sem se remeter às características de definições formais matemáticas.

O autor desenvolveu uma sequência de atividades com objetivo de introduzir o conceito de Função com o auxílio do *software SimCalc*, que segundo o autor, ao ser integrado ao grupo de trabalho, ofereceu elementos importantes para a constituição de um coletivo pensante favorável para a construção desse conceito, uma vez que, por meio da Matemática do Movimento, explorou uma representação que usualmente não é explorada no ambiente escolar, propiciando, assim, o reconhecimento de características essenciais para a construção do conceito de Função, tais como: relações entre duas variáveis, dependência, características de crescimento e decrescimento e reconhecimento dos conjuntos domínio e imagem.

Após a análise dos dados desta pesquisa, o autor conclui que, ainda se mostram presentes os Obstáculos Epistemológicos para o Ensino de Funções

apresentados por Sierpinska, sendo que, neste estudo, segundo o autor, os mais frequentes foram “A Matemática não está preocupada com problemas práticos” e “Proporção é um tipo privilegiado de relação”, o que fez o autor compreender que, ao se introduzir o conceito de Função no ensino fundamental, deve-se ter a consciência da incidência destes obstáculos para que assim seja possível traçar estratégias para superá-los.

Os estudos realizados por Ferreira (2016), despertaram-nos a necessidade de reconhecer a presença dos obstáculos epistemológicos no desenvolvimento de nossa sequência didática que anteriormente era ignorado. Como por exemplo, representar uma situação em sua linguagem natural em linguagem algébrica.

Importante mencionar que não foram encontrados estudos que tratassem a introdução do conceito de função em alunos do Ensino Fundamental por meio de Funções Definidas por Várias Sentenças. Tendo em vista que a BNCC altera a introdução de Função do Ensino Médio para o nono ano do Ensino Fundamental. No entanto, os trabalhos aqui mencionados, de certa forma, em nosso entendimento, foram relevantes para este estudo, pois se aproximaram dos nossos objetivos e puderam fornecer elementos que contribuíram para desenvolvimento dessa pesquisa, principalmente pelo fato de sugerirem novas investigações dentro dessa temática.

Mostramos, o que segue, a delimitação do problema e a justificativa.

2.2 Delimitação do problema e justificativa

A partir de nossa revisão bibliográfica, da alteração curricular do início do ensino de Função para o nono ano do Ensino Fundamental e de discussões em nosso grupo de pesquisa, fica evidente a relevância da necessidade de uma investigação a respeito da introdução do conceito de Função, por isso, nossa pesquisa visa estudar uma proposta para iniciar o ensino de Função utilizando uma sequência baseada no estudo desenvolvido por Xavier Neto (2021) para a introdução de Função, a partir de uma situação adidática que envolve Função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas.

Consideramos que existe uma necessidade dessa análise, haja vista que ficou evidenciado em nossa revisão a necessidade de iniciar a introdução do conceito estudado nos anos finais da Educação Básica e com a justificativa que não

encontramos trabalho na base de dados utilizada que trata desse estudo em alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

Assim, definimos nossa questão de pesquisa:

Uma sequência didática para o ensino de Função de uma variável real, com situações que tratam de Funções Definidas por Várias Sentenças matemáticas, permite que alunos do nono ano construam significado para esse conteúdo?

Dessa forma definimos como **objetivo geral**:

Analisar a construção e significados para função de uma variável real em situações que tratam de funções definidas por várias sentenças matemáticas com alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

Foram definidos, também, os seguintes **objetivos específicos**: 1) levantar os conteúdos de álgebra propostos nos documentos oficiais, ligados ao conceito de função; 2) aplicar uma sequência didática para a construção do conceito de função no nono ano do ensino fundamental; 3) analisar a aplicação visando à construção do conceito de função; 4) Investigar contribuições da mobilização de diferentes representações relacionadas ao conceito de função para o processo de construção do conhecimento desse conceito.

2.3 Procedimentos metodológicos

A metodologia que será utilizada está embasada nos pressupostos da Engenharia Didática que de acordo com Almouloud e Coutinho (2008, p. 66) caracteriza-se:

[...] em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Na primeira fase, segundo os autores, prevê-se o estudo epistemológico do conteúdo visado pelo ensino; estudo do ensino usual e seus efeitos; das concepções dos alunos, estudo das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; entre outros. Estas análises preliminares devem permitir ao pesquisador a

identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases que se seguem.

Na segunda fase será realizada a construção da sequência e a análise *a priori* que, de acordo com os autores, tem como objetivo “[...] determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido.” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

Acrescentam também que há dois tipos de variáveis potenciais:

“As macrodidáticas ou globais relativas à organização global da engenharia e as microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase.” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

Dessa forma, devemos: descrever as escolhas das variáveis e as características da situação didática desenvolvida; analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno realizará. O professor, como mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem, prevê comportamentos possíveis e tenta mostrar como a situação criada e analisada *a priori* permite controlar a aprendizagem assegurando o desenvolvimento do conhecimento visado pelo professor.

Na terceira e última fase, estão previstas a experimentação, a análise *a posteriori* e a validação. Segundo os autores, a experimentação “é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário [...] o que implica em um retorno à análise *a priori*, em um processo de complementação.” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

A Análise *a posteriori* “se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela.” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 68).

É considerada “o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que

se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 68).

Para os autores:

Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que: a observação foi preparada por uma análise a priori conhecida do observador; os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas e estruturados também pela análise a priori. (ALMOULOU, COUTINHO, 2008, p. 68).

Em suma, a análise *a posteriori* depende diretamente das escolhas dos instrumentos de coleta de dados e das análises dos protocolos construídos. Essa análise deve então ser confrontada com a análise *a priori* para validar ou não a sequência construída.

2.4 Referencial teórico

Nosso propósito é estudar a construção do significado da noção de função em alunos do nono ano do Ensino Fundamental, usando como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (1986), a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval (1995) que apresentaremos no que segue.

2.4.1 Teoria das Situações Didáticas – TSD

A Teoria das Situações didática -TSD, desenvolvida por Guy Brousseau, tem a intenção de modelar os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos, que segundo Almouloud (2007, p. 31) “[...] busca criar um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio) no qual a aprendizagem deve se desenrolar [...]”. Essas interações são possíveis a partir da criação de situações didáticas e adidáticas, da qual a situação adidática é uma de suas fases. De acordo com Almouloud (2007), essa situação é aquela em que a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas foi imaginada, planejada e construída pelo docente para proporcionar condições favoráveis à apropriação do saber que deseja ensinar. Essa situação deve proporcionar ao aluno momentos de ação e reflexão de tal forma que seu conhecimento prévio evolua a partir da mediação do professor.

Outro elemento da situação é o *milieu*, que segundo Brousseau (apud FIGUEROA, ALMOULOU, 2018, p. 689), “[...] é definido como o conjunto de condições externas em que um ser humano se comporta e cresce”.

Para os autores nessas interações, provocadas por uma situação adidática, devem ocorrer as fases de dialéticas de ação, formulação e validação, que não são isoladas, e ao professor cabe fazer a devolução e a institucionalização.

De acordo com Almouloud (2007, p. 37), a dialética de ação consiste em desenvolver uma situação de ação ao colocar o aluno frente a uma situação cuja solução consiste na necessidade de construir e manipular um conhecimento de natureza mais operacional: “[...] coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar; o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação [...]” e na busca por soluções é essencial o professor não intervir e muito menos explicitar argumentos de natureza teórica, é o aluno que irá desenvolver e fornecer a solução. Embora, argumentos e justificativas para essas ações poderão ser estruturadas pelo docente para que o aluno tenha elementos e condições para encontrar a solução esperada.

Na dialética de formulação de uma situação adidática, o aluno troca informações com outros sujeitos que cooperam com o desenvolvimento da atividade explicitando, oralmente ou por escrito a solução encontrada. De acordo com Silva, Ferreira e Tozetti (2015), a dialética de validação caracteriza a etapa em que os alunos devem validar o modelo construído organizando os enunciados para convencer os colegas de que a solução apresentada é verdadeira.

Esse processo, de acordo com o autor, “apoia-se na noção de devolução [...] definida como o ator pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema aceitando as consequências dessa transferência.” (ALMOULOU, 2007, p. 35). Em outras palavras, o professor não tem mais a responsabilidade de garantir o acerto ou não das respostas dos estudantes, pelo contrário é ele quem deve formulá-la e validá-la.

Na dialética de validação, Freitas (2012) ressalta que nessa etapa o estudante já utiliza determinados mecanismo de prova, em que o saber matemático em jogo é mobilizado com essa finalidade. Nesse instante ocorrem as discussões sobre as asserções encontradas durante os processos de ensino e de aprendizagem. Esse

momento também deve ser previsto pelo professor, fundamentado em seus conhecimentos. Cabe ao professor organizar as tarefas propostas de modo que a validação das técnicas construídas ocorra quando os estudantes já têm elementos para realizar a discussão.

Cabe também ao professor, a fase de institucionalização que é o momento em que ordenará e sistematizará os conhecimentos construídos pelos alunos ou redirecionará o desenvolvimento da situação didática, caso não alcance os objetivos delineados com a situação proposta. Segundo Almouloud (2007, p.40) “depois da institucionalização, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos”

2.4.2 Teoria de Registros de Representação Semiótica – TRRS

Proposta por Duval (1995) a TRRS, propõe uma abordagem cognitiva para compreender as dificuldades dos alunos na compreensão da Matemática e entender a natureza dessas dificuldades. Para o autor essa abordagem possibilita ao aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos problemas matemáticos que são propostos a partir da noção de representações semióticas que, segundo Duval (apud SANTOS; CURI 2009, p. 58) são:

[...] produções constituídas pelo emprego de signos (sinais) pertencentes a um sistema de representação que têm suas dificuldades próprias de significância e de funcionamento. Uma figura, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico, são representações semióticas que salientam sistemas semióticos diferentes. Essas representações permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo assim diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Para Duval (2009, p. 36-37) nem todos os sistemas de representação semiótica podem ser caracterizados como registros, apenas os que permitem a constituição de uma “*representação de alguma coisa*”. Transformar as representações por meio de regras próprias do sistema, é o que chamamos de tratamento e, converter representações de um sistema para representações em outro sistema, denominamos conversão. Para o autor a compreensão em matemática pressupõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representação semiótica.

As questões de representação estão no seio da Educação Matemática por ser um componente essencial para a construção de concepções e

competências. Partindo do pressuposto que os objetos matemáticos não são fisicamente determinados e que a língua natural, falada ou escrita, se mostra insuficiente para discussões a respeito de tais objetos, outros sistemas de expressão e representação se fazem necessários; por exemplo, os sistemas variados de escrita para números, as anotações simbólicas, as escritas algébricas etc. que assumem um status de linguagens paralelas a linguagem natural. (SILVA e AMOULOU, 2018 p. 97-98)

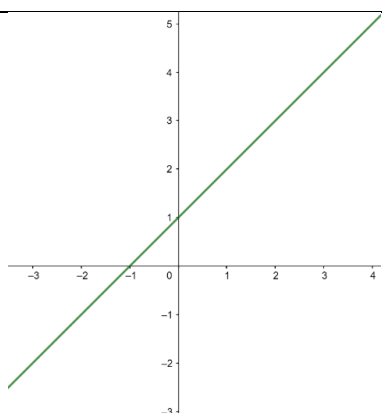
Como uma das nossas intenções é iniciar a sequência, para apresentar o conceito de função, por uma situação geométrica e situações problema (Anexo A) podemos exemplificar a conversão da representação dos quadrados no registro figural, para uma representação no registro funcional e vice-versa. Essa teoria nos permite elaborar situações de ensino que permitam ao aluno realizar tratamentos e conversões de representações em diversos registros. No caso do ensino de função, podemos considerar o registro funcional, o registro tabular e o registro gráfico, como mostra o Quadro 2, que trata de um exemplo para a função linear $f(x) = x + 1$.

Porém, é importante ressaltar que, um objeto matemático não deve ser confundido com as suas representações. Função é um objeto matemático, o gráfico desta função ou até mesmo a expressão algébrica é uma representação deste objeto, e não podemos esquecer que as representações semióticas são um suporte fundamental para as representações mentais.

Segundo Xavier Neto (2016, p. 62)

As representações semióticas são extremamente necessárias à aprendizagem em matemática, pois é por meio delas que o sujeito exterioriza as representações mentais que constrói acerca de um determinado conceito. Isso faz com que se tornem visíveis ou, ainda, acessíveis aos outros, ou seja, exercendo também uma função de comunicação e, no caso da matemática, são necessárias para o desenvolvimento da sua própria atividade.

Quadro 2 - Registros de representações para função

Quadro 2 – Registros de representações para funções										
Registro de representação funcional	Registro de representação tabular	Registro de representação gráfica								
$f(x) = x + 1$	<table><tr><th>x</th><th>$f(x) = x + 1$</th></tr><tr><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	x	$f(x) = x + 1$	-1	0	0	1	1	2	
x	$f(x) = x + 1$									
-1	0									
0	1									
1	2									

Fonte: Produção do pesquisador

Neste contexto, desenvolveremos nossa investigação a respeito da introdução do conceito de função no nono ano do ensino fundamental.

A seguir serão apresentados os estudos prévios para o desenvolvimento desta pesquisa.

3 ESTUDOS PRÉVIOS

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento do conceito de função e como os documentos oficiais propõe esse ensino.

3.1 O desenvolvimento do conceito de função

Os babilônicos, há 2000 anos a.C. segundo Oliveira (1997) que revelaram em tablets de argila os primeiros registros sobre instinto funcional através de tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadráticas, de cubos e raízes cúbicas entre outras.

No período moderno Galileu Galilei (1564-1642) deu um grande passo na evolução da ideia de função, ao introduzir o quantitativo nas representações gráficas. Já no início do século XVI, François Viète (1540-1603), usou as vogais na representação de variáveis e consoantes na representação de parâmetros.

A importância dessa notação que, pela primeira vez, tornou possível a colocação por escrito sob uma forma simbólica das equações algébricas e de expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários poderia ser submetida. Entretanto, o criador da nova Álgebra não utiliza sua notável descoberta para “fazer avançar” o conceito de função: pensar em termos de função não foi característica de seu espírito.

Segundo Youschkévitch (1976 apud OLIVEIRA, 1997 p.18), no final do século XVI, Fermat e Descartes, apresentaram o método analítico da introdução de funções, começando assim uma nova era da matemática.

Newton (1642-1727), também usou os termos "*relata quantitas*" para designar variável dependente e "*genita*" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.

Mas o conceito individualizado como objeto de estudo, segundo Ponte (1990), surgiu apenas nos anos finais do século XVII.

Leibniz (1646-1716) foi primeiro que usou o termo "Função" (em 1673), mas ainda apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência duma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais. Introduziu igualmente a terminologia de "constante", "variável" e "parâmetro". Segundo Ponte

(1990) com o desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos, tomou-se indispensável um termo para representar quantidades dependentes de alguma variável por meio duma expressão analítica. Com esse propósito, a palavra "Função" foi adaptada na correspondência trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e Jacob Bernoulli (1667-1748).

Em 1718 Jacob Bernoulli publicou um artigo, que viria a ter grande repercussão, contendo a sua definição de função de uma certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes. Mas em 1748, Euler (1707-1783) antigo aluno de Bernoulli deu um toque final nesta definição, substituindo o termo "quantidade" por "expressão analítica".

Fourier (1768-1830) proporcionou um dos momentos mais marcantes da história da evolução do conceito de relação funcional, ao estudar os problemas da condução do calor nos objetos materiais, considerando a temperatura de um corpo como uma função de duas variáveis, o tempo e o espaço. Fourier conjecturou a certa altura que para qualquer função seria possível obter um desenvolvimento em série trigonométrica, num intervalo apropriado, mas não conseguiu uma prova matemática dessa afirmação.

Tal situação volta a ser exposta por Dirichlet (1805-1859), que conseguiu formular condições suficientes para representabilidade de uma função por uma série de Fourier. Dirichlet separou então o conceito de Função da sua representação analítica, formulando-o em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos (em 1837). Uma função seria simplesmente uma correspondência entre duas variáveis, tal que a todo o valor da variável independente se associa um e um só valor da variável dependente.

Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918) e em seguida pelos estudos do grupo Bourbaki, a noção de Função foi estendida até o Século XX de forma a incluir tudo que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não.

Segundo Ponte (1990), a ideia de função impôs-se através da sua associação o estudo das expressões analíticas, ideia que se viria a revelar extremamente fecunda. Ao indicar o papel histórico da fase em que a noção de Função esteve na

prática confundida com a de expressão analítica, o matemático soviético Youschkcvitch (1976) comentou que:

Foi o método analítico de introduzir funções que revolucionou a Matemática e, por causa da sua extraordinária eficiência, reservou um lugar central para a noção de função em todas as ciências exatas. ” (YOUSCHKCVITCH, 1976 apud, LIMA, 1990, p. 04).

Com esse breve relato sobre a história da construção do objeto função, temos a noção das mudanças que esse conceito passou e de como foi longo o período de seu desenvolvimento. Entendemos que, a ideia de Função foi sendo construída conforme os fenômenos com suas regularidades e dependências foram sendo verificados e representados através de ferramentas matemáticas. Desenvolvidas a partir das ideias de correspondência unívoca entre conjuntos, onde as variáveis dependentes e independentes, as leis quantitativas, as notações e as representações em gráficos foram surgindo e compondo esta ferramenta, o conceito de função passou a ser um dos mais importante da matemática e das áreas afins, já que se aplica em diversos processos.

Encontramos inúmeras formas de expressar a definição de Função e selecionamos o que se refere a vários aspectos que consideramos fundamental para serem investigados.

Função é uma relação unívoca entre dois conjuntos, que transpõe uma relação de dependência entre duas variáveis e que atende às condições de existência e unicidade, expressando-se por meio de uma lei de formação cuja notação é: $f: A \rightarrow B$ que a cada elemento x pertencente à A associa o elemento $f(x)$ pertencente à B , ou seja, constitui os pares ordenados $(x, f(x))$.

Assim, com a necessidade de analisar fenômenos, representar regularidades, interpretar interdependências de variáveis e generalizar leis quantitativas que se expressam analiticamente, surge a ideia do conceito de Função. Analisando detalhadamente esses fenômenos, de acordo com suas propriedades, as funções recebem diversas classificações. Uma delas é a função afim, que pode oferecer uma interessante cadeia de aplicações na qual podem motivar os estudantes por meio de problemas do cotidiano, que podemos definir da seguinte forma: uma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, chama-se função afim, quando possuem constantes $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Existem alguns casos particulares da função afim, como a função identidade, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ em que $a = 1$ e $b = 0$ na

função afim; a função constante, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$ em que $a = 0$ na função afim e a função linear, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$ em que $b = 0$ na função afim.

A Função linear é utilizada como modelo matemático na resolução de problemas que envolvem proporcionalidade, por exemplo, na Física, na lei fundamental da dinâmica, que é representada por $F = ma$ (m representa a massa do corpo e a de aceleração). Quando trata da aceleração da gravidade, expressa por g , F representa a força da atração que a Terra exerce sobre um corpo e passa a ser chamada de força peso representada por $P = mg$, indicando que o peso é diretamente proporcional à massa de um corpo. A noção de proporcionalidade está presente em nosso dia a dia em muitas outras situações.

Vários estudiosos dos séculos XVI e XVII tentaram explicar o movimento de queda livre de um corpo ou a trajetória de uma bala de canhão e séculos foram necessários até associar esse movimento a uma parábola e a uma equação que a descrevesse, associando a geometria à álgebra, que originou a noção de Função quadrática como a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}$, o valor $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$, com a , b e c números reais e $a \neq 0$. Tal Função tem papel fundamental na matemática e em outras áreas de conhecimento em situações que tratam de projeções de lucro máximo de uma empresa até o lançamento de um objeto no espaço e sua representação gráfica se tornou uma das figuras mais relevantes e presentes em nosso dia a dia.

Como nosso objetivo geral é analisar a construção e significados para Função de uma variável real em situações que tratam de Funções Definidas por Várias Sentenças matemáticas, seguiremos apresentando sua importância. Segundo Rossini (2006, p.58), “as Funções definidas por mais de uma sentença tiveram um papel importante na história do conceito de função”. Obviamente esses conceitos estão relacionados e não podemos desassociá-los.

De acordo com Chumpitaz (2013, apud Xavier Neto, 2016, p.88), Euler, discípulo de J. Bernoulli (1667-1748), sugeriu uma forma analítica do conceito de função com várias sentenças, sem “deixar claro, entretanto, a maneira como devem-se constituir essas Funções a partir da variável independente”. Ainda segundo o autor, um conceito formal em relação a função de várias sentenças, inicia-se fixando uma

família de funções definindo-a da seguinte maneira: $F \subset \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, que são denominadas funções básicas. Além disto, uma família Y de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, $Y \subset P(\mathbb{R})$. Onde P , representa o conjunto das partes, ou seja, todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ e Y , a família de subconjuntos das partes. Dessa forma, ele apresenta a seguinte definição:

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $A \subseteq \mathbb{R}$ é uma função definida por várias sentenças, se existe um grupo ou família de funções $\{f_i: A_i \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ de forma $f_i = f|_{A_i}$, onde $f \in F$, $A_i \in Y$, $i \in I$, e $I = \text{índices}$. De modo que:

- I. $f(x) = f_i$ se $x \in A_i$, $i \in I$ (propriedade da regra por sentenças);
- II. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ (propriedade do domínio);
- III. $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i, j \in I$, $i \neq j$. (propriedade da não sobreposição)
- IV. Dados $i, j \in I$, $i \neq j$, $f_i = f_j$ em $A_i \cap A_j$ com $f, g \in F$ tem que $f \neq g$ (propriedade da não redundância).

O autor refere-se a I , como o tratamento dos índices enumeráveis aos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e qualquer conjunto finito. E a $|$ está associada a uma limitação. A propriedade III, refere-se ao domínio da função dissemelhante a intersecção que é vazio e a propriedade IV assegura que não vão existir sentenças iguais. Essas propriedades, segundo Chumpitaz, definem matematicamente Função de uma variável real definidas por sentenças.

Para comprovar a validade da proposição, Chumpitaz (2013, apud Xavier Neto, 2016, p.89), apresenta o seguinte exemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq -2 \\ 4, & -1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 3, & x \geq 5 \end{cases}$

O exemplo acima, refere-se a uma única função, embora a regra de correspondência seja representada por três sentenças. Nesse caso, segundo o autor:

- Uma sentença é utilizada para os números reais menores que 2;
- Uma segunda sentença para os números reais que verificam intervalo $-1 \leq x \leq 3$;
- Uma terceira sentença para os números maiores ou iguais a 5;
- O domínio de f é a união $]-\infty, -2] \cup [-1, 3] \cup [5, \infty[$;
- Se $x = -8$ a regra indica que x é elevado ao quadrado somado a uma unidade;
- Se $x = 8$, a regra indica que x deve ser multiplicado por 2 e sobram três unidades. (CHUMPITAZ, 2013, apud Xavier Neto, 2016, p.90)

O exemplo confirma os argumentos propostos pelas propriedades, na medida em que delimita a existência do domínio por meio da propriedade II relativa à união, menciona a preocupação com a intersecção ao avaliar as raízes 8 e -8 e delimita a existência de apenas essas três sentenças para definir a função f .

A seguir, serão apresentadas as propostas de ensino do objeto Função nos documentos oficiais.

3.2 A função em documentos curriculares do Ensino Fundamental

Buscamos neste estudo entender como os documentos oficiais PCN, BNCC e Currículo Paulista direcionam e organizam o estudo de funções no Ensino Fundamental. Iniciamos com os Parâmetros Curriculares Nacionais que foram introduzidos no país nos anos 90, que segundo Xavier Neto (2021) não teve pretensão normativa, mas seria referência para a planificação do currículo da Educação Básica no país.

Nele, o ensino da matemática foi dividido em quatro partes: Números, Espaço e forma, Tratamento da informação e Medidas, a álgebra aparece como parte de Números, perdendo suas particularidades e aparecendo implicitamente como aritmética generalizada.

Segundo esse documento, o ensino de Matemática nos anos finais do ensino fundamental propende ao desenvolvimento do pensamento algébrico, do pensamento geométrico e do raciocínio proporcional, todos importantes para a construção e o desenvolvimento do conceito de função. O documento sugere que o estudo chamado de “pré-álgebra” deve iniciar-se nas séries iniciais do ensino fundamental ser retomado no terceiro ciclo para que os conceitos algébricos sejam revistos e consolidados. Estudo esse, tem o objetivo de levar o aluno à compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações. (BRASIL, 1998, p. 84)

Analisando as habilidades propostas nesse documento, percebemos a importância estabelecida à compreensão de diferentes representações e a transição entre elas, mas segundo os PCN, muitas vezes o ensino desse conteúdo incide no estudo de conteúdos algébricos, abordados de forma mecânica, distanciando ainda

mais os conteúdos das situações-problema do cotidiano. Com o intuito de superar essa barreira esse documento sugere que para os novos conteúdos a serem estudados, os alunos deveriam ser estimulados a estabelecer relações com os conhecimentos anteriormente construídos.

Vinte anos depois a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), propõe que o trabalho com a álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, deve garantir aos alunos atribuírem significado a um problema contextualizado, onde ele possa reconhecer nessas situações diferentes funções que a álgebra proporciona. Assim, a BNCC (2018) reforça a ideia mencionando que:

É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2018, p. 271).

Destaca também que o pensamento algébrico é essencial para a utilização de modelos matemáticos para a compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, ainda, de situações e estruturas matemáticas, usando letras e outros símbolos. Tal desenvolvimento implica:

[...] que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2018, p. 270).

Segundo este documento, a noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três) e, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável, função, incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos.

No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. (BRASIL, 2018, p. 270-271).

A BNCC propõe que se inicie o ensino de funções nos anos finais Ensino Fundamental, mais especificamente no nono ano na unidade temática álgebra com os seguintes objetos de conhecimentos:

Funções: representações numérica, algébrica e gráfica; Razão entre grandezas de espécies diferentes; Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais; Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis; Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações. (BRASIL, 2018, p. 316).

Esses objetos de conhecimentos são vinculados as habilidades a serem desenvolvidas, são elas:

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. (BRASIL, 2018, p. 317).

Em resumo, houve mudanças nas abordagens encontradas na BNCC em relação aos PCN sobre funções. Dentre as observações citadas acima, é importante ressaltar para nossa pesquisa que o termo “Função” só aparece como objeto de conhecimento na BNCC para o nono ano do ensino fundamental.

O Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), para os anos iniciais do Ensino Fundamental, 1º ao 5º ano, afirma que o objetivo do ensino de proporcionalidade está em desenvolver o pensamento algébrico, a partir da observação de uma relação, identificação de um padrão, generalização desse padrão e de deduções a partir dessa generalização, sem o uso de letras, com ênfase na maneira de pensar. Nos anos finais do Ensino Fundamental, 6º ao 9º ano, as atividades que envolvem álgebra devem retomar, aprofundar e ampliar o que foi estudado nos anos iniciais. Nessa etapa, os estudantes deverão:

[...] compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão: estabelecer uma generalização de uma propriedade; investigar a regularidade de uma sequência numérica; indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica; estabelecer a variação entre duas grandezas. Para tanto, é necessário que os estudantes estabeleçam conexões entre incógnita, equação, variável e função. (SÃO PAULO, 2019, p. 320)

Esses aspectos estão vinculados ao desenvolvimento da competência 6 de matemática do Currículo Paulista (2019).

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (SÃO PAULO, 2019, p.305).

Contudo, o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) está de acordo com a organização que a BNCC (BRASIL, 2018) propõe e aborda a introdução do conceito de função no nono ano do Ensino Fundamental.

4 A PESQUISA

Neste capítulo da nossa investigação, serão apresentados os sujeitos da pesquisa, a descrição da aplicação, as análises e a validação da sequência.

4.1 Os sujeitos da pesquisa

Participaram dessa pesquisa oito alunos de uma turma do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública situada na zona leste de São Paulo com idades entre 14 e 15 anos. O grupo foi dividido em dois quartetos e a sua formação ficou a critério dos discentes, objetivando uma integração livre entre eles. Uma câmera foi instalada na mesa de cada grupo com o intuito de captar som e imagens durante o desenvolvimento das resoluções para possíveis transcrições.

Foi escolhido um quarteto do grupo de oito alunos, em razão das gravações do outro que foram prejudicadas devido uma falha no equipamento que só foi percebido após a aplicação.

Os nomes empregados neste estudo são fictícios e apenas servem para identificação dos sujeitos, dessa forma, o quarteto de alunos foi formado por:

- **Leo;**
- **Caio;**
- **João;**
- **Alana.**

4.2 Descrição da aplicação

Três atividades na versão impressa (Anexo A) foram desenvolvidas por dois grupos de quatro alunos realizadas como atividade extracurricular facultativa em quatro encontros presenciais com início às 13h30 (horário pós aula estabelecido pelo diretor da unidade escolar) com duração de aproximadamente 1h40. Esses encontros foram realizados nos dias 16, 17, 20 e 21 de dezembro de 2021. Os três primeiros foram destinados a realização das atividades e o quarto encontro foi atribuído a institucionalização do objeto matemático em questão.

No início do primeiro encontro, o pesquisador se apresentou e informou aos sujeitos de que as atividades realizadas seriam objeto de pesquisa acadêmica. Em

seguida, entregou cinco cópias da primeira atividade contento apenas o problema 1 para o quarteto e uma cópia para eles entregarem em seguida começaram a desenvolver. Durante o desenvolvimento foi observado que os sujeitos se envolveram no processo de resolução da atividade. Esse encontro passou do tempo previsto.

No segundo encontro, foram devolvidos aos alunos as atividades realizadas no encontro anterior, em seguida iniciaram a segunda atividade que é composta pelos problemas 2, 3 e 4 da sequência. Durante a resolução dos problemas 3 e 4, os alunos sentiram dificuldades e sentiram a necessidade de dialogaram com o pesquisador, tal fatos foi fundamental nas resoluções desses problemas. Nesse encontro, ficou evidente que os alunos ficaram mais à vontade e se envolveram mais no processo de resolução comparando com o primeiro encontro.

No terceiro encontro, foram entregues aos alunos todas atividades realizadas anteriormente e iniciaram a resolução da última atividade que é composta pelos problemas 5 e 6 da sequência. Esse encontro foi realizado no tempo menor que o estimado, na qual os sujeitos se envolveram com grande intensidade. Em todos os encontros, o quarteto formado pelos alunos recebia cinco cópias, uma para cada aluno e outra para entregarem ao pesquisador.

No quarto e último encontro, foram devolvidas a todos os alunos as atividades realizadas nos encontros anteriores, em seguida o pesquisador iniciou a institucionalização do objeto Função utilizando um projetor com o intuito de facilitar as interações. Em seguida descreveremos as análises e a validação da sequência.

4.3 Análise e validação da sequência

Esta sequência foi desenvolvida seguindo os critérios propostos na habilidade “(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.” (BRASIL, 2018, p. 317) da BNCC, tendo como objetivo analisar a construção de significados para o objeto Função.

Para compor essa sequência, foram formulados e/ou adaptados seis problemas a partir de situações que tratam de Funções Definidas por Várias Sentenças, com a intenção de propiciar interações em um ambiente em que o aluno se sentisse

desafiado a vivenciar uma situação adidática de ação através dos problemas em questão.

Análise a *priori* do problema 1

Problema 1

Para atrair mais clientes uma gráfica resolveu fazer uma promoção para impressões coloridas no papel sulfite. A promoção consiste em oferecer desconto para impressões de 101 a 200 páginas, e um desconto ainda melhor para impressões acima de 200 páginas. Observe os preços dessa gráfica abaixo.

PROMOÇÃO	
Impressão colorida	
Até 100 páginas	R\$ 0,15 por página
Entre 101 e 200 páginas	Desconto de R\$ 0,05 por página para impressões acima de 100 até 200 páginas
Acima de 200 páginas	Desconto de R\$ 0,10 por página para impressões acima de 200

De acordo com os valores expressos na tabela, determine:

- o preço final a ser pago por 60 impressões coloridas.
- uma expressão matemática para representar o valor em reais de até 100 impressões coloridas.
- o preço final a ser pago por 150 impressões colorida.
- uma expressão matemática para representar o valor em reais de até 200 impressões coloridas
- o preço final a ser pago por 220 páginas impressões coloridas.
- o preço $p(x)$ da impressão em função da quantidade x de páginas?
- represente graficamente em um plano cartesiano a expressão que encontrou.

O problema 1, tem como objetivo contribuir para a construção de significados para o conceito de Funções a partir de uma situação problema, trata-se de uma situação criada pelo pesquisador cujo objetivo é analisar como uma situação do dia a dia pode contribuir para o desenvolvimento da construção do conceito de Função a partir de Função Definidas por Várias Sentenças e relacionar os tipos de

representações desse objeto matemático. Esse problema traz um contexto algébrico com o qual os alunos já tiveram contato anteriormente que contribuirá na elaboração de estratégias que permitirá a realização de tratamento e conversão de registros. Os conhecimentos mobilizados são:

- Álgebra: Expressão algébrica, conceito de função polinomial do primeiro grau, estruturas aditivas e multiplicativas no conjunto dos números reais etc.;
- Geometria analítica: representação gráfica das funções de leis $a(x)$, noções de coordenadas, abscissa, ordenada de um ponto no plano cartesiano, eixos ortogonais, escalonamento, localizar pontos no sistema cartesiano;

Espera-se que os sujeitos mobilizem as propriedades da Função Definidas por Várias Sentenças e construam uma estratégia de resolução como a descrita abaixo.

Possível solução para o problema 1

Uma possibilidade de solução para o problema 1, item (a), para se obter o valor a ser pago por 60 impressões coloridas é $60 \cdot 0,15 = 9,00$, ou seja, o cliente pagará R\$ 9,00. Neste item, esperamos que os alunos encontrem a solução por operações, sem explicitar a expressão matemática.

Para o item (b), a expressão matemática que determina o valor em reais a pagar em função da quantidade de impressões é $p(x) = 0,15 \cdot x$. Esperamos que os alunos, pelo menos, verbalizem a situação e que talvez não apresentem essa representação, que deverá ser explicitada durante a discussão e socialização das resoluções. Acreditamos que possíveis obstáculos se dariam por ser tratar de um registro algébrico. Uma possível solução para este item seria " $p = 0,15 \cdot i$ ", pelo fato de que ainda não tiveram contato com notação de Função.

Para o item (c), o valor a ser pago por 150 impressões coloridas é R\$ 20,00. Na ausência dos obstáculos epistemológicos, uma possível solução seria " $100 \cdot 0,15 + 50 \cdot 0,10$ " uma outra resposta possível seria " $(150 - 100) \cdot 0,10 + 15,00$ ". Talvez essas soluções se dariam pelo fato de que permitimos o uso da calculadora. Mas expectamos também os possíveis erros relacionados as dificuldades de interpretação da tabela apresentada no problema. Um deles seria em não compreender os intervalos que certamente resultaria em erros, isso necessitaria de um momento socialização entre pesquisador e o grupo.

Para o item (d), a expressão que determina o valor a pagar em função da quantidade de páginas é $p(x) = (x - 100) \cdot 0,10 + 15,00$. Assim como no item (b), esperamos que os alunos apenas verbalizem a situação e que talvez ainda não apresentem essa representação, mesmo depois da socialização realizada durante o desenvolvimento do item (b). Esta representação deverá ser explicitada durante a discussão das resoluções. Acreditamos que possíveis obstáculos se dariam por se tratar de um registro algébrico. Uma possível solução seria " $p = 15,00 + i \cdot 0,10$ ", pelo fato de acreditarmos nos erros de interpretação da tabela em relação aos intervalos.

A solução do item (e), para se obter o valor a ser pago por 220 impressões coloridas é R\$ 26,00. Na ausência de obstáculos epistemológicos, uma possível solução seria " $15 + (0,10 \cdot 100) + (20 \cdot 0,05)$ " ou até mesmo " $(220 - 200) \cdot 0,05 + 25$ ". Novamente expectamos os possíveis erros relacionados as dificuldades de interpretação da tabela apresentada no problema. Um deles seria em não compreender os intervalos que certamente resultaria em erros, isso necessitaria de um novo momento de socialização entre pesquisador e o grupo.

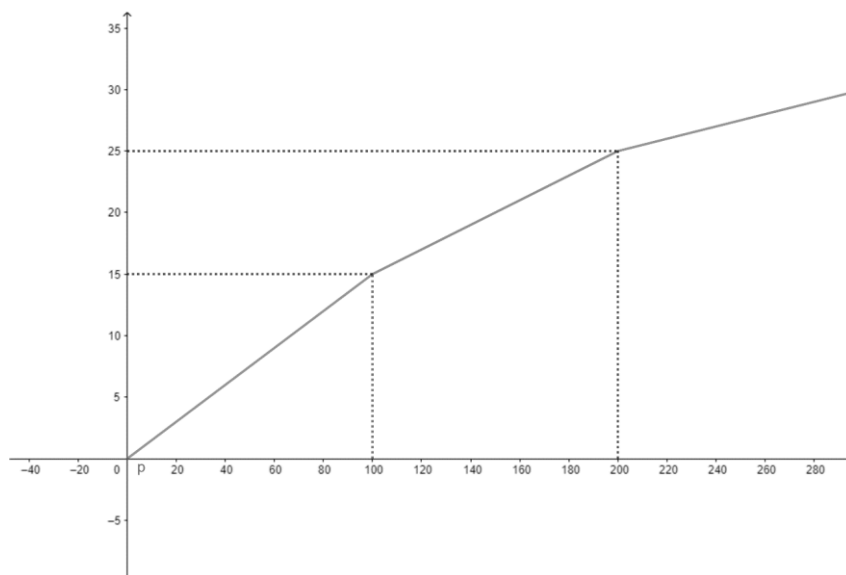
Para o item (f), a expressão que determina o valor a pagar em função da quantidade de páginas é " $p(x) = (x - 200)0,05 + 25$ ". Os itens anteriores têm o mesmo objetivo deste e como houveram socializações no desenvolvimento deles, esperamos que os alunos apresentem essa representação sem apresentar dificuldades.

Mas em relação a expressão que determina o valor (**p**) a ser pago em relação a quantidade de impressões coloridas

$$p(x) = \begin{cases} 0,15 \cdot x, & \text{se } 0 < x \leq 100 \\ (x - 100) \cdot 0,10 + 15, & \text{se } 100 < x \leq 200 \\ (x - 200) \cdot 0,05 + 25, & \text{se } x > 200 \end{cases}$$

Esperamos que serão necessários momentos de socialização para que os alunos possam desenvolver essa representação na qual acreditamos que não tiveram contato.

Para o item (g) a representação gráfica da expressão é dada por:

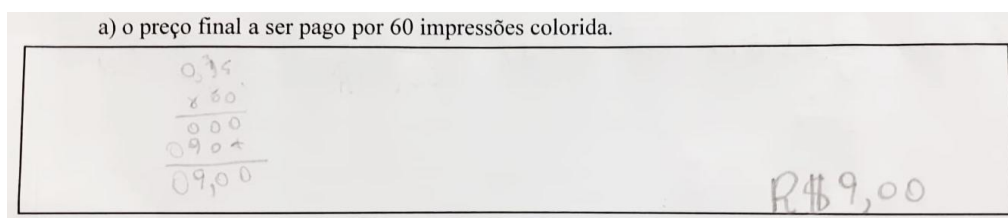


Acreditamos que os alunos façam a representação de um plano cartesiano e identifiquem os pontos (100, 15) e (200, 25) e que a representação da reta ocorra apenas na socialização da solução da questão.

Análise a posteriori do problema 1

No **primeiro encontro** de aproximadamente 1h40 de duração. Após a apresentação do pesquisador e uma conversa sobre a importância de participar de uma pesquisa, deram início a aplicação da sequência com a primeira atividade composta apenas com o **problema 1**. Os alunos iniciaram as leituras individualmente, dialogaram sobre a situação e todos chegaram em uma mesma conclusão para a solução do item (a) sem apresentar qualquer dúvida, (Figura 1) ao passarem para o item (b) demonstraram bastante dificuldades em representar o valor a ser pago por meio de uma expressão matemática.

Figura 1 - Exercício 1(a)



A aluna Alana leu novamente o item (b) mas agora em voz alta e logo o grupo concluiu que não conseguiriam resolver e resolveram chamar o pesquisador, “professor, não entendemos essa (b) aqui, dá expressão matemática” (Transcrição da aluna Alana). Na transcrição a seguir, são os argumentos estruturados pelo

pesquisador com os alunos afim de criar condições para os alunos encontrarem a solução.

Pesquisador: Qual operação vocês realizaram para encontrar a solução do item (a)?

Leo: Fizemos uma multiplicação de 0,15 por 60.

Pesquisador: Perfeito. Agora, seu eu perguntar para vocês o preço final de 50 cópias? E de 99 cópias?

Caio: É só multiplicar 0,15 por 50 e 0,15 por 99.

Pesquisador: Prefeito. Agora me diga uma expressão matemática que represente o preço final?

Alana: Não entendi ainda.

Caio: Eu entendi, é só multiplicar 0,15 por 1; 0,15 por 2; 0,15 por 3... até chegar no valor.

Pesquisador: E se a gente não sabe a quantidade de cópias?

João: A gente usa x.

Leo: Pode ser regra de três?

Pesquisador: Pode sim, mas vale lembrar que o item (b) pede apenas a expressão.

Alana: Professor eu ainda não entendi o que é expressão, dá um exemplo.

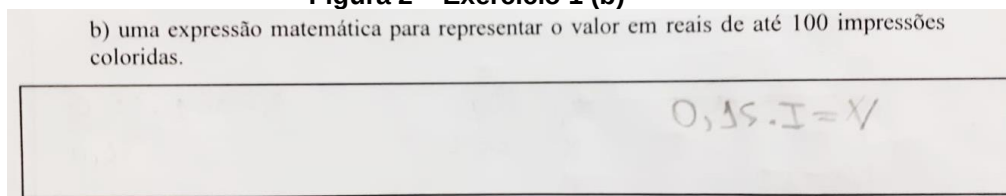
Leo: É tipo assim, uma letra, multiplicada por 0,15 que dá outra letra. Tipo o número de impressão multiplicada por 0,15 que dá o valor.

Pesquisador: Ótimo!

Leo: Mas essa conta é para até 100 páginas.

Logo após encontraram a seguinte solução para o item (b) do problema 1 conforme ilustra a figura 2.

Figura 2 – Exercício 1 (b)



Após chegarem nessa conclusão, o aluno Leo informou que a letra “V” está representando o valor a pagar e a letra “I” está representando o número de impressões.

Continuaram com a leitura individual do item (c), em seguida a aluna Lana perguntou aos colegas: “É só fazer 150 vezes 0,05” e o aluno João logo respondeu: “Não, por que o valor muda”. A partir daí iniciaram uma discussão que será transcrita a seguir.

Caio: Mas eu acho devemos resolver separadamente, você vai fazer com 0,15 até chegar a 101 cópias e depois faz com 0,05.

Alana: Não, quando você passa de 101 até 200 cópias você paga um valor, não é isso?

João: Não, de 101 à 200 você para 0,05.

Alana: Então, aqui são 150 cópias.

Caio: Mas as 100 cópias antes, a gente não paga R\$ 0,15?

Leo: Eu acho que não, é tipo aquelas promoções de pague 1 e leve 2. Entendeu?

Caio: Acho que você deve multiplicar o 101 por 0,15 e somar com a multiplicação de 49 por 0,05. Ai dá o resultado das 150 impressões.

Após alguns minutos de silêncio na tentativa de encontrar a solução, o aluno Caio chegou em uma conclusão e compartilhou com o grupo.

Olha, na tabela esta falando que até 100 cópias é R\$ 0,15 cada página, agora, acima de 100 cópias tem desconto de R\$ 0,05, ou seja, cada uma sai por R\$ 0,10. Então é só multiplicar 150 por 0,10 que encontraremos o valor a pagar. (Transcrição do aluno Caio)

Mas as dúvidas persistiram e resolveram consultar o pesquisador afim de obterem ajuda, que por sua vez, pediu as alunos que fizessem uma nova leitura com mais detalhes da tabela com os valores dos preços. Em seguida, o pesquisador fez a uma breve interpretação da tabela, houve então uma discussão e a partir desta o aluno Leo chegou em uma conclusão, “O meu resultado de tudo deu R\$ 20,00. Pois eu multipliquei 0,10 por 50 que resultou em R\$ 5,00, depois eu multipliquei 0,15 por 100 que deu RS 15,00 e somei os dois resultados.” O grupo concordou com a solução encontrada (Figura 3) e prosseguiram com a atividade.

Figura 3 - Exercício 1 (c)

c) o preço final a ser pago por 150 impressões colorida.

$\begin{array}{r} 0,10 \\ \times 50 \\ \hline 0,00 \\ 0,50 + \\ \hline 5,00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0,15 \\ \times 100 \\ \hline 0,00 \\ 0,00 + \\ 0,15 + \\ \hline 15,00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5,00 \\ + 15,00 \\ \hline 20,00 \end{array}$	R\$ 20,00.
--	--	--	------------

Ao iniciar o item (d), novamente os alunos apresentaram dificuldades ao representar a situação por meio de uma expressão matemática, a aluna Alana por exemplo, utilizou a mesma expressão obtida no item (b) para responder o item (d). Observando essa situação, o pesquisador iniciou uma conversa transcrita a seguir.

Pesquisador: Alana, eu poderia utilizar essa expressão para calcular o valor de 150 impressões que você encontrou no item (c)?

Alana: Hum! Creio que não.

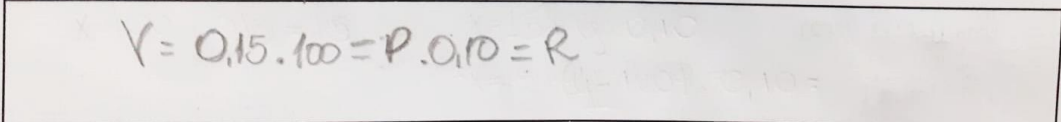
Pesquisador: Então você concorda comigo que esta solução não está de acordo com a pergunta.

Alana: Sim

Após o diálogo, o pesquisador se ausentou da mesa para os alunos pudessem discutir uma possível solução. Passaram alguns minutos e a aluna Alana perguntou ao grupo se haviam conseguido encontrar uma resposta, Leo respondeu: “Olha como eu pensei, multipliquei o 0,15 por 100, e somei com os da promoção que multipliquei por 0,10 e o resultado é o que o exercício pede, eu acho que é isso” e todos concordaram com sua solução. (Figura 4)

Figura 4 - Exercício 1 (d) - Leo

d) uma expressão matemática para representar o valor em reais de até 200 impressões coloridas



The image shows a handwritten mathematical expression in a rectangular box. The expression is $V = 0,15 \cdot 100 = P \cdot 0,10 = R$. Above the box, the text reads 'd) uma expressão matemática para representar o valor em reais de até 200 impressões coloridas'.

Nesse momento houve uma intervenção do pesquisador, que elogiou a resposta dada, mas informou que precisavam melhorar a representação que foi dada.

Pesquisador: A solução encontrada está ótima, mas precisamos melhorar essa representação começando com a primeira operação “0,15 . 100”, essa vocês já poderiam resolver.

Leo: Correto professor.

Pesquisador: Nessa expressão, você utilizou três sinais de igualdade, isso significa que o valor de “V”, “P . 0,10” e “R” são iguais a 15. Mas não foi isso que você disse anteriormente e como estamos tratando do mesmo problema, sugiro que utilizem as mesmas letras que vocês utilizaram nos itens anteriores para representar o valor a pagar (V) e o número de impressões (I).

Depois dessa breve intervenção, o aluno Leo compartilhou sua solução com os colegas, “ $V = 15,00 + I \cdot 0,10$ ”. Novamente houve a intervenção do pesquisador com o seguinte questionamento, “Utilizando essa expressão para resolver o item (c) vocês conseguem encontrar o mesmo resultado?” Ao realizarem as contas, perceberam que havia um erro na expressão e que valores representados pela letra (I) não poderiam ser menores que 100. Em seguida o pesquisador fez um outro questionamento, “Como podemos representar essa situação?” Após alguns minutos de discussão encontraram uma possível solução. (Figura 5)

possível encontrar o mesmo valor que vocês encontraram no item (f) utilizando a expressão encontrada no item (d)?

Leo: Ah! Agora entendi, obrigado professor.

Em seguida o grupo apresentou a solução como mostra a figura 7.

Figura 7 - Exercício 1 (f)

f) o preço $p(x)$ da impressão em função da quantidade x de páginas?

$$25 + (I - 200) \cdot 0,05 = V$$

O pesquisador entrevistou com o intuito de lembrá-los que a expressão apresentada só resolveria o problema nas compras acima de 200 impressões, em seguida o aluno Caio compartilhou sua solução com o grupo e todos concordaram. (figura 8)

Figura 8 - Exercício 1 (f) - Caio

g) represente graficamente em um plano cartesiano a expressão que encontrou.

$$(0,35 \cdot I) + (0,30 \cdot [I - 100]) + (0,05 \cdot [I - 200]) = V$$

Nesse instante o pesquisador entrevistou com o intuito de criar condições para buscarem a solução para próximo item e após os argumentos os alunos encontraram uma possível solução. (Figura 9)

Figura 9 - Exercício 1 (f) – versão final

$$V = \begin{cases} 0,35 \cdot I = V, & \text{se foi até 100 impressões.} \\ 0,30 \cdot (I - 100) + 35 = V, & \text{se foi até 200 impressões.} \\ 0,05 \cdot (I - 200) + 25 = V, & \text{se foi mais que 200 impressões.} \end{cases}$$

Ao iniciar o desenvolvimento do ultimo item do problema 1, os alunos conversaram sobre a situação e explicitaram que seria tranquilo encontrar a solução. O pesquisador saiu da mesa e começaram a resolução desenhando o plano cartesiano, nesse momento perceberam que não era o que eles estavam pensando, quando a aluna Alana perguntou “Como vamos desenhar o gráfico?”, em seguida solicitou auxílio. O pesquisador ao reparar com a possível solução iniciou um diálogo com o grupo.

Pesquisador: Existem valores negativos para os possíveis preços a pagar ou para o números de impressões?

Caio: Não.

Pesquisador: Então podemos melhorar o desenho desse plano cartesiano e ainda ganharmos espaço. O que acham?

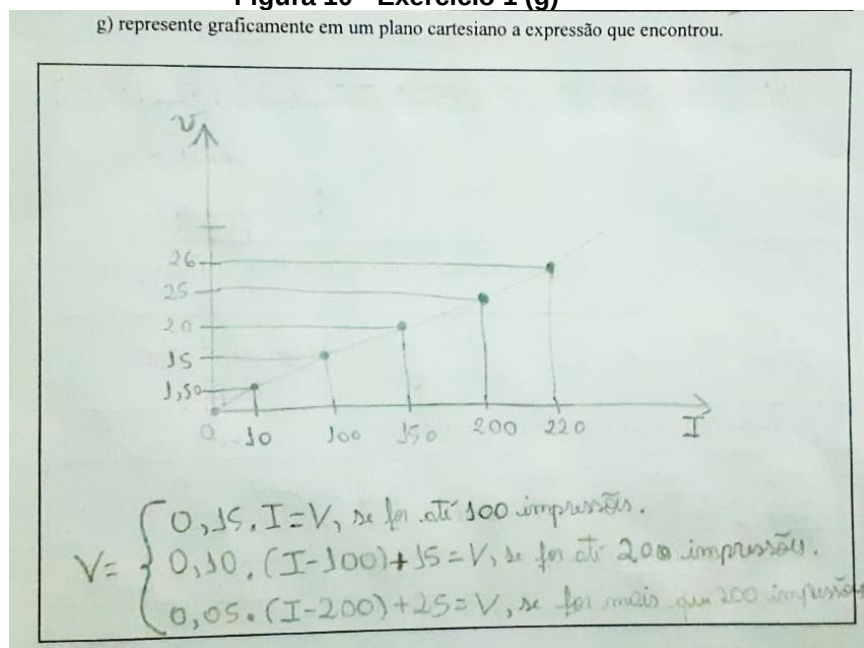
Leo: Perfeito, professor.

Pesquisador: Vocês não lembram como representar uma expressão matemática no gráfico?

Leo: Não.

Nesse instante o pesquisador percebeu que a carga da bateria do equipamento de gravação estava acabando, por isso, precisou se ausentar da sala para encontrar uma extensão elétrica afim de recarregar a bateria do equipamento. Enquanto isso, o aluno Caio encontrou uma solução e compartilhou com os alunos e discutiram outras possíveis soluções mas não entraram em um acordo comum. Depois de resolver a situação do equipamento, o pesquisador retornou a mesa do grupo e eles apresentaram suas diferentes respostas. A resolução do aluno Leo foi a que mais se aproximou da solução do item. Novamente o pesquisador precisou fazer uma intervenção com o intuito dos alunos encontrarem um caminho para a solução. Após alguns minutos o grupo entrou encontrou uma possível solução. (Figura 10)

Figura 10 - Exercício 1 (g)



Após a resolução desse item, decidiram utilizar a atividade que o aluno Leo estava respondendo. Realizaram os ajustes finais e entregaram ao pesquisador, que nesse momento agradeceu a presença de todos e reforçou a importância de participar de uma pesquisa acadêmica.

Análise a priori do problema 2

Problema 2

O sistema de pagamento adotado por uma sorveteria consiste em cobrar pela quantidade de sorvete que cada cliente consome. Se o cliente consumir até 200g de sorvete pagará R\$ 5,00, mas se ultrapassar 200g pagará R\$ 5,00 mais R\$ 0,02 por grama que ultrapassar as 200g.

Baseado nessas condições, determine:

- a) quanto pagará um cliente que consumiu 400g de sorvete nessa sorveteria?
- b) quanto pagará um cliente que consumir 235g de sorvete?
- c) determine uma expressão matemática para representar o valor em reais em relação a quantidade de gramas para clientes que consumirem acima de 200g.
- d) represente graficamente em um plano cartesiano a expressão que encontrou.

O problema 2, assim como o problema 1, tem como objetivo contribuir para a construção de significados para o conceito de Funções a partir de uma situação problema, trata-se de uma situação criada pelo pesquisador cujo objetivo é analisar como uma situação do dia a dia pode contribuir para o desenvolvimento da construção do conceito de Função a partir de Função Definidas por Várias Sentenças e relacionar os tipos de representações desse objeto matemático. Esse problema traz um contexto algébrico com o qual os alunos já tiveram contato anteriormente que contribuirá na elaboração de estratégias que permitirá a realização de tratamento e conversão de registros. Os conhecimentos mobilizados são:

- Álgebra: Expressão algébrica, conceito de função polinomial do primeiro grau, estruturas aditivas e multiplicativas no conjunto dos números reais etc.;
- Geometria analítica: representação gráfica das funções de leis $a(x)$, noções de coordenadas, abscissa, ordenada de um ponto no plano cartesiano, eixos ortogonais, escalonamento, localizar pontos no sistema cartesiano;

Espera-se que os sujeitos mobilizem as propriedades da Função Definidas por Várias Sentenças e construam uma estratégia de resolução como a descrita abaixo.

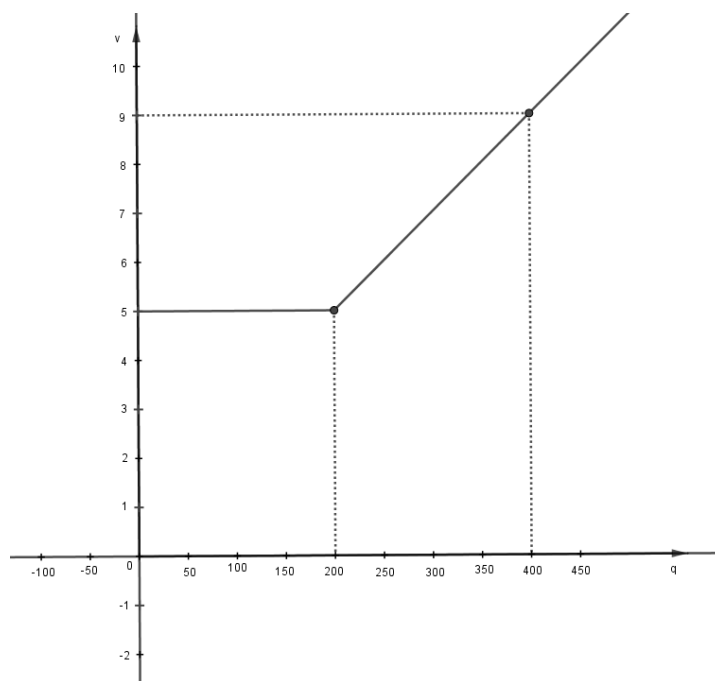
Possível solução para o problema 2

Em relação ao problema 2, item (a), o valor a ser pago por 400g de massa de sorvete é R\$ 9,00 e para o item (b) R\$ 5,70. Expectamos que os alunos durante o

desenvolvimento desses itens não apresentarão dificuldades para encontrar o valor a ser pago por 400g e 235g de massa de sorvete. Haja vista, que já realizaram o problema 1 com as socializações necessárias. Uma possível solução para o item (a) é “ $5,00 + 0,02(400 - 200) = 9,00$ ”. E para o item (b) “ $5,00 + 0,02(235 - 200) = 5,70$ ”. Nesses dois itens espera-se que os alunos os resolvam por operações, sem expressar explicitamente a expressão matemática que resolve o problema.

Para o item (c) a expressão que determina o valor (v) em relação a quantidade (q) de gramas é $v(q) = \begin{cases} 5 & \text{se } 0 < q \leq 200 \\ 5,00 + 0,02(q - 200) & \text{se } q > 200 \end{cases}$. Esperamos que os alunos, apresentem essa representação, já que foi discutida anteriormente durante o item (f) do problema 1. Mas talvez iremos precisar de um momento de socialização já que se trata de uma representação que só tiveram contato uma vez.

Para o item (d) a representação gráfica da expressão é dada por:



Acreditamos que os alunos façam a representação de um plano cartesiano e identifiquem os pontos (200, 5) e (400, 9) e que a representação da reta ocorra apenas na socialização da solução da questão.

Análise a posteriori do problema 2

No **segundo encontro** de aproximadamente 1h50 de duração o pesquisador agradeceu a presença de todos, devolveu a atividade 1 e os alunos iniciaram a

sequência com a segunda atividade composta com os **problemas 2, 3 e 4**. Por motivos pessoais, o aluno João não compareceu.

Iniciaram o **Problema 2** com leituras realizadas individualmente. Após, os alunos começaram a dialogar.

Leo: É a mesma coisa da atividade anterior.

Caio: Só mudou o produto.

Alana: Eu nem lembro mais o que fizemos, devemos fazer o que?

Caio: Os primeiros R\$ 5,00 ignora, o problema e as 200g que passar, aí você multiplica 0,02 pelas gramas que passaram.

Em seguida, todos concluíram o item (a) conforme a figura 11.

Figura 11 - Exercício 2 (a)

a) Quanto pagará um cliente que consumiu 400g de sorvete nessa sorveteria?

$$\begin{array}{r} 0,02 \\ \times 200 \\ \hline 0,000 \\ 0,000+ \\ \hline 0,004++ \\ 4,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} R\$ 5,00 \\ + R\$ 4,00 \\ \hline R\$ 9,00 \end{array}$$

Iniciaram o item (b) e logo todos chegaram a uma mesma possível solução. (Figura 12)

Figura 12 - Exercício 2 (b)

b) Quanto pagará um cliente que consumir 235g de sorvete?

$$\begin{array}{r} 0,02 \\ \times 35 \\ \hline 0,100 \\ 0,070+ \\ \hline 0,070 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,00 \\ + 0,70 \\ \hline 5,70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} R\$ 5,00 \\ + R\$ 0,70 \\ \hline R\$ 5,70 \end{array}$$

Ao iniciarem o item (c), perceberam que poderiam usar como base as resoluções da atividade 1. Enquanto os alunos Caio e Alana dialogavam sobre a situação, o aluno Leo apresentou sua solução e todos concordaram com seus argumentos. (Figura 13)

Figura 13 - Exercício 2 (c)

- c) Determine uma expressão matemática para representar o valor em reais em relação a quantidade de gramas para clientes que consumirem acima de 200g.

$$5 + (G - 200) \cdot 0,02 = V$$

se for acima de 200.

Nesse momento o pesquisador iniciou um breve diálogo com o grupo.

Pesquisador: O que a variável “G” e a variável “V” estão representando?

Leo: A letra “G” representa as gramas e a letra “V” o valor.

Pesquisador: Perceberam que existi uma relação entre essas variáveis?

Caio: Sim, uma depende da outra.

Pesquisador: Perfeito!

Leo: Agora é só fazer o gráfico como fizemos na atividade anterior.

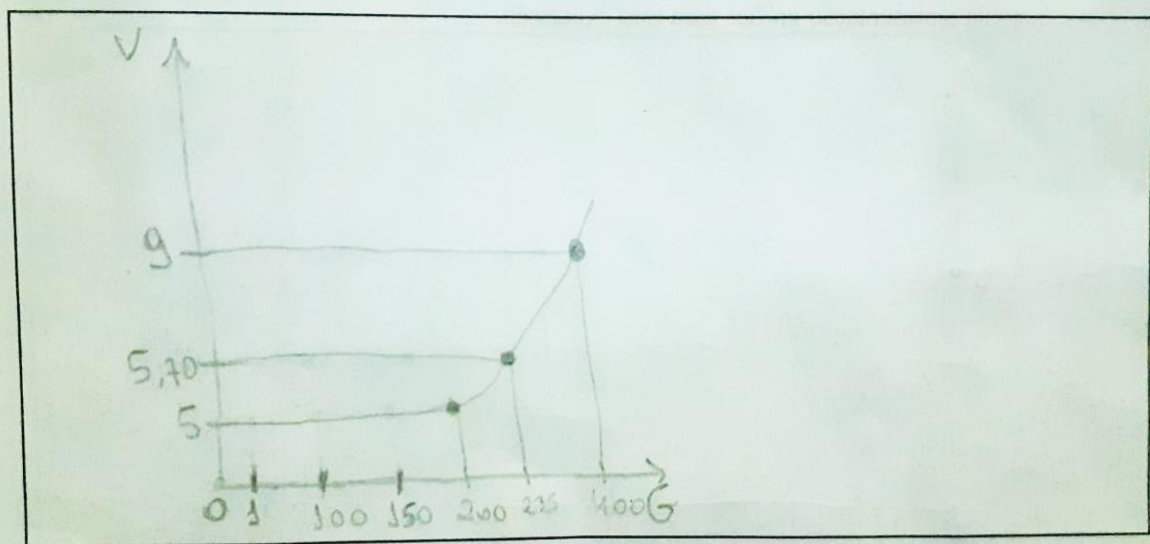
Alana: Podemos colocar que 200g vale R\$ 5,00 e depois um acima de 200g, podemos usar as 400g.

Leo: Podemos colocar 235g e 400g.

Após esse diálogo, todos concordaram com o aluno Leo e encontraram a solução do item. (Figura 14)

Figura 14 - Exercício 2 (d)

- d) Represente graficamente em um plano cartesiano a expressão que encontrou.

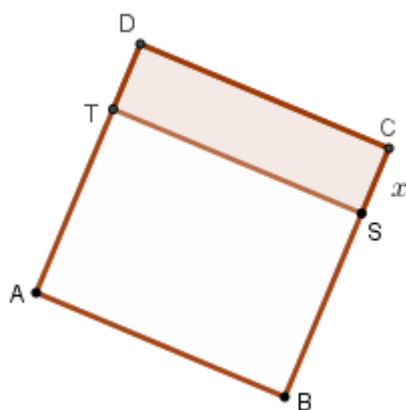


Em seguida, iniciaram o problema 3 realizando uma a leitura silenciosa e individual.

Análise a priori do problema 3

Problema 3¹

O quadrado ABCD, representado abaixo, tem lados medindo 7cm. O ponto S percorre o segmento CB e o ponto T percorre igualmente o segmento AD, determinando o retângulo TSCD. Considerando que o segmento SC mede x cm determine:



- a) a medida da área do retângulo TSCD quando $x = 0$?
- b) a medida da área do retângulo TSCD quando $x = 7$?
- c) uma expressão matemática para a medida da área do retângulo TSBA em função de x .
- d) um esboço da representação gráfica para essa expressão.

O objetivo do problema 3 é relacionar os tipos de representação de uma Função, compreender as componentes variação e dependência, apresentar a ideia de domínio, contradomínio e imagem de Função.

Este problema, mobilizam contextos de geometria plana, mais especificamente, o conceito de área do retângulo, que possivelmente já é familiar aos alunos em razão do envolvimento de vários domínios matemáticos (geometria, álgebra, números e operações).

Em relação as variáveis envolvidas, o problema envolve uma figura que representa um objeto geométrico que, *a priori*, é conhecido (quadrado). Mas conforme a situação, a figura que representa o objeto geométrico muda. Estas escolhas vão interferir na construção de estratégias de resolução de cada item das situações problema.

. Os conhecimentos mobilizados nesse problema são:

¹ O problema 3, foi adaptado de Nery e Jakubovic (1986, p. 48)

- Geometria plana: Quadrado, retângulo;
- Álgebra: Expressão algébrica, cálculos de medidas de áreas, conceito de função polinomial do primeiro grau, estruturas aditivas e multiplicativas no conjunto dos números reais etc.;
- Geometria analítica: Representação gráfica das Funções de leis $a(x)$, noções de coordenadas, abscissa, ordenada de um ponto no plano cartesiano, eixos ortogonais, escalonamento, localizar pontos no sistema cartesiano;

Globalmente, podemos dizer que a situação deve proporcionar condições para o aluno se envolver no cumprimento das seguintes tarefas:

- Interpretação do texto e das figuras;
- Calcular a medida $a(x)$ da área da configuração formada levando em consideração as restrições (intervalo onde são definidos os valores de x);
- Representar no sistema cartesiano o gráfico de lei de formação $a(x)$

Possível solução para o problema 3

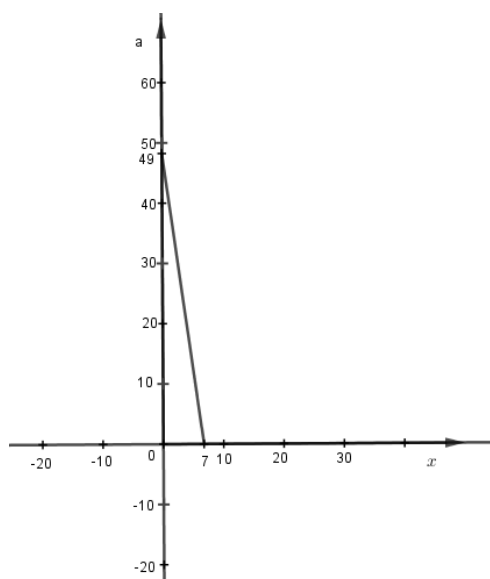
Esperamos que os sujeitos cheguem nas seguintes conclusões em relação ao problema 3:

No item (a) para $x = 0$, a área do retângulo também terá medida igual a zero. Esperamos que alguns alunos deem essa resposta, mas acreditamos que irão surgir obstáculos ao realizarem o cálculo para encontrar a área do retângulo e consequentemente terão a necessidade de interagirem para encontrarem uma solução ou até mesmo a intervenção do pesquisador.

No o item (b), para $x = 7$, o retângulo TSCD representa um quadrado de lado 7cm cuja área mede 49cm^2 . Expectamos que os alunos deem essa resposta, haja vista que já houve um momento de socialização durante a resolução do item anterior.

No item (c) a expressão matemática que resolve o problema é $a(x) = 7(7 - x) = -7x + 49$ para $0 < x < 7$. Acreditamos que nesse item haverá a necessidade de intervenção do pesquisador para realizar as socializações necessárias. Uma das possíveis soluções errada, ocorreria se os alunos atribuíssem valores para a medida do x . Esperamos que depois das socializações os alunos a expressem corretamente a solução do item.

Para o item (d) esperamos que façam um esboço similar ao representado abaixo.



Acreditamos que os alunos façam a representação de um plano cartesiano e identifiquem os pontos (7, 0) e (0, 49) com base nas respostas dos itens anteriores e que a representação da reta ocorra naturalmente.

Análise *posteriori* do problema 3

Ainda no segundo encontro, os alunos iniciaram o problema 3 com uma leitura silenciosa que logo foi interrompida pela a aluna Alana que perguntou: “Como calcular a área do retângulo?” Nesse momento o aluno Caio respondeu: “Não é a medida de um lado vezes o outro?”. Mas para sanar a dúvida, Alana pesquisou pelo celular e afirmou: “É base vezes altura”. Logo o aluno Leo chegou a conclusão que se o valor de “x” é zero, a área formada também seria zero para o item (a) como registrado na figura 15. Todos concordaram e deram continuidade a atividade.

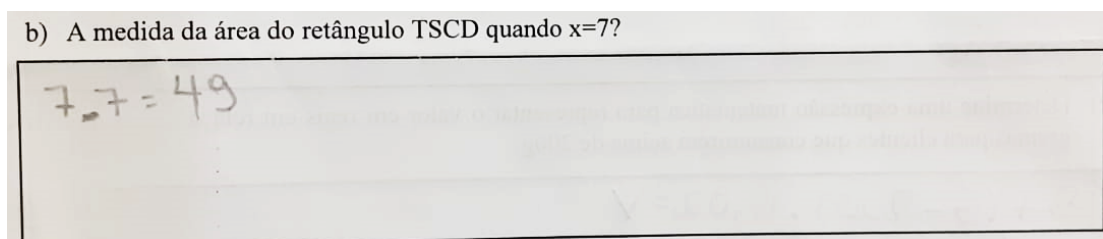
Figura 15 - Exercício 3 (a)

a) A medida da área do retângulo TSCD quando $x=0$?

$$7 \cdot 0 = 0$$

Iniciaram o item (b) sem apresentarem dificuldades e logo encontram a solução correta para este item. (Figura 16) Em seguida, no desenvolvimento do item (c) as dúvidas surgiram, não chegaram a uma conclusão e solicitaram apoio do pesquisador.

Figura 16 - Exercício 3 (b)



Leo: Encontramos essas três respostas aqui, alguma está certa?

Pesquisador: Sinceramente não. Mas vocês conseguem perceber que a área do retângulo depende do valor da medida do “x”?

Leo: Sim, por que é base vezes altura.

Pesquisador: Quanto mede a base e a altura?

Alana: Um lado mede 7cm, acho que o ouro também?

Pesquisador: Um lado realmente mede 7cm, mas o outro não pode ser.

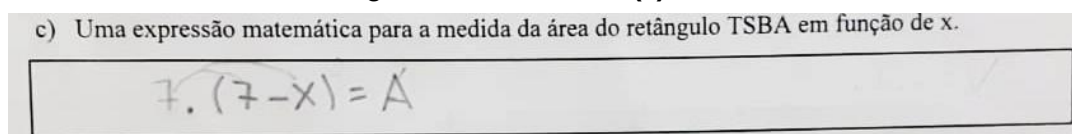
Leo: O outro é 5cm.

Pesquisador: Porque você acha que é 5cm?

Caio: Pelo desenho a medida menor parece ser 2cm, então 7 subtrai 2 fica 5.

Neste momento o pesquisador sentiu a necessidade de conversar com o grupo sobre a importância de defender uma afirmação com argumentos lógicos, a luz dos conceitos que a própria matemática disponibiliza e que não precisamos defender uma ideia simplesmente por “achismo”. Em seguida, o pesquisador voltou o momento de socialização e o aluno Leo rapidamente encontrou a solução correta para este item. (Figura 17)

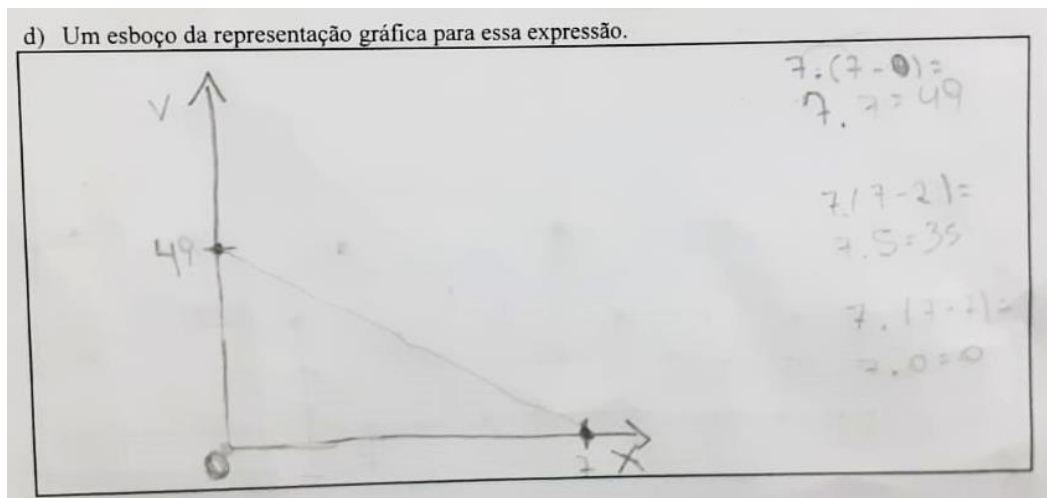
Figura 17 - Exercício 3 (c)



Ao iniciarem o item (d), que pede a representação gráfica do problema, o aluno Leo compartilhou duas coordenadas (0, 49) e (7, 0) que poderiam usar para

concluírem o gráfico e após uma breve socialização com o pesquisador o grupo encontrou uma solução e finalizaram o Problema 3 da sequência. (Figura 18)

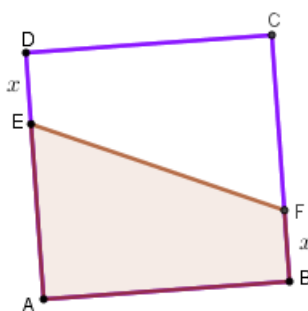
Figura 18 - Exercício 3 (d)



Análise *a priori* do problema 4

Problema 4²

Considerando que o quadrado $ABCD$ tem lados medindo 6 cm e os segmentos DE e FB medindo x cm determine uma expressão para calcular a medida da área pintada do quadrado em função de x e a represente graficamente.



Assim como o problema anterior, o objetivo do problema 4 é relacionar os tipos de representação de uma Função, compreender as componentes variação e dependência, apresentar a ideia de domínio, contradomínio e imagem de Função.

Este problema, também mobilizam contextos de geometria plana, mais especificamente, o conceito de área do trapézio. Em relação as variáveis envolvidas,

² O problema 4 foi adaptado de Nery e Jakubovic (1986, p. 49).

o problema envolve uma figura que representa um objeto geométrico que, *a priori*, é conhecido (quadrado). Mas conforme a situação, a figura que representa o objeto geométrico muda para o trapézio. Estas escolhas vão interferir na construção de estratégias de resolução de cada item das situações problema.

. Os conhecimentos mobilizados nesse problema são:

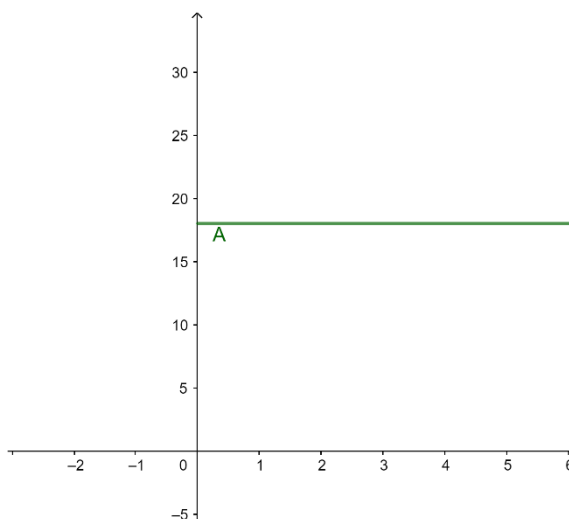
- Geometria plana: Quadrado, trapézio;
- Álgebra: Expressão algébrica, cálculos de medidas de áreas, conceito de função polinomial do primeiro grau, estruturas aditivas e multiplicativas no conjunto dos números reais etc.;
- Geometria analítica: Representação gráfica das Funções de leis $a(x)$, noções de coordenadas, abscissa, ordenada de um ponto no plano cartesiano, eixos ortogonais, escalonamento, localizar pontos no sistema cartesiano;

Podemos dizer que essa situação deve proporcionar condições para o aluno se envolver no cumprimento das seguintes tarefas:

- Interpretação do texto e das figuras;
- Calcular a medida $a(x)$ da área da configuração formada levando em consideração as restrições (intervalo onde são definidos os valores de x);
- Representar no sistema cartesiano o gráfico de lei de formação $a(x)$

Possível solução para o problema 4

No que se refere o problema 4, a medida da área pintada da figura que representa um trapézio de bases medindo x e $6 - x$ e altura medindo 6cm é $A(x) = 18$ para $0 < x < 6$. Como trata-se de um problema envolvendo a área de um trapézio, acreditamos que haverá a necessidade de uma intervenção para que o pesquisador possa realizar uma institucionalização local afim de oferecer subsídios para a continuidade da atividade. E assim, esperamos apresentarem sua representação gráfica como abaixo, identificando os pontos (0,18) e (6, 18).



Análise *posteriori* do problema 4

Ao iniciarem o último problema do segundo encontro (problema 4) os alunos realizaram uma longa conversa sobre a situação e não conseguiram entrar em um acordo em comum para a solução do problema e solicitaram apoio do pesquisador que iniciou uma o diálogo com uma pergunta.

Pesquisador: Qual é a pergunta do problema?

Leo: Ele está perguntando sobre a área do quadrado.

Pesquisador: Quadrado não, a área pintada não é um quadrado.

Leo: Um losango?

Pesquisador: Também não.

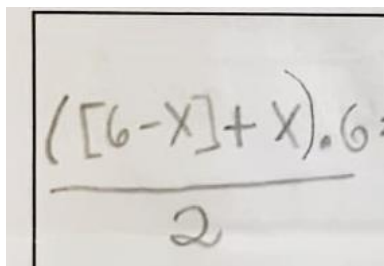
Caio: Um trapézio?

Pesquisador: Perfeito, mas como calcular a área de um trapézio?

Leo: Não sabemos calcular, quase não tivemos aula de geometria.

Neste instante o pesquisador sentiu a necessidade de apresentar alguns conceitos básicos de áreas de figuras plana afim de oferecer subsídios para o desenvolvimeto da atividade. Após, o aluno Caio identificou as bases do trapézio e logo encontrou uma possível solução. (Figura 19)

Figura 19 - Exercício 4 - Caio



$$\frac{([6-x] + x) \cdot 6}{2}$$

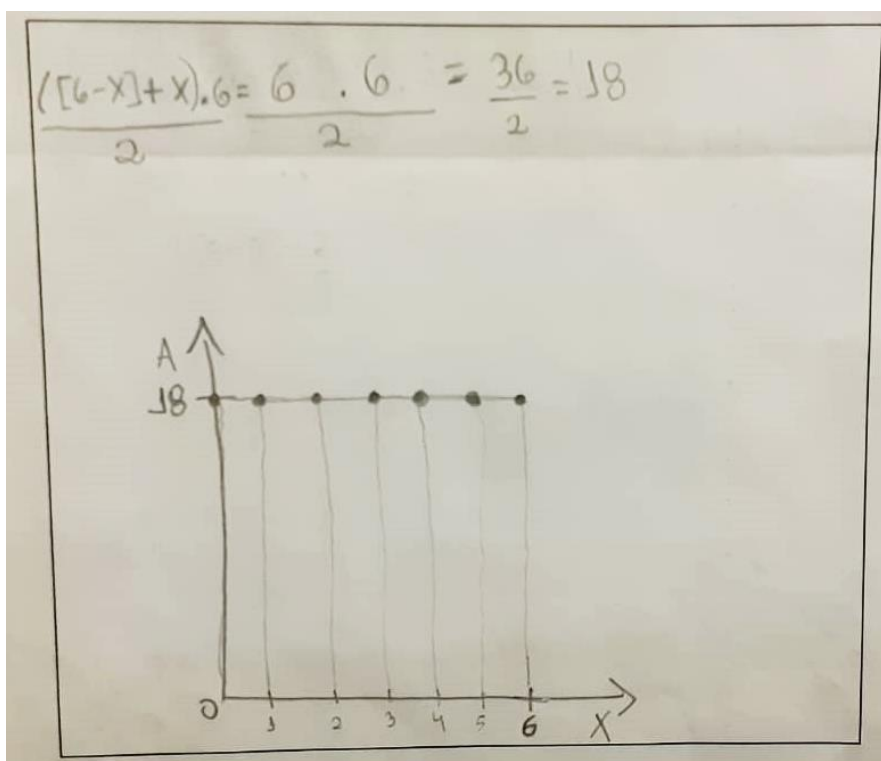
Em seguida, o aluno Leo apresentou ao grupo sua conclusão “Se os valores de “x” são iguais, então basta calcular a área do quadrado e dividir por 2 que encontraremos o resultado”. Dessa forma, iniciaram uma discussão que demorou alguns minutos e não conseguiram chegar em um acordo em comum e logo solicitaram apoio ao pesquisador.

Alana: Professor, não estamos chegando em um acordo aqui.

Pesquisador: As duas soluções apresentadas estão corretas, basta desenvolver a solução que o Caio encontrou e encontraremos a resposta do Leo.

Após o breve diálogo, os alunos encontraram a solução correta do problema e iniciaram a representação gráfica da situação. (Figura 20)

Figura 20 - Exercício 4

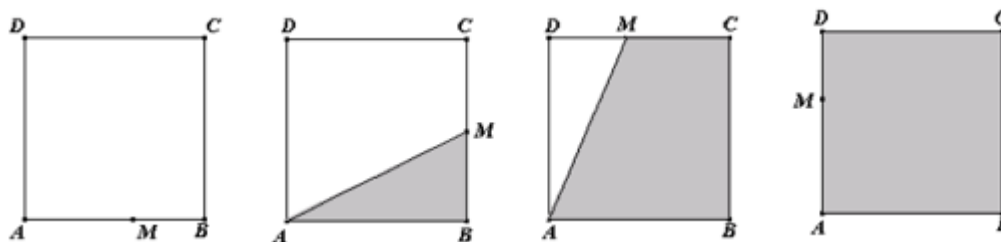


Observamos neste problema que os alunos já não apresentaram dificuldades em relação a construção do gráfico. Dessa forma, concluíram o problema 4 e entregaram uma cópia ao pesquisador. Novamente o pesquisador agradeceu a presença de todos e finalizou o segundo encontro.

Análise *a priori* do problema 5

Problema 5³

Um ponto M se desloca sobre os lados de um quadrado $ABCD$ cujo lado mede 4 cm (figura abaixo). A medida do trajeto, em centímetros, percorrido pelo ponto M a partir do ponto A chamaremos de x .



- Observe as figuras e expresse a medida da área pintada de cada figura, em função de x , considerando a posição do ponto M .
- Represente graficamente em um plano cartesiano a expressão obtida.

Os problemas 5 e 6 da sequência, possuem uma dinâmica de construção similar, o que difere um do outro é a figura que está sendo utilizada, por isso, as análises foram construídas juntas. O objetivo destes problemas é relacionar os tipos de representação de uma Função, compreender as componentes variação e dependência, apresentar a ideia de domínio, contradomínio e imagem, por fim, institucionalizar o conceito de Função.

Estes problemas mobilizam contextos de geometria plana, mais especificamente, o conceito de área de figuras planas (quadrado, triângulo retângulo, trapézio) em que os elementos que correspondem as medidas $a(x)$ de área têm sentido para os alunos, mas, em certas condições, as Funções geradas existem só para o professor.

³ Os problemas 5 e 6 foram adaptados de Xavier Neto (2021).

O contexto geométrico escolhido (área de triângulos, quadrado, trapézio) já é familiar aos alunos em razão de vários domínios matemáticos (geometria, álgebra, números e operações) envolvidos, diferentes níveis de interrogação e dos novos conhecimentos que esta situação vai convocar nos diferentes campos da matemática.

Em relação as variáveis envolvidas, os problemas envolvem uma figura que representa um objeto geométrico que, *a priori*, é conhecido (quadrado e retângulo). Mas conforme cada situação, a figura que representa o objeto geométrico muda (segmento, triângulo, trapézio). Estas escolhas vão interferir na construção de estratégias de resolução de cada item das situações problema.

Outra variável didática importante é a medida dos lados do quadrilátero. Esta escolha justifica-se pelo fato de minimizar o custo em termos de cálculos, pois o objetivo não é testar a capacidade do aluno em manipular números grandes, nem lidar com números fracionários e/ou decimais, mas, sim, de o aluno conseguir articular os dados do problema com os conhecimentos de seu repertório para montar estratégias que permitem solucionar as diferentes questões da situação-problema.

Os conhecimentos mobilizados serão:

- Geometria plana: Quadrado, retângulo, losango, trapézio, triângulo, conceito de área figura planas;
- Álgebra: Expressão algébrica, cálculos de medidas de áreas, conceito de função polinomial do primeiro grau, estruturas aditivas e multiplicativas no conjunto dos números reais etc.;
- Geometria analítica: Representação gráfica das Funções de leis $a(x)$, noções de coordenadas, abscissa, ordenada de um ponto no plano cartesiano, eixos ortogonais, escalonamento, localizar pontos no sistema cartesiano;

Globalmente, podemos dizer que a situação deve proporcionar condições para o aluno se envolver no cumprimento das seguintes tarefas:

- Interpretação do texto e das figuras; calcular o comprimento da trajetória de M;
- Determinar as diferentes configurações (segmento, triângulo, trapézio e a figura original) são formadas de acordo com a posição do ponto M;
- Calcular a medida $a(x)$ da área da configuração formada levando em consideração as restrições sobre a trajetória x (intervalo onde são definidos os valores de x) do ponto M verificar;

- Representar no sistema cartesiano o gráfico de lei de formação $a(x)$

A realização das tarefas envolvidas amplia a situação didática de modo que outros elementos matemáticos (cálculo de medidas de áreas de figuras planas, métodos de resolução) em diferentes campos da matemática (geometria plana, geometria analítica, álgebra, o campo das Funções), possam ser trabalhados do ponto de vista do significado e da técnica de resolução.

Possível solução para o problema 5

Em relação ao problema 5, para a primeira figura, enquanto o ponto M percorrer o segmento AB , isto é, $0 \leq x \leq 4$ a expressão deve ser $a(x) = 0$. Esperamos aqui realizar uma possível intervenção para um momento de socialização. Acreditamos que irão sentir dificuldades na interpretação do problema e após encontrariam a solução.

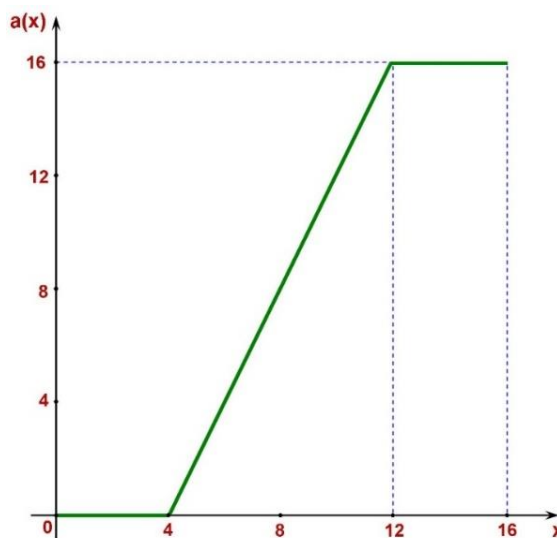
Na segunda figura, enquanto o ponto M percorrer o segmento BC , isto é, $4 < x \leq 8$, sua figura parte colorida é representada pelo triângulo retângulo ABM , de catetos medindo 4 e $x - 4$, que remetem à expressão $a(x) = \frac{4(x-4)}{2} = 2x - 8$ para representar a medida da área de tal triângulo. Presumimos que, baseados nos problemas anteriores, os alunos irão apresentar dificuldades para resolver esta questão. Como trata-se de uma situação envolvendo a área do triângulo, acreditamos que haverá a necessidade de realizar uma institucionalização local.

Na terceira figura, o ponto M percorre o segmento CD , ou seja, $8 < x < 12$, a parte colorida do quadrado é representada pelo trapézio $ABCM$, que terá a medida de sua área expressa por $a(x) = \frac{(4+x-8)4}{2} = 2x - 8$. Acreditamos que os alunos possam encontrar essa solução, haja vista que já realizaram o problema 4 que trata de área de trapézio e participaram da institucionalização local da situação anterior.

Na quarta figura, o ponto M percorre o segmento DA , ou seja, $12 \leq x \leq 16$ e a parte colorida será o próprio quadrado $ABCD$, logo a medida de sua área é expressa

por: $a(x) = 4 \times 4 = 16$. A resposta final esperada é:
$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 2x - 8 & \text{se } 4 < x < 12 \\ 16 & \text{se } 12 \leq x \leq 16 \end{cases}$$

Para o item (b) do problema esperamos que representem algo similar a seguinte representação gráfica:



Análise *posteriori* do problema 5

O **terceiro encontro** teve aproximadamente 2h de duração, iniciou-se com o pesquisador entregando as atividades resolvidas nos encontros anteriores e a última atividade a ser desenvolvida contendo os problemas 5 e 6 da sequência com todos os alunos presentes.

O aluno Caio iniciou o problema 5 fazendo uma leitura em voz alta, em seguida a aluna Alana fez a releitura para o aluno João que havia faltado no encontro anterior, o mesmo parecia um pouco confuso. Depois de alguns minutos tentando entender como iniciar a resolução do item (a) iniciaram um diálogo interessante transcrito a seguir.

Caio: A primeira figura vamos ter que calcular também? Pois não tem área.

Alana: Não, está pedindo apenas a área pintada. Como que calcula a área do triângulo mesmo? E do trapézio?

Leo: Soma a base maior com a base menor e dividir por dois.

Alana: Mas isso aqui é triângulo ou trapézio? (Ela estava se referindo ao triângulo)

Caio: Gente, é um triângulo, só tem 3 lados.

Pesquisador: E a segunda, a terceira figura?

Leo: Agora sim, trapézio e quadrado.

Pesquisador: Correto.

Nesse instante os alunos encontraram as anotações referente o encontro passado que dispunha as fórmulas para calcular a área dos quadriláteros, foi quando o aluno Leo iniciou a resolução utilizando a medida de 2cm como altura do triângulo. Descontente com o argumento do aluno Leo, o restante do grupo decidiu solicitar ajuda ao pesquisador.

Alana: Professor, essa medida vale 2cm? (Refere-se a medida da altura do triângulo formado) Pois o Leo disse que o ponto “M” está na metade.

Pesquisador: Mas está realmente na metade?

Leo: Sim, está na metade.

Nesse momento o pesquisador sentiu a necessidade de novamente falar sobre a importância de afirmar algo com argumentos lógicos e perguntou ao grupo, quais eram as informações que eles tinham referente o problema.

Alana: A base mede 4cm. Só isso.

Pesquisador: E o trajeto do ponto “M”, quanto mede?

Leo: Mede “x”

Pesquisador: Perfeito, agora precisamos saber apenas a medida da altura. Como vocês fariam?

Alana: Multiplicaria 4cm por “x”. Pois para calcular a área do triângulo devo multiplicar.

Pesquisador: Para encontrar a área do triângulo multiplicamos a base com a altura e dividimos por dois. Mas vocês tem a medida da base?

João: Sim, a base nos temos.

Pesquisador: E a medida da altura?

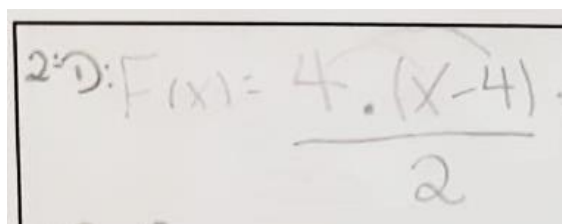
Alana: Fazemos $(4 - x)$?

Leo: Não, é $(x - 4)$, pois eliminaria a base e só ficaria a altura.

Pesquisador: Perfeito.

Após esse breve diálogo, o aluno Leo apresentou sua solução para a segunda figura do problema (Figura 21) e todos concordaram com ele e deram continuidade a atividade.

Figura 21 - Exercício 5 (a) - Leo

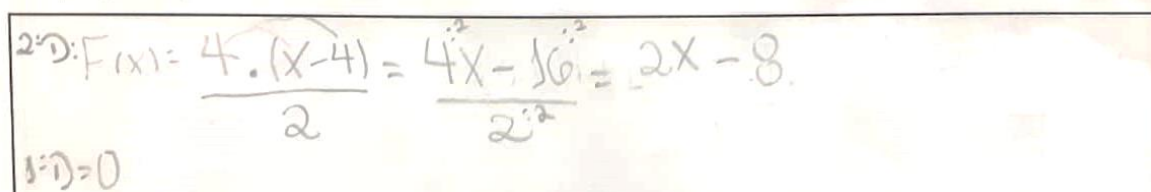


$$2^{\circ} D: F(x) = \frac{4 \cdot (x - 4)}{2}$$

Ao proseguirem, o aluno Leo alertou os colegas sobre a medida da base menor do trapézio formado, “Aqui devemos fazer $(x - 8)$ ”. Nesse momento o pesquisador perguntou se não era possível melhorar a resposta dada anteriormente. O aluno Leo, respondeu que era possível simplificar. E assim, apresentaram uma solução mais completa como consta na figura 22.

Figura 22 - Exercício 5 (a) – parte 1

- a) Observe as figuras e expresse a medida da área pintada de cada figura, em função de x , considerando a posição do ponto M.

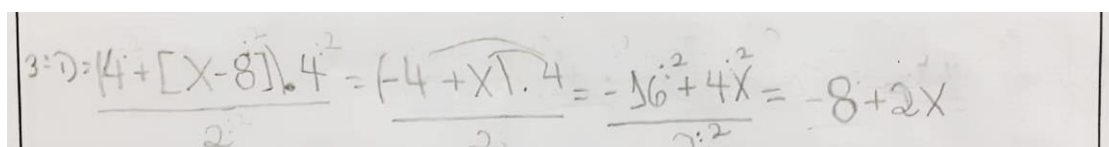


$$2^{\circ} D: F(x) = \frac{4 \cdot (x - 4)}{2} = \frac{4x - 16}{2} = 2x - 8.$$

$$1^{\circ} D: 0$$

Após a solução anterior apresentada, retornaram para o desenvolvimento da resolução da figura 3 do item (a) e após alguns minutos o aluno Leo apresentou a sua solução com alguns erros de simplificação, em seguida o pesquisador fez uma intervenção ao grupo e logo encontraram uma solução (Figura 23) que todos estavam de acordo.

Figura 23 - Exercício 5 – (a) parte 2



$$3^{\circ} D: \frac{(4 + [x - 8]) \cdot 4}{2} = \frac{(-4 + x) \cdot 4}{2} = \frac{-16 + 4x}{2} = -8 + 2x$$

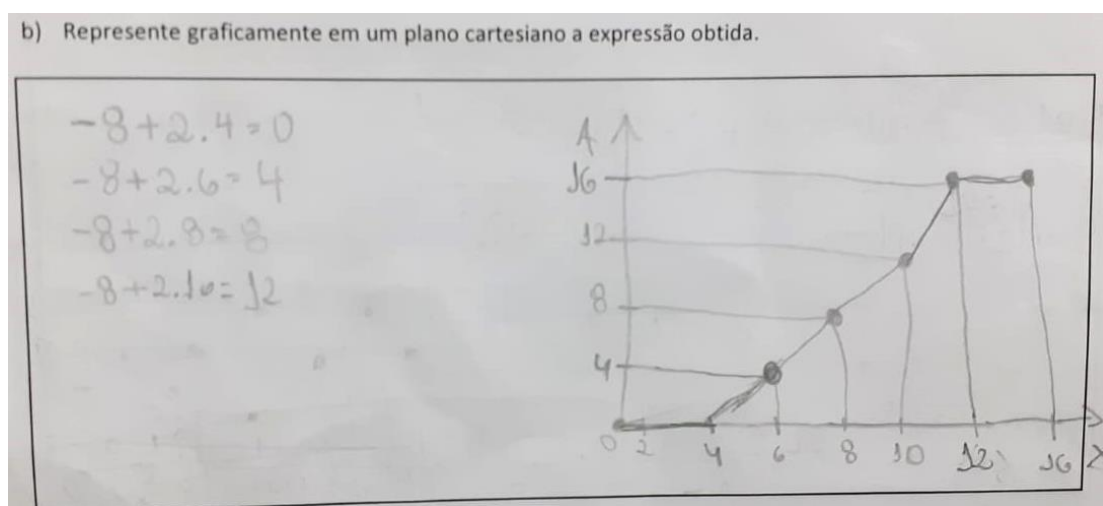
Iniciaram a resolução da última figura do problema 5, quando a aluna Alana perguntou: “Como calcular a área do quadrado mesmo”. Logo o aluno Leo responde: “Apenas multiplica 4 por 4”. (Figura 24) Dessa forma o grupo finaliza o item (a) e seguem para o próximo item.

Figura 24 - Exercício 5 (a) - parte 3

$$4 : 1 = 4, 4 = 16$$

Ao iniciarem a resolução do item (b), os alunos discutiram sobre a situação mas não conseguiram chegar em uma solução devido as dúvidas sobre os intervalos de cada sentenças matemáticas e pediram apoio ao pesquisador, que iniciou o diálogo com argumentos afim de oferecer subsídios para a construção do gráfico. Após o aluno Leo e Caio focaram no desenvolvimento do gráfico e os alunos Alana e João começaram a resolução do problema 6. Alguns minutos depois apresentaram a solução do item (b) (Figura 25) ao pesquisador e todos focaram no próximo problema.

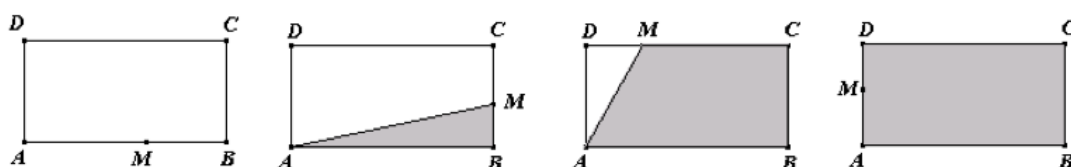
Figura 25 - Exercício 5 (b)



Análise *a priori* do problema 6

Problema 6

O ponto M , agora se desloca sobre os lados do retângulo $ABCD$ de lados medindo 4cm e 2cm como apresentado nas figuras abaixo.



Chamaremos de x a medida do trajeto, de A até M , em centímetros percorrido pelo ponto M .

a) observe as figuras acima e expresse a medida da área colorida de cada figura, em função de x , considerando a posição do ponto M .

b) represente graficamente em um plano cartesiano a expressão obtida.

Possível solução para o problema 6

Em relação ao problema 6, após as intervenções necessárias para as socializações e as realizações de institucionalizações locais no problema anterior, conjecturamos que os sujeitos mobilizem os esquemas do mesmo modo que ocorreu no problema 5.

Na primeira figura, o ponto M percorre o segmento AB , ou seja, $0 \leq x \leq 4$ e a medida da área é dada pela expressão $a(x) = 0$.

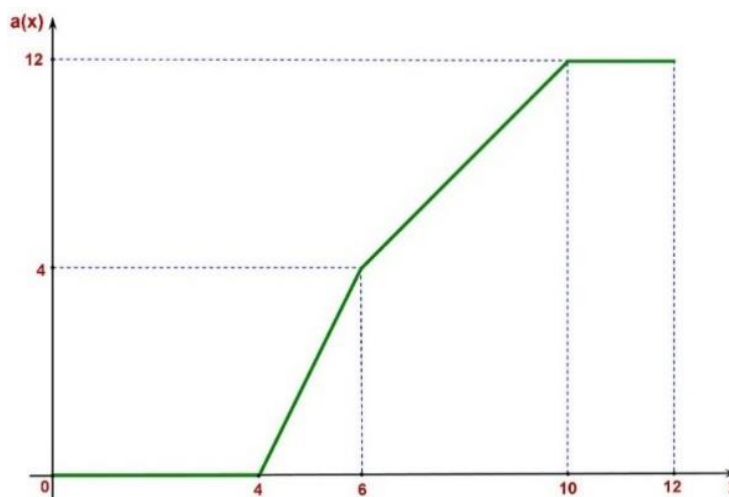
Na segunda figura, o ponto M percorre o segmento BC , ou seja, $4 < x \leq 6$ e a parte colorida é representada pelo triângulo retângulo ABM , com catetos medindo 4 e $x - 4$ cm, logo sua medida de é expressa por $a(x) = \frac{4(x-4)}{2} = 2x - 8$.

Na terceira figura, o ponto M percorre o segmento CD , ou seja, $6 < x < 10$ e a figura representada pela parte colorida é o trapézio $ABCM$, com bases medindo 4cm e $x - 8$ cm e altura 2cm, logo a medida de sua área é expressa por $a(x) = \frac{(4+x-6)2}{2} = x - 2$.

Na quarta figura, o ponto M se desloca pelo segmento DA , ou seja, $10 \leq x \leq 12$, e a parte pintada da figura é o próprio retângulo, cuja medida da área é $a(x) =$

$$4 \times 2 = 8. \text{ Assim, a resposta final esperada é que } a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 2x - 8 & \text{se } 4 < x \leq 6 \\ x - 2 & \text{se } 6 < x < 10 \\ 8 & \text{se } 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

No item (b) desse problema esperamos que os alunos representem:



Desse modo, esperamos que os alunos finalizem a sequência.

Após a resolução e discussão desses problemas faremos a institucionalização, que Segundo Almouloud (2007, p.40) “depois da institucionalização, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos”

Em relação aos problemas 1 e 2, iremos institucionalizar os conceitos de dependências entre variáveis, variável dependente e independente, porém intuitivamente. Por meio das respostas dos itens (a), (c) e (e) do problema 1 e (a) e (b) do problema 2, iremos salientar qual é a variável dependente, para então apresentar a variável que é considerada independente. Pretendemos também, nas repostas dos itens (b), (d) e (f) do problema 1 e item (c) do problema 2, apresentar a ideia da lei de formação e por fim, por meio das respostas do item (g) do problema 1 e item (d) do problema 2, iremos destacar que uma relação entre duas variáveis, pode ser representada por mais de um registro, neste caso, o registro algébrico e o registro gráfico e que estas são representações de um mesmo objeto matemático.

Em relação aos problemas 3 e 4, iremos destacar nas repostas dos itens (a) e (b) os conceitos de dependência entre as variáveis envolvidas, variável dependente e independente. No item (c) do problema 3 e na resposta do problema 4, iremos destacar também a ideia da lei de formação na relação entre duas variáveis e que existem algumas situações representadas por expressões algébricas que, a cada valor da variável independente corresponde um único valor da variável dependente. A partir desse momento, apresentaremos o conceito de domínio, contradomínio e imagem. Iremos reforçar também, os tipos de registros de representação do objeto

que foi utilizado. Importante ressaltar que, a palavra “função” só aparece a partir do problema 4.

Enfim, em relação aos problemas 5 e 6, iremos destacar tudo que já foi descrito anteriormente e institucionalizar o conceito de função, apresentando a seguinte definição:

Função é uma relação unívoca entre dois conjuntos, que transpõe uma relação de dependência entre duas variáveis e que atende às condições de existência e unicidade, expressando-se por meio de uma lei de formação cuja notação é: $f: A \rightarrow B$ que a cada elemento x pertencente à A associa o elemento $f(x)$ pertencente à B , ou seja, constitui os pares ordenados $(x, f(x))$.

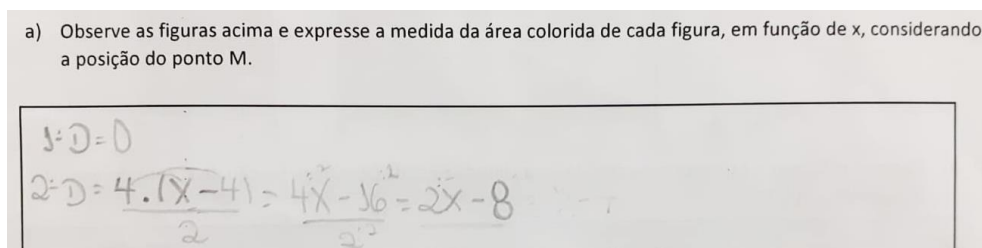
O conjunto A é chamado de domínio da função, o conjunto B de contradomínio.

Numa função de A em B há um relacionamento entre duas variáveis. A variável que assume valores em A é chamada de variável independente, enquanto a variável que assume valores em B é a variável dependente.

Análise posteriori do problema 6

No início do desenvolvimento do **problema 6**, os o alunos realizaram a leitura individualmente, após, conversaram sobre o item (a) e concluíram que era igual ao problema anterior, mas com uma pequena diferença. Então decidiram usar como base o problema anterior para o desenvolvimento da solução e logo encontraram as soluções da primeira e segunda figura do item (a). (Figura 26)

Figura 26 - Exercício 6 (a) - parte 1



No início da resolução da figura 3 do item (a) perceberam que a medida da base menor do trapézio formado era diferente do problema anterior e logo encontram a solução (Figura 27) para esta parte do item, mas novamente tiveram algumas

dificuldades na hora de simplificar havendo a necessidade de uma intervenção do pesquisador.

Figura 27 - Exercício 6 (a) - parte 2

$$37 = \frac{(4 + [x-6]) \cdot 4}{2} - \frac{(-2+x) \cdot 4}{2} = \frac{-8 + 4x}{2} = -4 + 2x$$

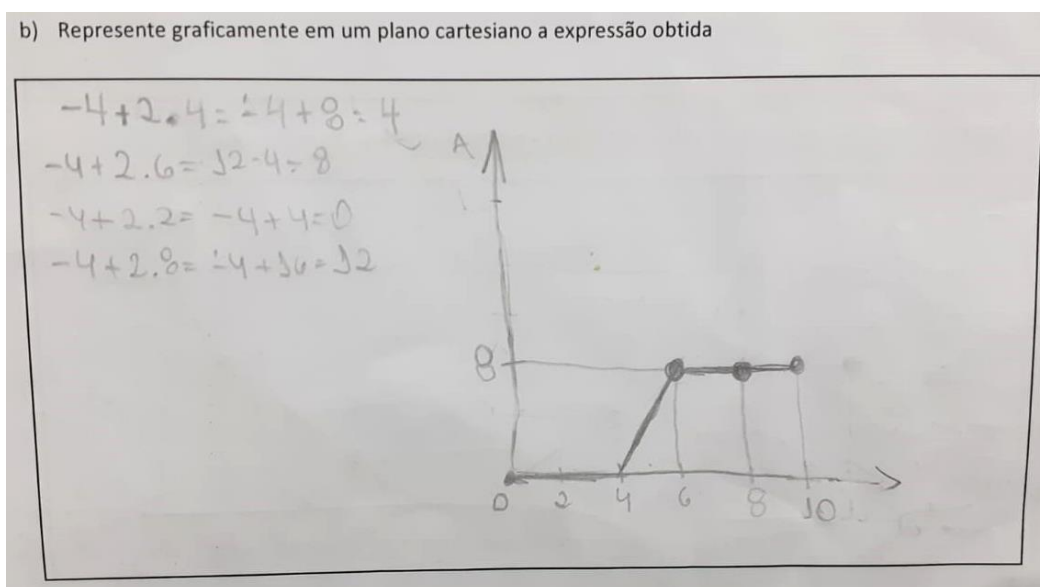
Na última figura do item (a), os alunos não encontraram dificuldades em encontrar a solução correta (Figura 28) e iniciaram o item (b).

Figura 28 - Exercício 6 (a) - parte 3

$$4 \div 1 = 4, 2 = 8$$

Após a apresentação da solução do item (a), iniciaram a construção do gráfico no item (b) sem apresentaram dificuldades e logo concluíram o último problema da sequência. (Figura 29)

Figura 29 - Exercício 6 (b)



Em seguida entregaram as atividades ao pesquisador que novamente agradeceu a presença de todos e comentou sobre o próximo encontro.

No último encontro realizamos a institucionalização do conceito de Função utilizando slides para apresentação dos problemas afim de facilitar a visualização e compreensão do objeto apresentado.

O pesquisador começou agradecendo a presença de todos e explicando a importância de participar de uma pesquisa acadêmica, em seguida deu início a apresentação e iniciou a institucionalização como previsto na análise *a priori*. Ao final, os alunos agradeceram o convite e elogiaram o pesquisador pelo trabalho prestado.

Algumas reflexões sobre a aplicação

A ideia de elaborarmos uma sequência didática embasados nas Teoria das Situações Didáticas e Teoria de Registros de Representação Semiótica com o intuito de apresentar o conceito de Função nos pareceu bem significativo no desenvolvimento das soluções dos problemas da sequência.

Observando e refletindo sobre a aplicação dos problemas da sequência e analisando o nosso referencial teórico é possível perceber a decomposição das fases da TSD e as conversões de registros da TRRS.

Em todos os problemas, de modo geral, durante as interações dos alunos no desenvolvimeto das soluções dos primeiros itens, as respostas surgiram sem a preocupação de justificar, graças à retroação do *milieu*. Nesses momentos ocorreram a fase de ação.

Ao iniciarem os itens seguintes, houveram a necessidade do pesquisador fazer intervenções para realizar socializações, promovendo um meio que propiciasse a eles momentos de investigação, evitando apresentações de resultados imediatos, como sugere Freitas (2012). Após essas intervenções, os alunos encontraram possíveis soluções, e conseqüentemente em alguns itens, converteram uma situação representada no registro natural para a sua representação no registro algébrico, segundo Almouloud (2007, p. 79) as representações “[...] facilita a compreensão ou a descoberta de novos conteúdos, principalmente para os sujeitos que estão se iniciando em tarefas que envolvem coordenação de registros”.

Após esses momentos, iniciaram-se a fase de formalização, quando os alunos começaram a justificar aos colegas suas possíveis soluções encontradas tomando como foco suas razões matematicamente convincentes.

No desenvolvimento dos ultimos itens, os alunos iniciaram a fase de validação a partir do momento em que discutiam e encontravam as coordenadas geométricas necessárias para a construção do registro grafico e consequentemente realizaram a conversão de registros de representações, agora do registro funcional para o registro gráfico.

Após a instituiconalização, acreditamos que, por meio do desenvolvimento da sequência os alunos construíram significados ao conceito de Função satisfazendo ao nosso objetivo de pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como objetivo geral analisar a construção e significados para o conceito de Função por meio de uma sequência didática que trata de Funções Definidas por Várias Sentenças para alunos do nono ano do Ensino Fundamental, usando como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (1986), a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval (1995) e embasado nos pressupostos da Engenharia Didática como metodologia.

Dessa forma, definimos nossa questão de pesquisa: **Uma sequência didática para o ensino de Função de uma variável real, com situações que tratam de Funções Definidas por Várias Sentenças matemáticas, permite que alunos do nono ano construam significado para esse conteúdo?** A elaboração e a delimitação desta questão, foram frutos de uma revisão de literatura que apontou a importância de iniciar a introdução do conceito de Função nos anos finais e que não há, nas bases de dados da CAPES, TEDE e Academia.edu, trabalhos que tratam desse assunto.

Com a intenção de aprofundar os estudos referentes a essa problemática, realizamos os estudos prévios de ordem histórica e fizemos análises dos documentos oficiais PCN+, BNCC e Currículo Paulista que regem a Educação Básica do Estado de São Paulo.

Dessa forma, realizamos a aplicação de nossa sequência didática em uma turma de oito alunos do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de São Paulo. Foram realizados quatro encontros presenciais de aproximadamente 1h40 no contra turno das aulas, iniciados em 17 de dezembro de 2021, onde os alunos se dividiram em dois quartetos. Duas câmeras foram utilizadas para a captação de áudio e imagens, mas uma delas apresentou problemas que só foi percebido após os encontros, por isso analisamos o desenvolvimento das atividades de apenas um quarteto.

No primeiro encontro os alunos realizaram apenas o problema 1 da sequência, no segundo encontro resolveram os problemas 2, 3 e 4, no terceiro encontro os problemas 5 e 6. No último encontro foi realizada a institucionalização do conceito de Função.

No desenvolvimento da sequência constatamos durante as interações, as fases de ação, formulação e validação da TSD e as conversões apontadas na TRRS que certamente foram fundamentais para a construção de significados do objeto estudado.

Com relação a escolha que fizemos para apresentar o conceito do Função embasados nos pressupostos da Engenharia Didática, consideramos válida a aplicação, haja vista que, os alunos foram construindo conhecimentos sobre o objeto Função no decorrer do desenvolvimento das soluções antes mesmo da institucionalização.

Após as análises dos resultados obtidos, pudemos responder a nossa questão de pesquisa, pois construimos significado para o ensino de Funções em alunos do nono ano por meio de situações que tratam de Funções Definidas por Várias Sentenças. Por isso, acreditamos que este estudo possa abrir possibilidades de novas pesquisas com propostas de construção para um novo referencial de orientação para aprendizagem do conceito de Função nos anos finais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. PR: UFPR. 2007.

ALMOULOU, S. A; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED. **Revista Eletrônica de Educação Matemática, REVEMAT**, v. 3, n. 1, p. 62-77, jan. 2008. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62>>. Acesso em: 28 out. 2020.

BASSOI, T. S. **Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático função em aulas do ensino fundamental**. 2006. Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2006.

BOTTA, E. S. **O ensino do conceito de função e conceitos relacionados a partir da resolução de problemas**. 2010. 426 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2010. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/91063>>.

BRASIL. M. E. Parâmetros Curriculares Nacionais. 1998. Disponível em: <<http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf> >. Acesso em: 20 out 2020.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCNs+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002.

BRASIL. M. E. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/matematica-no-ensinofundamental-anos-finais-unidades-tematicas-objetos-de-conhecimento-e-habilidades> >. Acesso em: 22 out. 2020.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FIGUEROA, T. P; ALMOULOU, S. A. O Milieu e o Contrato Didático-Análise de uma Aula Demonstrativa do Círculo da Matemática do Brasil. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, 2018. Disponível em: <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/4620>>. Acesso em: 22 out. 2020.

FREITAS, J.L.M. Teoria das Situações Didáticas. In: **Educação Matemática: uma nova introdução**. Org. MACHADO, S.D.A. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM. (Coleção do Professor de Matemática), v.1, 2001.

LOPES, W. S. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino**. 2003. Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003.

MARTINS, L. P. **Análise da dialética Ferramenta-Objeto na Construção do Conceito de Função**. 2006. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo 2006.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Educação e Matemática**, p. 3-9, 1990. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10451/4473>>. Acesso em: 20 out 2020.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias**. Tese de doutorado. São Paulo: PUC-SP, 2006.

SÃO PAULO. S. **Currículo Paulista**. Disponível em: <<https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wpcontent/uploads/sites/7/2019/09/curriculo-paulista-26-07.pdf>>. Acesso em: 22 out. 2020.

SANTOS, C. A. B; CURI, E. Alguns aspectos de articulação entre as teorias da didática francesa e suas contribuições para formação de professores. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v. 4.5, p. 53-66, jan. 2009. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2009v4n1p53>>. Acesso em: 28 out. 2020.

SILVA, N. A; FERREIRA, V. V; TOZETTI, K. D. Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau. In: Congresso Nacional de Formação de Professores, 13. 2015. Paraná. **Anais...** Paraná, Brasil: PUC-PR, 2015. p. 19951-19961.

XAVIER NETO, A. L. **Um estudo da Gênese Instrumental para função de uma variável real com várias sentenças**. 2016. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

XAVIER NETO, A. L. **Um estudo da Gênese documental de professores para função de uma variável real com várias sentenças**. 2021. 338 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

ANEXO A – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Problema 1

Para atrair mais clientes uma gráfica resolveu fazer uma promoção para impressões coloridas no papel sulfite, A promoção consiste em oferecer desconto para impressões de 101 a 200 páginas, e um desconto ainda melhor para impressões acima de 200 páginas. Observe os preços dessa gráfica abaixo.

PROMOÇÃO	
Impressão colorida	
Até 100 páginas	R\$ 0,15 por página
Entre 101 e 200 páginas	Desconto de R\$ 0,05 por página para impressões acima de 100 até 200 páginas
Acima de 200 páginas	Desconto de R\$ 0,10 por página para impressões acima de 200

De acordo com os valores expressos na tabela, determine:

- o preço final a ser pago por 60 impressões coloridas.
- uma expressão matemática para representar o valor em reais de até 100 impressões coloridas.
- o preço final a ser pago por 150 impressões coloridas.
- uma expressão matemática para representar o valor em reais de até 200 impressões coloridas
- o preço final a ser pago por 220 páginas impressões coloridas.
- o preço $p(x)$ da impressão em função da quantidade x de páginas?
- represente graficamente em um plano cartesiano a expressão que encontrou.

Problema 2

O sistema de pagamento adotado por uma sorveteria consiste em cobrar pela quantidade de sorvete que cada cliente consome. Se o cliente consumir até 200g de sorvete pagará R\$ 5,00, mas se ultrapassar 200g pagará R\$ 5,00 mais R\$ 0,02 por grama que ultrapassar as 200g.

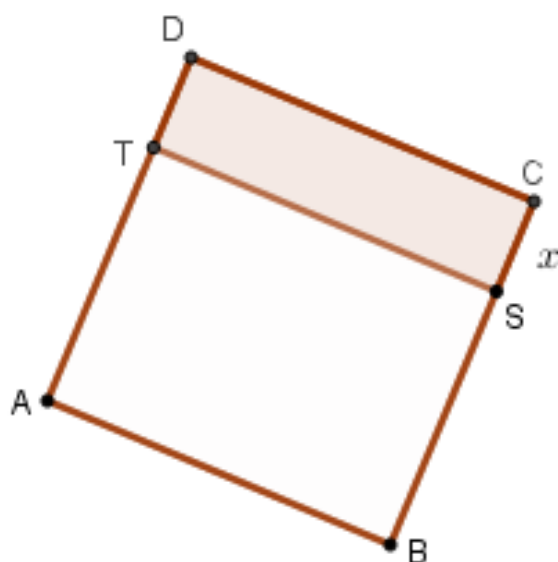
Baseado nessas condições, determine:

- quanto pagará um cliente que consumiu 400g de sorvete nessa sorveteria?
- quanto pagará um cliente que consumir 235g de sorvete?
- determine uma expressão matemática para representar o valor em reais em relação a quantidade de gramas para clientes que consumirem acima de 200g.

d) represente graficamente em um plano cartesiano a expressão que encontrou.

Problema 3

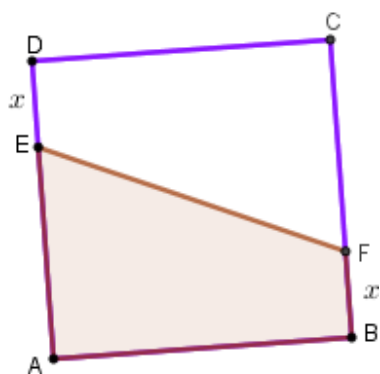
O quadrado $ABCD$, representado abaixo, tem lados medindo 7cm. O ponto S percorre o segmento CB e o ponto T percorre igualmente o segmento AD , determinando o retângulo $TSCD$. Considerando que o segmento SC mede x cm determine:



- a) a medida da área do retângulo $TSCD$ quando $x = 0$?
- b) a medida da área do retângulo $TSCD$ quando $x = 7$?
- c) uma expressão matemática para a medida da área do retângulo $TSBA$ em função de x .
- d) um esboço da representação gráfica para essa expressão.

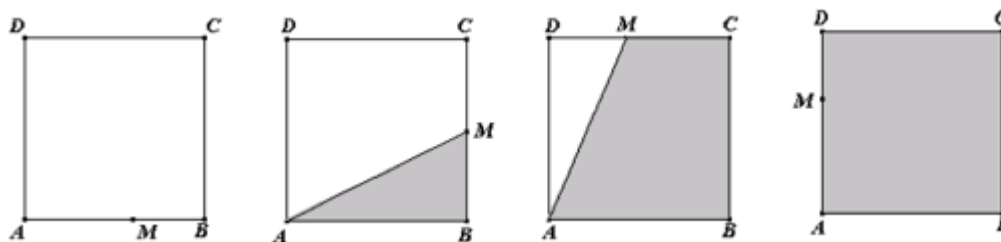
Problema 4

Considerando que o quadrado $ABCD$ tem lados medindo 6 cm e os segmentos DE e FB medindo x cm determine uma expressão para calcular a medida da área pintada do quadrado em função de x e a represente graficamente.



Problema 5

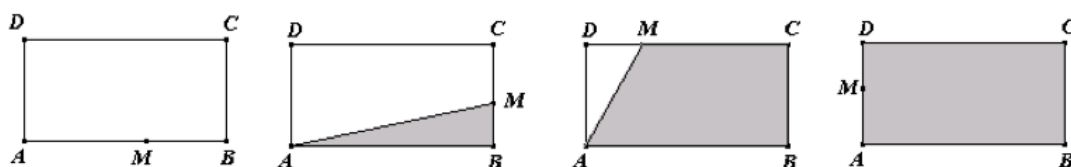
Um ponto M se desloca sobre os lados de um quadrado $ABCD$ cujo lado mede 4 cm (figura abaixo). A medida do trajeto, em centímetros, percorrido pelo ponto M a partir do ponto A chamaremos de x .



- observe as figuras e expresse a medida da área pintada de cada figura, em função de x , considerando a posição do ponto M .
- represente graficamente em um plano cartesiano a expressão obtida.

Problema 6

O ponto M , agora se desloca sobre os lados do retângulo $ABCD$ de lados medindo 4cm e 2cm como apresentado nas figuras abaixo.



Chamaremos de x a medida do trajeto, de A até M , em centímetros percorrido pelo ponto M .

- observe as figuras acima e expresse a medida da área colorida de cada figura, em função de x , considerando a posição do ponto M .
- represente graficamente em um plano cartesiano a expressão obtida.