

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Galvina Maria de Souza

**INTEGRAIS DUPLAS: um estudo à luz de uma articulação entre a Teoria
Antropológica do Didático e a Teoria A Matemática no Contexto das
Ciências**

DOCTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2022

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Galvina Maria de Souza

INTEGRAIS DUPLAS: um estudo à luz de uma articulação entre a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências

Tese apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima.

**São Paulo
2022**

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos de fotocopiadora ou eletrônicos.

Assinatura: _____ São Paulo, ____ / ____ / ____.

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

Souza, Galvina Maria de
INTEGRAIS DUPLAS: um estudo à luz de uma
articulação entre a Teoria Antropológica do Didático
e a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências. /
Galvina Maria de Souza. -- São Paulo: [s.n.], 2022.
387p. il. ; 29,7 x 21 cm.

Orientador: Gabriel Loureiro de Lima.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica
de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em
Educação matemática.

1. Integrais Duplas . 2. Teoria Antropológica do
Didático . 3. Teoria A Matemática no Contexto das
Ciências . 4. Praxeologia de Investigação Didática.
. I. Lima, Gabriel Loureiro de . II. Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, Programa de
Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III.
Título.

CDD

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Galvina Maria de Souza

INTEGRAIS DUPLAS: um estudo à luz de uma articulação entre a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências

Tese apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática, área de concentração Educação Matemática.

Aprovada em: 19/05/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima (Orientador) – PUC-SP

Profa. Dra. Barbara Lutaif Bianchini – PUC-SP

Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva – PUC-SP

Prof. Dr. Gilberto Januario – UFOP

Profa. Dra. Patricia Dalsoglio Garcia – UNICAMP

*A Célio;
a meus filhos: Adriel, Gabriel e Sophia;
e a meus pais: José e Áurea.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a cada uma das pessoas que, de alguma forma, me ajudou a trilhar o caminho que me permitiu concluir esta tese e, em especial, agradeço, de forma muito particular e carinhosa, àquelas que cito abaixo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima, pela sua compreensão, carinho, dedicação constante e pela paciência, que soube tão bem aconselhar-me durante esta jornada, me fez acreditar em mim, não me deixou desistir e me proporcionou ensinamentos que lembrarei para sempre.

Aos professores: Dr. Gabriel Loureiro de Lima, Dra. Barbara Lutaif Bianchini, Dra. Maria José Ferreira da Silva, Dr. Gilberto Januario, Dra. Patricia Dalsoglio Garcia, pelas valiosas contribuições na Qualificação e Defesa e pela generosidade em compartilhar suas opiniões e considerações.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, pelo conhecimento compartilhado.

À Suzane, pela disponibilidade com a qual me atendeu tão prontamente em todos os momentos.

Aos meus pais, José e Áurea, pelo dom da vida, por me educar pelos princípios da honestidade, responsabilidade, dedicação, respeito e retidão de caráter.

A Célio, Adriel, Gabriel e Sophia, pelas renúncias que se fizeram necessárias ao longo deste caminho, pela compreensão, amor, alegria e carinho de sempre.

À minha família, que me ensinou a amar incondicionalmente.

A Marcelo e Karla, pela acolhida aconchegante em seu chateau.

Aos colegas do Doutorado, em especial, à Janine e Rieuse pelo companheirismo e colo amigo e por não me deixarem desistir.

À Coordenação de Pessoal do Ensino Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro, sem o qual não teria sido possível desenvolver este trabalho de pesquisa.

“Quando acreditamos apaixonadamente em algo que ainda não existe, nós o criamos. O inexistente é o que não desejamos o suficiente”.

Franz Kafka

SOUZA, Galvina Maria. **Integrais Duplas**: um estudo a luz de uma articulação entre a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências. 2022. 387 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

RESUMO

Por meio desta pesquisa, de abordagem qualitativa, adotando a articulação da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências com a Teoria Antropológica do Didático como uma Praxeologia de Investigação Didática, efetivamos o estudo das dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático: realizar uma investigação que permita desenvolver uma proposta de ensino de Integrais duplas para estudantes do Curso de Engenharia Civil de modo a transformá-las em uma ferramenta de apoio a esses estudantes, visando ao exercício da profissão, para que possam interpretá-las e aplicá-las como um instrumento útil, sem perder de vista o caráter científico e o discurso formal a elas inerentes. O estudo da dimensão epistemológica nos permitiu identificar que os problemas que deram origem às integrais duplas emergiram de contextos sociais e culturais que se construíram a partir das necessidades relacionadas ao cálculo das medidas de áreas de superfícies tridimensionais, ao cálculo de medidas de volumes de sólidos; à necessidade de calcular a quantidade de calor que passa por um ponto de uma massa sólida e à necessidade de reduzir equações diferenciais a equações algébricas de soluções mais simples. Além disso, com base no estudo epistemológico realizado, elaboramos o Modelo Epistemológico de Referência (MER) que nos permitiu compreender e questionar o que está posto na instituição de referência considerada no estudo (uma instituição privada do norte de Minas Gerais). Por sua vez, o estudo das demais dimensões do problema didático evidenciou o modo como as integrais duplas são descritas e interpretadas no curso de Engenharia Civil da instituição de referência, bem como as condições e restrições que favorecem ou impedem a elaboração e implementação de uma Proposta Alternativa de ensino dessas integrais em contraposição ao Modelo Epistemológico Dominante (MED) nesse educandário. Como proposta alternativa, sugerimos um evento contextualizado – problema que desempenha o papel de ente integrador entre disciplinas da área de Matemáticas e da Engenharia – elaborado a partir de uma situação discutida na disciplina de Mecânica dos Fluidos, descrevendo um escoamento laminar incompressível de um fluido, que encontra aplicações na construção civil, em situações de escoamento de óleos lubrificantes muito viscosos e em baixa velocidade, camada limite e escoamento em meios porosos (solos).

Palavras-chave: Educação Matemática no Ensino Superior; Engenharia Civil; Integrais Duplas; Teoria A Matemática no Contexto das Ciências; Teoria Antropológica do Didático; Praxeologia de Investigação Didática.

SOUZA, Galvina Maria. **Double integrals**: a study in the light of an articulation between the Anthropological Theory of Didactics and the Theory of Mathematics in the Context of Science. 2022. 387 p. Thesis (Doctorate in Mathematics Education) — Faculty of Exact Sciences and Technology. Pontifical Catholic University of São Paulo. Sao Paulo.

ABSTRACT

Through this research, with a qualitative approach, adopting the articulation of the Theory of Mathematics in the Context of Sciences with the Anthropological Theory of Didactics as a Praxeology of Didactic Investigation, we carried out the study of the epistemological, economic-institutional and ecological dimensions of the didactic problem to carry out an investigation that allows the development of a proposal for teaching Double Integrals for students of the Civil Engineering Course in order to transform them into a support tool for these students, aiming at the exercise of the profession, so that they can interpret and apply them as a useful instrument without losing sight of the scientific character and the formal discourse inherent to them. The study of the epistemological dimension allowed us to identify that the problems that gave rise to the double integrals emerged from social and cultural contexts that were built from the needs related to the calculation of measurements of three-dimensional surface areas; the calculation of measurements of solid volumes; the need to calculate the amount of heat that passes through a point of a solid mass; and the need to reduce differential equations to algebraic equations with simpler solutions. In addition, based on the epistemological study carried out, we developed the Epistemological Reference Model (ERM) that allowed us to understand and question what is put in the reference institution considered in the study (a private institution in the North of Minas Gerais). In turn, the study of the other dimensions of the didactic problem showed how the double integrals are described and interpreted in the Civil Engineering course of the reference institution, as well as the conditions and restrictions that favor or prevent the elaboration and implementation of a Proposal Alternative for teaching these integrals as opposed to the Dominant Epistemological Model (DRM) in this institution. As an alternative proposal, we suggest a contextualized event - a problem that plays the role of an integrating entity between disciplines in the Mathematics and Engineering area - elaborated from a situation discussed in the discipline of Fluid Mechanics describing a laminar flow of an incompressible fluid that meets applications in civil construction, in situations of flow of very viscous lubricating oils and at low speed, boundary layer and flow in porous media (soils).

Keywords: Mathematics Education in Higher Education; Civil Engineering; Double Integrals; Theory Mathematics in the Context of Science; Anthropological Didactic Theory; Praxeology of Didactic Investigation.

SOUZA, Galvina María. **Integrales dobles**: un estudio a la luz de una articulación entre la Teoría Antropológica de la Didáctica y la Teoría de las Matemáticas en el Contexto de la Ciencia. 2022. 387 p. Tesis (Doctorado en Educación Matemática) — Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Pontificia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

RESUMEN

A través de esta investigación con enfoque cualitativo, adoptando la articulación de la Teoría A de las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias con la Teoría Antropológica de la Didáctica como Praxeología de la Investigación Didáctica, llevamos a cabo el estudio de las dimensiones epistemológica, económico-institucional y ecológica del problema didáctico: realizar una investigación que permita desarrollar una propuesta de enseñanza de Integrales Dobles para estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil con el fin de transformarlas en una herramienta de apoyo para estos estudiantes, asegurando el ejercicio de la profesión, de manera que puedan interpretarlas y aplicarlas como un instrumento de utilidad sin perder de vista el carácter científico y el discurso formal que les es inherente. El estudio de la dimensión epistemológica permitió identificar que los problemas que dieron origen a las integrales dobles surgieron de contextos sociales y culturales que se construyeron a partir de las necesidades relacionadas con el cálculo de medidas de superficies tridimensionales; el cálculo de medidas de volúmenes sólidos; la necesidad de calcular la cantidad de calor que pasa por un punto de una masa sólida; y la necesidad de reducir las ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas con soluciones más simples. Además, basándonos en el estudio epistemológico realizado, desarrollamos el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) que permitió comprender y cuestionar lo que dicta la institución de referencia considerada en el estudio (una institución privada del Norte de Minas Gerais). A su vez, el estudio de las demás dimensiones del problema didáctico demostró cómo se describen e interpretan las integrales dobles en la carrera de Ingeniería Civil de la institución de referencia, así como las condiciones y restricciones que favorecen o impiden la elaboración e implementación de una propuesta alternativa para la enseñanza de estas integrales en contraposición al Modelo Epistemológico Dominante (MED) en esta institución. Como propuesta alternativa, sugerimos un evento contextualizado —un problema que desempeña el papel de un ente integrador entre disciplinas del área de Matemáticas e Ingeniería— elaborado a partir de una situación abordada en la disciplina de la Mecánica de Fluidos que describe un flujo laminar de un fluido incompresible que se aplica en la construcción civil, en situaciones de flujo de aceites lubricantes muy viscosos y a baja velocidad, capa límite y flujo en medios porosos (suelos).

Palabras clave: Educación Matemática en la Educación Superior; Ingeniería Civil; Integrales Dobles; Matemática en el Contexto de las Ciencias; Teoría Antropológica de la Didáctica; Praxeología de Investigación Didáctica.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Paradigmas Educacionais que fundamentam a TMCC.....	86
Figura 2 – Relação das fases da TMCC e os problemas articulados a cada uma delas.....	104
Figura 3 – Fase Epistemológica da TMCC	109
Figura 4 – As três dimensões do problema didático e suas interfaces com as fases da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências.....	112
Figura 5 – Praxeologia de Investigação I	126
Figura 6 – Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte II	130
Figura 7 – Segmento de parábola $(AB)^-$	132
Figura 8 – Teorema da Quadratura do Arco da parábola por Arquimedes	132
Figura 9 – Construções Arco Parabólico.....	133
Figura 10 – Proposição 2 do livro <i>O Método</i> , de Arquimedes.....	136
Figura 11 – Construção realizada por Arquimedes para o cálculo da medida do volume da esfera	136
Figura 12 – Alavanca de Arquimedes	138
Figura 13 – Sólidos de Revolução.....	138
Figura 14 – Figura utilizada para designar a proporção da circunferência para o diâmetro ..	142
Figura 15 – Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte I.....	142
Figura 16 – Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte II	143
Figura 17 – Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte II	145
Figura 18 – Triângulo infinitesimal dos senos de um quadrante de um círculo.....	148
Figura 19 – Primeira regra de Integração de Agnesi.....	152
Figura 20 – Discussão da condição de existência da regra de integração 1 de Agnesi.....	152
Figura 21 – Método da curva logarítmica	152
Figura 22 – Notação de Leibniz	152
Figura 23 – Obra de François Lacroix publicada em 1806	155
Figura 24 – Superfície σ da forma $z = f(x, y)$ acima de uma região R do plano xy	156
Figura 25 – Medida de área dada por $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$	156
Figura 26 – Área de superfície	157
Figura 27 – Definição de uma função real de duas variáveis.....	159
Figura 28 – Integral Dupla de Euler	160
Figura 29 – Representação geométrica de $z = f(x, y)$	173
Figura 30 – Construção do cilindro reto.....	175

Figura 31 – Representação Geométrica a Integral: $\int_0^a \int_0^{a^2 - x^2} x + y \, dy \, dx$	183
Figura 32 – A Integral dupla estendida a uma região S	185
Figura 33 – Região S do plano xy , limitada: pela reta vertical $x = a$ à esquerda; pela reta vertical $x = b$ à direita; pela curva de equação $y = g(x)$, acima, e abaixo pela curva de equação $y = f(x, y)$	190
Figura 34 – Ilustração de funções que se projetam sobre o eixo das ordenadas segundo o intervalo $[c, d]$	191
Figura 35 – Elemento da área de uma região limitada em $[a, b]$	190
Figura 36 – Medida do comprimento de um arco de curva AB	194
Figura 37 - Região compacta S do plano cartesiano	196
Figura 38 – Elemento de medida de área de uma região polar	203
Figura 39 – Partição P	202
Figura 40 – Ilustração das regiões de integração	205
Figura 41 – (a) Representação de uma barra de massa m e comprimento L , fixo em seu centro o eixo em torno do qual ela pode executar movimento rotacional; (b) Representação de um disco centralizado em um eixo de rotação	211
Figura 42 – Síntese do MER	216
Figura 43 – Praxeologia de Investigação II	221
Figura 44 – Definições de Integral Dupla e Volume	240
Figura 45 – Regra do ponto médio para integrais duplas	242
Figura 46 – Definição de valor médio de uma função de duas variáveis reais	244
Figura 47 – Propriedades das integrais duplas	245
Figura 48 – Representação Geométrica da integral do Exemplo 3 da seção 15.1	251
Figura 49 – Representação Geométrica da situação apresentada no parágrafo anterior	252
Figura 50 – Caso especial para integrais Duplas de $f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$ definida em $R = [a, b] \times [c, d]$	250
Figura 51 – Definição de Integrais duplas em uma região qualquer, Stewart (2014, p. 887)	253
Figura 52 – Definição de Integrais duplas em uma região qualquer, Stewart (2014, p. 887)	256
Figura 53 – Propriedades 9 e 11, Stewart (2014, p. 892)	259
Figura 54 – Coordenadas retangulares (x, y)	261
Figura 55 – Retângulo Polar	261
Figura 56 - Divisão de R em sub-retângulos polares	261

Figura 57 – Definição de integral dupla em coordenadas polares e a fórmula para a conversão de uma integral iterada em coordenadas cartesianas em uma integral dupla em coordenadas polares quando uma função f está definida em uma região retangular R	262
Figura 58 – Exemplos 1, 3 e 4, Stewart (2014, p. 897-898).....	260
Figura 59 – Fórmulas para cálculo da massa total e da carga elétrica de uma lâmina com densidade variável	263
Figura 60 – Fórmulas para o cálculo de medidas de momentos e centro de massa de uma lâmina com densidade variável	264
Figura 61 – Fórmulas para o cálculo de Momentos de Inércia	266
Figura 62 – Fórmula para encontrar a medida da área de uma superfície D	268
Figura 63 – Praxeologia de Investigação III.....	286
Figura 64 – Tensão normal e tensão de cisalhamento na superfície de um elemento de um fluido	292
Figura 65 – Desenvolvimento do perfil da velocidade em um cano circular.....	297
Figura 66 – Volume de controle.....	297
Figura 67 – Representação de um elemento material em movimento.....	299
Figura 68 – O campo de velocidade do escoamento de um fluido.....	299
Figura 69 – Esquema utilizado na dedução da equação diferencial total que representa a aceleração de um elemento material em movimento.....	300
Figura 70 – Elemento material de um fluido em movimento.....	298
Figura 71 – Elemento material	298
Figura 72 – Orientação da tensão normal que atua sobre a face azul do elemento material..	299
Figura 73 – Tensão normal atuando sobre a face azul do elemento material.....	302
Figura 74 – Tensão normal atuando sobre as faces paralelas de um elemento material	302
Figura 75 – Forças normais que atuam nas faces de um elemento material de um fluido	299
Figura 76 – Tensões cisalhantes que agem na direção de x	300
Figura 77 – Tensões cisalhantes que agem na direção de y	300
Figura 78 – Tensões cisalhantes que agem na direção de z	300
Figura 79 – Representação Geométrica da força de efeito do campo gravitacional que atua sobre um elemento material de um fluido.....	300
Figura 80 – Modelagem Matemática de problemas físicos.....	306
Figura 81 – Geometria do problema.....	307
Figura 82 – Equação de Navier-Stokes	311
Figura 83 – Perfil da velocidade axial.....	316

Figura 84 – Pressão e tensões de cisalhamento viscoso agindo em um elemento infinitesimal de fluido cuja face inferior está em contato com a parede do tubo.....	314
Figura 85 – As seis componentes independentes do tensor de tensão viscosa listadas em coordenadas cilíndricas.....	315
Figura 86 – Síntese das Atividades do EC	318
Figura 87 – Tensão normal e tensão de cisalhamento na superfície de um elemento de um fluido	320
Figura 88 – Caracterização	321
Figura 89 – Material utilizado para a formalização dos conceitos elaborados na atividade 2	325
Figura 90 – Representação geométrica de todas as tensões normais que atuam nas faces de um elemento material na forma cúbica.....	325
Figura 91 – Representação Geométrica das tensões de cisalhamento que atuam sobre um elemento material de um fluido	326
Figura 92 – Representação Geométrica da força de efeito do campo gravitacional que atua sobre um elemento material de um fluido	326
Figura 93 – Coordenadas retangulares, Retângulo Polar	328
Figura 94 – Geometria do problema.....	328
Figura 95 – Coordenadas cilíndricas de um ponto P.....	329
Figura 96 – Geometria do problema.....	331

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Relação das investigações selecionadas na revisão de literatura desta tese	35
Quadro 2 – Categorias do conhecimento e seus ramos	62
Quadro 3 – Trechos associados a acepções de conhecimento e saber no âmbito da TMCC ..	68
Quadro 4 – Concepções assumidas na TMCC e diálogo com elementos da TAD – parte 1 ...	80
Quadro 5 – Concepções assumidas na TMCC e diálogo com elementos da TAD – parte 2 ...	80
Quadro 6 – Linhas de pensamento e de investigação nas quais se inserem a TMCC e a TAD	81
Quadro 7 – Definições assumidas na esfera da TMCC	88
Quadro 8 – Problemáticas e os problemas particulares a serem enfrentados com o auxílio da TMCC	102
Quadro 9 – Praxeologia de Investigação I – Dimensão epistemológica do problema didático ...	113
Quadro 10 – Praxeologia de Investigação II	117
Quadro 11 – Praxeologia de Investigação III.....	120
Quadro 12 – Atores e suas ideias precursoras associadas à integração.....	125
Quadro 13 – Problemas relacionados à construção das Integrais Duplas	128
Quadro 14 – Teoremas apresentados em Nova Estereometria dos Barris de Vinho, denominados por Struick (1969) como a Integral de Kepler.....	140
Quadro 15 – Praxeologias matemáticas do problema registrado na Figura 27	159
Quadro 16 – Problema das Temperaturas Terrestres.....	161
Quadro 17 – Principais problemas relacionados em Fourier (1878).....	161
Quadro 18 – Principais resultados evidenciados no estudo epistemológico	170
Quadro 19 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₁	172
Quadro 20 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₂	177
Quadro 21 – Praxeologia usada na questão técnica QT ₁	178
Quadro 22 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₃	180
Quadro 23 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₄	184
Quadro 24 – Praxeologia usada na questão teórica QT ₂	186
Quadro 25 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₅	187
Quadro 26 – Praxeologia usada na questão teórica QT ₃	188
Quadro 27 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₆	189

Quadro 28 – Praxeologia usada na questão teórica QT ₄	189
Quadro 29 – Praxeologia usada na questão teórica QT ₅	192
Quadro 30 – Praxeologia usada na questão teórica QT ₆	199
Quadro 31 – Praxeologia usada na questão técnica QT ₇	201
Quadro 32 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₈	203
Quadro 33 – Praxeologia usada na questão teórica QT ₇	205
Quadro 34 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₉	206
Quadro 35 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₉	208
Quadro 36 – Praxeologia usada na questão teórica Q ₈	210
Quadro 37 – Praxeologia usada na questão técnica Q ₁₁	212
Quadro 38 – Praxeologia usada na questão teórica QT ₉	214
Quadro 39 – Praxeologia usada na questão teórica QT ₁₀	212
Quadro 40 – Praxeologia usada na questão teórica QT ₁₁	217
Quadro 41 – Objetos matemáticos integrantes	219
Quadro 42 – Art.7º da Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019	226
Quadro 43 – Estrutura e Organização das disciplinas Matemáticas.....	227
Quadro 44 – Formulário do Plano de Ensino	228
Quadro 45 – Objetivo da Disciplina de Cálculo.....	229
Quadro 46 – Organização dos tópicos referentes às IM.....	230
Quadro 47 – Bibliografias Básica e Complementar da disciplina de Cálculo.....	233
Quadro 48 – Exemplos 1 e 2, Stewart (2014, p. 877)	241
Quadro 49 – Exemplo 3, Stewart (2014, p. 878).....	241
Quadro 50 – Exemplo 4, Stewart (2014, p. 879).....	244
Quadro 51 – Análises dos exercícios da seção 15.1	246
Quadro 52 – Exemplo 1, Stewart (2014, p. 878).....	249
Quadro 53 – Figuras ilustrativas da justificativa do Teorema de Fubini	250
Quadro 54 – Exemplo 3, Stewart (2014, p. 884-885)	251
Quadro 55 – Análises dos exercícios da seção 15.2	253
Quadro 56 – Exemplo 3, Stewart (2014, p. 890-891)	257
Quadro 57 – Análises dos exercícios da seção 15.3	259
Quadro 58 – Coordenadas retangulares, Retângulo Polar, Divisão de R em sub-retângulos polares.....	261
Quadro 59 – Análises dos exercícios da seção 15.3	261

Quadro 60 – Exemplo 3, Stewart (2014, p. 903).....	265
Quadro 61 – Exemplo 4, Stewart (2014, p. 903)	266
Quadro 62 – Exercícios propostos.....	267
Quadro 63 – Exemplos 4.....	269
Quadro 64 – Análises dos exercícios.....	269
Quadro 65 – Livros didáticos utilizados nas disciplinas de Mecânica dos Fluidos e Mecânica dos Sólidos da instituição de referência.....	272
Quadro 66 – Problema.....	293
Quadro 67 – Problema que desencadeou o Evento Contextualizado.....	317
Quadro 68 – Avaliação.....	341
Quadro 69 – Proposta de Cronograma para implementação do EC.....	342

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CAT	Certificado de Avaliação de Títulos
CIA	Contexto Interativo de Aprendizagem
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EC	Eventos Contextualizados
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
FACENS	Faculdade de Engenharia de Sorocaba
FAFIDIA	Faculdade de Filosofia e Letras de Diamantina
FEVALE	Fundação Educacional do Vale do Jequitinhonha
FUVJ	Universidade do Vale do Jequitinhonha
GAAL	Geometria Analítica e Álgebra Linear
GPEA	Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica
GT4	Grupo de Trabalho 04 da SBEM
ID	Integrais Duplas
IM	Integrais Múltiplas
MATIM	Modelo para análise de tarefas em torno de cálculos de IM
MEA	Modelo Epistemológico Alternativo
MED	Modelo Epistemológico Dominante
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MoDiMaCo	Modelo Didático da Matemática em Contexto
PCOC	Projetos de Construção de Objetos Concretos
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PI	Praxeologia de Investigação
PID	Praxeologia de Investigação Didática
PMD	Performances Matemáticas Digitais
PPA	Participação e Produção em Aula
PPC/EC	Projeto Pedagógico do Curso de Engenharia Civil
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SBEM-MG	Sociedade Brasileira de Educação Matemática de Minas Gerais
SIPEM	Seminário de Pesquisa em Educação Matemática
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TEC	<i>Tools for Enriching Calculus</i>
TMCC	Teoria A Matemática no Contexto das Ciências
UEMG	Universidade do Estado de Minas Gerais
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UFVJM	Universidade Federal dos Vales Jequitinhonha e Mucuri
UNIFIPMoc	Centro Universitário FIPMoc
UNIFRA	Centro Universitário Franciscano
Unigranrio	Universidade do Grande Rio

LISTA DE SÍMBOLOS

$\iint$	Integral Dupla
T	Tarefas
τ	Técnicas
θ	Tecnologia
Θ	Teoria

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
2 TRAJETÓRIA ACADÊMICO-PROFISSIONAL DA PESQUISADORA, A PROBLEMÁTICA DA PESQUISA E REVISÃO DE LITERATURA	27
2.1 Trajetória acadêmico-profissional da pesquisadora.....	27
2.2 Por que tomar as Integrais Duplas como objeto de estudo?	29
2.3 Os processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas: uma revisão de literatura	34
2.3.1 Seleção das referências.....	34
2.3.2 Investigações relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas	36
2.3.2.1 Considerações sobre as investigações analisadas.....	55
3 REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO	61
3.1 Diálogo entre a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências – aspectos teórico-metodológicos	62
3.1.1 Dimensão epistemológica do problema didático.....	72
3.1.2 Dimensão econômico-institucional de um problema didático	74
3.1.3 Dimensão ecológica de um problema didático.....	75
3.2 Aspectos teóricos e metodológicos e a construção do problema didático	77
3.2.1 A elaboração do problema didático e a construção do Bloco do Logos Científico da Articulação entre a TMCC e a TAD como uma PID	78
3.2.2 Bloco da <i>práxis</i> científica da articulação da TMCC com a TAD como uma PID .	100
3.2.2.1 Fase curricular	104
3.2.2.2 Fase didática	106
3.2.2.3 Fase epistemológica	107
3.2.2.4 Fase docente	110
3.2.2.5 Fase cognitiva.....	110
3.2.3 A articulação da TMCC com a TAD como uma Praxeologia de Investigação Didática – pressupostos metodológicos.....	113
4 DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA DAS INTEGRAIS DUPLAS	124
4.1 Técnica τ_{ia1}	127
4.2 Técnica τ_{ia2}	130
4.3 Técnica τ_{ia3}	131

4.4 Técnica τ_{Ia4}	172
5 ESTUDO ECONÔMICO-INSTITUCIONAL DO PROBLEMA DIDÁTICO	221
5.1 TÉCNICA τ_{Ib1}.....	224
5.2 Técnica τ_{Ib2}	235
5.2.1 A estrutura do livro-didático adotado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III.....	236
5.2.2 Análise da Seção 15.1 do livro de Stewart (2014)	238
5.2.3 Análise da Seção 15.2 do livro Stewart (2014)	248
5.2.4 Análise da Seção 15.3 do livro Stewart (2014)	255
5.2.5 Análise da Seção 15.4 do livro Stewart (2014)	261
5.2.6 Análise da Seção 15.5 do livro Stewart (2014)	265
5.2.7 Análise da Seção 15.6 do livro Stewart (2014)	271
5.3 Técnica τ_{Ib3}	274
5.4 Técnica τ_{Ib4}	275
5.5 Técnica τ_{Ib5}	277
5.5.1 Introdução.....	277
5.5.2 O Modelo Epistemológico Dominante (MED)	278
6 ESTUDO DA DIMENSÃO ECOLÓGICA DO PROBLEMA DIDÁTICO	283
6.1 Introdução.....	283
6.2 Técnica τ_{Ic1}.....	287
6.3 Técnica τ_{Ic2}.....	293
6.4 Técnica τ_{Ic3}.....	293
6.5 Técnica τ_{Ic4}.....	294
6.6 Técnica τ_{Ic5}.....	294
6.7 Técnica τ_{Ic6}.....	308
6.8 Técnica τ_{Ic7}.....	319
6.9 Técnica τ_{Ic8}.....	344
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	351
REFERÊNCIAS	362
ANEXO I – DCN CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA	375
ANEXO II – MATRIZES CURRICULARES I E II DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL DA INSTITUIÇÃO DE REFERÊNCIA	380
ANEXO III – AS INTEGRAIS DE KEPLER	384

ANEXO IV – TRADUÇÃO DOS TEOREMAS DE KEPLER.....	388
ANEXO V – SOLUÇÃO DO PROBLEMA MOVIMENTO DO CALOR.....	390

1 INTRODUÇÃO

Esta tese de doutorado é resultado de uma investigação a qual teve como objeto matemático as Integrais Duplas (ID) no contexto do curso de Engenharia Civil de uma instituição privada do norte de Minas Gerais¹, um estado brasileiro.

Apresentamos, neste capítulo, um panorama da investigação, que teve como propósito fazer um estudo que nos permitisse evidenciar as condições necessárias para uma abordagem de ID no curso de Engenharia Civil dessa instituição, estabelecendo um vínculo entre o conteúdo e as situações enfrentadas pelos estudantes em sala de aula e nas atividades laborais do engenheiro civil. Além disso, procuramos averiguar os dispositivos didáticos que possibilitam essa abordagem e as dificuldades dela decorrentes, a fim de elaborar uma proposta didática para o ensino dessas integrais.

Assim, iniciamos esta investigação conversando com os professores do curso de Engenharia Civil – que também são engenheiros – para entender como as integrais estão presentes na sua prática docente e na do engenheiro civil. Realizamos, ainda, a leitura de textos introdutórios e analisamos o livro didático de Cálculo Diferencial e Integral III adotado pelo curso em que esta investigação foi realizada. Ademais, observamos livros adotados em disciplinas do eixo específico da engenharia para investigar como estavam organizados do ponto de vista da Matemática mobilizada e da organização didática proposta, além de verificar em quais problemas e de que forma as ID eram mobilizadas.

Fundamentados nessa análise, escolhemos, inicialmente, a *Teoria A Matemática no Contexto das Ciências* (TMCC) como o principal referencial teórico-metodológico desta investigação, com uma proposta inicial de buscar um sentido para as integrais, propondo uma sequência de atividades versando sobre Integrais Duplas, composta de uma série de Eventos Contextualizados (EC)², que fosse direcionada à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Engenharia.

No domínio da TMCC, foi necessário fazer um estudo epistemológico-histórico dessas integrais, cujos resultados conduziram esta investigação a trilhar outro caminho: decidimos tomar a articulação da TMCC com a *Teoria Antropológica do Didático* (TAD), como uma *Praxeologia de Investigação Didática* (PID), que consiste em “um instrumento para descrever

¹ Esta instituição foi nomeada, nesta tese, como instituição de referência.

² “[...] problemas ou projetos que desempenham o papel de entes integradores entre disciplinas matemáticas e não matemáticas, convertendo-se em ferramentas para o trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem” (LIMA; BIANCHINI; GOMES, 2016, p. 8).

a estrutura e funcionamento da atividade científica, para unificar a linguagem e para moldar o diálogo entre diferentes enfoques de investigação didática” (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 12).

Faz-se necessário esclarecer que uma praxeologia é um modelo para análise da ação humana institucional, descrita em termos de quatro noções: tarefa (tipo de tarefa), técnica, tecnologia e teoria, que permitem a modelação das práticas sociais em geral e das atividades matemáticas em particular. Conforme Chevallard (1992), em uma praxeologia, a tarefa e a técnica formam bloco da *práxis* (prática) em que a tarefa designa uma ação e a técnica representa um procedimento necessário à realização da uma tarefa. Da mesma forma, o autor explica que a tecnologia e a teoria formam o bloco do *logos* (saber), sendo a tecnologia responsável por justificar a técnica do bloco da *práxis* e a teoria o suporte para essa justificação. Essas praxeologias podem ser classificadas em matemáticas – quando se referem à realidade matemática que deve ser ensinada – ou didáticas – quando se relacionam à forma como essa construção matemática é realizada em uma situação de ensino.

Quando se trata de uma PID, os blocos recebem o nome de *bloco do logos científico* e de *bloco da práxis científica*. O bloco do *logos* científico é caracterizado pela determinação do tipo de entidades e processos que fazem parte dos seus componentes, as relações entre eles e os critérios para descrever e justificar o bloco da *práxis* científica, que é composto pelos tipos de problemas científicos que estão sendo estudados e das técnicas ou metodologias de pesquisa que foram utilizadas para estudá-los. Assim, é no bloco do *logos* científico que a construção do *problema didático*³ de uma investigação orientada por uma PID é consolidada. Portanto, nesta investigação, os objetivos e a questão de investigação foram refinados durante o trajeto da pesquisa, de modo que tais elementos serão apresentados somente no terceiro capítulo.

Assim, fomos conduzidos a investigar as três dimensões – epistemológica, econômico-institucional e ecológica – do problema didático construído nesta investigação, consistindo em: realizar uma investigação à luz da articulação entre a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências e a Teoria Antropológica do Didático que nos permita desenvolver uma proposta de um processo de ensino de Integrais Duplas para estudantes do curso de Engenharia Civil de

³ Um *problema didático*, segundo Gascón (2011), é um problema (ou questão) relativo ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, que surge a partir de um *problema docente*, um problema levantado pelo professor quando tem que ensinar um conteúdo matemático aos seus estudantes. Respaldados por esse pressuposto, nesta tese, o problema docente considerado foi a preocupação em compreender como discutir as Integrais Duplas com estudantes de Engenharia Civil, de modo a despertar o interesse dos futuros engenheiros por esse conteúdo e possibilitar que eles passem a ver sentido em estudar tais integrais para além de uma abordagem, majoritariamente, procedimental subsidiada por cálculos algébricos associados às suas interpretações gráficas, que era o que geralmente vinha acontecendo na instituição de referência.

modo a transformá-las em uma ferramenta de apoio a esses estudantes, visando ao exercício da profissão, para que eles possam interpretá-las e mobilizá-las como um instrumento útil, sem perder de vista o caráter científico e o discurso formal a elas inerentes.

Para tanto, determinamos as tarefas e, a partir delas, construímos três praxeologias de investigação menores que, juntas, compõem a PID elaborada, que nos permitiram conduzir as investigações das três dimensões do problema didático. Nessas praxeologias, as teorias TMCC e TAD foram articuladas tanto em seus aspectos teóricos quanto metodológicos, como detalhado no decorrer desta investigação.

A partir do estudo da dimensão epistemológica, elaboramos um modelo que utilizamos como referência para analisá-lo no domínio da dimensão econômico-institucional, para que pudéssemos evidenciar os objetivos de ensino vigentes na instituição pesquisada (de agora em diante nomeada como instituição de referência) no que se refere às ID no curso de Engenharia Civil, para, a partir daí, construir, na dimensão ecológica do problema didático, a proposta do processo de ensino de Integrais Duplas para estudantes do referido curso. Nessa proposta, as ID foram tomadas como ferramenta de apoio a esses estudantes, visando ao exercício da sua futura profissão.

Esta investigação, além desta introdução, é organizada em seis capítulos. No segundo capítulo, trazemos a trajetória acadêmico-profissional da pesquisadora; uma problemática acerca da Educação Matemática no Ensino Superior e da Educação em Engenharia, especialmente no que diz respeito ao ensino de Matemática na Engenharia; as justificativas para esta investigação e a revisão de literatura.

No terceiro capítulo, apresentamos os referenciais teórico-metodológicos que sustentaram esta investigação, realizando, inicialmente, um diálogo comparativo entre a TMCC e TAD para depois caracterizarmos os blocos científicos, bem como elaborarmos as praxeologias didáticas que nortearam o caminho para o estudo das dimensões do problema didático desta investigação.

O estudo da dimensão epistemológica do problema didático com ênfase no objeto matemático em foco nesta investigação é abordado no quarto capítulo.

No quinto capítulo, o objetivo é apresentar o estudo da dimensão econômico-institucional do problema didático, portanto, trazemos as análises realizadas a partir de documentos institucionais, bem como a análise de livros didáticos.

No sexto capítulo, apresentamos a proposta de reorientação da abordagem das ID, tendo como *Paradigma Didático de Referência* – ou seja, uma referência que nos permitiu explicar

as práticas de ensino (ações didáticas) adotadas na proposta – a *Matemática em Contexto*, que se baseia no desenvolvimento de atividades interdisciplinares que favoreçam o diálogo entre a Matemática e a área de formação do estudante. Essa proposta também privilegiou os fins educativos de referência buscados: a formação integral do estudante, a Aprendizagem Significativa no sentido de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980) e a autonomia. A proposta foi apresentada por meio de um evento contextualizado (EC) e uma discussão sobre esses eventos. Encerramos esse capítulo com uma proposta de avaliação para o EC construído.

Por fim, no último capítulo, apresentamos as considerações finais desta investigação, além de algumas sugestões de pesquisas futuras abordando o ensino das ID em cursos de engenharia.

2 TRAJETÓRIA ACADÊMICO-PROFISSIONAL DA PESQUISADORA, A PROBLEMÁTICA DA PESQUISA E REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, apresentamos a trajetória acadêmico-profissional da pesquisadora; a justificativa dos motivos que nos levaram a realizar esta investigação, tendo como objeto matemático as Integrais Duplas ministradas para estudantes de Engenharia Civil; e a revisão de literatura. É importante reforçar que os objetivos e a questão de pesquisa desta investigação foram refinados ao longo do trajeto de estudo, portanto, não estão apontados aqui, mas serão apresentados no terceiro capítulo, que corresponde ao capítulo teórico-metodológico, quando, finalmente, foram consolidados.

Precisamos esclarecer que esta tese se encontra redigida na primeira pessoa do plural, porém, fizemos a opção de apresentar a trajetória acadêmico-profissional da pesquisadora na primeira pessoa do singular, tendo em vista que esse trajeto só inclui a autora da tese e não as outras vozes presentes neste relato da investigação.

2.1 Trajetória acadêmico-profissional da pesquisadora

Iniciei minha carreira profissional como professora na Educação Básica, concomitantemente, nas redes pública e privada de ensino. Era professora de Matemática e ministrava aulas no então 1º e 2º Graus (atuais Ensinos Fundamental e Médio), com uma carga horária de 40 horas/aula na rede pública e 10 horas/aula no Colégio Nossa Senhora das Dores, em Diamantina. Nessa época, não era necessário ter graduação em Licenciatura em Matemática para lecionar, bastava ter um bom desempenho, saber a Matemática a ser ensinada, ter controle de turma e um bom relacionamento com os estudantes e profissionais da Educação, além de obter, por meio de um cadastro nas então Delegacias de Ensino, o Certificado de Avaliação de Títulos (CAT) – que era uma espécie de “autorização para lecionar”.

Em 1994, a Faculdade de Filosofia e Letras de Diamantina (FAFIDIA)⁴ trouxe o curso de Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática para Diamantina, no qual ingressei na primeira turma, no mesmo ano. No início do ano seguinte, após a conclusão de minha graduação, fui convidada para lecionar no Ensino Superior. Fiz, prontamente, a redução

⁴ A FAFIDIA era mantida pela Fundação Universidade do Vale do Jequitinhonha (FUVJ), que teve sua denominação alterada em 1973 para Fundação Educacional do Vale do Jequitinhonha (FEVALE). Em 2013, a FEVALE foi incorporada pela Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG).

de minha carga horária na rede pública e passei a ministrar, de início, as disciplinas Matemática Básica e Cálculo I, na Licenciatura em Matemática, na mesma faculdade em que me graduei, tendo minha prática docente refletida na reprodução das aulas de meus professores. Com o passar do tempo, essa reprodução não era mais suficiente, pois começaram a surgir questões sobre a formação de professores de Matemática que iam além do ato de ministrar aulas. Matriculei-me, então, no curso de especialização *Lato Sensu* em Matemática Superior da Universidade do Grande Rio (Unigranrio), buscando melhor formação para dar suporte às aulas ministradas. Nessa especialização, tive a oportunidade de realizar o meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) em Cálculo Diferencial e Integral, e aprofundar os meus conhecimentos nessa área, o que aguçou o meu interesse pelo ensino de Cálculo.

Em 2002, tornei-me coordenadora da Licenciatura em Matemática e tive a oportunidade de promover e participar de discussões que permeavam os cursos de formação de professores da área. Nessa época, passamos a oferecer também, o curso de especialização em Matemática para professores da Educação Básica e, juntamente, seminários e encontros promovidos em parceria com a Regional de Minas Gerais da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM-MG), que me levaram a discutir e propor rumos para o curso para além do oferecido. Em meio a isso, foi publicada a Resolução CNE/CES nº 3, de 18 de fevereiro de 2003, que instituiu as novas Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Graduação em Matemática e com elas a necessidade de reformular o Projeto Pedagógico do Curso (PPC). Para a escrita do projeto em conjunto com o colegiado de professores, além das diretrizes, buscamos resultados de investigações que discutiam a formação de professores de Matemática e que pudessem nortear o trabalho. Todo esse processo contribuiu, significativamente, para minha formação e atuação docente.

Posteriormente, em 2007, ingressei no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-MG), na área de concentração Matemática, no qual realizei minha investigação relacionada ao processo de ensino das *Equações Diferenciais Ordinárias* (EDO). Na mesma época, iniciei minha trajetória como professora de cursos de Engenharia, em uma faculdade no norte de Minas Gerais.

A investigação que realizei no mestrado, na qual os sujeitos eram estudantes de cursos de Engenharia, teve como principal objetivo “verificar como a retomada dos conceitos fundamentais de Cálculo I, taxas e o estudo da modelagem matemática aplicada a problemas classicamente enunciados, como parte introdutória de um curso de EDO, poderiam contribuir para o ensino e a aprendizagem dessas equações e suas aplicações” (SOUZA, 2011, p. 17).

Finalizei o mestrado e retornei a Diamantina, onde atuei como professora de Cálculo nos cursos de Engenharia da Universidade Federal dos Vales Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), além de contribuir nas discussões realizadas nessa universidade para a criação de cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Química no formato a distância, nos quais também atuei como professora de Cálculo.

Em 2014, regressei a Montes Claros, onde sou professora de Cálculo para os cursos de Engenharia no Centro Universitário FIPMoc (UNIFIPMoc). Em 2017, ingressei no doutorado no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática oferecido pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), no qual realizei os estudos que deram origem a esta tese.

2.2 Por que tomar as Integrais Duplas como objeto de estudo?

A partir da nossa prática como professora de disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Engenharia, foi possível constatar que muitas das dificuldades⁵ apresentadas pelos estudantes desses cursos se constituem, em parte, pelo fato de eles não estarem preocupados com a aprendizagem de conteúdos matemáticos por si só, mas em obter uma formação profissionalizante na Engenharia em estudo, na qual os conteúdos matemáticos estão presentes como ferramentas.

Bianchini, Lima e Gomes (2017) afirmam que as dificuldades dos estudantes nesses cursos estão relacionadas, principalmente, ao fato de eles não perceberem as vinculações existentes entre as disciplinas da área de Matemática, presentes na matriz curricular de sua graduação, e aquelas específicas e profissionalizantes. Além disso, consideram tais disciplinas como obstáculos a serem superados, que não contribuem para as suas formações.

Muro (2012) acrescenta que essas dificuldades são, geralmente, causadas pelo fato de os estudantes não terem a oportunidade de resolver matematicamente problemas próprios da Engenharia durante as aulas das disciplinas de Matemática na graduação e, na maioria das

⁵ É importante esclarecer que, em relação ao que aponto como dificuldades apresentadas pelos estudantes durante a graduação em Engenharia, essas dizem respeito, entre outros aspectos: à falta de conhecimento prévio dos estudantes causada pelas lacunas na aprendizagem da Matemática na Educação Básica, ao entrave na tradução do enunciado de uma situação-problema, dado em linguagem natural para a linguagem matemática, ao entrave na manipulação das diferentes representações de sentenças matemáticas em diferentes registros, ao entrave ao relacionar o Cálculo como ferramenta para aplicação nos problemas de Engenharia, à falta de interesse dos estudantes pelos assuntos tratados no Cálculo, aos entraves decorrentes do processo didático, à própria natureza cognitiva dos estudantes, que pode fazer com que não aprendam pelo fato de ainda não terem desenvolvido as estruturas mentais apropriadas que permitem assimilar a complexidade dos conhecimentos do Cálculo.

vezes, não há uma contextualização dos conteúdos matemáticos em relação às áreas específicas da Engenharia. Essa observação é reforçada por Miranda e Laudares (2011), segundo os quais as dificuldades dos estudantes com a Matemática podem ser decorrentes da falta de estímulo e motivação no avançar de suas formações.

Silva (2011) entende que o ensino de Cálculo é diretamente influenciado pelas dificuldades de natureza histórico-epistemológica, inerentes aos próprios conceitos de Cálculo, ressaltando que, da mesma forma que as questões históricas e epistemológicas geram dificuldades, também podem originar importantes estratégias para seu ensino e contribuir para a compreensão dos desafios que cercam a prática docente e a consequente aprendizagem pelos estudantes.

[...] a epistemologia histórica traz à luz obstáculos e paradoxos que acompanharam a gênese dos conceitos da Matemática e, em particular, os do Cálculo. Esse fato indica, por um lado, que o ensino pode se tornar mais eficaz se não for desvinculado da evolução histórica; e por outro lado, aponta para a necessidade de investigações e estudos a fim de melhor se conhecer esta importante componente do ensino, fato que poderá contribuir para uma melhor instrumentalização, visando à compreensão dos desafios envolvidos nas atividades docentes (SILVA, 2011, p. 399).

Nasser (2009) relata que muitas das dificuldades apresentadas pelos estudantes no processo de aprendizagem do Cálculo, em geral, estão relacionadas às suas deficiências no conhecimento matemático não consolidado durante a Educação Básica, acarretando baixo rendimento e consequente reprovação e evasão nos cursos de graduação nos quais essa disciplina é ofertada. Da mesma forma, conforme a autora, os professores se sentem frustrados quando percebem que a formação básica desses estudantes, por vezes, não é suficiente para que eles construam o conhecimento em relação ao Cálculo e concordam que as lacunas causadas por essa formação inadequada em relação à Matemática é um importante fator que contribui para o baixo rendimento nas disciplinas de Cálculo.

Com relação ao Cálculo ofertado nos cursos de Engenharia, Nunes *et al.* (2020) concordam que o índice de reprovação e repetência é elevado, tendo como consequência a evasão. Para Santos e Matos (2012), esses números podem estar, entre outros motivos, relacionados a estratégias de ensino utilizadas pelos professores, que podem não viabilizar a construção do conhecimento pelo estudante, uma vez que nem sempre essas estratégias possibilitam estabelecer uma relação entre a disciplina e a área de formação. Reis (2009) acrescenta que as escolhas pedagógicas dos professores influenciam de maneira direta e incisiva na aprendizagem de Cálculo pelos estudantes de tais cursos. Acrescenta, ainda, que essas

escolhas devem estar centradas na reflexão e compreensão do propósito desse saber na formação Matemática do estudante e nas suas relações com o contexto profissional almejado.

Ribeiro Júnior, Mondini e Mocrosky (2019) afirmam que o Cálculo encontra aplicabilidade em diversas ciências e pode ser entendido como ferramenta para a compreensão de saberes de outras áreas e para a produção de novos conhecimentos. Ferruzzi (2003) ressalta que, em relação às Engenharias, essa aplicabilidade se sobressai, visto que esses cursos englobam o estudo de questões, como movimentos, crescimentos e decaimentos, taxas relacionadas, entre muitas outras.

Diante disso e do que foi apresentado até aqui, entendemos que o Cálculo é essencial para a construção dos conhecimentos relacionados a essa área da ciência. Nesse ínterim, concebemos ser relevante realizar investigações que evidenciem alternativas metodológicas que minimizem as dificuldades apresentadas pelos estudantes de Engenharia, considerando:

- as vinculações existentes entre as disciplinas de Cálculo e aquelas específicas e profissionalizantes das matrizes curriculares dos cursos de Engenharia;
- oportunizar aos estudantes resolver, matematicamente, problemas próprios da Engenharia durante as aulas das disciplinas de Matemática;
- o ensino de Cálculo, diretamente influenciado pelas dificuldades inerentes aos próprios conceitos de Cálculo, de natureza histórico-epistemológica;
- a necessidade de promover estratégias de ensino e de aprendizagem que diminuam os índices de reprovação e de repetência nas disciplinas de Cálculo e consequente evasão nos cursos de Engenharia;
- a necessidade de promover estratégias de ensino e de aprendizagem voltadas para estudantes de Engenharia que contribuam para que preencham as lacunas causadas por uma formação básica inadequada quanto à Matemática, que, em muitos aspectos, dificulta a construção do conhecimento de Cálculo por esses estudantes.

Outro aspecto que consideramos para justificar a proposta de investigação elaborada no âmbito desta tese relaciona-se ao fato de que as discussões em torno dos processos de ensino e de aprendizagem de disciplinas da área de Matemática para engenheiros não são, em geral, objetos de reflexão em cursos de formação de professores de Matemática que, em outros termos, não preparam professores para atuar em tais cursos.

Conforme as discussões das quais participamos, no Grupo de Trabalho 04: Educação Matemática do Ensino Superior (GT4), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), realizadas no VII Seminário de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), ocorrido em 2018, é necessário produzir investigações que busquem entender a realização do ensino da Matemática como disciplina a serviço de um curso que não visa formar matemáticos, mas profissionais que, no cotidiano de trabalho, utilizarão esse conteúdo como ferramenta.

Outro aspecto importante que deve ser preocupação refletida nas investigações da comunidade de Educação Matemática é o fato de que quando o professor precisa recorrer a estudos que permitam qualificar sua prática docente, tendo como foco os processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo, principalmente a respeito das funções reais de várias variáveis reais, há um número reduzido de investigações disponíveis que possam contribuir com essa qualificação. Esse aspecto é ratificado por Bianchini, Lima e Gomes (2017; 2018) que, com base nos mapeamentos, análises de conteúdo e metanálises das principais produções do GT04, afirmaram que

[...] existe a ausência de estudos contemplando os processos de ensino e de aprendizagem de alguns tópicos importantes para a área de Cálculo Diferencial e Integral e suas aplicações, como, por exemplo, equações diferenciais, funções vetoriais, integrais duplas e triplas, derivada direcional e vetor gradiente, mudança de variável para integrais duplas ou triplas, integrais de linha, sequências, séries etc. (BIANCHINI; LIMA; GOMES, 2017, p. 323).

[...] não há, no *corpus* analisado, trabalhos tendo como foco de estudo os processos de ensino e de aprendizagem de tópicos como sequência, séries, integrais múltiplas, mudanças de variáveis em integrais múltiplas, funções vetoriais, derivada direcional e vetor gradiente, integrais de linhas, equações diferenciais, dentre outros (BIANCHINI; LIMA; GOMES, 2018, p. 7).

Assim, podemos conjecturar que, em 2018, havia carência, ao menos no que se refere às investigações do GT4, de produções acadêmicas em relação também às integrais de funções reais de várias variáveis reais, imperando que a comunidade científica de Educação Matemática produza investigações que abordem esse objeto, pois, além do exposto, a construção desse conhecimento pelo estudante, no grau de desenvolvimento cognitivo com que ele entra na faculdade, é bastante complexa. Depende da compreensão de que é possível adicionar uma infinidade de quantidades cada vez menores e, ao mesmo tempo, de conseguir conceber intuitivamente que o resultado dessa adição constitui uma quantidade (valor numérico) finita. Ademais, por nossa prática docente, temos observado que os estudantes não as mobilizam com tranquilidade quando são solicitadas, pois não relacionam os conceitos de integração aos fenômenos que elas podem ajudar a compreender.

De acordo com Barufi (1999), alguns professores entendem que o ensino do Cálculo e, portanto, das Integrais, deve ser realizado enfatizando as aplicações e desenvolvendo habilidades técnicas, enquanto outros consideram que a única forma de realmente compreender os seus princípios e conceitos é começar com um tratamento matemático dos números reais e tratar o Cálculo como um conhecimento matemático essencialmente formalizado. Ainda de acordo com Barufi (1999), independente das escolhas feitas pelos professores, o modo como a abordagem do Cálculo é realizada em seu ensino interfere diretamente nos sentidos e significados desse conhecimento constituído pelos estudantes.

O exposto até o momento justifica voltar a atenção para o Cálculo como um saber que vem sendo ensinado a estudantes de Engenharia, bem como uma disciplina no contexto desses cursos e as relações com os processos de ensino e de aprendizagem, no sentido de realizar investigações que possam contribuir com esses processos, visando à construção do conhecimento pelo estudante de Engenharia.

No âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como membros do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), no campo do projeto Educação Matemática em Cursos de Serviço, tínhamos em mente a proposta de buscar alternativas pedagógicas que pudessem enriquecer a prática docente e contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo no domínio da comunidade de Educação Matemática, especialmente em relação aos cursos de Engenharia.

As discussões no Programa reforçaram a percepção de que há uma convergência entre os pesquisadores em Educação Matemática quanto à necessidade de promover uma prática nesses cursos e nos demais, nos quais a Matemática está presente como disciplina de serviço⁶, de modo a estabelecer vínculos entre os conteúdos de Matemática e das disciplinas dos eixos específicos e profissionalizantes, sem perder de vista o cuidado de abordar tais conteúdos com o caráter formal a eles inerentes. Dentre os diferentes objetos do Cálculo, optamos, então, por eleger as Integrais Duplas como nosso interesse nesta investigação. Tendo selecionado o objeto matemático ao qual nos detivemos nesta investigação, passamos a realizar uma revisão de literatura no intuito de delimitar o foco do estudo relativo às Integrais Duplas a ser assumido.

⁶ Disciplinas de serviço são aqui entendidas, conforme definido por Howson *et al.* (1988 citado por LIMA; BIANCHINI; GOMES, 2018, p. 117), “como disciplinas matemáticas ministradas por professores dessa Ciência em cursos de graduação que se destinam à formação de não-matemáticos”.

2.3 Os processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas: uma revisão de literatura

Segundo Creswell (2010), a revisão da literatura em uma pesquisa permite evidenciar para o leitor o que foi produzido em relação a um objeto em estudo, possibilitando a elaboração de reflexões entre essas produções e o novo estudo que o autor que a realizou está apresentando. Inclui um estudo amplo na literatura, completando lacunas de investigações anteriores, além de contribuir para justificar a relevância de uma investigação.

Assim, nesta seção, apresentamos uma síntese das investigações que encontramos na literatura que versam sobre os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Integral, tendo como foco o objeto matemático em estudo nesta investigação (as Integrais Duplas), além de um diálogo estabelecido entre as investigações encontradas.

2.3.1 Seleção das referências

Nesta investigação, empreendemos uma busca por pesquisas com o uso de Integrais Duplas, principalmente, no Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES); na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD); no *Google Acadêmico*; em *sites* e bancos de teses das principais universidades nacionais e internacionais; assim como publicações de artigos em revistas e anais de eventos da área, tendo como palavras-chave: *Integrais Duplas*; *Integrais Múltiplas*; *Integrais Triplas*; *Funções de Várias Variáveis* e *Ensino de Integrais*, também traduzidas para o inglês e espanhol. Para refinamento das buscas, restringimo-nos à área de conhecimento *Ensino e Educação*, e áreas de concentração: *Educação Matemática*; *Ensino de Ciências e Matemática*; *Ensino de Engenharia e Matemática*, limitadas ao período dos anos 2000 a 2021 para as teses e dissertações; e do período de 2010 a 2021 para os artigos. Para a seleção e escolha das pesquisas, inicialmente, fizemos a leitura do título, seguido do resumo e, se as informações constantes envolvessem os processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Múltiplas ou diretamente das Integrais Duplas, eram selecionadas para leitura, caso contrário, eram descartadas.

É importante destacar que foi necessário ampliar o período para mapeamento das teses e dissertações pela escassez dessa modalidade de produção científica encontrada no período de 2010 a 2021.

Foram encontradas seis teses e sete dissertações, das quais somente três teses e cinco

dissertações eram das áreas de concentração refinadas, sendo as demais descartadas. Quanto aos artigos, encontramos vinte e seis, dos quais selecionamos três; os outros foram descartados pelo mesmo motivo que as teses e dissertações ou também por serem recortes das teses e dissertações já selecionadas.

Durante o processo de exploração das investigações encontradas nesse levantamento, criamos uma organização para o registro dos dados. Assim, destacamos, inicialmente, o título, ano de publicação, autor(es), instituição(ões) e sujeitos de pesquisa. Diante disso, seguimos para o registro das questões de investigação ou objetivos; das abordagens teóricas mobilizadas para a análise dos dados obtidos pelos pesquisadores; de aspectos relacionados aos procedimentos metodológicos; das dificuldades apresentadas pelos estudantes; dos principais resultados obtidos e as contribuições que trouxeram para a área da Educação Matemática quando o objeto em estudo fosse as Integrais Múltiplas (IM) e, conseqüentemente, as ID.

O Quadro 1 traz a relação das investigações selecionadas na revisão de literatura, em ordem cronológica das mais recentes para as mais antigas, no período delimitado.

Quadro 1 – Relação das investigações selecionadas na revisão de literatura desta tese

Título	Tipo	Autores (ano)
Um percurso de estudo e pesquisa para o ensino de Integral Dupla: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de Engenharias e de licenciatura em Matemática	Tese	Brandão (2021)
Esculturas Matemáticas: atividades para o estudo da Integral Dupla	Tese	Miranda (2018)
O ensino e aprendizagem de integrais múltiplas: análise didática com preocupações sobre o uso do <i>software Maple</i>	Tese	Henriques (2006)
Investigando a eficiência de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o ensino de Integrais Múltiplas mediadas por Tecnologias Digitais.	Dissertação	Schmidt (2019)
Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no cálculo de várias variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem	Dissertação	Cometti (2018)
Uma sequência de ensino para o estudo de Integrais Duplas	Dissertação	Fontoura (2016)
Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de Integrais Duplas e Triplas	Dissertação	Marques (2016)
Aplicação da Integral na determinação de características geométricas de sessões planas de estruturas em barras	Artigo	Simões, Siple e Figueiredo (2014)
Um olhar à aplicação das Integrais Múltiplas: da projeção gráfica à maquete	Artigo	Siple e Figueiredo (2013)
Ensino do conceito de Integral, em sala de aula, com recursos de História da Matemática e da Resolução de Problemas	Dissertação	Ribeiro (2010)
Leitura e escrita em Cálculo	Artigo	Frota (2011)

Fonte: A autora, 2021

Na seção seguinte, apresentamos o registro dos dados observados e selecionados que discutem os processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas.

2.3.2 Investigações relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas

A tese de Brandão (2021) teve como objetivo analisar os significados e as praxeologias mobilizados por estudantes de cursos de Engenharia e Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um *Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)* para o ensino e a aprendizagem da Integral Dupla. Ou seja, uma metodologia de ensino no âmbito da Teoria Antropológica do Didático que, segundo a autora, consiste em disponibilizar uma questão aberta aos estudantes para que eles elaborem hipóteses e questionamentos intermediários que necessitem de comprovação e articulação de conhecimentos para a composição de uma resposta. A autora acrescenta, fundamentada em Bosch e Gascón, que um PEP consiste em uma metodologia que proporciona a elaboração e fundamentação de uma forma particular de organizar o processo de estudo de um objeto matemático que poderá importar saberes de outras áreas das ciências além da Matemática.

Participaram do desenvolvimento do PEP doze estudantes matriculados nas graduações em Licenciatura em Matemática e Engenharias, da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia, respectivamente. Esses estudantes já haviam cursado a disciplina Cálculo Diferencial e Integral III.

Brandão (2021) traçou duas hipóteses de pesquisa que conduziram seu estudo:

[...] a dimensão da linguagem envolta nos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas para o cálculo da medida de uma Superfície Quádrica, quando aplicadas em um PEP, proporciona *raciocínios abduativos*⁷ capazes de desenvolver a autonomia dos estudantes na construção dos conceitos inerentes ao objeto matemático em estudo e, a segunda, que existem diferenças nos significados, nas interpretações e nas praxeologias mobilizados por estudantes dos cursos das Engenharias e da Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um PEP (BRANDÃO, 2021, p. 42).

⁷ O *raciocínio abduativo* é visto sob três vertentes: a epistemológica, a lógica e a ontossemântica. Na perspectiva lógica – epistemológica, a abdução, segundo Peirce (2005), é caracterizada por ser capaz de gerar novas ideias e, no campo científico, são hipóteses, inferências originadas pela percepção de fenômenos reais despontados como *insights*. A diferença entre este e os raciocínios dedutivos e indutivos é que eles estão livres de impor julgamentos sem a preocupação de serem válidos ou não. No que tange à perspectiva ontossemântica, ela é explicada, segundo Moscoso (2019), no nível semântico em que mostra o sentido e a função da linguagem e da elaboração de conhecimentos e no nível ontológico em que a abdução tem origem na dúvida das crenças.

Para a verificação das hipóteses levantadas, a autora fundamentou-se teoricamente nos pressupostos da Semiótica de Charles Sanders Peirce e na Teoria Antropológica do Didático. Assim, realizou o estudo dos documentos oficiais das duas instituições nas quais a investigação foi realizada, buscando evidenciar como a Integral Dupla está organizada do ponto de vista das organizações matemáticas e didáticas. Desse modo, realizou a análise praxeológica do livro didático adotado nas disciplinas de Cálculo nas quais a Integral Dupla é abordada; elaborou o PEP voltado para o ensino da Integral Dupla associado ao cálculo da medida das áreas de superfícies quádricas; planejou e elaborou uma praxeologia didática para o ensino dessas integrais, estruturada para os cinco encontros presenciais e aplicou e analisou essas atividades segundo as matrizes da Linguagem e da Diversidade, relacionadas às hipóteses que foram assumidas e que destacamos anteriormente neste texto. Segundo a autora, foram essas matrizes que permitiram sintetizar informações e formular argumentos para as hipóteses do estudo.

Quanto às principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes no decorrer da aplicação das atividades e relacionadas nas análises, Brandão (2021) relata que o rigor matemático abordado nas atividades causou dificuldade na compreensão de alguns dos objetos matemáticos envolvidos; que alguns estudantes apresentaram entraves ao elaborar modelos matemáticos para a descrição de algumas das situações abordadas; e muitos não lembraram as técnicas de integração, o que estabeleceu limites para o cálculo de algumas das integrais abordadas nas atividades.

Os resultados obtidos, segundo Brandão (2021), revelaram que os estudantes conseguiram aplicar os conceitos dos objetos matemáticos escolhidos de forma coerente e autônoma ao construir e resolverem situações-problemas envolvendo conhecimentos dos cursos dos quais são egressos e do Cálculo Diferencial e Integral. Revelaram, ainda, que os estudantes associaram os objetos matemáticos a uma linguagem estética, ao pragmatismo e ao desenvolvimento de raciocínios abduativos que permitiram alinhar o uso deles em diferentes situações; por fim, revelaram que os significados, as interpretações e as praxeologias se diferenciaram quanto ao emprego dos conhecimentos matemáticos nas duas graduações e nas interpretações das tarefas propostas, mas convergiram nas praxeologias matemáticas aplicadas.

A investigação de Henriques (2006), realizada na França, teve como sujeitos de pesquisa estudantes da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), em Ilhéus/BA, e das classes preparatórias tecnológicas francesas que preparam os estudantes para cursos superiores de tecnologia. Seu principal objetivo foi compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes durante os processos de ensino e de aprendizagem das ID utilizadas em problemas

que envolvem o cálculo de medidas de volumes de sólidos, bem como estudar de que forma a utilização do *software Maple* pode ajudá-los a superar tais dificuldades. Dessa maneira, sua abordagem, a partir do *Maple*, buscou favorecer as interações entre representações analíticas e gráficas dos sólidos estudados.

Com o objetivo de fundamentar, compreender e interpretar os fenômenos que envolvem o ensino e a aprendizagem dessas integrais, Henriques (2006) apoiou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval, na Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard e na Teoria da Instrumentação proposta por Rabardel, por entender que cada uma dessas teorias e as inter-relações entre elas trariam contribuições fundamentais para a sua investigação.

Assim, fundamentando-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, foi possível definir o que chamou de *representação gráfica* e *representação analítica* de um sólido e interpretar essas representações e as interações entre elas utilizando o *Maple*. Para as questões relacionadas à dimensão institucional, utilizou aspectos abordados pela Teoria Antropológica do Didático e, para as questões referentes à dimensão instrumental da aprendizagem em ambientes computacionais (a aprendizagem do uso de ferramentas tecnológicas), fundamentou-se em investigações sobre *ergonomia cognitiva*⁸ encontradas na Teoria da Instrumentação.

A investigação do autor foi organizada em dois grupos. No primeiro, ele analisou programas institucionais e manuais de referência das instituições nas quais sua investigação foi desenvolvida, visando entender como está organizada a Matemática quando o objeto em estudo são as ID e como esses conteúdos são abordados nesses documentos; evidenciar as práticas realizadas com a utilização do *Maple* para esse objeto matemático; e, por fim, compreender como as representações analíticas e gráficas dos sólidos são apresentadas e a forma como interagem em situações de cálculo de volumes baseados no objeto matemático.

No segundo grupo, Henriques (2006) realizou um estudo sobre o *Maple*, com o objetivo de identificar as ferramentas disponíveis nesse *software*, que permitiam a construção de representações gráficas dos sólidos gerados a partir de regiões, utilizando as IM. Além disso, buscou entender como os estudantes se apropriam dessas ferramentas durante tais construções aplicadas a problemas de cálculo de medidas de volume, bem como identificar as dificuldades que poderiam ser geradas pelo uso do *software*.

⁸ A ergonomia cognitiva é um campo de aplicação da ergonomia que tem por objetivo explicitar como se articulam os processos cognitivos face às situações de resolução de problemas nos seus diferentes níveis de complexidade (RABARDEL, 1995).

Quanto ao uso do *Maple*, o autor constatou que, na França, é usado nas representações geométricas de curvas e superfícies, porém, não foram encontrados registros do uso do *software* como ferramenta para construir representações geométricas de sólidos associados ao cálculo de volumes, na época da realização da investigação.

Após suas análises documentais, Henriques (2006) aplicou aos estudantes brasileiros um teste preliminar composto por atividades analisadas à luz da Engenharia Didática, examinando as ID em suas abordagens algébrica e geométrica, com exploração da interpretação gráfica e o objetivo principal de identificar as dificuldades apresentadas pelos estudantes. As análises das atividades revelaram que os estudantes apresentaram dificuldades em modelar e interpretar as expressões que eles manipulam vinculadas a esboços das regiões que constroem, principalmente, no ambiente lápis e papel; consideraram importante a visualização do sólido para resolução do problema; e “as dificuldades por eles apresentadas podem ser reflexo do ensino atual (pelo menos nas universidades brasileiras), no qual a representação gráfica no espaço não é destacada na organização matemática das IM” (HENRIQUES, 2006, p. 164, tradução nossa).

Posteriormente, o autor realizou um estudo das potencialidades do *software Maple*, referente às restrições e possíveis dificuldades de uso, aplicado ao estudo das ID no cálculo de medidas de áreas e de volumes de sólidos. Dessa investigação, elaborou sequências de operações no *Maple* que resultaram em uma sequência de técnicas – conforme definido em Chevallard – abordando as Integrais Múltiplas, que propiciam aos estudantes obter representações gráficas dos sólidos delimitados por superfícies, bem como estabelecer as relações existentes entre as representações gráficas e analíticas dessas integrais associadas aos sólidos. Tal sequência foi denominada pelo autor de *crivo geométrico*, entendido como “a definição geométrica do contorno de um sólido” (HENRIQUES, 2004, p. 13). O objetivo explícito dessa sequência é obter uma representação gráfica de qualquer sólido isolado ou crivado, descrito por várias superfícies.

Como consequência de suas análises e da criação do crivo geométrico, Henriques (2006) elaborou o *Modelo para Análise de Tarefas em Torno de Cálculos de IM (MATIM)*, que “vincula a análise da resolução de um problema de cálculo de medidas de volume por ID à representação gráfica do sólido a ele associado” (HENRIQUES, 2006, p. 219, tradução nossa).

Em seguida, o autor elaborou uma nova sequência de atividades que, durante seu doutorado, não foi aplicada aos estudantes pesquisados. Essas atividades privilegiaram construções com o uso de lápis e papel e o ambiente informatizado para serem analisadas de

acordo com o MATIM. Foram levantadas dificuldades após análise, *a priori* realizada pelo autor, associadas ao estabelecimento de relações entre a representação gráfica e analítica das ID. Em sua hipótese de pesquisa, Henriques (2006) entende que tais dificuldades podem ser minimizadas no ambiente computacional pelo crivo geométrico, enquanto no ambiente lápis e papel podem ser intensificadas pelo grau de dificuldade aumentado na construção das representações gráficas.

Com as análises realizadas, Henriques (2006) concluiu que a utilização do *software* na resolução de problemas que envolvem cálculo de medidas de áreas e volumes com o uso de integrais permite um trabalho específico em que da interação entre o usuário e a máquina surgem elementos que articulam a representação gráfica e analítica dos sólidos envolvidos em tais problemas.

Concluiu, ainda, que esse trabalho favorece o ensino e a aprendizagem dessas integrais, uma vez que proporciona a visualização dos elementos gráficos envolvidos na construção dos sólidos e a compreensão de seus significados relacionados a essas integrais que, muitas vezes, não é proporcionada por construções feitas com lápis e papel. Por fim, o autor concluiu que a construção das representações gráficas é fundamental para fazer com que o estudante interprete, compreenda e busque soluções para problemas relacionados ao cálculo de medidas de áreas e volumes, a partir das IM.

Passamos à terceira tese analisada, que relata a investigação desenvolvida por Miranda (2018) e teve como objetivo identificar e analisar as concepções de estudantes de Engenharia quanto às Integrais Duplas “que emergem em um cenário para aprendizagem com tarefas que envolvem a tecnologia e a representação figural⁹ dos sólidos limitados por funções de duas variáveis, por meio das esculturas matemáticas” (MIRANDA, 2018, p. 19). Os estudantes pesquisados foram, inicialmente, doutorandos da Universidade Anhanguera de São Paulo e, posteriormente, estudantes de um curso de Engenharia de Produção da Faculdade Flamingo, em São Paulo, em uma situação de curso de extensão¹⁰.

A investigação foi fundamentada, do ponto de vista teórico, na articulação de diferentes abordagens da *Teoria da Cognição Corporificada*, recorrendo às ideias de Lakoff e Johnson nas questões relacionadas às metáforas conceituais, às ideias de Fauconnier e Tunner, nas situações que envolveram a montagem conceitual no processo da construção de novos

⁹ Sólidos construídos por meio de uma impressora 3D.

¹⁰ Os estudantes foram convidados pela autora para fazer o curso fora do programa de doutorado, o que foi denominado por ela de *situação de um curso de extensão*.

conhecimentos, às ideias de Barsalou (2009), principalmente na construção das atividades aplicadas aos sujeitos de pesquisa, considerando os processos de simulação por ele discutidos e, ainda, a elementos do *Modelo da Estratégia Argumentativa* de Castro e Frank, na utilização da linguagem como principal meio para a análise dos discursos.

Segundo Miranda (2018), os experimentos realizados nessa investigação foram organizados de forma a permitir a análise dos discursos dos participantes, e a evolução desses discursos após as interações dos estudantes com as tarefas propostas e as esculturas construídas. Para isso, a autora organizou seus estudos em dois ciclos, baseados na metodologia *Design Experimental*, apresentada por Cobb *et al.*:

Ciclo 1:

Prospectiva

- Levantamento bibliográfico: o que incluiu as pesquisas anteriores (artigos, dissertações e teses); elaboração das tarefas; elaboração do *applets*, programação dos sólidos para impressora 3D, as esculturas matemáticas.

Reflexiva e prospectiva

- Implementação do ambiente (CIA)¹¹: o primeiro experimento foi realizado apenas com os *applets* e organizados em um *e-book* [...] aplicamos as tarefas em uma turma de Doutorado/Mestrado em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, durante as aulas de Didática do Cálculo, cedidas pela professora Dra. Janete Bolite Frant.
- Análise Parcial, o que implicou o *redesign* das tarefas.

Ciclo 2:

Reflexiva e Prospectiva

- Implementação do ambiente (CIA): o segundo experimento foi realizado com os *applets* organizados em um *e-book* [...] e com as esculturas matemáticas; aplicamos as tarefas em uma turma do Curso de Engenharia de Produção da Faculdade Flamingo, em São Paulo, durante um curso de extensão universitária.
- Análise parcial;
- Análise final e criação de uma proposta para o ensino e aprendizagem de Integral Dupla (MIRANDA, 2018, pp. 63-64).

Assim, no primeiro ciclo, as tarefas foram elaboradas à luz da Cognição Corporificada, visando à análise dos discursos dos estudantes. Foram desenvolvidos *applets* no *software* GeoGebra 5.0, com os quais a autora explorou o cálculo de medidas de volumes de sólidos geométricos por meio das Integrais Duplas, gerados a partir de diferentes tipos de funções reais. Essas tarefas foram aplicadas aos estudantes do doutorado, aos quais foram disponibilizados, durante a aplicação, sólidos geométricos envolvidos nas atividades, construídos por meio da impressão 3D, projetados no *software* OpenScad.

Por meio das análises dos registros de aplicação das atividades dessa tarefa, Miranda (2018) evidenciou dificuldades apresentadas pelos estudantes, relacionadas à interpretação das

¹¹ Contexto Interativo de Aprendizagem (CIA).

questões, aos conceitos geométricos não especificados nas questões, às interações com os *applets* que, por vezes, não permitiram a resolução das integrais, à dificuldade em associar notações gráficas e algébricas de algumas integrais, a não percepção das relações e propriedades que existem entre a representação gráfica das funções de uma e de duas variáveis, bem como a não construção dos significados de alguns conteúdos abordados.

Assim, reestruturou as atividades, além de acrescentar uma nova, na qual foi explorada a ideia geométrica do Teorema de Fubini¹², para, a partir disso, iniciar o segundo ciclo da investigação, no qual, com vistas aos objetivos propostos, aplicou as atividades reestruturadas aos estudantes do curso de Engenharia de Produção.

Com as análises do segundo ciclo realizadas com base no Modelo da Estratégia Argumentativa descrito em Castro e Frant, a autora observou que a interação entre os estudantes foi fundamental na realização das tarefas; eles conseguiram estabelecer comparações entre as representações algébrica e gráfica de funções de uma e duas variáveis. Tais comparações favoreceram a interpretação dessas funções e de suas formas de representação, e a presença das esculturas matemáticas como uma nova representação para os objetos matemáticos contribuiu para que os estudantes percebessem mais facilmente as propriedades matemáticas envolvidas nas representações do espaço, mostradas nos *applets*.

Por fim, Miranda (2018) concluiu que tarefas que envolvem a tecnologia e a representação figural dos sólidos limitados por funções de duas variáveis, por meio das esculturas matemáticas, podem contribuir para o ensino e a aprendizagem da Integral Dupla.

A dissertação de mestrado de Schmidt (2019), desenvolvida na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), teve como objetivo elaborar, implementar e avaliar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), direcionada aos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de Integrais Múltiplas, quando está aplicado ao cálculo da medida de volume, massa e centro de massa de peças hipotéticas. Baseado em Moreira, o autor explica que as UEPS têm como princípio fundamental o conhecimento prévio como fator que mais gera influência na Aprendizagem Significativa, pois integra as perspectivas, sentimentos e comportamentos integrados ao estudante que aprende. Além do princípio fundamental, uma UEPS preserva, como princípios secundários declarados pelo autor, que o estudante decida se

¹² Teorema de Fubini: Seja f integrável contínua e positiva na região $R = [a, b] \times [c, d]$ então a medida da área $A(x)$, da seção plana abaixo do gráfico de $f(x, y)$ e acima do plano xy com x fixado, será:

$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ e a medida do volume do sólido limitado pela função $f(x, y)$ na região R é igual a:

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \text{ (MIRANDA, 2018, p. 219).}$$

quer aprender significativamente determinado conteúdo, sendo os organizadores prévios cognitivos que evidenciam a relação entre um novo saber e aquilo que já está consolidado na estrutura cognitiva do estudante.

Nesse sentido, Schmidt (2019) define a sua investigação em uma abordagem quantitativa-qualitativa, como um estudo de caso quanto aos procedimentos técnicos, sustentada teórico-metodologicamente pela Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, tendo com sujeitos estudantes de Engenharia Mecânica, cujo objetivo, ao construir a UEPS, foi elaborar atividades de ensino com o propósito de possibilitar e facilitar a Aprendizagem Significativa do conceito de Integrais Múltiplas. Essas UEPS se fundamentam no pressuposto de que só haverá ensino se houver evidências de Aprendizagem Significativa no processo, no qual o ensino é o meio e a Aprendizagem Significativa é o fim.

Na análise da UEPS, foi utilizada a teoria Performances Matemáticas Digitais (PMD), a qual preconiza que o processo de ensino e de aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos pode ser analisado sob o ponto de vista didático-pedagógico, conforme visto em Scucuglia, por procedimentos determinados pelas PMD, ou seja, por um mecanismo de análise que fundamenta os meios de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos por intermédio de artes e recursos digitais. No caso da investigação do autor, a PMD foi utilizada na análise de vídeos abordando as IM, elaborados pelos sujeitos pesquisados.

Assim, Schmidt (2019) organizou seu trabalho em duas partes; na primeira se constituiu na elaboração e aplicação de um teste diagnóstico a sessenta estudantes da turma de Cálculo B do curso de Engenharia Mecânica, disciplina que trata do estudo do cálculo de funções reais de várias variáveis reais. O teste diagnóstico foi elaborado por meio de um questionário, aplicado em três momentos, buscando verificar quais os subsunçores¹³ que os acadêmicos da disciplina de Cálculo B evidenciavam. No primeiro momento, o questionário buscou esclarecer quais os conhecimentos dos estudantes em relação às integrais indefinidas, definidas, cálculo de medidas de área e regras de integração, que foram os conteúdos classificados pelo autor como conhecimentos prévios dos estudantes pesquisados. No segundo momento, o questionário abordou assuntos referentes à Geometria Analítica, com o propósito de resgatar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação aos conceitos básicos da disciplina, necessários ao estudo das IM. No terceiro momento, o teste aplicado teve como propósito

¹³ Segundo David Ausubel (1968), *subsunçores* são aquilo que o estudante já sabe e está relacionado com um novo conhecimento a ser construído. Em Schmidt (2019), esses subsunçores se referem a conhecimentos prévios dos estudantes relacionados às Integrais Múltiplas.

analisar de que maneira os estudantes que já haviam cursado a disciplina Cálculo A – cálculo de funções reais de uma variável real – mobilizavam as integrais de funções reais de uma variável real em situações aplicadas que versavam sobre alguns temas relacionados à Engenharia Mecânica.

A segunda parte da referida investigação contou com a elaboração de uma atividade exploratória, com uma situação-problema contendo uma aplicação das ID, que, segundo o autor, foi pensada com o intuito de verificar indícios de uma Aprendizagem Significativa quanto ao saber que essas integrais detêm. A atividade abordou o cálculo da medida do volume, massa e centro de massa de um sólido, sendo essas integrais aplicadas à construção e representação gráfica de uma peça mecânica, para a qual os estudantes fizeram o uso dos *softwares* GeoGebra, *AutoCad* ou *SolidWorks*. Contou, ainda, com o desenvolvimento de vídeos pelos estudantes.

Como resultado, Schmidt (2019) avaliou o estudo como relevante e satisfatório, considerando que a proposta contribuiu para dar significado aos conteúdos vistos pelos estudantes durante o semestre letivo na disciplina de Cálculo B, além de proporcionar a eles a percepção de que as Integrais Múltiplas vão além da teoria do Cálculo e apresentam interfaces diretas com a Engenharia Mecânica, que podem e devem ser exploradas nos processos de ensino e de aprendizagem dessas integrais, assim como de outros objetos matemáticos. O autor concluiu que a implementação de uma atividade fundamentada pelo uso das tecnologias digitais pode favorecer a aprendizagem e o ensino de IM.

A dissertação de mestrado de Cometti (2018), desenvolvida na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), teve como sujeitos estudantes da disciplina de Cálculo III de uma universidade particular da região metropolitana de Belo Horizonte. Seu principal objetivo foi investigar as possíveis contribuições de sequências didáticas, utilizando o GeoGebra 3D no processo de ensino das IM.

Seu trabalho, inicialmente, buscou fundamentação em investigações sobre o ensino de Cálculo de várias variáveis apoiadas no uso de tecnologias, em que os objetos matemáticos não eram, necessariamente, as IM. O autor justifica essa fundamentação inicial na escassez de trabalhos acadêmicos com esse objeto matemático.

Apoiado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Duval e partindo do pressuposto de que quando abordamos tanto Integrais Duplas quanto Integrais Triplas, a questão da visualização do que essas integrais podem representar é fundamental, o autor construiu e aplicou uma sequência didática, composta de atividades exploratórias (termo

usado pelo autor), aplicada aos estudantes investigados, priorizando as operações de conversão e informações contidas nos *registros de representação semiótica*¹⁴.

Na sequência, abordou, inicialmente, no GeoGebra, a construção de representações das superfícies quádricas e, posteriormente, tratou da construção, usando o mesmo *software*, de regiões de integração de Integrais Duplas e Triplas relacionadas ao cálculo de medidas de áreas e de volumes, com ênfase nas relações entre as representações algébricas e geométricas.

Cometti (2018) relata que, durante a resolução da sequência, os estudantes apresentaram dificuldades em relacionar as representações algébricas com as representações gráficas das regiões ou sólidos construídos, nos quais o conhecimento relativo às Integrais Duplas foi mobilizado. Os esboços de gráficos de superfícies, bem como a obtenção e interpretação das informações importantes que serão usadas nas resoluções de problemas propostos utilizando papel e lápis para a aprendizagem desses conteúdos apresentam barreiras, tanto para quem ensina como para quem aprende; salientando que tais barreiras podem estar relacionadas à prática pedagógica que propõe a mesma abordagem para o conhecimento acerca das Integrais Duplas, sem considerar as especificidades intrínsecas à graduação em que esse conhecimento é discutido.

Nas análises realizadas pelo autor, não identificamos uma forma de categorização dos dados. Quanto aos resultados, esses

[...] mostraram que a visualização proporcionada pelo GeoGebra 3D pode ser considerada um importante componente para os processos de construção dos conhecimentos e propriedades das IM, além de apontar para a possibilidade de aliar o uso do *software* GeoGebra 3D à construção de representação semiótica, principalmente representações gráficas usadas no estudo das IM, destacando o uso das operações de tratamento, tanto no âmbito algébrico quanto no âmbito gráfico (COMETTI, 2018, pp. 164-165).

Outra investigação que analisamos foi a dissertação de mestrado de Fontoura (2016), cujo objetivo foi investigar quais as contribuições da elaboração e aplicação de uma sequência didática fundamentada nos procedimentos da Engenharia Didática, com a utilização do

¹⁴ Um *registro de representação semiótica*, ou simplesmente *registro*, é um sistema semiótico que cumpre as operações cognitivas de formação, tratamento e conversão. Existem quatro grandes registros criados por Duval (1993) para comportar as representações semióticas, a saber, o registro figural ou geométrico; o registro gráfico; o registro da língua natural e o registro da língua formal ou algébrico. “O tratamento é uma atividade que ocorre no interior do registro ou do sistema semiótico e consiste na transformação de uma representação em outra, obedecendo regras próprias do sistema. O tratamento consiste em substituir representações, de modo que a nova representação ofereça algum ganho de conhecimento em relação à representação que foi substituída. A conversão ocorre entre registros. A representação do objeto pertencente a um dado registro é transformada em outra representação pertencente a outro registro. Assim, a conversão modifica a forma de representar um determinado objeto” (MENONCINE, p. 34, 2018).

software Maple para o ensino e aprendizagem do conteúdo de ID para estudantes da disciplina de Cálculo IV, de Licenciatura em Matemática. Seus sujeitos de pesquisa foram cinco estudantes matriculados na disciplina de Cálculo IV, do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), localizado no município de Santa Maria, no Rio Grande do Sul.

O autor fundamentou seu trabalho nas ideias de Conceito Imagem e Conceito Definição, conforme a aceção de David Tall e Shlomo Vinner. Para classificar os estudantes nos três níveis de *conceito imagem*¹⁵ – conceito imagem incipiente, conceito imagem instrumental e conceito imagem relacional – o autor optou pelo processo de categorização, conforme visto em Domingos. Assumiu, como pressupostos teórico-metodológicos, a Engenharia Didática como discutido em Artigue.

Seu trabalho foi dividido em quatro etapas: na primeira, foi aplicado um teste diagnóstico buscando relacionar os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito do cálculo de medida de área utilizando IM, bem como foram analisados os livros de Cálculo dos autores Anton e Stewart, a fim de compreender como as Integrais Duplas foram abordadas por esses autores. Na segunda etapa, elaborou-se a sequência didática tendo como ponto de partida as observações realizadas na etapa anterior, além de fazer as análises *a priori*, conforme proposto em seu referencial teórico-metodológico. Na terceira etapa, a sequência de atividades construída foi aplicada aos estudantes. Finalmente, na última etapa, foram realizadas as análises *a posteriori* e validação dos resultados, assim como as considerações finais a respeito de sua investigação.

Quanto às análises do teste diagnóstico, Fontoura (2016) observou que grande parte dos estudantes apresentava dificuldade quanto ao conceito de área, às técnicas e métodos analíticos para o cálculo de medida de área de figuras planas e de cálculo de medida de volume e, ainda, quanto à habilidade de fazer representações gráficas de curvas, tendo como recursos didáticos apenas o lápis e papel.

Assim, as análises do teste diagnóstico e dos livros didáticos nortearam o autor para a organização e construção de sua sequência didática, a qual continha quatro atividades que buscavam construir o conhecimento de Integral Dupla; calcular a medida do volume de sólidos

¹⁵ Segundo Vinner (1991), um *conceito imagem* é aquele construído pelo sujeito, é a concepção que o sujeito constrói de um conceito constituído na comunidade em geral. É constituído na estrutura cognitiva do sujeito associado a um conceito. Essa associação contém representações mentais, tais como imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades, elaboradas pelo indivíduo por meio de processos de pensamento. Um *conceito definição* é a especificação do conceito que o sujeito expressa por meio de palavras, pode ser apreendido pelo sujeito na escola ou relacionando-se com um conceito constituído na sociedade. Da mesma forma que o *conceito imagem* é formado na estrutura cognitiva do sujeito.

de base retangular por aproximação; calcular a medida do volume de sólidos geométricos com base não retangular; e, finalmente, calcular a medida do volume de sólidos por meio de Integrais Iteradas. A sequência foi aplicada aos estudantes, dividida em quatro encontros, nos quais cinco estudantes trabalharam individualmente no laboratório de informática.

Após as análises da sequência, o autor observou que “a utilização do *software Maple* viabilizou melhor aprendizagem por auxiliar a construção dos conhecimentos antes vistos de uma forma meramente expositiva” (FONTOURA, 2016, p. 128). Ademais, o autor observou que os estudantes apresentaram dificuldades no processo de construção do significado da Integral Dupla quando essa se aplica ao cálculo de medidas de áreas e volumes, e que alguns estudantes apresentaram fluidez entre as representações, aplicando as propriedades dessas integrais. E, finalmente, concluiu que os resultados de sua investigação mostraram que a sequência didática, construída com o emprego de um aplicativo computacional programado com o *software Maple*, facilitou a formação de conceitos imagem sobre o conteúdo de Integrais Duplas, bem como auxiliou os estudantes no cálculo de medidas de volume de sólidos geométricos.

A dissertação de Marques (2016) teve o objetivo de investigar e elaborar Projetos de Construção de Objetos Concretos (PCOC)¹⁶ “acessíveis por meio de prototipagem rápida na impressora 3D, podendo servir de instrumentos auxiliares na resolução de problemas propostos na praxeologia de Integrais Duplas e Triplas que requerem a visualização no registro gráfico como estratégia de realização” (MARQUES, 2016, p. 22). Os elementos investigados foram o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) como instituição de referência, e os estudantes do curso de Engenharia de Produção dessa universidade como instituição de aplicação da sequência didática, pois a autora buscou relacionar a formação dos licenciados em Matemática com uma possível atuação como professores de cursos de Engenharia, tentando identificar se na licenciatura há ou não alguma discussão sobre a Matemática na Engenharia e quais são as características.

Como suporte teórico, articulou a Abordagem Instrumental de Rabardel, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard, além da Teoria de Registros de Representações Semióticas desenvolvida por Duval. Como metodologia de investigação,

¹⁶ “Um PCOC é um modelo matemático descritivo idealizado a partir de análise de uma situação-problema, tarefa, exercício ou um exemplo institucional que resulta em um objeto construído com materiais concretos ou com auxílio de um ambiente computacional de aprendizagem” (HENRIQUES, 2014, p. 220).

utilizou a análise institucional e a sequência didática, discutidas conforme proposto na TAD articulada a preceitos da Engenharia Didática.

A investigação foi desenvolvida em duas fases denominadas *Pesquisa Interna* e *Pesquisa Externa*¹⁷. Na Pesquisa Interna, Marques (2016) realizou a análise institucional, dividida em cinco etapas: na primeira, definiu como objeto matemático de estudo as Integrais Duplas e a questão de investigação; na segunda etapa, determinou o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) como instituição de referência e o curso de Engenharia de Produção dessa universidade como instituição de aplicação da sequência didática; na terceira etapa, realizou a revisão bibliográfica e definiu os elementos para a análise institucional, escolhidos entre os indicados, que foram o Projeto Acadêmico Curricular da instituição de referência, o Projeto Acadêmico Curricular da instituição de aplicação, o livro didático, as tecnologias (*softwares* e impressora 3D) e os estudantes.

Na quarta etapa, realizou a análise dos elementos institucionais definidos na etapa anterior, na qual “destacou o papel do Projeto Acadêmico Curricular, a importância, a existência e institucionalização das Integrais Duplas e Triplas nas instituições de referência e de aplicação” (MARQUES, 2016, p. 60), bem como descreveu a praxeologia das integrais, seu *habitat* e nicho nessas instituições por meio do livro didático, além de analisar tecnologias, propor o percurso metodológico da modelagem e prototipagem rápida de PCOC e desenvolver dois modelos de PCOC, utilizando este percurso: “desde a escolha do problema emblemático até a materialização dos modelos utilizando a impressora 3D” (MARQUES, 2016, p. 60); e, por fim, na quinta etapa, elaborou a sequência didática composta por dois dispositivos experimentais (cone truncado e galpão), aplicada em uma única vez, utilizando os dois modelos de PCOC desenvolvidos na quarta etapa.

Em seguida, Marques (2016) passou a fazer a Pesquisa Externa, na qual aplicou a sequência didática aos estudantes e, finalmente, retomou a problemática e as questões de investigação em suas conclusões.

É importante destacar que, conforme os objetivos da autora, os elementos da sequência didática produzida durante a investigação foram elaborados conforme o conceito de Projetos de

¹⁷ *Pesquisa Interna* é uma sondagem realizada pelo pesquisador individualmente (ou por um grupo de pesquisadores), sem intervenção de sujeitos externos. Momento no qual o pesquisador (ou o grupo) procura compreender melhor o seu objeto de estudo. Ele conjectura, problematiza, formula hipóteses, questiona-se, define o quadro teórico, os objetivos e descreve o percurso metodológico da sua pesquisa. *Pesquisa Externa* é uma sondagem que envolve sujeitos externos, como público-alvo. Momento no qual o pesquisador (ou grupo) aplica os estudos desenvolvidos na pesquisa interna. Essa aplicação, teste ou experimentação pode ou não envolver seres humanos. A aplicação de uma sequência para o estudo de práticas efetivas de estudantes de uma instituição, por exemplo, é uma pesquisa externa (HENRIQUES, 2014, p. 68).

Construção de Objetos Concretos e manipulados no ambiente computacional *Cubfy Invent*, além de serem materializados na impressora CUBEX DUO 3D, no laboratório de visualização matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz.

Para a autora, os resultados da investigação mostraram que a utilização de PCOC na realização de tarefas, cujo objeto em estudo são as ID na Praxeologia Modelada, permite, além da manipulação de um ostensivo¹⁸ concreto pelo estudante, a compreensão do conhecimento em torno dessas integrais como objetos institucionais participantes na formação de recursos humanos. Além disso, mostraram que existem, conforme classificado pela autora, vantagens e desvantagens na utilização desses modelos como instrumentos auxiliares na realização dos tipos de tarefas propostas no dispositivo da investigação.

Entre essas vantagens, Marques (2016) destaca a possibilidade de manipulação de um PCOC à mão livre, sem a necessidade de produzir a representação do objeto no registro gráfico; a visualização permite identificar as superfícies cujos crivos as delimitam; a facilidade de reprodução do objeto no espaço tridimensional por meio da observação do objeto concreto; a preocupação do estudante com a manipulação do PCOC. Já como desvantagens, a autora apontou as dificuldades dos estudantes para encontrarem as equações das superfícies e a necessidade de o estudante ter ferramentas de manuseio à mão livre para realizar as medidas convenientes que possam permitir a conversão de cada superfície envolvida no PCOC em questão do registro gráfico para o registro algébrico.

A dissertação de mestrado de Ribeiro (2010), orientada pela Metodologia de Romberg (1982), se desenvolveu por meio de um modelo de investigação construído e dividido em três fases que são: buscar na história da Matemática as origens do conceito de integral; produzir um resumo histórico do conceito; e fazer um estudo acerca da resolução de problemas. O objetivo da investigação foi construir um projeto de ensino e de aprendizagem destinado a trabalhar integrais com estudantes de um curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, fazendo uso da Metodologia de Romberg, com recursos oriundos da história da Matemática. Seus sujeitos de pesquisa foram estudantes dos cursos de Engenharia da Computação, Civil e Elétrica da Faculdade de Engenharia de Sorocaba (FACENS).

¹⁸ Chevallard (1992) usa a denominação de *objeto ostensivo* para se referir a todo objeto que tem uma natureza sensível, certa materialidade e que, desse modo, tem para o sujeito uma realidade perceptível, enquanto objetos não ostensivos são todos aqueles que, como as ideias, as instituições ou os conceitos, existem institucionalmente sem que, no entanto, sejam vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por conta própria. A diferença entre eles é que os objetos ostensivos podem ser manipulados, enquanto os objetos não ostensivos não podem.

Assim, Ribeiro (2010), após construir o modelo de investigação, apresenta a fase do estudo histórico, abordando o Cálculo com ênfase no Cálculo Integral, e discorre sobre a origem das integrais de funções reais de uma variável real, até a sua formalização por Riemann, ressaltando o contexto de construção desse conhecimento, além de apresentar os problemas encontrados nesses estudos que abordaram essas integrais.

Posteriormente, apresenta um estudo sobre a Resolução de Problemas aplicada em processos de ensino e de aprendizagem de Matemática nas abordagens de autores, como Onuchic; Onuchic e Allevato e Van de Walle, buscando identificar os diferentes campos teóricos que podem contribuir para “entender e saber trabalhar a sala de aula, de uma forma alternativa” (RIBEIRO, 2010, p. 108). Desses, ressaltou a Resolução de Problemas como um saber matemático, uma forma de ensino e uma aplicação de conhecimentos prévios à construção de novos conhecimentos pelos estudantes, além de ressaltar questões ligadas à implementação da metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula nos contextos dos cursos de Engenharia e Matemática, em situações de ensino e de aprendizagem de Cálculo.

A partir disso, Ribeiro (2010) elaborou atividades tendo por base problemas relacionados ao cálculo de medidas de área e de volume, para, na sequência, construir o conceito de funções, das condições de uma função para ser integrada, da integral definida, de derivadas parciais e de Integrais Duplas. Em algumas dessas atividades, foram utilizados os problemas identificados pelo autor em seu estudo histórico.

As dificuldades relatadas pelo autor, durante sua investigação, concentraram-se nas que surgiram durante a aplicação e análise das atividades, sendo as principais advindas de uma formação de Matemática elementar precária durante a Educação Básica dos estudantes, interpretação do contexto do vocabulário presente no enunciado das atividades e no contexto dos problemas, passagem da linguagem vernácula para linguagem matemática, conceitos do Cálculo e técnicas operatórias algébricas, implementação do próprio método de resolução de problemas, devido às inter-relações que o estudante precisava estabelecer entre os recursos matemáticos (conceitos, conhecimento de fatos e de procedimentos) utilizados, ordem heurística e, por fim, controle dos mecanismos necessários à coordenação de recursos e processos.

Ribeiro (2010) concluiu que a história da Matemática foi importante para o ensino de integrais, pois evidenciou como suas ideias surgiram ao longo da história, além de serem úteis na transposição dessas para as atividades em sala de aula. A Resolução de Problemas mostrou-se um caminho eficiente para o trabalho em sala, tanto para o professor quanto para os

estudantes, pois permitiu a construção do conhecimento em torno das integrais. A sala de aula se apresentou como um local de trabalho colaborativo, no qual houve socialização de conhecimentos e espírito de investigação. Logo, é possível construir “um projeto de ensino-aprendizagem, destinado a trabalhar integrais com estudantes de um curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, fazendo uso de uma nova metodologia com recursos à história da Matemática [...] num trabalho cooperativo e colaborativo [...]” (RIBEIRO, 2010, p. 306).

Siple e Figueiredo (2013) relataram uma experiência decorrente da aplicação, durante dez anos, de uma atividade a estudantes que cursavam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, nos cursos de Engenharia e Licenciatura em Matemática, no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina. A atividade elaborada, tendo o *software Winplot* como recurso computacional, foi fundamentada e analisada de acordo com aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Duval, e abordava as ID usadas no cálculo da medida do volume de um determinado sólido, contemplando suas diferentes representações e as relações entre elas.

O objetivo dessa experiência foi ultrapassar o entrave apresentado pelos estudantes na visualização tridimensional imediata no ambiente lápis/papel que os impedia de representar graficamente regiões e sólidos geométricos, bem como de estabelecer relações entre a representação gráfica e analítica quando essas regiões ou sólidos mobilizavam as IM.

A atividade proposta constou de três etapas. Na primeira, no ambiente lápis/papel, os estudantes utilizaram os conhecimentos matemáticos da Geometria Analítica para identificar as superfícies, suas curvas de interseção e suas projeções nos planos coordenados, além de, no ambiente computacional, construir as representações gráficas bidimensionais e tridimensionais do sólido. Na segunda etapa, os estudantes construíram a maquete do sólido identificado na primeira etapa e utilizaram as Integrais Duplas para o cálculo da medida de volume desse sólido. Na última etapa, socializaram o trabalho realizado.

As autoras concluíram que a exploração da articulação entre os diferentes quadros, mediados por um instrumento tecnológico, pode potencializar elementos importantes na aprendizagem dessas integrais, explorar a maquete nesses diferentes registros ameniza as dificuldades existentes no ensino das IM, a atividade proposta possibilitou a verificação da habilidade dos estudantes nas transformações de tratamentos que ocorrem dentro do mesmo sistema de representação, possibilitou, ainda, a exploração das conexões importantes da disciplina Cálculo com as disciplinas de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial, por fim, as

possibilidades que os instrumentos tecnológicos oferecem para o ensino de Cálculo necessitam de uma forte implicação dos professores e um grande trabalho colaborativo.

Frota (2011) apresenta suas investigações relativas às competências de leitura e escrita em Cálculo na perspectiva do letramento, entendido por Soares (2000 citada por FROTA, 2011, p. 39) como “resultado da ação de ensinar e aprender as práticas sociais de leitura e escrita; o estado ou condição que adquire um grupo social ou um indivíduo como consequência de ter-se apropriado da escrita e de suas práticas sociais”.

O trabalho foi realizado tendo como sujeitos de pesquisa trinta e cinco estudantes de Engenharia de uma faculdade particular da região metropolitana de Belo Horizonte que resolveram questões abordando as Integrais Duplas. O principal objetivo dessa investigação foi caracterizar os processos de leitura e de escrita em Cálculo por meio de textos matemáticos que se fazem presentes no cotidiano da sala de aula. Para Frota (2003 citado por FROTA, 2011, p. 489), “ter letramentos matemáticos é ter desenvolvido competências de utilizar a Matemática em contextos que vão além da Matemática, para lidar com questões científicas de vários domínios e com questões do cotidiano.”.

Nos seus estudos, a autora propôs reflexões sobre o texto escrito de duas situações de teste, abordando as Integrais Duplas, às quais os estudantes foram submetidos, buscando conhecer, em profundidade, o processo de leitura e escrita, que compreende “ler a informação, ler dentro da informação e além da informação para transformá-la” (FROTA, 2011, p. 505), fazendo com que o estudante compreenda os conceitos do objeto em estudo envolvido e possa levar essa compreensão para a aplicação desse objeto, quando for requisitado. Dessa forma, os textos escritos em situações de teste foram a fonte de dados analisados acerca de três competências em ação que, segundo a autora, possibilitam a leitura compreensiva do texto matemático, além de poder ser interpretado como categorias para análise, buscando identificar as competências de leitura e escrita dos estudantes quanto às Integrais Duplas.

Frota (2011) utilizou a conceituação de *competência* como *competência em ação*, uma das sete acepções teóricas propostas por Wienert (1999 citado por FROTA, 2011), que compreende “pré-requisitos cognitivos motivacionais e sociais necessários e/ou disponíveis para aprendizagem e ação bem sucedidas” (FROTA, 2011, p. 493) e designou como texto matemático “o texto gestual, oral ou escrito, compreendendo as diversas formas de representação do pensamento matemático, por meio da linguagem corrente, de tabelas e gráficos, da linguagem formal simbólica, utilizando expressões, equações e fórmulas” (FROTA, 2011, p. 489).

Nesse sentido, as competências foram analisadas de acordo com as categorias:

- ler a informação na linguagem veiculada, natural ou simbólica, na forma de tabelas ou gráficos, reconhecendo códigos, expressões, notações próprias das várias formas de representação em Matemática;
- ler dentro da informação, operando com essa a informação, seja por meio de conversão da forma de registro, seja através de transformações dentro de um mesmo tipo de registro, conforme visto em Duval (2003), e acionando conhecimentos anteriores de forma a relacioná-los com a nova informação;
- ler além da informação, realizando novas operações mais complexas de conversão da forma de registro, para otimizar soluções, para interpretar a informação dentro do próprio contexto da Matemática e, além desse contexto, em conexão com outras ciências e situações aplicadas (FROTA, 2011, p. 493).

Assim, a autora propôs duas atividades sequenciais abordando as Integrais Duplas, elaboradas para um trabalho prático aplicado aos estudantes, com o objetivo de compreender o processo de ler o texto na forma de um exercício proposto, identificando as tarefas envolvidas e as classificando de acordo com os três tipos de competências apresentadas. Para a primeira atividade, o estudante deveria, conforme as categorias de análise acima, ler a integral, ou seja, identificar o integrando, a ordem de integração e os intervalos de variação de x e de y , ler dentro da integral (o que está posto após o sinal de integração) para interpretar os intervalos de variação de x e de y como definidores da região plana de integração D , compreender o significado da região D para construir uma representação geométrica da informação, ler além da informação, além de utilizar as técnicas de integração para o cálculo da integral.

Com essa atividade e detalhamento das ações necessárias para sua compreensão e resolução, a autora ressalta a complexidade exigida para o letramento matemático quando o objeto em estudo é a Integral Dupla, pois o estudante recebe a informação textual, acrescenta a ela um conjunto de código de competências para responder ao texto matemático, produzindo um novo para, só assim, compreender e se apropriar dos conceitos e propriedades dessas integrais e construir conhecimento sobre elas.

Os resultados mostraram que, para o estudante, o ato de ler e escrever, respondendo ao texto, é um processo que exige, além de internalizar informações sobre o conteúdo e sobre si, o desenvolvimento de competências de leitura e escrita por meio do repertório de experiências vivenciadas de ler e escrever para aprender Cálculo com principal atenção às Integrais Duplas. Mostraram ainda que:

[...] pensar um curso a partir da perspectiva de letramentos matemáticos parece ser uma opção correta, na medida em que é possível desenvolver o programa de forma equilibrada e que favoreça o desenvolvimento integrado das três competências em

ação, necessárias para a leitura e a escrita compreensiva em Cálculo (FROTA, 2011, p. 506).

Simões, Siple e Figueiredo (2014) publicaram os resultados de uma investigação realizada, cujos sujeitos eram professores de Cálculo e de disciplinas específicas do curso de Engenharia de uma universidade pública, em Santa Catarina. Em sua investigação, buscaram entender qual Matemática deve ser ensinada a estudantes de Engenharia e quais ferramentas do Cálculo os professores mobilizam em suas disciplinas. Ademais, buscaram estreitar a relação entre teoria e prática, desenvolvendo atividades de aplicações das integrais de funções reais de uma variável real além da Integral Dupla em problemas que permitiam visualizar características geométricas dos elementos estruturais em forma de barras que compõem um edifício ou uma máquina.

Assim, desenvolveram conexões – termo usado pelos autores – entre conteúdos discutidos nas disciplinas Cálculo e Mecânica dos Sólidos, constantes na grade curricular do curso de Engenharia Sanitária. Essas conexões foram identificadas por meio de um trabalho colaborativo entre professores de Cálculo e o professor de Mecânica dos Sólidos que, depois de analisarem materiais didáticos das disciplinas envolvidas e fazerem reflexões, tanto da prática pedagógica quanto da prática do engenheiro, passaram à modelagem do problema físico, usando, como ferramenta, as integrais.

Não identificamos, no artigo, uma teoria aplicada ao estudo para categorização e análise dos dados obtidos, mas observamos aspectos da Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel, na medida em que autores usam o termo *Aprendizagem Significativa* e promovem discussões nas quais estão implícitos aspectos da proposta apresentada por ele. Como estratégias para a criação e desenvolvimento dos problemas, citam a modelagem matemática, mas não referenciam à abordagem específica.

Como principais resultados, observaram que há necessidade de uma fundamentação teórica específica – termo usado pelos autores – aqui entendida como um conhecimento aprofundado de objetos matemáticos e suas possíveis aplicações em disciplinas do eixo específico da Engenharia, a fim de estabelecer as conexões entre o problema físico e as ferramentas do Cálculo usadas para sua resolução. Para isso, consideraram fundamental o trabalho colaborativo entre os professores de Cálculo e professores de disciplinas do eixo específico da Engenharia e, ainda, observaram uma mobilização expressiva da integral em outras aplicações constantes de conteúdos dessas disciplinas, como o cálculo e a interpretação geométrica da Integral Dupla.

2.3.2.1 Considerações sobre as investigações analisadas

Por meio das leituras realizadas para esta investigação, constatamos que Henriques (2006), Marques (2016) e Brandão (2021) analisaram documentos institucionais referentes aos cursos que sediaram as suas investigações, dos quais destacamos os programas institucionais, manuais de referência, matrizes curriculares e projetos político-pedagógicos, com o propósito de compreender como as Integrais Múltiplas são abordadas nesses documentos, com qual objetivo e de que maneira são mobilizadas nas disciplinas do eixo específico desses cursos, bem como nas disciplinas da área de Matemática. Por meio das análises, esses autores evidenciaram o lugar ocupado por essas integrais para propor uma sequência de atividades, ainda que não aplicada na investigação de Henriques (2006), que contrastasse com a forma como o ensino era realizado nos cursos que sediaram suas investigações.

A análise dos livros didáticos adotados na disciplina de Cálculo foi um ponto concomitante nas investigações de Henriques (2006), Marques (2016), Fontoura (2016) e Brandão (2021). Essas análises tiveram o intuito de analisar como o objeto em estudo se apresentava do ponto de vista didático e, também, matemático. O estudo foi utilizado nessas investigações como construção de um referencial institucional e posto em xeque quanto a um outro referencial construído por meio de um estudo epistemológico-histórico do objeto matemático.

Henriques (2006), embora tenha considerado importante a aplicações das ID em contextos não matemáticos – como no estudo de massa, densidade, momentos de inércia e centros de massa, assim como Marques (2016), Miranda (2018), Cometti (2018), Fontoura (2016) e Frota (2011) –, não estendeu seus estudos além de contextos próprios da Matemática.

Nas investigações de Miranda (2018), Henriques (2006) e Cometti (2018), a ênfase na importância da interação entre os estudantes durante situações didáticas propostas por professores em sala de aula foi ressaltada como uma contribuição positiva para a construção do conhecimento de um objeto matemático pelo estudante.

A aplicação de testes diagnósticos a estudantes foi uma ação presente nos estudos de Henriques (2006), Miranda (2018), Fontoura (2016) e Schmidt (2019), que buscaram, por meio desses testes, evidenciar os conhecimentos prévios dos estudantes, necessários para a compreensão das Integrais Duplas e, no caso da investigação de Henriques (2006), das Integrais Múltiplas. Os conhecimentos prévios – ou a falta deles – foram considerados na elaboração das atividades propostas aos estudantes durante as investigações.

Diferentemente de Henriques (2006), não identificamos em Miranda (2018) apontamentos que indicassem como foi realizado o processo de construção da sequência de atividades e que revelasse ao leitor uma técnica ou método para a construção dos *applets*, bem como dos projetos de programação desenvolvidos para impressão 3D dos sólidos gerados a partir de superfícies dadas pelas integrais. Marques (2016) também não sinaliza sobre o processo de construção dos projetos de programação desenvolvidos para impressão 3D.

Frota (2011), apesar de destacar a importância de uma prática de ensino que propicie ao estudante obter letramento matemático, por ela entendido como “ter desenvolvido competências de utilizar a Matemática em contextos que vão além da Matemática, para lidar com questões científicas de vários domínios e questões do cotidiano” (FROTA, 2011, p. 489), fez opção pela abordagem da Integral Dupla contextualizada somente na própria Matemática, conforme foi observado nas atividades por ela propostas.

Além de ressaltar a importância da interação dos estudantes e o fato de sua investigação ter surgido por meio de um problema docente percebido em sala de aula, a atividade apresentada em Frota (2011) traz uma discussão expressiva sobre o que o professor deve explorar em relação a essas integrais em sua atuação em sala de aula, além de salientar a complexidade envolvida nos processos de ensino e de aprendizagem, tanto do ponto de vista do professor quanto do estudante. A autora ressalta que essas integrais não devem ser vistas pelos professores como um saber científico evidente e fácil de ser construído pelo estudante, por envolver o letramento matemático, a associação entre as diferentes representações, além da complexidade da compreensão cognitiva da noção de infinito e infinitésimos, caracterizada pela epistemologia dessas integrais.

Simões, Siple e Figueiredo (2014) apresentaram procedimentos para definir qual Matemática deve ser ministrada para estudantes de Engenharia, pautados no diálogo entre a disciplina de Cálculo e aquelas do eixo específico da graduação em Engenharia. Para isso, analisaram materiais didáticos de professores para associar o ensino de Integrais Múltiplas a problemas de cálculo de centroide e momentos de inércia em uma situação de um projeto arquitetônico, propondo atividades interdisciplinares e contextualizadas, construídas a partir de um trabalho integrado com os professores de Física dessa graduação.

Schmidt (2019) conduziu sua investigação partindo da elaboração de um problema no contexto do estudo de massa e centro de massa de peças mecânicas hipotéticas, aplicada a estudantes de Engenharia para desencadear o processo de ensino das IM.

Organizadas dessa forma, as investigações de Simões, Siple e Figueiredo (2014) e Schmidt (2019) se apresentam diferenciadas das demais que trouxemos nesta revisão de literatura, no sentido de proporem um trabalho interdisciplinar que resultou na elaboração e aplicação de atividades contextualizadas aos estudantes de Engenharia.

Segundo Miranda (2018), a principal contribuição trazida em seu estudo foi a reafirmação da constatação de que estratégias de ensino e de aprendizagem quando o objeto em estudo são as ID, apoiadas por tecnologias, podem trazer resultados positivos no aprendizado dos estudantes, além de apontar aos professores caminhos para buscar subsídios para a construção de representações figurais associadas ao ensino. Essa constatação, exceto quanto aos elementos figurais, foi uma contribuição das investigações de Cometti (2018), Henriques (2006), Marques (2016), Schmidt (2019) e Fontoura (2016).

Cometti (2018) traz, como contribuição, o apontamento para a necessidade da construção das representações gráficas associadas às algébricas no sentido de contribuir para que os estudantes interpretem, compreendam e busquem soluções para os problemas de medidas de cálculo de volumes abordando as Integrais Múltiplas.

Marques (2016) mostrou que a utilização de PCOC na realização de tarefas que abordam as Integrais Duplas permitiu a manipulação de um ostensivo concreto pelo estudante e a consequente construção do conhecimento em torno dessas integrais.

A principal contribuição de Henriques (2006) se constituiu na elaboração da técnica ou método para obter uma representação gráfica de qualquer sólido isolado ou crivado, descrito por várias superfícies, além da construção do Modelo para Análise de Tarefas que tenham as Integrais Múltiplas como objeto matemático envolvido. Esse modelo está aberto para a utilização por professores como uma opção de estratégia de ensino que, segundo o autor, permite melhor compreensão e interpretação de problemas de cálculo de medidas de áreas e volumes que mobilizam essas integrais, visto que consolidam a coordenação entre as representações gráfica, analítica e algébrica a elas inerente. Outra contribuição importante desse trabalho foi o despertar do olhar dos professores de Cálculo para a necessidade da elaboração de atividades para o ensino de objetos de cálculo, por meio de tecnologias digitais.

Para Fontoura (2016), a principal contribuição da sua investigação foi a sequência didática construída com o emprego de um aplicativo computacional que facilitou a formação de conceitos de imagem sobre o conteúdo de Integrais Duplas e auxiliou os estudantes no cálculo de medidas de volume de sólidos geométricos.

Siple e Figueiredo (2013) concluíram que a exploração da articulação entre os sólidos geométricos, mediados por um instrumento tecnológico, pode potencializar elementos importantes na aprendizagem das Integrais Duplas. Destacaram que explorar a maquete nesses diferentes registros ameniza as dificuldades existentes no ensino de integrais, além de destacar a importância de se realizar um trabalho interdisciplinar e colaborativo entre os professores, para que seja efetiva a construção de conceitos matemáticos pelos estudantes de Engenharia.

O trabalho de Frota (2011) trouxe contribuições para a Educação Matemática na medida em que evidencia que uma prática de ensino desenvolvida na perspectiva de letramentos matemáticos pode favorecer o desenvolvimento integrado das competências em ação, necessárias para a leitura e escrita compreensiva em Cálculo quando o objeto em estudo são as ID, propiciando o seu ensino e a sua aprendizagem.

As contribuições para a comunidade da Educação Matemática, trazidas por Simões, Siple e Figueiredo (2014), estão relacionadas, segundo os autores, à constatação da necessidade de se realizar, na graduação em Engenharia, um trabalho colaborativo e interdisciplinar entre os professores de Cálculo e da área do eixo específico da graduação em Engenharia que proporcione aos professores de Cálculo a elaboração de atividades que abordem seus conceitos contextualizados na prática do engenheiro, para que, ao serem trabalhadas em sala de aula, despertem o interesse dos estudantes e possibilitem a construção de conceitos.

As contribuições trazidas pela investigação de Schmidt (2019) apresentam interfaces com os subsídios vistos nos estudos de Simões, Siple e Figueiredo (2014) uma vez que permitiu a construção do significado dos conceitos das ID pelos estudantes por meio de atividades contextualizadas na Engenharia. Assim como Henriques (2006), seu trabalho reforça a importância da elaboração pelos professores de atividades que abordem os objetos do Cálculo por meio de tecnologias digitais, visto que tais metodologias podem facilitar a aprendizagem desses objetos.

Quanto às principais dificuldades enfrentadas pelos sujeitos de pesquisa observadas nos trabalhos apresentados nesta revisão de literatura, podemos destacar:

- Brandão (2021) relata que o rigor causou dificuldades para a compreensão do objeto matemático, alguns estudantes apresentaram dificuldade em elaborar um modelo matemático para a descrição de situações abordadas, bem como mostraram entraves quanto às técnicas de integração e para estabelecer o limite de integração durante o cálculo de algumas integrais abordadas nas atividades;

- Henriques (2006) destaca que os estudantes mostram entraves em modelar e interpretar as expressões que eles manipulam vinculadas a esboços das regiões que constroem, principalmente no ambiente lápis e papel, além de dificuldades relacionadas ao estabelecimento de relações entre a representação gráfica e analítica das IM;
- Miranda (2018) aponta que as dificuldades estavam relacionadas, principalmente, à interpretação das questões, a conceitos geométricos não especificados nas questões, às interações com os *applets* que, às vezes, não permitiam a resolução das integrais, os entraves em associar notações gráficas e algébricas de algumas integrais, a não percepção das relações e propriedades que existem entre a representação gráfica das funções reais de uma e de duas variáveis reais, bem como a não construção dos significados de conhecimentos de alguns conteúdos abordados;
- Simões, Siple e Figueiredo (2014) não relataram dificuldades dos estudantes em seus trabalhos;
- Schmidt (2019) relatou que os estudantes tiveram dificuldade em esboçar o gráfico das figuras espaciais três dimensões em técnicas de integração, principalmente por substituição trigonométrica;
- Cometti (2018) relata que as dificuldades dos estudantes estavam centradas em estabelecer relações entre as representações algébricas e as representações gráficas das regiões ou sólidos construídos;
- Fontoura (2016) relata que os estudantes apresentaram dificuldades no processo de construção do significado da Integral Dupla quando essa se aplica ao cálculo de medidas de áreas e volumes, apresentaram dificuldades na compreensão do conceito de área, em técnicas e métodos analíticos para o cálculo de medida de área de figuras planas e de cálculo de medida de volume e, ainda, quanto à habilidade de fazer representações gráficas de curvas, tendo como recursos didáticos apenas o lápis e papel;
- Marques (2016) relata que os estudantes apresentaram dificuldades para encontrar as equações das superfícies, a necessidade de o estudante ter ferramentas de manuseio à mão livre para realizar as medidas convenientes que possam permitir a conversão de representações de cada superfície envolvida no PCOC em questão, do registro gráfico para o registro algébrico;
- Frota (2011) apresenta como dificuldades dos estudantes a realização confusa do traçado de gráficos de curvas e superfícies em ambientes de lápis e papel, podendo ser decorrente de duas dificuldades distintas: associar uma representação algébrica a uma

superfície, resultante da falta de conhecimento declarativo ou procedimental do estudante que os prejudica ao atribuir significados às expressões matemáticas, além da dificuldade em visualizar uma imagem criada do sólido, envolvendo o desenvolvimento da competência visual-espacial.

- Siple e Figueiredo (2013) construíram a sua investigação em torno do entrave apresentado pelos estudantes na visualização tridimensional no ambiente lápis/papel que os impede de representar graficamente regiões e sólidos geométricos, bem como de estabelecer relações entre a representação gráfica e analítica quando essas regiões ou sólidos são estabelecidas por IM.

Por meio dessa revisão da literatura, constatamos que a maioria dos trabalhos analisados abordam as Integrais Duplas no contexto do cálculo de medidas de áreas e de volumes, tendo como alvo o ensino ou a aprendizagem do mencionado objeto matemático em alguma habilitação em Engenharia. Algumas das investigações sinalizaram a necessidade da realização de investigações priorizando a abordagem dessas integrais nas salas de aula de Engenharia, por meio de estratégias de ensino e de aprendizagem elaboradas a partir de trabalhos colaborativos e interdisciplinares entre os professores de Cálculo e os da área do eixo específico da graduação em Engenharia, que poderiam culminar na elaboração de atividades de ensino contextualizadas na prática do Engenheiro e que, possivelmente, ao serem trabalhadas em sala de aula, poderiam despertar o interesse dos estudantes e possibilitar-lhes a construção de conhecimento acerca desse objeto matemático. Optamos, então, em nossa investigação de doutorado, por contribuir com reflexões que possibilitem, em alguma medida, atender essa necessidade.

Uma vez relatadas as considerações entre as investigações analisadas na revisão de literatura, esclarecemos que, nesta investigação, assumimos a articulação da TMCC com a TAD como uma Praxeologia de Investigação Didática. Nesse sentido, partindo de um problema docente, construímos, durante a explicitação do bloco do *logos* científico dessa praxeologia, o problema didático desta investigação. Na sequência, traçamos os objetivos de pesquisa e elaboramos e desenvolvemos praxeologias didáticas na busca da solução para o problema construído. Assim, para esclarecer o que são esses problemas e apresentá-los, trazemos o referencial teórico-metodológico no próximo capítulo, bem como a caracterização da referida articulação como uma PID.

3 REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

Na visão de Eisenhart (1991), para que uma investigação em Educação Matemática se torne ainda mais relevante, deve ser desenhada considerando mais de uma abordagem teórica, pois, assim, conta com diferentes fontes de conceitos e ideias apropriadas. Nesse mesmo sentido, Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) afirmam que as pluralidades entre as teorias em Educação Matemática se tornam efetivamente produtivas quando as diferentes abordagens e tradições de cada uma delas se interagem.

Segundo Radford (2008), as formas possíveis de articulação entre elas dependem da natureza das concepções teóricas, de suas estruturas e dos objetivos compreendidos nessas articulações. Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008, p. 171, tradução nossa) elaboraram uma escala apontando estratégias para articular perspectivas teóricas que “são estruturadas em pares de estratégias similares para as quais diferentes graduações podem ser consideradas. São elas: compreender e tornar compreensível, comparar e contrastar, combinar e coordenar e integrar localmente e sintetizar”.

Assumimos essa potencialidade de articulações entre diferentes referenciais teóricos como premissa nesta tese e, em consonância a essa ideia, neste capítulo, apresentamos o referencial teórico-metodológico, aportado na articulação entre as teorias TMCC e TAD. Considerando que as estratégias de comparação e/ou contraste entre teorias da Educação Matemática construídas em Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) são utilizadas, principalmente, para melhor compreensão das características típicas de uma abordagem teórica em Educação Matemática, trouxemos, inicialmente, um diálogo comparativo entre a TAD e TMCC, acentuando aspectos de cada uma dessas teorias, relevantes para esta investigação.

Posteriormente, tendo em vista que as estratégias de coordenação e/ou combinação construídas pelos mesmos autores são usadas, sobretudo para uma compreensão em rede de um fenômeno em estudo, combinamos essas duas teorias de forma que esse amálgama possa subsidiar a busca pelas respostas à questão de investigação e o alcance aos objetivos estabelecidos para esta investigação, refinados durante os estudos realizados e apresentados nesta tese somente ao final da caracterização do bloco da *práxis* científica, neste capítulo.

Encerramos o capítulo com a apresentação da articulação da TMCC com a TAD como uma Praxeologia de Investigação Didática no campo da TAD.

3.1 Diálogo entre a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências – aspectos teórico-metodológicos

Nesta seção, apresentamos os aspectos teórico-metodológicos da TAD e da TMCC que sustentaram esta investigação, buscando estabelecer, também, uma comparação entre eles no sentido determinado em Prediger, Bikner-Ahsbahr e Arzarello (2008).

A *Teoria Antropológica do Didático (TAD)*, desenvolvida pelo francês Ives Chevallard, a partir de 1981, tem a dimensão antropológica do conhecimento como eixo central para evidenciar as relações do homem frente ao saber matemático, sendo suas investigações concentradas na atividade matemática no campo do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (CHEVALLARD, 1999).

A *Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC)* foi idealizada e construída por Patrícia Camarena Gallardo, a partir de 1982, durante sua atuação como pesquisadora do Instituto Politécnico Nacional do México, sendo suas investigações voltadas para dar sentido a conteúdos matemáticos ensinados em cursos de graduação nos quais essa ciência está a serviço, mas não objetivam formar matemáticos. Suas investigações estão localizadas na linha de investigação *Matemática Social* que abrange, segundo Camarena (2020), as áreas do conhecimento: *Ciências Sociais e Humanas*, *Matemática e Ciências Naturais*, além das subáreas dessas ciências por ela denominadas de *categorias de conhecimento*, nas quais estão vinculados os ramos dos processos educacionais, conforme mostrado no Quadro 2. Essas categorias são *Educação*, *Psicologia*, *Sociologia*, *Antropologia*, *Filosofia* e *Matemática*.

Quadro 2 – Categorias do conhecimento e seus ramos

Categorias do Conhecimento	Ramos dos processos educacionais
Educação	Currículo, Didática e Formação Docente.
Psicologia	Processos Cognitivos, Liderança, Atitudes e Funções, Motivação.
Sociologia	Desempenho Profissional.
Antropologia	Características dos Estudantes, Linguística.
Filosofia	Epistemologia, Ética e Valores.
Matemática	Todos os ramos.

Fonte: Camarena, 2020, p. 30

Para Chevallard (1999), a Didática da Matemática relacionada à TAD é parte do campo da *Antropologia do Conhecimento* (antropologia cognitiva), que se ocupa das investigações relativas aos fenômenos de ensino e de aprendizagem, sendo definida como “o estudo de

situações que visam à aquisição de *conhecimentos e de saberes matemáticos* pelos estudantes ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, bem como do tipo de aprendizagem que elas possibilitam” (ALMOULOUD, 2007, p. 14, grifo do autor). A partir disso, a TAD incorpora a antropologia como eixo fundamental, sendo seus objetos particulares as instituições, os sujeitos e a posição que eles têm em uma instituição, definida como um dispositivo social que impõe às pessoas que ocupam uma posição dentro dela *modos de fazer e de pensar próprios com restrições e condições* que influenciam a construção dos conceitos e propriedades que determinam a existência de um objeto de um conhecimento a ensinar.

O objeto de investigação da TAD emerge de *sistemas didáticos* definidos entre sujeito-instituição-saber, relações que existem nessas instituições. Consideram-se objetos matemáticos como entidades que surgem de sistemas de práticas existentes nas instituições e investiga as *condições* que permitem, facilitam ou favorecem o desenvolvimento de atividades didático-matemáticas realizadas em uma instituição, considerando as restrições que possam vir a dificultar a realização das atividades ou mesmo impedir que elas aconteçam (LUCAS *et al.*, 2016).

A TMCC parte do pressuposto de que o professor de Matemática, por meio de sua prática docente, deve favorecer a *formação integral* do estudante, visando à sua atuação profissional. O termo *formação integral* pode ser assumido de acordo com diferentes concepções, conforme o contexto ao qual está relacionado, e abrange as áreas intelectual, social e pessoal de formação do ser humano. Na última seção deste capítulo, apresentamos, com detalhes, a concepção assumida na TMCC.

Em busca de tal formação, na TMCC, caracterizam-se os processos de ensino e de aprendizagem, conforme Camarena (2021), como um *sistema* constituído pelos conteúdos a ensinar, o estudante e o professor, bem como as interações que ocorrem entre esses atores, ou seja, de um sistema didático no sentido da TAD. Assim, o objeto de investigação da TMCC emerge dessas interações e, portanto, das relações que, assim como na TAD, surgem a partir desse sistema.

Nesse sentido, o ambiente de aprendizagem e a TMCC formam um sistema complexo em que o processo educacional é composto por cinco blocos: Professor, Epistemologia, Cognição, Didática e Currículo. Esses blocos, embora nem sempre sejam explícitos, estão sempre presentes no ambiente de aprendizagem. Assim sendo, a TMCC estrutura-se por meio desse sistema que é composto de outros subsistemas que interagem entre si, denominados *fases*

dessa teoria, que são a fase *curricular* (relativa ao bloco Currículo), *epistemológica* (concernente ao bloco Epistemologia), *didática* (atinente ao bloco de mesmo nome), *docente* (referente ao bloco Professor) e *cognitiva* (relativa ao bloco Cognição). São essas fases que possibilitam analisar as problemáticas que intervêm no ambiente de aprendizagem, apoiadas em diferentes perspectivas, e as metodologias presentes em cada uma delas fornecem o caminho para a resolução dos problemas particulares provenientes de tais problemáticas. No decorrer desta investigação, utilizamos preceitos de cada uma dessas fases, que serão detalhados na seção seguinte.

A TAD estrutura-se de modo a “permitir focalizar o estudo das organizações didáticas ou praxeologias didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas” (ALMOULOU, 2007, p. 15), procurando compreender os Sistemas Didáticos em que atuam os elementos constituintes do sistema social de educação na definição dos saberes que devem ser ensinados e no modo pelo qual chegam às salas de aula.

Antes de esclarecer o que são essas praxeologias, é importante confrontar *conhecimento* e *saber* no âmbito da TAD e da TMCC, pois, nesta investigação, assumimos concepções diferentes para esses dois termos.

Na esfera da TAD, *conhecimento* e *saber* são, explicitamente, distintos. O saber é considerado como certa forma de organização de conhecimentos; é um objeto da ciência. O conhecimento é algo do sujeito relacionado a determinado saber ou conjunto de saberes. Para a TAD um

[...] objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece; se há um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento, [...]. A existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de pelo menos uma pessoa ou instituição com esse objeto (ALMOULOU, 2015, p. 11).

Então, para Chevallard (1991), o conhecimento é a própria relação pessoal ou institucional estabelecidas com os objetos do mundo. Todo saber surge vinculado a, pelo menos, uma instituição. A relação do sujeito com o objeto do saber acontece quando o indivíduo ingressa na instituição em que o objeto existe. Do ponto de vista dessa abordagem, nesta investigação, as Integrais Duplas são consideradas como objeto do saber, mas também são conhecimentos, por isso, são ensinadas.

Embora não tenhamos encontrado em nossos estudos sobre a TMCC definições distintas para *conhecimento* e *saber* explicitadas, concluímos que assim como na TAD, *conhecimento* e *saber* não são sinônimos nessa teoria. Para justificar nossa conclusão, começamos esclarecendo

que, na acepção da TMCC, a *interdisciplinaridade* acontece quando se estabelece relações entre duas ou mais áreas das ciências. Dessa forma, uma investigação no âmbito da TMCC é interdisciplinar quando intervém em duas ou mais áreas das ciências, havendo uma interação entre os *conhecimentos* (saberes, de acordo com Chevallard) dessas áreas, seus processos e conceitos, com perspectivas diferentes para ampliar a compreensão de um fenômeno ou problema estudado, conforme explica Camarena (2021 citando KRAVZOW, 2000).

A mesma autora acrescenta que uma investigação realizada dessa forma permite a vinculação de processos de criação do *conhecimento* (de área) a partir do uso de suas teorias, métodos e conceitos. Em outros termos, a partir dessas primeiras observações, podemos conjecturar, nesse momento, que o conhecimento para a TMCC é amplo, maior e vinculado a uma área ou subárea da ciência.

Convém esclarecer que uma investigação multidisciplinar, para Camarena (2021), contempla duas ou mais disciplinas, e uma investigação transdisciplinar é aquela em que os limites das áreas das ciências não são mais restritivos, estabelecendo-se um sistema que sobrepõe o plano das relações e inter-relações entre as áreas, dando lugar a uma nova área. Para melhor compreender o exposto, a mesma autora cita, como exemplo, a Mecatrônica como resultado da união da Mecânica com a Eletrônica e Sistemas de Computação.

Enquanto o termo *conhecimento* na TMCC parece, ao menos de acordo com o que foi apresentado até o momento, relacionado a áreas ou subáreas das ciências, o termo *saber*, à primeira vista, está vinculado, neste referencial, a sujeitos e competências.

Camarena (2015, p. 13) define competências como: “a mobilização cognitiva das forças de um profissional para enfrentar uma situação problemática, usando a integração de toda a sua bagagem conhecimentos, habilidades, atitudes e valores” e define “os saberes relacionados ao conhecimento, habilidades, atitudes e valores como componentes das competências.”.

Assim, de acordo com o que explicitamos até o momento, no âmbito da TMCC, o saber está associado ao sujeito, e o conhecimento é algo relacionado a uma área da ciência. Na TAD, conforme já especificamos acima, o saber é um objeto da ciência e o conhecimento é um componente do sujeito, relacionado a determinado saber ou a um conjunto de saberes. Assim, *conhecimento* e *saber*, até o momento, parecem ter posições opostas na TMCC e TAD.

No âmbito da TAD, as condições e restrições levam o conhecimento a passar por transformações adaptativas, que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. Esse processo denomina-se *Transposição Didática* e tem como característica questões que levam ao problema da legitimação de objetos do conhecimento ensinado e o avanço entre ele e

as referências que o legitimam. Quanto à sua definição, “a transposição didática é o trabalho que faz um objeto de *saber a ensinar* transformar-se em um objeto de ensino” (CHEVALLARD, 1992, p. 39, grifo nosso).

De acordo com Chevallard (1991):

- o *saber sábio (científico)* é aquele que é gerado a partir da pesquisa científica e registrado em publicações destinadas à comunicação de processos e resultados de pesquisa, ou seja, é o saber produzido na comunidade científica. É restritivo, codificado e composto de normas próprias do círculo de pesquisadores, geralmente de difícil entendimento por sujeitos que não foram munidos das competências necessárias à compreensão do conhecimento que esse tipo de saber declara. Nesse sentido, o objeto do saber sábio é aquele advindo da comunidade científica;
- o *saber a ensinar* é produto de uma transposição do saber sábio, ou seja, da transposição didática, conforme está explícito em sua definição. Nesse sentido, o *saber a ensinar* tem uma linguagem acessível aos sujeitos fora do círculo de pesquisadores. É munido de atributos didático-pedagógicos com a intensão de contribuir para a aquisição do conhecimento advindo do saber. Geralmente, compõe um material didático. Assim, o objeto de ensino é resultado de criações didáticas de objetos que garantam a funcionalidade do Sistema Didático, conforme visto em Kluth e Almouloud (2020);
- o *saber ensinado (escolar)* é aquele produzido durante os processos de ensino e de aprendizagem que permite decodificar o saber a ensinar em ambientes educacionais (salas de aula), tendo o professor como mediador. Ele incorpora elementos didáticos com o propósito de contribuir para a compreensão dos conceitos pelo estudante.

Chevallard (1991) salienta que um objeto do saber é considerado pelo sistema de ensino quando sua inserção for necessária ao sistema didático. Uma vez inserido em tal sistema, o saber sábio torna-se, então, um objeto do saber a ser ensinado, que deve ser transmutado em saber ensinado.

É importante ressaltar que, para cumprir o seu papel, a transposição didática precisa trazer o enfoque epistemológico como eixo central para as análises de ordem didática, conforme Chevallard (1992).

A metodologia *Dipcing*, vem sendo desenhada desde 1982 para apoiar a formação por competências, conforme concebida em Camarena (2015), portanto, propõe um processo

investigativo para o desenho de programas de estudo para disciplinas que apoiam a profissão em formação. Na proposta dessa metodologia, elabora-se o constructo teórico denominado *Transposição Contextualizada*, com o propósito de analisar de que maneira a Matemática discutida na universidade passa por transformações para se adaptar às necessidades sociais de outras ciências.

Esse constructo é subsidiado, do ponto de vista teórico, na noção de *Transposição Didática*, vista em Chevallard (1992), conforme Camarena e Flores (2012). Em Camarena (2021, p. 133), encontramos a definição de *Transposição Contextualizada* como: “o conjunto de transformações que um saber sofre para ir do saber a ensinar (localizado no ambiente escolar) ao saber de aplicação (localizado no campo da profissão).”.

Para a TMCC, são esses saberes que evidenciam a diferença entre a *Matemática escolar* (discutida em ambiente escolar) e a *Matemática de aplicação* no campo profissional. Nesse sentido, um saber de aplicação é “um conteúdo matemático que foi ensinado destinado a ser usado na profissão, que sofre um conjunto de transformações adaptativas que o ajustarão para aplicações na profissão” (CAMARENA, 2021. p. 144).

Segundo Camarena (2021), assim como existe na esfera da TAD a transposição didática com intencionalidade no ensino, que permite estabelecer processos necessários para transformar o saber sábio em um saber a ensinar, existe na TMCC a Transposição Contextualizada com intencionalidade na profissão, que permite estabelecer processos que modificam o saber escolar, transformando-o em um saber de aplicação.

Na explicitação da Transposição Contextualizada, Camarena (2021, p. 144) afirma que adota o termo *saber* como “a forma de denotar os conteúdos matemáticos ou conteúdos de qualquer outra ciência conforme especificado em Bachellard (1976) e Brouseau (1994).”, ou seja, o saber na esfera da TMCC associado à transposição contextualizada está relacionado ao aspecto evolutivo da ciência, o que faz com que o conhecimento passe a tomar uma conotação mais próxima da aprendizagem. Portanto, o conhecimento que antes estava vinculado a áreas ou subáreas das ciências e o termo *saber* que era discutido vinculado a sujeitos e a competências tomam conotações inversas quando a TMCC apresenta a Transposição Contextualizada e se aproximam do conhecimento e saber, como é definido na esfera da TAD.

No Quadro 3, trouxemos alguns trechos de Camarena (2021), nos quais a autora, por vezes, usa o termo *conhecimento* como algo do sujeito e *saber* como algo da ciência e, em outros, emprega esses termos associando conhecimento à ciência e saber ao sujeito.

Quadro 3 – Trechos associados a acepções de conhecimento e saber no âmbito da TMCC

Trechos	Acepções tomadas para conhecimento e saber no âmbito da TMCC
Entre outros problemas que surgem nessa área, muitas vezes os conhecimentos prévios em Matemática são deficientes, o que dificulta a vinculação das estruturas cognitivas entre o conhecimento novo e o anterior, impedindo uma Aprendizagem Significativa no sentido de Ausubel (1970) (p. 35).	Termo <i>conhecimento</i> associado ao sujeito
... queremos construir uma matemática que faça sentido para o estudante, que permita sua aplicação na <i>práxis</i> social da profissão, que o ajude a construir o conhecimento, que desenvolva habilidades abrangentes de formação e pensamento (p. 36).	Termo <i>conhecimento</i> associado ao sujeito
Com efeito, uma pessoa é competente quando exerce uma atividade profissional ou laboral utilizando e manuseando de forma integral o seu saber, em todas as suas dimensões, não apenas os saberes isolados (p. 58).	Termo <i>saber</i> associado ao sujeito
Concepção semântica de uma pessoa crítica: é aquela que coloca sua capacidade de pensar cuidadosamente sobre questões, ideias ou dados de natureza diversa, analisando-os e avaliando-os com conhecimento e inteligência, sem a interferência de opiniões ou sentimentos, sendo seu campo de trabalho a vida cotidiana, social e profissional (p. 54).	Termo <i>conhecimento</i> associado ao sujeito
Requer a formação em atitudes, valores e o desenvolvimento de competências para que o estudante mobilize de forma integral todos os seus saberes (p. 60).	Termo <i>saber</i> associado ao sujeito
Por outro lado, há problemas particulares para os quais é necessário um currículo interdisciplinar; em que os processos de ensino e de aprendizagem possibilitem ao estudante construir seu conhecimento. (p. 57)	Termo <i>conhecimento</i> associado ao sujeito
Cada fase inclui metodologias com fundamentos teóricos, de acordo com os paradigmas em que se baseia a TMCC dos quais se orientam os passos para o desenho curricular dos programas de matemática, descreve-se a didática do contexto, identifica-se a formação necessária ao professor, o funcionamento cognitivo dos estudantes é explicado e são fornecidos os elementos epistemológicos sobre o saber matemático ligado às atividades dos profissionais, entre outros (p. 67).	Termo <i>saber</i> associado à ciência
Foi apontado o propósito de construir uma matemática significativa para o estudante, que permita sua aplicação na <i>práxis</i> social em todas as áreas de sua vida (trabalho, vida profissional e cotidiana), o que o ajuda a construir conhecimento e desenvolver habilidades de pensamento. A construção do conhecimento matemático pelo estudante é o mais relevante nesse propósito, uma vez que a matemática significativa semeia o terreno para que o estudante possa construir seu conhecimento e desenvolver habilidades de pensamento (p. 58).	Termo <i>conhecimento</i> associado ao sujeito
A troca de ideias, as análises e discussões que acontecem dentro de uma equipe de trabalho, enriquecem em maior e menor lapso de tempo, do que ao tentar encontrar soluções por si mesmo. As mídias tecnológicas oferecem diferentes canais de comunicação para a construção de verdadeiras comunidades virtuais de aprendizagem, em que o diálogo é a ferramenta para a construção dos saberes e colaboração com os pares (p. 173).	Termo <i>saber</i> associado ao sujeito
Problemas a enfrentar: exigência de uma matemática significativa que motive o estudante a construir conhecimento, de modo que possa aplicar a matemática em problemas do seu campo social, por meio da modelagem matemática (p. 66).	Termo <i>conhecimento</i> associado ao sujeito
Da mesma forma, isso leva à abertura para outros campos do saber, que muitas vezes a convergência de diferentes disciplinas é o que gera conhecimento (p. 95).	Termo <i>saber</i> associado às ciências
É assim que os cientistas, ao estruturar o conhecimento, percebem que é impossível uma pessoa saber tudo e decidem artificialmente desagregar o conhecimento, de tal forma que até hoje em todas as escolas se encontrem o conhecimento de Química, Física, Matemática, Biologia, Economia e outras áreas do conhecimento, que não estejam explicitamente vinculadas ao ambiente de aprendizagem [...] (p. 73).	Termo <i>conhecimento</i> associado às ciências
A educação deve equipar as pessoas com saberes intelectuais permanentes que lhes permitem compreender o mundo ao seu redor e se conduzir com responsabilidade	Termo <i>saber</i> associado ao sujeito

e justiça. A principal função da educação é dar a todos os seres humanos a liberdade de pensamento, julgamento, sentimentos e imaginação necessários para que seus talentos se realizem e construam seu próprio destino (p. 95).	
Esse fenômeno epistemológico de desintegração do conhecimento é artificial, faz com que se apresentem conhecimentos isolados e artificialmente construídos, de tal forma que sejam alheios à função que a vida cotidiana e as atividades profissionais ocupam para os universitários. Ou seja, apresenta-se um conhecimento acabado, no qual o estudante não entende de onde veio, como foi que esta ou aquela definição foi construída; contribuindo para que os jovens vivenciem a ciência como mágica, como algo nem sempre compreensível e isso produz um ensino verticalizado. Além disso, os graduados ao longo de sua vida profissional terão que enfrentar problemas reais em que devem gerenciar o conhecimento das ciências básicas e as disciplinas de sua carreira de forma integrada (p. 73).	O <i>conhecimento</i> aqui parece estar associado ao saber a ensinar, conforme visto em Chevallard (1991), portanto, está associado à ciência.
É importante interpretar que a concepção desejada sobre a competência é do tipo construtivista e humanista. É humanista porque leva em conta os aspectos humanos da pessoa [...]. É construtivista porque os estudantes desenvolvem competências dentro de uma estrutura de construção de saberes integrados (p. 99).	Termo <i>saber</i> associado ao sujeito
Vale ressaltar que existem correntes de ensino que expressam que o conhecimento deve ocorrer como surgiu na história, ou seja, como um conhecimento não isolado (p.74).	Termo <i>conhecimento</i> associado ao saber sábio, conforme visto em Chevallard (1991), portanto, está associado à ciência.
Em outras palavras, o currículo deve conter conhecimentos matemáticos articulados com a profissão [...] (p. 139).	Termo <i>conhecimento</i> associado às ciências
Dessa forma, a TMCC apresenta o conhecimento em contexto quando os cursos de Matemática são ministrados nas universidades, ou seja, trabalha com conhecimento integrado com ênfase na interdisciplinaridade (p. 75).	Termo <i>conhecimento</i> associado às ciências
Tudo isso com o objetivo de oferecer ao estudante uma educação integral, por meio de um objetivo comum dos saberes interdisciplinares (p. 180).	Termo <i>saber</i> associado às ciências

Fonte: Adaptado de Camarena, 2021

Entendemos, então, que ao estabelecer a articulação entre a TAD e a TMCC, nesse aspecto, foi possível evidenciar que os termos *saber* e *conhecimento* carecem de ser mais bem explicados na esfera da TMCC e de terem seus usos uniformizados nos âmbitos das diferentes esferas dessa teoria. Uma vez que, no referido quadro teórico, um dos constructos centrais é a Transposição Contextualizada, explicitamente inspirada na Transposição Didática, uma noção do âmbito da TAD e, para estabelecê-lo, a TMCC assume o termo *saber* em consonância com na acepção dada a ele na TAD. Nesta investigação, o termo *saber* será assumido também como concebido por Chevallard (1991).

Da mesma forma, uma vez que as investigações de cunho cognitivo inseridas na TMCC têm como objetivo central identificar se e de que forma uma abordagem contextualizada da Matemática favorece aos estudantes construir conhecimentos significativos no sentido de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980) e na Teoria da Aprendizagem Significativa, o termo *conhecimento* é assumido de forma concordante a que se refere na TAD;

nesta investigação também adotamos a noção de conhecimento de maneira análoga a Chevallard (1991).

Uma vez confrontados os termos *conhecimento* e *saber* entre as duas teorias articuladas nesta investigação, passamos a esclarecer o que são as praxeologias na esfera da TAD. Para Chevallard (1991), os objetos matemáticos não existem por si só, mas se configuram como entidades que surgem de sistemas de práticas existentes em instituições dadas. Esses sistemas de práticas ou praxeologias são explicitados mediante tipos de tarefas em que o objeto matemático é mobilizado, por meio de, pelo menos, uma técnica justificada por uma tecnologia e uma teoria.

As tarefas ou tipos de tarefas, conforme Chevallard (1991), são artefatos, obras ou construções institucionais, cuja reconstrução é um problema próprio da didática. As técnicas possibilitam a resolução de certo tipo de tarefa, assim sendo, são modos de fazer um tipo de tarefa. O discurso teórico-tecnológico é usado para justificar as técnicas utilizadas, composto da tecnologia, um discurso racional – com o propósito de justificar a técnica e de explicar por que ela pode ser utilizada – e a teoria que tem a função de justificar a tecnologia usada.

Nesse sentido, de acordo com Gascón e Nicolás (2021), na TAD, as praxeologias podem ser classificadas em matemáticas (referentes à realidade matemática que deve ser ensinada) ou didáticas (referentes à forma como essa construção matemática é realizada). A estrutura de uma praxeologia, simbolicamente, é descrita como $[T/\tau/\theta/\Theta]$, em que a sua gênese, pessoal ou institucional, reside no bloco da prática (*práxis*) $[T/\tau]$, formado por um ou mais tipos de tarefa T e, pelo menos, uma técnica τ associada a elas (primeiro bloco dialético: saber fazer). Seu desenvolvimento requer o bloco tecnológico teórico $[\theta/\Theta]$, também chamado *logos* (segundo bloco dialético: saber), é composto por uma tecnologia θ e uma teoria Θ de descrição e justificação da *práxis*.

Qualquer atividade humana, realizada regularmente, pode ser interpretada sob uma praxeologia, entretanto, tanto os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias “não descrevem as propriedades intrínsecas dos objetos matemáticos, mas fazem referência às diferentes funções que estes objetos podem desempenhar em uma atividade”. Assim, “uma *praxeologia* [...] é a união, institucional ou pessoal, de um bloco da *práxis* e um bloco do *logos*” (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 10), cujas funções dependem da instituição em que a atividade está sendo desempenhada. Quanto à dinâmica praxeológica, segundo Gascón e Nicolás (2021), trata-se do bloco do *logos* que condiciona a *práxis*, pois é a prática que determina as técnicas que estão

justificadas em seu âmbito de validade, bem como os tipos de tarefas que podem ser abordados e os possíveis resultados em uma dada instituição.

Como uma praxeologia se aplica a uma atividade científica, obtém-se um modelo geral relativo à atividade denominada *Praxeologia de Investigação (PI)*, esquematizada por $[T_i/\tau_i/, \theta_i/\theta_i]$, que se manifesta quando se faz referência às *teorias científicas*. Quando essa praxeologia está associada a uma investigação didática, recebe o nome de *Praxeologia de Investigação Didática (PID)*, e se mostra como “um instrumento para descrever a estrutura e funcionamento da atividade científica, para unificar a linguagem e para moldar o diálogo em diferentes enfoques de investigação didática” (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 12).

Os autores ressaltam que, em uma PID, o bloco do *logos* científico contém um conjunto de postulados que determina o tipo de entidades e processos que fazem parte dos seus componentes, as relações entre eles e os critérios para descrever e justificar a *práxis* científica. O bloco da *práxis* contém os tipos de problemas científicos que estão sendo investigados e as técnicas ou metodologias de investigação que são utilizadas para estudá-los. No seu desenvolvimento, os dois blocos evoluem juntos. Como é o bloco do *logos* que condiciona a *práxis*, é ele que determinará o *problema didático* que, segundo Gascón (2011), identifica-se como um problema relativo ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, que emerge de um *problema docente*, levantado pelo professor quando tem que ensinar um conteúdo matemático aos estudantes.

Respaldados por esse pressuposto, nesta investigação, o problema docente considerado foi compreender como discutir as Integrais Duplas com estudantes de Engenharia Civil, de modo a despertar o interesse dos futuros engenheiros por esse conteúdo e possibilitar que eles passem a ver sentido em estudar tais integrais para além de uma abordagem, majoritariamente, procedimental subsidiada por cálculos algébricos associados às suas interpretações gráficas, o que, geralmente, vinha acontecendo na instituição de referência.

Nesta investigação, assumimos a articulação da TMCC com a TAD como PID e construímos o problema didático¹⁹ que será apresentado no capítulo seguinte. Em uma PID, “o *logos* fornece o caminho a ser seguido na investigação, enquanto a *práxis* constrói um *corpus*

¹⁹ O problema didático desta tese, cuja construção vem sendo elaborada nessa seção, é realizar uma investigação que nos permita desenvolver uma proposta de um processo de ensino das ID para estudantes do curso de Engenharia Civil, de modo a transformá-las em uma ferramenta de apoio a esses estudantes, visando ao exercício da profissão, para que eles desenvolvam a habilidade de interpretá-las e aplicá-las como um instrumento útil sem perder de vista o caráter científico e o discurso formal a elas inerentes.

de resultados que, em longo prazo, enriquecem a própria metodologia de investigação, entre outros, com novos métodos de análise” (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 12).

Gascón e Nicolás (2011) esclarecem que a formulação do problema didático deve refletir suas três dimensões fundamentais, pois elas são as características que definem e constituem a noção de problema didático, que são as dimensões *epistemológica, econômico-institucional e ecológica*, sobre as quais passamos a discorrer, separadamente, nas subseções seguintes, confrontando com as fases da TMCC que constituem os subsistemas dessa teoria.

3.1.1 Dimensão epistemológica do problema didático

Na TAD, conforme indica Chevallard (1991), o termo *epistemologia* é adotado como sinônimo de *Antropologia dos Saberes*.

A antropologia do conhecimento, portanto, acolhe em si uma antropologia do conhecimento, ou antropologia epistemológica, ou, estritamente falando, epistemologia. Isto posto, quando a didática que nos interessa admite como questão didática um saber integrado a um saber, o estudo a ser realizado situa-se dentro de um novo subcampo, na interseção da antropologia do conhecimento (ou epistemologia), por um lado, e a antropologia didática do conhecimento (ou didática cognitiva), por outro: ou a antropologia didática do conhecimento ou a didática do conhecimento - que assim passa a se abrigar na epistemologia (CHEVALLARD, 1991, p. 162, tradução nossa).

A dimensão epistemológica de um problema didático é central, tendo em vista que inspira e condiciona todas as outras, pois, se ela é considerada em primeiro plano, evidencia “as questões relacionadas à forma de descrever e interpretar os saberes matemáticos” (GASCÓN, 2011, p. 210), que permitem conhecer, entre outros, como um saber matemático foi desenvolvido, construído, interpretado; o escopo mais adequado para se propor um problema didático determinado para esse saber é o caminho para propor modelos para o problema didático. Do ponto de vista da didática, o saber matemático é visto como um modelo epistemológico geral, e cada um dos âmbitos da atividade matemática relacionada a esse saber é visto como um modelo epistemológico específico.

Nesse sentido, esse estudo fornece um modelo epistemológico no campo matemático posto em questão que se torna uma referência para analisar os eixos didáticos e matemáticos associados ao problema didático, pois permite ao pesquisador compreender e questionar o que está posto. Na TAD, esse modelo recebe o nome de *Modelo Epistemológico de Referência (MER)* e tem a função de traçar um caminho que permite conhecer mais profundamente o que

é o objeto de estudo e por qual motivo é estudado, conforme afirmam Farras, Bosch e Gascón (2013) além de permitir recuperar a razão de ser de certo saber matemático.

Queremos insistir mais uma vez que esses modelos epistemológicos construídos pela didática da matemática devem ser tomados como hipóteses de trabalho e, como tal, devem ser constantemente contrastados e revistos. O MER também é essencial para estudar o conhecimento matemático antes de ser transformado para ser ensinado (GÁSCÓN, 2011, p. 210).

A fase epistemológica da TMCC considera, nos processos de ensino, a epistemologia do contexto que, conforme visto em Camarena e Flores (2012), da mesma forma que os contextos de outras ciências dão sentido e significado à Matemática, ela também dá sentido e significado aos temas e conceitos das outras ciências. Com base nessa ideia, a TMCC propõe, além do constructo da Transposição Contextualizada, um percurso metodológico que, conforme Lima, Gomes e Bianchini (2021), permite realizar o estudo do objeto matemático em uma abordagem histórico-epistemológica.

Entretanto, esse estudo não culmina em um modelo sistematizado como o MER na TAD, mas evidencia como determinado saber matemático – ou conjunto de saberes matemáticos – foi desenvolvido e interpretado, sob o ponto de vista epistemológico, de maneira articulada a saberes de outras áreas de conhecimento ou da própria Matemática, bem como explicita que transformações tais saberes precisam sofrer para se tornarem, após organizados como saberes de ensino, saberes de aplicação, além de contribuir para outros aspectos da TMCC.

Conforme Mineiro (2019), é importante destacar que o MER está sujeito a revisões e modificações sempre que necessário, devendo ser tomado como parâmetro para os estudos e análises dos aspectos do saber matemático [saber científico] em questão, antes que seja transformado, por meio da transposição didática, em saber a ser ensinado. Nesse sentido, o MER é utilizado como um conjunto de hipóteses provisórias e dispõe de um sistema de referência para ser contrastado com o *Modelo Epistemológico Dominante (MED)*, presente em cada uma das instituições que faz parte do objeto de estudo e que é construído com base na dimensão econômico-institucional do problema didático que discutiremos na subseção seguinte.

3.1.2 Dimensão econômico-institucional de um problema didático

A dimensão econômico-institucional de um problema didático tem como principal propósito esclarecer “as questões ligadas às contingências institucionais, às regras e princípios que afetam o desenvolvimento de atividades ligadas ao estudo da matemática nessas instituições (MINEIRO, 2019, p. 24)”. Nesse sentido, é o estudo dessa dimensão do problema didático que evidencia o modo como um saber é interpretado em uma instituição, tanto do ponto de vista das praxeologias matemáticas quanto das praxeologias didáticas.

Nessa dimensão, fazemos a observação e descrição detalhadas das praxeologias institucionais existentes, tendo como referência o MER elaborado a partir da dimensão epistemológica, assim como o desenho, experimentação e evolução de novas organizações didáticas, construídas com critérios determinados com o objetivo de “estudar os eixos didáticos produzidos nos sistemas docentes quando são introduzidas mudanças didáticas controladas, bem como a sua viabilidade, além de constatar determinados fenômenos didáticos previamente formulados e explicitados em uma teoria.” (GASCÓN, 2011, p. 214).

Gascón (2011) esclarece que é a dimensão econômico-institucional que evidencia o resultado que tem produzido a ação da transposição didática nas praxeologias institucionais realizadas durante um período considerado e, para isso, depende de um instrumento para descrever e analisar as características dessas praxeologias. Esse instrumento é o *Modelo Epistemológico Dominante*, e os aspectos que o caracterizam, conforme Chaachoua e Bittar (2019), podem ser evidenciados por meio da análise dos documentos institucionais, como livros didáticos, projetos político-pedagógicos, matrizes curriculares, entre outros.

No percurso metodológico construído na fase epistemológica da TMCC, assim como propõe a TAD, a análise de documentos institucionais é realizada com o propósito de pesquisar como o conteúdo matemático envolvido em uma investigação ou situação de ensino é abordado, como é previsto o tratamento a ser dado ao assunto e em quais disciplinas – da área de Matemática ou não – ele é abordado.

Conforme Camarena (2000b; 2002), na fase curricular, realiza-se uma análise dos conteúdos matemáticos que são mobilizados pelas disciplinas, segundo as matrizes curriculares dos cursos que não estão na área da Matemática por meio de investigações realizadas em livros didáticos, documentos relacionados ao curso, entrevistas com professores, entre outros, com o objetivo de conhecer como os programas das disciplinas que determinam a atuação das ciências básicas nos cursos em que a Matemática está a serviço são construídos. A fase didática fomenta

a construção do conhecimento pelo estudante e o desenvolvimento de habilidades para a transferência do conhecimento matemático para as áreas sociais que o requerem; analisa a Matemática do ponto de vista do seu ensino e descreve um modelo didático para o progresso das competências necessárias aos estudantes em suas disciplinas, segundo Camarena (1987; 2000a; 2009; 2017b). Nessa fase, o estudo de documentos institucionais também é realizado.

Na esfera da TAD, durante a realização da análise institucional, busca-se evidenciar o MED a fim de identificar as condições oferecidas e as restrições impostas no âmbito do sistema escolar, o que Matos *et al.* (2018) chamam de infraestruturas didáticas. Essas condições e restrições, segundo Henriques, Nagamine e Nagamine (2012), abarcam as relações institucionais e pessoais com os objetos e as praxeologias que interferem nos processos de ensino e de aprendizagem.

De certa forma, por meio de suas fases epistemológica, curricular e didática, há também a realização da análise institucional na TMCC no sentido observado no campo da TAD, pois existe a necessidade de se conhecerem tanto a instituição de ensino quanto as instituições relacionadas a um objeto matemático em estudo, como documentos institucionais, comunidade acadêmica, entre outros. Essa análise, assim como na TAD, abarca as relações institucionais e pessoais com os objetos em estudo, além de evidenciar as condições oferecidas e as restrições impostas no âmbito do sistema escolar durante os processos de ensino e de aprendizagem de um objeto matemático em estudo. Entretanto, essa análise tem intencionalidade na profissão da graduação. Em comparação ao MED como um documento estruturado, não identificamos na esfera da TMCC indicação da construção de um documento a partir do estudo realizado. Passamos, então, à dimensão ecológica de um problema didático, na subseção seguinte.

3.1.3 Dimensão ecológica de um problema didático

Na dimensão ecológica de um problema didático, a TAD aborda o *estudo ecológico de um saber matemático*, cujos pressupostos permitem o questionamento da realidade, levando-nos a pensar a existência desse saber como resultado das ações e decisões humanas em um contexto construído a partir das necessidades temporais de uma sociedade. Nesse sentido, o estudo ecológico de um problema didático trata “das condições de construção e vida de uma praxeologia associada a um saber matemático numa ou em mais de uma instituição que o produz, o utiliza ou transpõe” (ALMOULOU, 2015, p. 12).

Segundo Mineiro (2019), a dimensão ecológica abrange a discussão a respeito das interações que acontecem entre as praxeologias matemáticas associadas às didáticas e as condições necessárias às modificações nesse processo. É na dimensão ecológica que se questiona, conforme Gascón (2011), os motivos pelos quais essas praxeologias são como são na instituição, além de evidenciar as condições requeridas para fazer com que elas possam ser modificadas. Nessa dimensão, Chevallard (1992) define *habitat* (estudo ecológico) como o lugar de vida de um saber, ou seja, o ambiente conceitual desse objeto, e define o *nicho ecológico* como o lugar funcional ocupado pelo saber nas praxeologias que o abarcam ou interagem nas instituições.

Na dimensão ecológica, surgem as questões relacionadas à origem das praxeologias, que são denominadas *razões de ser*. Nessa perspectiva, uma *razão de ser* é, para Chevallard (1991), determinada pela tarefa dada em uma praxeologia. O termo *razão de ser* pode ser usado no plural, uma vez que tais razões não são únicas, podem perdurar ou envelhecer se a sua necessidade não encontrar condições favoráveis à sua existência, ou seja, podem permanecer ou desaparecer de uma instituição se as questões às quais as praxeologias matemáticas poderiam vir a dar resposta deixarem de existir (LUCAS *et al.*, 2016).

Mineiro (2019) esclarece que as razões de ser de um determinado saber matemático, mesmo envelhecidas, não impedem que esse saber componha um currículo escolar, levando os agentes envolvidos em um processo de construção de conhecimentos a agir da mesma forma que agiam quando tal construção relacionada a esse saber fazia sentido ao estudante, sem questionar ou considerar a possibilidade de alterações na sua prática.

Conforme afirma Camarena (2021), muitas vezes os estudantes recebem os saberes matemáticos isolados e sem sentido, observando uma desconexão entre o que aprendeu sobre a Matemática na universidade e as questões em que precisam mobilizá-la, tendo em vista seus exercícios profissionais. Assim sendo, a autora afirma que a Matemática é vista sem sentido e sem significado, o que cria entraves para a construção do conhecimento pelo estudante. Essa preocupação também é observada no âmbito da TAD e pode significar, talvez, a perda da razão de ser de um objeto em estudo.

Segundo Almouloud (2015), a análise ecológica de um objeto de conhecimento é organizada por meio da alocação do objeto no seu *habitat* e no seu *nicho*. Em um dos parágrafos desta seção, vimos que, por meio da ideia de Transposição Contextualizada, na TMCC, há a preocupação de compreender como um saber matemático a ensinar se transforma em um saber de aplicação em determinado campo profissional. Nesse processo, a construção de significado

relativo a um saber matemático por um estudante é essencial, para que sejam construídos conhecimentos relacionados a tal saber que, posteriormente, sejam convertidos em conhecimentos relacionados ao saber de aplicação, vinculado ao saber matemático em foco. Para isso, é necessário relacionar o objeto matemático a uma ou mais áreas da ciência, verificar como esse objeto é mobilizado nessas diferentes áreas para que o saber em torno do objeto se torne um conhecimento construído pelo estudante com finalidade na profissão. Concluimos que, ao menos em questões de nomenclatura e de finalidade específica, as ideias de *habitat* e *nicho* estão presentes tanto na TMCC quanto na TAD.

De acordo com Gascón e Nicolás (2021), uma Praxeologia de Investigação Didática (PID) é um instrumento que permite descrever a estrutura e funcionamento da atividade científica, além de unificar a linguagem a fim de proporcionar o diálogo entre os diferentes enfoques de uma investigação didática. É construída por meio da união entre uma *práxis* científica e o *logos* científico, que permite a elaboração de um problema didático tendo como ponto de partida o problema docente.

Na próxima seção, apresentamos a articulação da TMCC com a TAD, explicitada como uma Praxeologia de Investigação Didática, na qual, na construção do problema didático sobre o qual nos detemos nesta investigação, as três dimensões discutidas foram preservadas, entretanto, a dimensão epistemológica foi mais enfatizada.

3.2 Aspectos teóricos e metodológicos e a construção do problema didático

Vimos em Gascón e Nicolás (2021) que, quando uma praxeologia se aplica a uma atividade científica associada a uma investigação didática, podemos obter um modelo denominado Praxeologia de Investigação Didática (PID). Simbolicamente, pode ser representado por:

$$PID = [T_i/\tau_i, \theta_i/\theta_i]$$

em que $[T_i/\tau_i]$ determinam o bloco da *práxis* científica e $[\theta_i/\theta_i]$ o bloco do *logos* científico.

O objetivo de trabalhar com esse modelo no campo de uma teoria é descrever a estrutura e funcionamento da atividade científica para unificar a linguagem e moldar o diálogo em diferentes enfoques de investigação didática. Nesse sentido, a articulação da TMCC com a TAD

é tomada nesta investigação como uma PID, em que os blocos do *logos* e da *práxis* científica são explicitados neste capítulo.

Quanto ao bloco do *logos*, segundo Gascón e Nicolás (2021) – conforme já pontuamos neste texto –, contempla em seu domínio o conjunto de postulados que fixam o tipo de entidades e processos, formadores de parte dos componentes da PID, as relações entre eles e os critérios para descrever e justificar a *práxis* científica. No caso da articulação da TMCC com a TAD como uma PID, é constituído pelos paradigmas da TMCC, por seu pressuposto filosófico-educacional e pelo fato de a TMCC estar inserida na linha de investigação da Matemática Social – elementos que são cuidadosamente descritos na subseção seguinte. Além disso, cada uma das fases da TMCC (que são detalhadas na sequência) é subsidiada por pressupostos teóricos específicos que também integram o bloco do *logos*.

Os autores ressaltam que a elaboração do problema didático a partir do problema docente é determinada pelo bloco do *logos* científico, uma vez que é ele que condiciona a *práxis* científica. Conforme mencionado na seção anterior, o problema docente considerado nesta investigação teve como foco compreender como discutir as Integrais Duplas com estudantes de Engenharia Civil, de modo a despertar o interesse dos futuros engenheiros por esse conteúdo e possibilitar que eles passem a ver sentido em estudar tais integrais para além de uma abordagem majoritariamente procedimental, subsidiada por cálculos algébricos associados às suas interpretações gráficas, o que, geralmente, vinha acontecendo na instituição de referência. Assim, no bloco do *logos* científico, a partir desse problema docente, elaboramos, como será discutido na subseção seguinte, o problema didático desta investigação.

Quanto ao bloco da *práxis* científica, nele são considerados os problemas científicos analisados no âmbito da TMCC, bem como os tipos de tarefas a serem realizadas, as quais exigem técnicas ou metodologias para serem efetivadas, diretamente atreladas às fases da TMCC, que fornecerão o caminho para as análises realizadas no quinto capítulo desta tese. Passamos ao detalhamento das construções desses blocos, nas duas subseções que se seguem.

3.2.1 A elaboração do problema didático e a construção do Bloco do Logos Científico da Articulação entre a TMCC e a TAD como uma PID

Segundo Camarena e Flores (2012), a TMCC contempla:

[...] um processo metodológico para contextualização ou vinculação, bem como uma estratégia didática que apresenta uma matemática contextualizada, dando origem à

interdisciplinaridade; onde o contexto dá significado para a matemática e esta, por sua vez, juntamente com as atividades de aprendizagem dá sentido ao contexto, estabelecendo uma relação bidirecional entre duas ou mais áreas do conhecimento (CAMARENA; FLORES, 2012, p. 13).

Por meio do *pressuposto filosófico-educacional* dessa teoria, assume-se que o estudante, durante a graduação, desenvolve competência para fazer a transferência dos conhecimentos das ciências básicas e, portanto, da Matemática para outras áreas nas quais eles são mobilizados, o que permite que a formação profissional e laboral do estudante seja construída ao longo do seu curso e contribua, efetivamente, para a sua formação integral. As competências são aqui entendidas como os pontos fortes de um indivíduo para enfrentar uma situação-problema em sua vida cotidiana ou ambiente profissional, mobilizando, de maneira integrada em suas estruturas cognitivas, toda sua bagagem de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores.

Mas como alcançar os objetivos atrelados ao pressuposto filosófico-educacional da TMCC? A busca por respostas para essa questão está no cerne das investigações didáticas desenvolvidas, tendo como subsídio tal referencial. Da mesma forma, os problemas didáticos estudados com o auxílio dessa teoria também estão diretamente vinculados às elucidações de aspectos que podem contribuir para respondê-la.

De acordo com o que apresentamos na seção anterior e tendo tomado a articulação da TMCC com a TAD como uma Praxeologia de Investigação Didática, a elaboração do problema didático, tendo como ponto de partida o problema docente considerado nesta investigação, é determinada pelo bloco do *logos* científico dessa praxeologia e, conforme veremos a seguir, refere-se à realização de uma investigação a fim de desenvolver uma proposta didática para o ensino de Integrais Duplas para estudantes do curso de Engenharia Civil, de modo que essas integrais desempenhem o papel de ferramentas de apoio a esses estudantes, visando ao exercício da profissão, sem perder de vista o caráter científico e o discurso formal que a elas são inerentes.

Para isso, precisamos explicitar os elementos que justificam os blocos do *logos* científico e da *práxis* científica dessa praxeologia. Porém, é fundamental, inicialmente, explicitarmos as concepções assumidas em tal quadro teórico para alguns termos que estão diretamente relacionados ao que será assumido com base nele. Em primeiro lugar, por meio do Quadro 4, sintetizamos as concepções para quatro termos bastante genéricos (no sentido de serem utilizados também em muitos outros contextos), empregados na TMCC, mas basilares para a estruturação da teoria, explicitando, também, de que maneira, a nosso ver, podem ser compreendidos no âmbito da TAD.

Quadro 4 – Concepções assumidas na TMCC e diálogo com elementos da TAD – parte 1

Termo	Concepção assumida na TMCC	Articulação com a TAD
Pesquisa científica	Investigação contando com uma base verificável e um processo metodológico para sua ação, exigindo, ainda, um esquema de descrição que a distinga de outras pesquisas não científicas. Seu escopo é limitado pela estrutura teórica que a sustenta.	Entendemos que a mesma concepção para pesquisa científica é assumida na TAD.
Linha de pensamento	Tendência ideológica estabelecida por meio da conduta ou comportamento devido a uma ou mais ideias específicas do âmbito de trabalho dos membros de uma comunidade.	A nosso ver, a mesma concepção pode ser assumida na TAD, entendendo-se, nesse caso, a comunidade como uma instituição no sentido de Chevallard (1991).
Paradigma educacional	Postura filosófica ou ideológica que permite a uma comunidade científica explicar, justificar ou substanciar um fenômeno educacional.	A mesma concepção pode ser assumida na TAD, considerando-se uma equivalência entre os termos <i>fenômeno educacional</i> (na TMCC) e <i>problema didático</i> (na TAD), com eixo central na dimensão epistemológica.
Premissa educacional	Suposição ou hipótese que fornece a base para um fenômeno educacional.	Na TAD, a concepção será assumida como sendo a mesma, mas, novamente, entendendo um fenômeno educacional como sendo equivalente a um problema didático.

Fonte: A autora, 2021

Por meio do Quadro 5, apresentamos as concepções de seis termos empregados na TMCC para fazer referência às aplicações dos conhecimentos matemáticos que os indivíduos, ao atuar em sociedade, necessitarão realizar em diferentes contextos. Dois desses termos – *cultura matemática* e *pensamento matemático* – não são específicos desse quadro teórico, mas, em Camarena (2021), têm os significados os quais são assumidos na TMCC, explicitados de maneira detalhada. Os quatro outros termos foram postulados pela autora no processo de desenvolvimento do supracitado referencial. Na terceira coluna do Quadro 5, estabelecemos articulações entre as aceções dos termos na TMCC e o que pode ser assumido na TAD.

Quadro 5 – Concepções assumidas na TMCC e diálogo com elementos da TAD – parte 2

Termo	Concepção assumida na TMCC	Articulação com a TAD
Cultura matemática	Conjunto de conhecimentos, habilidades e capacidades matemáticas mobilizado por um indivíduo em atividades cotidianas, sociais e profissionais.	Assumimos que, na TAD, a cultura matemática se relaciona com as praxeologias matemáticas relacionadas a determinado objeto (por exemplo, as Integrais Duplas no caso desta tese).
Pensamento Matemático	Capacidade de, em atividades cotidianas, sociais e profissionais, observar e refletir cientificamente sobre um fenômeno, processar, sistematizar e memorizar informações relevantes de forma eficiente, estabelecer e aplicar relações, raciocinar de forma indutiva, dedutiva, sequencial ou por analogia, pensar criativa, objetiva, lógica, analítica e criticamente.	Assumimos que, na TAD, o desenvolvimento do pensamento matemático é decorrente das praxeologias didáticas associadas aos diferentes saberes matemáticos.

Matemática para a vida	Conjunto de conhecimentos, habilidades e capacidades matemáticas que possibilita uma pessoa a responder às exigências da sociedade em sua vida profissional, de trabalho e cotidiana. Requer, ao menos, o desenvolvimento de uma cultura matemática, mas objetiva-se também o desenvolvimento do pensamento matemático.	Assumimos que, na TAD, a construção de uma Matemática para a vida é decorrente das praxeologias didáticas associadas aos diferentes saberes matemáticos.
Competências laborais	São, conforme Camarena (2018), as que possibilitam eficiência em qualquer atividade de trabalho a favor da sociedade. No campo da TAD, também se configura como uma consequência das praxeologias didáticas.	Assumimos que, na TAD, o desenvolvimento de competências laborais, competências genéricas da profissão e competências matemáticas da profissão é consequência das praxeologias didáticas associadas aos diferentes saberes matemáticos.
Competências genéricas da profissão	Conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que devem ser desenvolvidos por especialistas de uma determinada área profissional. No campo da TAD, configura-se, também, como uma consequência das praxeologias didáticas.	
Competências matemáticas da profissão	São as competências associadas à Matemática, que devem apoiar o desenvolvimento das competências genéricas e fundamentais da profissão em questão. No campo da TAD, configura-se, também, como uma consequência das praxeologias didáticas.	

Fonte: A autora, 2021

No Quadro 6, apresentamos na primeira coluna, a linha de pensamento e de investigação científica na qual a TMCC está inserida e, na segunda, aquela à qual a TAD está atrelada.

Quadro 6 – Linhas de pensamento e de investigação nas quais se inserem a TMCC e a TAD

Linha de pensamento e de investigação em que a TMCC está inserida	Linha de pensamento e de investigação em que a TAD está inserida
<i>Matemática Social:</i> é uma linha de pensamento e de investigação científica multidisciplinar que aborda questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Matemática por meio de uma visão holística e abrangente, assumindo que em tais questões incidem fatores relacionados a diferentes áreas do conhecimento, entre as quais, Educação, Psicologia, Sociologia, Antropologia, Filosofia e Matemática. A Matemática Social, como explicitado por Camarena (2021, p. 43), “pode ser epistemologicamente caracterizada como um campo de pensamento que rompe claramente com os conhecimentos habituais em relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática e ao desenvolvimento das competências matemáticas da profissão, em profissões nas quais a Matemática não é um objetivo em si mesma”.	<i>Antropologia Didática dos Saberes:</i> é um subcampo de investigação localizado na intersecção da Antropologia dos Saberes (ou Epistemologia) com a Antropologia Didática do Conhecimento (ou Didática Cognitiva), estando, portanto, inserido na Epistemologia. Uma vez que o foco inicial da TAD eram os saberes matemáticos, nesse domínio, as investigações realizadas com o auxílio desse referencial inserem-se na Antropologia da Matemática (o estudo do homem e da sociedade em contato com a Matemática e, em particular, o estudo do homem produzindo Matemática) como um campo especializado da Antropologia (CHEVALLARD, 1991; KLUTH; ALMOULOU, 2020).

Fonte: A autora, 2021

Uma vez que, como explicitado por meio da primeira coluna do Quadro 6, umas das áreas de conhecimento consideradas nas investigações inseridas na Matemática Social e, por consequência, nas subsidiadas pela TMCC, é a Antropologia, na qual também se inserem as investigações realizadas no âmbito da TAD. Evidencia-se, então, uma efetiva possibilidade – e

o que é fundamental, sem infringir os preceitos de tais referenciais – de articulação dos mencionados quadros teóricos.

Segundo Camarena (2013), a TMCC pressupõe que o professor de Matemática, por meio de sua prática docente, deve contribuir para a *formação integral* do estudante, visando à sua atuação profissional. Para isso, entende-se que os objetos matemáticos apresentados em situações de ensino e de aprendizagem devem estabelecer vínculos com outras ciências, atividades cotidianas e atuação do futuro profissional. Dessa forma, o estudante deverá, durante a sua graduação, ser capacitado para mobilizar os conhecimentos matemáticos para as práticas que os requerem. Essa formação integral, segundo a autora, está relacionada à *integração de diferentes conhecimentos* e pode ser dividida em categorias estabelecidas durante a formação profissional do estudante na graduação, as quais são:

- *construção do conhecimento integrado às estruturas cognitivas*: são os conhecimentos que, por meio de vínculos com conhecimentos prévios, integram-se às estruturas cognitivas e dão origem a uma Aprendizagem Significativa, conforme estudado na *Teoria da Aprendizagem Significativa* (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980), definida em Moreira (2012) como a aprendizagem que acontece quando o estudante é capaz de receber novas informações e racionalizar de forma a construir uma interação com o que já se sabe previamente e o que acabou de conhecer;
- *saber contextualizado*: o saber apresentado para o estudante de forma interdisciplinar e articulado e que, portanto, em consonância à TAD, retome a razão de ser de tal saber;
- *integração teoria e prática*: estabelece a relação entre a teoria e a prática de forma consistente e operante;
- *transferência de conhecimento* definida como a capacidade de um indivíduo utilizar um determinado conhecimento construído para resolver problemas em uma diversidade de contextos nos quais a mobilização de tal conhecimento é requerida e que permite a integração dos saberes escolares com os saberes da vida útil e produtiva do graduando, determinando a transferência do saber aprendido na universidade para a atividade profissional, fazendo com que esse saber se torne conhecimento.

Quanto a essas categorias, Camarena (2009) salienta que, a construção do conhecimento integrado engloba, entre outros, as ciências básicas desse curso. Já o saber contextualizado é materializado por meio da vinculação das ciências básicas às ciências específicas do curso de

graduação. Para a interação entre a teoria e a prática, as ciências básicas são fundamentais e fornecem ferramentas de manipulação dos saberes específicos desses cursos. Por fim, para a transferência de conhecimento, é fundamental ter a habilidade em aplicar conhecimentos acerca de objetos das ciências básicas de forma imediata e consistente, para estabelecer o elo entre os conhecimentos específicos da graduação e a transferência desses para a atuação profissional.

Por meio da TMCC, apresentam-se estratégias para que as situações de ensino e de aprendizagem dos objetos matemáticos presentes na graduação estabeleçam vínculos entre a Matemática, as outras ciências, as atividades cotidianas e a atuação do futuro profissional, para que o acadêmico seja capacitado para empregar conhecimentos matemáticos em sua área de formação, quando tais forem requisitados. Nesse sentido, a TMCC requer que o professor de Matemática, durante sua atuação, seja também um pesquisador para desempenhar sua função tendo como foco a formação integral do estudante que irá lhe requerer outros saberes além da Matemática.

As estratégias de ensino elaboradas no âmbito da TAD estão bem estabelecidas e se constroem por meio das praxeologias, conforme já destacamos nesta investigação. As praxeologias pensadas para o ensino de um objeto matemático, conforme Gascón (2001), não descrevem quaisquer propriedades intrínsecas a esses objetos, mas as diferentes funções que eles podem desempenhar em uma atividade, dependendo da instituição em que estão.

Isso significa que essas praxeologias podem ser elaboradas tendo o objeto matemático direcionado à função que ele pode exercer em uma instituição, podendo, portanto, serem elaboradas de forma a estabelecer vínculos entre o objeto matemático, as outras ciências ou atividades cotidianas, como preconiza a TMCC. Assim sendo, são exigidas investigações de caráter didático, visando analisar de que maneira um objetivo pode ser alcançado na instituição em questão.

Conforme Gascón e Nicolás (2021), o conceito de *paradigma didático* no âmbito da TAD se constituiu a partir de 1992. Nesse percurso, a noção foi fundamentada epistemologicamente por meio de uma reconstrução racional, no sentido de Lakatos (1971), da evolução histórica do problema epistemológico (da Matemática) e da caracterização de três tipos de modelos epistemológicos ou, como pontua Gascón (2001), padrões de organizações da Matemática como campo científico: euclidianos (nos quais são estabelecidas regras gerais *a priori* para a avaliação científica), quase-empiristas (nos quais se assume que, a partir do que se conclui por meio de raciocínios oriundos de um sistema dedutivo, é possível abstrair a veracidade ou falsidade científica, ou sua probabilidade/improbabilidade, ou sua moralidade ou

desejabilidade/indesejabilidade) e construtivistas (nos quais a ênfase está em compreender os mecanismos que possibilitam o desenvolvimento do conhecimento científico), que constituem esquematizações das respostas históricas às sucessivas formulações do referido problema epistemológico.

Segundo Gascón (2001), tal problema, em consonância com cada um desses modelos, pode ser formulado da seguinte forma:

- *Modelo Euclidiano*: como não incorrer, nas definições e nas provas, a um regresso infinito (ao buscar embasá-las a partir de termos primitivos) e justificar logicamente as teorias matemáticas?
- *Modelo Quase-empirista*: qual é a lógica do desenvolvimento do conhecimento matemático? Como estabelecer se uma determinada teoria é superior a outra?
- *Modelo Construtivista*: em que consiste a passagem de uma teoria T, de nível inferior, a outra teoria T', de nível superior? Quais são os mecanismos de desenvolvimento do conhecimento matemático?

Cada um desses tipos de modelos epistemológicos sustenta um tipo de *modelo de ensino* ou *paradigma didático*. Nessa perspectiva, Gascón e Nicolás (2021, p. 15) explicam que os “paradigmas didáticos e modelos epistemológicos são construções teóricas, que têm uma função metodológica, heurística, de serem contrastados com a realidade empírica”, cujas características podem ou não estar presentes em uma instituição de ensino.

Assim, os paradigmas didáticos são aqueles que, segundo os autores, permitem “explicar a práticas de ensino (as ações didáticas) que a instituição realiza ou que uma PID defende, bem como o tipo de problemas didáticos que a instituição considera relevantes ou que uma PID privilegia como problemas didáticos de pesquisa” (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 15).

Ainda, de acordo com os autores,

[...] um paradigma didático é um dos instrumentos utilizados pelo didata para iluminar e tornar visíveis certos fatos didáticos (ignorando outros) e para proporcionar uma interpretação para tais fatos como fenômenos didáticos. Esta interpretação baseia-se na ideia de que um novo paradigma permite relacionar entre si fatos que eram considerados independentes segundo as lentes do paradigma vigente (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 17).

No âmbito da *práxis* científica da TAD, conforme explicitam Gascón e Nicolás (2021, p. 20), a noção de paradigma didático foi generalizada com o objetivo de “modelar e ordenar

conceitualmente a realidade empírica de realidade empírica educacional não apenas no nível disciplinar (matemático), mas também no nível pedagógico (independente das disciplinas escolares) e sub-disciplinar”. Dessa forma, no âmbito deste referencial teórico, além de paradigmas disciplinares (relacionados à Matemática de forma geral), assumem-se alguns *Paradigmas Pedagógicos*, também *Paradigmas Subdisciplinares*, que estão relacionados a diferentes campos de atividade matemática escolar.

Em termos pedagógicos, o paradigma assumido no domínio da TAD é o *Paradigma de Questionamento do Mundo*, por meio do qual se preconiza que a atividade de indagação deve ser a motriz dos processos de aprendizagem. Indagação que deve ser desencadeada por

[...] uma questão problemática e, dado que muito raramente esta pode ser respondida diretamente com os elementos pertencentes ao sistema na qual foi gerada, requer-se a criação de diferentes tipos de modelos – conceituais, analógicos, gráficos, físicos ou matemáticos – do sistema em questão (ou de parte dele) com o objetivo de reformular e simplificar a questão problemática inicial e avançar em direção a uma possível resposta (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 31).

No que se refere, especificamente, à Matemática, assume-se na TAD o *Paradigma da Modelização Matemática*, por meio do qual interpreta-se a aprendizagem da Matemática como “um processo de construção de conhecimentos (relativos a um sistema matemático ou extramatemático) que é efetivado mediante a construção de um modelo matemático do mencionado sistema” (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 27).

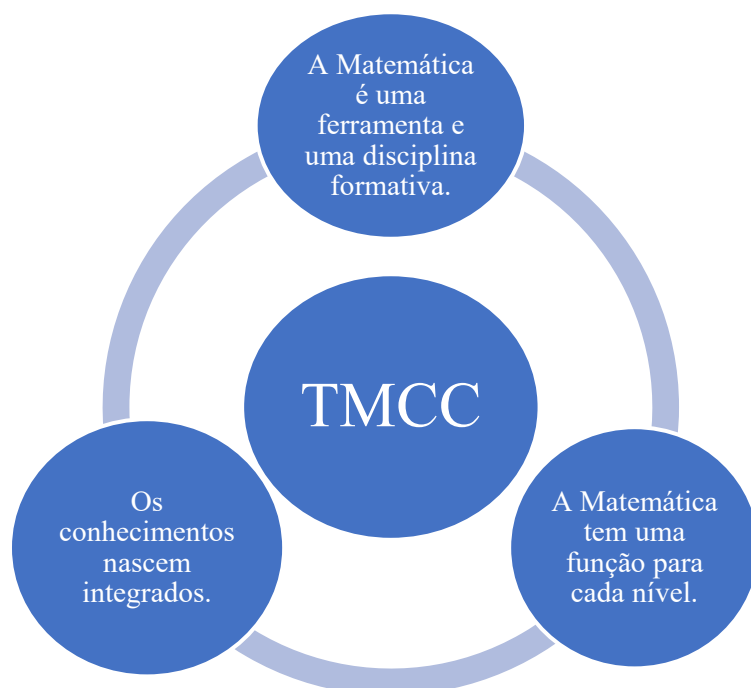
As estratégias didáticas planejadas para a implementação do *Paradigma da Modelização Matemática* sustentam-se no que é denominado, na TAD, de *Percursos de Estudo e Investigação*, dispositivos didáticos que, devido à sua grande flexibilidade, possibilitam “converter a atividade de modelização matemática em um trabalho sistemático, paciente, aprofundado e a longo prazo” (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 27). Nos diferentes âmbitos da atividade matemática escolar – nos níveis subdisciplinares, portanto, – assumem-se paradigmas construídos como respostas a fenômenos didáticos específicos, sempre vinculados à Modelização Matemática.

Na TMCC, por sua vez, conforme Camarena (1995; 2008, 2012), os *Paradigmas Educacionais* são assumidos como aqueles que fornecem a base para um trabalho com a Matemática no Ensino Superior, em cursos que não visam formar matemáticos, em conformidade com os propósitos da linha de investigação da Matemática Social. Esses estão vinculados à ideia de “que os estudantes construam uma matemática para a vida e sejam capazes

de se mover na sociedade e em todas as suas esferas, de forma crítica, criativa e analítica, além de desenvolver competências matemáticas para a profissão” (CAMARENA, 2021, p. 75).

Assim, os paradigmas que fundamentam a TMCC são: a Matemática é uma ferramenta de apoio a outras ciências e uma disciplina formativa aos profissionais; a Matemática tem uma função específica no Ensino Superior; os conhecimentos nascem integrados. Por meio da Figura 1, Camarena (2021) apresenta um esquema relacionando à TMCC e a esses três paradigmas.

Figura 1 – Paradigmas Educacionais que fundamentam a TMCC



Fonte: Camarena, 2021, p. 75

O primeiro paradigma relaciona-se à maneira como a Matemática no Ensino Superior deve ser trabalhada nos cursos de que ela está a serviço. Explicitaremos ao detalhar a justificativa do bloco da *práxis* científica da mencionada articulação dos quadros teóricos TMCC e TAD como PID.

Quanto aos elementos que caracterizam a Matemática como ferramenta de apoio, esses são a determinação de uma linguagem para a profissão, estabelecendo uma estrutura lógica e a ortografia para a linguagem científica, permitindo a otimização de projetos, recursos e de tempo; ajuda a minimizar os erros, proporciona maior precisão na análise de um problema e possibilita a previsão de comportamentos.

Quanto ao caráter formativo presente neste primeiro paradigma, fundamenta-se no “ponto de vista de Bunge (1975), que considera a matemática formal por ocupar-se da invenção

de entidades formais e relações entre elas” (CAMARENA, 2021, p. 69) e acrescenta que também se deve ao desenvolvimento para a profissão e para a vida cotidiana, de uma ordem mental lógica e reflexiva, ao desenvolvimento de critérios científicos e de um espírito crítico, analítico e criativo, e, finalmente, ao desenvolvimento de habilidades de raciocínio e de uma argumentação lógica e reflexiva.

No Ensino Superior, a Matemática deve contribuir para que os estudantes resolvam problemas da vida cotidiana, de outras disciplinas estudadas e desenvolvam habilidades de pensamento. Camarena (2021) acrescenta que, na universidade, a Matemática outorga caráter científico à profissão. Assim sendo, o segundo Paradigma Educacional determina que a Matemática seja abordada estabelecendo relação com a profissão do graduando, de forma que, nesse processo, a Modelagem Matemática assume papel de destaque.

Entretanto, é o terceiro paradigma que fundamenta os processos didáticos empregados na TMCC, favorecendo a abordagem dos problemas elaborados no âmbito dessa teoria, na qual a integração entre Matemática e profissão é fundamental. Tal paradigma explicita a importância da integração entre a Matemática, as outras ciências e as atividades laborais do futuro profissional. Conforme apresentaremos mais detalhes ao discutir o bloco da *práxis*, “os conhecimentos nascem integrados é o ponto central da teoria no que se refere ao desenvolvimento das fases que compõem a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências” (CAMARENA, 2021, p. 75).

Nesta investigação, como o objeto em estudo são as Integrais Duplas vistas em um curso de Engenharia Civil, a ideia é transformá-las em uma ferramenta de apoio a esses estudantes, visando ao exercício da profissão. Para isso, é necessário que os estudantes sejam capazes de interpretá-las como um instrumento útil sem perder de vista o caráter científico que a elas é inerente. Destarte, não basta, por exemplo, que os estudantes saibam manipular os tipos de representações dessas integrais. É primordial que as representações sejam associadas às questões que surgem no contexto profissional para o qual o estudante está em formação. Para isso, a integração entre o objeto matemático, as outras ciências e as atividades laborais do futuro profissional é essencial.

Assim, entendemos que os processos de ensino e de aprendizagem dessas integrais devem desenvolver, no estudante, competências para reconhecer tarefas a que as Integrais Duplas são adequadas e realizá-las no ambiente da futura profissão. Dessa forma, tanto os elementos que caracterizam a Matemática como ferramenta de apoio e caráter formativo – conforme o primeiro paradigma da TMCC – quanto a afirmação de que os conhecimentos

nascem integrados, no terceiro paradigma, integram o bloco científico da articulação da TMCC com a TAD como PID.

Assim, tendo as Integrais Duplas como objeto de estudo de um problema didático, os três paradigmas em questão reforçam o pressuposto educacional da TMCC quanto à formação integral do estudante e possibilitam subsídio para a formulação de um problema didático na qual o objeto matemático envolvido são as ID. Convém ressaltar que tais paradigmas são também consonantes ao Paradigma da Modelização Matemática assumido na TAD. O Quadro 7 traz outras definições necessárias para continuar descrevendo o bloco do *logos*.

Quadro 7 – Definições assumidas na esfera da TMCC

<i>Ambiente de aprendizagem</i> : é concebido como sendo a sala de aula, um espaço virtual na <i>web</i> , por meio do qual são ministrados cursos <i>on-line</i> ou qualquer espaço no qual haja a interação entre professores, estudantes e conteúdos curriculares.
<i>Ambiente social</i> : aquele em que há interação de qualquer tipo entre, pelo menos, duas pessoas.
<i>Ambiente cultural</i> : embora sempre presente, evidencia-se quando a cultura dos participantes de um ambiente de aprendizagem melhora ou dificulta a comunicação entre eles.
<i>Ambiente econômico</i> : está sempre presente, mas é fisicamente evidenciado por meio dos tipos de instalações, equipamentos etc. que se encontram nas instituições de ensino e quando as condições econômicas dos participantes dão apoio ou trazem obstáculos para as atividades de aprendizagem que realizarão.
<i>Ambiente político</i> : evidencia-se no ambiente de aprendizagem quando as políticas da instituição não favorecem o trabalho interdisciplinar.
<i>Ambiente emocional</i> : está sempre presente no ambiente de aprendizagem, mas explicita-se quando um participante, de alguma forma, expressa suas emoções, o que pode apoiar, dificultar ou ser indiferente para as atividades a serem por ele realizadas.
<i>Meio externo ao ambiente de aprendizagem</i> : é entendido, na TMCC, como sendo aquele no qual estão inseridos elementos dos ambientes dos tipos social, cultural, econômico, político e emocional.
<i>Meio institucional referente ao ambiente de aprendizagem</i> : é aquele no qual estão inseridos fatores administrativos, da área de controle escolar, das normas a serem cumpridas pelos professores e fatores educacionais (como o currículo para determinada profissão estabelecido segundo um modelo acadêmico diferenciado, a didática visada pela instituição etc.).
<i>Sistema</i> : é uma situação na qual vários fatores interatuam, sendo que a resposta a ele emerge desses fatores que, não isoladamente, mas ao mesmo tempo, influenciam na situação representada pelo sistema. Os sistemas permitem a observação global do fenômeno, ao mesmo tempo que possibilitam analisar cada uma de suas partes, sem negligenciar a relação existente entre elas e seu impacto sobre o fenômeno. Dessa forma, o fenômeno é entendido como um sistema e suas partes constituintes como subsistemas. Qualquer variação nos elementos de um sistema pode modificar as interações entre eles e, consequentemente, o comportamento de todo o sistema. O comportamento de um sistema depende, sobretudo, da maneira como os diferentes subsistemas que o compõem estão conectados, sendo que alguns deles podem ter mais influência do que outros no comportamento global. Dessa forma, para descrever adequadamente um sistema, é fundamental conhecer os elementos que o compõem, as interações que são estabelecidas entre cada um deles e como cada subsistema impacta. O grau de conectividade existente entre os diferentes subsistemas é estabelecido por meio do número de interações entre eles.
<i>Sistema aberto</i> : é um sistema imerso em um meio ambiente e tem seu funcionamento afetado por tal meio.
<i>Sistema Complexo</i> : para uma dada situação, vários subsistemas intervêm no sistema e interagem entre si, todos ao mesmo tempo, não isoladamente, determinando o comportamento do sistema. Se um subsistema tem variações, o comportamento do sistema é alterado, embora com diferentes níveis: dependendo do tipo de resposta esperada do sistema, alguns subsistemas exercem maior influência que outros, não sendo todos igualmente importantes. Para que o sistema seja determinado, os subsistemas devem ser definidos, assim como as interações entre eles e o grau de conectividade. Para determinar uma resposta do sistema em dado momento, é necessário saber como estão os subsistemas naquele momento, tendo em vista que um sistema pode ser medido por instantes ou intervalos de tempo, não de uma forma geral. De modo similar, para analisar como

determinadas mudanças afetam um subsistema, é necessário analisar como controlar determinadas variáveis que intervêm nos outros subsistemas ou fazer algumas suposições. Sendo um sistema complexo, o grau de conectividade entre os subsistemas é elevado, as interações entre eles não são lineares, podendo haver comportamentos imprevisíveis. Além disso, os sistemas complexos são abertos, uma vez que o ambiente em que está imerso interfere em seu funcionamento.

Fonte: Adaptado de Camarena, 2021

Conforme já acentuamos na seção anterior, o ambiente de aprendizagem e a TMCC formam um sistema complexo em que *o processo educacional é composto por cinco blocos: Professor, Epistemologia, Cognição, Didática e Currículo*. Esses blocos, embora nem sempre sejam explícitos, estão *sempre presentes no ambiente de aprendizagem*. Também conforme já mencionamos, esse sistema é composto de outros subsistemas que interagem entre si, as cinco fases da teoria: curricular, epistemológica, didática, docente e cognitiva, que possibilitam analisar as problemáticas que intervêm no ambiente de aprendizagem, apoiadas em diferentes perspectivas com metodologias presentes em cada uma delas e que fornecem o caminho para a resolução dos problemas particulares provenientes de tais problemáticas. As metodologias integrantes de cada uma dessas fases são detalhadas, nesta investigação, na justificação da *práxis* científica da articulação da TMCC com a TAD como PID, tendo em vista que são elas que determinam as técnicas do bloco da *práxis*.

Todavia, nessa justificativa do bloco do *logos*, fazem-se necessários alguns esclarecimentos: a fase curricular é dedicada a resolver problemas projetando um currículo de Matemática por competências e, ao mesmo tempo, estabelecer a interação entre o estudante e o conteúdo curricular, bem como entre o professor e o conteúdo curricular; a fase epistemológica faz o estudo epistemológico do objeto matemático articulado as outras áreas da ciência; na fase didática, a interação e comunicação entre docente e estudante são construídas por meio de uma didática que permite abordar e resolver os problemas identificados; a fase docente trata das questões relacionadas à formação dos professores; e, por fim, a cognitiva está relacionada às características e deficiências acadêmicas do estudante.

Ademais, é necessário esclarecer que:

- como as fases interatuam umas com as outras o tempo todo, pelo fato de as problemáticas a que dizem respeito e seus processos de abordagem estarem entrelaçados, os subsistemas interagem entre si e tais interações, que são não lineares, determinam o comportamento do sistema;
- se alguma alteração relacionada aos elementos de determinado subsistema (fase) é realizada, os demais subsistemas (fases) também sofrerão modificações;

- o intrincado conjunto de problemáticas relacionadas ao ambiente de aprendizagem é suficientemente complexo, devido ao alto grau de conectividade entre os subsistemas, para que os problemas de uma fase possam ser solucionados sem qualquer intervenção em questões inerentes a outras fases;
- ao buscar uma determinada resposta para o sistema em dado momento, é necessário saber como estão os subsistemas, porque a resposta dependerá de como são os efeitos das problemáticas de cada uma das fases que interferirão no comportamento global do sistema no período determinado. É preciso considerar que, entre outras situações, o intervalo de tempo pode variar de semestre para semestre, haja vista que podem ser estudantes diferentes, caso em que haverá mudanças, ainda que sutis, nos elementos que compõem as problemáticas das diferentes fases. Da mesma forma, o intervalo de tempo pode variar de um tópico para outro do programa da disciplina, já que nem todos os tópicos têm o mesmo grau de dificuldade;
- o sistema composto pelas cinco fases (subsistemas) da TMCC é aberto porque tem seu funcionamento afetado pelos ambientes em que está imerso, a saber: o meio externo ao ambiente de aprendizagem e o meio institucional referente ao campo de aprendizagem.

E, por fim, esclarecemos, nesta seção, as concepções teórico-filosóficas ou pressupostos teóricos que sustentam um bloco do *logos* científico que ampara as fases dessa teoria, conforme descrito nos fundamentos de uma Praxeologia de Investigação Didática.

Para Bachelard (1981), a relação epistemológica do conhecimento é essencial nos processos de ensino de um objeto matemático e, portanto, nos processos de pesquisa pensada para o ensino de um objeto matemático. Essa premissa é assumida pela TMCC, conforme descrevem Camarena e Flores (2012), sendo, também, fundamental para a construção do problema didático no domínio da TAD.

Segundo Camarena e Flores (2012), a concepção de *epistemologia*, no domínio da TMCC é adotada com fundamentos na perspectiva do filósofo austríaco Karl Popper (1986), cuja filosofia – *o racionalismo crítico* – ocupa-se das questões relativas à teoria do conhecimento (à epistemologia), ou seja, para a TMCC a epistemologia é a teoria do conhecimento.

No racionalismo crítico, a ciência é concebida como uma construção racional que acontece baseada no enfrentamento dos problemas que surgem ao longo da vida. O conhecimento é falível e corrigível virtualmente, sendo representado por um sistema de

enunciados, que são teorias apresentadas à discussão. “O conhecimento, dessa forma, apresenta-se como objetivo, hipotético ou conjuntural, não permitindo que exista indução” (SCHMIDT; SANTOS, 2007, p. 7). Quanto ao saber científico, esse é construído e não pode ser descoberto por meio de resultados de dados de investigações empíricas. Com essas concepções, uma investigação pode ter “como ponto de partida, um problema em que a solução, que tem condição de tentativa, se constituiu, portanto, em uma hipótese, conjectura ou teoria” (POPPER, 1986, p. 94).

Para Popper (1982), a tarefa da epistemologia ou da filosofia da ciência é, portanto, “reconstruir racionalmente as provas posteriores pelas quais se descobriu que a inspiração era uma descoberta ou veio a ser reconhecida como conhecimento” (POPPER, 1982, p. 32), uma vez que “todo o nosso conhecimento é impregnado de teoria, inclusive nossas observações” (POPPER, 1975, p. 75). Quanto à aquisição de um novo conhecimento, esse “desenvolve-se sempre como resultado da modificação de conhecimentos prévios” (POPPER, 1987, p. 33), e dissemina-se por meio da linguagem, sendo ela o meio pelo qual podemos nos apropriar do conhecimento construído pelo outro.

Conforme Silveira (1996), a função argumentativa da linguagem no *racionalismo crítico* é observada em atividades que propiciam discussões críticas, pois é por meio dela que acontece a manifestação da capacidade humana de pensar racionalmente com o uso da argumentação crítica regulada pela ideia de validade. Popper e Lorenz (1990) enfatizam que, no aspecto interno ativo do sujeito no processo de construção do conhecimento, esse surge por meio da “atividade que nos é inata, por meio de uma série de estruturas que nos são inatas e que estamos aptos a desenvolver: aprendemos através da atividade” (POPPER; LORENZ, 1990, p. 31).

Em síntese, o enfoque epistemológico de Popper está direcionado, exclusivamente, ao conhecimento científico, à sua validade, às relações lógicas que permitem sua justificação, aos aspectos normativos e filosóficos da ciência e à análise de situações problemáticas da ciência. Conforme Camarena e Flores (2012), à TMCC são agregados os seguintes aspectos que caracterizam a epistemologia de Popper:

- a busca da validade do conhecimento, pois entende que ciência está à procura da verdade, não sendo importante os critérios pelos quais se possa demonstrar que uma dada teoria seja verdadeira;

- a aquisição de um novo conhecimento desenvolve-se sempre como resultado da modificação de conhecimentos prévios;
- a consideração da linguagem como a manifestação da capacidade humana de pensar racionalmente com o uso da argumentação crítica regulado pela ideia de validade;
- o caráter lógico-metodológico da Matemática;
- toda investigação científica parte de problemas, sendo esse o caminho inicial para o desenvolvimento da ciência.

Na TAD, por sua vez, como anteriormente destacado a partir de Chevallard (1991) e de Artigue (1990), a epistemologia diz respeito, entre outros aspectos, à explicitação da gênese de determinado saber, de sua evolução histórica e de suas diferenças (como saber científico) em relação ao saber escolar.

Como a fase epistemológica da TMCC considera nos processos de ensino a epistemologia do contexto (os contextos de outras ciências dão sentido e significado à Matemática e ela também dá sentido e significado aos temas e conceitos das outras ciências), fundamentando o princípio da interdisciplinaridade (integração entre diferentes áreas das ciências) da TMCC, segundo Camarena (2001), é na fase epistemológica da TMCC, conforme já explicitamos na seção anterior, que se elabora o construto da *Transposição Contextualizada*, que é subsidiado, do ponto de vista teórico, na noção de *Transposição Didática*, vista em Chevallard (1991).

Nesse construto, de acordo com Camarena (2001), um saber a ser ensinado destinado a certa graduação passará por um conjunto de transformações adaptativas que o tornarão adequado para aplicações, sendo esse conjunto de mudanças pelas quais o saber sofre para passar do saber escolar para o saber contextualizado na esfera social.

O saber contextualizado, em conformidade com a epistemologia de Popper (1986), como mostrado acima, apresenta-se como objetivo, hipotético ou conjuntural e é construído tendo como ponto de partida um problema ou situação aplicada, conforme acentuado em Camarena e Flores (2012).

Entretanto, durante o processo da Transposição Contextualizada, os obstáculos são evidenciados, incluindo, de acordo com Camarena e González (2001), aqueles denominados por *obstáculos epistemológicos* e que são discutidos em Brousseau (1983), autor cujas ideias também subsidiam, do ponto de vista teórico, a fase epistemológica da TMCC.

Refletindo sobre os obstáculos que surgem durante o processo de Transposição Didática no âmbito da TAD, Almouloud (2007) ressalta que esses são de origem didática e nascem de escolhas realizadas pelos professores quanto às estratégias de ensino que influenciam na elaboração dos conceitos pelos estudantes e consequente construção do conhecimento. O autor afirma que os obstáculos didáticos são próprios da necessidade da Transposição Didática, “embora seu reconhecimento permita ao professor rever a introdução escolhida para um determinado conceito, para explicar um determinado conceito e explicitar a dificuldade vivida pelo estudante” (ALMOULOU, 2007, p. 142).

Na TMCC, a Transposição Contextualizada permite que os conteúdos matemáticos se articulem com aqueles da área de conhecimento da graduação do estudante por meio da interdisciplinaridade (saberes de áreas do conhecimento) e o saber matemático da sala de aula se transforma para se adaptar às necessidades sociais de outras ciências.

Nesse sentido, um dos principais desafios da fase epistemológica dessa teoria no processo de construção do conhecimento acerca de determinado objeto matemático é a produção de materiais didáticos ou atividades com abordagem contextualizada do objeto matemático discutido, capazes de minimizar os obstáculos epistemológicos identificados em relação à construção do conhecimento acerca desse objeto, conforme acentuado em Lima, Gomes e Bianchini (2021).

Considerando o objeto em estudo nesta investigação, pelo que explicitamos até o momento em relação aos subsídios teóricos da fase epistemológica da TMCC, segundo a concepção de epistemologia de Popper (1986), o enfoque epistemológico dado às Integrais Duplas deve considerar o saber científico que elas traduzem, a sua validade e as relações lógicas que permitem a justificação do saber científico em relação aos aspectos normativos e filosóficos das ciências que as mobilizam por meio de situações-problema.

Entendemos, também, que é na fase epistemológica da TMCC que encontramos subsídios que permitem fazer com que essas integrais, como saber científico, sofram uma transposição quando levadas à sala de aula, sendo transformadas em saber escolar, que, por meio da transposição contextualizada, deve ser transposto em um saber de aplicação na profissão, no caso desta investigação, a Engenharia Civil. Ademais, é nessa fase que possíveis obstáculos dos estudantes em relação a essas integrais podem ser evidenciados ou minimizados por meio de atividades contextualizadas.

Nesse sentido, a dimensão epistemológica das Integrais Duplas fornece uma descrição e uma interpretação, além de justificar o seu ensino e ser parte integrante do problema didático

no qual elas estão inseridas. Considerando a articulação da TMCC com a TAD como PID a partir dessa investigação didática, construímos, com base no estudo epistemológico realizado, o Modelo Epistemológico de Referência com o propósito de que ele seja a referência para analisar os eixos didáticos e matemáticos associados ao problema didático em que as ID estão inseridas, pois o MER contém as razões oficiais que justificam o ensino dessas integrais, além de nos permitir compreender e questionar o que está posto na instituição de referência.

Do ponto de vista cognitivo, é necessário entender como o graduando percebe, compreende, aprende, lembra, pensa, transforma e aplica um conhecimento matemático. Assim sendo, a TMCC assume a concepção cognitiva de que aprender Matemática implica que o estudante seja “capaz de integrar em sua estrutura cognitiva a vinculação entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, em várias dimensões, e utilizá-las para resolver eventos específicos em sua área de formação profissional” (TREJO; CAMARENA, 2011, p. 182).

Nessa concepção, o cognitivismo tem enfoque na *Psicologia da Educação*, em que a aprendizagem pode ser definida como “um processo de armazenamento de informação, condensação em classes mais genéricas de conhecimentos, que são incorporados a uma estrutura do [...] indivíduo, de modo que esta possa ser manipulada e utilizada no futuro” (MOREIRA; MASINI, 1982, pp. 3-4). Assim sendo, a aprendizagem é a habilidade de organização das informações que deve ser desenvolvida no estudante.

Assim, na fase cognitiva da TMCC para subsidiar essa concepção do que significa aprender Matemática, sendo a aprendizagem conforme definição no parágrafo anterior, a TMCC assume aspectos construtivistas da *Aprendizagem Significativa* de David Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980), importante representante das teorias cognitivistas em Psicologia da Educação. Essa teoria é “caracterizada pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, [...] não literal e não arbitrária em que os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva” (MOREIRA, 2012, p. 2). Nessa abordagem, a Aprendizagem Significativa ocorre quando uma nova ideia se relaciona aos conhecimentos prévios em situações relevantes para o estudante, de modo que tais conhecimentos e as atribuições de sentido dependem das interações sociais.

Novamente, a TMCC busca subsídios teóricos para dar sentido e significado a um objeto matemático e, nesta investigação, dá sentido e significado às ID que, no contexto social, será desde que essas integrais sejam associadas a conhecimentos prévios dos estudantes. Destarte, podemos considerar a possibilidade de apresentar as ID aos estudantes de Engenharia Civil,

como uma extensão das integrais de funções de uma variável real, desde que tenham sentido e significado para esses estudantes, com finalidade na profissão. Portanto, tal aspecto deve ser considerado para a construção do problema didático desta investigação.

Conforme Gascón (2011), as questões que caracterizam a dimensão epistemológica de um problema didático, segundo a TAD, ocupam uma posição central no problema e não são, portanto, próprias da dimensão econômico-institucional ou ecológica, pois aquelas de cunho epistemológico são as fundamentais da teoria do conhecimento. O autor garante que a dimensão epistemológica de um problema didático é ainda mais essencial do que a dimensão cognitiva, sendo o motivo pelo qual a TAD não considera que as questões diretamente relacionadas ao cognitivo, no sentido da *psicologia cognitiva*²⁰, sejam consideradas uma das dimensões fundamentais de um problema didático. Entretanto, o autor ressalta que a dimensão cognitiva pode ser tomada como uma dimensão secundária desse problema.

Cavalcante, Lima e Andrade (2018), ao elaborarem um modelo para investigação de fenômenos ligados à dimensão cognitiva a partir da TAD, assumem a cognição como um fenômeno situado no contexto institucional e caracterizaram o lugar do sujeito psicológico na TAD. Concluem que, nesse quadro teórico, a noção de relação pessoal aos objetos de saber possibilita que a aprendizagem seja tomada como um evento relacional constituído de uma dimensão institucional e outra individual, o que pode ser ampliado se reconhecermos que os sujeitos de uma instituição partilham significados, têm responsabilidades, além de elaborarem expectativas em relação a um saber, à instituição e sua participação nela.

Diante do exposto, os autores consideraram que essa relação, desse ponto de vista, é tratada além da dimensão epistemológica, envolve o que é social e psicológico – a dimensão cognitiva. Embora tenhamos mencionado a possibilidade de análise cognitiva no âmbito da TAD, nesta investigação, o estudo realizado não se voltou a essa dimensão e, por essa razão, não é considerado quando assumimos a articulação da TMCC com a TAD como uma PID.

Do ponto de vista da didática, os preceitos construtivistas que embasaram a principal metodologia da TMCC, a *Didática da Matemática em Contexto*, que será detalhada no bloco da *práxis* e integra a fase didática da TMCC estão ancorados:

²⁰ A *Psicologia Cognitiva* surgiu nos anos 1960, principalmente a partir do interesse dos pesquisadores dessa área da ciência em investigar temas como: linguagem, memória, percepção, formação de conceito, pensamento e demais atividades mentais relacionadas por meio de experimentos controlados. De acordo com Sternberg (2008), pode ser caracterizada como o estudo da forma como os sujeitos percebem, aprendem, lembram-se algo, processam as informações e pensam sobre elas.

[...] na abordagem psicogenética de Piaget (1991), que afirma a competência cognitiva é determinada pelo nível de desenvolvimento intelectual; que qualquer aprendizagem depende do nível cognitivo inicial do sujeito e inclui seu modelo de equilíbrio, onde o conhecimento no indivíduo é gradativo, passando do concreto ao abstrato. Na abordagem sociocultural do russo Vygotsky (1978), que afirma que a aprendizagem é um processo fundamentalmente social, onde o diálogo e a linguagem ocupam um papel central na instrução e no desenvolvimento cognitivo, com ênfase especial na aprendizagem cooperativa, [...]. Na Abordagem Cognitiva Norte-Americana da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1990), quando conceitua a aprendizagem como uma reestruturação ativa de percepções, ideias, conceitos e esquemas, por meio da relação substantiva entre novas informações e ideias anteriores do estudante, concluindo que, o aprendizado não se reduz a simples associações rotineiras (CAMARENA, 2017, p. 4).

Assim, a didática como regente dos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas deve considerar que o estudante precisa ter alcançado um nível de desenvolvimento intelectual de forma a permitir que ele tenha desenvolvido as estruturas cognitivas necessárias à sua compreensão, bem como o processo de aprendizagem das ID está associado à relação dessas com o meio social na qual estão inseridas, ou seja, à relação das integrais com a profissão, e ainda reforça os preceitos já assumidos na Aprendizagem Significativa de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

Na perspectiva curricular, a TMCC é subsidiada pelas correntes curriculares de Ralph Tyler (1973), Hilda Taba (1974) e de Ángel Díaz Barriga (1984), cujos aspectos curriculares considerados no âmbito dessa teoria são:

- a elaboração de currículos jamais pode perder de vista o contexto social e o próprio estudante;
- o primeiro passo para desenvolver inteligentemente um currículo é ter clareza acerca dos objetivos educacionais a serem alcançados;
- ao elaborar o currículo de um curso de graduação no qual a Matemática está a serviço, é importante vincular a universidade à sociedade, analisando o que o futuro profissional necessita em relação a esta área de conhecimento, quais são as funções do estudo de determinado conteúdo em sua formação;
- ao construir um currículo, é necessário analisar atentamente a estrutura subjacente aos conteúdos que constarão nas diferentes disciplinas que comporão a matriz curricular, de forma a identificar quais são os conteúdos de uma disciplina que se relacionam com aqueles que serão abordados em outras disciplinas dessa matriz;

- diagnosticar os conhecimentos prévios que, em geral, os estudantes trazem ao ingressar em determinado curso de graduação é um passo importante para determinar como deve ser o currículo para uma determinada população;
- para elaborar um currículo, é necessário ter em mente que nenhuma fonte única de informação é ampla o suficiente para compreendermos os objetivos visados; é importante analisar diferentes tipos de fontes para coletar informações acerca do que se deve ter como alvo no ensino;
- ao elaborar um currículo, não basta ter claros apenas objetivos visados por meio de determinada formação, mas as competências e desempenhos profissionais;
- deve-se elaborar um currículo de forma a ser possível implementá-lo, buscando-se a integração de todo o conteúdo que será trabalhado durante o curso e apresentá-lo de forma integrada de tal maneira que permita aos estudantes perceber a unidade e a totalidade que guardam os fenômenos entre si;
- o currículo deve permitir, ainda, relacionar os diferentes conteúdos às problemáticas nas quais estão imersos em determinada área de formação.

Nesse sentido, é fundamental identificar as competências matemáticas relativas às Integrais Duplas que devem ser desenvolvidas no estudante para serem aplicadas no âmbito da Engenharia Civil e que possam contribuir para a formação integral do estudante, ou seja, que contribua com os elementos e características que um egresso deve construir durante a sua formação escolar e acadêmica.

Dessa forma, essa fase possibilita indagar sobre o lugar ocupado pelas Integrais Duplas no ensino, que no âmbito da TAD vem contribuir para destacar, entre outros, seus *habitats* e seus nichos ecológicos. Para realizar essa análise, tomamos como referência a dimensão econômico-institucional do problema didático, pois é ela que nos permite perceber como esse saber é interpretado na instituição estudada, tanto do ponto de vista das praxeologias matemáticas quanto das praxeologias didáticas.

Assim, é a dimensão econômico-institucional que evidencia o resultado que tem produzido a ação da transposição didática nas praxeologias institucionais que vêm sendo realizadas, tendo as ID como objeto em estudo, e nos permite, considerando a TMCC com a TAD como PID, construir o Modelo Epistemológico Dominante para descrever e analisar as características dessas praxeologias.

No que se refere à formação para o exercício da docência no Ensino Superior, assunto do qual trata a fase docente da TMCC, Camarena (2011) considera que é importante formar professores quanto ao saber relacionado à sua disciplina, quanto às habilidades necessárias para o exercício da docência, às especificidades do curso no qual leciona, às competências necessárias aos estudantes que devem ser desenvolvidas na graduação com vistas à sua formação profissional, às competências necessárias à formação geral do cidadão quanto às áreas humanistas e sociais, aos diferentes modos de aprendizagem dos estudantes, aos processos de avaliação, às aplicações da ciência e da tecnologia como recurso dos processos de ensino e impacto nos processos de aprendizagem.

Com essa formação, pressupõe-se, por meio da TMCC, que o professor, no exercício de sua profissão, seja capaz de “permitir que o estudante construa o conhecimento matemático e que este seja significativo para ele no sentido proposto por Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980) [...]” (CAMARENA, 2013a, p. 21), uma vez que, conforme já apontamos nesta seção, essa teoria assume aspectos construtivistas da teoria cognitivista da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). O professor precisa, também, possibilitar ao estudante, durante o processo formativo, o entendimento de que os conhecimentos nascem de forma integrada, sendo a Matemática um instrumento para resolver problemas do seu campo de atuação profissional. Desse modo, o professor precisa proporcionar situações de ensino que possibilitem o desenvolvimento no estudante de competências para transferir os conhecimentos da Matemática para as áreas que os requerem.

No que se refere a cursos de formação continuada para professores que atuam no Ensino Superior em graduações em que a Matemática está a serviço, esses devem ser pensados, no âmbito da TMCC, estabelecendo um vínculo entre a Matemática e a área específica do curso na qual ela está inserida, considerando as habilidades de pensamento necessárias à futura profissão do graduando, que devem ser desenvolvidas com alicerces na Matemática. Nessa investigação, não consideramos como objeto de análise questões relacionadas à formação de professores para atuar como professores de Matemática no Ensino Superior ou Pós-Graduação, fazemos apenas referências pontuais a esse aspecto.

Até o momento, justificamos, neste capítulo, o bloco do *logos* científico quando a articulação da TMCC com a TAD é tomada como Praxeologia de Investigação Didática a partir de um problema didático elaborado. Segundo Gascón (2011), um problema didático é uma investigação didática que se inicia a partir de um problema docente expresso por uma questão inicial que envolve um objeto matemático em estudo que deve ser investigado tendo como

parâmetro as dimensões do conhecimento: epistemológica, econômico-institucional e ecológica, geralmente construído durante a justificação do bloco do *logos* científico da PID.

Nesta investigação, o problema docente considerado teve foco em compreender como discutir as Integrais Duplas com estudantes de Engenharia Civil, de modo a despertar o interesse dos futuros engenheiros por esse conteúdo e possibilitar que esses passem a ver sentido em estudar tais integrais para além de uma abordagem majoritariamente procedimental, subsidiada por cálculos algébricos associados às suas interpretações gráficas, o que, geralmente, vinha acontecendo na instituição de referência.

A partir desse problema, das questões até o momento relatadas, e da justificação do bloco do *logos* científico, entendemos que é possível tomar a articulação da TMCC com a TAD como PID nesta tese para realizar uma investigação que nos permita desenvolver uma proposta de ensino de Integrais Duplas para estudantes do curso de Engenharia Civil (um Modelo Alternativo de Ensino), de modo a transformá-las em uma ferramenta de apoio a esses estudantes, visando ao exercício da profissão, para que possam interpretá-las e aplicá-las como um instrumento útil, sem perder de vista o caráter científico e o discurso formal a elas inerentes, sendo essa investigação compreendida como o problema didático, desta investigação, na qual buscamos responder à seguinte questão de pesquisa: *Como elaborar uma atividade interdisciplinar²¹ para o ensino de Integrais Duplas na Engenharia Civil, de modo a favorecer o diálogo entre a Matemática e esta habilitação da Engenharia e explicitar o caráter ferramental dessas integrais no futuro exercício profissional do engenheiro?*

Dessa forma, o objetivo geral desta investigação é: assumindo a articulação da TMCC com a TAD como uma Praxeologia de Investigação Didática, elaborar um Modelo Alternativo para o ensino de Integrais Duplas para estudantes do curso de Engenharia Civil, por meio de uma atividade interdisciplinar, de modo a favorecer o diálogo entre a Matemática e a Engenharia Civil, sem perder de vista o caráter científico e o discurso formal a elas inerentes. E definimos como objetivos específicos:

- estabelecer uma articulação entre a TAD e a TMCC e caracterizá-la como uma Praxeologia de Investigação Didática;
- a partir da articulação entre a TAD e a TMCC como PID, realizar o estudo das dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do Problema Didático

²¹ Convém recordar ao leitor que, no âmbito da TMCC, assume-se que a *interdisciplinaridade* acontece quando se estabelece relações entre duas ou mais áreas das ciências.

considerado nesta investigação;

- no âmbito do estudo da dimensão ecológica do Problema Didático considerado, elaborar um Evento Contextualizado para as Integrais Duplas, destinado a estudantes de Engenharia Civil.

Nesta Investigação, tomamos a concepção de interdisciplinaridade segundo Beane (1997) que, conforme Aires (2011) é definida como:

(...) um processo onde há interatividade mútua, ou seja, todas as disciplinas que participam do processo devem influenciar e ser influenciadas umas pelas outras. Um processo no qual se pode generalizar e aplicar métodos e técnicas entre disciplinas diferentes. E ainda, principalmente, um processo pelo qual se possa restabelecer a unidade do conhecimento, religando as fronteiras impostas pelo positivismo. (AIRES, 2011, p. 2018)

Na concepção progressista de currículo integrado, segundo Beane (1997), um currículo escolar precisa ser organizado tendo como base questões que tenham significado pessoal e social em situações cotidianas; precisa refletir e valorizar as experiências de aprendizagens significativas; precisa promover uma formação que priorize valores relativos ao bem comum; precisa favorecer os conhecimentos relevantes para a sociedade mais ampla e, por fim, deve estar envolto de uma concepção de integração para além de apenas uma técnica alternativa à organização disciplinar. Nesse sentido, quanto ao termo Integração Curricular utilizado nesta tese, esse significa integrar o conhecimento escolar e, por meio deste, "aumentar as possibilidades para a integração pessoal e social através da organização do currículo em torno de problemas e de questões significantes" (BEANE, 1997, p. 10).

Tendo apresentado o bloco do *logos* científico da articulação da TMCC com a TAD, construído o problema didático desta investigação, bem como explicitados a questão e objetivos desta investigação, passamos, na próxima seção, a explicitar o bloco da *práxis* científica da articulação da TMCC com a TAD como uma PID.

3.2.2 Bloco da *práxis* científica da articulação da TMCC com a TAD como uma PID

Conforme já acentuamos na seção anterior, o bloco da *práxis* científica, quando uma articulação de teorias é tomada como uma Prática de Investigação Didática, é formado pelos tipos de problemas científicos estudados no âmbito dessa articulação de teorias e pelas técnicas ou metodologias de investigação empregadas para estudá-los. Além disso, esse bloco constrói

um *corpus* de resultados que pode enriquecer a metodologia de pesquisa. Como, nesta investigação, a articulação da TMCC com a TAD foi tomada como uma PID, explicitamos nesta seção, a elaboração do bloco da *práxis* dessa teoria.

A Teoria A Matemática no Contexto das Ciências foi construída para abordar problemáticas educacionais sobre o ensino e aprendizagem da Matemática em cursos de Ensino Superior nos quais a Matemática está a serviço, conforme afirma Camarena (2021), problemáticas que são detalhadas na sequência.

A Teoria Antropológica do Didático foi elaborada para estudar, segundo Gascón e Nicolás (2019, p. 44), a partir das ideias de Chevallard (2011), “as condições e limitações da difusão das praxeologias nas instituições da sociedade”. Perante problemáticas de naturezas matemáticas e didáticas, conforme pontuam Gascón e Nicolás (2019), por meio de tal quadro teórico, realizam-se investigações, buscando responder questões relacionadas a cada uma das três dimensões consideradas fundamentais nessas problemáticas: *como se comportam as praxeologias em uma instituição determinada?* (dimensão econômica); *por que as praxeologias chegaram ao estágio em que se encontram atualmente na instituição considerada e como elas poderiam ser modificadas?* (dimensão ecológica) e *como construir um modelo epistemológico-didático de referência, específico das praxeologias que estão em jogo, que responda à problemática didático-matemática em estudo?* (dimensão epistemológica).

Além disso, Gascón e Nicolás (2017) enfatizam que após vários anos de investigações subsidiadas pela TAD, tornou-se evidente que a unidade mínima de análise didática a respeito de um problema didático precisa incluir, além das tarefas vinculadas a esse problema, os diferentes contextos em que tais tipos de tarefas estão presentes, bem como no nível institucional, não apenas as salas de aula e instituições de ensino, mas todas as demais instituições que participam do processo de transposição didática. É importante observar que o objeto de estudo da TAD é o didata e as relações entre ele e as instituições. Dessa forma, diferentemente da TMCC, a TAD é uma teoria de ensino e não de ensino e de aprendizagem.

Com relação às problemáticas consideradas na TMCC, Camarena (2021) selecionou algumas sobre as quais devemos refletir nesta investigação quanto aos processos de ensino e de aprendizagem de Integrais Duplas no contexto da formação de engenheiros civis. São elas:

- a Matemática é abstrata;
- a ausência de sentido dos conhecimentos matemáticos para os estudantes;
- o desenvolvimento de competências por parte dos estudantes;

- o alcance dos propósitos da Matemática Social.

Quanto à primeira e segunda problemáticas, entendemos que as Integrais Duplas podem parecer sem sentido e sem significado para os estudantes; a terceira e a quarta problemáticas acentuam a necessidade de que as integrais estejam inseridas nos processos de ensino, de modo a contribuir com o desenvolvimento de competências para a profissão, de maneira que o estudante veja nessas integrais um sentido, um significado, ou seja, uma razão de ser.

Para cada uma dessas problemáticas, estão relacionados problemas particulares, tendo em vista que Camarena (2021) entende que a TMCC tem o objetivo de refletir sobre como construir uma Matemática significativa para o estudante, que permita sua aplicação na prática social da profissão e que o ajude a desenvolver habilidades profissionais, de trabalho e de vida, tomando como foco os cursos de graduação nos quais a Matemática está a serviço. O Quadro 8 traz essa relação entre as problemáticas e os problemas particulares envolvendo o objeto em estudo nesta investigação.

Quadro 8 – Problemáticas e os problemas particulares a serem enfrentados com o auxílio da TMCC

Problemática	Problemas Particulares
A Matemática é abstrata.	Necessidade de recorrer a diferentes registros de representação das Integrais Duplas.
	Necessidade de uma abordagem significativa das Integrais Duplas para o estudante de Engenharia Civil.
A ausência de sentido do conhecimento matemático para os estudantes	O estudante de Engenharia Civil é apresentado aos saberes relativos às Integrais Duplas, de maneira isolada e sem sentido.
	O estudante de Engenharia Civil observa uma desconexão entre o que aprendeu sobre as Integrais Duplas na universidade e os problemas que deve solucionar nos quais essas integrais possam ser mobilizadas.
	O futuro profissional não estabelece a vinculação entre o conhecimento construído sobre as ID e a sua profissão.
	O futuro profissional necessita saber usar a modelagem matemática em favor do estudo das ID.
	Requer-se um currículo interdisciplinar de Matemática que possibilite a transposição dos conceitos das ID para outras áreas das ciências que interatuam no curso de Engenharia Civil.
	Os processos de ensino e de aprendizagem não são organizados de forma a oportunizar que o estudante construa seu próprio conhecimento quando o objeto em estudo são as ID.
	É necessária uma didática específica para abordar as ID no curso de Engenharia Civil, tendo em vista que esse curso não visa à formação de matemáticos.
	Há dificuldades de natureza cognitiva enfrentadas pelos estudantes no estudo das ID.
O desenvolvimento de competências pelos estudantes	Necessidade de formar os estudantes também no que se refere a atitudes e valores.
	Necessidade de oportunizar ao estudante o gerenciamento de forma integrada de diferentes saberes.

O alcance dos propósitos da Matemática Social	A construção do conhecimento em torno das integrais duplas de modo a fazer sentido para os estudantes.
	A formação de um estudante que possa aplicar as ID no seu âmbito social.
	Oportunizar ao estudante que ele próprio construa seu conhecimento sobre as ID.
	Possibilitar ao estudante o desenvolvimento de habilidades de pensamento.
	Permitir que o estudante saiba trabalhar com modelagem matemática.
	Possibilitar que o estudante desenvolva competências.
	Permitir que o estudante vivencie uma formação integral na universidade.
	Oportunizar ao estudante a formação em valores e atitudes.
	Proporcionar ao estudante a construção de uma Matemática para a vida.
	Possibilitar a formação de estudantes críticos, criativos e analíticos.

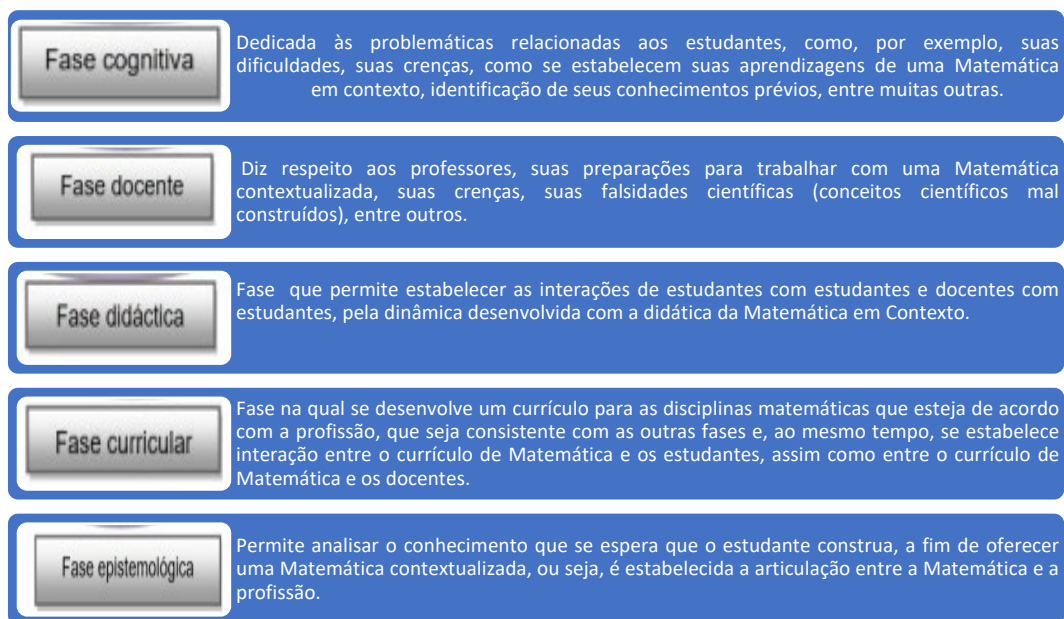
Fonte: Adaptado de Camarena, 2021

Esses problemas particulares determinaram questões pontuais que devem ser observadas quando se tem um problema didático. Como exemplo, discorreremos sobre os problemas particulares que envolvem a problemática: a Matemática é abstrata. Entre as possíveis maneiras para ensinar as ID, destacamos, por um lado, a apresentação dos conceitos matemáticos pelo discurso formal e, por outro, a apresentação de situações que envolvam exemplos para a resolução e desenvolvimento dessas integrais por si só ou em uma situação de aplicação no contexto de medidas de áreas de regiões delimitadas por curvas ou de cálculo de medidas de volume de sólidos delimitados por regiões.

Quanto aos exemplos, eles podem ser expressos envolvendo as representações gráfica, analítica ou algébrica dessas integrais e as relações entre elas, ou podem levar à abordagem das integrais ao contexto citado, se o resultado do cálculo da integral não for um número real não negativo. Tanto em uma situação quanto em outra, o professor deve considerar que a manipulação dessas formas de representação das ID não é evidente para o estudante. Assim, deve propor praxeologias que levem os estudantes a construir o conhecimento em relação a essas integrais, superando as dificuldades surgidas, bem como dando um significado no contexto da Engenharia Civil a esse conhecimento, ou seja, uma razão de ser, conforme discutido no domínio da TAD. Se optarmos por abordar as ID pelo discurso formal, a mesma preocupação deve existir.

Nesse sentido, as fases da TMCC possibilitam a abordagem, sob diferentes perspectivas, dos problemas explicitados no Quadro 8. A Figura 2 estabelece, de forma sintética, a relação entre as fases da TMCC e os problemas articulados a cada uma delas.

Figura 2 – Relação das fases da TMCC e os problemas articulados a cada uma delas



Fonte: Adaptada de Camarena, 2021, pp. 82-83

Nas seções seguintes, passamos a detalhar cada uma dessas fases, tendo como foco as metodologias que elas determinam para a resolução dos problemas particulares decorrentes das problemáticas apresentadas. Entretanto, as relações dessas fases com o objeto em estudo desta investigação e o problema didático elaborado serão apresentados na seção 3.2.3, quando, recorrendo à articulação da TMCC com a TAD como PID, elaboramos as praxeologias didáticas determinadas pelas tarefas necessárias à resolução do problema didático.

3.2.2.1 Fase curricular

A *fase curricular* da TMCC tem sua atenção voltada para as interações entre estudantes e conteúdos curriculares e entre professores e conteúdos curriculares, tendo como principal objetivo a construção dos currículos de Matemática para cursos de graduação em que essa disciplina está a serviço, baseados nas *competências* necessárias ao exercício da profissão. Essas competências na TMCC têm um sentido construtivista e humanista e são entendidas como mobilizações cognitivas “dos atributos de um profissional para enfrentar uma situação problemática ao usar a integração de sua bagagem de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores” (CAMARENA, 2018, p. 218).

O ponto central dessa etapa é a *Metodologia Dipcing: Diseño de programas de estudio de matemáticas en carreras de ingeniería*, organizada em três etapas: a *etapa central*, a *etapa precedente* e a *etapa conseqüente* que, embora tragam a Engenharia em sua nomenclatura, “pode[m] ser aplicada para a construção de currículos de qualquer curso universitário no qual a Matemática está presente, mas que não visa formar matemáticos” (LIMA; GOMES; BIANCHINI, 2021, p. 6). Para a construção dessa metodologia, Camarena (2002, p. 3) buscou subsídios teóricos das correntes curriculares como as de Hilda Taba (1974) e de Ángel Díaz Barriga (1984).

É a Metodologia *Dipcing* que dita as técnicas como ferramenta para a resolução dos problemas que envolvem essa fase. Como detalhado em Camarena (2013a, p. 24), a *etapa central* tem por objetivo identificar as competências matemáticas necessárias ao estudante de cursos de graduação nos quais a Matemática está presente no âmbito de sua profissão, analisando os livros adotados nas disciplinas do eixo específico do curso, ou mesmo as não matemáticas do eixo básico. De posse dos resultados obtidos, objetiva-se contribuir com os elementos para construção dos *Eventos Contextualizados (EC)*, que são: “[...] problemas ou projetos que desempenham o papel de entes integradores entre disciplinas matemáticas e não matemáticas, convertendo-se em ferramentas para o trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem” (LIMA; BIANCHINI; GOMES, 2016, p. 8) para garantir a abordagem de objetos matemáticos que sejam significativos para o estudante na sua graduação, no sentido da Aprendizagem Significativa de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

Já a etapa precedente também contribui para a identificação das competências matemáticas, pois é desenvolvida tendo como ponto de partida um diagnóstico realizado junto aos estudantes, por meio de um instrumento de avaliação previamente construído, para que o professor identifique o nível de conhecimento matemático mobilizado pelos estudantes quando chegam ao Ensino Superior.

Por fim, a *etapa conseqüente*, tem o propósito de fazer com que os professores conheçam as competências relacionadas com o objeto matemático em estudo, necessárias à prática profissional do campo de formação do graduando, ou seja, nesta investigação, com as Integrais Duplas.

É por meio da Metodologia *Dipcing* que se identificam as competências matemáticas para a profissão a serem desenvolvidas pelos estudantes. Em termos das componentes dessas competências – a saber: conhecimentos, habilidades, atitudes e valores –, os conhecimentos e habilidades são aqueles específicos da Matemática, identificados por meio das etapas central e

precedente da *Dipping*, que permitem ao estudante abordar com êxito os eventos contextualizados. As atitudes e valores são componentes que o profissional que está sendo formado naquele curso de graduação no qual está sendo trabalhada determinada disciplina matemática deve possuir.

Camarena (2004) ressalta que tais atitudes e valores, desenvolvidos pelo estudante de forma gradual ao longo de todo o curso, são identificados por meio das etapas precedente e consequente da *Dipping*. Assume-se, como preceito, na fase curricular, que todas as disciplinas que compõem o currículo de determinado curso deverão incorporar os componentes em suas competências disciplinares, uma vez que não é adequado pensar que somente em algumas disciplinas podem desenvolver, juntos aos estudantes de determinada graduação, atitudes e valores.

3.2.2.2 Fase didática

A *fase didática* é aquela na qual se estabelece o modelo didático a ser empregado para ministrar aulas em consonância à TMCC, a saber, o *Modelo Didático da Matemática em Contexto* – MoDiMaCo –, que, conforme visto em Camarena (2013a, p. 26), está “direcionado para *práxis* social, incentiva a construção do conhecimento pelo estudante e o desenvolvimento de habilidades para a transferência de conhecimento matemático às áreas sociais que o mobilizam”.

O MoDiMaCo tem como objetivo principal auxiliar a formação integral do estudante. Está organizado em três blocos: o primeiro trata da implementação da *Didática da Matemática em Contexto* em situações de ensino e de aprendizagem; o segundo trata da implementação dos cursos extracurriculares com ênfase no desenvolvimento da capacidade necessária à resolução de problemas; e o terceiro trata da implementação de um *workshop* interdisciplinar na fase final da graduação com abordagem de problemas reais da atuação profissional.

Camarena (2017) caracteriza a Didática da Matemática em Contexto como um bloco do MoDiMaCo que tem suas ações centradas no estudante, em que as atividades propostas têm um caráter interdisciplinar e são desenvolvidas buscando a formação integral do estudante, por meio de uma Aprendizagem Significativa e do trabalho em equipes colaborativas constituídas por três estudantes e permite a realização de um trabalho interdisciplinar e disciplinar em ambientes de aprendizagem. É desenvolvido com estratégias de ensino construídas pelo professor, e estratégias de aprendizagem utilizadas pelos estudantes.

As estratégias de ensino acontecem por meio dos *Eventos Contextualizados* (EC), que são construídos pelo professor, enquanto as estratégias de aprendizagem são vistas como os recursos utilizados pelos estudantes durante resolução dos EC. Aliadas a essas estratégias, Camarena (2017) relaciona as atividades didáticas como aquelas que permitem a construção do conhecimento pelo estudante por meio de processos de ensino e de aprendizagem orientados pelos objetivos curriculares sem perder de vista os processos relativos à avaliação. Portanto, cabe ao professor a responsabilidade de pensar, elaborar e aplicar os EC, as atividades, bem como construir e aplicar instrumentos de avaliação.

A Didática da Matemática em Contexto está estruturada pelos eixos *contextualização* e *descontextualização*, sendo que, por meio da contextualização, os conteúdos matemáticos transitam nas mais diversas áreas do conhecimento, permitindo que seu ensino seja efetivado de forma interdisciplinar. Conforme visto em Camarena (1990, 2004) e Camarena e Flores (2012), o eixo da descontextualização permite que o conteúdo matemático seja formalizado e, para isso, é estudado de forma disciplinar e com o formalismo necessário à formação do estudante.

As fontes de contexto para a busca e construção de um EC, conforme visto em Camarena (2017, pp. 7-8), são “a ciência em estudo e sua vinculação com as disciplinas do curso, com a atuação profissional dos estudantes após sua formação e com as situações da vida cotidiana do estudante que mobilizam a Matemática”.

Camarena (2017) entende que os eventos contextualizados (EC) proporcionam a construção de conhecimentos integrados pelo estudante, com a passagem do nível de conhecimento concreto para o nível de conhecimento abstrato, observada quando os estudantes passam da contextualização para a descontextualização, abstraindo o conceito por meio de uma Aprendizagem Significativa no sentido de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

3.2.2.3 Fase epistemológica

A *fase epistemológica* da TMCC toma, nos processos de ensino, a epistemologia do contexto conforme visto em Camarena e Flores (2012), evidenciando que, da mesma forma que os contextos de outras ciências dão sentido e significado à Matemática, essa ciência também dá sentido e significado aos temas e conceitos das outras ciências, fundamentando o princípio da interdisciplinaridade da TMCC.

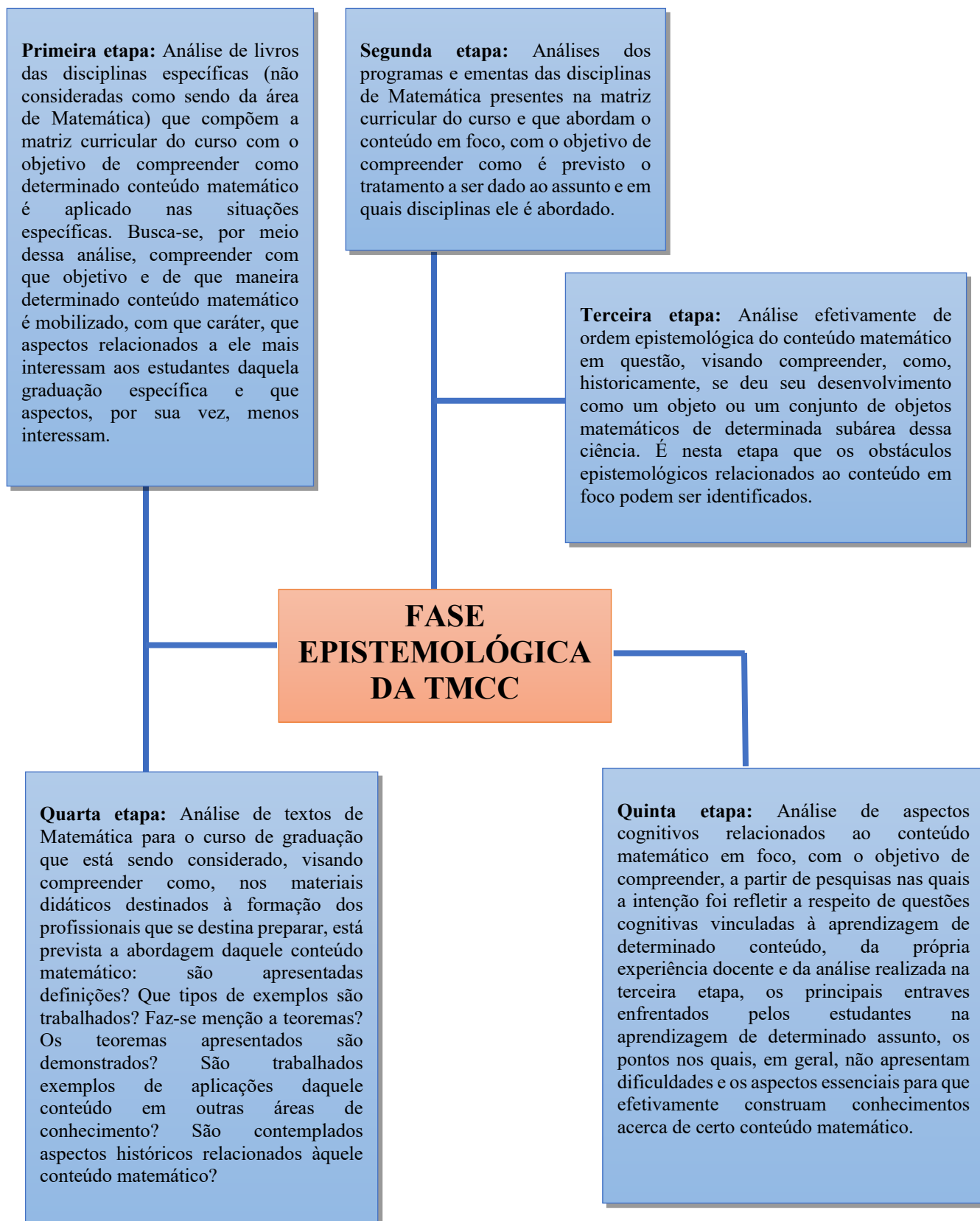
Segundo Camarena e González (2001), é na fase epistemológica da TMCC que se elabora o construto teórico denominado *Transposição Contextualizada*, ideia segunda a qual a Matemática discutida na universidade passa por transformações para se adaptar às necessidades sociais de outras ciências, subsidiada, do ponto de vista teórico, na noção de *Transposição Didática* vista em Chevallard (1991), que, de forma resumida, é o processo que estuda a passagem do conhecimento de uma instituição a outra, reproduzindo novo contorno a esse conhecimento, conforme evidenciado em Camarena e Flores (2012).

O conhecimento contextualizado, em conformidade com a epistemologia de Popper (1986), apresenta-se como objetivo, hipotético ou conjuntural e é construído tendo como ponto de partida um problema ou uma situação aplicada, conforme acentuado em Camarena e Flores (2012).

Lima, Gomes e Bianchini (2021), citando Camarena e González (2001), traçam um percurso metodológico considerado na fase epistemológica, no qual, em cada uma de suas etapas, são propostas questões que devem ser respondidas durante um estudo epistemológico.

Na Figura 3, trouxemos uma adaptação do percurso metodológico citado.

Figura 3 – Fase Epistemológica da TMCC



Fonte: Adaptada de Lima, Gomes e Bianchini, 2021

3.2.2.4 Fase docente

A *fase docente* da TMCC tem como foco as investigações a respeito da formação de professores, com atenção aos programas destinados ao Ensino Superior, conforme é visto em Camarena (2004). As investigações versam sobre a formação do docente por competências, como sua motivação para empregar a estratégia didática da Matemática em Contexto, além de outras investigações nas quais são evidenciadas as características gerais desses professores. Essas investigações, segundo Camarena (1990), apontaram para a necessidade da preparação de professores para o exercício no Ensino Superior, sendo, portanto, necessária a criação de programas de pós-graduação voltados para tal formação.

Como pontuam Lima, Gomes e Bianchini (2021):

[...] os elementos cognitivos mínimos que devem possuir um programa de formação e atualização para tais professores. Esses elementos dizem respeito a quatro categorias: (i) conhecimentos dos conteúdos a serem ensinados; (ii) conhecimento acerca dos processos de ensino e de aprendizagem; (iii) conhecimentos sobre as habilitações de Engenharia em que os docentes atuam; e (iv) conhecimento sobre o uso de tecnologias digitais de informação e de comunicação como mediadoras da aprendizagem do estudante (LIMA; GOMES, BIANCHINI, 2021, pp. 813-814).

Nesta investigação, mencionamos, sem nos aprofundarmos nesse aspecto, as questões relacionadas à fase docente na dimensão ecológica do problema didático que será estudado, uma vez que preparar os professores para atuarem em consonância com a Didática do Contexto será algo importante ao sugerir uma reorientação do trabalho com as ID em cursos de Engenharia.

3.2.2.5 Fase cognitiva

Camarena (2002) salienta que a *fase cognitiva* da TMCC tece reflexões a respeito da aprendizagem interdisciplinar em ambientes de aprendizagem, embasando o entendimento da formação do estudante do ponto de vista cognitivo. Conforme ressaltado em Camarena (2004), a Matemática abordada de forma contextualizada auxilia o estudante na construção do conhecimento acerca do objeto matemático, além de reforçar o desenvolvimento de habilidades de pensamento por meio do processo de resolução dos EC elaborados em um contexto de interesses dos estudantes. Assim, é nessa fase que os processos cognitivos surgidos durante a aprendizagem contextualizada, provenientes da interdisciplinaridade, são analisados.

Conforme citado em Camarena e Muro (2012), é por meio dos EC que acontece a construção de conhecimentos integrados pelo estudante com a passagem do nível de conhecimento concreto para o nível abstrato, observada quando os estudantes passam do nível de contextualização para o nível da descontextualização, abstraindo os conceitos e propriedades de um objeto matemático por meio de uma Aprendizagem Significativa.

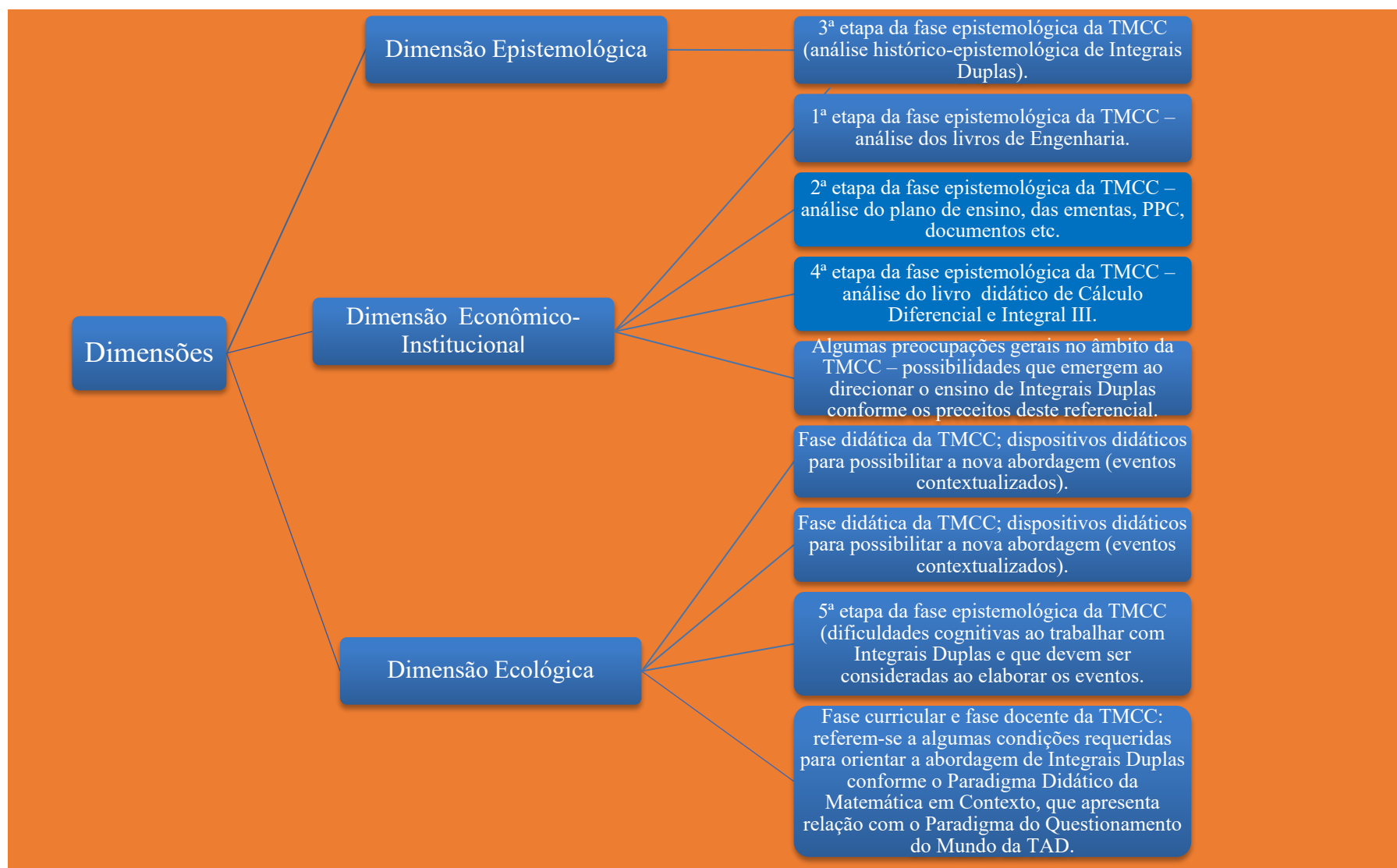
Para isso, o processo de avaliação de um EC, estabelecido de acordo com os objetivos construídos pelo professor na fase curricular, de acordo com Camarena (2017), deve ser contínuo, buscando mensurar a aprendizagem do estudante ao longo de todo o processo, considerando o desempenho do estudante na realização das atividades avaliativas (avaliação individual); dos EC (avaliação da equipe); no diagnóstico dos conhecimentos prévios; na superação dos obstáculos cognitivos, didáticos, contextuais, epistemológicos ou curriculares enfrentados; além do desempenho nos processos de desenvolvimento integral do estudante (desenvolvimento e capacidade de trabalhar em equipe, comprometimento com as tarefas, etc.). Além disso, as observações e anotações do professor e a autoavaliação realizada pelo estudante se constituem em objetos de avaliação e devem ser consideradas.

Dessa forma, Camarena (2017) salienta que o MoDiMaCo, por meio da Matemática em Contexto, permite a formação do estudante e mensuração em todas as suas dimensões sociais: conceitual, procedimental e atitudinal, em concordância com a linha de investigação na qual a TMCC está inserida, a Matemática Social.

À TMCC, para subsidiar as análises nessa fase, são agregadas, dependendo dos objetivos da investigação realizada, outras teorias de natureza cognitivista e diferentes metodologias em concordância com os alvos a serem atingidos, conforme observado nas leituras dos artigos nos quais essa teoria é utilizada. Nesta investigação, não nos aprofundaremos no estudo dessa fase e, novamente, esse aspecto evidencia que, em nosso estudo, ao articularmos à TMCC uma teoria não cognitivista – a TAD – não assumimos preceitos contraditórios com o último referencial mencionado, uma vez que não nos detemos nas questões cognitivas.

Até o momento, justificamos, neste capítulo, os blocos do *logos* e *práxis* científicos quando a articulação da TMCC com a TAD é tomada como Praxeologia de Investigação Didática a partir de um problema didático elaborado. A Figura 4 estabelece um paralelo entre as dimensões do problema didático e as fases da TMCC.

Figura 4 – As três dimensões do problema didático e suas interfaces com as fases da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências



Fonte: A autora, 2021

Na próxima seção, apresentamos as praxeologias menores elaboradas no âmbito da PID que guiaram esta investigação na busca dos objetivos propostos.

3.2.3 A articulação da TMCC com a TAD como uma Praxeologia de Investigação Didática – pressupostos metodológicos

Uma Prática de Investigação Didática no âmbito da TAD é construída tendo como ponto de partida um problema docente que leva à construção de um problema didático, situação didática ou investigação didática que, conforme Gascón e Nicolás (2021), é uma investigação desenhada a partir de discussões e justificações realizadas durante a construção do bloco do *logos* científico que caracteriza a PID. Nesta investigação, o problema didático elaborado foi realizar uma investigação à luz da articulação entre a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências e a Teoria Antropológica do Didático que nos permitisse desenvolver uma proposta de um processo de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas para estudantes do curso de Engenharia Civil (um Modelo Alternativo de Ensino e de Aprendizagem) de modo a transformá-las em uma ferramenta de apoio a esses estudantes, visando ao exercício da profissão, para que eles possam interpretá-las e aplicá-las como um instrumento útil sem perder de vista o caráter científico e o discurso formal a elas inerentes.

Diante desse problema, foi necessário determinar as tarefas e, a partir delas, construir as subpraxeologias de investigação (por nós denominadas de Praxeologia de Invetigação I, Praxeologia de Investigação II e Praxeologia de Investigação III) que compuseram a Praxeologia de Investigação Didática desta investigação e que permitiram conduzir as investigações que resultaram nesta tese, em busca de respostas para o problema didático elaborado.

Esclarecemos que o desenho inicial das praxeologias aqui estabelecidas teve como referência um material que vem sendo elaborado pelo professor Dr. Gabriel Loureiro de Lima, que versa sobre a TMCC como uma Praxeologia de Investigação Didática, ainda não consolidado. Dedicamos esta seção à apresentação das praxeologias que compuseram a PID e mostramos no Quadro 9 a Praxeologia de Investigação I que guia o estudo da dimensão epistemológica do problema didático em questão nesta investigação.

Quadro 9 – Praxeologia de Investigação I – Dimensão epistemológica do problema didático

Praxeologia de Investigação I – Relativa à Dimensão Epistemológica do Problema Didático	
Tarefa	
T_{ia1} : Analisar, do ponto de vista epistemológico, como se deu a construção das Integrais Duplas ao longo do tempo.	
Subtarefas	
ST_{ia1} : Identificar as razões de ser das Integrais Duplas. ST_{ia2} : Construir o MER a partir da análise epistemológica realizada.	
Técnicas	
τ_{ia1} : Selecionar e listar livros de História da Matemática e outros materiais que versam sobre cálculo de funções reais de várias variáveis reais, como proposto no percurso metodológico da fase epistemológica da TMCC. τ_{ia2} : Analisar os livros selecionados na tarefa τ_{ia1} para identificar problemas contextualizados ou situações que deram origem a esse saber matemático, conforme proposto pela fase epistemológica da TMCC. τ_{ia3} : Escrever o relato da trajetória da construção das Integrais Duplas como um saber científico, a partir das técnicas anteriormente realizadas, relacionando às razões de ser das Integrais Duplas por meio de problemas identificados no estudo histórico, elaborados pelas necessidades dos contextos da época, incluindo nesse relato as praxeologias matemáticas que levaram às razões de ser dessas integrais. τ_{ia4} : Elaborar o Modelo Epistemológico de Referência.	
Tecnologias	
θ_{ia1} : Premissa: a relação epistemológica do conhecimento é essencial nos processos de ensino. θ_{ia2} : A ciência é concebida como uma construção racional que acontece baseada no enfrentamento dos problemas que surgem ao longo da vida. θ_{ia3} : O estudo epistemológico fornece um modelo no âmbito matemático posto em questão, denominado Modelo Epistemológico de Referência.	
Teorias	
Θ_{ia1} : Paradigma Educacional 3 da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências. Θ_{ia2} : A concepção de <i>epistemologia</i> segundo Popper (1980) tomada na TMCC. Θ_{ia3} : Ótica epistemológica da interdisciplinaridade: os conceitos encontram-se entrelaçados em forma de rede e mantêm relações entre eles. A rede aqui é considerada como os saberes das áreas das ciências, então, para abordar um problema de investigação é necessário considerar as relações articuladas entre as diferentes ciências a ele vinculadas, bem como as específicas de cada uma delas. Θ_{ia4} : Dimensão epistemológica de um problema de investigação em didática da Matemática no âmbito da TAD.	

Fonte: A autora, 2021

A tarefa em questão, tomada em primeiro plano, justifica-se, pois, conforme Gascón (2011), pela dimensão epistemológica do conhecimento é que se evidenciam as questões relacionadas à forma de descrever e interpretar conhecimentos matemáticos e, portanto, as Integrais Duplas. Destarte, é o estudo dessa dimensão o responsável por nos informar como as ID foram desenvolvidas, construídas e interpretadas ao longo do tempo, bem como em que contextos os conceitos e propriedades dessas integrais foram construídos e as áreas das ciências em que estiveram envolvidas.

As técnicas que permitem realizar essa tarefa, nesta investigação, estão inseridas na fase epistemológica da TMCC e na proposta do estudo epistemológico do problema didático no domínio da TAD, sendo então as técnicas τ_{ia1} e τ_{ia2} componentes da fase epistemológica e as outras três propostas pela TAD no estudo da dimensão epistemológica de um problema didático. Esclarecemos que, como as fases da TMCC se interatuam, uma vez que elas são

subsistemas de um sistema maior, alguns procedimentos metodológicos traçados para uma delas também podem ser identificados como procedimentos de outras fases.

Em cumprimento à técnica τ_{ia1} , a fase epistemológica da TMCC indica, para a seleção e listagem dos livros e outros documentos a serem analisados, uma busca inicial sobre temáticas que envolvam o objeto matemático estudado que, no caso desta investigação, foi realizada em um primeiro momento por meio do *Google Acadêmico*, sob a temática mais geral *cálculo de funções reais de várias variáveis reais*. Após algumas leituras preliminares, apoiamo-nos no material *on-line* encontrado versando sobre a história das funções reais de várias variáveis reais, disponível para professores que adotam a obra *Cálculo*, escrita por George B. Thomas, independente da edição, e se cadastram como professores de Cálculo na Editora Person.

A partir desse material, selecionamos os atores que estiveram envolvidos, implícita ou explicitamente no estudo dessas funções, relacionando-os quando possível às ID, e os listamos, seguidos de informações preliminares sobre o envolvimento deles com as integrais. Essas informações foram organizadas no Quadro 12 apresentado no capítulo seguinte, que versa sobre o desenvolvimento dessa praxeologia. A partir daí, direcionamos e ampliamos as nossas buscas além do *Google Acadêmico* e passamos a buscar em *sites* de bibliotecas e *Google Livros*. Selecionamos e listamos artigos, livros de História da Matemática e obras antigas, importantes para esta investigação.

Para a efetivação da técnica τ_{ia2} , o percurso da fase epistemológica da TMCC prevê, para análise do material selecionado, a leitura minuciosa desses documentos, direcionada a identificar e registrar problemas que demandaram Integrais Múltiplas para serem resolvidos ao longo da história, para compreender como essas integrais se constituíram como um objeto matemático. Nesse sentido, dedicamos a seção 4.1.3 do capítulo seguinte para o registro do estudo realizado por meio de livros antigos e de História da Matemática, visando cumprir a tarefa e subtarefas propostas para a praxeologia em questão.

É importante esclarecer que, embora neste momento esta investigação assuma aspectos de uma pesquisa documental, que, no sentido de Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 102), é “aquela que se faz preferencialmente sobre documentação escrita”, realizada a partir de documentos caracterizados como fontes primárias da investigação (textos impressos, manuscritos, livros antigos e outros documentos originais), as técnicas propostas na Praxeologia de Investigação I e as orientações teóricas estiveram embasadas nas ideias descritas nos parágrafos anteriores, que se justificam no bloco do *logos* científico da articulação da TMCC com a TAD tomada como uma PID e foram consideradas suficientes para terem direcionado o estudo

epistemológico em questão, fundamentado em leituras de documentos antigos, livros antigos e de História da Matemática, direcionadas para a identificação de contextos de um problema ou uma situação aplicada em que as ID estivessem presentes. Por isso, não buscamos outros procedimentos metodológicos especificamente construídos para a realização de uma pesquisa documental. O registro dos problemas foi organizado, nesta tese, por meio do Quadro 13 registrado na seção 4.2 do capítulo seguinte a este.

Iniciamos, então, tais leituras. Muitos dos documentos e livros selecionados eram gravuras digitalizadas. Para alguns livros, existe uma ferramenta do *Google* Livros que oferece a leitura traduzida, desde que selecione o texto da imagem e solicite a tradução, e, para outros, essa ferramenta não está disponível. De modo geral, a leitura de alguns dos livros encontrados foi bem difícil, uma vez que são ofertados em outros idiomas que não o português, com uma linguagem arcaica, em que muitas palavras e expressões não são mais utilizadas e não têm uma tradução possível.

No decorrer dessas leituras, em uma abordagem histórica, uma hipótese levantada foi de que as ID apareceram naturalmente como uma extensão das integrais de funções reais de uma variável real. Reorganizamos nossas buscas e pesquisamos também as integrais de funções reais de uma variável real quanto ao panorama histórico da construção desse saber.

A partir daí, buscamos construir o panorama histórico epistemológico das ID, tentando encontrar um ponto que sinalizasse para a tarefa que deu origem a essas integrais. Uma vez identificada a gênese das ID, continuamos as buscas e análises do material encontrado e registramos os problemas identificados.

Em cumprimento à técnica τ_{ia3} , na sequência, realizamos a construção do relato da trajetória da construção das Integrais Duplas como um saber científico, destacando as tarefas e consequente praxeologias matemáticas identificadas como razões de ser das ID.

Por fim, consideramos que o estudo epistemológico nos forneceu uma descrição e uma interpretação para essas integrais, além de justificar o seu ensino e ser parte integrante do problema didático no qual elas estão inseridas. Com base no estudo epistemológico realizado, finalizamos essa praxeologia por meio da técnica τ_{ia4} , construindo o Modelo Epistemológico de Referência com o propósito de que ele se torne a referência para analisar os eixos matemáticos associados ao problema didático em questão.

Na sequência, apresentamos a segunda praxeologia menor que compõe a PID desta investigação, a Praxeologia de Investigação II, organizada no Quadro 10. Essa praxeologia abrange aspectos do estudo da Dimensão Econômico-Institucional do Problema Didático.

Quadro 9 – Praxeologia de Investigação II

Relacionada às dimensões econômico-institucional do problema didático	
Tarefa	
T_{ib1} :	Analisar de que maneira as Integrais Duplas no curso de Engenharia Civil passam por transformações para se adaptar a essa área de formação relacionada ao campo de conhecimento em que se insere a profissão do engenheiro civil, na qual a Matemática e, portanto, as Integrais Duplas são uma ferramenta, às necessidades sociais vinculadas a essa área.
Subtarefas	
ST_{ib1} :	Analisar, sob o ponto de vista da implementação da matriz curricular e dos programas de ensino, como está prevista a abordagem das Integrais Duplas.
ST_{ib2} :	Analisar de que maneira, sob o ponto de vista curricular, está prevista a abordagem das ID no curso de Engenharia Civil.
ST_{ib3} :	Analisar com que objetivo e de que maneira as Integrais Duplas são mobilizadas em situações de formação do engenheiro civil.
ST_{ib4} :	Sintetizar o Modelo Epistemológico Dominante (MED).
Técnicas	
τ_{ib1} :	Analisar, tendo como referência o MER elaborado, o projeto pedagógico do curso de Engenharia Civil da Instituição estudada, bem como a matriz curricular e os programas e as ementas das disciplinas de Cálculo presentes em tal matriz para identificar em qual(uais) dela(s) está (estão) prevista(s/os) a abordagem das Integrais Duplas, como estão organizadas em termos dos momentos da formação do estudante em que são trabalhadas, de seus objetivos, dos conteúdos programáticos, das cargas horárias, das estratégias didáticas sugeridas. As questões aqui relacionadas estão conforme a fase epistemológica da TMCC, pois conhecer como o objeto está organizado para a TMCC ainda é proposto nesta fase que se complementa na fase curricular desta teoria. Entretanto, o MER não é uma referência de análise tomada no âmbito da TMCC.
τ_{ib2} :	Analisar, tendo como referência o MER elaborado, o livro didático utilizado como referência na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III no curso de graduação em Engenharia Civil, com o propósito de verificar como as Integrais duplas são abordadas na proposta institucional, em resposta às questões seguintes: Como são apresentadas definições? Que tipos de exemplos são trabalhados? Faz-se menção a teoremas? Os teoremas apresentados são demonstrados? São trabalhados exemplos de aplicações das ID em outras áreas de conhecimento? São contemplados aspectos históricos relacionados a essas integrais? Quantas questões aqui também estão relacionadas na fase epistemológica da TMCC e com relação ao MER vale a mesma observação feita para a tarefa τ_{ib1} ?
τ_{ib3} :	Entrevistar professores para obter informação que nos levem a selecionar livros didáticos adotados nas disciplinas específicas do curso de graduação em Engenharia Civil a fim de verificar em quais dessas disciplinas e em quais situações as ID são mobilizadas, conforme proposto pela etapa consequente da metodologia <i>Dipping</i> .
τ_{ib4} :	Buscar situações-problema que abordem as ID nos livros didáticos identificados por meio da técnica τ_{ib3} , no intuito de verificar em quais dessas disciplinas e em quais situações as ID são mobilizadas, com que caráter, que aspectos relacionados a elas mais interessam aos estudantes do curso em razão de sua futura atuação profissional e que aspectos, por sua vez, menos interessam, conforme proposto pela etapa consequente da metodologia <i>Dipping</i> .
τ_{ib5} :	Concluir que as análises realizadas pelas técnicas anteriores culminam no Modelo Epistemológico Dominante (MED) da instituição de referência e fazer uma síntese desse modelo.
Tecnologias	
θ_{ib1} :	Epistemologia do contexto e a Transposição Contextualizada (Compreender como está previsto o ensino das ID na instituição e compreender como, nos materiais didáticos destinados à formação dos profissionais que se destina preparar, está prevista a abordagem das ID) e o fato de o MER ser uma referência para analisar os eixos didáticos e matemáticos associados ao problema didático. O conjunto justifica as técnicas τ_{ib2} , τ_{ib3} e τ_{ib4} .
θ_{ib2} :	Elaboração do MED que determina as condições oferecidas e as restrições impostas no âmbito do sistema escolar que abarcam as relações institucionais e pessoais com os objetos e as praxeologias desses objetos que interferem no processo de ensino e de aprendizagem.
Teorias	
Θ_{ib1} :	Pesquisa Bibliográfica.
Θ_{ib2} :	Transposição Didática (CHEVALLARD, 1990).
Θ_{ib3} :	Dimensão econômico-institucional de um problema de investigação em didática da Matemática no âmbito da TAD.
Θ_{ib4} :	Abordagem Psicogenética de Piaget (1991), Abordagem Sociocultural de Vygotsky (1978) e a Aprendizagem Significativa de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

Fonte: A autora, 2021

Como metodologia para a análise desses documentos, em cumprimento à tarefa T_{1b1} , baseamo-nos em alguns dos procedimentos metodológicos propostos na fase epistemológica da TMCC, além de realizar entrevistas com o coordenador e alguns professores do curso, como proposto pela etapa consequente da Metodologia *Dipcing*.

Para isso, por meio da técnica τ_{ib1} , analisamos o Projeto Pedagógico do curso de Engenharia Civil – PPP/EC, a matriz curricular e planos de ensino das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, estabelecemos diálogos com o coordenador e com a professora responsável pela disciplina de Cálculo III em que as ID são estudadas. Esses diálogos foram fundamentais para nos esclarecer aspectos relacionados ao currículo do curso e ao ensino das ID que não conseguimos identificar na análise dos documentos lidos. A referência para as análises foi o MER elaborado.

Quanto aos documentos, a coordenação nos disponibilizou, além do projeto curricular antigo e ainda vigente nas turmas que ingressaram até 2020, o projeto curricular que foi implementado no primeiro semestre de 2021. Juntamos a esses documentos as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para os cursos de Engenharia (BRASIL, 2019) e o Plano de Ensino de Cálculo Diferencial e Integral III disponibilizado pela professora dessa disciplina, iniciando, assim, as análises desta investigação, e utilizando algumas etapas do percurso metodológico previsto na fase epistemológica da TMCC que define que as análises de documentos institucionais devem ser realizadas por meio de leitura direcionada pelos questionamentos:

- Como está organizada a estrutura curricular do curso de Engenharia Civil?
- Como a disciplina, na qual as Integrais Duplas são ensinadas, se desenvolve? Nessa questão, outras estão embutidas: como a disciplina acontece dentro da instituição, para quais estudantes ela é ministrada – apenas para a Engenharia Civil ou para estudantes de outros cursos? Em qual momento do curso essa disciplina é ministrada? Há ou não pré-requisitos para que os estudantes possam cursá-la? Qual a carga horária destinada à execução dessa disciplina? Quais os elementos de sua ementa, os conteúdos programáticos, as estratégias de ensino que os professores indicam que irão utilizar? Como a avaliação acontece na disciplina e quais as referências bibliográficas utilizadas?

No segundo momento, por meio da técnica τ_{ib2} , analisamos o livro didático adotado na disciplina Cálculo III em que as ID são abordadas, conforme propõe uma das etapas do percurso

metodológico da fase epistemológica da TMCC. O livro escolhido foi *Cálculo*, de James Stewart, volume 2, 7ª edição, publicado pela *Cengage Learning*, em 2014, que se constitui como material didático destinado à formação dos engenheiros civis da instituição de referência. A análise, relacionada ao estudo do conhecimento acerca do cálculo de funções reais de várias variáveis reais e, portanto, ao estudo do conhecimento acerca das ID, foi realizada tendo como subsídio o Modelo Epistemológico de Referência elaborado nesta investigação.

É importante destacar que o plano de ensino no qual a obra foi identificada e disponibilizado pela professora é integrante do projeto curricular anterior ao que passou a ser implementado em 2021, pois a disciplina que aborda as Integrais Duplas na matriz curricular implementada a partir de 2021 ainda não havia sido efetivada no momento das análises desta investigação. Naquele, constam três obras na bibliografia básica. A opção em analisar a de Stewart se deu após realização de entrevista com a professora da disciplina, que afirmou usar apenas essa obra em suas aulas, podendo recorrer a outras somente para retirar exercícios na composição de listas de atividades para os estudantes.

Em consonância com os procedimentos metodológicos propostos na fase epistemológica da TMCC, analisamos a obra com vistas a responder à seguinte questão: *Como as ID são abordadas no livro adotado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III na instituição de referência e como o conhecimento acerca dessas integrais é mobilizado em termos praxeológicos?*

Assim, inicialmente, realizamos a análise da obra quanto à sua estrutura e organização, bem como observamos os principais objetos com os quais as ID interagem, sejam eles matemáticos ou constituintes de nichos aplicativos. Observamos, entre outros aspectos, as mídias e tecnologias de apoio à organização matemática e didática, como são abordados os projetos aplicados, se o autor propõe atividades diferenciadas a fim de diminuir as dificuldades dos estudantes, como os capítulos são organizados. Depois, seguimos para uma análise das seções que compõem o Capítulo XV dessa obra, que se refere às Integrais Duplas, com olhar para as praxeologias vigentes comparadas às identificadas no MER construído.

Na sequência, por meio da tarefa τ_{ib3} , realizamos entrevistas com profissionais que atuam como engenheiros e como professores e ministram disciplinas tanto do eixo básico como específico e profissionalizante do curso de Engenharia Civil da instituição de referência, para que nos orientassem quanto à localização de situações em que as ID estejam presentes. Essas entrevistas evidenciaram a presença das ID no contexto Mecânica dos Fluidos e Mecânica dos Sólidos, além de serem mobilizadas em situações da Física, comumente discutidas nas

disciplinas de Cálculo relacionadas ao cálculo de medida de massa, de medida de densidade ou de medida de momento. Não voltamos a atenção para essas aplicações, por entender que não eram relevantes para esta investigação, por já serem comumente discutidas em sala de aula de Cálculo Diferencial e Integral.

Após a realização das entrevistas, por meio da τ_{ib3} , detivemo-nos a buscar os livros didáticos das disciplinas que não são da área de Matemática. Acessamos o plano de Ensino das disciplinas Mecânica dos Fluidos e Mecânica dos Sólidos, cedido pelos professores; listamos os livros das referências e deslocamo-nos até a biblioteca da instituição de referência em busca dessas obras. Tivemos o cuidado de folhear cada um, página por página, para identificar definições, propriedades, exemplos de exercícios ou problemas resolvidos que indicavam a presença das Integrais Duplas. Esse trabalho foi bastante demorado e decepcionante, pois encontramos apenas um problema resolvido, em Çengel e Cimbala (2012). O problema descreve o escoamento no interior de uma tubulação de secção cilíndrica comumente utilizada no transporte de produtos, matérias-primas e fluidos de processo, e que encontra aplicações na construção civil em situações de escoamento de óleos lubrificantes muito viscosos e em baixa velocidade, camada limite e escoamento em meios porosos (solos).

Ressaltamos que a análise de livros de disciplinas específicas, visando identificar a mobilização em determinada habilitação de Engenharia de certo objeto matemático, é inerente ao percurso metodológico da fase epistemológica da TMCC e à etapa central da Metodologia *Dipping*, inserida na fase curricular dessa teoria.

Por fim, concluímos, por meio da técnica τ_{ib5} , que as análises aqui realizadas constituíram o Modelo Epistemológico Dominante, pois evidenciaram como as Integrais Duplas são consideradas, descritas e interpretadas no curso de Engenharia da instituição de referência.

Por meio do Quadro 11, explicitamos a última praxeologia menor integrante da PID desta investigação, a Praxeologia de Investigação III, concernente ao estudo da dimensão ecológica do problema didático em questão.

Quadro 11 – Praxeologia de Investigação III

Relativa à dimensão ecológica do problema didático
Tarefa
T_{ic1} : Elaborar, a partir do problema no contexto de Mecânica dos Fluidos identificado na Praxeologia Didática II desta investigação, um evento contextualizado (problemas ou projetos integrando disciplinas matemáticas e não matemáticas que compõem a matriz curricular de determinado curso de graduação do qual a Matemática está a serviço) como uma proposta de ferramenta a ser utilizada nos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas na formação do engenheiro civil por meio de uma abordagem contextualizada.

Subtarefas
ST_{ic1}: Analisar quais as condições que permitem explicar o estado atual das organizações didáticas e das organizações matemáticas relacionadas às ID no curso de Engenharia Civil da instituição estudada. ST_{ic2}: Analisar como o Modelo Epistemológico Dominante condiciona a forma de organizar o ensino e, consequentemente, o estudo de ID no curso de Engenharia Civil da instituição estudada. ST_{ic3}: Construir um Modelo Alternativo para o Ensino de Integrais Duplas. ST_{ic4}: Analisar quais condições dificultam ou impedem que determinadas características das organizações matemáticas e didáticas associadas ao Modelo Alternativo para o Ensino de ID construído se desenvolvam no curso de Engenharia Civil da instituição estudada e de onde provém tais restrições. ST_{ic5}: Analisar que condições devem ser instauradas para que seja possível a vida de certas organizações matemáticas e de certas organizações didáticas com as características inerentes àquelas presentes no Modelo Alternativo para o Ensino de ID construído.
Técnicas
τ_{ic1}: Analisar, tendo por referência o MER elaborado, as Diretrizes Curriculares para a graduação em Engenharia no Brasil, o Projeto Pedagógico do curso de Engenharia Civil da instituição de referência, os planos de ensino, os materiais didáticos e recursos tecnológicos utilizados, os conhecimentos docentes etc., visando evidenciar as condições e restrições institucionais que favorecem ou impedem modificações no ensino de ID no curso de Engenharia Civil da instituição de referência. τ_{ic2}: Considerar como o problema aplicado para a construção do EC é selecionado a partir da Praxeologia de Investigação II. τ_{ic3}: Determinar o <i>habitat</i> e nicho das ID relacionadas ao contexto do problema considerado na τ_{Ia2}. τ_{ic4}: Determinar o objetivo do EC. τ_{ic5}: Fundamentar o contexto do EC. τ_{ic6}: Analisar o problema que compõe o EC do ponto de vista das praxeologias didáticas e matemáticas aplicadas durante a exposição da resolução desse problema disponível no livro didático da disciplina de Mecânica dos Fluidos. τ_{ic7}: Escrever a história do EC. τ_{ic8}: Propor a organização didática do EC.
Tecnologias
θ_{ic1}: Fontes de contexto para a busca e construção de um EC: a ciência em estudo e sua vinculação com as disciplinas do curso, com a atuação profissional dos estudantes após sua formação e com suas situações da vida cotidiana que mobilizam a Matemática. θ_{ic2}: Estudo ecológico do conhecimento. θ_{ic3}: Procedimentos propostos para a construção do EC, previstos na Didática da Matemática em Contexto, na fase Didática da TMCC. θ_{ic4}: Eixos <i>contextualização e descontextualização</i> da Didática da Matemática em Contexto.
Teorias
Θ_{ic1}: Os paradigmas que fundamentam a TMCC (a Matemática é uma ferramenta de apoio a outras ciências e uma disciplina formativa aos profissionais; a Matemática tem uma função específica no Ensino Superior; os conhecimentos nascem integrados). Θ_{ic2}: Ótica epistemológica da interdisciplinaridade: os conceitos se encontram entrelaçados em forma de rede e mantêm relações entre eles. A rede aqui é considerada como os saberes das áreas das ciências, então, para abordar um problema de investigação, é necessário considerar as relações articuladas entre as diferentes ciências a ele vinculadas, bem como as específicas de cada uma delas. Θ_{ic3}: Abordagens teóricas que sustentam a Didática da Matemática em Contexto: abordagem psicogenética de Piaget (1991), sociocultural de Vygotsky (1978) e da Aprendizagem Significativa de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Θ_{ic4}: Dimensão ecológica de um problema de investigação em didática da Matemática no âmbito da TAD.

Fonte: A autora, 2021

Como vimos, a dimensão ecológica de um problema didático abarca a discussão a respeito das interações que acontecem entre as praxeologias matemáticas associadas às praxeologias didáticas e sobre as condições necessárias às modificações dessas, ou seja, evidencia as condições requeridas para propor novas praxeologias, aqui entendidas como um

modelo alternativo elaborado para o ensino de um objeto matemático. Vimos, também, que a análise ecológica de um objeto de conhecimento é organizada por meio da alocação desse objeto em seu *habitat* (seu local de moradia e o ambiente conceitual) e o seu *nicho* que determina a função desse objeto no sistema de objetos com os quais ele interage.

Por meio da TMCC, apresentam-se estratégias para que as situações de ensino e de aprendizagem dos objetos matemáticos presentes na graduação criem vínculos entre a Matemática, as outras ciências, as atividades cotidianas e a atuação do futuro profissional, para que o estudante seja capacitado para usar objetos matemáticos nas áreas de conhecimento em que ele está inserido, quando forem requisitados.

Isso posto, tomamos o problema relacionado que mobiliza as ID em Mecânica dos Fluidos como ponto de partida para a elaboração de uma proposta alternativa para o ensino de Integrais Duplas. Esse problema foi analisado tanto do ponto de vista dos conhecimentos matemáticos envolvidos em sua solução quanto das praxeologias matemáticas, tendo como referência o MER. Apesar de o problema demandar a mobilização de outros objetos matemáticos para ser solucionado, essas praxeologias foram analisadas somente relacionadas às ID, quanto aos elementos da contextualização específica do problema, bem como sua resolução integral, entre outros. Essa análise se referiu à τ_{Ic2} , justificada pelo θ_{Ic2} , o estudo ecológico do conhecimento que tem sua base teórica fincada na dimensão ecológica de um Problema de Investigação em Didática da Matemática, no âmbito da TAD.

Passamos, então, a elaborar o EC por meio das técnicas em sequência que se justificam nos procedimentos propostos para a construção do EC, previstos na Didática da Matemática em Contexto, na fase didática da TMCC, e estão ancoradas nos três paradigmas que a fundamentam: a Matemática é uma ferramenta de apoio a outras ciências e uma disciplina formativa aos profissionais; a Matemática tem uma função específica no Ensino Superior; os conhecimentos nascem integrados, que representamos por θ_{Ic1} ; na ótica epistemológica da interdisciplinaridade, teoria θ_{Ic2} ; e nas abordagens teóricas que sustentam a Didática da Matemática em Contexto: abordagem psicogenética de Piaget (1991), sociocultural de Vygotsky (1978) e da Aprendizagem Significativa de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980), , última teoria no domínio da TMCC. Ainda no âmbito da dimensão ecológica do problema de investigação segundo a TAD, analisamos quais restrições existem e que condições são requeridas para reorientar o ensino de ID no curso de Engenharia Civil da instituição estudada, conforme a TMCC.

Assim, no capítulo seguinte, apresentamos o estudo epistemológico das ID, buscando

identificar suas razões de ser, bem como o MER elaborado a partir deste estudo, conforme a Praxeologia de Investigação I, desenhada nesta seção.

4 DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA DAS INTEGRAIS DUPLAS

No capítulo anterior, com o problema didático construído, selecionamos as tarefas para a investigação delineada por tal problema, tendo a articulação da TMCC com a TAD como uma Praxeologia de Investigação Didática. Diante das tarefas elaboradas, desenhamos as praxeologias menores que elas determinam e que compõem a PID desta investigação. Cada uma delas foi dedicada ao estudo de uma das dimensões do problema didático em questão.

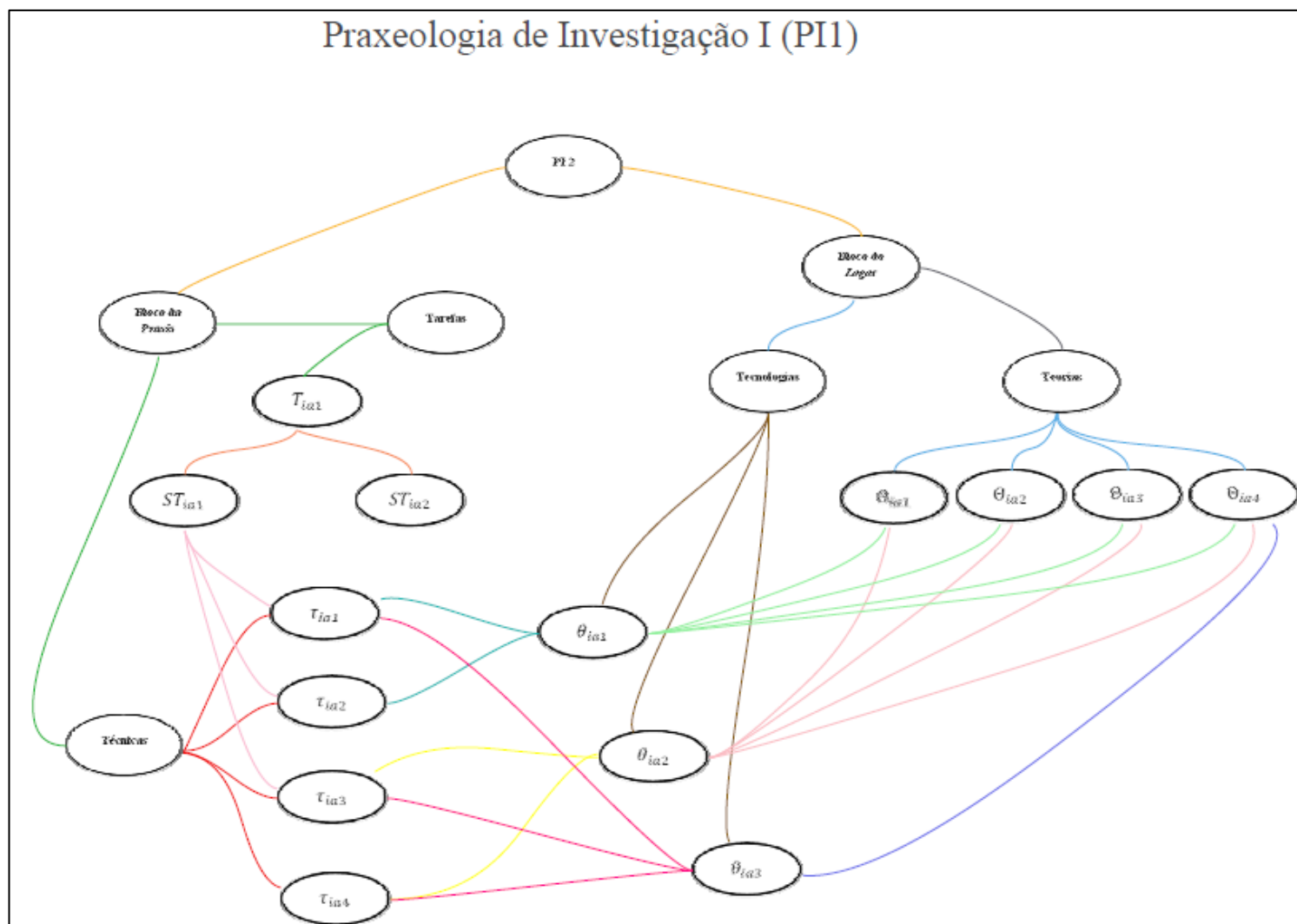
Assim, neste capítulo, desenvolvemos a Praxeologia de Investigação I, praxeologia menor da PID, que se refere ao estudo epistemológico do problema didático, por meio da tarefa T_{ia1} , determinada a analisar, do ponto de vista epistemológico, como se deu a construção de Integrais Duplas ao longo do tempo. Essa tarefa tem implícita a subtarefa ST_{ia1} , que permite identificar as razões de ser das Integrais Duplas, pois, conforme já declaramos, quando a dimensão epistemológica do conhecimento é tomada em primeiro plano, evidenciam-se “as questões relacionadas à forma de descrever e interpretar os conhecimentos matemáticos” (GASCÓN, 2011, p. 210). Em outros termos, quando se tem um objeto matemático em investigação no âmbito da TAD, é o estudo de sua dimensão que nos informa como um conhecimento matemático foi desenvolvido, construído e interpretado em um contexto, em determinado período, evidenciando as referidas razões de ser.

Vimos também que, a respeito do estudo epistemológico, Gascón (2011) explica que é possível elaborar o MER, sistema de referência para ser contrastado com o MED, ou seja, com o modelo presente na instituição de referência estudada que condiciona o tipo de atividades matemáticas relacionadas às ID, efetivamente nela realizadas, tal qual as atividades didáticas correspondentes, materializadas no modelo docente desempenhado. Assim sendo, o MER se configura como um sistema de referência para construir fenômenos didáticos, formular e tratar problemas didáticos associados, no caso desta investigação, às Integrais Duplas. Assim, a subtarefa ST_{ia2} , destinada à construção do MER, também será abordada neste capítulo, lembrando que, de acordo com Chevallard (1999), o MER formula-se em termos de praxeologias matemáticas em respostas a questões levantadas no estudo epistemológico do objeto matemático relacionado ao problema didático.

As técnicas desenhadas na Praxeologia de Investigação I, Figura 5, podem ser entendidas como a metodologia para o estudo da dimensão epistemológica do problema didático, elaboradas conforme o que preconiza a fase epistemológica da TMCC, associada a

procedimentos que elaboramos e estão em conformidade com o estudo epistemológico do problema didático no âmbito da TAD.

Figura 5 – Praxeologia de Investigação I



Fonte: A autora, 2021

4.1 Técnica τ_{ia1}

Conforme explicitamos no capítulo teórico-metodológico desta tese, os materiais aqui listados foram selecionados por meio de buscas no *Google Acadêmico*, em *sites* de bibliotecas, além do *Google Livros*. O primeiro documento no qual nos baseamos foi o Material Complementar para os Professores, do livro Cálculo de Thomas *et al.* (2002), por meio do qual, após análise, elaboramos a listagem dos atores que estiveram, de alguma forma, envolvidos no processo da construção da teoria das ID, e associamos a eles as suas contribuições. Os resultados foram registrados no Quadro 12.

Entretanto, conforme explicitamos nos procedimentos metodológicos desta investigação, em um dado momento de nossas leituras iniciais, conjecturamos que as Integrais Duplas foram se instituindo a partir da extensão da teoria das integrais de funções reais de uma variável real. Assim, buscamos na história um momento no qual essa extensão teve início, o que demandou análise de textos históricos voltados para a construção da teoria das integrais de funções reais de uma variável real. Os resultados estão inseridos no Quadro 12.

Quadro 12 – Atores e suas ideias precursoras associadas à integração

Atores selecionados	Ideias precursoras associadas à integração
Eudoxo (370 a.C.)	<i>Método da Exaustão.</i>
Arquimedes (288-212 a.C.)	<i>O problema da quadratura do arco parabólico</i> (encontrar a medida da área de um arco parabólico delimitado).
Cavalieri (1598-1647)	<i>Os princípios de Cavaliere</i> se tornaram ferramentas para o cálculo de medidas de áreas e volumes de objetos matemáticos.
Johannes Kepler (1571-1630)	<i>Estudo do Movimento dos Planetas.</i> Descreveu uma circunferência como um polígono regular de um número infinito de lados, na busca de um método para encontrar a medida da área do círculo delimitado por essa circunferência, além de desenvolver um método para encontrar a medida do volume de sólidos formados por meio da revolução de uma região bidimensional ao redor de um eixo considerado. Para determinar quadraturas de segmentos de uma elipse (aproximar áreas de cortes da elipse), somou triângulos infinitesimais que resultaram da procura da medida da área de uma região bidimensional e concluiu que essa medida era determinada por meio da coleção de todas as cordas (retas) construídas sob essa região.
Galileu (1564-1634)	As medidas da área do triângulo e do retângulo podiam ser interpretadas como a soma de uma quantidade muito grande de segmentos de reta verticais.
Simon Stevin (1548-1620) e Luca Valerio (1552-1618)	Buscaram desenvolver uma forma de evitar <i>reductio ad absurdum</i> do Método da Exaustão no cálculo da medida da área de um segmento parabólico.
Torricelli (1608-1647), Fermat (1601-1665), Pascal (1623-1662), Saint-Vicent (1584-1687), Barrow (1630-1677).	Resultados das integrações de: $f(x) = \sin \theta$, $g(x) = \sin^2 \theta$ e $h(x) = \theta \sin \theta$.
Pascal (1623-1662)	Desenvolveu um método para calcular as medidas do momento de alguns sólidos geométricos e determinar o centro de gravidade desses sólidos.

Roberval (1602-1675)	Desenvolveu um método para encontrar a medida da área determinada pela região sob um arco da cicloide.
John Wallis (1616-1703)	Desenvolveu uma fórmula para integral de $f(x) = x^n$, no intervalo $[0,1]$, restrita a valores de n inteiros ou fracionários diferente de -1 , usando indivisíveis; calculou a medida da área de um quadrante do círculo para a determinação de uma aproximação para π .
William Neile (1637-1670)	Encontrou meios para calcular a medida do comprimento de uma seção arbitrária da parábola semicúbica com a seguinte representação algébrica: $y^3 = x^3$.
Hendrick van Heuraet (1634-cerca de 1660)	Generalizou um método para encontrar a medida do comprimento de um arco por meio da soma de tangentes infinitesimais a uma curva.
Barrow (1630-1677)	Primeiro matemático a relacionar o processo de integração e diferenciação como operações inversas.
Isaac Newton (1643-1727)	Estendeu os estudos de Wallis em relação a quadraturas e entendeu que podia calcular a medida da área da região entre uma curva e o eixo horizontal, utilizando uma variável. Seus cálculos envolviam as retas tangentes e centros de gravidade de “linhas curvas”, considerando a forma com que as coordenadas variam em relação ao tempo. Resumiu a importância dos processos infinitos na Matemática; procedeu com o desenvolvimento dos métodos de integração e diferenciação como ferramenta de aplicação. Em relação especificamente às integrais, ele relacionou uma grande quantidade de integrais de funções algébricas às suas respectivas fórmulas de resolução, e para curvas para as quais não desenvolveu fórmulas analíticas, deduziu e descreveu métodos geométricos de quadratura, além de, por meio do Teorema Fundamental do Cálculo, demonstrou as técnicas básicas para o cálculo de integrais usadas atualmente, incluindo os métodos, hoje conhecidos como <i>Método da Substituição</i> e <i>Método da Integração por Partes</i> .
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)	Usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina <i>summa</i> (soma), em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como fazemos hoje, assim como escrevia $\int x dy$ e $\int y dx$ para integrais. Desenvolveu métodos algébricos para o cálculo de integrais.
Brook Taylor (1685-731) e Colin MacLaurin (1698-1746)	Desenvolveram a fórmula de Taylor e fórmula de MacLaurin para expansão de funções em séries de potências.
Jean d'Alembert (1717-1783)	Propôs trabalhos sobre equações diferenciais, cálculo integral e resistência de fluidos.
Leonard Euler (1707-178)	Tomou as funções em vez de curvas como um objeto de estudo, que permitiu a aritmetização gradual da Análise e a consequente separação do Cálculo da Geometria. Resumiu as regras desenvolvidas pelos irmãos Bernoulli para o cálculo de integrais de funções que resultavam em frações parciais; implementou as notações $f(x)$ e Σ para somatório.
Augustin Louis Cauchy (1789-1857)	Demonstrou, com generalidade, a existência da integral interpretada como a primitiva de uma função, além de tomar a integral definida como o limite de uma soma.
Joseph Louis Lagrange (1736-1813)	Aplicou seu conhecimento de Cálculo à Mecânica. Foi muito produtivo nessa área aplicada da Matemática. Seus principais trabalhos foram sobre as equações de movimento e no entendimento da energia potencial. Lagrange também foi o primeiro a desenvolver os métodos de hoje para encontrar máximos e mínimos, usando o Cálculo.
Pierre-Simon Laplace (1749-1827)	Generalizou as leis da Mecânica para sua aplicação ao movimento e às propriedades de corpos celestes, por isso precisou e desenvolveu resultados em cálculo de funções reais de várias variáveis reais.
Adrien Legendre (1752-1833)	Analisou a curva descrita pelas bolas de canhão, levando em consideração a resistência do ar e desenvolveu relações para alcance, dadas as velocidades iniciais, por meio de equações. Legendre pôde desenvolver essas equações a partir de seu trabalho avançado em equações diferenciais e em cálculo de funções reais de várias variáveis reais.

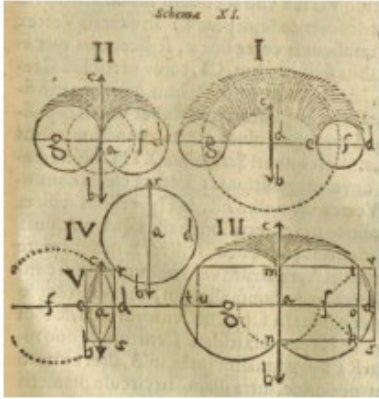
Sylvestre François Lacroix (1765-1843)	Escreveu um tratado importante sobre Cálculo, em 1797. Em seu livro, unificou e generalizou muitos métodos para incluir cálculo de várias variáveis. Enquanto Lacroix seguiu muitos dos fundamentos estabelecidos por Euler, também incorporou resultados obtidos no final do século XVIII ao seu texto. Seu tratado expandiu o papel do cálculo de várias variáveis nas ciências.
Joseph Fourier (1768-1830)	Registrou seus estudos sobre a teoria do calor em sua obra intitulada <i>Teoria Analítica do Calor</i> em que aplicou integrais de funções reais de mais de uma variável real.
Friedrich Gauss (1777-1855)	Seu desenvolvimento de uma teoria de órbitas planetárias foi publicado em 1809. Gauss desenvolveu e provou o Teorema da Divergência enquanto trabalhava na teoria de gravitação.
Mikhail Ostrogradsky (1801-1862)	Foi o primeiro a publicar uma prova do Teorema da Divergência.
Siméon Poisson (1781-1840)	Estudou com Lagrange e Laplace, fazendo seus trabalhos iniciais em Mecânica. Utilizou a Matemática nas aplicações de elasticidade e vibrações.
Augustine Cauchy (1789-1857)	Construiu sobre os conceitos de várias variáveis no <i>Mécanique Céleste</i> de Laplace e no <i>Traité des Fonctions Analytiques</i> de Lagrange. Em 1816, resolveu um problema de hidrodinâmica sobre a propagação de ondas sobre a superfície de um líquido. Usou seus conhecimentos de diferenciação parcial e de integrais de linha para analisar soluções e propriedades das equações diferenciais parciais.
Carl Jacobi (1804 -1851)	Aplicou métodos de transformação para estudar integrais como as que surgiram no cálculo do comprimento de arco.
George Green (1793-1841)	Sobre os fundamentos matemáticos da gravitação, da eletricidade e do magnetismo, foi publicado em 1828, em um pequeno livro intitulado <i>An Essay on the Application of Mathematical Analysis to Electricity and Magnetism</i> . A Matemática de Green deu a base na qual Thomson, Stokes, Rayleigh, Maxwell e outros construíram a teoria atual do eletromagnetismo. Central a esse desenvolvimento foi o cálculo de várias variáveis, resultado que agora chamamos de Teorema de Green.
George Stokes (1819-1903)	Aplicou o cálculo de várias variáveis para estudar hidrodinâmica, elasticidade, luz, gravitação, som, calor, meteorologia e física solar. Aplicou e aperfeiçoou o Teorema de Stokes.
Bernhard Riemann (1826-1866)	O estudo das integrais e o desenvolvimento da teoria de integração foram revistos e reorganizados por ele. Trabalhou com o físico Wilhelm Weber (1804-1891), introduzindo as ideias básicas da Geometria Diferencial. Continuou a estudar e contribuir com o cálculo de várias variáveis aplicando resultados em Dinâmica e Física Computacional.
Josiah Willard Gibbs (1839- 1903)	Trabalhou em problemas de ciência aplicada em Física e Matemática. Suas contribuições foram em Termodinâmica, Eletromagnetismo e Mecânica, em que utilizou o cálculo de funções reais de várias variáveis reais.
Sonya Kovalevsky (1850-1891)	Ela trabalhou, principalmente, na Teoria de Equações Diferenciais Parciais. Trabalhos posteriores de cientistas e matemáticos aplicados, no final do século XIX e no século XX refinaram resultados anteriores de várias variáveis e utilizaram essas técnicas em várias áreas de ciência e Engenharia.
James Maxwell (1831-1879)	Usou ferramentas do cálculo de funções reais de várias variáveis reais como a divergência, o rotacional, fluxo e potencial para avançar no entendimento de ótica, luz, eletricidade e magnetismo.
Ernest Mach (1838-1916)	Usou ferramentas do cálculo de funções reais de várias variáveis reais para produzir novos resultados em Mecânica, Termodinâmica e Física. Influenciou trabalhos posteriores de Albert Einstein em Relatividade e Física.
Guido Fubini (1879-1943)	Avançou nos estudos dos aspectos aplicado e teórico do cálculo de funções reais de várias variáveis reais. Seu trabalho aplicou Matemática à Engenharia. Ele provou o método de avaliar integrais iteradas, que tem o seu nome e utilizou os resultados em Mecânica e Física.

Fonte: Adaptado do Material Complementar para os Professores, do livro Cálculo de Thomas *et al.* (2002)

4.2 Técnica τ_{ia2}

Para a efetivação da técnica τ_{ia2} , conforme explicitamos, seguimos o percurso da fase epistemológica da TMCC, realizando a leitura minuciosa dos documentos selecionados pela realização da tarefa anterior, direcionada a identificar e registrar os problemas ou situações que permitiram a construção da teoria das Integrais Duplas ao longo dos tempos. Nesse sentido, registramos no Quadro 13 os problemas identificados e as contribuições desses problemas quanto à construção da teoria dessas integrais, visando cumprir a tarefa e subtarefas propostas para a praxeologia de investigação em questão.

Quadro 13 – Problemas relacionados à construção das Integrais Duplas

Quadratura do arco parabólico: encontrar a medida da área de uma região delimitada por um arco de parábola e pelo segmento que une as extremidades desse arco.
Qualquer segmento de esfera tem para o cone de mesma base e altura a razão que a soma do raio da esfera e da altura do segmento complementar tem com a altura do segmento complementar (o cálculo da medida do volume da esfera).
Necessidade de explicar o movimento dos planetas.
Teorema XVIII: Todo anel com seção [transversal] circular ou elíptica é igual a um cilindro cuja altitude iguala à longitude da circunferência, que o centro da figura rotacionada descreve, e cuja base é a mesma com a seção [transversal] do anel.
Figura 6 – Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte II  Fonte: Moura e Oliveira, 2011, p. 6
Teorema XIX: Um anel fechado é igual ao cilindro que tem uma base [que seja] o círculo da seção [transversal] do anel e a altitude igual à longitude do círculo descrito.
Encontre z , uma função de duas variáveis x e y , para que a fórmula diferencial $\frac{dz}{dx} = p$ seja igual a alguma função dada x e y para definir a função geral procurada (z).
Método das integrações sucessivas ($\iint V dx dy$) de Euler.
Problema das Temperaturas Terrestres: diferentes partes da superfície do globo estão desigualmente expostas à influência dos raios solares; a intensidade de sua ação depende da latitude do lugar; muda também no decorrer do dia e do ano, e está sujeita a outras menos perceptíveis em igualdades.
O desenvolvimento de ferramentas para a solução de sistemas de equações diferenciais.
Método de redução de equações diferenciais a equações algébricas de solução mais simples.
Encontrar a medida do movimento do calor em um determinado ponto de uma massa sólida.

Fonte: A autora, 2021

4.3 Técnica τ_{ia3}

Conforme acentuamos, à técnica τ_{ia3} cabe o relato da trajetória da construção das Integrais Duplas como um saber científico e foi elaborada, principalmente, a partir das análises realizadas em cumprimento à técnica τ_{ia3} da qual tratou a seção 3.2.3 desta tese. Assim, trazemos, nesta seção, o referido registro.

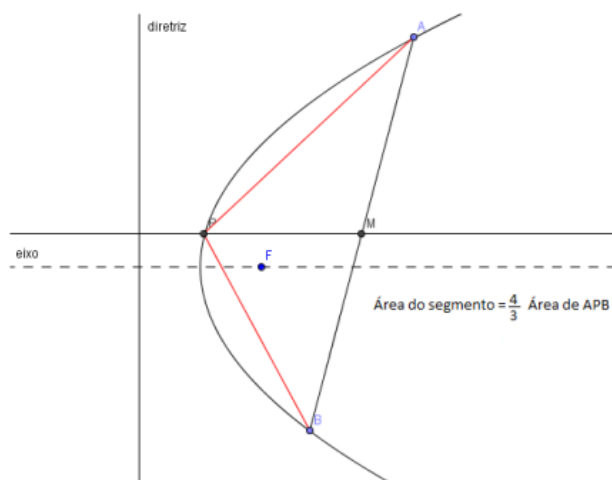
Segundo Boyer (1959), o Cálculo tem sua gênese na Grécia Antiga, nas dificuldades geradas para expressar ideias intuitivas sobre as razões ou proporções de segmentos de retas.

Para Brolezzi (1996), os gregos sinalizaram o curso para a compreensão dos fenômenos ligados ao infinito, ao contínuo, ao infinitésimo, conforme visto na *Teoria dos Infinitesimais* de Demócrito e seus seguidores – século V a.C. –, que defendia a *doutrina atomística* e propunha a existência do *infinitamente pequeno* compondo o ser das coisas. O autor acrescenta que o marco da origem do Cálculo foi registrado na obra de Euclides e consiste na exploração da continuidade e da geometria em termos de análise algébrica²².

Com relação à integral, esclarecemos que a primeira ideia de integração que mais aproxima do significado que a integral de funções reais de uma variável real tem hoje foi encontrada nos estudos de Arquimedes (288-212 a.C.), abordando o problema da quadratura do arco parabólico, ou seja, encontrar a medida da área de um arco parabólico delimitado que deu origem, como veremos a seguir.

É importante esclarecer que um arco parabólico delimitado é uma região delimitada por um arco de parábola e pelo segmento que une as extremidades, conforme mostrado na Figura 6. Arquimedes provou que a medida da área do segmento de parábola $\overline{AB}$, assim definido, é igual a $\frac{4}{3}$ da medida da área do triângulo Δ_{APB} , em que P é o ponto de interseção da parábola e a reta paralela ao eixo das abscissas, passando pelo ponto M , médio de $\overline{AB}$ em que, em geral, P não é vértice da parábola.

²² Segundo Boyer (1959), o desenvolvimento da álgebra geométrica consistia na resolução de problemas aritméticos ou algébricos lidando diretamente com grandezas contínuas, realizando todas as operações sem necessidade de referência direta a números e suas representações.

Figura 7 – Segmento de parábola $(AB)^-$ 

Fonte: Santos, 2014, p. 27

De acordo com Ribeiro (2010), Arquimedes atribuiu o crédito do processo aplicado na quadratura do arco parabólico a Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) que formalizou o *método da exaustão* que já vinha sido aplicado nos estudos do sofista Antífon (480-411 a.C.) de Ramnunte, que viveu a maior parte de sua vida em Atenas.

Conforme Eves (2011), o *Tratado de Arquimedes* enviado em forma de carta a Eratóstenes (276-194 a.C.), *O Método*, chegou até os matemáticos do século XX em 1906 por meio de Johan Ludvig Heiberg (1791-1860). Nesse tratado, a *Proposição 1* se refere ao Teorema: *a [medida da] área do segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo com a mesma base e a mesma altura*. A Figura 8 ilustra o teorema citado e apresenta a dedução desse teorema, apresentada em Boyer (1974).

Figura 8 – Teorema da Quadratura do Arco da parábola por Arquimedes

O primeiro teorema que ele descobriu desse modo foi o teorema sobre a área de um segmento parabólico; na Proposição 1 de *O método* o autor descreve como chegar a esse teorema, equilibrando retas como se faz com pesos em mecânica. Pensou nas áreas do segmento parabólico ABC e do triângulo AFC (onde FC é tangente à parábola em C) como sendo a totalidade de uma coleção de segmentos de reta paralelos ao diâmetro OB da parábola, tais como OP (Fig. 8.11) para a parábola e OM para o triângulo. Se, agora, colocarmos em H (onde $HK = KC$) um segmento igual a OP , isso equilibraria OM onde está, sendo K o fulcro. (Isso pode ser provado usando a lei da alavanca e a propriedade da parábola.) Logo a área da parábola, se colocada com o centro de gravidade em H , equilibrará o triângulo, cujo centro de gravidade está sobre KC , a um terço da distância de K a C . Disso resulta facilmente que a área do segmento parabólico é um terço da área do triângulo AFC , ou quatro terços da área do triângulo inscrito ABC .

Teorema de Tales, cônicas, Lei da Alavanca de Arquimedes, razão e proporção.

Para a demonstração do teorema, traçamos, inicialmente, um segmento de parábola passando pelos pontos A, B e C do triângulo $\triangle ABC$, de base AC inscrito no arco. Prolongamos o segmento QB até E pertencente ao segmento da tangente no ponto C , em que Q é o ponto médio da base AC e a reta tangente BE é paralela à base AC do $\triangle ABC$. A seguir, construímos os segmentos AF e OM , ambos paralelos a QE , com o segmento OM com origem em O , na base AC , interceptando a parábola no ponto P e encontrando a reta tangente que passa pelo ponto C no ponto M . Pelo processo análogo, concluímos que F pertence à mesma reta tangente. Traçamos a mediana CK do triângulo $\triangle AFC$, relativa ao vértice C e ao segmento AF , passando pelos pontos B e N . O triângulo $\triangle ABC$, inscrito na parábola, possui altura igual a um quarto da medida da altura do triângulo $\triangle AFC$, pois B pertence a CK e $QB = BE$ e $2QE = AF$, uma vez que Q pertence ao eixo da parábola. Logo, a medida da área do triângulo $\triangle AFC$ é dada pelo quádruplo da medida da área do triângulo $\triangle ABC$. Prolongamos a mediana construída a partir de K até o ponto H , tal que $CK = KH$, para que o ponto de apoio de uma alavanca teórica (fulcro) esteja em K . Como CF é tangente ao ponto C , temos que

$$\frac{OP}{OM} = \frac{AQ}{AC}.$$

Como CK é a mediana do triângulo $\triangle AFC$ e AF é paralela a OM , temos que

$$\frac{KN}{KC} = \frac{AO}{AC}$$

Desses dois resultados anteriores, concluímos que

$$\frac{KN}{KC} = \frac{OP}{OM}$$

e:

$$KN \cdot OM = KC \cdot OP$$

como que $HK = KC$

$$KN \cdot OM = HK \cdot OP$$

De acordo com a Lei da Alavanca com fulcro no ponto K , o peso OM colocado a uma distância KN do fulcro equilibra o peso OP a uma distância HK do fulcro, sendo o ponto O arbitrário pertencente ao segmento AC . Então, qualquer segmento paralelo ao eixo que intercepta a parábola e o triângulo pode ser posto segundo a mesma condição de equilíbrio. Concluimos que a medida de uma região delimitada por uma parábola e alguma outra curva é a soma das medidas de todos esses segmentos paralelos ao segmento QB e, analogamente, a medida da área do triângulo ΔAFC é a soma das medidas de todos os segmentos paralelos a QE . Como a medida da área da parábola é dada pela soma das medidas dos segmentos paralelos ao segmento QB e, de forma similar, a medida da área do triângulo ΔAFC é a soma das medidas de todos os segmentos paralelos ao QE , concluimos que ao mover a parábola até o ponto H equilibrará o triângulo ΔAFC a uma distância de $\frac{1}{3}$ do fulcro, pois o baricentro do triângulo ΔAFC está sobre a mediana KC a $\frac{1}{3}$ de distância do ponto K . Logo,

$$A_s \cdot KH = A(\Delta AFC) \cdot \frac{kH}{3}$$

em que:

$$A_s = \frac{A(\Delta AFC)}{3}$$

concluimos que, como: $A(\Delta AFC) = 4A(\Delta ABC)$, pois a medida da altura do ΔAFC é o quádruplo da altura do ΔABC de mesma base, a medida da área procurada é

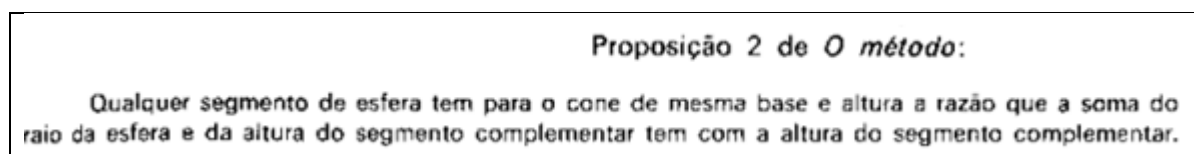
$$A_s = \frac{4}{3}A(\Delta ABC)$$

Um segundo problema: o *cálculo da medida do volume da esfera*, que constitui a Proposição 2 do Tratado de Arquimedes, foi identificado neste estudo epistemológico como outro problema que gerou uma praxeologia matemática, cuja necessidade de encontrar uma fórmula para o cálculo da medida do volume da esfera determinou outra razão de ser para as integrais de funções reais de uma variável real. O processo realizado por ele na referida dedução, segundo Eves (2011), apontou a direção para a construção da teoria dessas integrais,

uma vez que, para determinar uma medida de área de uma região ou do volume de um sólido, Arquimedes utilizava cortes correspondentes das regiões em um número muitíssimo grande de tiras planas que, se penduradas em um lado de uma alavanca, era necessário equilibrar o outro lado com figuras cuja medida de área, de volume e centroide eram conhecidas. Esse processo era conhecido como *O Equilíbrio de Arquimedes*, e a sua utilização levou outros matemáticos a desenvolverem e edificarem, ao longo do tempo, a ideia intuitiva de infinito e do infinitamente pequeno, fundamentais para a teoria do Cálculo e, portanto, das integrais.

Essa proposição foi enunciada em Boyer (1994) como o Teorema: *Qualquer segmento de esfera tem para o cone de mesma base e altura a razão que a soma do raio da esfera e da altura do segmento complementar tem com a altura do segmento complementar* e se encontra ilustrada nesta tese na Figura 10.

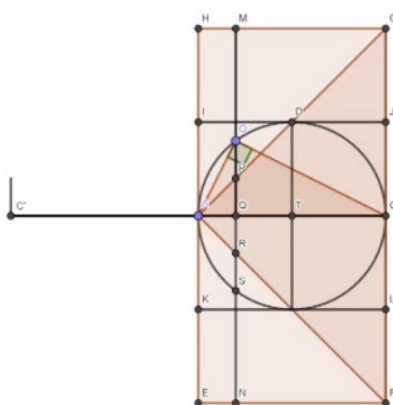
Figura 10 – Proposição 2 do livro *O Método*, de Arquimedes



Fonte: Boyer, 1974, p. 100

A dedução desse teorema, conforme realizada por Arquimedes, está explicitada a seguir e foi elaborada a partir de Ávila (2010). A tarefa implicada na praxeologia que tem como teoria o teorema em questão consiste em T_2 : calcular a medida do volume da esfera. O bloco teórico-tecnológico envolve, além dos conteúdos matemáticos já descritos para a execução de T_1 , a ideia da criação de sólido de revolução, e o teorema em si consiste na teoria do bloco do *logos* dessa praxeologia.

Figura 11 – Construção realizada por Arquimedes para o cálculo da medida do volume da esfera



Fonte: A autora, 2021

Com referência da Figura 11, construímos $ABCD$, um círculo tomado como diâmetros perpendiculares AC e BD ; AFG um triângulo isósceles em A com $AG \equiv AF$, de base FG e altura AC ; e $EFGH$ um retângulo. Em seguida, as construções foram rotacionadas em torno do eixo CC' , e uma esfera foi gerada pela revolução do círculo $ABCD$ em volta de CC' ; um cone gerado pela revolução do triângulo AGF ao redor de CC' e um cilindro gerado pela revolução o retângulo $EFGH$ em torno desse mesmo eixo. Tomamos MN , uma reta no plano da Figura 11, perpendicular a AC , cortando esse segmento no ponto Q . Como $QP = AQ$ e o triângulo ΔOAQ é reto em Q , e pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$QP^2 + QO^2 = AQ^2 + QO^2 = AO^2 = AQ \cdot AC \cdot AO^2.$$

Como o triângulo ΔOAC é reto em O e OQ é perpendicular a AC :

$$QP^2 + QO^2 = AQ \cdot AC,$$

e obtemos, considerando $QM = AC$ e tomando $AC' = AC$,

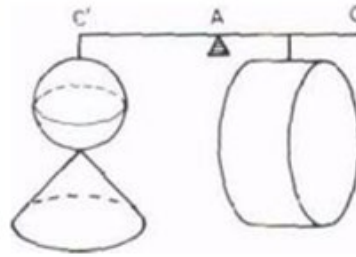
$$\frac{QP^2 + QO^2}{QM^2} = \frac{AQ \cdot AC}{QM^2} = \frac{AQ}{AC} = \frac{AQ}{AC'}.$$

Da relação anterior, concluímos que

$$\frac{\pi QP^2 + \pi QO^2}{\pi QM^2} = \frac{AQ}{AC'} \text{ ou } (\pi QP^2 + \pi QO^2) \cdot AQ = \pi QM^2 \cdot AQ$$

Podendo ser interpretada como o equilíbrio de pesos numa alavanca QC' , com fulcro em A , pois, pela Lei da Alavanca, a relação acima garante que os círculos de raios QP e QO , quando transferidos para C' , equilibram o círculo de raio QM localizado em Q (as medidas dos pesos dos círculos são proporcionais às medidas de suas áreas), considerando o cilindro como união infinita dos círculos de raio QM , Q variando de A até C . De forma análoga, obtêm-se a esfera e o cone. Remontamos a esfera e o cone no extremo C' da alavanca, representados na Figura 12.

Figura 12 – Alavanca de Arquimedes



Fonte: Ávila, 2010, p.5

Arquimedes concluiu que esses sólidos devem equilibrar o cilindro com centroide no extremo T da alavanca, em que

$$AT = \frac{1}{2}AC$$

com as medidas dos pesos tomados como proporcionais às medidas de seus volumes. Sendo V_e , C_o e C_i , os volumes da esfera, do cone e do cilindro, respectivamente, conclui-se que

$$\frac{C_o + V_e}{C_i} = \frac{AT}{AC'} = \frac{1}{2}$$

e:

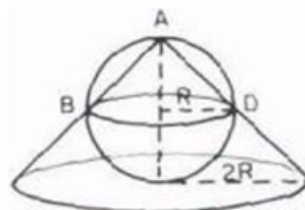
$$C_i = 2(C_o + V_e)$$

Sabendo que $C_i = 3C_o$, substituindo esse resultado na equação $C_i = 2(C_o + V_e)$ e simplificando, obtivemos:

$$C_o = 2V_e.$$

Considerando $CG = 2TD$, concluímos que $C_o = 8 \cdot \frac{\pi R^3}{3}$, sendo, portanto, 8 vezes a medida do volume do cone obtido por rotação do triângulo $\triangle ABD$, conforme a Figura 13.

Figura 13 – Sólidos de Revolução



Fonte: Ávila, 2010, p.5

Logo, de $C_o = 8 \cdot \frac{\pi R^3}{3}$, e de $C_o = 2V_e$, a medida do volume da esfera será dada por:

$$V_e = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Após as contribuições dos gregos, pouco foi produzido na Matemática. Somente no século XIV houve uma recuperação da cultura clássica e as obras vieram à tona, sendo enriquecidas com extensão de resultados e métodos produzidos pelos matemáticos dessa época, para os quais a álgebra simbólica se tornou fundamental. Segundo Roque (2015), com o crescente progresso das ciências e das artes, fenômenos antes absortos, esses foram evidenciados e passaram a integrar problemas geométricos e, principalmente, mecânicos, para os quais os procedimentos e métodos dos matemáticos da Antiguidade não eram mais suficientes.

Tais acontecimentos, aliados a diversas teorias sobre os movimentos expressos por meio da Matemática e usando linguagem de razões e proporções, deram um novo sentido à Matemática, nesse século. A geometria ainda era o seu principal domínio, porém, segundo Roque (2015), cresceu a consciência de que grande parte do conhecimento geométrico deveria servir a aplicações práticas ou mais abstratas, como a teoria da perspectiva na Astronomia.

Quanto ao Cálculo, a mesma autora acrescenta que as investigações em relação aos infinitésimos e infinito se intensificaram com a crescente demanda de resolver problemas físicos, os quais serão evidenciados nesse texto aqueles relacionados com o objeto em estudo nesta investigação. Tais problemas tiveram como consequência a indicação do caminho para o progresso na construção do conhecimento sobre funções reais de uma variável real, em especial, quando eram definidas em um intervalo real. Esse movimento ocorreu, sobretudo, no século XVII, em consequência aos eventos associados à Matemática Aplicada e preparou o terreno para que a teoria das integrais fosse mais bem desenhada no século XVIII e formalizada e sistematizada com rigor na segunda metade do século XIX.

Assim, no século XVII, segundo Roque (2015), além do pensamento mecanicista, a Revolução Científica foi associada à expansão da ciência experimental e a matematização da natureza. Nesse sentido, o progresso da Matemática poderia explicar tanto a matematização da natureza quanto o ideal mecanicista, e houve a necessidade de se compreender como os fenômenos aconteciam, destarte, a evolução de técnicas matemáticas era necessária para

explicar tais fenômenos. Com isso, a Matemática, até então vista como uma ciência das quantidades, passou a ser relacionada a quantidades geométricas e associada ao estudo das funções e, conseqüentemente, a uma matemática das curvas. Foi enriquecida com novos métodos e passou a estar relacionada à lei das variações, às funções, impulsionando o desenvolvimento da teoria do Cálculo e, portanto, das integrais.

Muita matemática foi produzida nessa época. Para Brandão (2021), a conclusão de Gottfried Leibniz (1646-1716), de que a medida da área de uma superfície podia ser expressa por uma equação diferencial, e de Isaac Newton (1643-1727) ao usar essas equações para interpretar fenômenos da Mecânica, Astronomia e Óptica, aceleraram a construção dessa teoria, pois conseguiram, a partir dos conhecimentos construídos por seus antecessores, produzir o Cálculo Diferencial e Integral para funções reais de uma variável real.

Mas foi no contexto do século XVII explicitado acima que, conforme Bassalo (1995), Johannes Kepler (1571-1630) iniciou seus estudos com o propósito de explicar o movimento dos planetas e o *Modelo Heliocêntrico de Copérnico* por meio de uma demonstração matemática que, mais tarde, deu origem a uma razão de ser das Integrais Duplas, conforme explicitaremos ainda nesta seção. Nesse estudo, posicionou, inicialmente, um triângulo entre dois círculos, e concluiu que a razão entre os raios era a mesma entre os raios das órbitas de Saturno e Júpiter, mas não conseguiu validar essa conclusão quando os experimentos eram realizados em relação aos outros planetas. Procedeu sem sucesso, experimentando outras figuras planas. Passou, então, a utilizar os sólidos regulares pitagóricos e platônicos, inscrevendo, inicialmente, o cubo entre as esferas de todos os planetas e, novamente, não encontrou resultado satisfatório. Finalmente, quando utilizou o cubo seguido dos outros poliedros, fazendo um arranjo em que a comparação apresentou discrepâncias minimizadas, atingiu o seu objetivo, exceto em relação ao planeta Mercúrio, pois a esfera tangenciando o octaedro não explicava o seu movimento segundo o modelo copernicano. Assim, admitiu a inscrição, na esfera correspondente a Mercúrio, de um quadrado formado pelas quatro arestas medianas do octaedro, obtendo sucesso na sua conjectura matemática. Portanto, *o problema de explicar o movimento dos planetas* foi o indício do caminho que, conforme concluiremos a seguir, levará à gênese das Integrais Duplas.

Bassalo (1995) acrescenta que, em 1602, continuando seus estudos, Kepler conseguiu provar que a velocidade orbital de Marte era variável, ficando mais lenta quando se afastava do Sol e mais rápida ao se aproximar dele. Dessa observação, em 1609, elaborou a Lei das Áreas: uma linha que conecta o Sol a um planeta varre áreas iguais no plano da órbita do planeta em

intervalos de tempo iguais, ao relatar que a órbita de Marte indicava uma pequena excentricidade.

Depois de alguns experimentos, elaborou a Lei das Órbitas ou Lei das Órbitas Elípticas: os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos dessa elipse, em 1619. Buscando uma relação entre as distâncias e os períodos do movimento planetário, elaborou a Lei dos Períodos ou Lei dos Tempos: o quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita, sendo a constante de proporcionalidade igual para todos.

Desse estudo, Kepler publicou a obra *Astronomia Nova*, na qual ele descreveu o movimento dos planetas por meio dessas três leis matemáticas, e que contribuíram para a queda do Modelo Geocêntrico de Ptolomeu e para o estabelecimento do Modelo Heliocêntrico de Copérnico, um pouco mais tarde. Um dos pontos mais importantes da astronomia kepleriana foi a elaboração, então, de uma nova perspectiva de tratamento dos movimentos planetários e, segundo Rembold (2011), isso fez com que Kepler entendesse a astronomia como uma *Matemática Explicativa*, em que as hipóteses astronômicas iam além da descrição de planetários, mas do estudo da forma com as quais eles se movimentavam, percorrendo uma órbita elíptica devido às proporções observadas entre medidas de áreas, distâncias e espaços de tempo.

O processo utilizado por Kepler na elaboração dessas leis trouxe grandes contribuições para o desenvolvimento do Cálculo em relação às primeiras ideias que levaram à construção da teoria das funções reais de várias variáveis reais, só evidenciadas ao “final do século XVII quando os novos estudos relacionados à Mecânica levaram os matemáticos a examinar problemas relacionados com o centro de gravidade e, portanto, a examinar os trabalhos de Kepler” (THOMAS *et al.* 2002, p. 1).²³ Mas foi no seu estudo sobre a *Geometria Sólida dos Barris de Vinho*, em 1615, evidenciado um pouco mais tarde, que ele utilizou uma forma primitiva de Integral Dupla para calcular a medida do volume de barris de vinho.

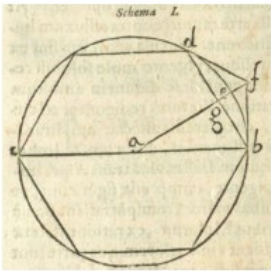
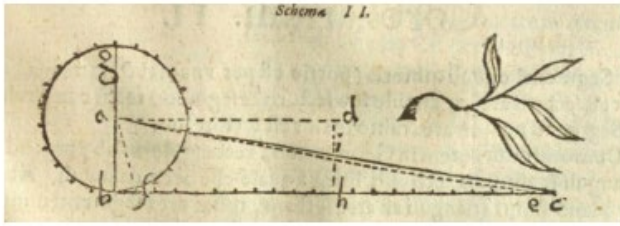
Para calcular as áreas envolvidas em sua Segunda Lei dos movimentos planetários, teve de recorrer a uma forma tosca de Cálculo Integral [funções reais de uma variável real]. Também, em seu *Stereometria Foliorum Vinorum* (Geometria Sólida dos Barris de Vinho, 1615) aplicou processos de integração toscos [funções reais de várias variáveis reais] para achar os volumes de noventa e três sólidos obtidos pela rotação de segmentos de secções cônicas em torno de um eixo de seu plano. Dentre esses estavam o toro e dois sólidos que ele chamou de a maçã e o limão; estes dois últimos

²³ Este texto foi retirado do “Material Complementar para os Professores” do livro de THOMAS, George B.; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo** v. 1, 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

ele obtinha fazendo girar um arco maior e um arco menor, respectivamente, de uma circunferência em torno da corda do arco, tomada como eixo (RIBEIRO, 2010, p. 84).

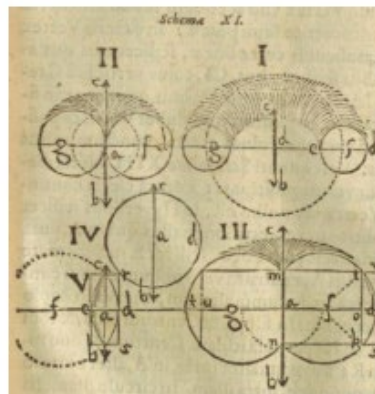
Kepler esclarece, na obra citada, como encontrar a capacidade de sólidos com a forma de barris de vinho, por meio da rotação de cônicas ou parte delas sobre uma linha ou um plano, inspirado nos estudos de Arquimedes, os quais descrevemos anteriormente nesta seção. Os *Teoremas XVIII e XIX de Kepler* identificados nesta obra são, então, os primeiros encontrados nos registros históricos consultados que apresentam alguma similaridade com o método para o cálculo de medidas de áreas e volumes que pode ser relacionado às ID, podendo ser essa a gênese do desenvolvimento dessas integrais, cuja praxeologia matemática permitiu estabelecer uma razão de ser para essas integrais. Tais teoremas estão elencados no Quadro 14 e são denominados por Struick (1969) como as *Integrais de Kepler*. Os Teoremas I e II são fundamentais para a demonstração das Integrais de Kepler, sendo, por esse motivo, elencados no mesmo quadro. Essas demonstrações foram disponibilizadas, nesta tese, no Anexo 4.

Quadro 14 – Teoremas apresentados em Nova Estereometria dos Barris de Vinho, denominados por Struick (1969) como a Integral de Kepler

Nova Estereometria de Kepler
Teorema I: A razão da circunferência para o diâmetro é aproximadamente o número 22 por 7. Figura 14 – Figura utilizada para designar a proporção da circunferência para o diâmetro  Fonte: Moura e Oliveira, 2011, p. 3 Teorema II: A área do círculo comparada à área do quadrado do diâmetro tem esta razão, que é, aproximadamente, 11 por 14. Arquimedes usa uma demonstração indireta, a qual conduz ao impossível, se a área excede, essa razão é também maior. A meu senso, isto é visto: Figura 15 – Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte I  Fonte: Moura e Oliveira, 2011, p. 5

Teorema XVIII: Todo anel com seção [transversal] circular ou elíptica é igual a um cilindro cuja altitude iguala à longitude da circunferência, que o centro da figura rotacionada descreve, e cuja base é a mesma com a seção [transversal] do anel.

Figura 16 – Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte II



Fonte: Moura e Oliveira, 2011, p. 6

Teorema XIX: Um anel fechado é igual ao cilindro que tem uma base [que seja] o círculo da seção [transversal] do anel e a altitude igual à longitude do círculo descrito.

Fonte: Adaptado de Moura e Oliveira, 2011

Moura e Oliveira (2011) trazem a interpretação comentada acerca da tradução das integrais de Kepler que viabilizou a compreensão dos Teoremas XVIII e XIX em termos da gênese do pensamento que influenciou o desenvolvimento da teoria das Integrais Duplas. Os autores esclarecem alguns pontos obscuros na demonstração de Kepler. Trouxemos essa tradução e comentários na íntegra no Anexo IV desta tese.

As autoras explicam que no Teorema I, Kepler faz referência ao método de Arquimedes da proporção da circunferência para o diâmetro que é, aproximadamente, $22/7$ e representa o valor de π , considerando-o correto com duas casas decimais. O teorema é demonstrado geometricamente com o uso de polígonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo. A análise geométrica do hexágono regular inscrito e circunscrito ao círculo conduz a demonstração. Entretanto, Arquimedes sugere a utilização de polígonos com um número maior de lados para melhor aproximação.

Quanto ao Teorema II, esse é referente à proporção da área do círculo com o quadrado do diâmetro que é, aproximadamente, 11 por 14. A descrição e análise geométrica desse teorema, como a anterior, são referidas a Arquimedes. Kepler dividiu a circunferência conforme os números de pontos que nela existem, levando a ideia de infinitas partes dadas por infinito pontos tomados na circunferência. Nessa demonstração, Kepler estica a circunferência e arruma triângulos de modo conveniente para a demonstração.

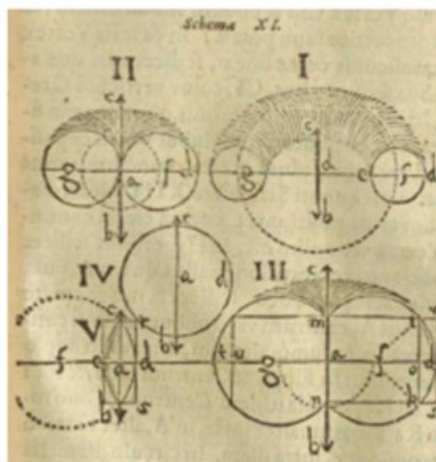
Essas proporções são solicitadas na demonstração do Teorema XVIII, que prova um método que permite calcular a medida do volume de anéis (toro) construídos a partir da rotação de uma figura plana circular ou elíptica em torno de um centro tomado como eixo de rotação. O método demonstrado no Teorema XIX refere-se ao cálculo da medida do volume do anel fechado, sendo igual ao cilindro cuja base é igual ao círculo da seção transversal e altura igual ao comprimento da circunferência formada na rotação.

Portanto, concluímos que foi o problema do movimento dos planetas, influenciado pelo contexto da época, que deu início ao que hoje entendemos como ID. A teoria que justifica a praxeologia gerada pela tarefa T_3 : calcular a medida do volume do anel formado pela rotação de uma figura plana circular ou elíptica em torno de um centro é o Teorema XVIII de Kepler: *Todo anel com seção [transversal] circular ou elíptica é igual a um cilindro cuja altitude iguala à longitude da circunferência, que o centro da figura rotacionada descreve, e cuja base é a mesma com a seção [transversal] do anel.* Assim, o problema do movimento dos planetas configura como uma razão de ser dessas integrais. O bloco teórico-tecnológico envolve os conteúdos matemáticos constituintes da geometria, mas que podemos associar a coordenadas cartesianas, cônicas, superfícies e regiões em R^2 e R^3 , além de razão e proporção.

Nesse sentido, a gênese dessas integrais está relacionada a objetos cuja forma geométrica foi importante para a compreensão do movimento dos planetas, também com alguma forma de cálculo de medidas de áreas de uma *superfície limitada*, e da medida do *volume de sólidos geométricos* calculados como uma soma das infinitas áreas dessas regiões que compõem o sólido. No problema explicitado, observamos alguns esquemas e representações figurais presentes para representar os conceitos e propriedades elaborados pelo autor, associados a uma álgebra, utilizando-se letras maiúsculas para representar segmentos, alturas, centros de círculos, círculos e outras figuras geométricas. Há presença de certo rigor matemático, seu texto é organizado em teoremas, corolários e demonstrações herdadas da geometria euclidiana, mas com uma abordagem muito direta dos teoremas.

Na demonstração do Teorema XVIII, Kepler, inicialmente, definiu a seção transversal de um anel. Em seguida, cortou o anel *GCD* (Figura 17 – Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte II.) de centro *A* em um número infinito de discos muito finos *ED*.

Figura 17 – Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte II



Fonte: Moura e Oliveira, 2011, p. 6

Kepler calculou a medida do volume do anel de seção quadrada, dado pelo produto da altura da seção quadrada do anel pela diferença do quadrado do raio da circunferência maior pelo quadrado do raio da circunferência menor, sendo esse $\frac{1}{4}$ da medida do volume de um anel de forma quadrada. Depois, comparou, usando proporção, as medidas dos volumes do anel quadrado e do volume de anel de seção quadrada, concluindo que a medida do volume do anel quadrado está para a medida do volume de anel de seção quadrada assim como 14 está para 11. Comparando a medida do diâmetro com a medida do comprimento da circunferência, concluiu que essas estão entre si assim como 7 está para 22. Finalmente concluiu que o raio da circunferência formada pela rotação é igual a 3 e diâmetro 6, tem-se que 6 está para $19 - \frac{1}{7}$, assim como 7 está para 22.

O Teorema XIX é a teoria que justifica a tarefa T_4 : calcular da medida do volume do anel fechado, sendo esse um cilindro cuja base é um círculo da seção transversal e a altura com medida igual ao comprimento da circunferência formada na rotação de $MIKN$). Assim, Kepler definiu o anel fechado, mostrando, em seguida, que qualquer proporção de AE e AF pode ser válida também para um anel fechado, no qual o centro F do círculo EC descreve o círculo FG , em que FG é igual ao DA rotacionado nele mesmo.

Justificou esse procedimento evidenciando que tal anel fechado é intersectado por A em discos que não têm espessura em A e em D e duas vezes a espessura daquele em F . Depois, concluiu que o círculo formado por meio de D é duas vezes aquele formado por F . Por fim Kepler construiu, pelo Corolário 1, um corpo de cilindro a partir da rotação de $MIKN$, Figura 17, justificando que os quatro lados da figura de linhas reta e curva estavam de acordo com as mesmas considerações iguais.

Tomando uma coluna, como está na Figura 17, como base e comprimento do círculo FG como altura, ele calculou a margem externa *IKD* que cerca o corpo do cilindro, para, posteriormente, concluir que a razão da medida do volume da esfera para a medida do volume do anel fechado criado pelo mesmo círculo é 7 para 33, desde que o raio multiplicado por 4 vezes a medida da área do círculo maior, ou dois terços da medida do diâmetro multiplicado pela medida da área do círculo maior, produza um cilindro igual para a esfera.

Finalmente, pelo Corolário 2, Kepler concluiu que um cilindro igual ao anel fechado tem a mesma base e a sua “altitude” é a circunferência formada pelo centro. Portanto, como a circunferência está para dois terços do diâmetro, que é 33 por 7, assim, a medida do volume de um anel está para a medida do volume da esfera da mesma forma.

Conforme Ribeiro (2010), o trabalho de Kepler influenciou Cavalieri (1598-1647) e contribuiu para a construção do conhecimento relacionado ao Cálculo Infinitesimal. Sua obra compreende estudos em Matemática, Óptica e Astronomia, mas a que o tornou conhecido entre os matemáticos da época, com sua grande contribuição à Matemática, foi o tratado *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho, ele apresenta o *Método dos Indivisíveis*, cujas raízes, segundo Eves (2011), remetem a Demócrito (460-370 a.C.) e Arquimedes (288-212 a.C.), para encontrar medidas de áreas e de volumes.

Ribeiro (2010) acrescenta que os princípios de Cavalieri representaram, na época, importantes ferramentas para o cálculo de medidas de áreas e volumes, cuja base intuitiva de seu trabalho pode ser reformulada sem muito esforço, tornando-se tão rigorosa quanto o Cálculo Integral moderno, no que se refere, sobretudo, a funções reais de uma variável real.

O principal contributo de Cavalieri foi a criação do princípio dos indivisíveis, em que “qualquer grandeza pode ser dividida num número infinito de pequenas quantidades, as quais se podem tomar de maneira que guardem entre si quaisquer proporções desejadas” (SEDGWICK; TYLER, 1950, p. 237). Admitia que a “área consistia numa soma de linhas paralelas e determinava “volumes pela consideração de secções ou elementos de pouca espessura em que é possível dividi-lo por meio de planos paralelos e tornava-se patente que o cálculo integral se desenvolveria a partir da obra de Cavalieri” (SEDGWICK; TYLER, 1950, p. 273), apresentando indícios do conceito de integração por uma soma (BRANDÃO, 2021, p. 126).

Segundo Ives (1990), Roberval (1602-1675), tomando problemas do mesmo tipo que os de Cavalieri, descreveu uma curva plana (aquela que situa em apenas um plano) como um movimento gerado por um ponto que se pode decompor em dois outros movimentos conhecidos, o que corresponde à descrição moderna de uma curva sob forma paramétrica. Em sua obra *Traité des Indivisibles* apresenta

o cálculo da integral definida da função $y = \text{sen } x$ e, usando as ideias de Cavalieri, considera que a área entre uma curva e uma reta era composta por um grande número de faixas estreitas na qual conseguiu mostrar que a medida da área de uma curva representada pela expressão x^n restrita ao intervalo real $[0,1]$ poderia ser calculada por $\frac{1}{m+1}$, sendo m um número inteiro positivo.

Nesse contexto, Barrow (1630-1677), estudando o movimento como velocidade variável, definiu a derivada da distância em função do tempo (em linguagem atual) como velocidade. Também verificou que, pela operação inversa, a distância percorrida pode ser encontrada se for conhecida a função velocidade em cada instante. A partir dessa ideia, Newton, em 1666, escreveu o *Tratado sobre as fluxões* (movimento), em que uma curva era tomada como a trajetória de uma partícula e as *velocidades finitas* nos sentidos horizontais e verticais (x' e y'), respectivamente, eram os fluxões de x e y em relação ao tempo; a derivada e integral eram processos inversos e o *Teorema Fundamental do Cálculo* foi anunciado. Na obra *Method of fluxions and infinite series*, escrita em 1671 e publicada somente em 1736, Newton encontrou as expansões em séries de potências para as funções (em linguagem atual) seno, cosseno e exponencial. Usando a expansão em série para a função exponencial:

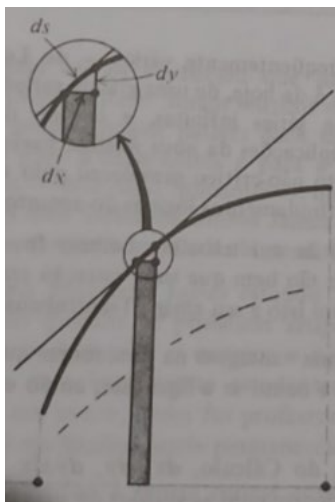
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

resolveu o problema de encontrar as quadraturas determinadas por essas funções, integrando a série termo a termo²⁴. A questão da convergência da série não foi discutida.

Segundo Simmons (1987), Leibniz (1646-1716), a quem se deve muito da notação para o Cálculo como utilizamos hoje, teria influenciado as ideias de Johann Bernoulli quando mostrou que a tangente (inclinação) de uma curva pode ser encontrada determinando o coeficiente das diferenças das coordenadas e das abscissas do ponto de tangência, fazendo com que essas se tornem infinitamente pequenas. Assim, ele percebeu que a quadratura de uma região de uma curva poderia ser representada como uma soma dos retângulos de largura infinitamente pequena que preenchiam essa região. A partir dessa ideia, Leibniz também mostrou que os processos das *diferenças* e *somas* são um o inverso do outro e estão ligados por meio do triângulo infinitesimal (dx, dy, dz) ilustrado na Figura 9, presente no *Tratado sobre os senos de um quadrante de um círculo*, estudado por Pascal (1623-1662). Foi a partir dos estudos de Pascoal que Leibniz, segundo o autor, chegou a essa conclusão.

²⁴ SILVA, G.S. **A História do Cálculo**. 18/12/2017. Disponível em: <https://www.phylos.net/2017-12-18/a-historia-do-calculo/>. Acesso em: 06 abr. 2022.

Figura 18 – Triângulo infinitesimal dos senos de um quadrante de um círculo



Fonte: Simmons, 1987, p. 723

Em meados do século XVII, com a introdução das séries infinitas para estudar as curvas, a relação entre variáveis passou a ser vista como uma série de potências. Nessa extensão do objeto do Cálculo, as curvas passaram a ser expressas por séries infinitas e o cálculo infinitesimal começou a ser reconstruído com base em uma análise algebrizada²⁵, abrindo caminho para que, no século XVIII, essas séries se tornassem o meio mais geral para se estudar a relação entre variáveis (ROQUE, 2015).

Nesse contexto, Jean d'Alembert (1717-1783), para a resolução do problema de pêndulo múltiplo, problema da Mecânica Clássica que estuda o movimento realizado por um conjunto de pêndulos, usou “a noção de coordenadas generalizadas e o conceito dos deslocamentos virtuais para eliminar as forças de vínculo.²⁶ da descrição do problema” (AGUIAR, 2021, p. 37), o que permitiu a ele elaborar as equações do movimento de sistemas mecânicos envolvendo pêndulos. Para isso, utilizou as funções reais de várias variáveis reais, além de elaborar as equações diferenciais parciais do movimento, sendo um importante personagem no processo de construção do conhecimento em relação ao Cálculo relativo a essas funções.

²⁵ Chamamos de *análise algebrizada* essa concepção que transforma o cálculo infinitesimal no estudo algébrico de séries (ROQUE, 2015).

²⁶ “*Vínculo* é uma restrição de natureza geométrica ou cinemática ao movimento das partículas de certo sistema. São restrições às posições ou velocidades das partículas que devem ser levadas em consideração na formulação de equações de movimento” (AGUIAR, 2021, p. 37). O Princípio de D'Alembert “consiste em separar a ação das forças motrizes em duas partes, considerando uma como apenas produzindo o movimento do corpo no segundo instante, e a outra como sendo usada para destruir aquele que ele tinha no primeiro momento: esse princípio simples reduzia todas as leis do movimento à consideração do equilíbrio.”. Disponível em: http://dalembert.academiesciences.fr/article_AMC_FG_IP_Gazette_des_Mathematiciens.php. Acesso em: 15 abr. 2021.

Quanto às equações diferenciais, Aguiar (2021) acrescenta que essas equações tiveram origem no Cálculo a partir das ideias de Newton, Leibniz e dos irmãos Bernoulli. Em 1751, segundo Chouillet, De Gandt e Passeron (1998), d'Alembert e Diderot (1713-1784) publicaram pela primeira vez a obra *Encyclopédie*, em que d'Alembert, responsável pela parte matemática da obra, reuniu artigos dos autores da época além de inserir cerca de 1500 artigos de sua autoria.

Nessa obra, d'Alembert define o Cálculo Integral como o inverso do Cálculo Diferencial, aportado no método das fluxões de Newton. Quanto às integrais, para ele, elas se dividem em duas partes: uma que trata da integração de grandezas diferenciais que tem apenas uma variável e a outra que trata da integração de diferenciais que contêm várias variáveis.

O cálculo integral é o inverso do cálculo diferencial. [...] Consiste em encontrar a quantidade finita da qual uma quantidade infinitamente pequena proposta é o diferencial; portanto, suponha que encontramos a diferencial de x^m que é $mx(m-1)dx$. Se propuséssemos encontrar a quantidade da qual $mx(m-1)dx$ é o diferencial; seria um problema de cálculo integral. [...]. O cálculo *integral* tem duas partes, a integração de grandezas diferenciais que têm apenas uma variável e a integração de diferenciais que contêm várias variáveis (d'ALEMBERT, 1751, n. p, *apud* MEHL, s.d. s.p. tradução nossa)²⁷.

Além da definição de integrais de grandezas diferenciais que tem apenas uma variável, não identificamos no artigo que encontramos de d'Alembert mais detalhes em relação à integração de diferenciais com várias variáveis. Entretanto, o autor afirma que, até esse período, essas integrais eram tratadas apenas em *peças separadas*, em que as principais se encontravam entremeadas na coleção das obras de Johann Bernoulli e nas memórias das Academias de Ciência de Paris, Berlim e Petersburgo, mas que Fontaine da *Royal Academy of Sciences* havia composto um manuscrito em que agrupou as investigações que as continham, além de Bougainville que reuniu e publicou no segundo volume de sua obra *Traité des Intégrales*, uma coletânea mais completa que a de Fontaine, na qual acrescentou contribuições e avanços importantes em relação a elas, facilitando o seu estudo. Ainda segundo d'Alembert (1751, *apud* MEHL, s.d. s.p.), podemos também encontrar na publicação de Agnesi, erudita matemática de Milão, as *regras do cálculo integral*, construídas também com apoio no agrupamento das obras da época, enfatizando que a obra de Agnesi é menos completa que a de Bougainville.

Tudo o que temos na segunda parte, ou seja, sobre a integração de diferenciais com várias variáveis, consiste apenas em peças separadas, estando as principais espalhadas na coleção de obras do Sr. Bernoulli, e em memórias das Academias de Ciências de

²⁷ Texto original disponibilizado por Serge Mehl. Disponível em http://serge.mehl.free.fr/anx/integral_dd.html. Acesso em 12 abr. 2021.

Paris, Berlim e Petersburgo. O Sr. Fontaine, da *Royal Academy of Sciences*, compôs um excelente trabalho sobre este assunto, que ainda é apenas um manuscrito repleto das mais belas, novas e profundas pesquisas. [...] Além disso, sem recorrer aos diferentes escritos que mencionamos [...] pode-se aprender em profundidade o *cálculo integral* na obra que o Sr. Bougainville, o mais jovem a publicar sobre este assunto em dois volumes [...]. Ele coletou cuidadosamente tudo o que estava espalhado nas várias obras das quais falamos; ele explicou o que precisava ser explicado e reuniu tudo em um único corpo de trabalho que deve facilitar muito o estudo desta parte importante da matemática. A Srta. Agnesi, erudita matemática de Milão, também já havia coletado *as regras do cálculo integral* em sua obra italiana *Intituzione Analitiche* [...], mas a obra do Sr. Bougainville é ainda mais completa (*O*) (d'ALEMBERT, 1751, n. p., 1751, n. p., *apud* MEHL, s.d., s.p., tradução nossa).

Após a leitura de d'Alembert, passamos a nos concentrar nas obras de Agnesi *Instituzioni Analitiche ad Uso della Gioventù Italiana*, publicada em 1748, e de Louis Antoine de Bougainville, publicada em 1754, *Traité du Calcul Intégral*, com o propósito de verificar não só quais os saberes a respeito dessas integrais haviam sido produzidos até aquela época, mas também de observar como essas integrais estavam organizadas do ponto de vista matemático e didático. Em nossas buscas, encontramos as obras de Agnesi e de Bougainville.

A obra de Agnesi se encontra organizada em dois livros, divididos em dois volumes: no primeiro ela trata do que chamou de *análise de quantidades finitas* e discorre sobre a álgebra elementar, equações algébricas, geometria analítica plana e, por fim, máximos e mínimos; o segundo volume está organizado em três livros: o primeiro tratando do Cálculo Diferencial, o segundo do Cálculo Integral e o terceiro abordando o método do inverso das tangentes. Nessa obra, a Análise é definida como um método de resolução de problema e o Cálculo não foi dissociado da Análise.

Segundo Moura (2017), a obra de Agnesi foi escrita com a intenção de tornar a Análise e, portanto, o Cálculo acessíveis à juventude da época, tendo em vista que, para ela, “o maior impeditivo para a compreensão da Análise Matemática seria a falta de acesso, por parte da juventude, principalmente a estudiosos que soubessem e que quisessem ensiná-la” (MOURA, 2017, p. 76-77), além de que não havia material matemático que versasse sobre a análise escrito em bons livros com *clareza e método*, pois, embora “os assuntos em análise estejam sendo publicados e impressos, também estão desconectados, sem ordem e espalhados, nas obras de muitos autores, principalmente nas ‘Atas de Leipzig’, nas ‘Memórias da Academia de Paris’ e em outros jornais.” (AGNESI, 1748, p. XXII, tradução nossa).

Nesta investigação, esse achado para nós configurou como a constatação de um primeiro texto matemático, em que havia uma preocupação explícita em favorecer os processos de ensino

e de aprendizagem da análise, por meio de um material de estudo organizado quanto aos aspectos didáticos e matemáticos.

Para a autora, o Cálculo Diferencial é a análise de quantidades infinitamente pequenas, o *Cálculo das Fluxões* de Newton, já o Cálculo Integral, ou *Cálculo de Soma* é

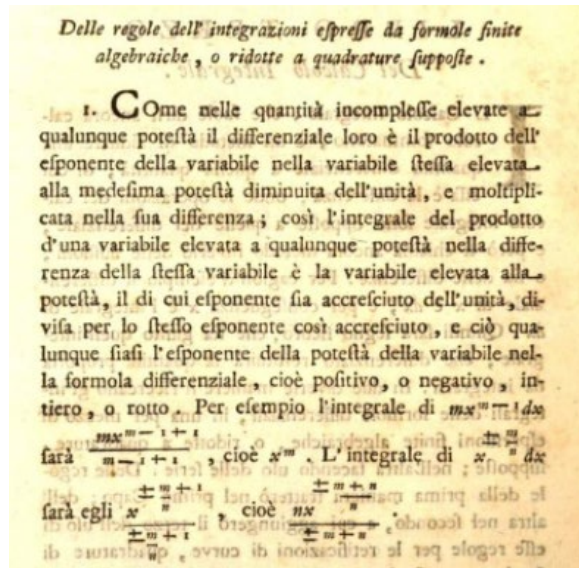
[...] um método de redução de uma quantidade diferencial àquela quantidade da qual é a diferença em que as operações do cálculo integral são opostas às do diferencial e, portanto, ainda é chamado o método inverso das Fluxões. [...] podendo ser calculado de duas maneiras diferentes, como as integrais das fórmulas diferenciais calculadas por meio de expressões finitas algébricas, fazendo uso de séries ou reduzido a supostas quadraturas (AGNESI, 1748, p. 613).

A autora apresenta as regras de integração expressas por fórmulas algébricas finitas ou reduzidas a quadraturas e a cubaturas (volume de sólidos de revolução), bem como por meio das séries infinitas atribuídas pela autora a Johann Bernoulli. Entretanto, conforme o que já relatamos neste texto, essa ideia retrata os estudos de Newton e Leibniz anteriores aos de Johann Bernoulli. A ideia da Integral Dupla está associada aos “ajustes das curvas de quadratura dos espaços e a suavização da superfície para cubagem de sólidos” (AGNESI, 1748, p. 709). Ao apresentá-las, Agnesi relaciona sua exposição a figuras com as indicações das construções realizadas que são disponibilizadas ao leitor ao final do livro.

A efeito de ilustração, trazemos a primeira regra de integração apresentada por Agnesi (1748) na Figura 19, em linguagem textual e por meio de uma fórmula algébrica. A regra está fundamentada nas ideias de Roberval, Barrow, Newton e Leibniz, tendo sido consolidada, como afirma a autora, nos estudos de Bernoulli. A dedução da fórmula está fundamentada em artifícios opostos aos utilizados para a derivação da quantidade x^m , em que m pode assumir um valor ‘inteiro, negativo, positivo ou quebrado’. A praxeologia matemática aqui é desencadeada pela simples tarefa de encontrar uma fórmula para integrar a quantidade que fora antes derivada. Como técnica, a fórmula é explicitada com a tecnologia justificando a integração como a operação inversa da derivação.

Quanto à teoria, não identificamos os teoremas que completariam esse bloco. A autora alerta que, encontrada a quantidade integrada, deve ser acrescida de uma quantidade constante ‘à vontade’ por quem está calculando a integral, mas em casos particulares, essas quantidades podem ser determinadas, e explica no parágrafo quatro que a necessidade do acréscimo da constante se deve a ser nula a derivada de uma constante de uma quantidade que foi derivada.

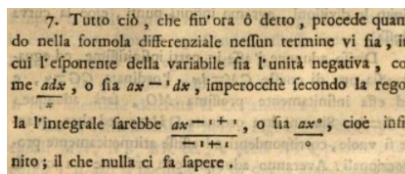
Figura 19 – Primeira regra de Integração de Agnesi



Fonte: Agnesi, 1748, p. 614.

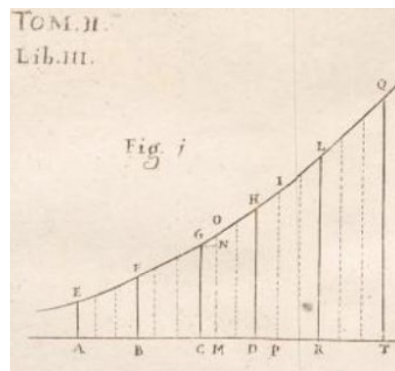
Posteriormente, essa fórmula é acrescida do termo ax^m , a constante, em que m assume expoentes fracionários negativos ou positivos, e o diferencial dx passa a ser observado nas expressões. Agnesi (1748) explica que os diferenciais dx ou dy são interpretados como uma diferença não mensurável. Quanto à condição de existência da fórmula, Figura 20, Agnesi usa a condição de existência da fórmula ($m \neq 1$) para evidenciar a necessidade do uso de outros métodos de integração, ilustrado na Figura 21, em que a quantidade ydx é interpretada como a área de um retângulo infinitesimal. O uso notação de Leibniz para a integral é observado conforme ilustramos na Figura 22.

Figura 20 – Discussão da condição de existência da regra de integração 1 de Agnesi



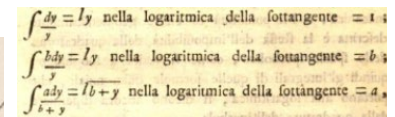
Fonte: Agnesi, 1748, p. 617

Figura 21 – Método da curva logarítmica



Fonte: Agnesi, 1748, s. n.

Figura 22 – Notação de Leibniz



Fonte: Agnesi, 1748, p. 622

O *Traité du Calcul Intégral* de Bougainville foi organizado em duas partes; a primeira

[...] contém as regras do cálculo integral de diferenciais que têm em sua expressão apenas uma variável com fatores arbitrários e a segunda parte se destina a explicar as regras do cálculo integral de quantidades ou equações diferenciais que contém duas, três ou em geral várias variáveis (BOUGAINVILLE, 1754, p. XVI).

A intenção de Bougainville (1754) era que sua obra fosse apreciada por leitores interessados em utilizar os princípios dessa teoria em Cálculo Integral aplicado à Geometria, Astronomia, Mecânica e Física (consideradas na época como ciências separadas).

Quanto ao Cálculo Diferencial, o autor faz uma comparação entre as regras dessa teoria elaboradas por Leibniz e Newton, acentuando que a diferença é tão pequena que não vai além de nomenclaturas. Explica que o grande salto do Cálculo dos dois é a explicitação das diferenças (diferenciais) que versavam em quantidades que passaram a ser tratadas por eles como equações, o que muito contribuiu para os avanços da teoria pelos matemáticos que desenvolveram estudos a partir dessa ideia, merecendo destaque os estudos publicados pelos irmãos Bernoulli que se dedicaram a evidenciar o que já fora produzido até então, além de enriquecer, com novas regras traduzidas em teoremas, corolários e demonstrações, o Cálculo Diferencial no que se refere a grandezas logarítmicas e exponenciais.

Quanto ao Cálculo Integral, Bougainville (1754) salienta que foi tratado pela primeira vez em seus métodos elementares por P. Reyneau em *Analyfi Demonfrata*, publicada em 1708 e, posteriormente, por Stones em 1930, em sua obra *Analyfys Infinite Parvorum*. Porém, o autor acrescenta que em ambas há muito o que ser elucidado. Por fim, o autor faz referência à obra da erudita italiana, Agnesi, a qual já nos referimos nesta tese, reforçando o caráter didático presente na sua obra, por ter sido dedicada a estudantes, bem como por apresentar o passo a passo da álgebra implicada em seu texto.

Quanto aos referenciais aos quais se recorreu para a escrita, Bougainville destaca os estudos de Newton sobre a quadratura de curvas; a *Analyfi Demonfrata* de P. Reyneau, a análise da razão dos ângulos redigida por D. Charles Walrnesley; a obra de D. Inês; além de outras obras das Academias de Ciências que estão disponíveis em Paris, Berlim e Petersburgo; os estudos de Daniel Bernoulli, Euler, Clairault e Fontaine, bem como composições de d'Alembert não publicadas que foram compartilhadas com ele. No Livro II, o autor evidencia, em nota, que as principais referências para a escrita foram os estudos de d'Alembert e Fontaine.

Quanto à forma de organização dos textos, o autor dispõe os assuntos dando um caráter linear à Matemática. Embora Bougainville afirme que não caracterizou sua obra para que fosse entendida por noviços (estudantes universitários), observamos que tudo é explicitado passo a

passo, além de apresentar os princípios básicos de logaritmos e exponenciais, trigonometria básica, quanto ao estudo de ângulos, proporções, equações imaginárias complexas, entre outros.

O autor discute a *Integração de Equações Diferenciais e de quantidades de funções de várias variáveis*, associadas a processos inversos das quantidades diferenciais presentes, bem como associadas à resolução de equações diferenciais, ao cálculo de medidas de áreas e de medidas de volumes de sólidos de revolução, para as quais associa seus métodos a figuras apresentadas ao final de sua obra.

Quanto à integração de equações diferenciais e de quantidades de funções de várias variáveis, a integral e seu papel teórico no Teorema Fundamental do Cálculo ofereceu ajuda direta quanto à resolução de equações de quantidades em que era possível separar as variáveis, cujo método de resolução é atribuído pelo autor a Jakob Bernoulli (1654-1705) e a Leibniz e as quantidades diferenciais se estendem a funções de duas e de três variáveis.

É importante salientar que, embora Jakob Bernoulli tenha usado a equação de Newton nos estudos em que descreve a órbita dos planetas em torno do Sol para a gravitação universal, e de esse cientista conhecer a catenária como solução de algumas equações diferenciais, foi ele um dos primeiros a usar os conceitos do Cálculo para modelar matematicamente fenômenos físicos e usar equações diferenciais para encontrar suas soluções.²⁸

O termo *coordenadas polares*, na acepção atual, tem sido atribuído a Gregorio Fontana (1735-1803) e foi usado pelos escritores italianos do século XVIII. Em inglês, seu uso é registrado pela primeira vez na tradução de 1816 de George Peacock do livro *Cálculo Diferencial e Integral* de Lacroix. Alexis Clairaut foi o primeiro a mobilizar coordenadas polares em três dimensões, e Leonhard Euler foi o primeiro a realmente desenvolvê-las.

Lima (2008) chama atenção para François Lacroix (1765-1843), professor da Escola Politécnica de Paris que se tornou o principal autor de livros-texto de sua época. Em relação ao Cálculo, Lacroix escreveu duas obras de repercussão mundial e referência para vários cursos de Cálculo nas universidades da época, que foram o *Traité Du Calcul Différentiel et Du Calcul Intégral* e o *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et Du Calcul Intégral*, publicados pela primeira vez em 1806, em dois volumes, que pretendiam ser uma versão mais simples e acessível a estudantes em relação à obra anterior.

Esses dois volumes reúnem tudo que foi produzido sobre o Cálculo até o século XVIII, com a referência dos responsáveis pelo estudo de cada tópico explicitado no sumário da

²⁸ SILVA, G.S. A **História do Cálculo**. 18/12/2017. Disponível em: <https://www.phylos.net/2017-12-18/a-historia-do-calculo/>. Acesso em: 06 abr. 2022.

primeira parte²⁹. A primeira parte da obra trata do Cálculo Diferencial e a segunda do Cálculo Integral. Nesta tese, referimo-nos à edição publicada em 1806 que, em relação ao Cálculo Integral, foi organizada conforme a Figura 23.

Figura 23 – Obra de François Lacroix publicada em 1806

vii	TABLE	ix
SECONDE PARTIE.		
<i>Calcul intégral.</i>		
<i>De l'intégration des fonctions rationnelles d'une seule variable,</i>	Pag. 201	
Définition du Calcul intégral,	ibid.	
Intégration des fonctions monomes,	203	
— de la différentielle logarithmique,	ibid.	
Constantes qu'on peut sortir du signe $\int$,	206	
Intégration des fonctions fractionnaires,	207	
Décomposition des fractions à intégrer, en fractions partielles, et de l'intégration de celles-ci,	209	
Procédés abrégés pour opérer cette décomposition,	219	
<i>De l'intégration des fonctions irrationnelles,</i>	231	
Des fonctions contenant le radical $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$,	232	
Expressions des sinus et des cosinus en exponentielles imaginaires,	236	
Recherche des facteurs de la fonction $x^4 \pm ax^2$,	239	
— de la fonction $x^4 \pm 2px^2 + q$,	245	
<i>De l'intégration des différentielles binomes,</i>	247	
Dans quels cas on les rend rationnelles,	248	
Procédé pour ramener les différentielles binomes à d'autres plus simples, par rapport aux exposans,	250	
Ce que c'est que l'intégration par parties,	ibid.	
<i>De l'intégration par les séries,</i>	259	
Expression de l'arc de cercle par sa tangente,	260	
Distinction des séries en ascendantes et descendantes,	261	
Expression de l'arc de cercle par son sinus,	264	
<i>De l'intégration des quantités logarithmiques et exponentielles,</i>	268	
Des quantités logarithmiques,	ibid.	
Des exponentielles,	273	
<i>De l'intégration des fonctions circulaires,</i>	278	
Conversion des sinus et des cosinus des multiples d'un arc, en puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple, et vice versa,	282	
Intégration immédiate des différentielles de la forme $dz \sin z^n \cos z^n$	294	
<i>Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales,</i>	302	
		DES MATIERES.
		Pag. 303
De la nature des intégrales, et des constantes qu'il faut y ajouter,		303
Limites de la valeur d'une intégrale,		ibid.
Intégrales indéfinies, intégrales définies, ce que c'est,		306
Séries pour approcher d'une intégrale quelconque,		309
Continuation de ce qui précède, par des considérations géométriques,		314
Application de la méthode ci-dessus,		317
Expression des intégrales par la série de Bernoulli,		ibid.
De l'intégration des fonctions différentielles du second ordre et des ordres supérieurs,		321
<i>Application du Calcul intégral à la quadrature des courbes et à leur rectification, à la quadrature des surfaces courbes et à l'évaluation des volumes qu'elles comprennent,</i>		321
De la quadrature des courbes,		ibid.
De celle des paraboles,		322
De celle des hyperboles et de leurs espaces asymptotiques,		324
Du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole,		328
De la logarithmique,		332
De la cycloïde,		ibid.
Des spirales,		333
De la rectification des courbes,		335
De celle des paraboles,		ibid.
Du cercle et de l'ellipse,		337
De la cycloïde,		338
Des spirales,		339
<i>De la cubature des corps terminés par des surfaces courbes, et de la quadrature de leurs aires; de la rectification des courbes à double courbure,</i>		340
Des surfaces de révolution,		ibid.
Des volumes terminés par des surfaces courbes en général, et à ce sujet, des intégrales doubles,		343
Application à la sphère,		348
Des aires des surfaces courbes en général,		351
Des intégrales triples,		353
<i>De l'intégration des équations différentielles à deux variables.</i>		
<i>De la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre,</i>		355
Des équations homogènes,		357
De l'équation du premier degré et du premier ordre,		361
De l'équation de Riccati,		363

Fonte: Lacroix, 1806, prefácio, pp. VIII-IX

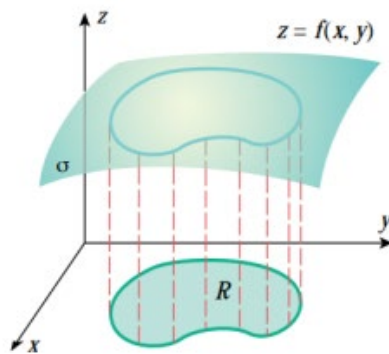
Os princípios do Cálculo Diferencial estão bem estabelecidos e as integrais são tidas como o inverso do Cálculo Diferencial. O texto de Lacroix apresenta técnicas de integração e uma abordagem detalhada de integração por séries de Bernoulli. As Integrais Duplas aparecem em três momentos: como uma abordagem de integração por séries de Bernoulli (como uma extensão dessa abordagem discutida para funções reais de uma variável real); como integração de diferenciais parciais ou integral dupla aplicada ao cálculo de medida da área de uma superfície; e como uma necessidade para o cálculo de medidas de volume de alguns sólidos, sendo, nesse caso, denotada por $\iint V dx dy$ que, segundo o autor, foi utilizada por Euler, na segunda parte sua obra intitulada *Institutionum Calculi Integrali*, publicada em 1769, na qual

²⁹ Disponível no Google Books no endereço eletrônico: https://www.google.com.br/books/edition/Trait%C3%A9_du_calcul_diff%C3%A9rentiel_et_%20du_calcul_hSBKAAAAAAJ?hl=pt-BR&gbpv=0. Acesso em 10 out. 2021.

ele aborda as ID relacionadas a problemas em que é necessário encontrar uma função geral de duas variáveis reais a partir de uma equação diferencial.

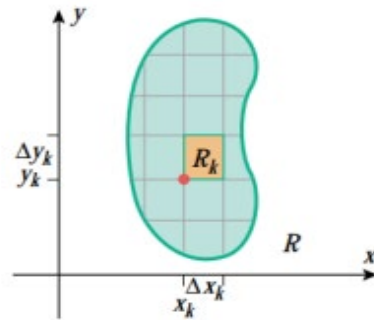
Vamos reproduzir, em linguagem atual, a praxeologia do método de integração de diferenciais parciais ou Integral Dupla aplicada ao cálculo de medida da área de uma superfície, encontrado em Lacroix (1806). Lacroix considerou uma superfície σ da forma $z = f(x, y)$ acima de uma região R do plano xy com derivadas parciais de primeira ordem [contínuas] nos pontos interiores de R , conforme ilustrado na Figura 24. Em seguida, subdividiu R em regiões retangulares com retas paralelas aos eixos x e y e, considerando os sub-retângulos internos a R , denotou por (x_k, y_k) o vértice inferior esquerdo do k -ésimo retângulo R_k de medida de área dada por $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$, ilustrado na Figura 25.

Figura 24 – Superfície σ da forma $z = f(x, y)$ acima de uma região R do plano xy



Fonte: Oliveira, 2017, p. 8

Figura 25 – Medida de área dada por $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$

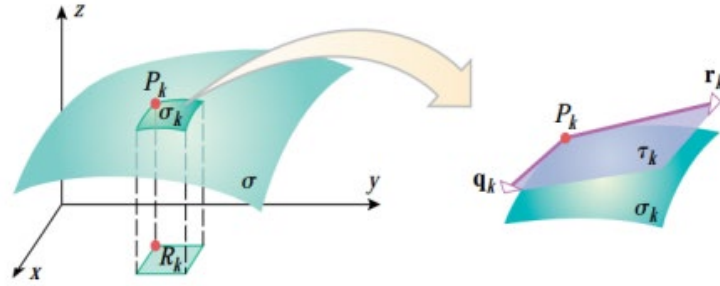


Fonte: Oliveira, 2017, p. 8

A porção de σ que fica acima de R_k é curvilínea da superfície que tem um vértice em $P_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$. Essa porção de superfície tem área ΔS_k que pode ser aproximada pela porção da área do plano tangente de equação:

$$z = f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)(x - x_k) + f_y(x_k, y_k)(y - y_k)$$

Figura 26 – Área de superfície



Fonte: Oliveira, 2017, p. 10

O paralelogramo τ_k , ilustrado na Figura 26, com vértice em P_k , tem lados adjacentes determinados pelos vetores $q_k = \left(\Delta_{xk}, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \Delta_{xk} \right)$ e $r_k = \left(0, \Delta_{yk}, \frac{\partial z}{\partial y} \Delta_{yk} \right)$, em que a área $\Delta S_k \approx \tau_k = \|q_k \times r_k\|$ e

$$\Delta S_k \approx \|q_k \times r_k\| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta_{xk} & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \Delta_{xk} \\ 0 & \Delta_{yk} & \frac{\partial z}{\partial y} \Delta_{yk} \end{vmatrix} \right\|$$

$$\Delta S_k \approx \left\| \left(-\frac{\partial z}{\partial x} i - \frac{\partial z}{\partial y} j + k \right) \Delta_{xk} \Delta_{yk} \right\| = \left\| -\frac{\partial z}{\partial x} i - \frac{\partial z}{\partial y} j + k \right\| \Delta_{xk} \Delta_{yk} =$$

$$\Delta S_k \approx \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1} \Delta A_k$$

$$S \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1} \Delta A_k$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1} \Delta A_k$$

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1} dA$$

Segundo Brandão (2021), Euler sistematizou os estudos dos seus precursores e formulou a ideia de função da forma que hoje conhecemos. A autora acrescenta que uma importante contribuição de Euler ao discutir as ID foi estabelecer o *método das integrações sucessivas*, no qual, considerando certa superfície, mantém inicialmente a variável x constante e realiza a integração em relação à variável y . Posteriormente, de maneira análoga, realiza a integração em relação à variável x , mantendo y constante.

Passamos então a buscar a obra de Leonhard Euler (1707-1783), *Institutionum Calculis Integrali*, encontrando duas versões publicadas em 1770. A obra está organizada em quatro partes. A primeira trata dos estudos de funções de várias variáveis e diferenciais de qualquer ordem; a segunda estuda as funções de várias variáveis e diferenciais de segunda ordem; a terceira estuda as funções de várias variáveis de terceira ordem e a quarta parte investiga as funções de três variáveis e relações diferenciais. Dispõe, ainda, de um apêndice formado por sete capítulos, nos quais três apresentam um estudo sobre as ID, os quais recebem os títulos: *Variação de fórmulas de integrais de duas variáveis envolvidas* (capítulo três); *Variação das fórmulas de Integrais Duplas de duas variáveis envolvidas* (capítulo quatro) e *Variação das fórmulas de integrais de variáveis que envolvem dupla relação* (capítulo cinco).

De forma geral, a obra está bem-organizada, com conceitos bem estabelecidos; há formalidade por meio da apresentação de definições, seguidas de uma explicação e posteriores teoremas e corolários que generalizam os conceitos elaborados. Para alguns deles, há uma demonstração; para outros, a demonstração não foi observada.

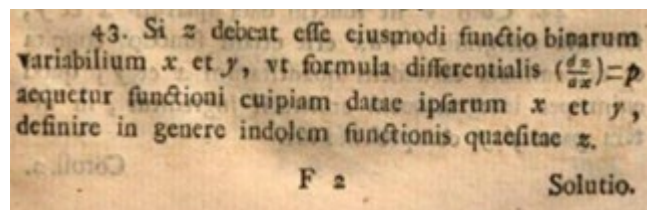
O Cálculo Integral aqui é definido como o inverso do Cálculo Diferencial, cuja teoria aparece vinculada ao estudo das funções. Euler explica que os conceitos, definições, regras e teoremas referentes ao Cálculo Integral, que antes eram vinculados a quantidades diferenciais ou a funções de uma variável, no seu livro, foram estendidos a funções de duas, três ou várias variáveis, bem como ao estudo de equações diferenciais de ordem superior.

Mas é claro que o cálculo integral é muito mais extenso do que as fórmulas integradas que compreendem apenas uma variável, pois assim como esta função de uma variável x é investigada a partir de uma dada forma diferencial, o cálculo integral também deve ser estendido investigar as funções de duas ou mais variáveis. O cálculo integral não se restringe apenas às equações diferenciais de primeira ordem, mas também deve fornecer comandos através dos quais as funções de uma ou duas ou mais variáveis podem ser desenvolvidas com a ajuda de uma determinada equação diferencial (EULER, 1770, p. 4-5).

O problema registrado na Figura 27 envolve a definição de uma função geral de duas variáveis para z , dada uma equação diferencial, cuja solução é discutida pelo autor de duas

formas distintas, em momentos diferentes da obra. Brandão (2021) reproduziu a praxeologia matemática da primeira solução realizada por Euler, conforme mostrado no Quadro 15. Como pode ser observado, não é estabelecida a relação da variável z com a variável y .

Figura 27 – Definição de uma função real de duas variáveis



Fonte: Euler, 1770, p. 43

Quadro 15 – Praxeologias matemáticas do problema registrado na Figura 27

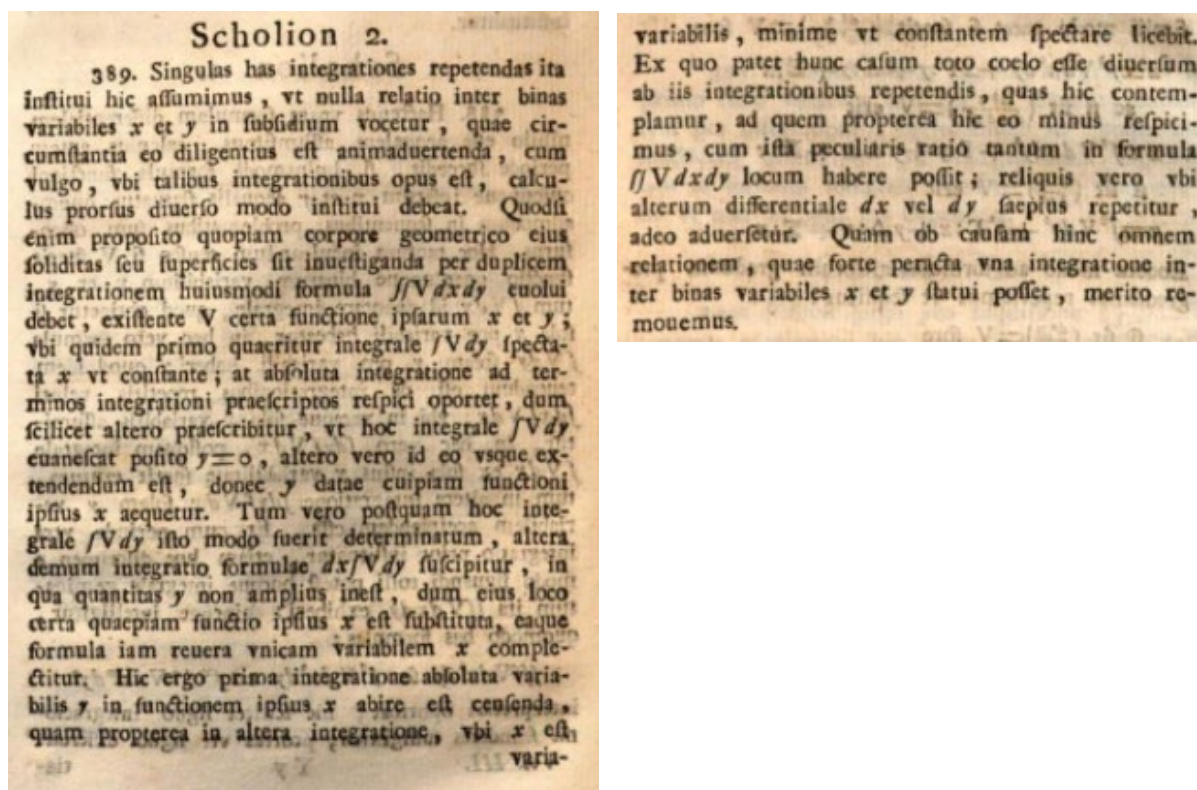
Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Tarefa T_5 : Definir uma função geral para z , uma função binária de variáveis x e y	τ_1 : Igualar p a função V de variáveis x e y	θ_1 : Propriedade fundamental das proporções	Θ_1 : Proporção
	τ_2 : Aplicar a propriedade fundamental das proporções		
	τ_3 : Escrever $dz = p dx$		
	τ_4 : Substituir p por V		
	τ_5 : Escrever $dz = V dx$	θ_2 : Teorema da Integração implícita de uma EDO	Θ_2 : Integral Θ_3 : EDO
	τ_6 : integrar ambos os termos da equação diferencial		
	τ_7 : Escrever $z = \int V dx + f: y$		
	τ_8 : Explicar que $f: y$ são funções quaisquer arbitrárias para a quantidade y , inicialmente considerada constante.		

Fonte: Adaptado de Brandão, 2021, p. 142

Assim, Euler propõe um estudo, a partir desse problema da Figura 27 que vai permitir estabelecer a relação entre as variáveis x e y . Assim, tomando V , uma função qualquer envolvendo duas variáveis, ele considera uma superfície e duplica a integração conforme a fórmula $\iint V dx dy$, em que, para resolvê-la, considera primeiramente x constante, calcula a integral em relação a y , representando a integral $\int V dy$ por $dx \int V dy$. Após calculada essa integral, a função obtida é submetida a uma segunda integração, em função da variável x e com y constante, $\int dx \int V dy$. Dessa forma, Euler resolve o problema da integração de uma função de duas variáveis (binária), hoje conhecida como Integral Dupla.

A Figura 28 ilustra o estudo referido. A praxeologia matemática é desencadeada pela tarefa T_6 : calcular a Integral Dupla.

Figura 28 – Integral Dupla de Euler



Fonte: Euler, 1770, p. 354-355

Segundo Ávila (2002), o teorema de mudança de variáveis que permite transformar coordenadas cartesianas em coordenadas polares aplicadas às Integrais Duplas foi proposto por Euler (1770) quando ele desenvolveu a noção de Integral Dupla. Entretanto, não localizamos o teorema nessa obra.

No contexto dos acontecimentos do século XVIII, Joseph Fourier (1768-1830) publica sua obra: *Teoria Analítica do Calor*, que reúne e aperfeiçoa trabalhos já publicados em artigos anteriores. Nessa obra, o autor enfatiza que as causas que desencadeiam fenômenos naturais não podem ser desvendadas, mas se submetem a leis simples e constantes, descobertas por meio da observação, sendo o estudo delas o objeto da filosofia natural. Para ele, o calor é uma causa natural que constitui um dos ramos da Física Geral.

O objetivo da obra de Fourier era estabelecer as leis matemáticas às quais o calor obedece, a fim de responder a aplicações encontradas nas Ciências Físicas e na Economia Civil que, consequentemente, influenciariam o progresso das Artes Técnicas. Essas aplicações envolvem basicamente observações fundamentais por ele nomeadas de *qualidades específicas dos corpos*, as quais determinam que “diferentes corpos não possuem, no mesmo grau, o poder

de conter o calor, de recebê-lo ou transmiti-lo através de suas superfícies, e nem de conduzi-lo para o interior de suas massas” (FOURIER, 1878, p. 1).

O problema das temperaturas terrestres, encontrado na obra de Fourier e ilustrado no Quadro 16, subdividido em outros (problema do anel metálico, problema da massa sólida, problema do prisma retangular de espessura suficientemente grande e de comprimento infinito), desencadeou, em nossa interpretação, toda a construção do conhecimento em relação à Teoria Analítica do Calor descrita nesta obra, pois a partir das observações evidenciadas nesse problema, ele elaborou as questões expostas no Quadro 17, cujas respostas que constituem a teoria citada estão relacionados às múltiplas relações da teoria matemática com os usos civis e das artes técnicas da época, sendo, portanto, problemas reconhecidos como a extensão das aplicações da teoria matemática até então elaborada.

Quadro 16 – Problema das Temperaturas Terrestres

O problema das temperaturas terrestres apresenta uma das mais belas aplicações da teoria do calor; a ideia geral a ser formada é esta: diferentes partes da superfície do globo estão desigualmente expostas à influência dos raios solares; a intensidade de sua ação depende da latitude do lugar; muda também no decorrer do dia e do ano, e está sujeita a outras menos perceptíveis em igualdades. É evidente que, entre o estado variável da superfície e o das temperaturas internas existe uma relação necessária, que pode ser derivada da teoria. Sabemos que, a certa profundidade abaixo da superfície da terra, a temperatura em um determinado lugar não sofre variação anual: essa temperatura subterrânea permanente torna-se cada vez menor à medida que o lugar fica cada vez mais distante do equador. Podemos, então, deixar de lado o envolto externo, cuja espessura é incomparavelmente pequena em relação ao raio da Terra, e considerar nosso planeta como uma massa quase esférica, cuja superfície está sujeita a uma temperatura que permanece constante em todos os pontos de um dado paralelo, mas não é o mesmo em outro paralelo. Segue-se disso que toda molécula interna também tem uma temperatura fixa determinada por sua posição. O problema matemático consiste em descobrir a temperatura fixa em qualquer ponto, e a lei que segue o calor solar ao penetrar no interior da terra.

Essa diversidade de temperatura interessa ainda mais se forem consideradas as mudanças que se sucedem no próprio envolto em que vivemos. Aquelas alternâncias de calor e frio que se reproduzem todos os dias e no decorrer de cada ano têm sido até hoje objeto de repetidas observações. Podemos submetê-los a cálculos e, de uma teoria comum, derivar todos os fatos particulares que os experimentos nos ensinaram. O problema pode ser reduzido à hipótese de que todos os pontos de uma vasta esfera são afetados por temperaturas periódicas; a análise então nos diz de acordo com qual lei a intensidade dessas variações diminui conforme a profundidade aumenta, qual é a quantidade de mudanças anuais ou diurnas em uma determinada profundidade, a época das mudanças e como o valor fixo da temperatura subterrânea é deduzido das temperaturas variáveis observadas na superfície.

Pode-se então considerar problemas menores gerados de fenômenos específicos em que é necessário estudar o movimento do calor em corpos, mas cujas leis de variação do calor são as mesmas para cada um deles, a menos do material dos quais os compõe e das situações específicas de cada um deles.

Fonte: Adaptado de Fourier, 1878

Quadro 17 – Principais problemas relacionados em Fourier (1878)

Quais são as propriedades elementares que são necessárias observar em cada substância e quais são os experimentos mais adequados para determiná-las com exatidão? Se a distribuição do calor na matéria sólida é regulada por leis constantes, qual é a expressão matemática dessas leis, e por qual análise podemos derivar dessa expressão a solução completa dos problemas principais? Por que as temperaturas terrestres deixam de ser variáveis em profundidades tão pequenas em relação ao raio da Terra? Considerando a desigualdade no movimento desse planeta necessariamente ocasionando uma oscilação do calor solar abaixo da superfície, que relação existe entre a duração de seu período e a profundidade em que as temperaturas se tornam constantes?

Quanto tempo deve ter decorrido antes que os climas pudessem adquirir as diferentes temperaturas que agora mantêm e quais são as diferentes causas que agora podem variar seu calor médio? Por que as mudanças anuais, por si só, na distância do Sol a Terra, não produzem na superfície da Terra mudanças muito consideráveis nas temperaturas? Por quais características podemos verificar que a Terra não perdeu totalmente seu calor original e quais são as leis exatas da perda?

Considerando que o calor fundamental não se dissipa totalmente, esse deve ser imenso em grandes profundidades, no entanto, não tem nenhuma influência sensível atualmente sobre a temperatura média dos climas. Os efeitos do calor fundamental são devidos à ação dos raios solares. Mas independentemente dessas duas fontes de calor, uma fundamental, própria do globo terrestre, a outra, primitiva, devido à presença do Sol, qual a causa universal que determina a temperatura do céu, naquela parte do espaço que o sistema solar ocupa? Uma vez que os fatos observados necessitam dessa causa, quais são as consequências de uma teoria exata nesta questão e como poderemos determinar esse valor constante da temperatura do espaço e deduzir a temperatura que pertence a cada planeta?

A essas questões devem ser adicionadas outras que dependem das propriedades do calor radiante. A causa física do reflexo do frio, ou seja, o reflexo de um grau menor de calor já é bem conhecido; mas qual é a expressão matemática desse efeito?

De quais princípios gerais dependem as temperaturas atmosféricas, se o termômetro que as mede recebe os raios solares diretamente, sobre uma superfície metálica ou não polida, ou se esse instrumento fica exposto, durante a noite, sob um céu livre de nuvens, ao contato com o ar, à radiação dos corpos terrestres, e das partes mais distantes e frias da atmosfera?

A intensidade dos raios que escapam de um ponto na superfície de qualquer corpo aquecido varia com sua inclinação de acordo com uma lei. Há uma relação matemática necessária entre essa lei e o fato geral do equilíbrio do calor? Qual é a causa física das desigualdades de intensidade?

Por fim, quando o calor penetra nas massas fluidas e nelas determina os movimentos internos por mudanças contínuas da temperatura e densidade de cada molécula, podemos expressar por equações as leis de tal efeito composto? Qual é a mudança resultante nas equações gerais da hidrodinâmica?

Fonte: Fourier, 1878, p. 3-5

Quanto às Integrais Duplas, essas foram observadas no problema de uma massa sólida, no que se refere a determinar a medida do movimento do calor em um dado ponto dessa massa, ou seja, elas foram utilizadas por Fourier (1878) para determinar um dos principais elementos da teoria do calor, que consiste em definir e calcular a quantidade exata de calor que passa por cada ponto de uma massa sólida em um plano cuja direção é dada, sendo essa a Tarefa T_7 , que desencadeia uma nova praxeologia matemática. Portanto, o problema de uma massa sólida consiste em uma nova razão de ser para as Integrais Duplas.

Nessa praxeologia desencadeada pela Tarefa T_7 , é necessário considerar, além de conteúdos matemáticos, a propriedade de que se o calor for desigualmente distribuído entre as moléculas do mesmo corpo, as temperaturas em qualquer ponto irão variar a cada instante. No Anexo 5, apresentamos a solução apresentada pelo autor para determinar a medida do movimento do calor em um determinado ponto de uma massa sólida.

A citada praxeologia tem seu discurso teórico-tecnológico justificado na *Teoria Analítica do Calor*, cujas tecnologias perpassam pelos conteúdos matemáticos: coordenadas cartesianas, propriedades dos círculos, propriedades do cilindro, propriedades do prisma, equações diferenciais, integral, coordenadas cartesianas, superfícies e regiões em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ em

equações diferenciais. Com esses conteúdos estendidos a partir das necessidades desencadeadas pela complexidade que se aplica à tarefa realizada, há o predomínio do rigor matemático.

Descrevendo a praxeologia, observamos que Fourier (1878) denotou por t o tempo decorrido e por v a temperatura atingida após um tempo t por uma molécula infinitamente pequena, cujas coordenadas são x, y, z . Em seguida, traçou um plano horizontal por meio de um ponto arbitrário m paralelo ao plano xy , construindo, nesse plano, um círculo infinitamente pequeno w com centro em m .

Posteriormente, considerando como positiva uma ação cujo efeito é transportar certa quantidade de calor acima do plano e como negativa aquela que faz com que o calor passe abaixo do plano, observou que a soma de todas as ações parciais que são exercidas pelo círculo w , ou seja, que a soma de todas as quantidades de calor que, cruzando qualquer ponto desse círculo, passa da parte do sólido abaixo do plano para a parte acima, compõe o fluxo cuja expressão deve ser encontrada. Traçou, então, por meio de m' um círculo horizontal w' paralelo ao anterior e considerou o trânsito do calor no sólido limitado por esses dois planos e suas arestas laterais.

Expressou as temperaturas nos diferentes pontos do sólido pela equação $v = a - \left(\frac{a-b}{e}\right)z$ e concluiu que se o problema se refere a um sólido compreendido entre seis planos retangulares, pares dos quais são paralelos, com as temperaturas nos diferentes pontos expressas pela equação: $v = A + ax + by + cz$. Em seguida, concluiu, também, que expressão da quantidade de calor que, durante o instante dt , flui por um círculo horizontal infinitamente pequeno, cuja medida da área é w , e passa da parte do sólido que está abaixo do plano do círculo para a parte de cima, é, para os dois casos, dada pela expressão: $-K \frac{dv}{dz} w dt$. Generalizou esse resultado, reconhecendo que ele existe em todos os casos do movimento variado de calor, expresso pela equação $v = F(x, y, z, t)$. Diferenciou essa equação encontrada e, em seguida, substituiu as diferenciais por ξ, η, ζ , para expressar o valor de w que é equivalente a $v + dv$, na equação linear:

$$w = v' + \frac{dv'}{dx} \xi + \frac{dv'}{dy} \eta + \frac{dv'}{dz} \zeta$$

em que os coeficientes: $v', \frac{dv'}{dx}, \frac{dv'}{dy}$ e $\frac{dv'}{dz}$ são funções dx', dy', dz' de x, y, z, t , cujos valores dados e constantes x', y', z' , que pertencem ao ponto m , foram substituídos por x, y, z . Em

seguida, supôs que o mesmo ponto m pertence também a um sólido encerrado entre seis planos retangulares (um prisma) e que as temperaturas reais dos pontos desse prisma, cujas dimensões são finitas, são expressas pela equação linear $w = A + a\xi + b\eta + c\zeta$; sendo que as moléculas situadas nas faces que limitam o sólido são mantidas por alguma causa externa na temperatura que lhes é atribuída pela equação linear. ξ, η, ζ são as coordenadas retangulares de uma molécula do prisma em questão, cuja temperatura é w , e se refere a três eixos cuja origem está em m . Posteriormente, expressou o estado do prisma pela equação diferencial:

$$w = v' + \frac{dv'}{dx}\xi + \frac{dv'}{dy}\eta + \frac{dv'}{dz}\zeta$$

Tomam-se como valores dos coeficientes constantes A, a, b, c , que entram na equação para o prisma, as quantidades $v', \frac{dv'}{dx}, \frac{dv'}{dy}$ e $\frac{dv'}{dz}$ que pertencem à equação diferencial. Concluiu que o fluxo de calor, em um sólido ou outro, é expresso por $-K \frac{dv}{dz} w dt$, ressaltando que seria $-K \frac{dv}{dy} w dt$ se o círculo cujo centro é m fosse perpendicular ao eixo y e $-K \frac{dv}{dx} w dt$, se o círculo fosse perpendicular ao eixo x . Posteriormente, explicou que, como o fluxo de calor também varia com o tempo, pôde concluir que o fluxo do calor será expresso por $-K \frac{dv}{dz}$, sendo $-K \frac{dv}{dy}$ na direção de y e $-K \frac{dv}{dx}$ na direção de x .

Fourier (1878) explicou que o resultado até então encontrado serve, em geral, para medir a velocidade com que o calor tende a atravessar um dado ponto de um plano situado de qualquer maneira no interior de um sólido, cujas temperaturas variam com o tempo. Fourier explicou ainda que, por meio do ponto m dado, uma perpendicular deve ser elevada sobre o plano e, em cada ponto dela, ordenadas devem ser desenhadas para representar as temperaturas reais em seus diferentes pontos, formando uma curva plana, cujo eixo de abscissas é a perpendicular.

Fourier (1878) explicou também que a fluxão da ordenada da curva, respondendo ao ponto m , tomada com o sinal oposto, expressa a velocidade com que o calor é transferido pelo plano, sendo conhecida por ser a tangente do ângulo formado pelo elemento da curva com um paralelo à abscissa. Em seguida, supondo que os diferentes pontos de uma massa cúbica, uma aresta que tem o comprimento π , tenham temperaturas reais desiguais representadas pela equação $v = \cos x \cos y \cos z$, em que as coordenadas x, y, z são medidas em três eixos retangulares, cuja origem está no centro do cubo, perpendicular às faces e supondo ainda que

os pontos da superfície externa do sólido estão na temperatura real 0 e que as causas externas mantenham em todos esses pontos a temperatura real 0, concluiu que o estado variável desse sólido é expresso pela equação:

$$v = e^{-gt} \cos x \cos y \cos z$$

O coeficiente g dado por $g = \frac{3k}{CD}$ representa a condutibilidade específica da substância da qual o sólido é formado, D é a densidade, C o calor específico e t é o tempo decorrido. Traçou pelo ponto m , cujas coordenadas são x, y, z , um plano perpendicular a z e mostrou que o valor do fluxo, nesse ponto e pelo plano é: $-K \frac{dv}{dz}$, ou $Ke^{-gt} \cos x \cos y \cdot \text{senz}$.

Fourier (1878) mostrou que a quantidade de calor que, durante o instante dt , atravessa um retângulo infinitamente pequeno, situado nesse plano, e cujos lados são dx e dy , é $Ke^{-gt} \cos(x) \cos(y) \cdot \text{senz} \cdot dx dy dt$ e que a quantidade de calor que, durante o instante dt , atravessa toda a área do mesmo plano é: $ke^{-gt} \text{senz} dt \iint \cos(x) \cos(y) dx dy$. Calculou a integral para $x = -\frac{1}{2}\pi$ até $x = \frac{1}{2}\pi$ e para $y = -\frac{1}{2}\pi$ até $y = \frac{1}{2}\pi$ encontrando a expressão $4Ke^{-gt} \text{senz} dt$ para representar o calor total.

Calculou a integral em relação a t , de $t = 0$ a $t = t$, para encontrar a quantidade de calor que cruzou o mesmo plano desde o início do resfriamento até o momento real, dada por: $\frac{4K}{g} \text{senz} (1 - e^{-gt})$. Finalmente, concluiu que a quantidade do calor na superfície é dada pela expressão $\frac{4K}{g} (1 - e^{-gt})$.

Em síntese, Fourier (1878) precisou calcular a quantidade de calor que, durante um instante dt , atravessa um retângulo arbitrário infinitamente pequeno, situado em um plano perpendicular a z , cujas medidas dos lados são dadas por dx e dy , para, a partir daí, determinar a quantidade total de calor que, durante o instante dt , atravessa toda a área desse mesmo plano durante o processo de resfriamento do sólido prismático. Para isso, utilizou os mesmos princípios do movimento do calor que foram estudados para uma dimensão no caso em que o calor é propagado uniformemente, para o caso em que o movimento do calor ocorre em três dimensões.

Na equação obtida, K representa o fluxo constante de calor, dx e dy representam as medidas dos lados dos retângulos infinitamente pequenos, e t representa o tempo. O coeficiente g é dado por $g = \frac{3k}{CD}$ e representa a condutibilidade específica da substância da qual o sólido é

formado, que depende tanto do valor de k quanto da densidade D e do calor específico C , que mobilizou as Integrais Duplas.

Assim, as Integrais Duplas, embora sejam aplicadas em um contexto físico, estão relacionadas a objetos nos quais a forma geométrica é relevante para compreender o movimento de calor, além de serem interpretadas como resultados de situações nas quais o seu cálculo se compara ao de medidas de áreas e volumes. Não identificamos no texto do autor elementos como esquema, representação gráfica ou figural, indicando a prevalência do discurso influenciado pela análise algebrizada predominante na época, conforme já citamos neste texto sob as considerações de Roque (2015).

Dando continuidade, vimos que, com a Revolução Industrial, o sistema de educação francês foi reconstruído com base no fato de que os saberes podiam ser ensinados e o método analítico podia ser aplicável, o que impactou na Matemática com uma dominação da algebrização, bem como na sua separação das outras disciplinas, como explica Roque (2015). O método analítico e sua operacionalização na Matemática, por meio da ferramenta algébrica, criaram um ambiente favorável para a separação da Análise da Geometria, implicando a visão da Matemática com um formalismo algébrico já bem determinado. Roque (2015) explica, ainda, que o empreendimento teórico parecia relevante se estivesse ligado à resolução de problemas de Física ou de Engenharia, e a análise era vista como elemento principal de uma cultura ligada à Engenharia.

No início do século XIX, conforme acrescenta Roque (2015), as funções contínuas de Euler foram caracterizadas como funções analíticas e passaram a ser discutidas por meio do problema físico – a propagação do calor – a partir dos trabalhos de Fourier, como já apontamos acima. Diante disso, o método da ciência experimental passou a ser baseado na Matemática e na Física. Mas com a abstração e formalização impostas pela reflexão sobre os fundamentos da Matemática, a Física deixa de ser o eixo central que motivava o desenvolvimento da Matemática, e a Análise Matemática criou força a partir da preocupação de Cauchy (1759-1857) com o rigor. Ele foi o primeiro a apresentar a noção de convergência de uma série infinita, dando início à análise rigorosa do Cálculo.

Durante a segunda metade do século XIX, os matemáticos não eram mais vistos como práticos e compunham a “elite intelectual dos professores universitários que valorizavam o saber puro” (ROQUE, 2015, p. 420). Nesse contexto, surge a desvinculação do conceito de números da noção de quantidade, e “as dificuldades encontradas na legitimação das operações com números negativos, na conceituação dos imaginários e das discussões epistemológicas do

Cálculo infinitesimal, levaram ao desenvolvimento da Matemática baseada em conceitos abstratos que passou a ser designada de pura” (ROQUE, 2015, p. 422).

Atores como Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Leonhard Euler (1707-1873) desempenharam papéis importantes para a construção da Teoria do Cálculo Diferencial e Integral. Esse processo adentrou o século XX e a Análise Matemática foi adquirindo a forma de reconhecimento que tem hoje.

Nesse contexto, Riemann (1826-1866) define a integral restrita a intervalos limitados para partições do domínio no cálculo da medida de um volume e para uma série condicionalmente convergente, da seguinte forma³⁰: se f é uma função real limitada, definida no intervalo $[a, b]$, construímos partições desse intervalo, $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b$. Para cada partição, definimos as somas:

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta x_i M_i; s = \sum_{i=1}^n \Delta x_i m_i,$$

em que M_i e m_i são, respectivamente, o maior e o menor valores assumidos por f no subintervalo $[\xi_{i-1}, \xi_i]$.

A integral superior e a integral inferior de Riemann são assim definidas:

$$\int_a^b f(x)dx = \inf S; \int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \sup s,$$

em que $\inf$ e $\sup$ são, respectivamente, o ínfimo e o supremo, consideradas todas as possíveis partições do intervalo. Se os dois valores são iguais, então se diz que a função é Riemann-integrável e sua integral é denotada simplesmente por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

³⁰ SILVA, G.S. A **História do Cálculo**. 18/12/2017. Disponível em: <https://www.phylos.net/2017-12-18/a-historia-do-calculo/>. Acesso em: 06 abr. 2022.

O estudo de Henri Lebesgue (1875-1941) “amplia o escopo da generalização da Integral de Riemann para espaços mais gerais do que os euclidianos e estabelece um paralelo com séries absolutamente convergentes o que favorece o estudo das Séries de Fourier” (BRANDÃO, 2021, p. 136).

Como as equações diferenciais careciam da fundamentação teórica de seus princípios que são aportados na teoria do Cálculo, houve uma preocupação com o desenvolvimento de ferramentas para a solução de sistemas de equações diferenciais. Assim, Jacobi (1804-1851) desenvolveu a teoria dos determinantes e transformações para a solução de Integrais Múltiplas e equações diferenciais, e Oliver Heaviside (1850-1925) desenvolveu o cálculo operacional e o uso da *Transformada de Laplace* em que as Integrais Múltiplas e, portanto, as Integrais Duplas, são também aplicadas para reduzir equações diferenciais a equações algébricas de solução muito mais simples. Logo, mais uma tarefa ligada às ID foi aqui identificada, a tarefa T_8 : reduzir equações diferenciais a equações algébricas de solução muito mais simples, levando a mais uma razão de ser dessas integrais.

Nesse cenário, a teoria das ID se desdobra nas obras datadas dos séculos XIX e século XX como uma extensão das integrais de funções reais de uma variável real.

De acordo com Grattan-Guinness (1970), relativo à *forma* como o conhecimento matemático foi construído ao longo de um período histórico, a Matemática foi diretamente influenciada pelos estilos de pensamento *Denkweisen*, predominantes nos atores dessa construção. Um ator dotado do estilo de pensamento algébrico, um algebrista, trabalha apenas com fórmulas, exaltando a sua generalidade, e evita o uso de diagramas e a dependência da configuração geométrica. Já um geômetra, dotado do estilo de pensamento geométrico, mesmo que não desenhe diagramas, depende de configurações geométricas na construção dos conhecimentos matemáticos, além de adotar teorias moldadas em termos de conhecimentos empíricos. Em contraste, um analista procura a autonomia da construção de conhecimentos matemáticos em relação à álgebra e à geometria, mas pode combinar, de forma discreta, elementos dos geômetras nesse processo. Entretanto, segundo esse mesmo autor, um estilo de pensamento se forma a partir das influências do contexto de sua vivência.

Nessa investigação, os três estilos de pensamento relacionados pelo autor – algébrico, geométrico e analítico – foram evidentes no processo de desenvolvimento epistemológico do objeto matemático de Integral Dupla. Para um algebrista, uma integral definida é uma fórmula produzida pelo inverso da operação de diferenciação; para um geômetra, é uma medida de uma

área de uma superfície ou a medida de um volume; e, para um analista, é o limite de uma sequência de somas de partição.

Em síntese, iniciamos essa seção explicitando o problema da quadratura do arco parabólico, sendo esse problema uma primeira razão de ser para as integrais de funções reais de uma variável real, cuja praxeologia matemática considerou no bloco da *práxis* a tarefa T_1 : determinar a medida da área do segmento parabólico delimitado. O bloco teórico-tecnológico envolveu conteúdos matemáticos, como desenho geométrico, propriedades da reta tangente, propriedades da parábola, Teorema de Tales, propriedade fundamental das proporções, cônicas, Lei da Alavanca de Arquimedes e razão e proporção.

O problema *o cálculo da medida do volume da esfera* foi identificado como outra razão de ser para as integrais de funções reais de uma variável real e constitui a Proposição 2 do Tratado de Arquimedes. A tarefa implicada na praxeologia foi enunciada como T_2 : calcular a medida do volume da esfera. O bloco teórico-tecnológico envolve, além dos conteúdos matemáticos já descritos para a execução de T_1 , a ideia da criação de sólido de revolução foi implementada.

O problema do movimento dos planetas deu início ao que hoje entendemos como ID, sendo esse problema uma razão de ser dessas integrais. Os Teoremas XVIII e XIX de Kepler compuseram a teoria da praxeologia determinada pelas tarefas: T_3 : calcular a medida do volume do anel formado pela rotação de uma figura plana circular ou elíptica em torno de um centro, e T_4 : calcular a medida do volume do anel fechado, sendo esse um cilindro cuja base é um círculo da seção transversal e a altura com medida igual ao comprimento da circunferência formada a partir de certa rotação. Os blocos teórico-tecnológicos das praxeologias determinadas pelas tarefas citadas envolveram os conteúdos matemáticos constituintes da geometria, associados a coordenadas cartesianas, cônicas, superfícies e regiões em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, além dos elementares razões e proporções.

O problema de encontrar z , uma função de duas variáveis x e y , para que a fórmula diferencial $\frac{dz}{dx} = p$ seja igual a alguma função dada x e y para definir a função geral procurada – cuja função foi desencadeada pela tarefa T_5 : definir uma função geral para z , uma função binária de variáveis x e y – foi fundamental na elaboração do método das integrações sucessivas de Euler e constituiu mais uma razão de ser dessas integrais. Essa questão desencadeou a tarefa T_6 : calcular a Integral Dupla.

Ainda, a partir do problema do movimento dos planetas, chegamos a outra razão de ser das Integrais Duplas, com o problema de determinar a medida do movimento do calor em um

determinado ponto de uma massa sólida, levando à tarefa T_7 : definir e calcular a quantidade exata de calor que passa por cada ponto de uma massa sólida em um plano cuja direção é dada, para a qual foi considerada, principalmente, a propriedade de que se o calor for desigualmente distribuído entre as moléculas do mesmo corpo, as temperaturas em qualquer ponto irão variar a cada instante; além de conteúdos matemáticos, como coordenadas cartesianas, propriedades dos círculos, propriedades do cilindro, propriedades do prisma, equações diferenciais, integral, coordenadas cartesianas, superfícies e regiões em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ em equações diferenciais.

Por fim, a necessidade de as ID se tornarem uma ferramenta para resolver equações diferenciais foi mais uma razão de ser dessas integrais observada nesta investigação. A tarefa T_8 : reduzir equações diferenciais a equações algébricas de solução muito mais simples leva a mais uma praxeologia relacionada a essas integrais.

Nesta seção, buscamos compreender os contextos nos quais as Integrais Duplas surgiram, bem como evidenciamos as razões de serem incorporadas neste texto, quando discutimos cada um dos problemas citados. Na próxima seção, apresentamos um Modelo Epistemológico de Referência (MER), elaborado nesta investigação a partir dos resultados até aqui observados.

A construção de um MER é um dispositivo que amplia as possibilidades de institucionalizar os elementos estruturais que compõem o objeto matemático em estudo. A partir do estudo epistemológico realizado, identificamos os problemas ou situações que emergiram de contextos sociais e culturais elaborados ao longo do tempo. O Quadro 18 sintetiza os principais problemas encontrados, cujas praxeologias matemáticas foram cuidadosamente descritas na seção anterior. Nele, estão relacionadas as questões da natureza que foram discutidas nas áreas científicas: Física, Astronomia e Matemática. A razão de existência da Integral Dupla está associada ao cálculo das medidas de áreas de superfícies e de medidas de volumes de sólidos; bem como a própria necessidade de construção da teoria das ID.

Quadro 18 – Principais resultados evidenciados no estudo epistemológico

Problema ou situação Razões de ser das ID	Importância	Tarefa	Observação
Quadratura do arco parabólico: encontrar a medida da área de uma região delimitada por um arco de parábola e pelo segmento que une as extremidades desse arco.	Gênese das Integrais de funções reais de uma variável real	Tarefa T_1 : Determinar a medida da área do segmento parabólico delimitado.	Os problemas emergiram de contextos sociais e culturais que se construíram a partir das necessidades que surgiram nesses contextos ao longo dos tempos. Estão
Qualquer segmento de esfera tem para o cone de mesma base e altura a razão que a soma do raio da esfera e	Apontou a direção para a construção da		

da altura do segmento complementar tem com a altura do segmento complementar. (O cálculo da medida do volume da esfera).	teoria das ID, uma vez que, para determinar uma medida de área de uma região ou do volume de um sólido.	T_2 : Calcular a medida do volume da esfera.	relacionados a questões da natureza que foram discutidas nas áreas científicas: Física, Astronomia e Matemática. A razão de existência da Integral Dupla está associada ao cálculo das medidas de áreas de superfícies tridimensionais relacionadas ao cálculo de medidas de volumes de sólidos, à necessidade de calcular a quantidade de calor que passa por um ponto de uma massa sólida, bem como à necessidade de as ID se tornarem uma ferramenta para resolver equações diferenciais.
Problema do movimento dos planetas	Gênese das Integrais Duplas	T_3 : Calcular a medida do volume do anel formado pela rotação de uma figura plana circular ou elíptica em torno de um centro. T_4 : Calcular a medida do volume do anel fechado, sendo esse um cilindro cuja base é um círculo da seção transversal e a altura com medida igual ao comprimento da circunferência formada na rotação de MIKN.	
Encontre z , uma função de duas variáveis x e y , para que a fórmula diferencial $\frac{dz}{dx} = p$ seja igual a alguma função dada x e y para definir a função geral procurada (z).	Apontou a direção para o Cálculo das Integrais Duplas, pelo Método das integrações sucessivas $\iint V dx dy$.	T_5 : Definir uma função geral para z , uma função binária de variáveis x e y .	
Problema das Temperaturas Terrestres que levou ao problema de encontrar a medida do movimento do calor em um determinado ponto de uma massa sólida.	Mobilização da ID.	T_7 : Definir e calcular a quantidade exata de calor que passa por cada ponto de uma massa sólida em um plano cuja direção é dada.	
A necessidade de as ID se tornarem uma ferramenta para resolver equações diferenciais.	Mobilização da ID	T_8 : Reduzir equações diferenciais a equações algébricas de solução muito mais simples.	

Fonte: A autora, 2021

Quanto às obras analisadas, de forma geral, a organização didática é definida primeiro pela teoria, entendida aqui como a apresentação de regras matemáticas que envolvem procedimentos de resolução das integrais para, posteriormente, ser apresentado um problema

matemático que, ao ser resolvido, provoca a necessidade de outros problemas matemáticos, a partir dos quais a teoria se constrói.

Em relação ao ponto de vista do ensino e da aprendizagem, nas obras de Agnesi (1754) e Bougainville (1754) observamos uma preocupação em apresentar um texto favorável à compreensão dos conceitos abordados por estudantes. Nas demais obras, esse aspecto não foi evidenciado.

O rigor científico da Matemática, exigência da segunda metade do século XVIII e principalmente do século XIX, é visto mais nitidamente na organização da obra de Euler (1770), em que a Matemática, até então vista como uma ciência das quantidades, passou a ser associada, na obra, ao estudo das funções e, conseqüentemente, a uma matemática das curvas. Vimos que esse aspecto é decorrente da necessidade da evolução de técnicas matemáticas para explicar tanto a matematização da natureza quanto o ideal do pensamento mecanicista da época.

Não chegamos a analisar obras do século XIX em que as praxeologias matemáticas primavam pelo rigor matemático na linguagem, característica da Matemática pura, pois entendemos que o problema didático desta investigação está relacionado ao contexto da Engenharia. Entretanto, elaboramos as questões que apresentamos na sequência, aportadas em referências, além das analisadas no estudo epistemológico, de autores do século XIX, Granville, Smith e Longley (1961) e Judce (1978).

Seguimos, na seção seguinte, ao Modelo Epistemológico de Referência elaborado.

4.4 Técnica τ_{1a4}

Conforme vimos no capítulo anterior, Gascón (2011) explica que, do estudo da dimensão epistemológica do problema didático, é possível elaborar o Modelo Epistemológico de Referência. Esse modelo de referência deverá ser contrastado com o Modelo Epistemológico Dominante, que é o modelo presente na instituição que condiciona o tipo de atividades matemáticas relacionadas às ID que são efetivamente desenvolvidas com os estudantes de Engenharia Civil nessa instituição, bem como as atividades didáticas correspondentes que são materializadas no modelo docente desempenhado. Nesse sentido, o MER se configura como um sistema de referência para construir fenômenos didáticos e para formular e tratar problemas didáticos associados a um objeto matemático, no caso desta investigação, associados às Integrais Duplas.

Vimos também que, de acordo com Chevallard (1991), o MER se formula em termos de praxeologias matemáticas, podendo essas praxeologias ser elaboradas a partir de questões levantadas que determinaram as tarefas que, ao longo de um período histórico, permitiram a construção do saber científico relacionado a um objeto matemático em estudo. Quanto ao saber a ser ensinado em uma sala de aula, esse é constituído por meio dos processos que possibilitam a Transposição Didática.

Benito (2019) acrescenta que, no caso da Transposição Didática, a transposição do saber sábio ao saber a ser ensinado contém elementos invariantes, como as definições matemáticas do objeto e suas propriedades, além dos elementos propícios às variações (responsáveis pela diferença entre esses saberes) que serão detectados por meio da análise das questões que envolvem o objeto matemático.

Isso posto, procedemos nesta seção à última técnica da Praxeologia de Investigação I para o estudo da dimensão epistemológica do problema didático elaborado nesta investigação. O Modelo Epistemológico de Referência aqui apresentado foi organizado, tendo como ponto de partida a Questão Teórica Principal (QT_p), dividida em duas partes: *É possível desenvolver praxeologias matemáticas para o estudo das Integrais Duplas partindo da interpretação dessas integrais como o inverso das tangentes associada ao contexto de cálculo de medidas de áreas e volumes, chegando ao conceito analítico geral dessas integrais? Que elementos devem ser considerados nessas praxeologias para que isso ocorra?*

Assim elaboramos outras questões que foram gradativamente respondidas nesta investigação, cujo conjunto das respostas constitui a resposta à questão principal. É importante salientar que a presença de cada uma dessas outras questões se encontram justificadas em contextos do estudo epistemológico realizado.

Essas outras questões foram denotadas de questões teóricas e técnicas e as respostas a essas questões foram propostas tendo como referência, especialmente, as abordagens analíticas para as ID presentes em Granville, Smith e Longley (1961) e Judce (1978).

Questão Técnica 1 (Q_1):

Como podemos justificar a afirmação: correspondente à derivação no Cálculo Diferencial, temos no Cálculo Integral, o processo inverso da integração?

Resposta à Q_1 :

Para responder a essa questão, recorreremos a Leibniz (1646-1716) que mostrou que os processos das *diferenças* e *somas* são um o inverso do outro. Os processos das diferenças e somas são o que hoje conhecemos como Diferencial e Integral. O trabalho de Leibniz foi referência nos estudos de Johan Bernoulli, conforme, registrados em Agnesi (1748), Lacroix (1806) e Bougainville (1754).

No Quadro 19, registramos a praxeologia para responder a essa questão.

Quadro 19 – Praxeologia usada na questão técnica Q_1

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_1 : Justificar a afirmação: correspondente à derivação no Cálculo Diferencial, temos no Cálculo Integral o processo inverso da integração.	τ_1 : Argumentar de que maneira os processos de derivação e integração estão matematicamente relacionados.	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais; θ_2 : Derivadas parciais; θ_3 : Integral Dupla.	Θ_1 : Funções. Θ_2 : Derivadas. Θ_3 : Integral.

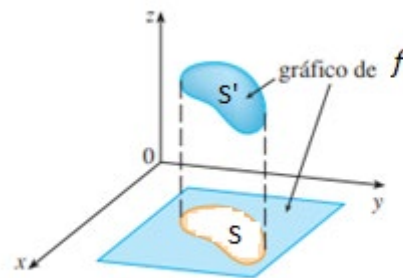
Fonte: A autora, 2021

Vimos em Lacroix (1806) que Jhohann Bernoulli percebeu que duas situações podem ocorrer: “a composição dos coeficientes diferenciais da função procurada é dada imediatamente pelas variáveis independentes ou existe apenas uma equação entre alguns desses coeficientes e uma ou mais variáveis” (LACROIX, 1806, p. 198), onde utilizou integração dupla.

Granville, Smith e Longley (1961) explicam que da inter-relação, a qual implica a questão técnica Q_1 , podemos inferir que a integração parcial de uma dada expressão diferencial, envolvendo duas ou mais variáveis independentes, é a operação que consiste em integrar a expressão primeiro em relação a uma das variáveis, considerando a outra como uma constante real, e repetir o processo, no caso da ID em relação a outra variável. Como o processo envolve duas variáveis, essa integração recebe o nome de Integral Dupla.

Questão Técnica 2 (Q_2):

Seja f uma função real contínua de x e y em que a representação geométrica de $z = f(x, y)$ é a equação de uma superfície KL , conforme mostrado na Figura 29.

Figura 29 - Representação geométrica de $z=f(x,y)$ 

Fonte: Stewart, 2014, p.888

S é uma parte da projeção de KL sobre o plano XOY . Se construirmos sobre S como base um cilindro reto de geratrizes paralelas ao eixo OZ , considerando S' a parte da superfície KL contida no cilindro, podemos calcular a medida do volume do cilindro limitado pelas superfícies S, S' e a superfície lateral do cilindro.

Faça isso, considerando o processo:

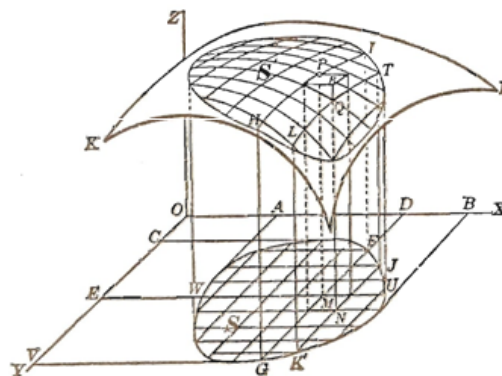
- i) divida a projeção de S sobre o eixo OX em intervalos iguais a um Δx considerado;
- ii) trace paralelas pelos pontos de divisão;
- iii) faça o mesmo em relação à projeção de S sobre o eixo OY .

A partir daí, considerando as colunas construídas, como você pode expressar a medida do volume do cilindro reto projetado?

Fonte: Adaptado de Granville, Smith e Longley, 1961

Resposta à Q_2 (elaborada a partir de Granville, Smith e Longley (1961)):

Figura 30 – Construção do cilindro reto



Fonte: Granville, Smith e Longley, 1961, p. 625

Tendo S como base de geratrizes paralelas ao eixo OZ , considerando S' a parte da superfície KL contida no cilindro, podemos calcular a medida do volume do cilindro limitado pelas superfícies S, S' e a superfície lateral do cilindro.

- i) Dividimos a projeção de S sobre OX em intervalos de comprimentos iguais a Δx .
- ii) Traçamos, pelos pontos de divisão, paralelas a OY .
- iii) Dividimos a projeção de S sobre OY em intervalos de comprimentos iguais a Δy e pelos pontos de divisão traçamos paralelas a OX .

Observemos que as retas paralelas a OY e as paralelas a OX determinam retângulos internos a S , como mostra a Figura 31. Com base em cada um desses retângulos, construímos colunas como $MNPQ$, cuja base superior é uma parte de S' . A soma das medidas dos volumes dessas colunas é um valor aproximado da medida do volume que procuramos.

Não temos um método para calcular a medida do volume de uma das colunas, uma vez que não podemos considerar que a coluna tenha como “base superior” um retângulo paralelo e congruente ao retângulo que compõe a sua base inferior, pois a superfície $z = f(x, y)$ é curva. Vamos, então, substituir cada uma dessas colunas por um paralelepípedo. Assim, a coluna $MNPQ$ será substituída pelo paralelepípedo de base MN , cuja altura é o valor da função f no extremo inferior esquerdo do retângulo MN que, na Figura 31, está representado pelo paralelepípedo $MNPR$. As coordenadas de P são (x, y, z) , a medida de MP é $z = f(x, y)$, e a medida do volume de $MNPR$ é $f(x, y)\Delta x\Delta y$.

Calculando a medida do volume de cada um dos outros paralelepípedos formados do mesmo modo e somando os resultados, podemos representar essa medida por V' e considerar que ela é aproximadamente igual à medida de um volume V que estamos procurando. A medida do volume V' pode ser indicada por: $V' = \sum \sum f(x, y)\Delta x\Delta y$.

Se aumentarmos infinitamente a quantidade de intervalos na projeção de S sobre o eixo OX , o valor de Δx vai se aproximar de zero. De forma análoga, Δy se aproximará de zero se fizermos o mesmo procedimento, considerando a projeção de S sobre o eixo OY . Então, a soma V' será o limite que representa o V que procuramos e é indicada por:

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y)\Delta x\Delta y.$$

O Quadro 20 apresenta a praxeologia usada na questão técnica Q_2 .

Quadro 20 – Praxeologia usada na questão técnica Q_2

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Dado f, uma função real contínua de x e y, em que a representação geométrica de $z = f(x, y)$ é a equação de uma superfície KL; S uma parte da projeção de KL sobre o plano XOY; a base um cilindro reto de geratrizes paralelas ao eixo OZ. T_2: Expressar por uma expressão matemática a medida do volume do cilindro limitado pelas superfícies S, S' e a superfície lateral do cilindro.	τ_2 : Particionar a projeção de S sobre o eixo OX em intervalos iguais a um Δx e pelos pontos de divisão traçar paralelas a OY .	θ_1: Funções reais de duas variáveis reais θ_3: Integral Dupla θ_4: Sistema de Coordenadas tridimensional θ_5: Limite de funções reais de duas variáveis reais θ_6: Seções Cônicas	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1: Funções Θ_3: Integral Θ_4: Limite Θ_5: Superfícies e regiões em R^3
	τ_3 : Particionar a projeção de S sobre OY em intervalos de comprimentos iguais a Δy e pelos pontos de divisão traçar paralelas a OX .		
	τ_4 : Calcular a medida da área dos retângulos internos a S obtidos por meio de τ_2 e τ_3 .		
	τ_5 : Calcular a medida do volume dos paralelepípedos tendo por base os retângulos internos a S obtidos na partição e por altura $f(x, y)$.		
	τ_6 : Expressar a medida do volume do paralelepípedo obtido por: $f(x, y)\Delta x\Delta y$.		
	τ_7 : Calcular a medida do volume de cada um dos outros paralelepípedos formados do mesmo modo e somar os resultados, representando essa medida por V'' .		
	τ_8 : Aumentar infinitamente a quantidade de intervalos na projeção de S sobre o eixo OX , de modo que valor de Δx se aproxime de zero.		
	τ_9 : Aumentar infinitamente a quantidade de intervalos na projeção de S sobre o eixo OY , de modo que o valor de Δy se aproxime de zero.		
	τ_{10} : Expressar a medida do volume do sólido por:		
	$V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y)\Delta x\Delta y.$		

Fonte: A autora, 2021

Descartes indicou em sua Geometria os meios de aplicar a análise a superfícies e curvas consideradas no espaço e, de acordo com as suas ideias, problemas relacionados tanto em curvas duplas³¹ quanto em superfícies curvas foram resolvidos por Clairaut, os irmãos Bernoulli e Euler. Esse último, havia até mesmo reconhecido o principal – curvaturas de superfícies curvas e a expressão analítica do caráter que distingue as superfícies reveláveis daquelas que não o

³¹ Uma curva dupla de uma dada curva plana C é uma curva no plano projetivo duplo que consiste no conjunto e linhas tangentes a C . Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Curvas_duplas. Acesso em 18 out. 2021.

são. Segundo Lacroix (1806), esses matemáticos foram iluminados pelas ideias presentes nos estudos de Euclides e Arquimedes que abriram caminho para o método dos indivisíveis, pois foram eles os primeiros a enxergar que as linhas eram compostas de pontos, as superfícies compostas de linhas e os corpos compostos de superfícies.

Lacroix (1806), utilizando as ideias de Euler (1770), calculou a medida do volume da região do espaço, limitada superiormente pela superfície $z = f(x, y)$, $f(x, y) > 0$, inferiormente pelo plano xy e lateralmente pela superfície cilíndrica de geratrizes verticais, considerando como elementos do volume os prismas infinitesimais com base dada pelos retângulos infinitesimais (elementos da área) e altura $z = f(x, y)$.

Questão Teórica (QT_1):

Utilizando a ideia de área, de que outra forma poderíamos representar a medida do volume do cilindro limitado pelas superfícies S, S' e a superfície lateral do cilindro, representado na Figura 31, e que em Q_2 foi expresso por:

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y$$

Resposta à QT_1 (elaborada a partir de Granville, Smith e Longley (1961)):

Vamos considerar uma das faixas em que é dividido o sólido quando seccionado por dois planos sucessivos paralelos a YOZ . Por exemplo, consideremos a faixa cujas faces são $FIHG$ e $JTL'K'$, conforme mostrado na Figura 31.

A espessura dessa faixa é Δx . Os valores de z ao longo da curva HI são obtidos pondo-se $x = OD$ na equação $z = f(x, y)$, isto é, ao longo de HI $z = f(OD, y)$.

Assim, a medida da área pode ser calculada por:

$$\text{Área } FIHG = \int_{DF}^{DG} f(OD, y) dy.$$

A medida do volume dessa faixa é aproximadamente igual ao de um paralelepípedo cuja base é $FIHG$ e cuja altura é Δx , isto é, igual a:

$$\Delta x \cdot \text{área } FIHG = \Delta x \int_{DF}^{DG} f(OD, y) dy.$$

A medida do volume do sólido é, evidentemente, o limite da soma das medidas dos volumes de todos os paralelepípedos construídos, desse modo, o número de intervalos em que foi dividida a projeção de S sobre OX cresce indefinidamente, de modo que o Δx tende a zero, isto é:

$$V = \int_{OA}^{OB} dx \int_{DF}^{DG} f(x, y) dy.$$

De forma similar, podemos mostrar que:

$$V = \int_{OC}^{OV} dy \int_{EW}^{EU} f(x, y) dx.$$

Essas integrais podem ser indicadas como:

$$\int_{OA}^{OB} \int_{DF}^{DG} f(x, y) dy dx \quad \text{e} \quad \int_{OC}^{OV} \int_{EW}^{EU} f(x, y) dx dy.$$

Em $V = \int_{OA}^{OB} dx \int_{DF}^{DG} f(x, y) dy$, os limites de DF e DG são funções de x , pois eles são obtidos pela resolução, em relação a y , da equação da curva ou fronteira da base do sólido. Similarmente, em $V = \int_{OC}^{OV} dy \int_{EW}^{EU} f(x, y) dx$.

Os limites EW e EU são funções de y . Assim, podemos dizer que:

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta y \Delta x = \int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx = \int_{b_2}^{b_1} \int_{v_2}^{v_1} f(x, y) dx dy$$

em que v_1 e v_2 são, em geral, funções de y ; por sua vez, u_1 e u_2 são funções de x . O segundo sinal de integração se aplica, em cada caso, à primeira diferencial.

A igualdade:

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta y \Delta x = \int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx = \int_{b_2}^{b_1} \int_{v_2}^{v_1} f(x, y) dx dy$$

é uma extensão do Teorema Fundamental do Cálculo e a expressão $\int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx$ representa uma Integral Dupla que pode ser interpretada como a medida do volume de uma porção do cilindro reto de geratriz paralela a OZ e diretriz dada pelas curvas que estão compreendidas entre o plano XOY e a superfície de equação $z = f(x, y)$ e $y = u_1$, $y = u_2$, $x = a_1$, $x = a_2$. A outra integral pode ser representada da mesma forma.

Para encontrar a medida do volume de qualquer cilindro limitado pelas superfícies S, S' e a superfície lateral do cilindro, como representado na Figura 31, consideramos uma coluna com base retangular $dx dy$ e com altura z . Somando todos os elementos que se obtêm de $y = DF$ a $y = DG$, considerando $x = OD$ constante, obtemos o volume de uma faixa delgada, tendo $FGHI$ como uma das faces. A medida do volume de todo sólido é obtida pela soma de todas as faixas que, como a anterior, podem ser construídas desde $x = OA$ até $x = OB$, sendo representada por:

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta y \Delta x = \int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx = \int_{b_2}^{b_1} \int_{v_2}^{v_1} f(x, y) dx dy.$$

Na integração sucessiva envolvendo duas variáveis, os limites que figuram no segundo sinal de integração se referem à variável cujo diferencial está escrito em primeiro lugar.

No Quadro 21, trazemos a Praxeologia usada na questão teórica QT_1 .

Quadro 21- Praxeologia usada na questão teórica QT_1

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Dada f uma função real contínua de x e y em que a representação geométrica de $z = f(x, y)$ é a equação de uma superfície KL ; S	τ_{11} : Seccionar o sólido por dois planos sucessivos paralelos a YOZ , considerando a faixa cujas faces são $FIHG$ e $JTL'K'$, mostrado na Figura 10, com espessura Δx	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais	
	τ_{12} : Considerando que os valores de z ao longo da curva HI são obtidos pondo-se $x = OD$ na equação: $z = f(x, y)$, $z = f(OD, y)$, expressar a medida da área a por: $\text{Área } FIHG = \int_{DF}^{DG} f(OD, y) dy$.		

uma parte da projeção de KL sobre o plano XOY; a base um cilindro reto de geratrizes paralelas ao eixo OZ. T_3: Definir a medida do volume do cilindro limitado pelas superfícies S, S' e a superfície lateral do cilindro por uma integral dupla iterada.	τ_{13}: Definir a medida do volume dessa faixa pelo volume aproximado de um paralelepípedo cuja base é $FIHG$ e cuja altura é Δx, $\Delta x \cdot \text{área } FIHG =$ $\Delta x \int_{DF}^{DG} f(OD, y) dy$.	θ_3: Integral Dupla θ_4: Sistema de Coordenadas tridimensional θ_5: Limite de funções reais de duas variáveis reais θ_6: Seções Cônicas θ_7: Integral Dupla Iterada θ_8: Teorema Fundamental do Cálculo	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1: Funções Θ_3: Integral Θ_4: Limite Θ_5: Superfícies e regiões em R^3
	τ_{14}: Definir a medida do volume pela integral: $V = \int_{OA}^{OB} dx \int_{DF}^{DG} f(x, y) dy$.		
	τ_{15}: Mostrar de maneira análoga que o volume do sólido pode também ser obtido por: $V = \int_{OC}^{OV} dy \int_{EW}^{EU} f(x, y) dx$.		
	τ_{16}: Indicar as integrais obtidas em τ_{14} e τ_{15} por: $\int_{OA}^{OB} \int_{DF}^{DG} f(x, y) dy dx$ e $\int_{OC}^{OV} \int_{EW}^{EU} f(x, y) dx dy$.		
	τ_{17}: Mostrar que em: $V = \int_{OA}^{OB} dx \int_{DF}^{DG} f(x, y) dy$, os limites de DF e DG são funções de x, pois eles são obtidos pela resolução, em relação a y, da equação da curva ou fronteira da base do sólido.		
	τ_{18}: Mostrar que em $V = \int_{OC}^{OV} dy \int_{EW}^{EU} f(x, y) dx$ os limites EW e EU são funções de y, pois eles são obtidos pela resolução, em relação a x, da equação da curva ou fronteira da base do sólido.		
	τ_{19}: Expressar $V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{\Delta y \rightarrow 0} \sum f(x, y) \Delta y \Delta x$ $= \int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx$ $= \int_{b_2}^{b_1} \int_{v_2}^{v_1} f(x, y) dx dy$ em que v_1 e v_2 são, em geral, funções de y e, por sua vez, u_1 e u_2 são funções de x. O segundo sinal de integração aplica-se, em cada caso, à primeira diferencial.		
	τ_{20}: Concluir que $V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{\Delta y \rightarrow 0} \sum f(x, y) \Delta y \Delta x$ $= \int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx$ $= \int_{b_2}^{b_1} \int_{v_2}^{v_1} f(x, y) dx dy$ são denominadas <i>Integrais Iteradas</i>.		

No estudo epistemológico, vimos que, com a necessidade de calcular medidas de volume de alguns sólidos, utilizando a integral dupla representada por $\iint V dx dy$, Euler propôs um estudo a fim de permitir estabelecer a relação entre as variáveis x e y , e tomando V uma função qualquer envolvendo duas variáveis, ele considera uma superfície, duplica a integração conforme a fórmula $\iint V dx dy$ e desenvolve o processo de integração de uma função de duas variáveis (binária), hoje conhecida como Integral Dupla. Essa ideia dá o suporte para propor as questões QT , Q_3 e Q_4 .

Questão Técnica 3 (Q_3):

Como podemos usar o que discutimos nas questões anteriores para representar e interpretar geometricamente a expressão:

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy dx ?$$

Resposta à Q_3 :

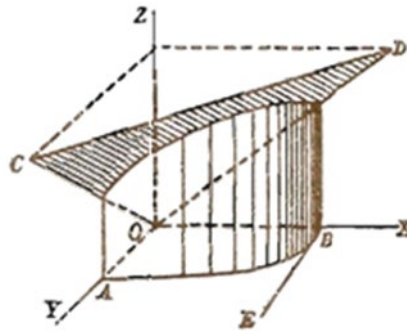
A integral dupla presente no enunciado da questão representa a medida do volume do sólido de forma cilíndrica com base em OAB , limitado na parte superior pela superfície (plana) $z = x + y$.

A base OAB é limitada por:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \text{ (reta } OB) \\ y = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ (quarto de círculo } AB) \end{array} \right\} \text{limites de } y.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \text{ (reta } OA) \\ y = a \text{ (reta } BE) \end{array} \right\} \text{limites de } x.$$

Figura 21 – Representação Geométrica a Integral: $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy dx$



Fonte: Granville, Smith e Longley, 1961, p.628

Apresentamos no Quadro 22 a praxeologia usada na questão técnica Q_3 .

Quadro 22 – Praxeologia usada na questão técnica Q_3

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_4: Interpretar geometricamente a integral dupla: $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy dx.$	τ_{21} : Localizar o domínio da função $z = x + y$.	θ_1: Funções reais de duas variáveis reais θ_3: Integral Dupla θ_4: Sistema de Coordenadas tridimensional θ_5: Limite de funções reais de duas variáveis reais θ_6: Seções Cônicas	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1: Funções Θ_3: Integral Θ_4: Limite Θ_5: Superfícies e regiões em R^3
	τ_{22} : Localizar as interseções de $z = x + y$ com os eixos coordenados xy, xz e yz .		
	τ_{23} : Representar em R^3 a superfície $z = x + y$.		
	τ_{24} : Representar no plano xy a base do sólido considerando os limites de integração em x e em y .		
	τ_{25} : Traçar retas paralelas ao eixo OZ sobre o quarto de círculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ até encontrar a superfície $z = x + y$, finalizando o sólido gerado.		
	τ_{26} : Concluir que a integral dupla dada representa a medida do volume do sólido gerado.		

Fonte: A autora, 2021

Questão Técnica 4 (Q_4):

Como podemos determinar a medida do volume do sólido que você representou em Q_3 ?

Resposta à Q_4 :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy \right] dx = \\
&= \int_0^a \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \\
&= \int_0^a \left(x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2-x^2}{2} \right) dx = \frac{2a^3}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, a medida do volume do sólido considerado é $\frac{2a^3}{3}$ unidades de volume.

Quadro 23 – Praxeologia usada na questão técnica Q_4

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_5: Calcular a medida do volume do sólido dada pela integral dupla: $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy dx.$ Obs.: A realização desta tarefa depende da interpretação geométrica já realizada na questão anterior, entretanto, enfatizamos aqui somente as técnicas necessárias para a realização dos cálculos algébricos.	τ_{27} : Integrar em função de uma das variáveis.	Θ_1: Funções reais de duas variáveis reais Θ_7: Integral Dupla Iterada Θ_8: Teorema Fundamental do Cálculo	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1: Funções Θ_3: Integral Θ_4: Limite Θ_5: Superfícies e regiões em R^3
	τ_{28} : Aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.		
	τ_{29} : Integrar a nova função em relação a outra variável.		
	τ_{30} : Aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.		
	τ_{31} : Concluir que a integral dupla dada representa a medida do volume do sólido gerado.		

Fonte: A autora, 2021

Questão Técnica 5 (Q_5):

Que condições são necessárias para que uma ID seja interpretada como uma medida de volume?

Para responder a essa questão, elaboramos uma segunda questão teórica.

Questão Teórica 2 (QT_2):

Considerando as reflexões realizadas para responder às questões anteriores e estabelecendo uma comparação entre as ideias nelas presentes e a definição de integral definida em um intervalo $[a, b]$ de uma função real de uma variável real, como você poderia definir a integral

dupla de uma função real de duas variáveis reais sobre uma região S do plano? E como essa integral pode ser calculada?

Resposta à QT_2 :

Estabelecendo uma comparação entre a definição de integral definida apresentada, por exemplo, em Stewart (2014):

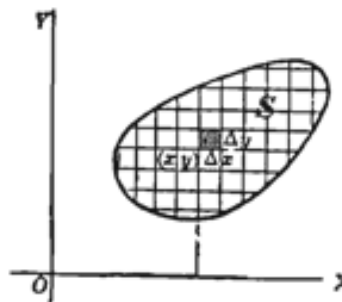
Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f de a a b é:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x,$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ (STEWART, 2014, p. 337).

Também as ideias discutidas nas questões anteriores, podemos dizer que sendo f uma função real de duas variáveis reais, definida para os pontos (x, y) de uma região S do plano XOY , com retângulos elementares de dimensões Δx e Δy , considerados conforme indicado na Figura 32.

Figura 32 – A Integral dupla estendida a uma região S



Fonte: Granville, Smith e Longley, 1961, p. 631

Se escolhermos em cada retângulo um ponto (x, y) arbitrário e fizermos o produto $f(x, y) \Delta x \Delta y$, ao somar todos esses produtos, obtemos $\sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y$. Da mesma forma que denominamos por *integral definida no intervalo* $[a, b]$ da função real de uma variável real f o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$, ao limite de $\sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y$, quando Δx e Δy tendem a 0,

daremos o nome de *integral dupla da função real f de duas variáveis reais sobre a região S do plano* e indicamos:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y = \iint_S f(x, y) dx dy$$

Quadro 24 – Praxeologia usada na questão teórica QT_2

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Considerando uma função real de duas variáveis reais f , definida para os pontos (x, y) de uma região S do plano XOY , com retângulos elementares de dimensões Δx e Δy , T_6 : Definir a integral dupla de uma função real de duas variáveis reais sobre uma região S do plano.	τ_{32} : Escolher em cada retângulo um ponto (x, y) arbitrário e tomar o produto $f(x, y) \Delta x \Delta y$.	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_3 : Integral Dupla θ_5 : Limite de funções reais de duas variáveis reais	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1 : Funções Θ_3 : Integral Θ_4 : Limite Θ_5 : Superfícies e regiões em R^3
	τ_{33} : Somar todos os produtos, obtendo $\sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y$.		
	τ_{34} : Definir integral dupla da função real f de duas variáveis reais sobre a região S do plano como: $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y$ $= \iint_S f(x, y) dx dy$.		

Fonte: A autora, 2021

Vamos então responder à questão técnica Q_5 . A função f não pode tomar valores negativos em S quando abordamos sua integral dupla nessa região como a representação da medida de um volume de um sólido conforme fizemos em QT_1 , uma vez que medidas negativas de volume não fazem sentido.

Entretanto, o mesmo raciocínio que nos permitiu calcular a medida do volume nessa questão pode ser aplicado quando a porção S' da superfície $z = f(x, y)$, em Q_3 , for tomada abaixo do plano XOY , se optarmos por resolver a questão utilizando integração sucessivas por meio da definição de integral dupla construída em QT_1 . O limite dado pela integral dupla seria um número oposto ao obtido como sendo a medida do volume em Q_3 que, por ser negativo, não pode ser interpretado diretamente como uma medida de volume. Para tal interpretação, deve-se considerar o valor absoluto desse número. Assim, podemos dizer que: para $f(x, y) \geq 0$, a integral dupla de f sobre a região S pode ser interpretada como a medida do volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente pela região S e

lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de S . Se $f(x, y) \leq 0$ então, se quisermos determinar a medida do volume do sólido delimitado inferiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, superiormente pela região S e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de S , teremos que considerar que a medida de tal volume será dada por $\left| \iint_R f(x, y) dx dy \right|$.

Se f é algumas vezes positiva e algumas vezes negativa nos pontos S , podemos dividir essa região em sub-regiões nas quais f seja ou sempre positiva ou sempre negativa. O raciocínio vale para cada sub-região e, portanto, para a soma dessas sub-regiões, isto é, para S . Assim, podemos concluir que uma integral dupla pode ser calculada em todos os casos por integração sucessiva.

Quadro 25 – Praxeologia usada na questão técnica Q_5

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_7 : Estabelecer as condições necessárias para que uma ID seja interpretada como uma medida de volume.	τ_{35} : Analisar, quando $f(x, y) \geq 0$ no domínio de integração o significado da integral dupla de f sobre a região S em relação à medida do volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente pela região S e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de S .	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_7 : Integral Dupla Iterada θ_8 : Teorema Fundamental do Cálculo	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1 : Funções Θ_3 : Integral Θ_4 : Limite Θ_5 : Superfícies e regiões em R^3
	τ_{36} : Analisar, quando $f(x, y) \leq 0$ no domínio de integração o significado da integral dupla de f sobre a região S em relação à medida do volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente pela região S e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de S .		

Fonte: A autora, 2021

Questão Técnica 6 (Q_6):

Como podemos determinar os limites de integração, quando queremos encontrar a medida do volume de um sólido?

A solução dessa questão fica explícita se entendermos como podemos interpretar uma medida de área utilizando uma integral dupla e, para isso, passamos à próxima questão teórica QT_3 elaborada nesta investigação.

Questão Teórica 3 (QT_3):

Como poderíamos determinar, a partir do cálculo de uma integral dupla, a medida da área de uma região S do plano XOY ?

Resposta à QT_3 (elaborada a partir de Judce (1978)):

Considerando a região S da qual queremos determinar a medida da área como apresentada na Figura 32, basta que consideremos os retângulos elementares internos a S na figura cujas medidas das áreas são representadas por $\Delta x \Delta y$. E, considerando os procedimentos já discutidos anteriormente, a medida da área será dada pela expressão:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum \Delta x \Delta y = \int \int_S dx dy.$$

Assim, podemos concluir que a medida da área de uma região S do plano XOY é o valor da integral dupla quando $f(x, y) = 1$ sobre essa região ou, ainda, que a medida da área de tal região é igual à medida do volume de um cilindro reto tendo a região como base e cuja medida da altura é a unidade.

Quadro 26 – Praxeologia usada na questão teórica QT_3

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Considerando uma função real de duas variáveis reais f, definida para os pontos (x, y) de uma região S do plano XOY, com retângulos elementares de dimensões Δx e Δy: T_8: Determinar a integral dupla de uma função real de duas variáveis reais sobre uma região S do plano.	τ_{32} : Escolher em cada retângulo um ponto (x, y) arbitrário e tomar o produto $f(x, y) \Delta x \Delta y$.	θ_1: Funções reais de duas variáveis reais θ_3: Integral Dupla θ_5: Limite de funções reais de duas variáveis reais	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1: Funções Θ_3: Integral Θ_4: Limite Θ_5: Superfícies e regiões em R^3
	τ_{33} : Somar todos os produtos, obtendo $\sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y$.		
	τ_{37} : Definir a medida da área de uma região S do plano XOY como: $A = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum \Delta x \Delta y = \int \int_S dx dy$.		
	τ_{38} : concluir que a medida da área de uma região S do plano XOY é o valor da integral dupla da função $f(x, y) = 1$ sobre essa região ou, ainda, que a medida da área de tal região é igual à medida do volume de um cilindro reto tendo a região como base e cuja medida da altura é a unidade.		

Fonte: A autora, 2021

Resposta à Q_6 :

Já sabemos como calcular a medida do volume de um sólido limitado por uma superfície $z = f(x, y)$, por uma região S plano XOY e um cilindro de geratriz paralela a OZ e tendo S como base. Vimos que a medida do volume do sólido é dada pela integral

$V = \iint_S z dx dy = \iint_S f(x, y) dx dy$, em que o integrando, do ponto de vista geométrico, é um prisma reto de base $dx dy$ e altura z , sendo a ordem de integração e os limites relativos à região S . O volume de um sólido desse tipo é o volume sob uma superfície, logo, o volume pode ser limitado pela superfície e a própria região S do plano XOY .

Quadro 27 – Praxeologia usada na questão técnica Q_6

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Considerando uma função real de duas variáveis reais f, definida para os pontos (x, y) de uma região S do plano XOY: T_9: Determinar os limites de integração, quando queremos encontrar a medida do volume de um sólido.	τ_{19}: Expressar $V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \sum f(x, y) \Delta y \Delta x$ $= \int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx$ $= \int_{b_2}^{b_1} \int_{v_2}^{v_1} f(x, y) dx dy$ em que v_1 e v_2 são, em geral, funções de y e, por sua vez, u_1 e u_2 são funções de x. τ_{39}: Concluir que o volume de um sólido desse tipo é o volume sob uma superfície, portanto, o volume pode ser limitado pela superfície e a própria região S do plano XOY.	θ_1: Funções reais de duas variáveis reais θ_3: Integral Dupla θ_5: Limite de funções reais de duas variáveis reais	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1: Funções Θ_3: Integral Θ_4: Limite Θ_5: Superfícies e regiões em R^3

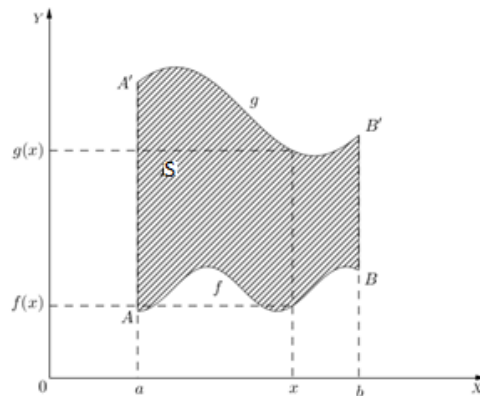
Fonte: A autora, 2021

Passamos, então, à próxima questão teórica.

Questão Teórica 4 (QT_4):

Seja F uma função contínua na região S do plano xy , limitada pela reta vertical $x = a$ à esquerda; pela reta vertical $x = b$ à direita; pela curva de equação $y = g(x)$, acima e abaixo pela curva de equação $y = f(x, y)$, em que f e g são funções contínuas. O contorno (ou fronteira) da região S é a curva fechada $ABB'A'A$ formada pelos arcos AB e $A'B'$ que são, na figura, as representações gráficas das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, e pelos segmentos de retas verticais AA' e BB' .

Figura 33 – Região S do plano xy , limitada: pela reta vertical $x = a$ à esquerda; pela reta vertical $x = b$ à direita; pela curva de equação $y = g(x)$, acima, e abaixo pela curva de equação $y = f(x, y)$



Fonte: Judce, 1978, p. 243

Como podemos interpretar a medida da área da região descrita? Quais são as condições impostas para as funções g e f nessa interpretação?

Resposta à QT₄ (elaborada a partir de Judce (1978)):

Observemos que, nesse caso, a região S pode ser representada por:

$$S = \{(x, y) \in R^2 | a \leq x \leq b \text{ e } f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

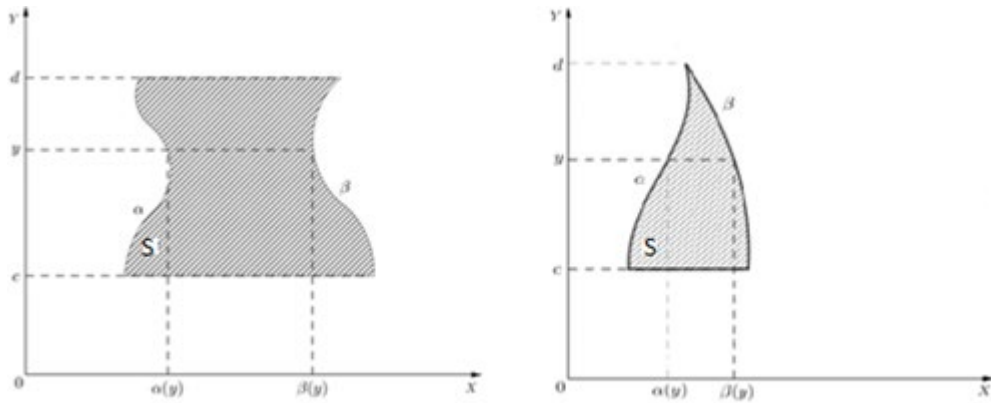
Se no interior da região S , fixarmos $x, x \in [a, b]$, a ordenada y varia de $f(x)$ a $g(x)$ e a medida da área poderá ser interpretada pela integral:

$$A = \iint_S F(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y) dy \right) dx .$$

Observemos que, nesse caso, na integral interna, supomos x constante, e os limites de integração fazem referência à variável y e $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$.

Procedemos de forma análoga para calcular integrais duplas em regiões como as ilustradas na Figura 34, que se projetam sobre o eixo das ordenadas segundo o intervalo $[c, d]$.

Figura 34 – Ilustração de funções que se projetam sobre o eixo das ordenadas segundo o intervalo $[c, d]$



Fonte: Judce, 1978, p. 247

O contorno da região compacta S é constituído de segmentos de retas horizontais que podem se reduzir a pontos e arcos que são as representações gráficas das funções definidas dadas $\alpha(y)$ e $\beta(y)$, definidas no intervalo $[c, d]$, tais que $\alpha(y) \leq \beta(y)$. As funções α e β são contínuas.

Admitindo que F seja contínua em S , a integral dupla:

$$A = \iint_S F(x, y) dx dy$$

pode ser calculada por:

$$A = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} F(x, y) dx \right) dy.$$

Supondo, na integral interna, que y seja constante, os limites de integração se referem à variável x .

Quadro 28 – Praxeologia usada na questão teórica QT_4

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Dada f uma função contínua na região S do plano xy , limitada pela reta vertical $x = a$ à esquerda; pela reta vertical $x = b$ à direita; pela curva de equação $y = g(x)$, acima, e abaixo pela curva de equação $y =$	τ_{40} : Representar a região S por: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 a \leq x \leq b \text{ e } f(x) \leq y \leq g(x)\}$.	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica)
	τ_{41} : Fixar $x, x \in [a, b]$ e fazer a ordenada y variar de $f(x)$ a $g(x)$.		
	τ_{42} : Definir a medida da área como $A = \iint_S F(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y) dy \right) dx$.		

$f(x, y)$, em que f e g são funções contínuas. O contorno (ou fronteira) da região S é a curva fechada $ABB'A'A$ formada pelos arcos AB e $A'B'$ que são as representações gráficas das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, e pelos segmentos de retas verticais AA' e BB' : T_{10} : Interpretar a medida da área da região descrita, explicitando as condições impostas para as funções g e f nessa interpretação.	τ_{43} : Definir os limites de integração observando que, na integral interna, supondo x constante e os limites de integração fazem referência à variável y e $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$.	θ_7 : Integral Dupla Iterada θ_8 : Teorema Fundamental do Cálculo	θ_1 : Funções θ_3 : Integral θ_4 : Limite θ_5 : Superfícies e regiões em R^3
	τ_{44} : Integrar em função de x τ_{45} : Aplicar o teorema fundamental do cálculo.		
	τ_{45} : Integrar em função de y τ_{45} : Aplicar o teorema fundamental do cálculo.		

Fonte: A autora, 2021

No estudo epistemológico das ID explicitado no capítulo 4, vimos que a teoria dessas integrais foi construída pelos matemáticos que, ao longo dos tempos, tiveram seu pensamento e motivação influenciados pelo contexto da época. Vimos também que a referida teoria se construiu naturalmente a partir de uma extensão do estudo das integrais de funções reais de uma variável real, mas, como podemos justificar essa extensão “natural”? Propusemos, então, a Questão Teórica QT_5 com a intenção de fazer essa justificação.

Questão Teórica 5 (QT_5):

Como podemos justificar a extensão natural da teoria das integrais de funções reais de uma variável real para as funções reais de duas variáveis reais?

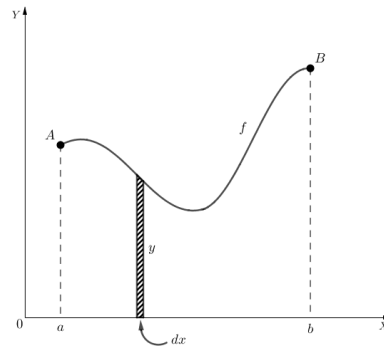
Resposta à QT_5 (elaborada a partir de Judce (1978)):

Diante do que foi explicitado até o momento, vimos que é possível calcular medidas de áreas de superfícies e de volumes de alguns sólidos mediante a interpretação desses elementos como uma ID. Assim, podemos concluir que:

[...] todas essas aplicações consistem no fundo em considerar a integral como a soma de uma infinidade de parcelas infinitesimais. Por meio das integrais podemos somar um número infinitamente grande de parcelas infinitamente pequenas. Esse é então o significado da integral, que encontra-se impregnado em sua notação, o sinal $\int$, significa um $\int$ alongado e foi elaborado por Leibniz no século XVII para lembrar o significado da integral; o símbolo dx é uma reminiscência de Δx e representa um comprimento infinitesimal, o produto $y dx$ (em que $y > 0$) representa a área do retângulo infinitesimal de base dx e altura y ; esse produto $y dx$ é a área elementar ou o elemento de área. Somando todos os elementos de área, quando x varia desde a até

b (limites de integração) obtemos a área S sobre o gráfico da função $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. A integral é precisamente essa soma. (JUDCE, 1978, p.265-266)

Figura 35 – Elemento da área de uma região limitada em $[a, b]$

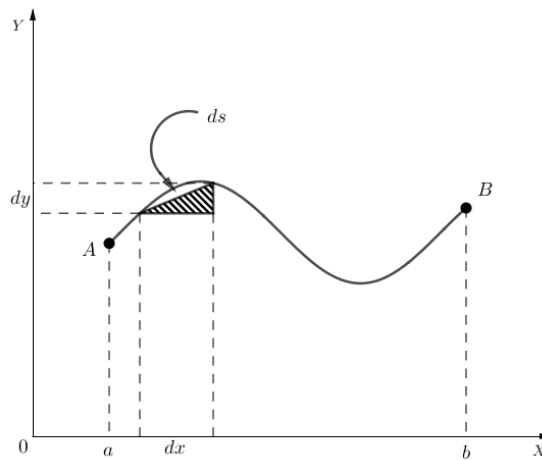


Fonte: Judce, 1987, p. 256

Se fizermos a região $aABb$ do plano limitada pelo eixo das abscissas, pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pela curva de equação $y = f(x)$ em que $y > 0$ (Figura 35) rotacionar em torno do eixo OX , obtermos um sólido de revolução em relação a esse eixo. Nesse sólido, podemos considerar dois planos perpendiculares a OX , em que a distância infinitesimal entre eles é dx , que o interceptam gerando uma “lâmina ou fatia,” a qual, se comparada a um cilindro de revolução de raio y e altura dx , tem volume $dV = \pi y^2 dx$, que é um elemento do sólido de revolução gerado. O volume do sólido de revolução é, então, a soma de todos esses elementos dV , quando x varia de a até b , e pode ser interpretado pela integral $V = \int_a^b \pi y^2 dx$.

A integral também pode ser interpretada como a medida do comprimento de um arco de curva AB , se considerarmos o arco como sendo uma linha poligonal formada de uma infinidade de lados infinitesimais. O lado genérico dessa linha é o elemento de arco ds , considerando ds como a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos infinitesimais dx e dy (JUDCE, 1978, p. 267):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Figura 36 – Medida do comprimento de um arco de curva AB 

Fonte: Judce, 1978, p. 267

O comprimento do arco AB resulta da soma de todos os elementos de arco, quando x varia de a até b e é representada pela integral $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, cuja existência fica garantida se supormos f uma função contínua. Se rotacionarmos a curva AB em torno do eixo OX , obteremos uma superfície de revolução, na qual podemos tomar como elemento de área a área determinada pelo elemento do arco ds , que se refere à área lateral de um tronco de um cone de bases paralelas com raio médio y e geratriz ds . Portanto, o elemento de área considerado é:

$$S = \int 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Quadro 29 – Praxeologia usada na questão teórica QT_5

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_{11} : Justificar a extensão natural da teoria das integrais de funções reais de uma variável real para as funções reais de duas	τ_{46} : Representar a região $aABb$ do plano limitada pelo eixo das abscissas, pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, e pela curva de equação $y = f(x)$ em que $y > 0$. (ver Figura 37)	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais	(Cálculo,
	τ_{47} : Rotacionar a região encontrada em torno do eixo OX , obtendo um sólido de revolução em relação a esse eixo.		
	τ_{48} : Gerar uma “lâmina ou fatia,” a qual, se comparada a um cilindro de revolução de raio y e altura dx , tem a medida do volume dada por $dV = \pi y^2 dx$.		

variáveis reais.	τ_{49} : Concluir que o volume do sólido de revolução é, então, a soma de todos esses elementos dV , quando x varia de a até b , e pode ser interpretado pela integral $V = \int_a^b \pi y^2 dx$.	θ : Integral Dupla θ_4 : Sistema de Coordenadas tridimensional θ_5 : Limite de funções reais de duas variáveis reais	Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) θ_1 : Funções θ_3 : Integral θ_4 : Limite θ_5 : Superfícies e regiões em R^3
	τ_{50} : Interpretar a integral como a medida do comprimento de um arco de curva AB , considerando o arco como sendo uma linha poligonal formada de uma infinidade de lados infinitesimais.		
	τ_{51} : Definir o elemento de arco ds , considerando ds como a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos infinitesimais dx e dy , dado por $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.		
	τ_{52} : Definir a medida do comprimento do arco AB como soma de todos os elementos de arco, quando x varia de a até b e é representada pela integral $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.		
	τ_{53} : Representar o comprimento do arco AB pela integral $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, cuja existência fica garantida se supormos f uma função contínua.		
	τ_{54} : Rotacionar a curva AB em torno do eixo OX obtendo a superfície de revolução, cujo elemento de área é a área determinada pelo elemento do arco ds , que se refere à área lateral de um tronco de um cone de bases paralelas com raio médio y e geratriz ds . τ_{55} : Definir o elemento de área como $S = \int 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.		

Fonte: A autora, 2021

Esses processos estavam presentes nos livros de Agnesi (1748) e Lacroix (1806). Em Lacroix (1806), verificamos que se estendem às integrais duplas naturalmente do contexto até aqui descrito, considerando como elemento de área de uma região do plano OX o retângulo infinitesimal de dimensões dx e dy , cuja área é $dx dy$ e, finalmente na área da região S , dada pela integral $A = \iint_S dx dy$, conforme já descrevemos nas questões anteriores.

Da mesma forma, identificamos na obra de Lacroix (1806) o cálculo da medida do volume da região do espaço, limitada superiormente pela superfície $z = f(x, y)$, $f(x, y) > 0$, inferiormente pelo plano xy e lateralmente pela superfície cilíndrica de geratrizes verticais,

considerando como elementos do volume os prismas infinitesimais com base dada pelos retângulos infinitesimais (elementos da área) e altura $z = f(x, y)$, conforme já descrevemos acima.

Pelo panorama das ID, os conceitos sugeridos pela geometria devem ser estudados analiticamente. Procedemos, então, à elaboração da próxima questão abordada nesta investigação que teve o propósito de definir, analiticamente, a Integral Dupla.

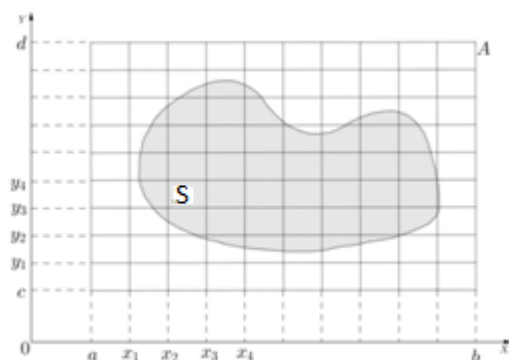
Questão Teórica 6 (QT_6):

É possível apresentar uma definição analítica para as integrais Duplas que prescindia de referências diretas à Geometria?

Resposta à QT_6 (elaborada a partir de Judce (1987, p. 127-128)):

Consideramos uma função de duas variáveis $f(x, y)$ contínuas em uma região compacta S do plano (região limitada e fechada), considerando que o contorno da região S seja uma curva formada de um número finito de arcos diferenciáveis.³²

Figura 37 - Região compacta S do plano cartesiano



Fonte: Judce, 1978, p. 229

Considerando um retângulo A , de lados paralelos aos eixos coordenados, contendo a região S , a projeção desse retângulo sobre o eixo OX é um intervalo $[a, b]$ e a sua projeção sobre o eixo OY é um intervalo $[c, d]$. Fazendo uma partição do intervalo $[a, b]$ por meio dos pontos $a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m = b$ e uma partição do intervalo $[c, d]$ por meio dos pontos $c = y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{p-1}, y_p = d$, as retas verticais traçadas a partir dos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e as retas horizontais traçadas a partir dos pontos $y_0, y_1, \dots, y_p$ estabelecem uma

³² Arcos diferenciáveis são arcos dados em sistemas de coordenadas apropriados por uma equação $y = f(x, y)$ em que f é uma função contínua, cuja derivada é contínua, com exceção de um número finito de saltos descontínuos.

partição do retângulo A em mp sub-retângulos, a qual denotamos por P . O sub-retângulo genérico da partição P é o produto cartesiano:

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Fazendo $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e $y_j - y_{j-1} = \Delta_j y$, a área do sub-retângulo A_{ij} será dada por:

$$\Delta_{ij}P = \Delta_i x \cdot \Delta_j y.$$

O diâmetro do sub-retângulo A_{ij} é a sua diagonal δ_{ij} :

$$\delta_{ij} = \sqrt{\Delta_i x^2 + \Delta_j y^2}.$$

A norma da partição P do retângulo em A será, então, o maior dentre os mp números δ_{ij} e podemos denotar por:

$$||P|| = \max \{ \delta_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p \}.$$

Considerando somente os sub-retângulos A_{ij} , que têm ponto comum com a região S , tais que:

$$S \cap A_{ij} \neq \emptyset.$$

Chamando de n o número desses sub-retângulos, $n \leq mp$, aos quais designamos por:

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n,$$

sendo que as suas respectivas áreas são dadas por:

$$\Delta_1 P, \Delta_2 P, \Delta_3 P, \dots, \Delta_n P.$$

Para cada $i (i = 1, 2, \dots, n)$, escolhemos um ponto arbitrário amostral (α_i, β_i) tal que $(\alpha_i, \beta_i) \in S \cap A_i$ e, multiplicando o valor da função f nesse ponto pela área do retângulo A_i , obtemos $f(\alpha_i, \beta_i)\Delta_i P$. A soma dos n produtos obtidos podem ser dada por:

$$f(\alpha_1, \beta_1)\Delta_1 P + f(\alpha_2, \beta_2)\Delta_2 P + \dots + f(\alpha_n, \beta_n)\Delta_n P$$

e pode ser representada, de modo simplificado por:

$$\sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \cdot \Delta_i P$$

que depende da partição P e da escolha dos pontos amostrais arbitrários (α_i, β_i) . Se adotarmos partições do retângulo A de norma cada vez menor, a soma acima se aproxima de um número real I , e dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \cdot \Delta_i P - I \right| < \varepsilon$$

para toda partição P do retângulo A tal que $\|P\| < \delta$, independentemente da escolha dos pontos (α_i, β_i) . Então teremos:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \cdot \Delta_i P = I.$$

Ao número I chamamos de integral (dupla) da função $f(x, y)$ na região S , que pode ser indicada por qualquer dos símbolos:

$$\iint_S f(x, y) dP \quad \text{ou} \quad \iint_S f(x, y) dx dy.$$

Logo:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \cdot \Delta_i S = I.$$

Não é de nosso interesse, nesse texto, apresentar a demonstração para o resultado acima, como seria realizado em um curso de Análise.

Quadro 30 – Praxeologia usada na questão teórica QT_6

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Considerando uma função de duas variáveis $f(x, y)$ contínuas em uma região compacta S do plano (região limitada e fechada), considerando que o contorno da região S seja uma curva formada de um número finito de arcos diferenciáveis: T_{12}: Apresentar uma definição analítica para as integrais Duplas.	τ_{56} : Tomar um retângulo A , de lados paralelos aos eixos coordenados, contendo a região S , a projeção desse retângulo sobre o eixo OX é um intervalo $[a, b]$ e a sua projeção sobre o eixo OY é um intervalo $[c, d]$.	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_3 : Integral Dupla θ_5 : Limite de funções reais de duas variáveis reais	Θ_1 : Funções Θ_3 : Integral Θ_4 : Limite Θ_5 : Superfícies e regiões em R^3
	τ_{57} : Particionar o intervalo $[b]$ por meio dos pontos $a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m = b$.		
	τ_{58} : Particionar o intervalo $[c, d]$ por meio dos pontos $c = y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{p-1}, y_p = d$.		
	τ_{59} : Concluir que as retas verticais traçadas a partir dos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e as retas horizontais traçadas a partir dos pontos $y_0, y_1, \dots, y_p$ estabelecem uma partição do retângulo A em mp sub-retângulos, a qual denotamos por P .		
	τ_{60} : Definir o sub-retângulo genérico da partição P é o produto cartesiano: $A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.		
	τ_{61} : Calcular a área do sub-retângulo A_{ij} que será dada por: $\Delta_{ij}P = \Delta_i x \cdot \Delta_j y$, considerando $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e $y_j - y_{j-1} = \Delta_j y$.		
	τ_{62} : Definir o diâmetro do sub-retângulo A_{ij} por sua diagonal δ_{ij} : $\delta_{ij} = \sqrt{\Delta_i x^2 + \Delta_j y^2}$.		
	τ_{63} : Definir a norma da partição P do retângulo em A , que será denotada por: $ P = \max \{ \delta_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p \}$.		
	τ_{64} : Considerar somente os sub-retângulos A_{ij} , que tem ponto comum com a região S , tais que: $S \cap A_{ij} \neq \emptyset$.		
	τ_{65} : Chamar de n o número desses sub-retângulos, $n \leq mp$ e designar por: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.		

	τ_{66}: Calcular as áreas dos sub-retângulos e designar por $\Delta_1 P, \Delta_2 P, \Delta_3 P, \dots, \Delta_n P$. τ_{67}: Indicar a área pelo produto $A_i, f(\alpha_i, \beta_i) \Delta_i P$. τ_{68}: Indicar a soma $\sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \cdot \Delta_i P$. τ_{69}: Adotar partições do retângulo A de norma cada vez menores fazendo com que a soma acima se aproxime de um número real I, e dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: $\left \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \cdot \Delta_i P - I \right < \varepsilon$ para toda partição P do retângulo A tal que $\ P\ < \delta$, independentemente da escolha dos pontos (α_i, β_i), para obter $\lim_{\ P\ \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \cdot \Delta_i P = I.$ τ_{70}: Definir número I como a integral (dupla) da função $f(x, y)$ na região S, que pode ser indicada por qualquer dos símbolos: $\iint_S f(x, y) dP \quad \text{ou} \quad \iint_S f(x, y) dx dy.$ Logo: $\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{\ P\ \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \cdot \Delta_i S = I.$	
--	--	--

Fonte: A autora, 2021

O valor médio assumido por uma função real de duas variáveis reais em uma determinada região também é “algo” que pode estar subjacente a aplicações da Engenharia Civil. Por exemplo, podemos estar interessados em saber a medida da altura média de certo volume de água em um tanque, quando essa água se estabiliza (estava em agitação) em uma altura constante, imaginando que uma função $f, f(x, y) > 0$ nos dá a altura, em dado instante, há um pouco de água balançando dentro de um tanque cujas paredes verticais delimitam as fronteiras da região, conforme visto em Thomas *et al.* (2012). A próxima Questão Técnica versa, então, sobre valor médio assumido por uma função real de duas variáveis reais em uma determinada região.

Questão Técnica 7 (Q_7):

O valor médio de uma função real g de uma variável real, integrável em um intervalo $[a, b]$, é calculado pela integral da função g sobre $[a, b]$, dividida pela medida do comprimento do referido intervalo, ou seja,

$$\text{Valor Médio} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx.$$

A partir do que foi considerado para o cálculo do valor médio quando se trata de uma função real de uma variável real, como podemos calcular o valor médio de uma função real f de duas variáveis reais, integrável, definida em uma região S limitada do plano?

Resposta à Q_7 (elaborada a partir Thomas, Weir e Hass (2012)):

Se podemos calcular o valor médio de uma função real de uma variável real, integrável, em um intervalo $[a, b]$, conforme descreve a questão, parece-nos conveniente considerar nos cálculos, ao contrário da medida do comprimento do intervalo de integração, a medida da área da região de integração S limitada no plano XY . Assim, podemos deduzir facilmente que para calcular o valor médio de uma função real f de duas variáveis reais, integrável, definida em uma região S , limitada no plano XY e denotado por V_m será dado por:

$$V_m = \frac{1}{\text{Medida da Área de } S} \iint_S f dx dy$$

em que $dx dy$ representam as dimensões do retângulo infinitesimal que representa o elemento de medida de área.

Quadro 31 – Praxeologia usada na questão técnica Q_7

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_{13} : Calcular o	τ_{70} : Considerar que o valor médio de uma função real g de uma variável real, integrável, em um intervalo $[a, b]$, é calculado pela integral da função g sobre $[a, b]$, dividida pela medida do comprimento do referido intervalo, ou seja, $\text{Valor Médio} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx.$	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria

valor médio de uma função real f de duas variáveis reais, integrável, definida em uma região S limitada do plano.	τ_{71} : Concluir que para calcular o valor médio de uma função real f de duas variáveis reais, integrável definida em uma região S limitada no plano XY , e denotado por V_m será dado por: $V_m = \frac{1}{\text{Medida da Área de } S} \iint_S f dx dx$ em que $dx dy$ representam as dimensões do retângulo infinitesimal que representa o elemento de medida de área.	Θ_3 : Integral Dupla Θ_9 : Teorema do Valor médio de uma função real f de duas variáveis reais	Analítica) Θ_1 : Funções Θ_3 : Integral Θ_4 : Limite Θ_5 : Superfícies e regiões em R^3
---	---	---	---

Fonte: A autora, 2021

Até aqui apenas tratamos as ID em coordenadas cartesianas, entretanto, há situações que podem admitir solução mais simples quando essas integrais são escritas em coordenadas polares. Vimos no estudo epistemológico que Jakob Bernoulli já utilizava coordenadas polares aplicadas a processos de integração. Vimos também em Ávila (2002) que o teorema de mudança de variáveis que permite transformar coordenadas cartesianas em coordenadas polares aplicadas às Integrais Duplas foi proposto por Euler (1770), entretanto, conforme salientamos, não localizamos nessa obra esse teorema e entendemos que o estudo das coordenadas polares aplicadas às ID precisa ser aprofundado do ponto de vista epistemológico. Sendo assim, indicamos esse estudo como uma possibilidade de pesquisas futuras.

Questão Técnica 8 (Q_8):

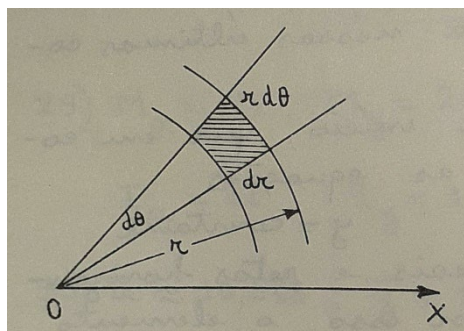
Como podemos determinar, em uma região referida a um sistema de coordenadas polares, o elemento infinitesimal que possibilita calcular a medida da área de uma superfície sobre uma região polar?

Resposta à Q_8 (elaborada a partir de Judce (1978)):

Indicando por θ o argumento (ou ângulo polar) e por r o raio vetor, podemos representar um ponto $P = (\theta, r)$ em coordenadas polares θ e r . Podemos ainda representar a equação $r = a$ que descreve o círculo com centro no polo e cujo raio é a própria constante a , e a equação $\theta = b$ representa uma semirreta de origem no polo, formando com o eixo polar o ângulo cuja medida é dada por b .

Isso faz com que o elemento de medida de área em coordenadas polares, Figura 38, seja uma região limitada por dois círculos infinitamente vizinhos, tendo como centro comum o polo e por duas semirretas infinitamente vizinhas também com origem no polo.

Figura 38 – Elemento de medida de área de uma região polar



Fonte: Judce, 1978, p. 286

Podemos denotar por dr a diferença entre os raios dos dois círculos, e por $d\theta$, o ângulo formado entre as duas semirretas, conforme ilustrado na Figura 38. No círculo de raio r , o arco correspondente ao ângulo central $d\theta$ tem comprimento $rd\theta$, assim, o elemento de área procurado é um quadrilátero curvilíneo cujos ângulos são retos. Comparando esse quadrilátero infinitesimal a um retângulo de lados dr e $rd\theta$, a sua área será dada por $A = r dr d\theta$.

Quadro 32 – Praxeologia usada na questão técnica Q_8

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_{14} : Determinar em uma região referida a um sistema de coordenadas polares, o elemento infinitesimal que possibilita calcular a medida da área de uma superfície sobre uma região polar.	τ_{72} : Indicar por θ o argumento (ou ângulo polar) e por r o raio vetor.	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_{10} : Sistema de coordenadas polares	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1 : Funções Θ_3 : Integral Θ_4 : Limite Θ_5 : Superfícies e regiões polares
	τ_{73} : Representar um ponto $P = (\theta, r)$ em coordenadas polares θ e r .		
	τ_{74} : Representar a equação $r = a$ que descreve o círculo com centro no polo e cujo raio é a própria constante a .		
	τ_{75} : Representar a equação $\theta = b$ que representa uma semirreta de origem no polo, formando com o eixo polar o ângulo cuja medida é dada por b .		
	τ_{76} : Definir o elemento de medida de área em coordenadas polares.		
	τ_{77} : Calcular a medida da área do quadrilátero curvilíneo definido como elemento de medida de área em coordenadas polares.		

Fonte: A autora, 2021

Questão Teórica 7 (QT_7)

Como podemos definir, a partir do cálculo da medida de área, a integral dupla em uma região polar?

Resposta à QT₇ (elaborada a partir de Judce (1987, p. 287-290)):

Vamos considerar uma região S do plano, referido a um sistema de coordenadas polares de polo O e eixo polar OX , na qual existem números reais a, b, α, β sendo que: $0 \leq a \leq b$ e $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$, e que $\forall$ ponto $P = (\theta, r)$ pertencente a essa região, tem-se $a \leq r \leq b$ e $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Isso significa simplesmente que a região S está contida na região fechada A do plano limitada pelas semirretas e pelos círculos $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelos círculos $r = a$ e $r = b$.

Consideremos f uma função real contínua sobre a região S e no intervalo $[a, b]$ pontos $r_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$, tais que:

$$a = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{m-1} < r_m = b,$$

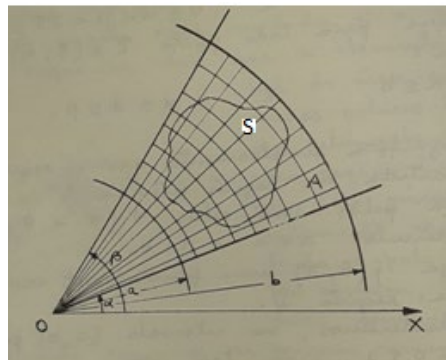
e no intervalo $[\alpha, \beta]$ pontos θ_j , em que $j = 0, 1, 2, \dots, p$, tais que:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{p-1} < \theta_p = \beta.$$

Os círculos de raio $r_0, r_1, r_2, \dots, r_m$ e as semirretas de origem O que formam com o eixo polar OX os ângulos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ estabelecem uma partição P da região A em região mp sub-regiões A_{ij} . A Figura 39 ilustra essa posição. A sub-região genérica A_{ij} se define de modo preciso, assim $A_{ij} = \{(\theta, r) \in R^2 | \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i, r_{j-1} \leq r \leq r_j\}$. Seja δ_{ij} o diâmetro da sub-região A_{ij} . A norma $\|P\|$ da partição P se define por:

$$\|P\| = \max\{\delta_{ij}, 0 \leq i \leq m \text{ e } 0 \leq j \leq p\}.$$

Figura 39 – Partição P



Fonte: Judce, 1978, p. 288

Vamos considerar somente as sub-regiões A_{ij} que têm ponto comum com a região S ; renumerando tais sub-regiões, podemos, então, designá-los por:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \text{ (é claro que } n \leq mp \text{)}.$$

Em cada sub-região $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, tomemos um ponto $P_i = (\theta^i, r^i) \in R$ em que θ^i e r^i são as coordenadas polares de P_i (usamos índices superiores para distinguir dos números θ^i e r^i antes introduzidos). O valor da função f no ponto P_i é $f(\theta^i, r^i)$, que denotaremos por $f(P_i)$.

Tomando $\Delta_i S$ a área da sub-região A_i , podemos considerar a soma:

$$f(P_1)\Delta_1 S + f(P_2)\Delta_2 S + \dots + f(P_n)\Delta_n S,$$

que pode ser representada por:

$$\sum_{i=1}^{n=1} f(P_i) \cdot \Delta_i S.$$

Usando a ideia de limite, demonstramos que a soma acima se aproxima de um número quando se tomam partições P da região A de norma cada vez menor:

$$\lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n=1} f(P_i) \cdot \Delta_i S.$$

Esse limite L é chamado integral (dupla) da função f na região S , sendo essa integral denotada por:

$$\iint_S f(\theta, r) dS = L, \text{ ou lembrando que } \iint_S f(\theta, r) r dr d\theta.$$

Quadro 33 – Praxeologia usada na questão teórica QT₇

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
	τ_{78} : Definir uma região S do plano, referido a um sistema de coordenadas polares de polo O e eixo polar OX , contida na região fechada A do plano limitada pelas semirretas e pelos círculos $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelos círculos $r = a$ e $r = b$. τ_{79} : Tomar $f(\theta, r)$ uma função real contínua sobre a região S .		(Cálculo, Geometria Plana; Geometria

T_{14} : Definir, a partir do cálculo da medida de área, a integral dupla em uma região polar.	τ_{80} : Particionar a região A em sub-regiões A_{ij} .	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_3 : Integral Dupla θ_5 : Limite de funções reais de duas variáveis reais θ_{10} : Sistema de coordenadas polares	Espacial; Geometria Analítica) Θ_1 : Funções Θ_3 : Integral Θ_4 : Limite Θ_5 : Superfícies e regiões polares
	τ_{81} : Definir a sub-região genérica A_{ij} .		
	τ_{82} : Tomar um ponto $P_i = (\theta^i, r^i) \in R$ em que θ^i e r^i são as coordenadas polares de P_i . Calcular a medida da área de uma sub-região A_{ij} .		
	τ_{83} : Calcular a medida da área de uma sub-região A_{ij} .		
	τ_{84} : Calcular $\sum_{i=1}^{n-1} f(P_i) \cdot \Delta_i S$.		
	τ_{85} : Mostrar que a soma acima aproxima de um número quando se tomam partições P da região A de norma cada vez menor, por meio do limite $\lim_{\ P\ \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} f(P_i) \cdot \Delta_i S$		
	τ_{86} : Definir o limite encontrado como uma Integral dupla. $\iint_S f(\theta, r) dS = L$, ou lembrando que $\iint_S f(\theta, r) r dr d\theta$.		

Fonte: A autora, 2021

Passamos à próxima questão técnica.

Questão Técnica Q_9 : Como podemos interpretar geometricamente uma integral em coordenadas polares?

Resposta à Q_9 :

Da questão teórica QT_6 , a interpretação geométrica da integral em coordenadas polares é a mesma que em coordenadas cartesianas, se $f(\theta, r) \geq 0$ sobre a região S , a integral representa a medida do volume do sólido sob o gráfico da função $z = f(\theta, r)$ no domínio S .

Se $f(\theta, r) = 1$, a integral mede a área da região S :

$$\text{área} = \iint_S r dr d\theta.$$

Quadro 34 – Praxeologia usada na questão técnica Q_9

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
	τ_{87} : Comparar a interpretação geométrica da integral dupla em uma região polar com a interpretação geométrica de uma integral em uma		

T_{15} : Interpretar geometricamente uma integral dupla em uma região polar.	região cartesiana.	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_3 : Integral Dupla θ_5 : Limite de funções reais de duas variáveis reais θ_{10} : Sistema de coordenadas polares	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1 : Funções Θ_3 : Integral Θ_4 : Limite Θ_5 : Superfícies e regiões polares
	τ_{88} : Definir a medida do volume de um sólido em uma região polar como uma integral dupla.		
	τ_{89} : Concluir que a interpretação geométrica da integral em coordenadas polares é a mesma que em coordenadas cartesianas, se $f(\theta, r) \geq 0$ sobre a região S , a integral representa a medida do volume do sólido sob o gráfico da função $z = f(\theta, r)$ no domínio S . Se $f(\theta, r) = 1$, a integral mede a área da região S : $\text{área} = \iint_S r dr d\theta.$		

Fonte: A autora, 2021

Apresentamos a questão técnica 10.

Questão Técnica 10 (Q_{10}):

Como podemos calcular a integral dupla em coordenadas polares?

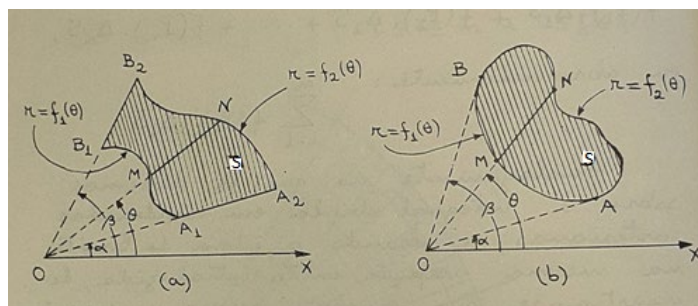
Resposta à Q_{10} (elaborada a partir de Judce (1978)):

Dada a região compacta S , ilustrada na Figura 40, o contorno de S é a curva fechada $A_1A_2B_2A_1$, formada pelos segmentos de reta A_1A_2 (ao longo do qual a coordenada θ é constantemente igual a α) e B_1B_2 (ao longo do qual θ é constantemente igual a β), e pelos arcos A_2B_2 (de equação polar $r = f_2(\theta)$) e A_1B_1 (de equação polar $r = f_1(\theta)$). Podemos decompor a integral da função contínua f sobre a região S da seguinte forma:

$$\iint_D F(\theta, r) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} F(\theta, r) r dr \right) d\theta$$

Fixando o valor de θ , sendo $\theta \in [\alpha, \beta]$, devemos integrar a $rf(\theta, r)$ em relação a r , desde $OM = f_1(\theta)$ até $O = f_2(\theta)$, a seguir, a função de θ obtida na primeira integração deve ser integrada no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Figura 40 – Ilustração das regiões de integração



Fonte: Judce, 1978, p. 290

De maneira análoga, podemos aplicar esse processo sobre regiões como a que está ilustrada na Figura 40, em que o contorno dos segmentos de reta A_1A_2 e B_1B_2 se reduz respectivamente aos pontos A e B .

Quadro 35 – Praxeologia usada na questão técnica Q_9

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_{15} : Interpretar geometricamente uma integral dupla em uma região polar.	τ_{87} : Comparar a interpretação geométrica da integral dupla em uma região polar com a interpretação geométrica de uma integral em uma região cartesiana.		
	τ_{88} : Definir a medida do volume de um sólido em uma região polar como uma integral dupla.	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_3 : Integral Dupla θ_5 : Limite de funções reais de duas variáveis reais θ_{10} : Sistema de coordenadas polares	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1 : Funções Θ_3 : Integral Θ_4 : Limite Θ_5 : Superfícies e regiões polares
	τ_{89} : Concluir que a interpretação geométrica da integral em coordenadas polares é a mesma que em coordenadas cartesianas, se $f(\theta, r) \geq 0$ sobre a região S , a integral representa a medida do volume do sólido sob o gráfico da função $z = f(\theta, r)$ no domínio S . Se $f(\theta, r) = 1$, a integral mede a área da região S : $\text{área} = \iint_S r dr d\theta.$		

Fonte: A autora, 2021

As próximas questões se referem a algumas aplicações das ID em contextos da Física.

Questão Teórica (QT_8):

Como podemos definir o *Centro de Gravidade de um Corpo*, que elementos o compõem e como o expressamos matematicamente?

Resposta à QT₈:

De acordo com Granville, Smith e Longley (1961), o centro de gravidade de um corpo (também conhecido como *baricentro*, *ponto de equilíbrio* ou *centro de massa*) se trata de um “local” no qual todas as partículas de um dado objeto estão distribuídas. Isso significa que se um corpo fosse “suportado” pelo centro de gravidade ele estaria em equilíbrio.

Denominamos de centro de gravidade o ponto de um determinado eixo de referência de coordenada x em que a soma dos momentos de um sistema é nula (P). Se a aceleração da gravidade for constante em todo o sistema, esse ponto coincide com o centro de massa do corpo.

Para responder a essa questão acerca dos elementos que compõem o *Centro de Gravidade de um Corpo*, precisamos definir um ponto material. Para isso, vamos considerar um número finito de pontos do plano: $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ que sejam dotados das suas respectivas massas: $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Um ponto dotado de massa é definido como ponto material.

Agora que já sabemos o que é um ponto material, vamos considerar um sistema de coordenadas cartesianas no plano e $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Se multiplicarmos a massa de cada ponto por sua respectiva abscissa, a soma dos produtos encontrados será assim representada:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = \sum_{i=1}^n m_ix_i.$$

Essa soma é, por definição, segundo Judce (1978), o *momento estático do sistema de pontos materiais em relação ao eixo OY*.

De maneira análoga, o autor afirma que podemos inferir que a soma:

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n = \sum_{i=1}^n m_iy_i$$

é o momento estático do sistema de pontos materiais em relação ao eixo OX.

A massa total do sistema, denotada por M é dada pela soma:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i,$$

em que $m_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, de onde podemos inferir que $M > 0$.

Segundo Judce (1978), o *centro de gravidade* do dito sistema de pontos ao ponto $G = (\bar{x}, \bar{y})$ é assim definido:

$$M\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

Portanto, as coordenadas do centro de gravidade do sistema são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}.$$

Vamos encontrar as coordenadas do centro de gravidade de uma placa de espessura desprezível, comparando-a a uma região do plano.

Quadro 36 – Praxeologia usada na questão teórica Q_8

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_{16} : Definir Centro de Gravidade de um Corpo.	τ_{93} : Considerar um número finito de pontos do plano: $P_1, P_2, \dots, P_n$ que sejam dotados das suas respectivas massas: $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$.	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_4 : Sistema de Coordenadas tridimensional θ_{11} : Ponto material θ_{12} : Momento estático θ_{13} : Centro de Gravidade	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) θ_1 : Funções θ_6 : Conceitos de Mecânica Geral
	τ_{94} : Definir um ponto material.		
	τ_{95} : Considerar um sistema de coordenadas cartesianas no plano e $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.		
	τ_{96} : Multiplicar a massa de cada ponto por sua respectiva abscissa		
	τ_{97} : Definir momento estático do sistema de pontos materiais em relação ao eixo OY como: $m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = \sum_{i=1}^n m_i x_i$.		
	τ_{98} : Definir momento estático do sistema de pontos materiais em relação ao eixo OX como: $m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n = \sum_{i=1}^n m_i y_i$.		
	τ_{99} : Definir centro de gravidade do dito sistema de pontos ao ponto $G = (\bar{x}, \bar{y})$ é assim definido: $M\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i$.		
	τ_{100} : Explicitar as coordenadas do centro de gravidade do sistema por: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}$.		

Questão Técnica 11 (Q_{11}):

Como podemos encontrar as coordenadas do centro de gravidade de uma placa de espessura desprezível, comparando-a a uma região do plano xy , tendo como referência as questões em que relacionamos medidas de área e as integrais duplas?

Resposta à Q_{11} (elaborada a partir de Judge (1978)):

Vamos considerar uma região compacta S do plano xy que podemos comparar a uma placa de espessura desprezível, mas dotada de massa. A essa região *denominamos uma distribuição contínua de massa*.

A densidade da distribuição geralmente é variável, sendo calculada quando multiplicamos o valor da massa por unidade de área.

Se tomarmos $\delta(x, y)$, a densidade no ponto genérico $P = (x, y) \in S$, e se considerarmos um elemento de superfície contendo P , de área $dS = dxdy$, a massa desse elemento é:

$$dM = \delta(x, y)dS = \delta(x, y)dxdy.$$

A massa total da região S é a soma de todas as massas elementares:

$$M = \iint_S \delta(x, y)dxdy.$$

Multiplicando a massa elementar dM pela abscissa do ponto P e somando todos os produtos assim encontrados, obtemos o momento estático da região S em relação ao eixo OY , dado por:

$$\iint_S x dM = \iint_S \delta(x, y)x dxdy,$$

analogamente, a integral:

$$\iint_S y dM = \iint_S \delta(x, y)y dxdy,$$

é o momento estático da região S em relação ao eixo OX .

O centro de gravidade da região S é o ponto $G = (\bar{x}, \bar{y})$ tal que:

$$M\bar{x} = \iint_S \delta(x,y)x dx dy,$$

$$M\bar{y} = \iint_S \delta(x,y)y dx dy.$$

Portanto, as coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ do centro de gravidade são:

$$\bar{x} = \frac{\iint_S \delta(x,y)x dx dy}{\iint_S \delta(x,y) dx dy} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_S \delta(x,y)y dx dy}{\iint_S \delta(x,y) dx dy}.$$

Nos casos em que aparecem mais frequentemente, a placa é de material homogêneo, isto é, a densidade $\delta(x,y)$ é constante e as coordenadas do centro de gravidade são:

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x dx dy}{\iint_S dx dy} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y dx dy}{\iint_S dx dy}.$$

As expressões que permitem obter as coordenadas do centro de gravidade em um caso geral e aquelas relativas às situações mais frequentes explicitam que os valores dessas coordenadas dependem sempre da geometria da região S . Quando a densidade é constante, o centro de gravidade não depende dela, mas apenas da geometria da região S . Costumamos, então, dizer que G é o centro de gravidade da região S considerada apenas como superfície.

Em Mecânica, um conceito importante é o de Momento de Inércia de um sistema em relação ao eixo ou à origem de um sistema de eixos cartesianos. As próximas questões dizem respeito a isso.

Quadro 37 – Praxeologia usada na questão técnica Q_{11}

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_{16} : Explicitar as	τ_{101} : Expressar a densidade de massa por: $dM = \delta(x,y)dS = \delta(x,y)dx dy$.		
	τ_{102} : Definir a massa total da região considerada por uma integral dupla $M = \iint_S \delta(x,y)dx dy$.		

coordenadas do centro de gravidade de uma placa de espessura desprezível, comparando-a a uma região do plano xy .	τ_{103} : Multiplicar a massa elementar dM pela abscissa do ponto P .	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_3 : Integral Dupla θ_4 : Sistema de Coordenadas tridimensional θ_{11} : Ponto material θ_{12} : Momento estático θ_{13} : Centro de Gravidade	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1 : Funções Θ_3 : Integral Θ_6 : Conceitos de Mecânica Geral
	τ_{104} : Explicitar o momento estático da região S em relação ao eixo OY dado por: $\iint_S x dM = \iint_S \delta(x,y) x dx dy.$		
	τ_{105} : Encontrar o momento estático da região S em relação ao eixo OX dado por: $\iint_S x dM = \iint_S \delta(x,y) x dx dy.$		
	τ_{105} : Definir o centro de gravidade da região S é o ponto $G = (\bar{x}, \bar{y})$ por $M\bar{x} = \iint_S \delta(x,y) x dx dy,$ $M\bar{y} = \iint_S \delta(x,y) y dx dy.$		
	τ_{107} : Concluir que as coordenadas do centro de gravidade são: $\bar{x} = \frac{\iint_S \delta(x,y) x dx dy}{\iint_S \delta(x,y) dx dy} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_S \delta(x,y) y dx dy}{\iint_S \delta(x,y) dx dy}.$		
	τ_{108} : Concluir que, se a placa é de material homogêneo, $\bar{x} = \frac{\iint_S x dx dy}{\iint_S dx dy} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y dx dy}{\iint_S dx dy}.$		

Fonte: A autora, 2021

Questão Teórica (QT_9):

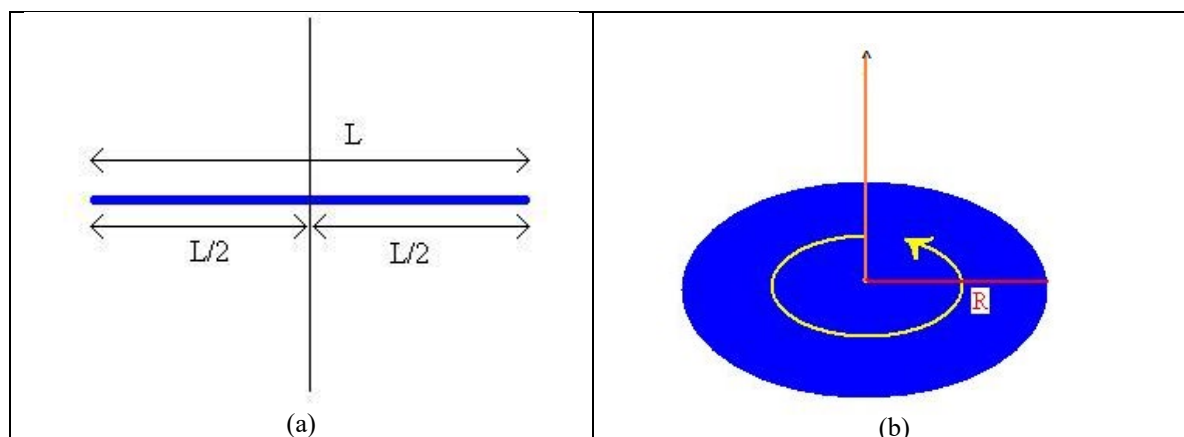
Qual o significado de *Momento de Inércia*?

Resposta à QT_9 :

De acordo com Halliday, Resnik e Krane (1996), em um movimento rotacional está presente uma *grandeza física* que se associa à *inércia* de rotação a qual designamos por *Momento de Inércia*. Isso quer dizer que existe uma resistência à mudança no movimento rotacional, da mesma forma que um corpo, considerando a sua massa, apresenta uma tendência de permanecer em seu estado inicial de movimento com uma velocidade constante, que inclusive pode ser zero, no caso em que o somatório das forças atuantes é nulo. Podemos, então, dizer que o Momento de Inércia de um corpo massivo é a resistência à mudança em sua *velocidade angular* considerando um movimento de rotação.

A Figura 41 ilustra movimentos de rotação em que o Momento de Inércia está presente.

Figura 41 - (a) Representação de uma barra de massa m e comprimento L , fixo em seu centro o eixo em torno do qual ela pode executar movimento rotacional; (b) Representação de um disco centralizado em um eixo de rotação



Fonte: Kítor³³, 2021

Quadro 38 – Praxeologia usada na questão teórica QT_9

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_{15} : Definir Momento de Inércia.	τ_{107} : Apresentar a definição de Momento de Inércia.	θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais θ_4 : Sistema de Coordenadas tridimensional	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1 : Funções Θ_5 : Superfícies e regiões polares Θ_6 : Conceitos de Mecânica Geral

Fonte: A autora, 2021

Questão Teórica (QT_{10}):

Como podemos definir e expressar matematicamente o *Momento de Inércia de um sistema de pontos em relação a um eixo*?

Resposta à QT_{10} (elaborada a partir de Judce (1978)):

Consideremos o sistema (finito) de pontos materiais: $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ de massas respectivas: $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, situadas no plano. Seja $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas dado. Se $\underline{g}$ é uma reta (eixo) do plano e se r_i é a distância do ponto P_i a essa reta, chamamos *Momento de Inércia do sistema de pontos em relação ao eixo $\underline{g}$* à soma dos produtos das massas m_i pelos quadrados de suas distâncias r_i a esse eixo. Designamos por I o momento de inércia, temos:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2.$$

Ou:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

³³ KÍTOR, G. L. **Momento de Inércia**. InfoEscola, 2021. Disponível em: <https://www.infoescola.com/mecanica/momento-de-inercia/>. Acesso em 20 out. 2021.

Portanto, o momento de inércia do sistema em relação ao eixo OY é:

$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 ,$$

e o momento de inércia do sistema em relação ao eixo OX

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i |y_i|^2 = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 .$$

Somando esses dois momentos, temos:

$$I_x + I_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) .$$

Observemos que $x_i^2 + y_i^2$ é o quadrado da distância do ponto P_i a origem de coordenadas O de coordenadas. A soma que encontramos diz-se momento de inércia do sistema de pontos em relação à origem; indicando-o por I_0 , resulta $I_0 = I_x + I_y$. (JUDCE, 1978, pp. 275-276)

Quadro 39 – Praxeologia usada na questão teórica QT_{10}

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T_{16}: Expressar matematicamente o Momento de Inércia de um sistema de pontos em relação a um eixo.	τ_{93}: Considerar um número finito de pontos do plano: $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ que sejam dotados das suas respectivas massas: $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$.	θ_1: Funções reais de duas variáveis reais θ_4: Sistema de Coordenadas tridimensional θ_{11}: Ponto material θ_{13}: Centro de Gravidade θ_{14}: Momento de inércia	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ_1: Funções Θ_3: Integral Θ_6: Conceitos de Mecânica Geral
	τ_{07}: Considerar se $\underline{g}$ é uma reta (eixo) do plano e se r_i a distância do ponto P_i a essa reta.		
	τ_{108}: Definir Momento de Inércia do sistema de pontos em relação ao eixo $\underline{g}$ como à soma dos produtos das massas m_i pelos quadrados de suas distâncias r_i a esse eixo.		
	τ_{109}: Explicitar, matematicamente, Momento de Inércia, $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$.		
	τ_{110}: Explicitar, matematicamente, Momento de Inércia em relação ao eixo OY, como: $I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i ^2 = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$.		
	τ_{111}: Explicitar, matematicamente, Momento de Inércia em relação ao eixo OX como: $I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i ^2 = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$.		
	τ_{112}: Concluir que Momento de Inércia do sistema de pontos em relação à origem; indicando-o por I_0 resulta: $I_0 = I_x + I_y$.		

Fonte: A autora, 2021

Questão Teórica 11 (QT_{11}):

Como podemos definir o *Momento de Inércia de um sistema em relação a um eixo*, tendo como referência as questões em que relacionamos medidas de área e as integrais duplas?

Resposta à QT_{11} (elaborada a partir de Judce (1978)):

A definição de Momento de Inércia de um sistema em relação a um eixo pode ser estendida a uma distribuição contínua de massas no plano, se considerarmos uma região compacta S do plano e a imaginarmos como sendo uma placa de espessura desprezível, com densidade $\delta(x, y)$ no ponto genérico $P = (x, y)$, como fizemos na questão teórica QT_{10} .

Um elemento de superfície contendo P tem a área $dS = dxdy$, e a massa desse elemento é $dM = \delta(x, y)dxdy$. Os momentos de inércia da placa S em relação aos eixos OY e OX são, respectivamente:

$$I_y = \iint_S x^2 dM = S \quad e \quad I_x = \iint_S y^2 dM = \iint_S y^2 \delta(x, y) dxdy.$$

O Momento de Inércia da placa em relação à origem de coordenadas é:

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y) dxdy = I_x + I_y.$$

No caso de material homogêneo, a densidade δ é constante, logo:

$$I_y = \delta \iint_S x^2 dxdy,$$

$$I_x = \delta \iint_S y^2 dxdy.$$

E as integrais:

$$\iint_S x^2 dxdy \quad e \quad \iint_S y^2 dxdy$$

forneem os momentos de inércia da superfície S em relação aos eixos dos OY e dos OX , respectivamente, portanto:

$$I_y = \iint_S x^2 dx dy, I_x = \iint_S y^2 dx dy.$$

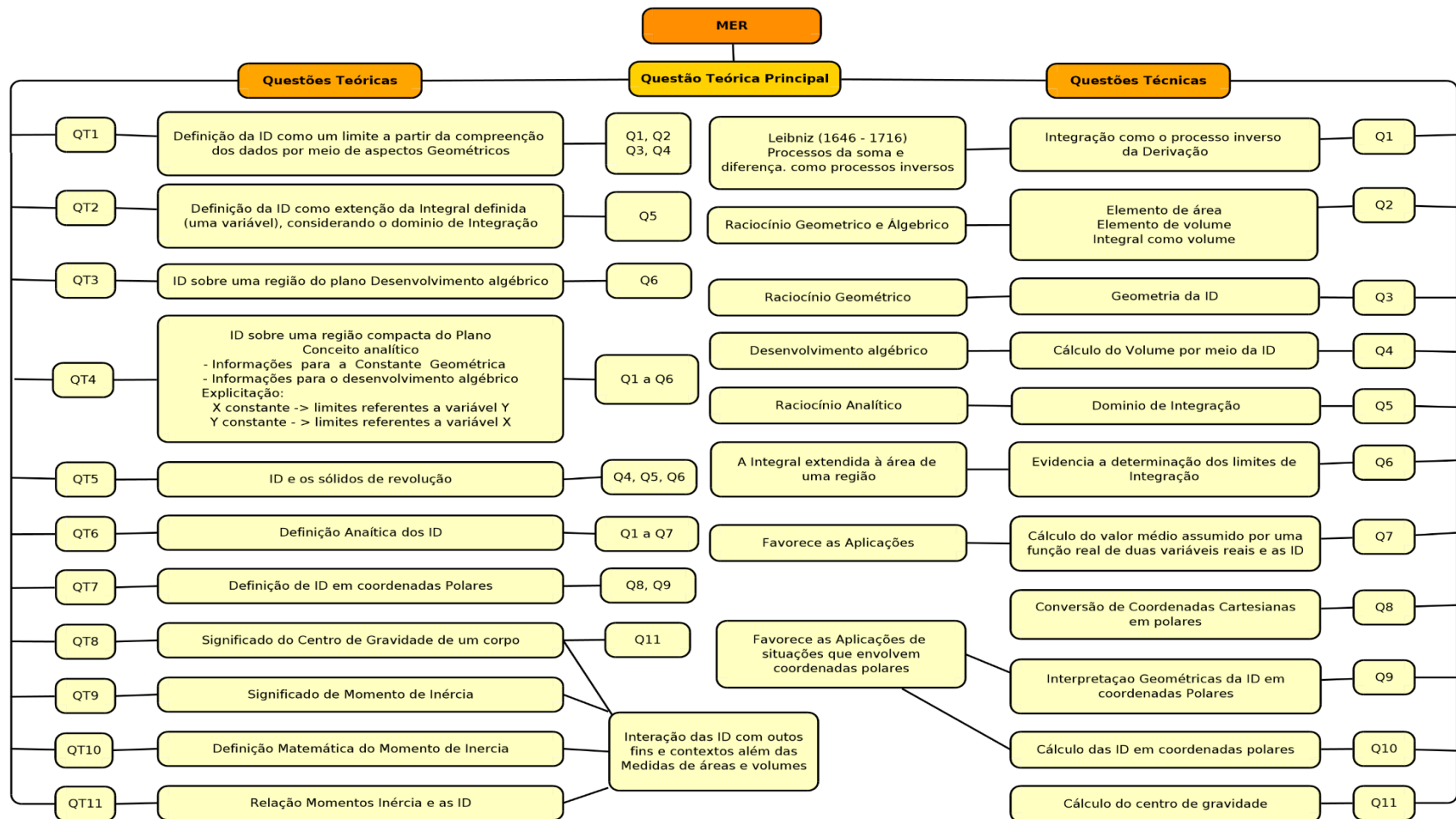
Analogamente, teremos:

$$I_0 = \iint (x^2 + y^2) dx dy.$$

Quadro 40 – Praxeologia usada na questão teórica QT₁₁

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T ₁₆ : Expressar matematicamente o Momento de Inércia de um sistema de pontos em relação a um eixo.	τ ₉₃ : Considerar uma região compacta S do plano e se a imaginarmos como sendo uma placa de espessura desprezível, com densidade $\delta(x, y)$ no ponto genérico $P = (x, y)$.	θ ₁ : Funções reais de duas variáveis reais θ ₄ : Sistema de Coordenadas tridimensional θ ₁₁ : Ponto material θ ₁₄ : Momento de inércia	(Cálculo, Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica) Θ ₁ : Funções Θ ₃ : Integral Θ ₆ : Conceitos de Mecânica Geral
	τ ₉₄ : Considerar que um elemento de superfície contendo P tem a área $dS = dx dy$, e a massa desse elemento é $dM = \delta(x, y) dx dy$.		
	τ ₉₅ : Definir Momento de Inércia da placa S em relação ao eixo OY como: $I_y = \iint_S x^2 dM = S$ e $I_x = \iint_S y^2 dM = \iint_S y^2 \delta(x, y) dx dy$.		
	τ ₉₅ : Definir Momento de Inércia da placa S em relação ao eixo OX Como: $I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y) dx dy = I_x + I_y$.		
	τ ₉₇ : Mostrar que Momento de Inércia da placa em relação à origem é: $I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y) dx dy = I_x + I_y$.		
	τ ₉₈ :: Mostrar que no caso de material homogêneo com densidade δ é constante, o Momento de Inércia é calculado por: $I_y = \iint_S x^2 dx dy,$ $I_x = \delta \iint_S y^2 dx dy.$		
	τ ₉₉ : Concluir que as integrais: $\iint_S x^2 dx dy$ e $\iint_S y^2 dx dy$ fornecem os momentos de inércia da superfície S em relação aos eixos dos OY e dos OX .		

Figura 42 – Síntese do MER



Fonte: A autora, 2021

É importante esclarecer que o MER foi elaborado de acordo com o que observamos no estudo epistemológico das ID que realizamos no capítulo 4, que também evidenciou outros objetos matemáticos que interagem no estudo dessas integrais, bem como contextos matemáticos e não matemáticos nos quais elas estão presentes. Assim, ilustramos no Quadro 42 esses objetos matemáticos e os contextos citados. Esclarecemos também que as ID apresentaram um importante papel no desenvolvimento da Matemática, a partir do século XVII, principalmente no que se refere às Funções Reais de Várias Variáveis Reais, Equações Diferenciais e as Integrais Triplas, e ainda, que em relação especialmente à Física e à Engenharia, a Integral Dupla contribuiu dando origem às estruturas, teoremas e teorias que refletiram no avanço da sociedade no decorrer do tempo.

Quadro 41 – Objetos matemáticos integrantes

Objetos Matemáticos que interagem no estudo das ID e os contextos não matemáticos das ID evidenciados no MER			
Números	Noções de quantidade, ordem e medida	Matemática: Número como medida de grandeza associado ao conceito de área e de volume.	Física: relacionado com as medidas, grandezas físicas escalares: massa, tempo, volume, Momento de Inércia, centro de gravidade, estudo analítico da transferência de calor. Geometria (plana, espacial): número como uma medida associada a uma grandeza, medida de área e medida de volume. Engenharia: área, volume, Momento de Inércia, centro de gravidade, estudo analítico da transferência de calor.
Funções reais de duas variáveis	Limites, derivadas parciais	Matemática: Uma função como uma relação de dependência e independência entre variáveis. A ID como um limite de funções de várias variáveis. A integração como a inversa da derivação considera o estudo das derivadas parciais.	Física: relacionadas com as massas, volume, Momento de Inércia, centro de gravidade, estudo analítico da transferência de calor. Geometria (plana, espacial): associadas à espaço tridimensional, cônicas, superfícies quádricas, área e volumes. Engenharia: área, volume, Momento de Inércia, centro de gravidade, estudo analítico da transferência de calor.
Superfícies	Cônicas e quádricas	Matemática: espaço tridimensional, cônicas, superfícies quádricas	Física: volume, Momento de Inércia, centro de gravidade, estudo analítico da transferência de calor. Geometria (plana, espacial, analítica): espaço tridimensional, cônicas, superfícies quádricas. Engenharia: área, volume, Momento de Inércia, centro de gravidade, estudo analítico da transferência de calor.
			Física: área, volume, Momento de Inércia, centro de gravidade, estudo analítico da transferência de calor.

Coordenadas	Cartesianas e polares.	Matemática: Cartesianas e polares	Geometria (plana, espacial, analítica): espaço tridimensional, cônicas, superfícies quádricas. Engenharia: área, volume, Momento de Inércia, centro de gravidade, estudo analítico da transferência de calor.
-------------	------------------------	--	--

Fonte: A autora, 2021

Portanto, as diferentes escolhas para o ensino das ID são influenciadas, por um lado, pelo contexto social da época associado aos interesses institucionais que incluem a apresentação dos conceitos por meio de seus diferentes tipos de representações (representação gráfica; representação analítica e representação algébrica) e interações entre elas, que refletem nas praxeologias utilizadas; e, por outro, pelos elementos de outros conteúdos matemáticos dos quais essas integrais são alimentadas, bem como por outras áreas científicas em que essas integrais estão a serviço.

Passamos então ao próximo capítulo em que apresentamos o estudo da dimensão econômica institucional do problema didático.

5 ESTUDO ECONÔMICO-INSTITUCIONAL DO PROBLEMA DIDÁTICO

No âmbito da TAD, uma instituição, conforme Chevallard (1991), é o dispositivo social que impõe às pessoas que ocupam uma posição em seu interior modos próprios de fazer e de pensar, com restrições e condições que influenciam a construção dos conceitos e propriedades que determinam a existência de um objeto de um conhecimento a ensinar. No desenvolvimento de uma investigação em Educação Matemática, pensamos em uma instituição constituída por elementos como: sociedade, livros didáticos, projetos pedagógicos, professores etc. Uma instituição de referência, segundo Henriques (2006), contém um desses elementos, e sua escolha depende do objeto matemático abordado e da problemática da investigação em função das inquietações levantadas pelo pesquisador.

Tendo em vista o problema didático elaborado nesta investigação, escolhemos a instituição de referência como *locus* desta investigação por oferecer o curso de Engenharia Civil, objeto de reflexão nesta tese.

Conforme vimos nos pressupostos teórico-metodológicos, é por meio do estudo da dimensão econômico-institucional do problema didático relacionado ao ensino de ID na Engenharia que evidenciamos o modo como elas são interpretadas na instituição de referência tanto do ponto de vista das praxeologias matemáticas quanto das praxeologias didáticas.

Neste capítulo, apresentamos o estudo da dimensão econômico-institucional realizado nesta investigação, com foco na observação e descrição das praxeologias didáticas e matemáticas acerca das ID, utilizando como referência o MER apresentado no capítulo anterior.

Para essas análises, desenvolvemos a Praxeologia de Investigação II, elaborada a partir da tarefa T_{ib1} : analisar de que maneira as Integrais Duplas no curso de Engenharia Civil passam por transformações para se adaptar a essa área de formação relacionada ao campo de conhecimento em que se insere a profissão do engenheiro civil, na qual a Matemática e, portanto, as Integrais Duplas são uma ferramenta, às necessidades sociais vinculadas a essa área.

Essa tarefa deu origem às subtarefas:

- ST_{ib1} : Analisar como, sob o ponto de vista da implementação da matriz curricular e dos programas de ensino, como está prevista a abordagem das Integrais Duplas;
- ST_{ib2} : Analisar de que maneira, sob o ponto de vista curricular, está prevista a abordagem das ID no curso de Engenharia Civil;

- ST_{ib3} : Analisar com que objetivo e de que maneira as Integrais Duplas são mobilizadas em situações de formação do engenheiro civil;
- ST_{ib4} : Sintetizar o Modelo Epistemológico Dominante (MED).

Assim, apresentamos, neste capítulo, o estudo econômico-institucional realizado, e nas seções seguintes, apresentamos o desenvolvimento das técnicas inerentes à Praxeologia de Investigação II, de forma a cumprir as tarefas e subtarefas vinculadas a ela, a qual foi sintetizada na Figura 43 e se fundamenta na articulação da TMCC com a TAD tomada como Praxeologia de Investigação Didática nesta investigação.

5.1 Técnica τ_{ib1}

O curso de Engenharia Civil da instituição de referência foi concebido em consonância com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para cursos de graduação em Engenharia, publicada na Resolução nº 11, de 11 de março de 2002 (ANEXO I). No segundo semestre de 2020, o Projeto Pedagógico do curso de Engenharia Civil (PPC/EC) foi reformulado para atender às novas DCN, publicadas na Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019 (ANEXO II), que se desenvolve dentro do contexto de formação de profissionais necessários à sociedade, cuja nova matriz curricular foi implementada a partir do primeiro semestre de 2021.

Tanto no PPC/EC anterior quanto no PPC/EC/2021, observamos que a instituição tem uma forte preocupação com a formação do estudante, voltada para sua atuação profissional e busca prepará-lo técnica e cientificamente com esse objetivo. O PPC/EC/2021:

[...] define a identidade formativa do Engenheiro Civil nos aspectos técnicos, humanista e científico, contemplando uma proposta curricular voltada para a construção do conhecimento, que responda às necessidades e problemas da sociedade e que seja capaz de formar um cidadão mais que meramente um profissional. [...] se propõe a discutir a inserção técnica e ética do engenheiro na sociedade moderna. [...] contém os princípios e diretrizes acadêmicas que definem os conhecimentos e saberes considerados indispensáveis, necessários à formação das competências.³⁴ estabelecidas a partir do perfil do egresso. [...] contempla a estrutura curricular, com destaque para metodologia e a integração disciplinar [...] (PPC/EC, 2021 p. 9).

No curso, é adotada como concepção de formação profissional a preparação voltada para o atendimento das demandas de um exercício profissional específico, com visão holística do mundo, fundamentada nos seguintes princípios:

- a - Concepção de competência, pressupondo o trabalho com as habilidades e competências, que devem refletir-se nos objetivos da formação, nos conteúdos e na organização institucional.
- b - Coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro profissional.
- c - Interdisciplinaridade manifesta no currículo de cada curso, abrangendo as diferentes dimensões, conceitual, procedimental e atitudinal, com os conteúdos sendo analisados e abordados de modo a formarem uma rede de significados.
- d - Avaliação Formativa, fundamentada na concepção de que avaliação se destina à análise da aprendizagem, de modo a refazer o processo e regular as ações da formação profissional; que se pretende avaliar não é o conhecimento adquirido, mas a capacidade de acioná-lo e de buscar outros para realizar o que é proposto.
- e - Pesquisa ou investigação, elemento essencial na formação profissional e se desenvolve no âmbito do trabalho; refere-se a uma atitude de busca e de desenvolvimento, que permite a autonomia na interpretação da realidade e que

³⁴ O PPC/EC/2021 adota como concepção de *Competência*, conforme Perrenoud e Magne (1999), “que pode ser entendida como uma capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiada em conhecimentos, mas sem limitar-se a eles” (PPC/EC, 2021 p. 36).

constitui seus objetos de ensino; a pesquisa está inserida em nossa proposta de trabalho nos projetos interdisciplinares, desde o primeiro semestre de cada curso.

f - Conhecimento experiencial se refere ao fato de que, para estar centrado na construção de competências, o conhecimento profissional deve-se reportar ao conjunto de problemas e interrogações que surgem nas situações do cotidiano; os conteúdos desse âmbito são as práticas que compõem a atuação dos profissionais de cada curso, tomadas como competências a serem desenvolvidas e como meio para o crescimento individual, uma vez que se referem a um trabalho que só se aprende fazendo (PPC/EC, 2021 p. 27).

Embora as DCN para graduação em Engenharia recomendem um currículo estruturado por competência, observamos que o PPC/EC/2021 não tem, de fato, sua estrutura curricular organizada nesses moldes, visto que as unidades curriculares são propostas por disciplinas teóricas que acontecem diluídas nos dois primeiros anos do curso, com início efetivo das práticas a partir do quinto semestre. Entretanto, as competências estão implícitas no PPC e se reverberam nos modos como são pensados os objetivos, os conteúdos e as situações de aprendizagem em cada disciplina, a partir do Plano de Ensino.

Durante o curso, desenvolvem-se projetos interdisciplinares semestrais com o propósito de contribuir para o desenvolvimento das competências previstas para cursos de Engenharia, além de contribuir para a desfragmentação entre as disciplinas oferecidas no curso, fazendo com que os conteúdos e as atividades didáticas se relacionem, por meio de um projeto que as interliguem na tentativa de que possuam uma intencionalidade comum.

Esses projetos, que se desenvolvem até o oitavo semestre do curso, são organizados por meio de um tema proposto no qual os estudantes, em conjunto com todos os professores do período, constroem um problema de caráter interdisciplinar, e a solução depende da aplicação prática de conteúdos de todas as disciplinas ministradas no semestre. Por meio da ementa dos Projetos Interdisciplinares, igual para todos os períodos, observamos que se configuram em uma proposta prática interdisciplinar elaborada coletivamente que busca aglutinar as dimensões da Aprendizagem Significativa de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980) e faz com que a interdisciplinaridade se materialize como um eixo de organização do currículo, ou dos saberes a serem ensinados e dos conhecimentos a serem construídos, contribuindo para abrir ainda mais as portas da sala de aula e construir pontes para todos os ambientes/espços que corroborem a aventura de aprendizagem dos estudantes, potencializando o que já vem sendo feito pelos professores. No currículo também está previsto o uso de outras metodologias ativas e recomenda que estejam presentes no desenvolvimento de todas as disciplinas do curso.

Quanto às duas matrizes curriculares em vigor, disponibilizadas no Anexo II desta tese, sendo a última válida para os estudantes com entrada no curso a partir de agosto de 2021 (Matriz

Curricular II), ambas têm sua integralização curricular dividida em núcleos de formação Básica, Profissional e Específica.

No que se refere ao estudo do Cálculo, o que muda em relação às duas matrizes é a forma de distribuição dos conteúdos nessas disciplinas, a carga horária e nomenclatura. Considerando a carga horária, na totalidade das horas destinadas ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral (I a IV), na Matriz Curricular II, houve uma diminuição de 80 horas em relação à matriz curricular vigente antes de 2021 (Matriz Curricular I). Isso se deve, segundo informação obtida em entrevista com o coordenador do curso.³⁵, principalmente, ao fato de a Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019, prever, no seu Art. 7º, descrito no Quadro 42 que os cursos de Engenharia devam possuir sistemas de nivelamento, visando à diminuição da retenção e da evasão do estudante, contemplado pela instituição de referência em disciplinas criadas e ministradas no eixo básico. Entre tais disciplinas, na Matriz Curricular II, está Matemática Pré-Cálculo, com uma carga horária de 40 horas, de caráter obrigatório, ministrada no primeiro período do curso, cujos conteúdos programáticos se referem aos conhecimentos construídos durante a formação do estudante na Educação Básica.

Quadro 42 – Art.7º da Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019

Art. 7º Com base no perfil dos seus ingressantes, o Projeto Pedagógico do Curso (PPC) deve prever os sistemas de acolhimento e nivelamento, visando à diminuição da retenção e da evasão, ao considerar: I - as necessidades de conhecimentos básicos que são pré-requisitos para o ingresso nas atividades do curso de graduação em Engenharia; II - a preparação pedagógica e psicopedagógica para o acompanhamento das atividades do curso de graduação em Engenharia; e III - a orientação para o ingressante, visando melhorar as suas condições de permanência no ambiente da educação superior.
--

Fonte: Brasil, 2019

Conforme observa-se no Quadro 43, nos objetos matemáticos estudados das disciplinas intituladas Cálculo Diferencial Integral I (aborda funções, limites, derivadas e aplicações), essa disciplina, na Matriz Curricular II, incorporou os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I e II da Matriz Curricular I e é ministrada no segundo período, contemplando, basicamente, os conteúdos referentes ao estudo dos limites, derivadas, integrais e aplicações das derivadas e integrais. Nas disciplinas Cálculo Diferencial e Integral III da Matriz Curricular I e Cálculo

³⁵ O coordenador do curso de Engenharia Civil da instituição de referência ocupa o cargo desde 2008 e hoje ministra apenas a disciplina de Sustentabilidade no Ciclo Básico dos cursos de Engenharia. É graduado em Engenharia Civil pela FUMEC, com Especialização em Gestão Empresarial pela Fundação Getúlio Vargas e Mestrado Profissional em Administração pela Faculdade Pedro Leopoldo. Tem experiência na área de Engenharia Civil, com ênfase em Construção Civil com foco em sustentabilidade, patologias, escassez hídrica, materiais de construção e inovação.

Diferencial e Integral II da Matriz Curricular II, ambas alocadas no terceiro período do curso e com carga horária de 80 horas, são estudados os conteúdos relativos às funções de várias variáveis, inclusive as aplicações das derivadas parciais e IM, modificando apenas a nomenclatura das disciplinas. Portanto, essa disciplina não foi afetada pela referida diminuição da carga horária, quanto aos conteúdos abordados.

Quadro 43 – Estrutura e Organização das disciplinas Matemáticas

Estrutura e Organização das disciplinas Matemáticas				
Matriz Curricular I – para os estudantes com entrada anterior a agosto de 2020	Disciplinas			
	1º Semestre	2º Semestre	3º Semestre	4º Semestre
	Cálculo Diferencial e Integral I 80 h	Cálculo Diferencial e Integral II 80 h	Cálculo Diferencial e Integral III 80 h	Cálculo IV – Equações Diferenciais 80 h
	Conteúdos Conceituais – Saberes			
	Números e Funções Limites e Continuidade Derivadas e Aplicações	Integral Métodos e Técnicas de Integração Cálculo de Medidas de Áreas e de Volumes; Aplicações na Engenharia Sequências e Séries	Funções de várias variáveis Derivadas parciais; Integral Dupla; Integral Tripla; Coordenadas Polares, Cilíndricas e esféricas Integral de linha e de superfície; Campos vetoriais	Equações Diferenciais de primeira ordem; Equações Diferenciais Lineares; Equações Diferenciais de segunda ordem; Transformadas de Laplace; Equações Diferenciais Parciais
Matriz Curricular II - em vigor para estudantes com entrada a partir de agosto de 2021	1º Semestre	2º Semestre	3º Semestre	4º Semestre
	Pré-Cálculo 40h	Cálculo Diferencial e Integral I 80 h	Cálculo Diferencial e Integral II 80 h	Cálculo III – Equações Diferenciais 80 h
	Conteúdos Conceituais - Saberes			
	Conjuntos e Aritmética Básica; Cálculo com Expressões Algébricas; Equações e Inequações; Funções;	Limites e Continuidade Derivadas e Aplicações Integral Métodos e Técnicas de Integração Cálculo de Áreas e Volumes; Aplicações na Engenharia Sequências e séries	Funções de várias variáveis Derivadas parciais; Integral Dupla; Integral Tripla; Coordenadas Polares, Cilíndricas e esféricas Integral de linha e de superfície; Campos vetoriais;	Equações Diferenciais de primeira ordem; Equações Diferenciais Lineares; Equações Diferenciais de segunda ordem; Transformadas de Laplace; Equações Diferenciais Parciais

Fonte: A autora, 2021

Assim, a disciplina matemática na qual as ID são estudadas se encontra alocada no núcleo de Formação Básica: acontece, em ambas as matrizes curriculares, durante o terceiro período do curso. Doravante, passaremos a nos referir a ela, neste texto, pela nomenclatura *Cálculo*, sem fazer distinção à qual matriz curricular estamos nos referindo. Esclarecemos que não há pré-requisitos para cursar nenhuma das disciplinas, conforme observado em ambos os PPC/EC.

Quanto à presença das ID em outras disciplinas, podemos citar que estão na disciplina de Geometria Descritiva e nas disciplinas que abordam o estudo da Física, entre elas, Mecânica Geral e Mecânica dos Fluidos.

Tanto em uma matriz curricular quanto na outra, observamos que as integrais aparecem como um dos objetos institucionais indispensáveis para a formação dos profissionais em Engenharia, pois é um tema que deve ser estudado por todo estudante da graduação em Engenharia da instituição. Observamos ainda que, na organização do Cálculo Diferencial e Integral, o estudo do nosso objeto matemático é realizado por meio da extensão do conhecimento em torno das integrais de funções reais de uma variável real às ID, assim sendo, essas integrais alimentam os objetos com os quais interagem.

Na organização dos cursos de Engenharia da instituição, todos os estudantes das diferentes habilitações em Engenharia cursam as disciplinas do núcleo comum (disciplinas do primeiro ao quarto períodos) juntos, portanto, mesmo que já tenha em mente qual habilitação pretende cursar, o estudante se matricula, de acordo com a Matriz Curricular I no curso de Engenharia Integrada, e, de acordo com a Matriz Curricular II, no Ciclo Básico das Engenharias. Quanto ao Plano de Ensino, no início de cada semestre letivo, os professores recebem um formulário, descrito no Quadro 44, das disciplinas as quais irão ministrar. Os campos do formulário já vêm preenchido com o nome da disciplina, ementa, critérios de avaliação e bibliografia básica e específica que não podem ser alterados pelo professor; os demais campos do formulário são preenchidos pelos professores em conformidade com o que propõe a instituição.

Os professores recebem também o objetivo da disciplina, mas não consta no Plano de Ensino, conforme o Quadro 44.

Quadro 44 – Formulário do Plano de Ensino

PLANO DE ENSINO-APRENDIZAGEM	
DISCIPLINA/ MÓDULO:	CURSO:
PERÍODO/ TURNO:	CARGA HORÁRIA:
PROFESSORA:	PERÍODO LETIVO:

I. EMENTA	
II. COMPETÊNCIAS (Capacidades)	
III. CONTEÚDOS	
CONTEÚDOS CONCEITUAIS (Saberes)	
CONTEÚDOS PROCEDIMENTAIS (Habilidades = saber fazer)	
CONTEÚDOS ATITUDINAIS (Saber ser)	
IV. METODOLOGIAS (Assinalar) ☐ PBL (Medicina) ☐ Projetos ☐ Aula invertida ☐ PPA (Participação e Produção em Aula) ☐ Metodologia 300 ☐ <i>Peerinstruction</i> ☐ Portfólio ☐ Aulas práticas em laboratório	☐ <i>Design Thinking</i> ☐ Aula expositiva dialogada ☐ Role play ☐ TBL ☐ Debate ☐ Seminário ☐ Mapa Conceitual Outras: _____
V. AVALIAÇÃO Prova Discursiva P1: 20 Pontos. Prova Objetiva: P2: 20 Pontos. Projeto Fase 1: 10 Pontos. Projeto Fase 2: 10 Pontos. PPA 01: 10 pontos. PPA 01: 10 pontos. PPA 01: 10 pontos. PPA 01: 10 pontos.	
VI. BIBLIOGRAFIA Bibliografia básica Bibliografia complementar	

Fonte: Instituição de Referência, 2021

Quadro 45 – Objetivo da Disciplina de Cálculo

Esta disciplina pretende dotar o estudante das ferramentas matemáticas básicas necessárias para a compreensão e solução de problemas da sua área de atuação, dominando também o uso de novas tecnologias. Desenvolver o raciocínio lógico e dedutivo para aplicar convenientemente as fórmulas matemáticas para o bom uso da Matemática. Proporcionar uma sólida formação básica, aliada às necessidades posteriores do curso. Capacitar o acadêmico na habilidade de análise crítica e resolução de problemas concretos, integrando conhecimentos multidisciplinares e viabilizando o estudo de modelos abstratos e sua extensão genérica a novos padrões e técnicas de resolução. Usar os conhecimentos básicos do Cálculo Diferencial e Integral, nos domínios da análise e da aplicação, a fim de resolver problemas de natureza física e geométrica no decorrer do curso de Engenharia e na vida profissional.

Fonte: Projeto Pedagógico do Curso de Engenharia Civil, 2020

Na ementa da disciplina de Cálculo, constam funções de várias variáveis, derivadas parciais, integração múltipla, coordenadas polares e cilíndricas, mudança de variável, integral de linha e de superfície, campos vetoriais, Teorema de Green, Teorema de Gauss, Teorema de Stokes. Observamos que o objeto em estudo nesta investigação está presente em grande parte dessa ementa, pois se faz vigente no cálculo de medidas de área de regiões planas e medidas de volume de sólidos, integrais duplas em coordenadas polares, no cálculo da medida de área de superfícies tridimensionais, integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas, mudança

de variáveis e cálculo vetorial: campos vetoriais, integrais curvilíneas, independência de caminhos, além de ser ferramenta para o Teorema de Green, Teorema de Gauss e Teorema de Stokes.

Para o desenvolvimento dessa ementa, o conteúdo programático vem organizado em unidades, nas quais o conteúdo de cada tópico é desenvolvido. O estudo referente às ID é realizado nas unidades IV, V e VI e organizado conforme mostrado no Quadro 46.

Quadro 46 – Organização dos tópicos referentes às IM

UNIDADE IV – INTEGRAL DUPLA 5.1 - A integral dupla 5.2 - Interpretação geométrica da integral dupla 5.3 - Propriedades 5.4 - Cálculo da integral dupla como uma integral iterada 5.5 - Mudança de variáveis em integrais duplas – coordenadas polares 5.6 - Aplicações UNIDADE V – INTEGRAL TRIPLA 6.1 - Definição e propriedades da integral tripla 6.2 - Cálculo da integral tripla como integrais iteradas 6.3 - Integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas 6.4 - Aplicações UNIDADE VI 7.1 - Campos vetoriais 7.2 - Integrais de linha 7.3 - Teorema de Green 7.4 - Integrais de Superfície 7.5 - Teorema de Stokes 7.6 - Aplicações
--

Fonte: Plano de Ensino de Cálculo, 2020

Entre as competências e habilidades previstas nas DCN (Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019) para a disciplina de Cálculo, foram apontadas no plano de ensino as descritas nos incisos I, II e V do Art. 4º que se refere ao perfil do egresso do curso de graduação em Engenharia, que são:

- I - formular e conceber soluções desejáveis de Engenharia, analisando e compreendendo os usuários dessas soluções e seu contexto, contribuindo para que o estudante tenha a habilidade de formular, de maneira ampla e sistêmica, questões de Engenharia, considerando o usuário e seu contexto, concebendo soluções criativas, bem como o uso de técnicas adequadas;
- II - analisar e compreender os fenômenos físicos e químicos por meio de modelos simbólicos, físicos e outros, verificados e validados por experimentação, contribuindo para que o estudante tenha a habilidade de:

- a) modelar os fenômenos, os sistemas físicos e químicos, utilizando as ferramentas matemáticas, estatísticas, computacionais e de simulação, entre outras;
- b) prever os resultados dos sistemas por meio dos modelos;
- c) conceber experimentos que gerem resultados reais para o comportamento dos fenômenos e sistemas em estudo.

V - comunicar-se eficazmente nas formas escrita, oral e gráfica, contribuindo para que o estudante construa a habilidade de se expressar adequadamente, seja na língua pátria ou em idioma diferente do Português, inclusive por meio do uso consistente das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), mantendo-se sempre atualizado em termos de métodos e tecnologias disponíveis.

Durante o desenvolvimento da disciplina, conforme entrevista com a professora³⁶, em consonância com as observações em relação ao plano de ensino, percebemos que ela faz uso de aulas expositivas dialogadas, de aulas com o uso das metodologias ativas: aula invertida; Participação e Produção em Aula (PPA); *Peer instruction* e Metodologia 300 (para recuperação de conteúdo e rendimento pelo acadêmico) e aulas práticas em laboratório virtual, principalmente, para facilitar a representação geométrica e visualização de regiões de integração pelos estudantes. Também busca trabalhar de forma contextualizada quando possível.

É importante esclarecer que, em razão da pandemia da COVID-19³⁷, a disciplina tem sido oferecida com o uso de Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), sendo que, em 2020, o ambiente utilizado foi a plataforma *Blackboard* associada à plataforma de videoconferência

³⁶ A professora da referida disciplina está vinculada à instituição de referência desde 2015, é Doutora em Educação Matemática pela PUC-SP, Mestre em Educação Matemática pela UFOP, Especialista em Matemática Superior pela Unimontes e Licenciada em Ciências com habilitação em Matemática também pela Unimontes. Atua nas áreas de Matemática e Educação Matemática. Na instituição de referência, ministra as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e de Geometria Analítica e Álgebra Linear. É pesquisadora em metodologias ativas para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral e temas referentes à formação de professores.

³⁷ A COVID-19 é uma doença infecciosa causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2). Em 30 de janeiro de 2020, a OMS declarou que o surto do novo coronavírus constituiu uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII) – o mais alto nível de alerta da Organização, conforme previsto no Regulamento Sanitário Internacional. Essa decisão buscou aprimorar a coordenação, a cooperação e a solidariedade global para interromper a propagação do vírus. Essa decisão aprimora a coordenação, a cooperação e a solidariedade global para interromper a propagação do vírus. A ESPII é considerada, nos termos do Regulamento Sanitário Internacional (RSI), um evento extraordinário que pode constituir um risco de saúde pública para outros países devido à disseminação internacional de doenças; e potencialmente requer uma resposta internacional coordenada e imediata. Disponível em: <https://www.paho.org/pt/covid19/historico-da-pandemia-covid-19>. Acesso em: 10 mar. 2021.

Collaborate e, no ano de 2021, o AVA *Canvas* associado à plataforma de videoconferência *Zoom*.

Quanto ao estudo das ID, a professora relata que inicia o conteúdo estendendo a noção intuitiva de partição em um intervalo real e da noção da soma de Riemann para partição em uma região do plano até definir as Integrais Duplas como o limite de somas infinitas e desenvolver todo o estudo acerca dessas integrais. Em seguida, faz o estudo delas, interpretadas sobre retângulos e amplia para regiões gerais, além de aplicá-las no cálculo de medidas de áreas de superfícies e de volumes de sólidos para, posteriormente, iniciar seu estudo em coordenadas polares e finalizar com aplicações por meio da resolução de problemas que, geralmente, são os propostos no próprio livro didático adotado ou por solicitação do Projeto Interdisciplinar. Entre essas aplicações, a professora destaca “massa e momentos”.

Os elementos destacam o saber, o saber-fazer e as atitudes que devem ser desenvolvidos ou mobilizados pelo estudante no decorrer do estudo das disciplinas. Quanto à disciplina de Cálculo, os conhecimentos referentes ao nosso objeto de estudo são a Integral Dupla, tratada tanto em coordenadas cartesianas quanto em coordenadas polares, além de algumas aplicações relacionadas a esse objeto matemático.

Finalmente, os conteúdos atitudinais são contributivos na formação profissional do estudante, concernentes ao desenvolvimento de atitudes éticas e sociais, como autoconfiança; autonomia (pensar e se posicionar de modo crítico) na realização das atividades e na tomada de decisões, no aspecto profissional; cooperação com iniciativa e responsabilidade nas tarefas compartilhadas; ética nas relações interpessoais; participação ativa e responsável nas aulas e atividades; respeito às demais pessoas e as suas opiniões e ideias, à vida, às diferenças/alteridade, às instituições e regras institucionais; responsabilidade social; superação de dificuldades; tolerância às diferenças; valorização da ética nas relações; valorização do trabalho em grupo.

Quanto ao processo avaliativo, é realizado por meio das atividades de participação e produção dos estudantes durante a aula, denominadas *Participação e Produção na Aula (PPA)*; uma prova objetiva (P1) e uma prova discursiva (P2), aplicadas de acordo com as datas previstas no calendário acadêmico construído pela Pró-Reitoria de Ensino, além da participação e envolvimento do estudante no projeto interdisciplinar.

As bibliografias básica e complementar utilizadas são as destacadas no Quadro 47, mas é importante esclarecer que, segundo a professora da disciplina, a obra realmente utilizada como referência é a escrita por James Stewart (2014), cuja escolha se justifica, na visão da docente,

pelo fato de ter sido escrita levando o estudante a descobrir e apreciar a beleza do Cálculo, com uma linguagem clara e de fácil acesso, além de se encontrar em um número expressivo na biblioteca. A professora também informou que, em tempos de pandemia, essa obra foi disponibilizada aos estudantes no formato *e-book*.

Quadro 47 – Bibliografias Básica e Complementar da disciplina de Cálculo

VI. BIBLIOGRAFIA

Bibliografia básica

STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 2. EZ2 Tradução. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. Vols. 2. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2013.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com geometria analítica**. 5. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2014.

Bibliografia complementar

FLEMMING, D.M.; CONÇALVES, M. B. **Cálculo B – Funções, Limite, Derivação, Integração**. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 2000.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 4. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HIMONAS, A.; HOWARD, A. **Cálculo: conceitos e aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 2. 3. ed. São Paulo: Harper Row, 1994.

Fonte: Plano de Ensino da Disciplina de Cálculo do Curso de Engenharia, 2020

A análise realizada respondeu às questões propostas na introdução deste capítulo, visto que revelou como está organizada a estrutura curricular do curso de Engenharia Civil; como a disciplina na qual as Integrais Duplas se desenvolvem acontece no âmbito da instituição na qual a investigação foi realizada; para quais estudantes ela é ministrada – se apenas para os da Engenharia Civil ou conjuntamente para estudantes de outros cursos –; revelou o momento do curso em que a disciplina é ofertada; esclareceu quanto à questão dos pré-requisitos; os elementos de sua ementa; os conteúdos programáticos; as estratégias de ensino utilizadas pelos professores; a avaliação e, por fim, evidenciou as referências bibliográficas utilizadas.

Confrontando a análise até aqui realizada com o MER elaborado, concluímos que:

- o conteúdo programático das ID aparece vinculado ao estudo das funções reais de várias variáveis reais. Quanto ao MER, vimos que a intensificação do estudo dessas funções se deu a partir do século XVII, contribuindo expressivamente para o desenvolvimento do Cálculo de várias variáveis e, consequentemente, para o estudo das Integrais Duplas. Entretanto, as integrais também foram abordadas em momentos nos quais as funções de várias variáveis não estavam ainda consolidadas, sendo associadas ao método inverso daquele utilizado para calcular quantidades diferenciais. Nas praxeologias observadas na maioria das questões elaboradas, no MER, as funções de várias variáveis estão

sempre presentes, alimentando o estudo das Integrais Duplas, assim como observado nos documentos analisados nesta seção:

- a organização didática proposta para o trabalho com integrais nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral se estende de Integrais Simples a Integrais Múltiplas; no MER esse aspecto foi observado na Questão Teórica 2;
- as técnicas de cálculo das ID aparecem na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III e estão relacionadas às tarefas de cálculos com o objetivo de desenvolver a habilidade de “calcular”, no sentido algébrico, essas integrais; de calcular medidas de áreas de superfícies e de volumes; de resolver problemas aplicados propostos no próprio livro didático adotado ou por solicitação do Projeto Interdisciplinar, destacando as tarefas relacionadas a cálculo de medidas de centros de massa e momentos de inércia. No MER, essas técnicas e tarefas também se fizeram presentes;
- no contexto explicitado no item acima, o estudo das ID é importante para o raciocínio geométrico e, conseqüentemente, em relação à representação gráfica, portanto, técnicas de representação gráfica também estão presentes, assim como no MER;
- quanto à interação das ID com outras situações em outros contextos e em disciplinas não matemáticas, essa análise revelou que elas estão presentes em disciplinas que abordam o estudo da Física, entre elas, Mecânica Geral e Mecânica dos Fluidos, provavelmente devido ao lugar que as funções de várias variáveis e suas respectivas representações gráficas no plano bidimensional ou no espaço ocupam em problemas inerentes a elas que abordam massa, volume, Momento de Inércia, centro de gravidade e estudo do calor. No MER, verificamos que as ID, alimentadas pelas funções de várias variáveis, interagem com a Física em contextos que abordam massa, tempo, volume, Momento de Inércia, centro de gravidade;
- no curso de Engenharia, as disciplinas matemáticas que, além do Cálculo, integram a matriz curricular “antiga”, são as de Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL, Geometria Descritiva e Cálculo Numérico. Na matriz vigente a partir do primeiro semestre de 2021, a disciplina de Geometria Descritiva foi retirada e substituída por Desenho Técnico para Engenharia, ministrada por professores engenheiros. GAAL alimenta as Integrais Duplas, referente ao estudo das superfícies em geral e, principalmente, às quádricas e cônicas com ênfase nas suas representações geométricas e analíticas.

Na próxima seção, passamos à análise das seções que versam sobre as ID do livro didático adotado na disciplina de Cálculo na instituição de referência em resposta à técnica τ_{ib2} elaborada nessa praxeologia de investigação.

5.2 Técnica τ_{ib2}

São as práticas institucionais propostas em torno do estudo das ID que revelam as praxeologias matemáticas e didáticas correspondentes a esse estudo. Assim, propomo-nos a analisar, nesta seção, o livro *Cálculo*, de James Stewart, v. 2, 7. ed., publicado pela *Cengage Learning*, em 2014, texto adotado na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, com o intuito de evidenciar a organização praxeológica institucionalizada das ID; as organizações didáticas que emergem do livro como um documento institucional, além das condições e restrições presentes no ensino de integrais.

Assim, buscamos responder às questões: Como são apresentadas as definições? Que tipos de exemplos são trabalhados? Faz-se menção a teoremas? Os teoremas apresentados são demonstrados? São trabalhados exemplos de aplicações das ID em outras áreas de conhecimento? São contemplados aspectos históricos relacionados a essas integrais? Que relação tem as praxeologias matemáticas observadas em relação às questões elaboradas no MER?

Como ressaltamos na seção anterior, a escolha do livro para análise, entre os três citados no plano de ensino da disciplina como bibliografia básica, deu-se após realização de entrevista com a professora regente, que afirmou usar apenas esse título em suas aulas, podendo recorrer aos outros apenas para retirar exercícios para compor listas de atividades.

Detivemo-nos a analisar as seções do capítulo 15 do livro, observando a apresentação dos conteúdos, exemplos e grupos de exercícios, identificando as praxeologias utilizadas, comparando-as às identificadas no MER elaborado, pois o docente, ao adotar um livro didático como referência, “sinaliza que tomará como aporte as praxeologias que constam em suas páginas e as mesmas diretrizes que o autor escolheu. No entanto, haverá na transposição didática, no exercício da docência a sua própria organização didática” (BRANDÃO, 2021, p. 184). A análise do livro acrescida das demais análises das seções deste capítulo desta tese caracterizam o modelo dominante do ensino das ID na instituição de referência.

Apresentamos, inicialmente, uma descrição quanto à estrutura do livro didático adotado, seguida das análises das seções do capítulo 15 do livro citado, que trata, especificamente, do estudo das ID.

5.2.1 A estrutura do livro-didático adotado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III

O livro é composto por nove capítulos organizados como uma complementação do livro de Cálculo volume I, do mesmo autor. Ao final dos capítulos, apresenta o apêndice, que trata de alguns tópicos considerados requisitos para o desenvolvimento dos assuntos de cada capítulo e, ainda, o índice remissivo e a organização dos capítulos do volume I.

No prefácio, o autor esclarece que o livro foi escrito com a “intenção de transmitir ao estudante uma noção da utilidade do Cálculo e de desenvolver competência técnica” (STEWART, 2014, p. X), com ênfase na compreensão dos conceitos dos objetos matemáticos estudados.

O autor oferece “mídia e tecnologia de apoio ao texto que foram aprimoradas para conceder aos professores maior controle sobre o curso, oferecer uma ajuda extra para lidar com os diferentes níveis de preparação dos estudantes para o curso de Cálculo e apoiar a construção dos conceitos” (STEWART, 2014, p. X). Os recursos tecnológicos disponibilizados são: *Enhanced Web Assign* incluindo um *Cengage You Book* personalizável, revisão *Just in Time*, *Show Your Work*, *Answer Evaluator*, *Personalized Study Plan*, *Master Its*, vídeos de resolução, videocliques de aulas (com perguntas associadas) e *Visualizing Calculus* (animações *Tools for Enriching Calculus* – TEC – com perguntas associadas).³⁸

Quanto aos exercícios constantes no livro, segundo o autor, grande parte foi elaborada fundamentando-se em dados reais e se classificam em:

- *exercícios conceituais* quando buscam promover a compreensão dos conceitos por meio de situações-problema, de representações gráficas ou de tabelas que têm o propósito de explicar os conceitos básicos abordados na seção;
- *exercícios de dificuldade progressiva* apresentados por grupos progredindo de exercícios conceituais básicos e problemas que visam ao desenvolvimento de habilidades, até problemas mais desafiadores, envolvendo demonstrações e aplicações (STEWART, 2014, p. XI).

Alguns desses exercícios são precedidos por ícones a fim de indicar a necessidade do uso de uma ferramenta tecnológica para a sua solução. Assim, o símbolo  aparece em

³⁸ Auxílios visuais, Tópicos adicionais, *Weblinks* e *Homeworkhints* estão disponíveis no *site* do autor: www.stewartcalculus.com.

problemas nos quais são empregados recursos de um Sistema de Computação Algébrica (como o *Derive*, *Maple*, *Mathematica* ou o TI-89/92), e o símbolo  acompanha problemas para os quais existe a necessidade do uso de uma calculadora gráfica na sua resolução. Geralmente, isso se deve ao fato de as funções envolvidas nesses problemas requererem cálculos ou representações mais elaborados e complexos.

Além disso, Stewart (2014) propõe, ao longo das seções dos capítulos, projetos com a intenção de despertar o interesse dos estudantes, classificados em: *Projetos Aplicados*, que visam despertar a imaginação do estudante; *Projetos de Laboratório*, que envolvem o uso de um recurso tecnológico computacional no seu desenvolvimento; *Projetos Escritos*, que exigem que os estudantes estabeleçam comparação entre os métodos atuais e aqueles desenvolvidos pelos fundadores do Cálculo; e *Projetos de Descoberta*, que visam antecipar resultados a serem discutidos nos capítulos posteriores, além de incentivar a descoberta por meio do reconhecimento de padrões.

O autor, visando minimizar as dificuldades dos estudantes na resolução de problemas, propõe que sejam resolvidos por meio dos quatro estágios de resolução sugeridos em Polya: compreender o problema, construir um plano de ação, cumprir o plano, validar a solução. Ao final de cada capítulo, o autor inseriu as seções denominadas *Problemas Quentes*, apresentando exemplos de como lidar com situações de cálculo mais desafiadoras.

Nos exercícios mais elaborados, são observados símbolos de dicas que apontam minimamente o caminho para sua solução. As dicas aparecem na forma de questões que copiam a ação de um mediador do processo de ensino e são denotadas pelo autor como *Homework Hints*. Essas dicas também estão disponíveis para os estudantes no *site* do autor.

Em todo o livro, aparece uma margem larga, à direita ou à esquerda de cada página, utilizada para tabelas, notas e métodos históricos, comentários, curiosidades, as TEC e ilustrações coloridas numeradas de forma contínua, as quais o autor não esclarece qual o *software* utilizado para sua produção. Apenas nas páginas destinadas aos exercícios essa margem não foi observada.

Quanto à organização dos capítulos, iniciam-se com o título do conteúdo abordado, dividido em seções, nas quais apresentam, geralmente, uma situação modelada ou uma explicação introduzindo o objeto abordado, seguida de definições, teoremas e propriedades, entremeados de exemplos resolvidos.

Quanto aos teoremas, as demonstrações de muitos deles ou não são apresentadas ou estão disponíveis no apêndice no final do livro. Cada seção é finalizada com exercícios

conceituais e de dificuldade progressiva, cujos números ímpares têm as respostas fornecidas no final do livro. Alguns exercícios são organizados em grupos e aparentam ser de treinamento (fixação de procedimentos) pois, para a solução, é mobilizado um mesmo tipo de tarefa. Ao final de algumas seções, observamos os projetos aplicados e, ao final do capítulo, vimos atividades de revisão, propostas por meio de questões discursivas e enunciados de teoremas, questões de verdadeiro ou falso, exercícios teóricos, além dos problemas quentes.

5.2.2 Análise da Seção 15.1 do livro de Stewart (2014)

Na seção 15.1, intitulada *Integrais Duplas sobre Retângulos*, o autor introduz as Integrais Duplas de funções reais de duas variáveis reais definidas em uma região do plano- xy , estendendo a noção de integrais definidas de funções reais de uma variável real às ID. Para tanto, faz inicialmente uma revisão da definição de Integral Definida de funções reais de uma variável real como o limite da soma de Riemann. A partir daí, considerando uma função f , de duas variáveis, definida em um retângulo fechado:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in R^2 / a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$$

positiva e contínua em R , usa a noção intuitiva do cálculo da medida do volume do sólido S , cuja base é dada por R e altura obtida em f , usando a sequência de técnicas abaixo para realizar a tarefa: definir a Integral Dupla de f sobre o retângulo R .

- τ^1 particionar o intervalo $[a, b]$, escolhendo:

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < b,$$

em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{m}$;

- τ^2 particionar o intervalo $[c, d]$, escolhendo:

$$c < y_1 < y_2 < \dots < y_{i-1} < y_i < \dots < d,$$

E em n subintervalos $[y_{i-1}, y_i]$ de mesmo comprimento $\Delta y = \frac{d-c}{n}$;

- τ^3 : construir sub-retângulos obtidos por meio do traçado de uma rede de retas paralelas a partir dos pontos obtidos nas partições acima;
- τ^4 construir *caixas retangulares finas* ou *colunas* de mesma dimensão tendo como área da base os sub-retângulos discriminados no item anterior e altura definida por $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, dada pela escolha de ponto amostral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) na região R ;
- τ^5 aproximar medida do volume total do sólido S por meio da soma dupla
 $V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$, em que $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$. A soma é chamada de *Soma Dupla de Riemann*;
- τ^6 determinar a medida do volume do sólido S , por meio do limite
 $V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$;
- τ^7 definir a medida de volume de um sólido limitado pelo retângulo R e pela superfície $z = f(x, y)$ por uma integral dupla: $V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \int_R f(x, y) dA$.

Confrontando com o MER elaborado nesta investigação, observamos que a praxeologia matemática até aqui explicitada, menos a linguagem simbólica utilizada e o sólido de referência utilizado (no MER foi empregado um cilindro, já em Stewart (2014) um prisma de base retangular), apresenta argumentos da praxeologia identificada nas questões Q_2 , QT_1 , Q_5 e QT_2 , uma vez que, objetivando apresentar as ID, associa essas integrais à sua interpretação como a medida do volume de um sólido dado, estabelecendo as condições necessárias para que uma ID seja interpretada como uma medida de volume desse sólido, tendo como ponto de partida a extensão do estudo das integrais de funções reais de uma variável real ao estudo das ID, utilizando técnicas similares às explicitadas nessas questões.

E, ainda, quanto ao bloco teórico-tecnológico, esse é composto por funções reais de duas variáveis reais, Integral Dupla; sistema de coordenadas tridimensional, limite de funções reais de duas variáveis reais e teorias que remetem ao estudo de: funções, integral, limite e superfícies e regiões em R^3 , elementos implícitos ao estudo do Cálculo, geometria plana, geometria espacial e geometria analítica.

Ressaltamos que, durante todo esse processo, o autor traz ilustrações estabelecendo relações entre os registros de representação³⁹ algébrica e geométrica no contexto do estudo

³⁹ Registros de Representação aqui entendidos como em Duval (1995).

desse objeto matemático. Também foram observados registros numéricos, na introdução, por meio de tabelas e cálculo dos valores das medidas de área e volumes. Adiantamos que essa é uma prática realizada em todo o livro e não menos importante nesta seção. Isso nos leva a supor que existe uma preocupação do autor em fortalecer esses aspectos como componentes do conhecimento em torno das ID. As terminologias *partição* e *norma de uma partição* não são utilizadas pelo autor.

Embora o autor admita a continuidade de uma função como condição suficiente para a existência da integral, essa condição não é analisada na organização matemática para a introdução do objeto, também não é explorada nos exemplos ou nas tarefas propostas nos exercícios da seção. Além disso, os teoremas que explicam os resultados apresentados na praxeologia, não são demonstrados e a generalização de integrais para domínios ilimitados também não é discutida. As definições foram ilustradas na Figura 44.

Figura 44 – Definições de Integral Dupla e Volume

5 Definição A integral dupla de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

se esse limite existir.

Se $f(x, y) \geq 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 876

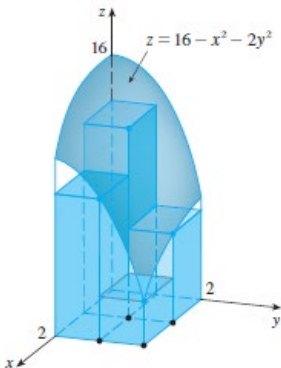
Os dois exemplos ilustrados na Figura 44 aparecem depois das definições, com o intuito de validar os resultados precedentes. Em ambos, os domínios de integração são fornecidos e caracterizados como uma praxeologia local⁴⁰, sendo que o primeiro solicita a tarefa T^1 : estimar a medida do volume do sólido limitado por uma região retangular e uma função f , conforme comando da questão e, o segundo solicita a tarefa T^2 : calcular a integral quando é dada uma região de integração retangular R do plano- xy e uma função de duas variáveis, conforme comando da questão, sendo dada para cada um uma região retangular específica do plano- xy e uma função de duas variáveis específica. As soluções são realizadas

⁴⁰ Segundo Chevallard (1999), uma *Praxeologia local* é aquela em que está presente apenas em uma tarefa.

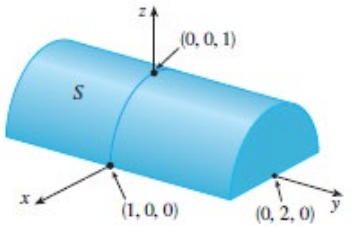
por meio de variações das técnicas (τ^1 a τ^7) adequadas⁴¹ a situações específicas, apoiadas pelos mesmos elementos do bloco do *logos* trazido na introdução da seção, que tem o propósito de conduzir à solução.

O Quadro 48 ilustra o bloco prático das praxeologias matemáticas dos exemplos citados. O bloco teórico-tecnológico tanto do exemplo 1 quanto do exemplo 2 é formado pelas tecnologias: θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais, θ_3 : Integral Dupla e θ_4 : Sistema de Coordenadas tridimensional e pelas teorias: Θ_1 : Funções, Θ_3 : Integral, Θ_4 : Limite e Θ_5 : Superfícies e regiões em R^3 , as quais também foram observadas nas QT_1 e Q_3 do MER construído nesta investigação.

Quadro 48 – Exemplos 1 e 2, Stewart (2014, p. 877)

EXEMPLO 1 Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do parabolóide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R em quatro quadrados iguais e escolha o ponto de amostragem como o canto superior direito de cada quadrado R_{ij}. Faça um esboço do sólido e das caixas retangulares aproximadoras.		
Tarefas		Técnicas
T^1: Estimar a medida do volume do sólido limitado por uma região retangular e uma função f, conforme comando da questão.	Desenvolvimento Algébrico $V \approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \Delta A$ $= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A$ $= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34$	Dividir R em 4 quadrados iguais e representar no plano xy a base do sólido considerando os limites de integração em x e em y;
	Representação geométrica. 	Escolher o ponto de amostragem como o canto superior direito de cada quadrado R_{ij}; Localizar as interseções de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ com os eixos coordenados xy, xz e yz; Representar em R^3 a superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$; Fazer um esboço do sólido destacando as caixas retangulares aproximadoras.

⁴¹ Nesta tese, para as análises praxeológicas das seções desse capítulo, optamos por tomar tarefas e técnicas gerais sem a necessidade de explicitar uma tarefa ou técnica específica elaborada a partir de um caso mais geral.

EXEMPLO 2 Se $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, calcule a integral		
$\iint_R \sqrt{1-x^2} \, dA$		
Tarefas		Técnica
T^2 : Calcular a integral quando é dada uma região de integração retangular R do plano- xy e uma função de duas variáveis, conforme comando da questão.	Desenvolvimento algébrico $\iint_R \sqrt{1-x^2} \, dA = \frac{1}{2} \pi (1)^2 \times 4 = 2\pi$	Calcular a integral dada.
	Representação geométrica 	Representar em R^3 as interseções de $z = (1,0,0)$; $(0,0,1)$; $(0,2,0)$. Representar no plano xy a base do sólido considerando os limites de integração em x e em y . Esboçar $z = 1 - x^2$. Fazer um esboço do sólido.

Fonte: A autora, 2021

A regra do ponto médio para o cálculo de Integrais Múltiplas, ilustrada na Figura 45, vem como uma opção na qual o ponto amostral da soma dupla de Riemann é tomado como um ponto central $(\bar{x}, \bar{y})$ de um sub-retângulo obtido como ponto médio dos respectivos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ e $[y_{j-1}, y_j]$, referidos na introdução dessa seção do livro.

Figura 45 – Regra do ponto médio para integrais duplas

Regra do Ponto Médio para Integrais Múltiplas

$$\iint_R f(x, y) \, dA \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A$$

onde $\bar{x}_i$ é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e $\bar{y}_j$ é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

Fonte: Stewart, 2014, p. 878

O Exemplo 3, com o domínio de integração definido, tem como tarefa T^3 : estimar o valor da integral usando a regra do ponto médio e os dados do comando da questão. O bloco prático da praxeologia matemática é exibida no Quadro 49. O bloco teórico-tecnológico é formado pelas tecnologias: θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais, θ_3 : Integral Dupla e θ_9 : Teorema do Valor médio de uma função real f de duas variáveis reais e pelas teorias: Θ_1 : Funções, Θ_3 : Integral, as quais foram observadas na questão técnica Q_7 do MER elaborado nesta investigação.

Embora a integral seja apresentada em linguagem algébrica, a sua resolução é feita por meio da elaboração de uma tabela numérica, mostrando como a medida da área converge para o valor da integral quando a quantidade de sub-retângulos obtidos com as partições dos intervalos dos eixos coordenados dados no domínio de integração é aumentada. Como a função de integração não é positiva no domínio de integração, o autor leva os estudantes a compreender que essa integral não pode, nesse momento, ser interpretada em termos de cálculo de medida de volume. A praxeologia matemática em que o cálculo de ID por meio da regra do ponto médio associada à construção de tabelas para a aproximação de integrais não foi contemplada no MER elaborado.

Quadro 49 – Exemplo 3, Stewart (2014, p. 878)

EXEMPLO 3 Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor da integral $\iint_R (x - 3y^2) dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.																
Tarefa		Técnica														
T^3 : Estimar o valor da integral usando a regra do ponto médio e os dados do comando da questão.	Desenvolvimento Algébrico. $\iint_R (x - 3y^2) dA \simeq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A$ Desenvolvimento numérico. <table><thead><tr><th>Número de sub-retângulos</th><th>Aproximação pela Regra do Ponto Médio</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>-11,5000</td></tr><tr><td>4</td><td>-11,8750</td></tr><tr><td>16</td><td>-11,9687</td></tr><tr><td>64</td><td>-11,9922</td></tr><tr><td>256</td><td>-11,9980</td></tr><tr><td>1 024</td><td>-11,9995</td></tr></tbody></table>	Número de sub-retângulos	Aproximação pela Regra do Ponto Médio	1	-11,5000	4	-11,8750	16	-11,9687	64	-11,9922	256	-11,9980	1 024	-11,9995	Expressar a integral $\iint_R (x - 3y^2) dA$, utilizando a regra do ponto médio. Construir a tabela a partir dos cálculos do ponto médio aumentando a quantidade de sub-retângulos obtidos com as partições dos intervalos dos eixos coordenados dados no domínio de integração.
Número de sub-retângulos	Aproximação pela Regra do Ponto Médio															
1	-11,5000															
4	-11,8750															
16	-11,9687															
64	-11,9922															
256	-11,9980															
1 024	-11,9995															

Fonte: A autora, 2021

Fazendo analogia à definição de valor médio de uma função real f de uma variável real definida em um intervalo $[a, b]$, traz a definição de valor médio de uma função real f de duas variáveis reais em um retângulo R contido em seu domínio de integração. É importante observar que o autor usa $A(R)$ como área da região R , quando, na verdade, $A(R)$ é a medida da área da região R , pois não faz sentido multiplicar uma grandeza por um número e, da mesma forma, conforme a Figura 46, não faz sentido dividir um número por uma grandeza. Essa notação pode fortalecer no estudante certa “confusão” entre área (grandeza) e medida da área (um número inteiro positivo).

Figura 46 – Definição de valor médio de uma função de duas variáveis reais

De modo semelhante, definimos o **valor médio** de uma função f de duas variáveis em um retângulo R contido em seu domínio como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) \, dA$$

onde $A(R)$ é a área de R .

$$A(R) \times f_{\text{med}} = \iint_R f(x, y) \, dA$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 878-879

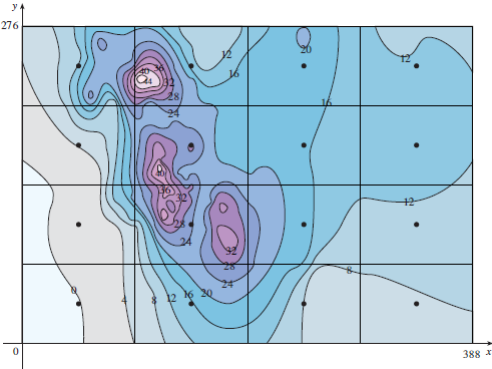
O autor não demonstra o teorema, apresenta-o vinculado ao contexto do cálculo da medida de volume em que a função f positiva no seu domínio de integração modela uma região montanhosa que pode ser estudada utilizando mapas de contorno associados à regra do ponto médio em uma situação de cálculo da medida do volume de precipitação de neve em dadas regiões.

No MER construído nesta investigação, a questão técnica Q_7 aborda o teorema do valor médio discutido a partir de uma extensão do teorema do valor médio quando definido no contexto das integrais de funções reais de uma variável real. A praxeologia utilizada na resolução dessa questão não vincula o estudo desse teorema a contextos fora da Matemática, como foi observado na organização didática do livro aqui analisado.

No Quadro 50, apresentamos o bloco prático da praxeologia matemática abordada no exemplo 4 do livro; quanto ao bloco teórico tecnológico, esse é formado pelos elementos: θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais, θ_3 : Integral Dupla e θ_9 : Teorema do Valor médio de uma função real f de duas variáveis reais e pelas teorias: Θ_1 : Funções, Θ_3 : Integral. Tais elementos subsidiaram o bloco da *práxis* de algumas questões do MER elaborado nesta investigação. Porém, a tecnologia *Mapas de Contorno* não foi observada no estudo epistemológico do problema didático desta investigação, motivo pelo qual não foi apresentada no MER construído nela.

Quadro 50 – Exemplo 4, Stewart (2014, p. 879)

EXEMPLO 4 O mapa de contorno na Figura 12 mostra a precipitação de neve, em polegadas, no estado do Colorado em 20 e 21 de dezembro de 2006. (O Estado tem a forma de um retângulo que mede 388 milhas de Oeste a Leste e 276 milhas do Sul ao Norte.) Use o mapa de contorno para estimar a queda de neve média em todo o Estado do Colorado naqueles dias.

Tarefas/Subtarefas		Técnica
T^3: Estimar o valor da integral usando a regra do ponto médio e os dados do comando da questão. ST^1: Estimar a medida do volume de neve que caiu em todo o Estado do Colorado em determinado período, utilizando regra do ponto médio.	 Desenvolvimento Algébrico. $\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A$ $\approx \Delta A [0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18,5 + 11 + 4,5 + 28 + 17 + 13,5 + 12 + 15 + 17,5 + 13]$ $= (6\,693)(207)$ $f_{\text{med}} \approx \frac{(6\,693)(207)}{(388)(276)} \approx 12,9$ Representação geométrica.	Retirar do mapa de contorno apresentado, as coordenadas dos pontos destacados. Calcular as coordenadas dos pontos médios. Calcular os valores da função dada nas coordenadas dos pontos médios. Expressar, o volume solicitado por meio da integral e de seu desenvolvimento algébrico segundo a regra do ponto médio.

Fonte: A autora, 2021

Por fim, o autor traz as propriedades das Integrais Duplas, Figura 47, ressaltando que são válidas porque “as somas duplas que as definem se comportam dessa forma” (STEWART, 2014, p. 880). Cita que as propriedades (7) e (8) são conhecidas como linearidade da integral, mas não propõe uma discussão que leve o estudante a compreender o sentido dessa linearidade. As propriedades não são demonstradas nesta seção. No MER não foram abordadas questões específicas para discutir as propriedades das Integrais Duplas, pois, no estudo epistemológico que realizamos, não encontramos problemas que tratavam especificamente dessas propriedades.

Figura 47 – Propriedades das integrais duplas

$$\boxed{7} \quad \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

$$\boxed{8} \quad \iint_R c f(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante}$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R , então

$$\boxed{9} \quad \iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 881

Os exercícios com características similares foram alocados em grupos cujas análises praxeológicas estão relacionadas no Quadro 51. O bloco teórico-tecnológico não consta no quadro, entretanto, os elementos que justificam as técnicas são funções reais de duas variáveis reais, Integral Dupla, sistema de coordenadas tridimensional, limite de funções reais de duas variáveis reais, Teorema do Valor Médio de uma função real f de duas variáveis reais e as teorias Funções, Integral, Limite e Superfícies e regiões em R^3 , teoremas e elementos implícitos ao estudo do Cálculo, Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica.

Os exercícios com características similares foram alocados em grupos e comentados no Quadro 51.

Quadro 51 – Análises dos exercícios da seção 15.1

Grupos	Exercícios	Análises
1	1 a 4	Possuem dificuldade progressiva e não contextualizados. São dadas as representações analíticas de funções de duas variáveis reais, com os seus respectivos domínios de validade postos. As funções são positivas em seus domínios, entretanto, essa condição não é explorada nos exercícios.
2	5 e 6	As representações algébricas dos problemas não são dadas, podendo ser obtidas por meio de análise das respectivas representações numéricas mostradas nas tabelas presentes nos exercícios como dados da questão. O problema 6 encontra-se aplicado num contexto de cálculo de volume de uma piscina.
3	7	7. Seja V o volume do sólido que está abaixo do gráfico de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ e acima do retângulo dado por $2 \leq x \leq 4$, $2 \leq y \leq 6$. Usamos as retas $x = 3$ e $y = 4$ para dividir R em sub-retângulos. Sejam L e U as somas de Riemann calculadas utilizando como pontos de amostragem os cantos inferiores esquerdos e os cantos superiores direitos, respectivamente. Sem calcular os números V, L e U, coloque-os em ordem crescente de valor e explique seu raciocínio. Fonte: Stewart, 2014, p. 881 Nesse exercício, as tarefas observadas são ordenar os valores numéricos que representam V, L e U e explicar o raciocínio utilizado sem a realização de cálculos. No comando da questão, os <i>números</i> devem ser entendidos como a medida do volume V e os valores das somas de <i>Riemann</i> L e U. O autor espera que os estudantes percebam que a medida de V e os valores de L e U tornam-se menores conforme nos afastamos da origem, portanto, em qualquer um dos sub-retângulos obtidos por meio da partição do retângulo R dado no domínio de integração, a função terá seu maior valor quando aplicada no ponto correspondente ao “canto esquerdo inferior” do sub-retângulo e seu menor valor quando aplicada no ponto correspondente ao “canto superior direito” e qualquer outro valor ficará entre esses dois. Então, usando esses sub-retângulos, temos $U < V < L$, independentemente de como R é decomposto em sub-retângulos. Para esse exercício o autor disponibiliza uma <i>Homework Hints</i>, uma dica, conforme apontamos nas análises da seção 5.4.1 desse capítulo.
4	8 9 10	Nos exercícios 8 e 9 são dados dois respectivos mapas de contorno, a função e a região de integração. Para o exercício 10, o mapa de contorno é apresentado com as isotermas em diferentes regiões do estado. A tarefa solicitada é estimar a temperatura média de uma região

		em um dado momento. O último exercício é reconhecido no nicho aplicativo da Física, pois aborda a termodinâmica.
5	11 a 14	De dificuldade progressiva, visam ao desenvolvimento da habilidade de calcular integrais duplas por meio da definição, reafirmar a relação entre a somas duplas de Riemann e o cálculo da medida do volume de um sólido se f é positiva no domínio de integração. Nesse grupo de exercícios, observamos a ênfase na análise da representação geométrica para auxiliar as respectivas resoluções.
6	15 e 16	Os exercícios desse grupo foram propostos para serem resolvidos por meio de um Sistema de Computação Algébrica (SCA) para gerar estimativas quando o domínio de integração de f for dividido em quantidades expressivas de sub-retângulos: 1, 4, 16, 64, 256 e 1024, conforme propõe a soma dupla de Riemann.
7	17 e 18	17. Se f é uma função constante, $f(x, y) = k$ e $R = [a, b] \times [c, d]$, mostre que $\iint_R k \, dA = k(b - a)(d - c).$ 18. Use o resultado do Exercício 17 para mostrar que $0 \leq \iint_R \sin \pi x \cos \pi y \, dA \leq \frac{1}{32}$ onde $R = [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Fonte: Stewart, 2014, p. 882 Esse grupo de exercício visa ao desenvolvimento da habilidade de generalizar um resultado e aplicá-lo. Para isso, a tarefa T6: demonstrar o resultado conforme os dados da questão é inserida na organização matemática. Entretanto, vale ressaltar que, no corpo do texto dessa seção, demonstrações não foram observadas e os resultados foram aceitos como verdade. O exercício 17, para o qual o autor disponibiliza uma <i>Homework Hints</i>, envolve apenas o desenvolvimento algébrico para a resolução do exercício, enquanto o exercício 18 solicita o uso do resultado obtido no exercício 17 para a sua solução.

Fonte: A autora, 2021

Observamos que as definições, exemplos, exercícios e métodos implementados nesta seção permitem ancorar o discurso teórico em bases intuitivas relativas ao cálculo de medidas de áreas e volumes por somas de Riemann. Visa, essencialmente, levar a uma organização didática bem determinada com tarefas organizadas cujas atividades vão das mais simples às mais complexas. A abordagem das Integrais Duplas parece estar ligada ao cálculo de medidas de áreas de superfícies planas e de volumes de sólidos, e o uso de modos de representação gráfica de funções reais de duas variáveis reais está diretamente relacionado. Observamos um breve discurso ancorado no nicho aplicativo da Física, com atividades nesse sentido trazidas no texto.

Quanto às técnicas solicitadas pelas tarefas nas praxeologias observadas, o estudante trabalha, principalmente, no desenvolvimento das Integrais Duplas por meios algébricos e numéricos e na leitura e interpretação de desenhos e representações gráficas para os quais as técnicas necessárias às suas construções não são abordadas nesta seção. Não foram observados aspectos históricos relacionados ao estudo do objeto matemático.

Do ponto de vista cognitivo em relação à introdução das Integrais Duplas pelo estudante, parece que o autor insiste em traçar uma organização didática que permite acentuar a discussão

de que o processo de construção dessa integral de Riemann deve levar o estudante a compreender que seu estudo depende da clareza das concepções de infinitesimal, finito e infinito.

Quanto à praxeologia didática, o autor organiza a seção por meio de uma introdução em que discorre a explicitação do conteúdo abordado, seguida de deduções ou demonstrações de fórmulas que são utilizadas em exemplos e, por fim, propõe exercícios a serem resolvidos pelos estudantes. Do ponto de vista do uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação que poderiam auxiliar, principalmente, nas construções de regiões de integração pelos estudantes e promover melhor compreensão do aspecto construcional dessas regiões e de suas relações com as suas representações algébricas, não está previsto na organização didática dessa seção. Adiantamos que a praxeologia didática do livro nesta seção é a mesma utilizada nas seções posteriores que retratam o ensino de Integrais Duplas, portanto, não nos referimos a elas nas seções que seguem a análise do livro nesta investigação.

5.2.3 Análise da Seção 15.2 do livro Stewart (2014)

Dada a complexidade de se calcular ID usando a definição, nesta seção, o autor mostra como expressar uma Integral Dupla como uma Integral Iterada, cujo valor pode ser obtido calculando-se duas Integrais Unidimensionais. Da mesma forma que na seção anterior, o autor admite a continuidade de uma função como condição suficiente para a existência da integral, mas não analisa essa condição nas discussões, exemplos, ou nas tarefas dos exercícios propostos. Ainda como na seção 15.1, procura relacionar as representações algébricas, numéricas e geométricas entre si, mas não oferece métodos que permitem ao estudante construir as representações geométricas. Nesta seção, observamos argumentos das questões teóricas QT_1 e QT_6 elaboradas no MER, além de outras questões técnicas que serão citadas oportunamente nesta seção.

O autor apresenta a definição de Integrais Duplas Iteradas chegando ao Teorema de Fubini⁴², sendo esse a principal teoria que subsidia as técnicas empregadas na resolução de exemplos e exercícios dessa seção do livro. O referido teorema é enunciado pelo autor logo após a discussão do Exemplo 1, cujo bloco da *práxis* está ilustrado no Quadro 52. No MER elaborado, as Integrais Duplas Iteradas, bem como a justificação das técnicas utilizadas na

⁴² A demonstração do Teorema de Fubini é apresentada no Anexo IV desta tese.

resolução dessa integral são tratadas na questão teórica QT_1 , entretanto, o *Teorema de Fubini* não foi mencionado.

Quadro 52 – Exemplo 1, Stewart (2014, p. 878)

EXEMPLO 1 Calcule o valor das integrais iteradas (a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$		
Tarefas/Subtarefas		Técnicas
T^7 : Calcular a integral dupla iterada conforme o enunciado da questão.	Desenvolvimento algébrico. Desenvolvimento numérico. $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx$ $= \int_0^3 \left[\frac{3}{2} x^2 \right] dx = \frac{x^3}{2} \Big _0^3 = \frac{27}{2}$ $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$ $= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \Big _1^2 = \frac{27}{2}$	Isolar nos colchetes a integral cujo domínio de integração está definido em $0 \leq y \leq 2$. Calcular a integral isolada, a integração em relação à variável y , considerando x uma constante real. Substituir os limites de integração na variável y , obtendo uma função contínua em relação a x . Integrar essa função em relação à variável x . Substituir os valores do limite de integração da variável x .

Fonte: Stewart, 2014, p. 878

O autor não apresenta a demonstração do Teorema de Fubini, contudo, a validade é justificada para o caso em que $f(x, y) \geq 0$. Com essa condição satisfeita, o autor argumenta que podemos interpretar a Integral Dupla $\iint_R f(x, y) dA$ como a medida do volume V do sólido S limitado pela região de integração R e pela superfície $z = f(x, y)$ dada pela função f . Tal medida pode ser calculada por:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

em que A representa a função que modela a área da secção transversal de S em um plano xy perpendicular ao eixo das abscissas. Melhor dizendo, modela a área de uma região representada

graficamente abaixo da curva C de equação $z = f(x, y)$, mantendo-se x constante e $c \leq y \leq d$, de onde se conclui que $A(x) = \int_c^d f(x, y) dA$, portanto:

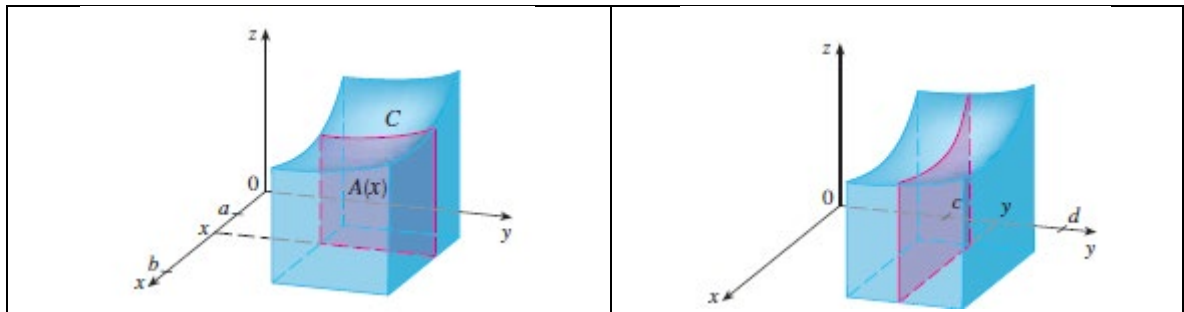
$$\iint_R f(x, y) dA = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Com o mesmo argumento, pode-se justificar que:

$$\int_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Essas argumentações são ilustradas pelo autor com as representações geométricas mostradas no Quadro 53, mas a discussão dos procedimentos para a construção não é abordada no texto.

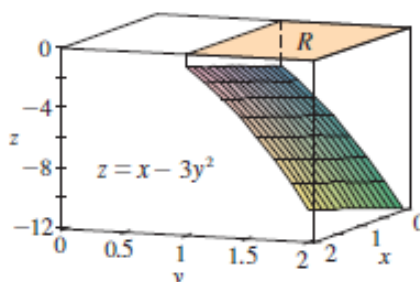
Quadro 53 – Figuras ilustrativas da justificativa do Teorema de Fubini



Fonte: Stewart, 2014, p. 884

A fim de estabelecer uma comparação com o método de solução exibido no exemplo 3 da seção 15.1, o autor apresenta como tarefa para o mesmo exercício a tarefa T^7 : calcular a Integral Iterada, enfatizando que pode ser interpretada como uma medida de volume se o sólido em questão for representado como um sólido oposto à região de integração R e à superfície $z = f(x, y)$, mostrada na Figura 48.

Figura 48 – Representação Geométrica da integral do Exemplo 3 da seção 15.1



Fonte: Stewart, 2014, p. 884

As discussões sobre as condições necessárias para que uma ID seja interpretada como uma medida de volume no MER elaborado nesta investigação foram construídas a partir das questões técnicas Q_3 , Q_4 e Q_5 , cuja praxeologia utilizada se apresenta muito próxima do que observamos nesta seção do livro didático analisado. No exemplo 3, ilustrado no Quadro 54, apresentamos a solução do autor acrescida da tarefa e técnicas que constitui o bloco da *práxis* da praxeologia matemática aplicada ao exemplo em questão. O bloco teórico-tecnológico é composto, além do Teorema de Fubini, pelos mesmos elementos vistos nas questões técnicas citadas. São eles: Θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais, Θ_3 : Integral Dupla, Θ_4 : Sistema de Coordenadas tridimensional, Θ_5 : Limite de funções reais de duas variáveis reais, Θ_1 : Funções, Θ_3 : Integral, Θ_4 : Limite.

Quadro 54 – Exemplo 3, Stewart (2014, p. 884-885)

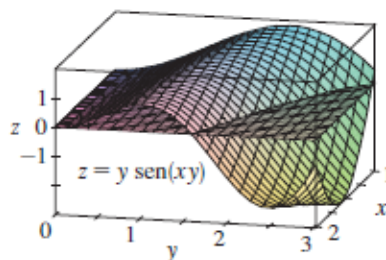
EXEMPLO 3 Calcule $\iint_R y \sin(xy) \, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.		
Tarefa/Subtarefa		Técnica
T^7 : Calcular a integral dupla iterada conforme o enunciado da questão.	Desenvolvimento algébrico. Desenvolvimento numérico. SOLUÇÃO 1 Se integrarmos primeiro em relação a x , obteremos $\iint_R y \sin(xy) \, dA = \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) \, dx \, dy = \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} \, dy$ $= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y) \, dy$ $= -\frac{1}{2} \sin 2y + \sin y \Big _0^\pi = 0$ SOLUÇÃO 2 Se invertermos a ordem de integração, obteremos $\iint_R y \sin(xy) \, dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) \, dy \, dx$	Solução 1: Isolar nos colchetes a integral cujo domínio de integração está definido em $1 \leq x \leq 2$. Calcular a integral isolada no colchete, a integração é realizada em relação à variável x , considerando y uma constante. Substituir os limites de integração na variável y , obtendo uma função contínua em relação a x . Integrar essa função em relação à variável x .

	$u = y \quad dv = \sin(xy) dy$ $du = dy \quad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$ e, então, $\int_0^\pi y \sin(xy) dy = -\frac{y \cos(xy)}{x} \Big _{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x} \int_0^\pi \cos(xy) dy$ $= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2} [\sin(xy)]_{y=0}^{y=\pi}$ $= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2}$ Se agora integramos o primeiro termo por partes com $u = -1/x$ e $dv = \pi \cos \pi x dx$, obtemos $du = dx/x^2$, $v = \sin \pi x$ e $\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} \right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x} - \int \frac{\sin \pi x}{x^2} dx$ Logo, $\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2} \right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x}$ e, assim, $\int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) dy dx = \left[-\frac{\sin \pi x}{x} \right]_1^2$ $= -\frac{\sin 2\pi}{2} + \sin \pi = 0$	Substituir os valores do limite de integração da variável x, Solução 2: Isolar nos colchetes a integral cujo domínio de integração está definido em $0 \leq y \leq \pi$. Calcular a integral isolada no colchete, a integração é realizada em relação à variável y, considerando x uma constante. Substituir os limites de integração na variável x, obtendo uma função contínua em relação à x. Integrar essa função em relação à variável x. Substituir os valores do limite de integração da variável x, Encontrar um número real positivo constante.
--	---	---

Fonte: A autora, 2021

Esse exemplo também foi explorado para esclarecer que, para uma função f definida em um domínio de integração em que $f(x, y) \geq 0$ em uma parte e $f(x, y) < 0$ em outra, a integral $\iint_R f(x, y) dA$ representa o número dado pela diferença das medidas dos volumes: $V_2 - V_1$, em que V_1 representa a medida do volume do sólido limitado pela região de integração R e a região em que $f(x, y) \geq 0$ e V_2 representa a medida do volume do sólido limitado por R e a região em que $f(x, y) < 0$, conforme ilustrado na Figura 49.

Figura 49 – Representação Geométrica da situação apresentada no parágrafo anterior



Fonte: Stewart, 2014, p. 885

Finalizando a seção, o autor discute e justifica por meio do Teorema de Fubini o caso especial de integrais de uma função f de duas variáveis reais definida em $R = [a, b] \times [c, d]$ que pode ser fatorada no produto $f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$. Nesse caso, a Integral Dupla de f pode ser interpretada como o produto cujos fatores são duas Integrais Unidimensionais, tornando as técnicas em torno da tarefa T^7 bem menos trabalhosa. Esse resultado é ilustrado na Figura 50.

Figura 50: Caso especial para integrais Duplas de $f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$ definida em $R = [a, b] \times [c, d]$

$$\boxed{5} \quad \iint_R g(x)h(y) dA = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \quad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 886

Quanto aos exercícios, foram alocados em grupos segundo características similares, cujas análises relacionamos no Quadro 55.

Quadro 55 – Análises dos exercícios da seção 15.2

Grupos	Exercícios	Análises
1	1 a 14	Possuem dificuldade progressiva e não são contextualizados em situações de engenharia. São dadas as representações algébricas de funções de duas variáveis reais, com os seus respectivos intervalos de integração postos, em que a tarefa solicitada é T^7 : calcule as integrais iteradas, para as quais são utilizadas as técnicas similares de solução conforme enunciado das questões. O Teorema de Fubini é a principal teoria abordada, entretanto, é necessário o conhecimento de integração por substituição para as resoluções.
2	15 a 22	De dificuldade progressiva também aborda técnicas necessárias à resolução da T^7 : calcule as integrais iteradas. São dadas as regiões de integração. Nesse bloco é interessante observar que a escolha da ordem de integração influencia diretamente na simplificação da organização matemática desenvolvida em cada exercício. O aspecto geométrico não é abordado. A principal tecnologia abordada é o Teorema de Fubini, entretanto, é necessário o conhecimento de integração por substituição e integração por partes na resolução.
3	23 a 31	Agrupamos nesse bloco os exercícios 23 a 31, entretanto, nos exercícios 23 e 24, a solicitação da construção do esboço da representação gráfica está explícita no comando da questão enquanto, para os subsequentes, essa condição fica a cargo do estudante, entretanto, a construção e interpretação gráfica ou não, não interfere diretamente na solução, embora seja importante para a compreensão das integrais. A tarefa T^7 identificada requer o cálculo exato da medida do volume dos sólidos, dada uma região retangular do plano-xy e uma função real de duas variáveis reais. Salientamos que o texto da seção não discute técnicas para a construção das representações gráficas.
4	32 a 34	Para esses exercícios, as tarefas solicitadas envolvem técnicas que precisam do uso de recursos computacionais para a sua resolução. As funções envolvidas geram sólidos cuja representação geométrica com o uso de lápis e papel não é tão trivial, da mesma forma a manipulação algébrica envolvida nessas questões é mais trabalhosa.
5	35 e 36	Com esses exercícios, o autor retoma a discussão em torno do cálculo do valor médio de uma função real de duas variáveis reais sobre um retângulo. Comparando aos exercícios da seção 5.1, o autor agora pede o cálculo do valor exato e não mais a estimativa. Também enfatiza a regra de substituição

		para integrais, ressaltando a permissão para operar com dx e du após sinais de integração como se fossem diferenciais. Para o exercício 35, uma <i>Homework Hints</i> foi disponibilizada.
6	37 e 38	O autor retoma a discussão realizada na seção 4.5 do Stewart, vol.1, em relação ao uso adequado da tecnologia moderna aliado à produção de gráficos precisos para ajudar na análise de comportamento de funções. No caso desse grupo de exercícios, o aspecto abordado é a simetria. Quanto à tarefa solicitada, identificamos: utilizar a simetria para calcular a integral dupla. Na realização dessa tarefa, não podemos descartar a análise da representação geométrica associada à solução algébrica das questões.
7	39	SCA 39. Utilize seu SCA para calcular as integrais iteradas $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$ Suas respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique o que acontece. Fonte: Stewart, 2014, p. 887 O exercício 39 propõe uma importante discussão em torno do Teorema de Fubini, as integrais duplas (de Riemann) e as integrais iteradas. O exercício leva o estudante a entender que, nesse caso, a integral dupla (de Riemann) não existe pelo fato de a função f sob o sinal de integração apresentar uma descontinuidade em $(0,0) \in R$. Desse modo, a função f não é limitada em $R = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ e, conseqüentemente, não é integrável segundo Riemann em R. Quanto às integrais iteradas de uma função, essas podem ou não existir quando a função não é integrável segundo Riemann. O Teorema de Fubini afirma que se f é contínua, a integral dupla pode ser transformada em uma integral iterada. No entanto, se não estivermos nas condições do Teorema de Fubini, a integral iterada (que é o que se pede para calcular na questão) não será uma integral dupla de Riemann. Calculando as integrais iteradas observa-se: $I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx = \frac{1}{2} \quad J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy = -\frac{1}{2}$ Portanto, as integrais iteradas existem e são diferentes e a integral imprópria: $\iint_R \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx$ diverge. Assim, nesse caso, as integrais não satisfazem as condições do Teorema de Fubini, portanto, conseguir calcular essas integrais iteradas (elas existem nesse caso e são diferentes), não contradiz o Teorema de Fubini.
8	40	40. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes? (b) Se $f(x,y)$ é contínuo em $[a,b] \times [c,d]$ e $g(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(s,t) dt ds$ para $a < x < b, c < y < d$, mostre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x,y)$. Fonte: Stewart, 2014, p. 887 O exercício 40 busca estabelecer uma comparação entre os teoremas de Fubini e de Clairaut⁴³ levando o estudante a perceber que o Teorema de Fubini, satisfeitas algumas condições, permite

⁴³ Teoremas de Clairaut (Schwarz) Seja $z = f(x,y)$ uma função definida em um conjunto aberto A . Se $f(x,y)$ for de classe C^2 em A , então:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

	que a ordem de integração de uma função real de duas variáveis reais não afeta o resultado de uma integral dupla de Riemann, enquanto o Teorema de Clairaut mostra que a ordem de diferenciação de uma função de duas variáveis reais não afeta o resultado de uma derivada de segunda ordem. Como ambos os teoremas requerem a continuidade de uma função, podemos explorar o exercício também nesse aspecto. Nesse exercício, uma nova tarefa é introduzida: comparar o Teorema de Fubini e o Teorema de Clairaut. Portanto, o Teorema de Clairaut se constitui em uma tecnologia abordada. O exercício introduz a tarefa: demonstrar o resultado proposto pela letra (b), entretanto, é importante salientar que nos exemplos abordados na seção, bem como nos resultados propostos nesta seção o autor não realiza demonstrações.
--	---

Fonte: A autora, 2021

O bloco teórico-tecnológico é composto pelos mesmos elementos que compõem o bloco teórico-tecnológico do Quadro 55, sendo as teorias acrescidas do Teorema de Clairaut.

Nesta seção, concluímos que as definições, exemplos, exercícios e métodos discutidos permitem apoiar o discurso teórico não mais nas bases intuitivas relativas ao cálculo de medidas de áreas e volumes por meio da Soma de Riemann, mas utilizando-se do Teorema de Fubini, considerando funções aplicadas sobre retângulos. Quanto à organização didática, estabelece atividades com abordagem das mais simples às mais complexas. Não observamos a ocupação dessas integrais em outros nichos aplicativos além da abordagem matemática na seção.

Quanto às praxeologias matemáticas, o estudante tem a oportunidade de ampliar aspectos relacionados ao desenvolvimento algébrico e numérico relativo às ID, assim como na interpretação de representações gráficas. Entretanto, como na seção anterior, o texto não subsidia o estudante nas construções dessas representações. Inferimos que, nesse caso, o professor se torna peça fundamental para que essa habilidade seja desenvolvida no estudante. Em comparação ao MER, não foi abordado o Teorema de *Clairaut*.

5.2.4 Análise da Seção 15.3 do livro Stewart (2014)

Nesta seção, Stewart (2014) amplia a discussão de Integrais Duplas definidas sobre retângulos para as definidas sobre uma região D qualquer. Inicia a discussão supondo que D seja uma região limitada contida em uma região retangular R e define uma nova função F , com domínio R , tal como mostrado na Figura 51.

para todo (x, y) em A . (Uma função $z = f(x, y)$, definida em um conjunto aberto A , é de classe C^n em A se existem todas as derivadas parciais de ordem n em A e se tais derivadas parciais são contínuas).

Figura 51 – Definição de Integrais duplas em uma região qualquer, Stewart (2014, p. 887)

Se F for integrável em R , então definimos a **integral dupla de f em D** por

$$\boxed{2} \quad \iint_D f(x, y) \, dA = \iint_R F(x, y) \, dA \quad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1}$$

$$\boxed{1} \quad F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases}$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 887

Considerando $F(x, y) \geq 0$, Stewart (2014) volta a interpretar $\iint_D f(x, y) \, dA$ como o volume do sólido limitado, agora limitado por D e pela superfície $z = f(x, y)$. Salientando que, embora F provavelmente possua descontinuidades nos pontos de limite da região de integração D , se f for contínua em D e se a curva limite de D for *comportada* (discussão que não é acentuada pelo autor no livro), então, pode ser mostrado que $\iint_R F(x, y) \, dA$ existe e, conseqüentemente, $\iint_D f(x, y) \, dA$ também existe em particular para dois tipos de regiões que são denotadas pelo autor por:

$$\text{Tipo I: } D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

$$\text{Tipo II: } D = \{(x, y) / c \leq y \leq d, h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\},$$

para as quais, a definição de Integrais Duplas Iteradas é ilustrada na Figura 52.

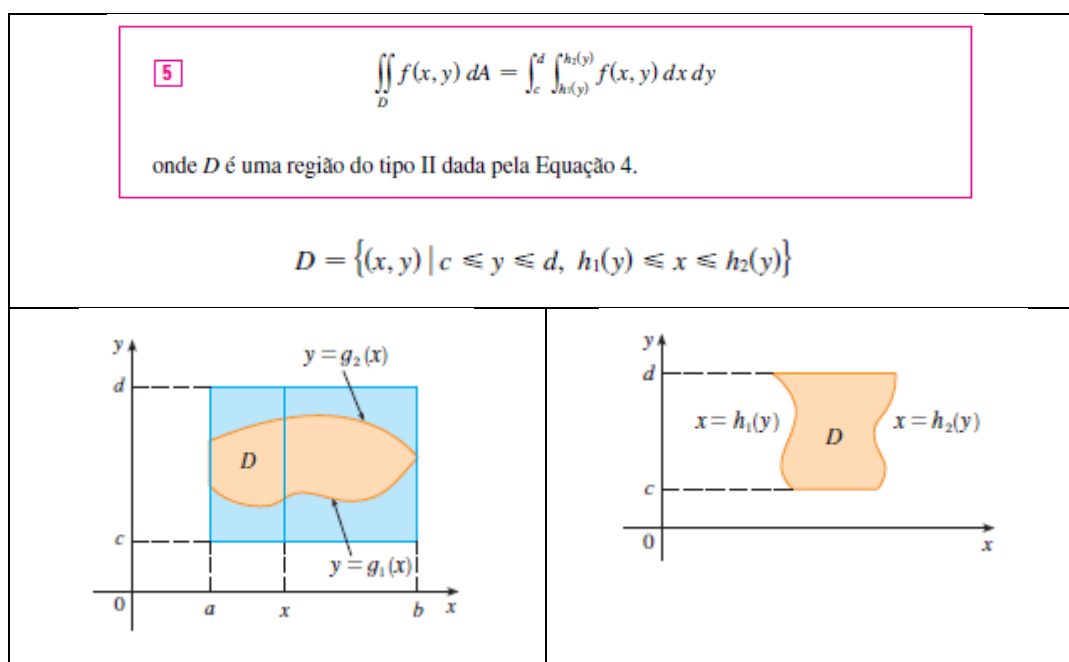
Figura 52 – Definição de Integrais duplas em uma região qualquer, Stewart (2014, p. 887)

$\boxed{3}$ Se f é contínua em uma região D do tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

então,

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$



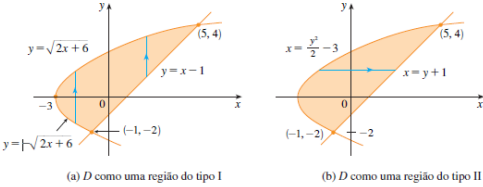
Fonte: Stewart, 2014, p. 888-889

No MER apresentado nesta tese, a questão teórica QT_4 discute as Integrais Duplas sobre regiões gerais, mas não as categoriza explicitamente como regiões dos Tipos I e II em como é feito no livro didático analisado. As praxeologias matemáticas utilizadas no MER são similares às praxeologias identificadas nas análises realizadas.

Entre os exemplos que validam a discussão do autor, trazemos o bloco da *práxis* da praxeologia matemática relativa ao Exemplo 3, ilustrado no Quadro 56. Quanto ao bloco teórico-tecnológico, esse contém as tecnologias: θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais, θ_7 : Integral Dupla Iterada, θ_8 : Teorema Fundamental do Cálculo, que sustentam as técnicas realizadas, tendo como tecnologias: Θ_1 : Funções, Θ_3 : Integral, Θ_4 : Limite e Θ_5 : Superfícies e regiões em R^3 .

Quadro 56 – Exemplo 3, Stewart (2014, p. 890-891)

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_D xy \, dA$, onde D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ pelas parábola $y^2 = 2x + 6$.		
Tarefa/Subtarefa		Técnica
	Desenvolvimento algébrico. Representação geométrica	Representar D como uma região de integração do Tipo I.
	Desenvolvimento numérico.	Representar D como uma região de integração do Tipo II.

T^7: Calcular a integral dupla iterada conforme o enunciado da questão.	EXEMPLO 3 Calcule $\iint_D xy \, dA$, onde D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ pelas parábola $y^2 = 2x + 6$. SOLUÇÃO A região D é mostrada na Figura 12. Novamente, D pode ser vista tanto como uma região do tipo I como uma região do tipo II, mas a descrição de D como região do tipo I é mais complicada, porque o limite inferior é constituído de duas partes. Portanto, preferimos expressar D como uma região do tipo II: $D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1\}$  (a) D como uma região do tipo I (b) D como uma região do tipo II Então, [5] dá $\begin{aligned} \iint_D xy \, dA &= \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy \, dx \, dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left[(y+1)^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right)^2 \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36 \end{aligned}$ Se tivéssemos expressado D como uma região do tipo I usando a Figura 12(a), obteríamos $\iint_D xy \, dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx + \int_{-1}^5 \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx$	Discutir qual a melhor forma de calcular a integral, dada as representações realizadas. Optar por integrar como uma região do tipo II. Calcular a integral isolada no colchete, a integração é realizada em relação à variável x, considerando y uma constante. Substituir os limites de integração na variável x, obtendo uma função contínua em relação a y. Integrar essa função em relação à variável y. Substituir os valores do limite de integração da variável y. Apresentar a praxeologia matemática da integral, caso fosse escolhida para resolução a região do tipo I.
---	--	---

Fonte: A autora, 2021

Posteriormente, o autor exhibe as propriedades das integrais quando o domínio de integração é uma região D do plano- xy . As demonstrações dessas propriedades não são abordadas. A nona propriedade, ilustrada na Figura 53, tem o propósito de introduzir situações de integração dupla quando o domínio de integração não se trata das regiões do Tipo I ou do Tipo II. Por fim, exhibe a propriedade 11, utilizada para estimar e calcular o valor de Integrais Duplas quando a região de integração D é um disco, ilustrado na Figura 53. Assim como as outras propriedades, a 9 e 11 não são demonstradas. Tais propriedades não foram contempladas nas questões do MER apresentado no capítulo anterior desta tese.

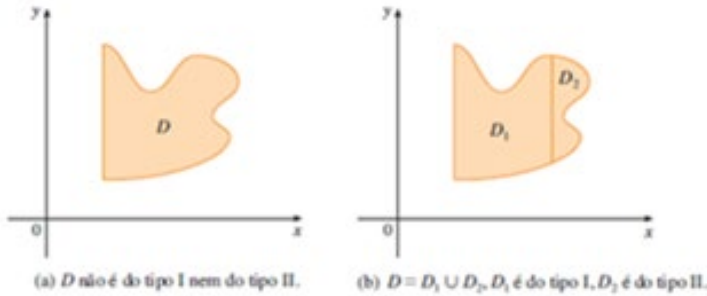
Figura 53 – Propriedades 9 e 11, Stewart (2014, p. 892)

Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras (veja a Figura 17), então

9

$$\iint_D f(x,y) \, dA = \iint_{D_1} f(x,y) \, dA + \iint_{D_2} f(x,y) \, dA$$

A Propriedade 9 pode ser usada para calcular integrais duplas sobre regiões D que não sejam nem do tipo I nem do tipo II. A Figura 18 ilustra esse procedimento. (Veja os Exercícios 55 e 56.)



11

Se $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo (x,y) em D , então

$$mA(D) \leq \iint_D f(x,y) \, dA \leq MA(D)$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 892

Quanto aos exercícios desta seção, não observamos outros *habitats* além da Matemática. Foram agrupados e analisados conforme mostrado no Quadro 57. Para o cálculo das medidas de volume, é necessária a sub tarefa ST7, ou seja, calcular a medida da área quando uma região de integração é conhecida. Assim como nas seções anteriores, agrupamos os exercícios similares e detalhamos as análises, como mostradas no Quadro 57.

Quadro 57 – Análises dos exercícios da seção 15.3

Grupos	Exercícios	Análises
1	1 a 6	Nesse grupo, a escolha da ordem de integração não afeta o grau de dificuldade dos exercícios. Para os exercícios 5, 17 e 49, uma <i>Homework Hints</i> é disponibilizada.
2	7 a 10 17 a 22 49	A escolha da ordem de integração é importante para definir as técnicas utilizadas para facilitar o desenvolvimento das questões, uma vez que essa escolha afeta o grau de dificuldade do exercício. As técnicas agregam práticas relativas à integração por substituição.

	a 54	
3	11 a 16	São exercícios conceituais que buscam promover a compreensão do que é uma região de integração do Tipo I e do Tipo II e de como a escolha da ordem de interação é importante para facilitar os cálculos envolvidos na sua resolução. Os exercícios solicitam que se faça a representação gráfica da região de integração, bem como que sejam resolvidos considerando a região do Tipo I e do Tipo II sucessivamente.
4	23 a 38	É constituído pelos exercícios 23 a 38, entretanto, para os exercícios 33 e 34, o uso da calculadora gráfica é sugerido. A tarefa observada é calcular a medida do volume do sólido, dada uma região D do plano- xy e uma função de duas variáveis. Para os exercícios 25, uma <i>Homework Hints</i> é disponibilizada e para os exercícios 33 e 34, o autor sugere o uso de uma calculadora gráfica.
5	39 a 42	A tarefa indicada é a construção do esboço do sólido cujo volume é dado pela integral iterada em cada caso, que compreende o cálculo da medida do volume desses sólidos. Entretanto, para os exercícios 39 a 42, Stewart (2014) sugere o uso de um sistema computacional para a realização dos cálculos. O autor destaca a importância dada à diagramação dos desenhos que aparecem como um elemento de apoio no processamento das tarefas.
5	43 a 48	Nesse grupo, composto por exercícios de dificuldade progressiva, o objetivo é fazer com que o estudante realize a tarefa de esboçar a região de integração tendo como informação os limites de integração. Para exercício 47, uma <i>Homework Hints</i> é disponibilizada.
6	55 a 58 62	Esse grupo de exercícios tem como finalidade fixar a propriedade 9 que permite que uma região de integração seja decomposta na soma de duas ou mais regiões do Tipo I ou do Tipo II.
7	59 60	Assim como na seção anterior, o autor retoma a discussão em torno do cálculo do valor médio de uma função real de duas variáveis reais sobre uma região de integração D e amplia a tarefa de Calcular o valor médio da função f sobre o retângulo para uma região D qualquer.
8	61	O exercício 61 aborda a tarefa de demonstrar a propriedade 11, mostrada no Quadro 33. Para isso é necessário empregar as propriedades das desigualdades e as propriedades das integrais.
9	62	No exercício 62, a tarefa combina o esboço da região de integração D com a escrita analítica da integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária. Nesse exercício, o autor espera que o estudante perceba a simetria em relação às integrais iteradas e prepara o estudante para o próximo bloco de exercícios.
9	63 a 67	Esse grupo de exercícios reafirma o uso da simetria para calcular medidas de volumes de funções que não são positivas em seu domínio de integração. Quanto à tarefa, solicita a utilização da simetria para calcular a integral dupla. Na realização dessa tarefa, as técnicas para construção e análise da representação geométrica são importantes.

Fonte: A autora, 2021

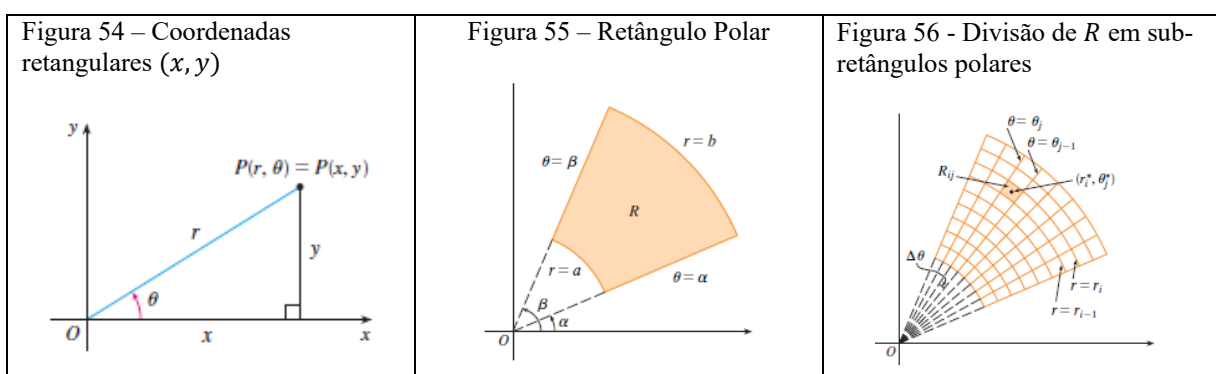
Assim como na seção anterior, observamos que as definições, exemplos, exercícios e métodos discutidos permitem apoiar o discurso teórico, utilizando-se do Teorema de Fubini, mas considerando funções aplicadas sobre qualquer região real de integração. Quanto à organização didática, preserva os aspectos observados nas seções anteriores. O cálculo de Integrais Duplas solidifica sua ligação com o cálculo de medidas de áreas de superfícies planas e medidas de volumes de sólidos, e o uso de representação gráfica faz com que a ocupação do nicho geométrico seja mantida. Não observamos a ocupação dessas integrais em outros *habitats* além da Matemática. Quanto às praxeologias matemáticas, essas permitem ao estudante ampliar o estudo das integrais de funções reais de duas variáveis aplicadas em uma região R para uma região D qualquer. Assim como nas seções 15.1 e 15.2, o texto não subsidia o estudante nas

construções das representações gráficas, assim, inferimos que o papel do professor nesse aspecto deve contribuir para desenvolver no estudante essa habilidade.

5.2.5 Análise da Seção 15.4 do livro Stewart (2014)

A seção 15.4 trata das Integrais Duplas em coordenadas polares. O autor inicia a seção fazendo um paralelo entre coordenadas polares e cartesianas para, posteriormente, particionar a região polar, conforme ilustrado na sequência de Figuras 54, 55 e 56. Em comparação às Q_8 , Q_9 , Q_{10} e na questão teórica QT_7 do MER construído nesta investigação, as praxeologias matemáticas observadas são similares, porém, as questões não discutem a mudança de variáveis.

Quadro 58 – Coordenadas retangulares, Retângulo Polar, Divisão de R em sub-retângulos polares



Fonte: Stewart, 2014, p. 895-896

O autor ressalta que, embora tenha definido a Integral Dupla $\iint_R f(x, y) dA$ aplicada sobre retângulos, se a função real f de duas variáveis reais for contínua, a solução dessa integral será a mesma se usarmos para f coordenadas polares. Portanto, as coordenadas cartesianas do centro de $R_{i,j}$ são $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*)$ e a $\iint_R f(x, y) dA$ representa uma soma de Riemann, conforme ilustrado no Quadro 58. Finalmente, o autor enuncia a Integral Dupla Iterada em coordenadas polares, tomando um ponto arbitrário (r, θ) . A condição de existência da integral como limite da soma de Riemann, quando a norma da partição tende a 0, não é questionada no texto. Embora o autor introduza todo o processo a partir de partições, essa terminologia não é mencionada.

A grande questão abordada até aqui envolve ampliar a aplicação do Teorema de Fubini inicialmente proposto na seção anterior para Integrais Iteradas, cujas coordenadas eram cartesianas, para a aplicação em Integrais Iteradas, cujas coordenadas cartesianas foram

convertidas para coordenadas polares. A Figura 57 ilustra a definição da Integral Dupla em coordenadas polares, e a fórmula para a conversão de uma Integral Iterada em coordenadas cartesianas em uma Integral Dupla em coordenadas polares, quando uma função f está definida em uma região retangular R , apresentadas no livro analisado.

Figura 57 – Definição de integral dupla em coordenadas polares e a fórmula para a conversão de uma integral iterada em coordenadas cartesianas em uma integral dupla em coordenadas polares quando uma função f está definida em uma região retangular R

$$\boxed{1} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta \theta$$

Se escrevermos $g(r, \theta) = rf(r \cos \theta, r \sin \theta)$, a soma de Riemann na Equação 1 pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta \theta$$

que é a soma de Riemann para a integral dupla

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta \theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

2 Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 896-897

Não identificamos no texto a especificação que a transição para as coordenadas polares é particularmente recomendada quando a função de integração dupla compreende a expressão $x^2 + y^2$ e quando a região R envolve arcos dos círculos centrados na origem, pois $x^2 + y^2 = r^2$ para $r = k$, uma constante real.

Os exemplos, ilustrados na Figura 58, apresentam-se como uma forma de validar a discussão anterior, abordam o cálculo da Integral Iterada, para a qual é estabelecida a conversão de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, facilitando o cálculo da integral, enquanto o segundo solicita o cálculo da medida de volume do parabolóide, no qual a

representação geométrica construída favorece a compreensão dos dados da questão. Para esse exemplo, o autor argumenta que a conversão em coordenadas polares facilita os cálculos algébricos da questão.

Figura 58 – Exemplos 1, 3 e 4, Stewart (2014, p. 897-898)

EXEMPLO 1 Calcule $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

EXEMPLO 3 Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO Do esboço da curva na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

Fonte: A autora, 2021

Observamos, nas praxeologias apresentadas nos exemplos do Quadro 59, que a subarefa: calcular a Integral Iterada em coordenadas polares, quando a área da região de integração é fornecida, está implícita. Os exemplos estabelecidos nesta organização vêm acompanhados de uma representação gráfica das regiões e, conseqüentemente, dos sólidos gerados por elas, quando for o caso, nos quais o autor se apoia para organizar as tarefas. Entretanto, os aspectos referentes a como essas construções são realizadas, sejam com o uso de lápis e papel ou de um recurso tecnológico, não foram localizados no texto durante essa análise. Os exemplos permitem a exploração de simetrias e isso pode simplificar os cálculos para chegar à solução.

De maneira geral, os aspectos discutidos até aqui foram abordados nas questões Q_8 , Q_9 , Q_{10} e na questão teórica QT_7 , do MER, no que se refere às definições, ampliação dos cálculos em coordenadas cartesianas, a polares e às praxeologias abordadas nos exemplos. Com relação às representações geométricas, as praxeologias que as envolve no MER são tímidas se comparadas às praxeologias vistas no livro didático.

Os exercícios propostos foram agrupados e estão comentados no Quadro 59. Apenas um deles está contextualizado em uma situação de hidráulica e em uma da construção civil, relacionada a cálculo de volume de piscinas de formato circular. Portanto, esses exercícios encontram lugar no nicho aplicativo da hidráulica e de projetos de estruturas.

Quadro 59 – Análises dos exercícios da seção 15.3

Grupos	Exercícios	
1	1 a 4	Esses exercícios, acompanhados da representação gráfica no enunciado, vêm com a proposta de esclarecer ao estudante quando usar uma Análises integral iterada em coordenadas polares para calcular uma medida de área, quando uma região de integração é conhecida.
2	5 e 6	Esse grupo se difere do primeiro por explicitar a integral em sua representação algébrica.
3	7 a 14	De dificuldade progressiva, vêm para exercitar a habilidade de calcular a integral iterada dupla em coordenadas polares quando a área da região de integração é fornecida. No entanto, a implementação da escrita algébrica do cálculo integral requer implicitamente os esboços dos gráficos das regiões para explicitar as equações polares, identificar os limites de integração e, consequentemente, a integral dada em coordenadas polares. O fato de que o cálculo deve ser feito em coordenadas polares é explicitado nas questões.
4	15 a 18	A implementação da escrita algébrica do cálculo integral requer implicitamente os esboços dos gráficos das equações polares para identificar os limites de integração. As figuras geradas pelas regiões de integração são rosáceas, cardioides e coroas circulares. Para os exercícios 15, uma <i>Homework Hints</i> foi disponibilizada.
5	19 a 28	Nesse grupo de exercícios, a tarefa é calcular a medida do volume de um sólido dado pela integral iterada dupla quando a área da região de integração é fornecida. As questões exigem a conversão da variável cartesiana para a polar. Os sólidos dados nas questões são regiões do espaço determinadas por pelo menos duas superfícies cujas equações são dadas.
6	29 a 32	A instrução da tarefa é clara na questão, calcular a integral iterada quando são dados os limites de integração fazendo a conversão para coordenadas polares.
7	33 a 34	Nesse grupo os cálculos são efetivamente trabalhosos assim o autor sugere que sejam realizados por meio de uma calculadora gráfica tanto para a interpretação geométrica da questão quanto para a realização dos cálculos algébricos.
8	35 a 36	Esse grupo engloba os exercícios contextualizados em: uma situação da construção civil relacionada a cálculo de volume de piscinas de formato circular e em uma situação relacionada com a área de abrangência de um pulverizador agrícola em um padrão circular, portanto, esses exercícios encontram lugar no nicho aplicativo da hidráulica e de projetos de estruturas. Foram os únicos exercícios aplicados fora do contexto da própria matemática. 35. Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste para oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina. 36. Um pulverizador agrícola distribui água em um padrão circular de 50 m de raio. Ele fornece água até uma profundidade de e^{-r} metros por hora a uma distância de r metros do pulverizador. (a) Se $0 < R \leq 50$, qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro do círculo de raio R centrada no pulverizador? (b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora por metro quadrado fornecida à região dentro do círculo de raio R.
9	37 e 38	Com esse grupo de exercícios o autor retoma a discussão em torno do valor médio de funções, mas fazendo a conversão dessas funções de coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

10	40 41	40. (a) Definimos a integral imprópria (sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$) $I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx$ $= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dA$ onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi$ (b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} dA$ onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use isto para mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi$ (c) Deduza que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}x$, mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ (Esse é um resultado fundamental em probabilidade e estatística.) As duas últimas questões demandam a tarefa de calcular integrais duplas impróprias que levam à generalização de resultados que encontram aplicação no cálculo de probabilidade e estatística. A questão 40 ilustrada acima traz a definição de integral imprópria no espaço, além de tratar de integrais desse tipo em coordenadas polares. O exercício 41 vem validar os resultados apresentados no exercício 40.
----	----------	---

Fonte: A autora, 2021

Nesta seção, observamos que a ocupação do nicho geométrico é intensificada. Identificamos somente três exercícios contextualizados aplicados à Engenharia Civil. A organização matemática leva o estudante a ampliar o estudo das integrais de funções reais de duas variáveis reais quando as coordenadas são cartesianas; para o estudo, quando as coordenadas são coordenadas polares. Assim como nas seções anteriores, o texto não subsidia o estudante nas construções das representações gráficas, ficando essa responsabilidade a cargo do professor.

5.2.6 Análise da Seção 15.5 do livro Stewart (2014)

O autor dedica esta seção às aplicações das Integrais Duplas fora do contexto estritamente matemático; aqui estão desvinculadas do contexto de medidas de áreas e volumes. Em relação à praxeologia didática, o autor anuncia a temática da aplicação seguida de uma explanação do seu significado e deduz as fórmulas matemáticas para o cálculo de densidade de massa, momento e centro de massa e Momento de Inércia que mobilizam as ID na resolução. No fim da seção, aborda exercícios relacionado às temáticas discutidas. Foram observados

aspectos das questões QT_8 , QT_9 , QT_{10} e QT_{11} do MER elaborado nesta investigação, durante a exposição do autor, quanto à forma de dedução das fórmulas matemáticas associadas.

a) Densidade de Massa

O autor inicia o estudo da densidade de massa para lâminas com densidade variável como uma extensão do estudo de lâminas de densidade constante. Após apresentar as definições, deduz as fórmulas necessárias ao cálculo e apresenta um problema e sua solução, ilustradas na Figura 59.

Figura 59 – Fórmulas para cálculo da massa total e da carga elétrica de uma lâmina com densidade variável

$$m = \lim_{k,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D \rho(x, y) dA$$

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 901

Em seguida, traz um exemplo em que o cálculo da carga distribuída é requerido por aplicação direta da fórmula, tendo como tarefa solicitada: calcular a carga elétrica Q distribuída em uma região triangular que, na verdade, é uma reformulação da tarefa: calcular a Integral Dupla de Riemann definida na região de integração e das técnicas aplicadas nessa tarefa. Entretanto, é necessário interpretar que o nicho aplicativo da integral é a eletrostática e o *habitat* é a Física, o que faz com que o bloco teórico-tecnológico aplicado aos exercícios seja acrescido da teoria Carga Elétrica Total Distribuída e Eletrostática. No MER elaborado, não foi abordada essa questão.

b) Momento e Centro de Massa

A organização didática aqui é mantida como na apresentação da densidade de massa. O autor inicia o estudo de momentos e centros de massa para lâminas com densidade variável como uma complementação desse assunto aplicado a lâminas de densidade constante. As fórmulas deduzidas são ilustradas na Figura 60.

Figura 60 – Fórmulas para o cálculo de medidas de momentos e centro de massa de uma lâmina com densidade variável

$$M_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y \rho(x, y) dA$$

$$M_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x \rho(x, y) dA$$

5 As coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 902-903

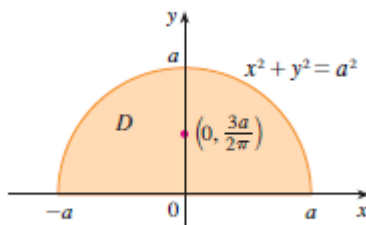
Na sequência, o momento é aplicado na dedução das fórmulas matemáticas para calcular as coordenadas do centro de massa de uma lâmina com densidade variável, ressaltando que, do ponto de vista da Física, o centro de massa indica o ponto que faz com que a lâmina permaneça na horizontal quando equilibrada pelo seu centro de massa. Tais fórmulas estão ilustradas no Quadro 59.

Essa discussão situa os elementos estudados na Física, portanto, a Integral Dupla de Riemann aqui está localizada no nicho aplicativo da Física, cujo assunto abordado é tratado na Engenharia na disciplina de Mecânica Geral, que na instituição de referência é ministrada no quarto período das Engenharias do ciclo básico e, ainda, são aplicações comumente discutidas em disciplinas de Cálculo na Engenharia.

O bloco prático da praxeologia abordada no exemplo 3 trazido pelo autor foi ilustrado no Quadro 60. Observamos que, como a lâmina tem o formato semicircular, a conversão das coordenadas cartesianas em coordenadas polares facilita a resolução da questão. No MER elaborado, o centro de massa foi abordado na questão teórica QT_8 e na questão técnica Q_{11} , porém, a tarefa da praxeologia matemática realizada no exemplo é equivalente à tarefa da praxeologia matemática da questão teórica Q_{11} . Quanto ao bloco teórico-tecnológico dessas praxeologias, esse é composto pelos mesmos elementos, ou seja, por: θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais, θ_3 : Integral Dupla, θ_4 : Sistema de Coordenadas tridimensional, θ_{11} : Ponto

material, θ_{12} : Momento estático, θ_{13} : Centro de Gravidade, Θ_1 : Funções, Θ_3 : Integral Θ_6 : Conceitos de Mecânica Geral.

Quadro 60 – Exemplo 3, Stewart (2014, p. 903)

EXEMPLO 3 A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.		
Tarefa/Subtarefa		Técnica
T_9: Determinar as coordenadas do centro de massa de uma lâmina com densidade variável.	Desenvolvimento algébrico. Construção e Análise da representação Geométrica. SOLUÇÃO Vamos posicionar a lâmina na metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. (Veja a Figura 6.) Então a distância do ponto (x, y) ao centro do círculo (origem) é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto, a função densidade é $\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$ onde K é alguma constante. Tanto a função densidade como o formato da lâmina sugerem a conversão para coordenadas polares. Então $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ e a região D é dada por $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Logo, a massa da lâmina é $m = \iint_D \rho(x, y) dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2} dA$ $= \int_0^\pi \int_0^a (Kr) r dr d\theta = K \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2 dr$ $= K\pi \frac{r^3}{3} \Big _0^a = \frac{K\pi a^3}{3}$ Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y e, assim, o centro de massa precisa estar sobre o eixo y, ou seja, $\bar{x} = 0$. A coordenada y é dada por $\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \sin \theta (Kr) r dr d\theta$ $= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{3}{\pi a^3} [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a$ $= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}$ Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/(2\pi))$. 	Interpretar e representar geometricamente o problema. Encontrar a função densidade. Converter a região $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, $-a \leq x \leq a$ em coordenadas polares. Representar a massa por uma integral dupla. Calcular a integral dupla. Interpretar que a lâmina e a função densidade são simétricas em relação ao eixo das ordenadas, o que faz com que o centro de massa seja posicionado sobre o eixo das ordenadas. Calcular, usando as fórmulas definidas, as coordenadas do centro de massa.

Fonte: Stewart, 2014, p. 903

c) Momento de Inércia

Stewart (2014) estende o conceito de *Momento de Inércia* discutido no capítulo 8 do volume I do livro ao conceito de Momento de Inércia aplicado a uma lâmina com densidade variável com função densidade ρ contínua aplicada em uma região D . Após, deduz as fórmulas mostradas na Figura 61.

Figura 61 – Fórmulas para o cálculo de Momentos de Inércia

$$I_x = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA$$

$$I_y = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA$$

$$\boxed{8} \quad I_0 = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

Observe que $I_0 = I_x + I_y$.

Fonte: Stewart, 2014, p. 904

O autor traz um exemplo em que a tarefa consiste em: determinar os momentos de inércia. Entretanto, como se trata de um disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$ e centro na origem, o autor explora o exercício para esclarecer que o Momento de Inércia tem um papel em um movimento de rotação similar ao que a massa tem em um movimento linear, sendo ele, por exemplo, o responsável por dificultar o início ou o término do movimento de giro de uma roda, assim como a massa do carro dificulta seu movimento inicial e a frenagem, estabelecendo um elo de aplicação do exercício correlato à Engenharia. Em seguida, exhibe as fórmulas necessárias ao cálculo de Momento de Inércia. O bloco prático da praxeologia matemática do exemplo 4 foi ilustrado no Quadro 61 e uma vez que foi definida pela tarefa de determinar a medida do Momento de Inércia, não aborda aspectos geométricos. O bloco teórico-tecnológico desta praxeologia é composto por: θ_1 : Funções reais de duas variáveis reais, θ_3 : Integral Dupla, θ_4 : Sistema de Coordenadas tridimensional, θ_{11} : Ponto material, θ_{12} : Momento estático, θ_{13} : Centro de Gravidade, θ_{14} : Momento de inércia, Θ_1 : Funções, Θ_3 : Integral Θ_6 : Conceitos de Mecânica Geral.

Quadro 61 – Exemplo 4, Stewart (2014, p. 903)

EXEMPLO 4 Determine os momentos de inércia I_x , I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a .		
Tarefa/Subtarefa		Técnica
T_{10} : Determinar a medida dos momentos de inércia.	SOLUÇÃO O limite de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares D é descrito por $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a$. Vamos calcular I_0 primeiro: $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho \, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \, dr \, d\theta$ $= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 \, dr = 2\pi \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi \rho a^4}{2}$ Em vez de calcularmos I_x e I_y diretamente, vamos usar o fato de que $I_x + I_y = I_0$ e $I_x = I_y$ (da simetria do problema). Assim $I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi \rho a^4}{4}$ No Exemplo 4, observe que a massa do disco é $m = \text{densidade} \times \text{área} = \rho(\pi a^2)$ de modo que o momento de inércia do disco em torno da origem (como uma roda em torno de seu eixo) pode ser escrito como $I_0 = \frac{\pi \rho a^4}{2} = \frac{1}{2}(\rho \pi a^2)a^2 = \frac{1}{2}ma^2$	Expressar a região do círculo $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, $-a \leq x \leq a$ em coordenadas polares. Utilizando as fórmulas estabelecidas, calcular I_0, por meio da integral dupla. Interpretar o problema em termos da simetria. Calcular I_x e I_y. Calcular a medida da massa do disco. Calcular a medida do Momento de Inércia comparado a uma roda em seu eixo.

Fonte: Stewart, 2014, p. 904-905

Nesta seção, também apresentamos no Quadro 62 as análises dos exercícios propostos no livro.

Quadro 62 – Exercícios propostos

Grupos	Exercícios	Análises
1	1 e 2	Esses exercícios têm como tarefa calcular a carga elétrica por meio da aplicação direta da fórmula reproduzindo o que foi realizado no exemplo abordado na seção, portanto, a praxeologia matemática é a mesma do exemplo proposto.
2	3 a 10	Esses exercícios têm a tarefa de calcular o centro de massa por meio da aplicação direta da fórmula, reproduzindo o que foi realizado no exemplo abordado na seção, portanto, as tarefas e técnicas se repetem conforme o exemplo.
3	11 a 16	De dificuldade progressiva, propõe como tarefa calcular o centro de massa e densidade em cada caso, requerendo a habilidade de perceber que a densidade é proporcional à distância da origem. Os elementos praxeológicos são os mesmos abordados no exemplo descrito acima.
4	17 a 20	Esses exercícios solicitam a tarefa de calcular momentos de inércia por meio da aplicação direta da fórmula reproduzindo o que foi realizado no exemplo abordado na seção, portanto, as tarefas e técnicas se repetem.
7	21 a 24	Nesse grupo os cálculos não são efetivamente trabalhosos, entretanto, a sugestão de que a praxeologia matemática seja intermediada por meio de uma calculadora gráfica é importante na interpretação geométrica do problema que vai definir quanto aos intervalos de integração. Quanto

		às técnicas algébricas, essas são requeridas por aplicação direta de fórmula, sendo similares às utilizadas nos exemplos propostos.
8	25 e 26	Para esses dois exercícios, o autor sugere o uso de um sistema de computação algébrica para auxiliar a praxeologia matemática quanto à tarefa de calcular a massa, centro de massa e os momentos de inércia, pois a região de integração envolve para o exercício 25 uma rosácea de quatro folhas e para o exercício 26 a região: $D = \{(x, y): 0 \leq y \leq xe^{-x} \leq x \leq 2\}; \rho(x, y) = x^2 y^2$ a qual inferimos que seja difícil de ser representada pelo estudante usando o lápis e papel. Quantos aos cálculos algébricos, as técnicas se aplicam à resolução direta das fórmulas dadas.

Fonte: A autora, 2021

Embora esta seção traga as aplicações abordadas, a discussão apresentada pelo autor é bastante direta e resumida. O Momento de Inércia, tratado como um movimento rotacional no qual está presente uma grandeza física que se associa à inércia de rotação, não é explicitado. O autor parece se preocupar mais com o cálculo do que com a explicitação mais detalhada do conceito do que se está calculando.

As aplicações até aqui discutidas, habitadas no Cálculo Diferencial e Integral, são alocadas no nicho aplicativo da Física em problemas de Mecânica Geral, importantes para o curso de Engenharia estudado.

A análise da última seção do livro didático da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III que dá sequência ao estudo das Integrais Duplas é apresentada na seção seguinte deste capítulo.

5.2.7 Análise da Seção 15.6 do livro Stewart (2014)

Nesta seção, Stewart aplica as Integrais Duplas ao problema de calcular a medida da área de uma superfície de revolução com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, em que as derivadas parciais f_x e f_y são contínuas. Assim, por meios geométricos, define a fórmula para o cálculo da área de uma superfície, ilustrada na Figura 62.

Figura 62 – Fórmula para encontrar a medida da área de uma superfície D

2 A área da superfície com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde f_x e f_y são contínuas, é

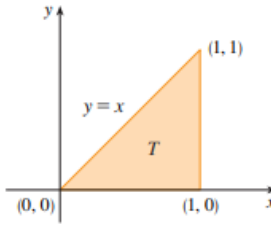
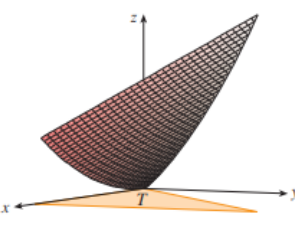
$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} \, dA$$

$$A(s) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

Fonte: Stewart, 2014, p. 911

Posteriormente, mostra a praxeologia matemática para dois exemplos que apresentam os sólidos de revolução construídos por meio de um sistema computacional, cujo método para construção não é explorado. A praxeologia matemática abordada no Exemplo I foi ilustrada no Quadro 63, e as técnicas abordadas requerem além das representações algébricas e geométricas aplicação direta da fórmula deduzida.

Quadro 63 – Exemplos 4

EXEMPLO 4 Determine os momentos de inércia I_x , I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a .		
Tarefa/Subtarefa		Técnica
T^9 Determinar a medida da área da região dada conforme os dados da questão.	EXEMPLO 1 Determine a área de superfície da parte da superfície $z = x^2 + 2y$ que fica acima da região triangular T no plano xy com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. SOLUÇÃO A região T é mostrada na Figura 3 e é descrita por $T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ Usando a Fórmula 2 com $f(x, y) = x^2 + 2y$, obtemos $A = \iint_T \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1} dA = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 5} dy dx$ $\int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 5} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x^2 + 5)^{3/2} \Big _0^1 = \frac{1}{6} (27 - 5\sqrt{5})$  FIGURA 3  FIGURA 4	Representar graficamente a região T. Representar analiticamente a região T. Calcular as derivadas parciais da função $z = x^2 + 2y$, em relação a x e em relação a y. Substituir na fórmula de integração que representa a medida da área da superfície. Calcular a integral e encontrar a medida da área solicitada.

Fonte: Stewart, 2014, p.911

As análises dos exercícios desta seção realizamos e registramos no Quadro 64.

Quadro 64 – Análises dos exercícios

Grupos	Exercícios	Análises
1	1 a 14	Esses exercícios são organizados em dificuldade progressiva. Todos solicitam a tarefa de calcular a medida da área de uma região dada. Para todos a representação geométrica e sua interpretação é importante para visualizar as seções e consequente intervalos de integração, para os quais o conhecimento relativo ao estudo das cônicas e quádras é fundamental. Para a praxeologia dos exercícios 7 a 11, se fizermos a transformação das coordenadas cartesianas para as coordenadas polares, os cálculos ficam bem mais simplificados.
3	15 e 16	A tarefa em questão aqui é o cálculo da medida da área da superfície, entretanto, a praxeologia matemática envolve o cálculo das integrais fazendo o uso da regra do ponto médio.
4	17 a 20	Esses exercícios solicitam a tarefa de calcular momentos de inércia por meio da aplicação direta da fórmula, reproduzindo o que foi realizado no exemplo abordado na seção, portanto, as tarefas e técnicas se repetem.
7	21 a 24	Nesse grupo, os cálculos não são efetivamente trabalhosos, entretanto, a sugestão que a praxeologia matemática seja intermediada por meio de uma calculadora gráfica é importante na interpretação geométrica do problema que vai definir quanto aos intervalos de integração. Quanto às técnicas algébricas, essas são requeridas por aplicação direta de fórmula, sendo similares às utilizadas nos exemplos propostos.
8	17 a 20	Para esse grupo de exercícios, o autor sugere o uso de um sistema de computação algébrica para auxiliar a praxeologia matemática. Em todos basta determinar os intervalos de integração e fazer o uso da fórmula para cálculo da medida da área solicitada.
9	21	A praxeologia matemática consiste em demonstrar que a área da parte do plano $z = ax + by + c$, que projeta sobre uma região D no plano xy com área $A(D)$, é dada por $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$. É o único exercício da série em que a tarefa busca a generalização de um resultado.
10	23	A praxeologia do exercício 23 solicita que seja calculada a medida da área da parte finita do parabolóide $y = x^2 + z^2$ limitada pelo plano $y = 25$. Entretanto, a praxeologia envolve a interpretação de que se a superfície for projetada no plano xy , fica acima do disco x , e facilita os cálculos requeridos na questão.

Fonte: A autora, 2021

Em síntese, no livro didático adotado na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, em relação às praxeologia didáticas, o ensino de Integrais Duplas está organizado em seis seções, em cada uma delas há uma introdução, na qual se explicita o conteúdo abordado, seguido de deduções ou demonstrações de fórmulas que são utilizadas em exemplos resolvidos explicados passo a passo e, por fim, são propostos exercícios organizados a partir de seus graus de dificuldade: dos mais simples aos mais complexos. O uso de Tecnologias da Informação e Comunicação que poderiam auxiliar principalmente nas construções, pelos estudantes, de regiões de integração e promover melhor compreensão do processo de construção gráfica dessas regiões e de suas relações com as suas respectivas representações algébricas, é indicado apenas pontualmente para a resolução de alguns exercícios propostos.

Em relação às praxeologias matemáticas desenvolvidas no livro didático, concluímos que as definições, exemplos, exercícios e métodos discutidos permitem apoiar o discurso

teórico nas bases intuitivas relativas ao cálculo de medidas de áreas e de volumes em geral, utilizando-se da Integral de Riemann e do Teorema de Fubini, principalmente. Não há preocupação com demonstrações de teoremas.

5.3 Técnica τ_{ib3}

Com relação a essa técnica, fundamentamo-nos nos subsídios da etapa consequente da metodologia *Dipcing*, bem como no percurso metodológico construído na fase epistemológica da TMCC, em que estão previstas entrevistas com os professores do curso estudado a fim de obter informações relevantes para a investigação, como, entre outras, a forma como os objetos matemáticos são mobilizados pelas disciplinas de outras áreas do conhecimento que não a Matemática.

Nesta investigação, as entrevistas foram direcionadas às informações que nos levassem a identificar, listar e selecionar livros didáticos empregados nas disciplinas do curso de graduação em Engenharia Civil da instituição de referência, no intuito de verificar em quais dessas disciplinas e situações ou problemas as ID são mobilizadas, assim como compreender como essas integrais são, de fato, mobilizadas na profissão do engenheiro civil.

Assim, realizamos entrevistas semiestruturadas com nove professores do curso, sendo que um ministrava as disciplinas da área de Física no ciclo básico das engenharias e oito ministravam disciplinas dos eixos específicos e profissionalizantes da Engenharia Civil. As entrevistas ocorreram em clima de cordialidade e aos professores questionamos se as Integrais Duplas são mobilizadas no ensino dos saberes discutidos nas disciplinas que eles ministram; em caso afirmativo, em quais; se esses saberes eram abordados nos livros didáticos por eles adotados nessas disciplinas e, em caso afirmativo, em quais livros. O registro escrito das respostas às perguntas foi realizado pela pesquisadora.

As entrevistas evidenciaram a presença das ID no contexto das disciplinas de Mecânica Geral, Mecânica dos Fluidos e Mecânica dos Sólidos, sendo que, em Mecânica Geral, essas integrais são mobilizadas no estudo de densidade e massa, de momento e centro de massa e de Momento de Inércia; em Mecânica dos Fluidos, são mobilizadas no estudo de sistemas que envolvem o escoamento de fluidos; e em Mecânica dos Sólidos são mobilizadas no estudo de deflexões excessivas de vigas em prédios na construção civil.

Conforme já destacamos nesta tese, as aplicações das ID evidenciadas no contexto de Mecânica Geral não são relevantes para esta investigação, pois entendemos que são comumente

abordadas nas disciplinas de Cálculo que estudam as integrais em cursos de Engenharia. Assim, solicitamos aos professores de Mecânica dos Fluidos e Mecânica dos Sólidos as referências que utilizam como livros didáticos em suas disciplinas. Eles nos encaminharam os Planos de Ensino com destaque na relação dessas referências, as quais listamos no Quadro 65.

Quadro 65 – Livros didáticos utilizados nas disciplinas de Mecânica dos Fluidos e Mecânica dos Sólidos da instituição de referência

Mecânica dos Fluidos	
BRUNETTI, F. Mecânica dos Fluidos . 2. ed. São Paulo: Pearson, 2008.	
ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J.M. Mecânica dos fluidos : fundamentos e aplicações. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.	
FOX, Robert W; PRITCHARD, Philip J.; McDONALD, Alan T. Introdução à mecânica dos fluidos . Tradução de Ricardo Nicolau Nassar Koury. 8. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2014.	
MUNSON, Bruce Roy; YOUNG, Donald F.; OKIISHI, Theodore H. Uma introdução concisa à mecânica dos fluidos . Tradução de Euryale de Jesus Zerbini. São Paulo: E. Blücher, 2005. 372 p.	
Mecânica dos Sólidos	
BEER, F. P. <i>et al.</i> Estática e mecânica dos materiais . Porto Alegre: AMGH, 2013.	
HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais . 7. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2010.	
TIMOSHENKO; Gere. Mecânica dos Sólidos . vol. 1 e 2. Rio de Janeiro: LTC, 1994.	
BEER, Ferdinand Pierre. Resistência dos materiais . 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. 1255 p.	

Fonte: Planos de Ensino das disciplinas Mecânica dos Fluidos e Mecânica dos Geral do Curso de Engenharia Civil da instituição de referência, 2021.

Dois dos professores entrevistados, além da docência, atuam como engenheiros civis e foram perguntados em quais situações da sua prática as ID são, efetivamente, mobilizadas. Esses professores não souberam responder a essa questão, justificando que, na prática, utilizam o *software AutoCAD* na elaboração dos projetos para desenho técnico em 2D, bem como para as modelagens 3D, sendo que é o *software* que executa o cálculo estrutural e a leitura e interpretação de desenhos para implementação dos projetos. Portanto, não efetuam cálculos manuais que poderiam evidenciar o uso das ID e não identificam o uso dessas integrais nos cálculos realizados pelo *software*.

Na seção seguinte, relatamos os procedimentos constantes da técnica τ_{ib4} dessa Praxeologia de Investigação.

5.4 Técnica τ_{ib4}

Por meio da técnica τ_{ib3} , identificamos os livros didáticos das disciplinas: Mecânica dos Fluidos e Mecânica dos Sólidos, listados no quadro apresentado na seção 5.3 deste capítulo.

Com a listagem em mãos, deslocamo-nos até a biblioteca da instituição de referência e, de posse dos livros, tivemos o cuidado de folhear cada um deles, página por página, para identificar definições, propriedades, exercícios ou problemas que indicassem a mobilização das Integrais Duplas. Esse trabalho foi bastante demorado e decepcionante, pois encontramos apenas um problema resolvido, presente em Çengel e Cimbala (2012), que indicou o uso dessas integrais como ferramenta. O problema descreve o escoamento no interior de uma tubulação cilíndrica comumente utilizada no transporte de produtos, matérias-primas e fluidos de processo, que encontra aplicações na construção civil em escoamento de óleos lubrificantes muito viscosos e em baixa velocidade, camada limite, escoamento em meios porosos (solos). O problema encontrado foi:

Considere o escoamento laminar, em regime permanente, incompressível, de um fluido newtoniano em um tubo [cilíndrico] infinitamente longo de diâmetro D ou raio $R = \frac{D}{2}$. Ignoramos o efeito da gravidade. É aplicado um gradiente constante de pressão: $\frac{\partial P}{\partial x}$ na direção de x :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = k$$

onde [em que] x_1 e x_2 são duas localizações arbitrárias ao longo do eixo x , e P_1 e P_2 são as pressões naquelas duas localizações e k uma constante. Note que adotamos um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com x em lugar de z como componente axial, ou seja, (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u_p) . Deduza uma expressão para o campo de velocidade dentro do tubo e estime a força de cisalhamento viscoso por unidade de área de superfície agindo na parede do tubo (ÇENGEL; CIMBALA, 2012, p. 390-391).

A compreensão do problema para um professor da área de Matemática demanda um estudo detalhado do contexto no qual ele está inserido que, nesta investigação, foi realizado e registrado no próximo capítulo, que trata da dimensão ecológica do problema didático estudado, uma vez que, neste momento, nossa intenção é apenas apresentar o problema e os aspectos das ID nele envolvidos, que são de interesse dos estudantes de Engenharia Civil da instituição de referência, conforme descreve a técnica.

Isso posto, de acordo com o observado na resolução do problema disponível em Çengel e Cimbala (2012), as ID foram mobilizadas: para resolver a equação diferencial utilizada para calcular a medida da vazão volumétrica do fluido quando ele está movimentando por um tubo cilíndrico, e para calcular a velocidade axial média do movimento do fluido. Esses cálculos são detalhados na seção 6.7 do próximo capítulo desta tese, durante a análise da organização praxeologia empregada na resolução do problema.

De acordo com o encontrado no livro didático analisado, inferimos que, entre outras aplicações, as ID interessam aos estudantes da Engenharia Civil da instituição de referência como ferramenta na resolução de equações diferenciais aplicadas a situações que envolvem o escoamento de fluidos no interior de tubulações cilíndricas utilizadas no transporte de produtos, matérias-primas e fluidos de processo.

Na próxima seção, apresentamos a última técnica elaborada referente à Praxeologia de Investigação II, em que sintetizamos o estudo realizado neste capítulo, que culminou no Modelo Epistemológico Dominante na instituição de referência.

5.5 Técnica τ_{ib5}

5.5.1 Introdução

Conforme vimos em Gascón (2011), o estudo da dimensão econômico-institucional de um problema didático mostra o resultado que tem produzido a ação da transposição didática nas praxeologias institucionais realizadas, evidenciando o modo como um saber é considerado, descrito e interpretado em uma instituição de ensino. O instrumento para descrever e analisar as características dessas praxeologias é o Modelo Epistemológico Dominante, cujos aspectos que o caracterizam são evidenciados por meio da análise de documentos institucionais, como PPC, matrizes curriculares, livros didáticos, entre outros, que deve ser realizado tendo como parâmetro o Modelo Epistemológico de Referência, elaborado com base no estudo epistemológico do problema didático. Vimos também que, conforme Camarena (2000b; 2002), na esfera da TMCC, por meio de suas fases epistemológica, curricular e didática, há a realização do estudo epistemológico de um objeto matemático envolvido em uma situação de ensino, bem como existe a necessidade de se conhecer tanto a instituição de ensino quanto as instituições relacionadas a um objeto matemático em estudo, como documentos institucionais, livros didáticos, entre outros, a partir do que concluímos que existe na esfera da TMCC uma análise institucional no mesmo sentido da análise institucional realizada na esfera da TAD.

Nesse sentido, por meio da Praxeologia de Investigação II elaborada para direcionar esta investigação, realizamos o estudo da dimensão econômico-institucional do problema didático considerado, tendo como referência o MER. Esse estudo evidenciou o modelo presente na instituição de referência que condiciona as praxeologias matemáticas relacionadas às ID que são efetivamente desenvolvidas com os estudantes de Engenharia Civil na instituição de

referência, bem como as atividades didáticas correspondentes que são materializadas no modelo docente desempenhado, nos permitindo compreender como as Integrais Duplas são consideradas, descritas e interpretadas no curso de Engenharia estudado.

Embora com estudo da dimensão econômico-institucional de um problema didático seja possível desvendar também as condições e restrições impostas pelas instituições de ensino que favorecem ou impedem modificações no ensino do objeto matemático abordado em um problema didático, registramos a análise com esse foco, na seção 6.2 do capítulo seguinte, em que fazemos o estudo da dimensão ecológica do problema didático desta investigação, por meio da técnica τ_{ic1} que direciona a análise dos documentos institucionais, tendo como referência o MER, para o levantamento de tais condições e restrições relacionadas ao ensino das ID no curso de Engenharia Civil da instituição de referência.

5.5.2 O Modelo Epistemológico Dominante (MED)

O MED vigente na instituição de referência foi delineado a partir das análises das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para cursos de graduação em Engenharia, publicadas na Resolução nº 11, de 11 de março de 2002; da Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019 (BRASIL, 2019); do Projeto Pedagógico do Curso de Engenharia Civil; das disposições normativas da componente curricular: Cálculo Diferencial e Integral III do curso de graduação em Engenharia Civil da referida instituição; de entrevistas realizadas com os professores da Engenharia Civil; e da análise praxeológica de livros didáticos adotados.

As interpretações provenientes da leitura dos documentos oficiais evidenciaram que o curso de Graduação em Engenharia da instituição de referência se encontra ancorado no que dispõe a legislação nacional vigente. Atualmente, encontra-se com duas matrizes curriculares em vigor, com a integralização curricular dividida em núcleos de formação básica, profissional e específica.

O curso apresenta estratégias voltadas para que a formação do estudante reflita a sua futura atuação profissional, sendo concernentes com o desenvolvimento de atitudes éticas e sociais. Entre essas estratégias, destacamos os projetos interdisciplinares semestrais que têm como objetivo contribuir para o desenvolvimento das competências previstas para cursos de Engenharia e para a desfragmentação entre as disciplinas oferecidas no curso, permitindo que os conteúdos e as atividades didáticas se relacionem por meio desses projetos que as interligam na tentativa de que passem a ter uma intencionalidade comum.

Em ambas as matrizes curriculares em vigor, as Integrais Duplas são abordadas na disciplina Cálculo Integral e Diferencial III, com uma carga horária de 80 horas, alocada no eixo de formação básica da Engenharia, ministrada no terceiro semestre do curso, em turmas formadas por estudantes das diferentes habilitações em Engenharia oferecidas pela instituição, tornando limitada a implementação de praxeologias que sejam voltadas para uma determinada habilitação da Engenharia.

Assim como no MER elaborado nesta investigação, as ID estão presentes no estudo de cálculo de medidas de área de regiões planas e medidas de volume de sólidos e são discutidas em coordenadas cartesianas e polares. As ID interagem com os objetos matemáticos: Integrais Triplas, cálculo vetorial: campos vetoriais, integrais curvilíneas, independência de caminhos, além de serem ferramentas para o Teorema de Green, Teorema de Gauss, Teorema de Stokes e Equações Diferenciais.

As praxeologias didáticas realizadas no ensino dessas integrais tem o discurso teórico-tecnológico ancorado em bases intuitivas relativas ao cálculo de medidas de áreas e de volumes por somas de Riemann e, posteriormente, no Teorema de Fubini, em que as definições, propriedades e conceitos das integrais de funções reais de uma variável real são estendidas às Integrais Duplas. Tais praxeologias são organizadas por meio de aulas expositivas dialogadas e de aulas com metodologias ativas, tendo *softwares* matemáticos utilizados como recursos tecnológicos com a intenção, principalmente, de facilitar a visualização de regiões de integração vinculadas ao cálculo de medidas de áreas e volumes.

Quanto à interação das ID com outras situações com fins em outros contextos e em disciplinas que não são da área de Matemática, a análise documental revelou que as Integrais Duplas são encontradas no nicho aplicativo da Física, estando presente na disciplina Mecânica Geral, devido ao lugar que as funções de várias variáveis e suas respectivas representações gráficas no plano bidimensional ou no espaço ocupam em problemas inerentes a elas que abordam massa, volume, Momento de Inércia e centro de gravidade. Da mesma forma, no MER, verificamos que as ID, alimentadas pelas funções de várias variáveis, interagem com a Física em contextos que abordam massa, tempo, volume, Momento de Inércia e centro de gravidade.

Quanto à interação das ID com disciplinas da área de Matemática, foi observada a presença dessas integrais em Cálculo Numérico. No entanto, vale ressaltar que a Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL) e Geometria Descritiva alimentam as Integrais Duplas

relativo ao estudo das superfícies em geral e, principalmente, às quádricas e cônicas com ênfase nas suas representações geométricas e analíticas.

No que diz respeito ao livro didático adotado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, em relação às praxeologias didáticas, elas parecem privilegiar o uso de técnicas, de tecnologias e teorias previamente explicadas pelo professor, pois:

- o capítulo que trata das ID, tem uma organização em que os saberes referentes às ID são apresentados de forma linear;
- inicia-se com o título e, posteriormente, é dividido em seções nas quais apresentam, geralmente, uma explicação introduzindo o objeto abordado, seguida de definições, teoremas e propriedades (em que as demonstrações ou não são apresentadas ou estão disponíveis no apêndice no final do livro) entremeados de exemplos resolvidos que são finalizadas com exercícios propostos organizados em grupos que propiciam o treinamento de uma mesma praxeologia matemática, tendo em vista que, para a solução desses, são mobilizadas técnicas decorrentes de um mesmo tipo de tarefa subsidiadas por um bloco teórico-tecnológico comum.

Não há uma preocupação efetiva com a produção de modelos matemáticos que atentam para a demanda do curso de Engenharia Civil, tendo as Integrais Duplas empregadas como ferramentas no desenvolvimento de praxeologias inerentes a problemas próprios dessa Engenharia.

Com relação às praxeologias matemáticas, essas têm início na realização de partições em superfícies decorrentes de funções de duas variáveis contínuas e limitadas nas quais são aplicados os conceitos análogos aos desenvolvidos por Riemann para situações similares, decorrentes de funções de uma variável real. Confrontando com o MER elaborado nesta investigação, salvo a linguagem simbólica utilizada e o sólido de referência (no MER um cilindro em Stewart um prisma de base retangular), o livro didático apresenta argumentos das praxeologias matemáticas identificadas em quase todas as questões que o compõem. Embora o autor admita a continuidade de uma função como condição suficiente para a existência da integral, essa condição não é analisada nas praxeologias matemáticas vistas nos exemplos ou exercícios propostos. Além disso, a generalização de integrais para domínios ilimitados não é discutida.

Ainda em relação às praxeologias matemáticas apresentadas no livro didático, vale ressaltar que as citadas têm o propósito de introduzir as ID, estabelecendo as condições necessárias para que essas integrais sejam interpretadas como uma medida de área ou de volume, no entanto, o autor solicita a tarefa de calcular o volume e a área, bem como em seções posteriores, solicita a tarefa de calcular a massa, a densidade, entre outras grandezas que não podem ser calculadas, uma vez que grandezas são elaboradas a partir de uma ideia mental, para as quais o que podemos calcular é um valor numérico expressando sua medida e não a própria grandeza. No MER elaborado, esse aspecto foi cuidadosamente evitado. Isso posto, essas tarefas devem ser reelaboradas pelo professor, devendo ser consideradas durante o planejamento e a execução de suas praxeologias didáticas.

Ainda quanto ao livro didático, são propostas também praxeologias matemáticas em que o discurso teórico-tecnológico é fundamentado pelo Teorema de Fubini, com técnicas desenvolvidas por meios algébricos associados ou não a um registro de representação geométrica. Nessas praxeologias, o Teorema de Fubini é proposto para integrais iteradas em coordenadas cartesianas e, posteriormente, para integrais iteradas cujas coordenadas cartesianas foram convertidas em coordenadas polares, o que está em conformidade com o MER elaborado.

Do ponto de vista do uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), são propostos problemas nos quais as praxeologias matemáticas são empregadas por meio de recursos de um Sistema de Computação Algébrica, o *Derive*, *Maple*, *Mathematica* ou o TI-89/92. No entanto, os comandos para essas construções não são abordados no livro.

Com as entrevistas realizadas com professores das disciplinas dos eixos básico e específico da Engenharia Civil, reafirmamos a presença das ID no contexto da disciplina Mecânica Geral e sua presença no contexto das disciplinas Mecânica dos Fluidos, mobilizadas no estudo de sistemas de escoamento de fluidos, e Mecânica dos Sólidos, mobilizadas no estudo de deflexões excessivas de vigas em prédios na construção civil.

Ao analisar o livro didático dessas disciplinas, inferimos que as ID interessam aos estudantes da Engenharia Civil da instituição estudada para auxiliar na resolução de equações diferenciais aplicadas em situações que envolvem o escoamento de fluidos. No entanto, não identificamos problemas ou situações que descrevessem a forma na qual essas integrais são mobilizadas no estudo de deflexões excessivas de vigas em prédios na construção civil.

No estudo epistemológico do problema didático realizado nesta investigação, vimos que as ID são utilizadas como ferramentas para reduzir equações diferenciais em equações algébricas; não foram abordadas aplicações dessas integrais no estudo de deflexões excessivas

de vigas em prédios na construção civil. Quanto à aplicação no estudo de escoamento dos fluidos, na semana de entrega desta tese, tivemos acesso a alguns artigos que versam sobre a *Teoria do Calórico*, elaborada pelos estudiosos do século XVIII, mas que perdurou até o início do século XIX; nela, o calor era concebido como uma substância fluida denominada calórico.

O calórico é um fluido elástico e suas partículas se repelem mutuamente; as partículas do calórico são atraídas fortemente pelas formas de matéria e estas atraem as partículas do calórico com intensidades diferentes; o calórico é indestrutível, ele não pode ser criado; o calórico pode ser sensível ou latente (sentido ou armazenado respectivamente), onde [em que] no estado latente seria combinado “quimicamente” com partículas da matéria para mudar de sólido para líquido ou se líquido em vapor (CORREIA; LIMA; MAGALHÃES, 2008, p. 4).

Os cientistas da época, segundo Correia, Lima e Magalhães (2008), acreditavam que essa substância fluida existia no interior dos corpos e que quanto maior fosse a quantidade de calórico presente, maior seria a sua temperatura. Assim, quando dois corpos com temperaturas diferentes eram colocados em contato, haveria o escoamento do calórico do corpo com maior temperatura para o corpo de menor temperatura, que só seria interrompido quando as temperaturas dos dois corpos atingissem o equilíbrio térmico. Pensando nesse aspecto, o escoamento de fluidos estaria diretamente relacionado à questão da transferência de calor que foi abordada no estudo epistemológico realizado nesta investigação, embora hoje saibamos que calor não é um fluido.

Não foram observados aspectos históricos relacionados ao estudo do objeto matemático nos documentos institucionais analisados; nas entrevistas com os professores essa questão não foi levantada. É importante relatar que o MER foi construído com base no estudo epistemológico do problema didático desta investigação, sendo, portanto, as suas questões justificadas em contextos históricos, com exceção das questões que abordam as ID em coordenadas polares.

Com a síntese do Modelo Epistemológico Dominante, finalizamos este capítulo. No capítulo seguinte, apresentamos o estudo da dimensão ecológica do problema didático elaborado nesta investigação, no qual propomos, também, um Modelo Alternativo para o ensino de alguns aspectos das Integrais Duplas, por meio de uma atividade que estabelece vínculos entre essas integrais e uma situação de Engenharia.

6 ESTUDO DA DIMENSÃO ECOLÓGICA DO PROBLEMA DIDÁTICO

6.1 Introdução

Conforme relatamos no capítulo teórico-metodológico desta investigação, é a dimensão ecológica de um problema didático que estuda as interações que acontecem entre as organizações praxeológicas do problema didático, bem como serem, nessa dimensão, evidenciadas as condições e restrições que favorecem ou impedem modificações no ensino de um objeto matemático quando se tem a intenção de propor novas organizações praxeológicas para o trabalho com tal objeto em sala de aula.

Essas novas organizações praxeológicas são entendidas na TAD como um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA), elaborado para o ensino de um objeto matemático e contrapõe o paradigma didático (modelo didático) vigente na instituição de ensino, ou seja, o Modelo Epistemológico Dominante na instituição em estudo.

Relatamos também que a análise ecológica de um objeto de conhecimento é organizada por meio da alocação desse objeto no seu *habitat* (seu local de moradia e o ambiente conceitual) e o seu *nicho*, que determinam a sua função no sistema de objetos com os quais ele interage. Ainda, há ausência de sentido um objeto matemático em situações de ensino de disciplinas da área de Matemática em cursos de graduação nos quais a Matemática está a serviço, pois, geralmente, esse objeto é abordado sem estabelecer relação com contextos da área da graduação, bem como sem estabelecer relação com o campo de atuação profissional pretendido.

Nesse sentido, conforme Camarena (2021), os estudantes recebem os saberes matemáticos isolados, sem sentido, observando uma desconexão entre o que aprendeu sobre a Matemática na universidade e as questões em que precisam mobilizá-la, tendo em vista seus exercícios profissionais, que pode se refletir em dificuldades na construção do conhecimento do objeto matemático pelo estudante. Essa questão é também observada no âmbito da TAD e pode significar, talvez, a perda de razão de ser do um objeto em estudo – especialmente nas reflexões acerca do objeto matemático – observada em alguns Modelos Epistemológicos Dominantes em algumas instituições de referência.

Neste capítulo, apresentamos o estudo da dimensão ecológica do problema didático desta investigação por meio da Praxeologia de Investigação III, praxeologia menor da PID tomada nesta investigação, elaborada no capítulo teórico-metodológico, ao mesmo tempo em que propomos um evento contextualizado para o ensino de alguns aspectos da ID no contexto

do curso de Engenharia Civil, como uma proposta alternativa para o ensino dessas integrais, para se contrapor ao paradigma didático vigente na instituição de referência, considerando, entretanto, as condições e restrições impostas pela instituição, identificadas por meio do estudo epistemológico.

Lembramos que eventos contextualizados, segundo a TMCC, são problemas ou projetos que desempenham o papel de entes que relacionam a Matemática a outras áreas da ciência em que ela está a serviço em um ambiente de ensino e/ou de aprendizagem, em que um objeto matemático é tomado como uma ferramenta para o trabalho interdisciplinar com vistas à formação integral do estudante.

Em conformidade com Gascón e Nicolás (2021), vimos que a organização praxeológica, como uma ferramenta de ensino de um objeto matemático assumida no âmbito da TAD, não descreve quaisquer propriedades intrínsecas a esse objeto, mas as diferentes funções que ele pode desempenhar em uma atividade, considerando as condições e restrições impostas pela instituição de ensino. Dessa forma, essas praxeologias podem ser elaboradas, no caso desta investigação, tendo as Integrais Duplas direcionadas ao papel que elas podem desempenhar na instituição de referência. Portanto, essas praxeologias podem ser elaboradas de forma a estabelecer vínculos entre essas integrais, as outras ciências ou atividades cotidianas, como preconiza a TMCC, por meio de uma organização praxeológica no sentido da TAD. Desse modo, um EC incorpora organizações praxeológicas.

Nesse capítulo, desenvolvemos, então, a Praxeologia de Investigação III, construída tendo por base a tarefa T_{ic1} : elaborar, a partir do problema no contexto de Mecânica dos Fluidos, identificado por meio do estudo econômico-institucional do problema didático desta investigação, um evento contextualizado como uma proposta de ferramenta a ser utilizada no processo de ensino de Integrais Duplas na formação do engenheiro civil. Para cumprir essa tarefa, elaboramos as subtarefas:

- ST_{ic1} : Analisar quais as condições que permitem explicar o estado atual das organizações didáticas e das organizações matemáticas relacionadas às ID no curso de Engenharia Civil da Instituição estudada;
- ST_{ic2} : Analisar como o Modelo Epistemológico Dominante condiciona a forma de organizar o ensino (e, conseqüentemente, o estudo) de ID no curso de Engenharia Civil da Instituição estudada;
- ST_{ic3} : Construir um Modelo Alternativo para o Ensino de Integrais Duplas;

- ST_{ic4} : Analisar quais condições dificultam ou impedem que determinadas características das organizações matemáticas e das organizações didáticas associadas ao Modelo Alternativo para o Ensino de ID construído se desenvolvam no curso de Engenharia Civil da Instituição estudada e de onde provém tais restrições;
- ST_{ic5} : Analisar que condições devem ser instauradas para que seja possível a vida de certas organizações matemáticas e de certas organizações didáticas com as características inerentes àqueles presentes no Modelo Alternativo para o Ensino de ID construído.

Assim, nas seções seguintes, explicitamos a aplicação das técnicas inerentes à Praxeologia de Investigação III de forma a cumprir as tarefas vinculadas a essa praxeologia, a qual foi sintetizada na Figura 63 e se fundamenta na articulação da TMCC com a TAD tomada como Praxeologia de Investigação Didática nesta investigação.

6.2 Técnica τ_{ic1}

Um objeto matemático abordado em um sistema didático está sujeito a condições e restrições impostas pelas instituições de ensino que favorecem ou impedem modificações no ensino de um objeto matemático. Segundo Chevallard (2002), para avaliar essas condições e restrições, é necessário determinar em que nível na escala de codeterminação didática (*civilização, sociedade, escola, pedagogia, disciplina, domínio, setores, temas e sujeito*) do sistema educacional elas ocorrem, pois a relação do indivíduo com a instituição pode articular tanto os níveis superiores (*civilização, sociedade, escola, pedagogia*) com os níveis inferiores (*domínio, setores, temas e sujeito*), tendo a disciplina como nível de referência.

Segundo Bolea, Bosch e Gascón (2001), as restrições podem ser decorrentes da representação institucional, da necessidade de avaliar o processo de ensino do objeto matemático, do tempo destinado à atividade didática e da necessidade de transparecer que o saber ensinado é definitivo, devendo proporcionar a construção do conhecimento pelo estudante.

Nesse sentido, tomamos o estudo dos documentos institucionais realizado na dimensão econômico-institucional do problema didático na seção anterior desta tese como referência para efetivar a técnica τ_{ic1} e registrar as análises aqui realizadas do ponto de vista da dimensão ecológica do problema didático.

O curso de Engenharia Civil da instituição de referência foi organizado tendo como orientação as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para cursos de graduação em Engenharia, publicada na Resolução nº 2 (BRASIL, 2019), e está inserido no contexto de formação de profissionais necessários à sociedade. O Projeto Pedagógico do Curso de Engenharia Civil (PPC/EC) foi construído refletindo a necessidade de que as organizações didáticas efetivadas por seus professores reflitam a preocupação com uma formação voltada à futura atuação profissional do egresso, com ênfase nas competências necessárias ao exercício da profissão, sem perder de vistas as competências necessárias à formação do cidadão, embora o PPC/EC não tenha uma estrutura curricular organizada por competências.

Nesse contexto, as escolhas pedagógicas dos professores das diferentes disciplinas que compõem a matriz curricular do curso devem contemplar questões além do saber a ser ensinado inerente a um objeto de estudo e devem permitir o estabelecimento de relações desses objetos com as questões relativas aos níveis de codeterminação didática, em um âmbito mais global, primando pela desfragmentação entre as disciplinas por meio de propostas interdisciplinares.

Nesse sentido, as escolhas pedagógicas dos professores devem permitir que os conteúdos e as atividades didáticas se relacionem, principalmente por meio de um projeto interdisciplinar elaborado coletivamente, e que, como unidade curricular foi concebido fundamentado na Aprendizagem Significativa de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

No PPC/EC, explicita-se a obrigatoriedade de inserção, neste projeto, de todas as disciplinas ministradas em cada período. A presença na matriz curricular do curso, de forma institucionalizada, de um projeto interdisciplinar aglutinando as diferentes disciplinas que o estudante está cursando no semestre é, a nosso ver, uma condição institucional que favorece modificações no ensino de ID no curso de Engenharia Civil para direcioná-lo a uma abordagem mais vinculada a situações da futura atuação profissional do egresso ou das outras disciplinas nos cursos nas quais a mobilização de conhecimentos acerca das ID é requerida, como preconizado no domínio do Paradigma Didático da Matemática em Contexto, conforme explicitamos no capítulo teórico-metodológico.

É importante relatar que, devido ao projeto interdisciplinar, é comum na instituição um docente de uma disciplina transitar em outra, caso haja necessidade da explicitação ou esclarecimento de algum conteúdo de uma área à outra, o que, ao nosso ver, é um fator que favorece mudanças no trabalho com os objetos de ensino.

No entanto, apesar deste projeto interdisciplinar presente como unidade curricular, no cotidiano do curso, evidenciam-se alguns fatores que, se não impedem, ao menos dificultam mudanças no trabalho com os objetos de ensino, como é o caso das ID. Um deles é a necessidade institucional de se manter, em avaliações externas de âmbito nacional, com os índices mais satisfatórios possíveis, o que, ao menos em um primeiro momento, em razão dos estranhamentos oriundos de uma ruptura com o paradigma até então vigente, poderia ser dificultado pela implementação de estratégias de ensino consonantes com um novo paradigma, como o da Matemática em Contexto. Outro aspecto que pode se constituir como um entrave para redirecionamentos no ensino dos conteúdos é a organização praxeológica presente em cada um dos livros didáticos adotados nas diferentes disciplinas do curso.

Especificamente em relação à organização curricular, no que concerne às Integrais Duplas, essas são ensinadas na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, oferecida com uma carga horária de 80 h/a, no terceiro semestre do curso, em que são ministradas quatro aulas semanais, em dois blocos de duas aulas, ministradas em dois diferentes dias da semana. Há duas matrizes curriculares em andamento, entretanto, em ambas, as ID são oferecidas dessa forma.

Quanto ao livro didático adotado na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, em relação à praxeologia didática, nesse material, o ensino de Integrais Duplas está organizado em seis seções. Em cada uma delas, há uma introdução que explicita o conteúdo abordado, seguida de deduções ou demonstrações de fórmulas que são utilizadas em exemplos resolvidos, explicados passo a passo e, por fim, são propostos exercícios organizados a partir de seus graus de dificuldade, dos mais simples aos mais complexos.

O uso de Tecnologias da Informação e Comunicação que poderiam auxiliar, principalmente, nas construções pelos estudantes de regiões de integração, e promover melhor compreensão do processo de construção gráfica dessas regiões e de suas relações com as suas respectivas representações algébricas, é indicado para a resolução de alguns exercícios propostos.

Portanto, percebe-se que, ainda que o uso de recursos tecnológicos seja indicado apenas pontualmente como auxiliar na resolução dos exercícios propostos, o próprio livro didático adotado já evidencia essa alternativa. Mas se esse aspecto for bem explorado pelo professor, de forma que, a partir dele, os estudantes percebam as possibilidades trazidas pelas tecnologias para a resolução de problemas envolvendo ID, esse pode se constituir como um facilitador no redirecionamento do ensino das ID, no sentido de, em vez de se enfatizarem os aspectos procedimentais, por mais complexos que sejam, esses podem ser realizados facilmente com o auxílio dos recursos tecnológicos, visando a uma compreensão efetivamente dos conceitos inerentes às ID que permitem aplicar os conhecimentos relativos a esse objeto matemático em diferentes campos do conhecimento e, particularmente, em situações específicas da Engenharia Civil ou das áreas que compõem a formação de um engenheiro com essa habilitação.

Em relação às praxeologias matemáticas desenvolvidas no livro didático, concluímos que as definições, exemplos, exercícios e métodos discutidos permitem apoiar o discurso teórico nas bases intuitivas relativas ao cálculo de medidas de áreas e de volumes em geral, utilizando-se da Integral de Riemann e do Teorema de Fubini, principalmente. Não há preocupação com demonstrações de teoremas.

Podemos afirmar que, devido ao fato de o livro utilizado como principal bibliografia nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral III na instituição de referência ser uma obra destinada à formação de estudantes de diferentes cursos da área de Ciências Exatas, e mesmo de outras áreas que contemplam o Cálculo nas formações básicas de seus estudantes, a abordagem proposta para os conteúdos é bastante genérica, na qual se fazem presentes apenas as aplicações mais clássicas das ID.

Não há, nesse livro, situações específicas da Engenharia Civil ou das demais disciplinas que compõem a formação de um profissional dessa área nas quais os conhecimentos concernentes às ID são requeridos, o que se torna um dificultador para que os professores trabalhem com aplicações desse conteúdo de maneira que sejam, efetivamente, mais próximas dos interesses dos estudantes e de suas futuras atuações profissionais, já que, na instituição de referência, os professores responsáveis pelo ensino de Cálculo, na maioria das vezes, têm formação em Matemática e, em geral, não dominam as aplicações específicas dessa ciência nas diferentes habilitações da Engenharia, particularmente, no caso deste estudo, a Civil.

Quanto aos livros didáticos adotados nas disciplinas que não são da área de Matemática, observamos que as Integrais Duplas são abordadas em aplicações concernentes ao estudo de Mecânica Geral, de Mecânica dos Fluidos e de Mecânica dos Sólidos, em que essas integrais são alocadas no nicho aplicativo da Física.

Quanto às praxeologias didáticas pensadas para as aulas de Cálculo Diferencial e Integral III, essas são realizadas por meio de aulas expositivas dialogadas, com o uso das metodologias ativas e aulas práticas em laboratório de informática, com o uso do *software* GeoGebra, principalmente, para facilitar a compreensão pelos estudantes das representações, em diferentes registros de representação semiótica, de regiões de integração. A contextualização das ID é situada nas aplicações comumente discutidas nas disciplinas de Cálculo. A familiaridade do corpo docente com as metodologias ativas é um aspecto que pode se constituir como facilitador de um reorientar do ensino das ID na direção do Paradigma Didático da Matemática em Contexto, no qual há grande valorização da construção do conhecimento pelo próprio estudante, por meio do trabalho colaborativo em eventos contextualizados, em equipes com estudantes de diferentes perfis.

Quanto ao processo avaliativo, esse é realizado por meio das atividades de participação e produção dos estudantes durante a aula, denominadas *Participação e Produção na Aula (PPA)*, uma prova objetiva (P1) e uma prova discursiva (P2), aplicadas de acordo com as datas previstas no calendário acadêmico construído pela Pró-Reitoria de Ensino, além da participação e envolvimento do estudante no projeto interdisciplinar. Decorrentes dessa organização do processo avaliativo na instituição de referência, a nosso ver, revelam-se tanto aspectos facilitadores como entraves para uma reorientação do ensino de qualquer conteúdo matemático, mas das ID particularmente no caso desta investigação, conforme o Paradigma Didático da Matemática em Contexto.

Conforme afirma Camarena (2017), durante o processo de trabalho com eventos

contextualizados,

[...] não são avaliadas apenas as aprendizagens, mas também os processos de desenvolvimento integral do estudante, como seu desenvolvimento na equipe, sua disposição para o trabalho em grupo, seu compromisso com as tarefas solicitadas. [...] Ao final do trabalho com determinado tema ou conceito, as aprendizagens dos estudantes são avaliadas por meio de atividades ou de eventos contextualizados planejados especialmente para esse fim. [...] Os instrumentos de avaliação podem ser um ou vários dos seguintes tipos: questionários, exercícios, elaboração de mapas conceituais, elaboração de uma síntese sobre o tema trabalhado, realização de um trabalho sobre a história dos conceitos etc. (CAMARENA, 2017, p. 14).

Essa avaliação ao longo do processo é adequada ao que, no processo avaliativo em vigor na instituição de referência, é denominado de Participação e Produção na Aula. Da mesma forma, o projeto interdisciplinar pode-se constituir como um evento contextualizado ou como um conjunto de eventos contextualizados desenvolvidos, não exclusivamente com esse fim, mas também no intuito de oportunizar a avaliação das aprendizagens e de outros aspectos relacionados ao desenvolvimento integral do estudante. O entrave inerente ao modo como o processo avaliativo é conduzido na instituição decorre da necessidade da realização de provas (P1 e P2) em datas previamente estabelecidas pela Pró-Reitoria de Ensino, o que pode dificultar, em alguns momentos, o trabalho com eventos contextualizados que, em geral, requerem dinâmicas que exigem cronogramas mais flexíveis para cumprimento dos conteúdos e para avaliações.

Quanto ao ecossistema da Matemática, vimos que o *habitat* da Integral Dupla é o Cálculo Diferencial e Integral que tem como nicho principal o cálculo de medida do volume de sólidos recorrendo às funções de duas variáveis, que foi verificado tanto na instituição de referência quanto no MER. Vimos que o ensino dessas integrais demanda saberes relacionados a outros objetos matemáticos, entre eles se destacam números, funções (limites, derivadas e integrais), geometria (plana, espacial e analítica), superfícies (cônicas e quádras), coordenadas (cartesianas e polares), que foram identificados por meio da observação das praxeologias matemáticas presentes nos livros didáticos, bem como no estudo epistemológico realizado. Além disso, as ID são importantes para o estudo de outros ramos da Matemática, como funções de variáveis complexas, equações diferenciais e integrais triplas, também de encontrar aplicações em outras áreas das ciências, como Engenharia, Astronomia e Física.

Assim, uma proposta para o ensino das ID na instituição de referência deve considerar:

- as praxeologias que já foram desenvolvidas e legitimadas pelo âmbito científico que foram levantadas pelo estudo epistemológico e refletidas na construção do MER elaborado nesta investigação;
- a presença na matriz curricular do curso de Engenharia Civil, de forma institucionalizada, de um projeto interdisciplinar, aglutinando as diferentes disciplinas que o estudante está cursando no semestre, o que favorece uma abordagem das ID articulada a outros contextos além do de Matemática;
- a necessidade de, apesar de romper, ao menos em alguns aspectos, com o paradigma didático vigente, manter índices considerados adequados pela instituição nas avaliações externas, os quais, em alguma medida, também são decorrentes do paradigma didático vigente;
- o fato de os professores que ministram Cálculo Diferencial e Integral III, disciplina na qual as ID são estudadas, terem, em geral, formação na área de Matemática, não dominarem as aplicações específicas dessa ciência na Engenharia Civil e não terem à disposição essas aplicações no livro didático usualmente empregado em suas aulas;
- as indicações presentes no livro didático empregado, ainda que de forma pontual, ao uso de recursos tecnológicos no trabalho com as ID;
- a familiaridade do corpo docente com as metodologias ativas;
- a valorização, no processo avaliativo em vigor na instituição, das atividades de participação e produção dos estudantes durante as aulas e de suas participações no projeto interdisciplinar;
- a necessidade de o processo avaliativo contemplar provas realizadas em datas predeterminadas pela Pró-Reitoria de Ensino da instituição;
- que, segundo a Transposição Didática, quando o professor organiza as suas ações praxeológicas para a sua aula, ele imprime a partir do saber sábio (científico) um saber a ensinar que ainda sofrerá as modificações no processo do ensino em sala de aula, pois o docente imprime a sua interpretação pessoal e a transmite em uma linguagem própria, produzindo um significado para o saber ensinado;
- que a Transposição Contextualizada visa à formação integral do estudante com finalidade na profissão, devendo o saber sábio ser transformado em um saber de aplicação antes de se constituir um saber ensinado.

Assim, procuramos elaborar a Proposta Alternativa para o ensino das ID levando em consideração todas as condições e restrições aqui levantadas.

6.3 Técnica τ_{ic2}

Conforme visto em Camarena (2017), as fontes de contexto consideradas na elaboração de um EC estão relacionadas à ciência em estudo e consideram a vinculação dessa ciência com as disciplinas da graduação em estudo, com a atuação profissional dos estudantes após sua formação e com as situações da vida cotidiana do estudante que mobilizam essa ciência. De acordo com essas fontes, os EC são classificados nos níveis cognitivos: nível baixo se a fonte de contexto é a vida cotidiana dos estudantes, nível médio se a fonte de contexto é uma ou mais disciplinas cursadas pelo estudante durante a graduação e nível alto ou complexo se a fonte de contexto é a futura atuação profissional do estudante.

O problema escolhido para desencadear o EC elaborado nesta investigação, apresentado no Quadro 66, foi selecionado a partir do livro didático de Mecânica dos Fluidos, disciplina que compõe a matriz curricular da graduação em Engenharia Civil, tendo, portanto, um nível de complexidade médio.

Quadro 66 – Problema

Considere o escoamento laminar, em regime permanente [estacionário], incompressível, de um fluido newtoniano em um tubo [cilíndrico] infinitamente longo de diâmetro D ou raio $R = \frac{D}{2}$. Ignoramos o efeito da gravidade. É aplicado um gradiente constante de pressão: $\frac{\partial P}{\partial x}$ na direção de x :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = k, \quad (1)$$

em que x_1 e x_2 são duas localizações arbitrárias ao longo do eixo x , e P_1 e P_2 são as pressões naquelas duas localizações e k uma constante real. Note que adotamos um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com x em lugar de z como componente axial, ou seja, (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u_p) . Deduza uma expressão para o campo de velocidade dentro do tubo e estime a força de cisalhamento viscoso por unidade de área de superfície agindo na parede do tubo.

Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p.390-391

6.4 Técnica τ_{ic3}

O problema que desencadeou a construção do EC desta investigação, como já relatamos neste texto, foi encontrado no livro didático da disciplina Mecânica dos Fluidos ofertada na graduação em Engenharia Civil da instituição de referência e descreve o escoamento no interior

de uma tubulação cilíndrica comumente utilizada no transporte de produtos, matérias-primas e fluidos de processo, encontrando aplicações na construção civil no planejamento e implementação em situações de escoamento de óleos lubrificantes muito viscosos e em baixa velocidade, camada limite e escoamento em meios porosos (solos).

Nesse sentido, as Integrais Duplas, cujo *habitat* é o Cálculo Diferencial e Integral, ao serem abordadas no problema proposto, encontram-se relacionadas ao nicho aplicativo da Física, mais precisamente ao cálculo da vazão volumétrica de um fluido, conforme foi especificado no decorrer da elaboração deste EC.

6.5 Técnica τ_{ic4}

O objetivo do EC é apresentar ao futuro engenheiro civil uma aplicação das Integrais Duplas que usualmente não está presente na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, oportunizando a ele vivenciar uma situação na qual essas integrais são empregadas, no cálculo da medida da vazão volumétrica determinada durante o escoamento laminar, estacionário, incompressível, de um fluido newtoniano em um tubo cilíndrico infinitamente longo.

6.6 Técnica τ_{ic5}

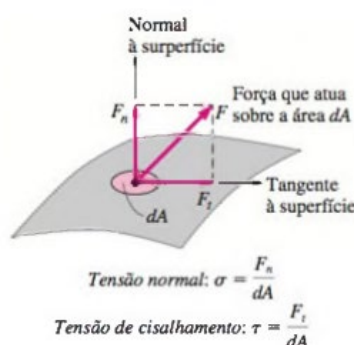
Para Camarena (2017), um problema para ser utilizado em um EC deve ser tomado em outra área do conhecimento que não a Matemática, sendo necessário então fundamentar o contexto em que o problema está inserido, isto é, é preciso localizar o problema no seu nicho aplicativo.

Assim, no caso em análise, o problema está inserido na Dinâmica, ramo da Mecânica que, segundo Çengel e Cimbala (2012), estuda os corpos em movimento. De maneira mais específica, o problema se localiza no domínio da *Mecânica dos Fluidos*, a parte da Física que trata do comportamento dos fluidos em movimento e da interação entre esses fluidos e sólidos ou entre outros fluidos e a fronteira que os contém. Os fluidos, segundo os autores, são substâncias no estado líquido ou gasoso que deformam continuamente sob a influência da tensão de cisalhamento⁴⁴ aplicada, que muda a sua forma. Um *fluido newtoniano* é aquele no qual tensão de cisalhamento é linearmente proporcional à taxa de deformação do cisalhamento.

⁴⁴ O *cisalhamento* é aqui entendido como o fenômeno de deformação ao qual um corpo está sujeito quando as forças que agem sobre ele provocam um deslocamento em planos diferentes, mantendo o volume constante. Essa

De acordo com Çengel e Cimbala (2012), a tensão é determinada dividindo-se a medida da força pela medida da área sobre a qual ela atua; a tensão normal é a componente da força que atua sobre a superfície por unidade de área e a tensão de cisalhamento é o componente tangencial da força que atua sobre uma superfície por unidade de área. Essas definições são ilustradas na Figura 64.

Figura 64 – Tensão normal e tensão de cisalhamento na superfície de um elemento de um fluido



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p. 03

Segundo Çengel e Cimbala (2012), o escoamento de um fluido se classifica de acordo com as características que possui: é um *escoamento viscoso* se duas camadas de fluidos se movem uma em relação à outra, e a força de atrito produzida faz com que a camada mais lenta dos fluidos diminua a velocidade da camada mais rápida; no *escoamento interno*, o fluido está contido em um espaço limitado por uma superfície sólida; no escoamento incompressível de um fluido líquido, a densidade permanece aproximadamente constante ao longo do tempo e o volume do fluido permanece inalterado durante o movimento, ao contrário do que acontece no *escoamento compressível* de um fluido gasoso; no *escoamento laminar*, a velocidade do movimento do fluido é constante, ele se desloca de forma ordenada e em camadas suaves; se a velocidade passa a flutuar, causa um movimento do fluido de forma desordenada e o escoamento, nesse caso, é *turbulento*; um escoamento que se alterna entre laminar e turbulento é chamado de *transitório*; no *escoamento forçado*, o fluido é impulsionado por uma bomba ou ventoinha; no *escoamento estacionário* ou em *regime permanente* não há mudança de velocidade, temperatura ou qualquer propriedade do fluido ao longo do tempo de escoamento. Além disso, os escoamentos podem ser *uni*, *bi* ou *tridimensionais* se suas velocidades variam

tensão é proporcional à taxa de deformação e tende para um valor constante, por isso mantém a deformação do fluido, conforme explicam Çengel e Cimbala (2015).

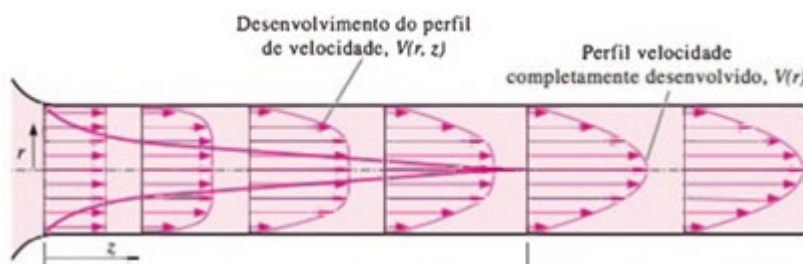
em uma, duas ou três direções dimensionais, respectivamente, e podem envolver a geometria tridimensional, podendo ser representados em coordenadas cartesianas ou cilíndricas.

Çengel e Cimbala (2012) esclarecem que, quando duas camadas fluidas em estado líquido se movem uma em relação à outra, desenvolve-se uma força de atrito entre elas e a camada mais lenta tende a reduzir a velocidade da camada mais rápida, causando uma resistência interna ao escoamento, quantificada pela propriedade do fluido denominada *viscosidade*, uma medida da aderência interna do fluido, causada por forças coesivas entre as moléculas que o compõem. Todo o escoamento dos fluidos envolve, em alguma medida, o efeito viscoso, e quando em um escoamento esse efeito é significativo, é denominado *escoamento viscoso*. No entanto, há escoamentos de interesse prático, em que as forças viscosas são desprezíveis quando comparadas a forças inerciais e de pressão, podendo desconsiderá-las, o que simplifica a análise envolvida, sem prejuízo considerável de precisão.

Os autores esclarecem, ainda, que a dimensionalidade do escoamento de um fluido depende da escolha do sistema de coordenadas utilizado para análise, com a velocidade V do escoamento dada em coordenadas cartesianas ($V(x, y, z)$) ou cilíndricas ($V(r, \theta, z)$), o que pode facilitar ou não a análise do movimento. O campo de escoamento estacionário de um fluido por meio de um cano cilíndrico acoplado a um reservatório, ilustrado na Figura 65, é bidimensional na região de entrada, pois a velocidade pode variar na direção radial r e na direção axial z , que é a direção de escoamento de fluido dada pelo eixo do cano cilíndrico perpendicular a qualquer uma das seções transversais circulares. O perfil da velocidade desenvolve-se completamente, permanecendo sem alterações após se distanciar da entrada.

Esse tipo de escoamento é definido como *completamente desenvolvido*. Portanto, um escoamento completamente desenvolvido ao longo de um cano circular é unidimensional, pois a velocidade varia na direção radial r , mas não nas direções angular θ e axial z , indicando que o perfil da velocidade será o mesmo em qualquer ponto ao longo do eixo z e o movimento simétrico em torno do eixo do cano. No entanto, a dimensionalidade aqui foi assumida num sistema de coordenadas cilíndricas, isso significa que o escoamento é unidimensional em relação a esse sistema de coordenadas.

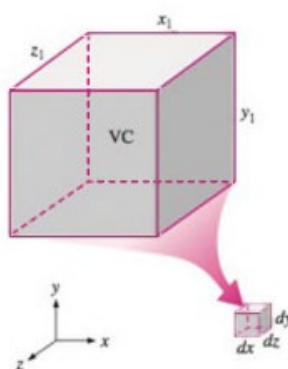
Figura 65 – Desenvolvimento do perfil da velocidade em um cano circular



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p.12

Çengel e Cimbala (2012) explicam que a análise diferencial do escoamento de um fluido envolve a aplicação de equações diferenciais de movimento do fluido em todos os pontos no campo de escoamento, ou seja, sobre o domínio de escoamento. Essa análise consiste em verificar como os milhões de minúsculos volumes de controle⁴⁵, elemento material infinitesimal ilustrado na Figura 66, empilhados lados a lado e uns sobre os outros ocupando todo o campo de escoamento se comportam. À medida que o número de minúsculos volumes de controle tende ao infinito, as equações de conservação se simplificam, tomando-se um conjunto de equações diferenciais parciais que são válidas em qualquer ponto no escoamento. Ao serem resolvidas, essas equações diferenciais fornecem detalhes sobre a velocidade, massa específica, pressão etc. em cada ponto de todo o domínio do escoamento.

Figura 66 – Volume de controle



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p. 397

Para a análise de um fluido incompressível tridimensional, há quatro incógnitas a serem estudadas (componentes da velocidade u, v, w , e pressão P) e quatro equações são utilizadas, uma da conservação da massa, que é uma equação escalar, e outras três decorrentes da Segunda

⁴⁵ Um volume de controle, de forma oposta ao sistema, é um volume definido no espaço. O escoamento do fluido se dá neste volume definido. O que define o volume em questão é a superfície de controle, ela pode ser física ou definida apenas conceitualmente. (TDJ, 2012)

Lei de Newton, que é uma equação vetorial, a equação de Navier-Stokes⁴⁶. Essas equações são acopladas, o que significa que algumas das variáveis aparecem nas quatro equações; o conjunto de equações diferenciais deve ser, portanto, resolvido simultaneamente para as quatro incógnitas. Além disso, as condições de contorno para as variáveis devem ser especificadas em todas as fronteiras do domínio do escoamento, incluindo entradas, saídas e paredes.

A primeira equação envolvida na análise diferencial é a equação da conservação de massa, conhecida como equação da continuidade que, para fluidos incompressíveis, recebe o nome de *equação da continuidade incompressível*, em que u, v , e w são as componentes da velocidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

As outras três equações vêm da *Segunda Lei de Newton*: a medida de uma força é dada pelo produto da massa pela aceleração. Essas equações são conhecidas como componentes da equação da continuidade de Navier-Stokes. Para compreender o que essa equação significa, partindo de conceitos básicos da Física, vamos deduzir a sua componente x destacando que, em processos análogos, podemos deduzir as componentes y e z . Para isso, recorreremos às videoaulas disponibilizadas pelo Professor Vianna Neto (2019)⁴⁷.

Tomando uma partícula (elemento material de um fluido em movimento) de massa m (constante) e velocidade $\vec{v}$, com $\vec{p}$ representando a quantidade de movimento, a força resultante que atua sobre essa partícula é dada pela derivada da quantidade de movimento em relação ao tempo, representada pela expressão $\vec{F}_r = m \frac{dv}{dt}$, em que $\frac{dv}{dt}$ é aceleração, portanto, a expressão $\vec{F}_r = m \frac{dv}{dt}$ corresponde à *Segunda Lei de Newton* ($F = ma$), ilustrada na Figura 67.

⁴⁶ De acordo com Çengel e Cimbala (2012), a equação de Navier-Stokes é uma equação diferencial utilizada no estudo do movimento de um fluido que se aplica a todos os pontos no campo de escoamento e fornece soluções para todos os detalhes do escoamento em qualquer ponto do seu domínio.

⁴⁷ As videoaulas consultadas estão disponíveis nos links abaixo e foram acessadas em 16 de abril de 2022.
<https://www.youtube.com/watch?v=FLoZODPpayM> <https://www.youtube.com/watch?v=e06ZRzdO4iM>
<https://www.youtube.com/watch?v=na2kGOSYNv8>

Figura 67 – Representação de um elemento material em movimento



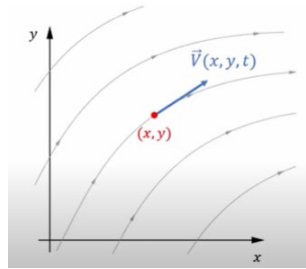
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F}_r = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Fonte: Vianna Neto, 2019

O gráfico ilustrado na Figura 68 representa o campo de velocidade do escoamento de um fluido.

Figura 68 – O campo de velocidade do escoamento de um fluido



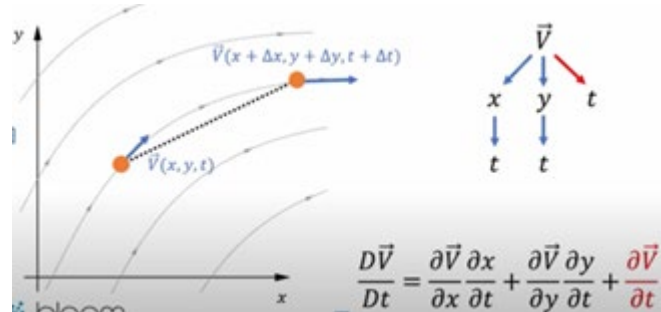
Fonte: Vianna Neto, 2019

Para cada elemento material localizado em um ponto de coordenadas (x, y) , a direção do vetor velocidade é indicada pela tangente à curva sobre a qual o ponto está e a função velocidade, representada por $\vec{V}(x, y, t)$, sendo t o tempo transcorrido, depende das coordenadas x e y do ponto considerado, pois o elemento material se move em relação ao tempo; e do tempo, pois o campo de velocidade também pode variar com o transcorrer do tempo.

Essa dependência, ilustrada na Figura 67, é representada pela derivada parcial total:

$$\frac{D\vec{V}}{DT} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (1)$$

Figura 69 – Esquema utilizado na dedução da equação diferencial total que representa a aceleração de um elemento material em movimento



Fonte: Vianna Neto, 2019

A equação (1) representa a variação da velocidade do elemento material em relação ao tempo durante o escoamento de um fluido. Portanto, a derivada parcial total permite calcular a medida da aceleração do elemento material. Como os termos $\frac{\partial x}{\partial t}$ e $\frac{\partial y}{\partial t}$ representam, respectivamente, as componentes (u, v) da partícula, a derivada parcial total pode ser reescrita como:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \quad (2)$$

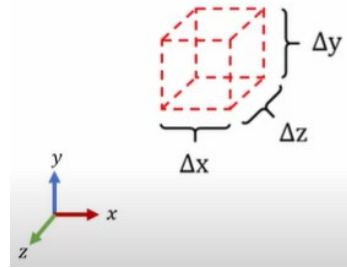
Usando o mesmo raciocínio, essa derivada total pode ser ampliada para fluidos considerados em três dimensões:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \quad (3)$$

Considerando que um elemento material de um fluido em movimento pode assumir a forma cúbica, com dimensões $\Delta x, \Delta y$ e Δz , como ilustrado na Figura 70, podemos calcular a massa desse elemento material, multiplicando o seu volume (produto $\Delta x. \Delta y. \Delta z$) pela sua densidade ρ :

$$m = \Delta x. \Delta y. \Delta z. \rho \quad (4)$$

Figura 70 – Elemento material de um fluido em movimento



Fonte: Vianna Neto, 2019

A força resultante que atua sobre o elemento material, dada pela Segunda Lei de Newton, é, então, representada por:

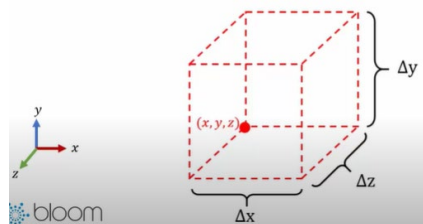
$$\vec{F}_r = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} w + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \quad (5)$$

em que: $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} w + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)$ representa a aceleração da partícula, $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho$ representa a massa, e $\vec{F}_r$ representa a resultante das forças que agem sobre a superfície do elemento fluido.

Entretanto, as forças que atuam sobre um elemento material infinitesimal de um fluido são a tensão normal ($\sigma = \frac{F_n}{dA}$), a força de tensão de cisalhamento ($\tau = \frac{t}{dA}$) e a força do campo gravitacional (g). Então, vamos descrever, matematicamente, cada uma dessas forças atuando em cada uma das faces do elemento material.

Considerando o ponto P ‘vermelho’ de coordenadas (x, y, z) , destacado na Figura 71, com os cubos representando o elemento material em forma cúbica.

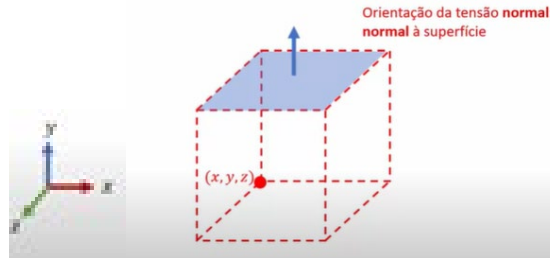
Figura 71 – Elemento material



Fonte: Vianna Neto, 2019

A tensão normal que age sobre a superfície considerada (azul), ilustrada na Figura 72, tem sentido orientado de dentro para fora do elemento material e é perpendicular ao eixo y .

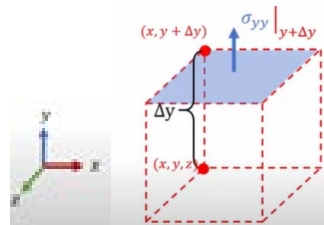
Figura 72 – Orientação da tensão normal que atua sobre a face azul do elemento material



Fonte: Vianna Neto, 2019

Essa tensão é denotada por $\sigma_{yy}|_{y+\Delta y}$, em que σ_{yy} nos diz que a face na qual ela está atuando (azul) é perpendicular ao eixo y , e a coordenada y do ponto considerado nessa face ‘desloca-se’ uma quantidade Δy , mas que não será tratada como um diferencial infinitesimal. No subscrito yy , o primeiro elemento y se refere à direção do eixo coordenado perpendicular à face em que a tensão normal atua, nesse caso é o eixo y (Figura 72); o segundo elemento y do subscrito se refere à direção em que a tensão normal atua, mostrado na Figura 73.

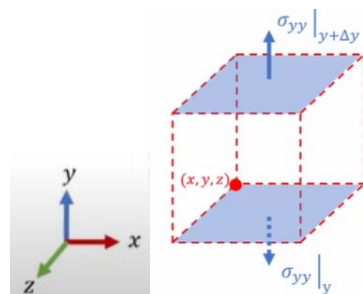
Figura 73 – Tensão normal atuando sobre a face azul do elemento material



Fonte: Vianna Neto, 2019

A segunda face perpendicular ao eixo y que compõe o elemento material, Figura 74, tem orientação da tensão normal de dentro para fora, e é representada por $\sigma_{yy}|_y$. Esclarecemos que o ponto P está nessa face, logo, não é necessário considerar algum ‘deslocamento’.

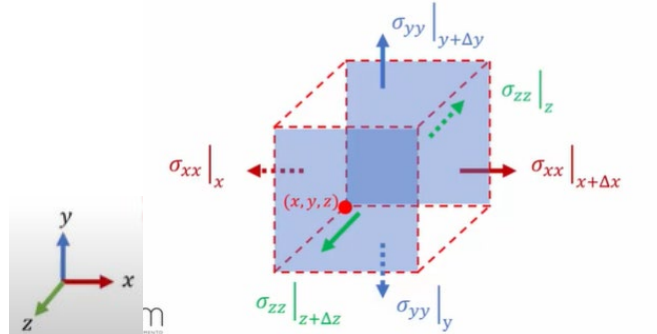
Figura 74 – Tensão normal atuando sobre as faces paralelas de um elemento material



Fonte: Vianna Neto, 2019

De forma análoga, podemos expressar a tensão normal que age sobre cada uma das faces que compõe o elemento material, conforme a Figura 75.

Figura 75 – Forças normais que atuam nas faces de um elemento material de um fluido



Fonte: Vianna Neto, 2019

De modo igual, podemos representar matematicamente a tensão de cisalhamento que age nas direções dos eixos x , y e z indicadas pelas Figuras 76, 77 e 78. E a Figura 79 ilustra a força de efeito do campo gravitacional e seus componentes agindo sobre o elemento material.

Figura 76 - Tensões cisalhantes que agem na direção de x .

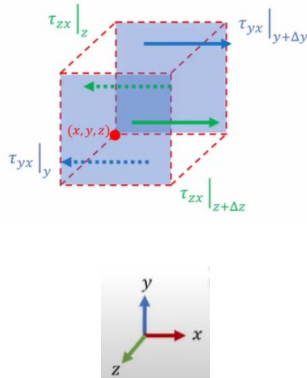


Figura 77 - Tensões cisalhantes que agem na direção de y .

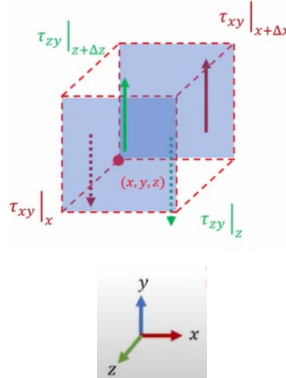
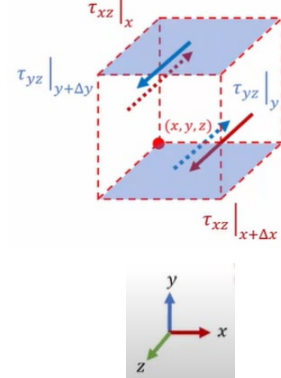
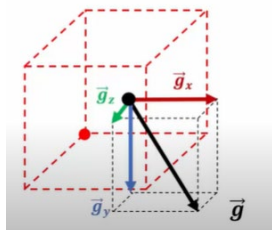


Figura 78 - Tensões cisalhantes que agem na direção de z .



Fonte: Vianna Neto, 2019

Figura 79 – Representação Geométrica da força de efeito do campo gravitacional que atua sobre um elemento material de um fluido



Fonte: Vianna Neto, 2019

Calculando o somatório das forças resultantes que agem na direção do eixo x , temos:

$$F_{rx} = (\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x)\Delta y\Delta z + g_x\rho\Delta x\Delta y\Delta z + (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y)\Delta x\Delta z + (\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z)\Delta x\Delta z,$$

em que o primeiro termo é dado pela diferença entre as tensões normais na direção de x multiplicadas pela medida da área da face na qual essa força atua; o segundo termo se refere à componente x da aceleração da gravidade multiplicada pela massa (dada pela densidade multiplicada pelo volume); e o terceiro termo se refere às tensões cisalhantes na direção de x .

Analogamente, podemos representar a força resultante considerada nas direções dos eixos cartesianos y e z .

$$F_{ry} = (\sigma_{yy}|_{y+\Delta y} - \sigma_{yy}|_y)\Delta x\Delta z + g_y\rho\Delta x\Delta y\Delta z + (\tau_{xy}|_{x+\Delta x} - \tau_{xy}|_x)\Delta y\Delta z + (\tau_{zy}|_{z+\Delta z} - \tau_{zy}|_z)\Delta x\Delta y$$

$$F_{rz} = (\sigma_{zz}|_{z+\Delta z} - \sigma_{zz}|_z)\Delta x\Delta y + g_z\rho\Delta x\Delta y\Delta z + (\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_x)\Delta y\Delta z + (\tau_{yz}|_{y+\Delta y} - \tau_{yz}|_y)\Delta x\Delta z$$

Assim, podemos substituir a força resultante de cada uma das componentes x, y e z na

equação (5), pois essa equação é vetorial, com as componentes de $\vec{F}_r = \begin{bmatrix} F_{rx} \\ F_{ry} \\ F_{rz} \end{bmatrix}$ e $\vec{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$.

Substituindo a componente x , de F_r e $\vec{V}$, temos:

$$(\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x)\Delta y\Delta z + g_x\rho\Delta x\Delta y\Delta z + (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y)\Delta x\Delta z + (\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z)\Delta x\Delta z = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Dividindo os dois membros da equação obtida por $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, temos:

$$(\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x)/\Delta x + g_x\rho + (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y)/\Delta y + (\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z)/\Delta z = \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Como o elemento material é infinitesimal, podemos, então, considerar Δx tendendo a zero e tomar o limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sigma_x|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x)}{\Delta x} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$. Procedendo de forma análoga, encontramos a equação diferencial da quantidade de movimento em relação à componente x :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x \rho = \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Procedendo de maneira análoga em relação a F_{ry} e F_{rz} , encontramos:

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + g_y \rho = \rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + g_z \rho = \rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

O conjunto dessas três equações é denominado de Equações Diferenciais da *Quantidade de Movimento de um Fluido em escoamento*, entretanto, ainda é necessário calcular as tensões de cisalhamento e as tensões normais.

As tensões de cisalhamento são simétricas, pois se as medidas de $\tau_{xy} \neq \tau_{yx}$, por exemplo, fossem diferentes, o elemento fluido tenderia a girar, e a conservação do momento angular não se manteria – valendo para todas as outras. Assim:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Supondo que o fluido em questão seja um fluido newtoniano, as tensões de cisalhamento são proporcionais ao produto da taxa de deformação do fluido pela viscosidade. A taxa de deformação é indicada por $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ e a taxa de viscosidade é indicada por μ , assim:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Quanto à tensão normal, a pressão P que a compõe é a pressão termodinâmica, calculada por equações do estado líquido as quais não serão discutidas nesta investigação. Essa pressão é negativa, pois tem sentido contrário ao sentido da tensão normal, e é exercida de fora para dentro do elemento material.

As tensões normais são representadas por:

$$\sigma_{xx} = -P - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -P - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -P - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

em que $\nabla\vec{V}$ representa a abreviação das somas das derivadas parciais da componente da velocidade $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, conhecida como divergência. Os termos:

$$-\frac{2}{3}\mu\nabla\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$-\frac{2}{3}\mu\nabla\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$-\frac{2}{3}\mu\nabla\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

vêm da hipótese de Stokes, que não será detalhada nesta tese, e representam uma correção para o fluido em movimento, pois se o fluido estiver em repouso, esses termos se anulam e a tensão normal é igual à pressão.

Voltando às equações da quantidade do movimento e substituindo as expressões encontradas para as tensões normais e de cisalhamento em cada uma delas com algumas

manipulações algébricas que não detalharemos nesta tese, encontramos a *equação da continuidade do movimento de um fluido incompressível*, as equações de Navier-Stokes, dada em coordenadas cartesianas.

Portanto, a equação utilizada na análise do escoamento de um fluido incompressível em coordenadas cartesianas é

Equação da continuidade incompressível

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Componente x da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Componente y da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

Componente z da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Essas equações, quando aplicadas em análise de escoamento de fluidos no interior de uma tubulação cilíndrica, é utilizada em coordenadas cilíndricas.

Equação da continuidade incompressível

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0$$

Componente r da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Componente θ da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Componente z da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \mu_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Fundamentamos aqui o contexto do problema, bem como definimos alguns conceitos e propriedades que serão importantes para a compreensão da praxeologia matemática do problema. Apresentamos, a seguir, a análise das praxeologias didática e matemática envolvidas na solução do problema proposto em Çengel e Cimbala (2012), estabelecendo um paralelo entre a teoria específica que o fundamenta e os conhecimentos matemáticos que podem ser explorados por meio dele.

6.7 Técnica τ_{ic6}

Quanto à análise da praxeologia didática da solução do problema disponível no livro de Mecânica dos Fluidos anteriormente mencionado, essa é fundamentada nos preceitos do processo da *Modelagem Matemática de Problemas de Engenharia*⁴⁸, considerando que grande parte dos fenômenos físicos que envolvem mudanças infinitesimais ou diferenciais de variáveis, geralmente, podem ser modelados por equações diferenciais. A modelagem realiza-se em duas etapas: na primeira, todas as variáveis que afetam o fenômeno são identificadas, hipóteses são levantadas, aproximações razoáveis são realizadas e a interdependência entre essas variáveis é estudada, são mantidos as leis e princípios físicos relevantes, o problema é formulado matematicamente por uma equação diferencial que retrata o grau de dependência de algumas variáveis em relação a outras e a importância relativa dos termos da equação; e, na segunda

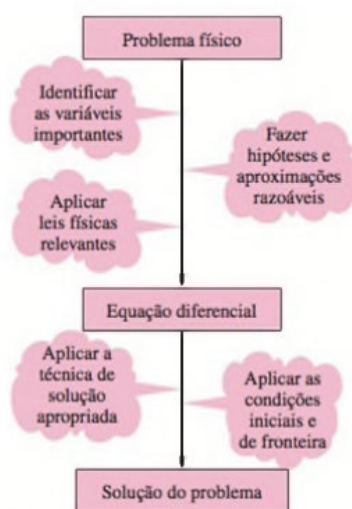
⁴⁸ Termo adotado Çengel e Cimbala (2012) para se referirem à *Modelagem Matemática* quando essa está empregada especificamente em problemas de Engenharia.

etapa, o problema é resolvido usando uma abordagem apropriada e os resultados são interpretados de acordo com as condições de contorno estabelecidas pelo fenômeno físico.

Como os autores entendem que do ponto de vista da abordagem analítica de um problema físico, em contraposição à abordagem experimental, há a vantagem de ser rápida e de baixo custo, embora os resultados obtidos estejam condicionados à precisão das hipóteses, das aproximações e das idealizações feitas na análise; também empregam a abordagem analítica na resolução dos problemas físicos tratados no livro.

Assim, a praxeologia didática contempla tarefas e técnicas construídas a partir do esquema ilustrado na Figura 80, que tem seu bloco teórico-tecnológico fundamentado na Modelagem Matemática. As técnicas elaboradas são direcionadas à modelação do problema por meio de uma equação diferencial, que depois de resolvida e validadas as condições de contorno, leva a encontrar a solução do problema.

Figura 80 – Modelagem Matemática de problemas físicos



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p. 20

As técnicas de resolução são descritas como passos que serão mais bem especificados durante a análise da praxeologia matemática. A partir do enunciado do problema, no intuito de explicitar os fundamentos do problema e associar a eles as propriedades mobilizadas em sua resolução, os autores formulam técnicas (passos) que transformam o problema inicial em uma série de problemas mais simples que são sucessivamente solucionados.

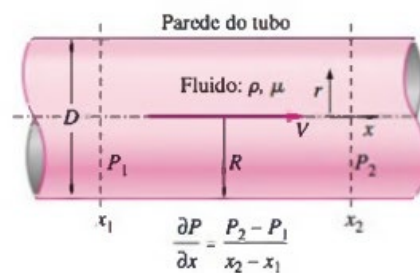
Passamos então à análise da praxeologia matemática presente na resolução desse problema no livro didático de Mecânica dos Fluidos, apresentando o que foi exposto em Çengel e Cimbala (2012, p. 390-394) acrescido das análises por nós realizadas.

Solução: Para o escoamento dentro de um tubo cilíndrico, vamos calcular a medida da velocidade axial do campo de velocidade e, então, estimar a tensão de cisalhamento viscoso agindo na parede do tubo. As hipóteses às quais faremos referências durante a apresentação da resolução do problema foram formuladas a partir dos dados obtidos pela análise e interpretação do enunciado do problema.

Passo 1: *Identificar o problema e a geometria do problema*⁴⁹.

Nesse passo, é construído um esquema de representação geométrica da situação abordada no problema, considerando que o fluido newtoniano tem densidade ρ e viscosidade μ .

Figura 81 – Geometria do problema



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p. 486

Passo 2: *Listar as hipóteses e condições de contorno.*

- Hipótese 1: O tubo é infinitamente longo na direção de x .
- Hipótese 2: O escoamento é permanente, portanto, todas as derivadas parciais em relação ao tempo são nulas, uma vez que em escoamentos permanentes a velocidade é constante.
- Hipótese 3: Esse é um escoamento paralelo às paredes do tubo, portanto, a componente r da velocidade u_r deve ser nula.
- Hipótese 4: O fluido é incompressível e newtoniano com propriedades constantes de escoamento laminar.

⁴⁹ Segundo Çengel e Cimbala 2012, a geometria de um problema define a região espacial na qual os fenômenos serão avaliados.

- Hipótese 5, Um gradiente de pressão é aplicado na direção de x de modo que a pressão muda linearmente com relação a x de acordo com a equação: $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1}$, constante.
- Hipótese 6: O campo de velocidade é axissimétrico⁵⁰ e sem turbilhão, portanto, a componente $u_\theta = 0$ e todas as derivadas parciais com relação a θ são nulas.
- Hipótese 7: Ignoramos os efeitos da gravidade.

Depois de relacionadas as hipóteses, podemos definir ações e tirar conclusões para dar encaminhamento à solução do problema.

Condições de Contorno:

- A primeira condição de contorno vem da imposição de condição de não escorregamento na parede do tubo (o escoamento é estacionário e não provoca escorregamento):

(1) em $r = R$ (a componente do perfil da velocidade em coordenadas cilíndricas), $\vec{V} = 0$.

- A segunda condição de contorno vem do fato de que o eixo central do tubo é um eixo de simetria, portanto, a componente axial r e o gradiente de pressão $\frac{\partial P}{\partial x}$ são nulos:

(2) Em $r = 0$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$.

Passo 3: Escrever e simplificar as equações diferenciais.

Começamos com a *equação da continuidade incompressível* em coordenadas cilíndricas, numa versão modificada com x no lugar de z dada por:

$$\underbrace{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r u_r)}{\partial r}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta}}_{\text{hipótese 6}} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

⁵⁰ Segundo Çengel e Cimbala (2012), a geometria de um problema define a região espacial na qual os fenômenos serão avaliados.

Da equação (2), concluímos que u não é uma função de x . Em outras palavras, não importa onde colocamos a origem do sistema, pois o escoamento é o mesmo em qualquer posição x , uma vez que é um escoamento laminar e estacionário. Isso também pode ser inferido diretamente da hipótese 1, pois ela nos diz que não há nada especial sobre qualquer posição de x já que o tubo é infinitamente longo e o escoamento é completamente desenvolvido. Além disso, como u não é uma função do tempo pela hipótese 2, θ também não é uma função do tempo pela hipótese 6, concluímos que u é, no máximo, uma função de r .

Do ponto de vista matemático, inicialmente, podemos destacar a mobilização do *sistema de coordenadas cilíndricas* e de *uma equação diferencial geral* aplicada na conservação de massa, a *equação da continuidade*, embora a equação em si faça parte do contexto do problema, sua resolução é realizada por métodos matemáticos algébricos. Uma das formas de deduzir essa equação é aplicar o *teorema do divergente* (*Teorema de Gauss*)⁵¹ na expressão geral para conservação de massa em um volume de controle⁵². Assim, evidencia-se a oportunidade de o professor de Matemática explorar esse problema em suas aulas, tendo como foco o EC construído para abordar esses objetos matemáticos. Por exemplo, o problema pode ser proposto para dar início à abordagem das noções relacionadas ao sistema de coordenadas cilíndricas, ou pode ser abordado para dedução da equação da continuidade, por meio da qual podemos explorar o método para resolução de equações diferenciais gerais.

Podemos, ainda, explorar outros objetos matemáticos que não estão explícitos no problema, mas que podem ser levantados pelo professor ou pelo estudante se a praxeologia didática tiver um caráter investigativo no sentido de Ponte, Brocado e Oliveira (2009). Assim, mesmo não sendo objetivo do problema explorar volume de controle, para o qual é utilizada a série de Taylor, os estudantes em uma situação de sala de aula podem ser levados a calcular a medida desse volume utilizando essa série. É possível também explorar a integral utilizada para o volume como taxa de variação de massa, no âmbito do volume de controle.

Voltamos, então, à resolução do problema, o resultado da continuidade é:

$$u = u(r) \text{ apenas.} \quad (3)$$

⁵¹ O teorema do divergente nos permite transformar uma equação do volume do divergente de um vetor em uma integral de área sobre superfície que define o volume. (CENGEL; CIMBALA, 2012, p. 439)

⁵² Um volume de controle, de forma oposta ao sistema, é um volume definido no espaço. O escoamento do fluido se dá neste volume definido. O que define o volume em questão é a superfície de controle, ela pode ser física ou definida apenas conceitualmente. (TDF, 2012)

Fazendo as simplificações adequadas na equação do momento axial, usando as condições determinadas nas hipóteses relacionadas, temos:

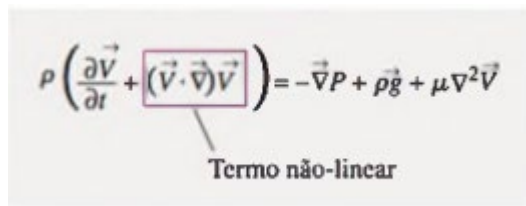
$$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{hipótese 2}} + \underbrace{u_r \frac{\partial u}{\partial r}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}}_{\text{hipótese 6}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{continuidade}} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{hipótese 7}} + \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_{\text{hipótese 6}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{continuidade}} \right) \text{ ou}$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$$

Assim, a aceleração material (todo o membro da esquerda da equação) do momento na direção x é zero, implicando que as partículas de fluido não estão acelerando nesse campo de escoamento e linearizando a equação de Navier-Stokes, ilustrada na Figura 82. Isso acontece porque as velocidades do constituinte do fluido são iguais à velocidade do fluido, portanto, as velocidades são constantes e ao derivá-las teremos zero, tornando os termos advectivos⁵³ para soluções de escoamento incompressível na equação de Navier-Stokes iguais a zero.

A equação se torna linear, já que o termo advectivo é o único termo não linear na equação. Substituímos os operadores de derivada parcial das derivadas de u pelos operadores de derivada total devido à Equação 3.

Figura 82 - Equação de Navier-Stokes



$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}}_{\text{Termo não-linear}} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Fonte: Çengel, Cimbala, 2012, p. 392

⁵³ Advecção: nome dado ao transporte de um constituinte pelo campo de velocidades do meio fluido que o contém. É comum supor-se que a velocidade do constituinte seja igual à velocidade do fluido envolvente, embora isto não seja sempre correto (isto pode ser observado no caso de transporte de sedimentos que se precipitam ao longo da direção vertical com uma velocidade diferente da do fluido). (FIEDLER, 2020). Segundo Çengel, Cimbala (2012), o termo advectivo da equação de Navier-Stokes é o único termo não linear da equação e que dificulta a sua solução quando aplicada em um problema físico, assim, na maioria deles são consideradas condições de contorno no infinito e condições totalmente desenvolvidas para que os termos advectivos no lado esquerdo da equação de Navier-Stokes desapareçam.

“Observe que: $\vec{\nabla}$ ou “grad” é um operador vetorial usado para expressar os gradientes de uma função escalar de forma compacta na forma vetorial. Além disso, o gradiente de uma função escalar é expresso em determinada direção e, portanto, é uma quantidade vetorial” (ÇENGEL; CIMBALA, 2012, p. 83). De forma similar, cada termo na componente r da equação do momento, exceto o termo do gradiente de pressão, é zero, forçando aquele único termo a ser também zero.

Componente r do momento:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

Isso significa que P não é uma função de r . Como P não é uma função do tempo conforme a hipótese 2, ou uma função de θ conforme a hipótese 6, P pode ser, no máximo, uma função de x e o resultado do momento radial será:

$$P = P(x) \quad (6)$$

Portanto, podemos substituir o operador da derivada parcial para o gradiente de pressão na Equação 4 pelo operador da derivada total, pois P varia somente com x . Finalmente, todos os termos da componente θ da equação de Navier-Stokes se tornam zero. Voltando à análise, do ponto de vista matemático, observamos que na resolução aparece a equação de Navier-Stokes, fundamental para a Mecânica dos Fluidos aplicada a escoamentos incompressíveis em um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com x no lugar de z , conforme proposto no problema, bem como em conformidade com as hipóteses levantadas. Essa equação é uma equação diferencial parcial, não estacionária, não linear de segunda ordem que pode ser explorada, em aulas de Matemática na Engenharia, por exemplo, para a introdução desse tipo de equação diferencial parcial, bem como para discutir a sua técnica analítica de resolução ou somente para explorar sua aplicação nesse problema. Podemos explorar, também, as derivadas parciais totais. Continuemos, então, com a resolução do problema.

Passo 4: *Resolver as equações diferenciais.*

As equações da continuidade e do movimento radial já foram encontradas, equações 3 e 6, respectivamente. Os termos relativos à componente θ da equação do momento são nulos, e assim nos resta a Equação 4 (momento na direção x).

Após multiplicar ambos os membros por r , integramos uma vez para obter:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r^2}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + C_1 \quad (7)$$

em que C_1 é uma constante de integração. Notemos que o gradiente de pressão $\frac{dP}{dx}$ é uma constante aqui. Dividindo ambos os membros da Equação 7 por r , integramos uma segunda vez para obter:

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + C_1 \ln r + C_2 \quad (8)$$

em que C_2 é uma segunda constante de integração.

Como sugestão para a abordagem de outro objeto matemático por meio do EC, podemos explorar os métodos de resolução das equações diferenciais pelo *Passo 4*. Já adiantando o *Passo 5*, podemos discutir o domínio de validade da equação por meio das condições de contorno definidas pelo problema, estabelecendo comparações com diferentes condições de contorno.

Passo 5: *Aplicar as condições de contorno.*

Lembrando que as condições de contorno são:

$$(1) \text{ Em } r = R, \quad \vec{V} = 0.$$

$$(2) \text{ Em } r = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Primeiro, aplicamos a segunda condição de contorno à Equação 7:

$$0 = 0 + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Uma maneira alternativa para interpretar essa condição de contorno é que u deve permanecer finita no eixo central do tubo. Isso é possível somente se a constante C_1 for igual a zero, pois $\ln(0)$ não é definido na Equação 8.

Aplicando, a primeira condição de contorno:

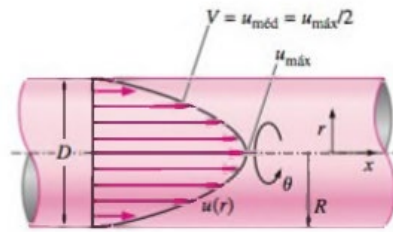
$$u = \frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + 0 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$$

Finalmente, a Equação 8 se torna a Velocidade Axial:

$$u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} (r^2 - R^2), \quad (9)$$

cujo perfil de velocidade axial tem a forma do parabolóide apresentado na Figura 83.

Figura 83 – Perfil da velocidade axial



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p.392

Passo 6: *Verificar os resultados.*

Podemos verificar que todas as equações diferenciais e condições de contorno foram satisfeitas. Calculamos também alguns outros elementos do escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo. Por exemplo, a velocidade axial máxima obviamente ocorre no centro do tubo (Figura 84), portanto, podemos fazer $r = 0$ na Equação 9 e a velocidade máxima será:

$$u_{max} = -\frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad (10)$$

A vazão volumétrica através do tubo é encontrada integrando-se a Equação 9 por meio de toda a seção transversal do tubo:

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R ur \, dr d\theta = -\frac{2\pi}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \int_{r=0}^R (r^2 - R^2)r \, dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad (11)$$

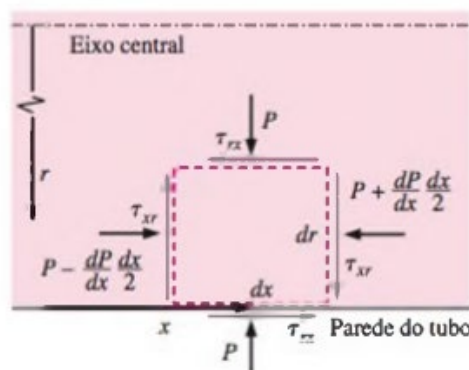
Como a vazão volumétrica é também igual à medida da velocidade axial média multiplicada pela medida da área da seção transversal, podemos facilmente determinar a velocidade axial média V :

$$V = \frac{V}{A} = \frac{\left(-\frac{\pi R^4}{8\mu}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad (12)$$

Comparando as Equação 10 e 12, vemos que, para o escoamento laminar completamente desenvolvido em tubo, a velocidade axial média é igual exatamente à metade da velocidade axial máxima.

Para calcular a força de cisalhamento viscoso por unidade de área agindo na parede do tubo, consideramos um elemento infinitesimal de fluido adjacente à parte inferior da parede do tubo (Figura 84). São mostradas tensões de pressão e tensões viscosas matematicamente positivas.

Figura 84 – Pressão e tensões de cisalhamento viscoso agindo em um elemento infinitesimal de fluido cuja face inferior está em contato com a parede do tubo



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p. 393

Da equação que mostra as seis componentes independentes do tensor de tensão viscosa listadas em coordenadas cilíndricas, ilustrada na Figura 84, modificada para o sistema de coordenadas proposto para o problema, escrevemos o tensor de tensão viscosa como:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rx} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta x} \\ \tau_{xr} & \tau_{x\theta} & \tau_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial u}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Figura 85 – As seis componentes independentes do tensor de tensão viscosa listadas em coordenadas cilíndricas

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] & \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] & 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p.375

Usando a Equação 9 para u e fazendo $r = R$ na parede do tubo, a componente τ_{rx} da Equação 13 se reduz à tensão de cisalhamento viscoso na parede do tubo dada por:

$$\tau_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{R}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad (14)$$

Para o escoamento da esquerda para a direita, $\frac{\partial P}{\partial x}$ é negativo, assim, a tensão de cisalhamento viscoso na parte inferior do elemento de fluido na parede está na direção oposta àquela indicada na Figura 82. A força de cisalhamento por unidade de área na parede é igual e oposta a essa, portanto, pode ser indicada em:

$$\frac{\vec{F}}{A} = -\frac{R}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \vec{t} \quad (15)$$

O fluido tenta puxar a parede inferior para a direita, devido ao atrito, quando $\frac{\partial P}{\partial x}$ é negativa.

Na próxima seção, apresentamos a História do Evento Contextualizado em que a Proposta Alternativa para o estudo de alguns aspectos das Integrais Duplas que elaboramos nesta investigação é apresentada.

6.8 Técnica τ_{ic7}

A *História do Evento Contextualizado*, segundo Camarena (2021), é elaborada por meio da descrição dos seguintes elementos: a função do EC, o conhecimento do contexto presentes no evento, as habilidades prévias esperadas durante a resolução do evento, os saberes matemáticos envolvidos, os conhecimentos prévios de Matemática esperados do estudante, a forma de resolução do evento no que tange à Matemática do problema, os entraves que os estudantes podem enfrentar durante a implementação do EC e os recursos tecnológicos previstos para sua implementação.

No entanto, por meio da praxeologia de Investigação III aplicada a este capítulo, os elementos da História do EC que ainda não foram evidenciados dependem da análise prévia das atividades que o compõem. Dessa forma, optamos por expor, na seção seguinte, o EC, apresentando as atividades que o compõem juntamente com as análises prévias realizadas e os destaques dos elementos da História do EC que ainda não foram evidenciados, ao mesmo tempo em que retomamos os elementos já abordados.

É importante esclarecer que o EC foi elaborado como uma Proposta Alternativa para o ensino de alguns aspectos das Integrais Duplas a estudantes de Engenharia Civil da instituição de referência. A ideia é que essas integrais sejam entendidas como uma extensão das integrais de funções reais de uma variável real e mobilizadas como ferramenta para resolver problemas dessa engenharia com vistas à formação integral do estudante. A proposta considerou as condições e restrições impostas pela instituição de referência que foram levantadas no estudo econômico-institucional e ecológico até então realizado e, em alguma medida, a forma como esse saber foi construído do ponto de vista epistemológico histórico, visando viabilizar a sua implementação.

Assim, as ID surgem nas atividades elaboradas no evento, como uma “necessidade” proveniente da análise de sistemas de escoamento de fluidos, conteúdo abordado na disciplina de Mecânica dos Fluidos que, conforme a análise da matriz curricular do curso estudado é ministrada no quarto período, e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III é ministrada no terceiro período do curso.

Isso posto, elaboramos as atividades que compõem o evento para serem implementadas em um trabalho conjunto das professoras dessas duas disciplinas, com a previsão de a professora de Mecânica dos Fluidos ocupar o espaço da sala de aula de Cálculo Diferencial e Integral III, em alguns momentos, o que já é prática bastante comum na instituição de referência pelas necessidades decorrentes do Projeto Interdisciplinar como componente curricular que aglutina conteúdos abordados em diferentes disciplinas e momentos do curso.

O EC que foi construído envolve um problema em que as Integrais Duplas são mobilizadas no contexto da Engenharia Civil que, usualmente, não está presente na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, e oportuniza ao futuro engenheiro civil vivenciar uma situação na qual essas integrais são necessárias, como no cálculo da medida da vazão volumétrica determinada durante o estudo do escoamento laminar, estacionário, incompressível, de um fluido newtoniano em um tubo cilíndrico infinitamente longo. O problema que compõe o EC é apresentado no Quadro 67. A Organização didática do EC é explicitada na seção seguinte a essa nesta tese.

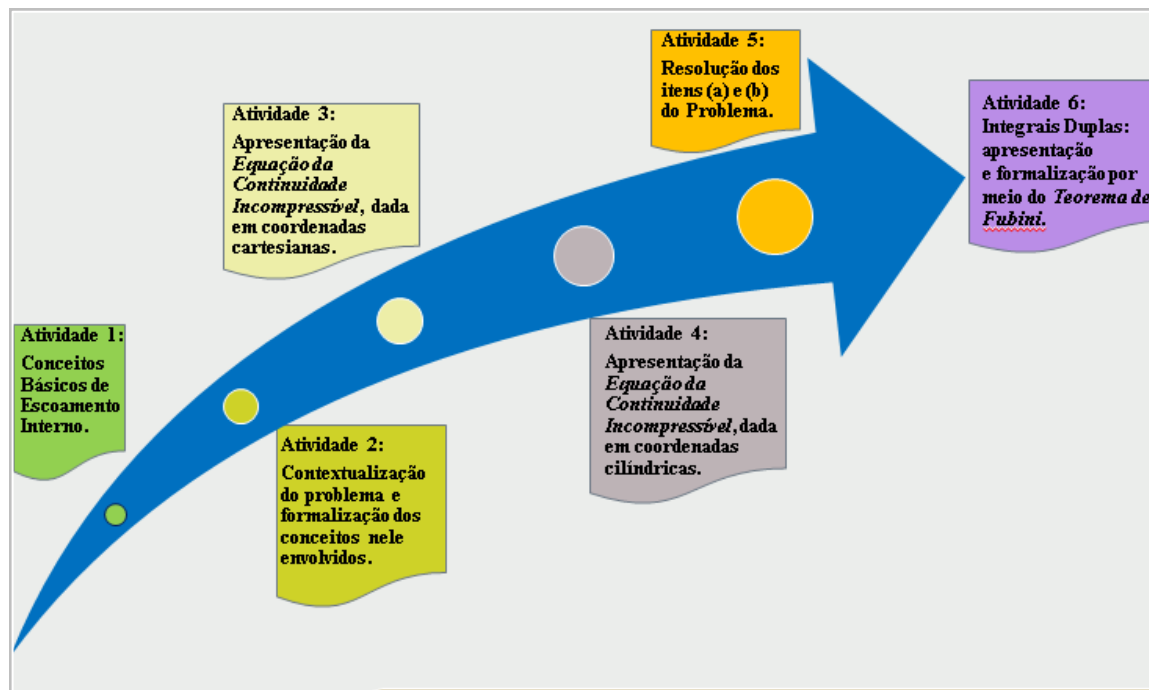
Quadro 67 – Problema que desencadeou o Evento Contextualizado

Problema Inicial
Considere o escoamento laminar, em regime permanente [estacionário], incompressível, de um fluido newtoniano em um tubo [cilíndrico] infinitamente longo de diâmetro D ou raio $R = \frac{D}{2}$. Ignoramos o efeito da gravidade. É aplicado um gradiente constante de pressão: $\frac{\partial P}{\partial x}$ na direção de x: $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = k \quad (1)$ em que x_1 e x_2 são duas localizações arbitrárias ao longo do eixo x, P_1 e P_2 são as pressões naquelas duas localizações e k uma constante real. Note que adotamos um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com x em lugar de z como componente axial, ou seja, (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u_p). Deduza expressões que permitam calcular a medida da: - velocidade de escoamento dentro do tubo e estime a força de cisalhamento viscoso por unidade de área de superfície agindo na parede do tubo; - velocidade máxima do fluido; - vazão volumétrica através do tubo.

Fonte: Adaptado Çengel e Cimbala, 2012

As atividades do EC foram sintetizadas na Figura 86 e são apresentadas a seguir.

Figura 86 - Síntese das Atividades do EC



Fonte: A autora, 2021

Atividade I: Conceitos Básicos de Escoamento Interno

Objetivo: Apresentar os conceitos básicos comumente usados na análise do escoamento dos fluidos.

Tema: Escoamento Interno

Atividade desenvolvida no AVA.

Faça a leitura prévia do Capítulo 1 do livro “ÇENGEL, Y.A.; CIMBALA, J.M. **Mecânica dos Fluidos – Fundamentos e Aplicações**, 1. ed. São Paulo: Editora McGrawHill, 2012”, até o final da seção 1.5, disponibilizado no Módulo IV da disciplina Cálculo Diferencial Integral III, no Ambiente Virtual de Aprendizagem Canvas, além de outras leituras decorrentes de pesquisas que você pode realizar de forma autônoma.

A partir das leituras, forme um grupo a sua escolha, composto por até cinco estudantes. O grupo deve gravar um vídeo curto, de 7 a 10 minutos, explicando o que entenderam sobre *Escoamento Interno*, destacando o que consideram importante nas leituras realizadas, bem como a importância do estudo dessa temática para o Engenheiro Civil. As referências que utilizaram para a produção do vídeo devem ser destacadas. Poste o vídeo, um por grupo, no

espaço determinado no Módulo IV da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III até a data determinada na Plataforma. Após essa data, os vídeos construídos por todos os grupos estarão disponíveis a todos os estudantes que deverão acessá-los e assistir a eles.

Bom trabalho!

Atividade II: Contextualização do Problema e formalização dos conceitos nele envolvidos

Objetivo: Contextualizar o Problema e formalizar os conceitos nele envolvidos.

Análise o problema:

Considere o escoamento laminar, em regime permanente [estacionário], incompressível, de um fluido newtoniano em um tubo [cilíndrico] infinitamente longo de diâmetro D ou raio $R = \frac{D}{2}$. Ignoramos o efeito da gravidade. É aplicado um gradiente constante de pressão: $\frac{\partial P}{\partial x}$ na direção de x :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = k \quad (1)$$

em que x_1 e x_2 são duas localizações arbitrárias ao longo do eixo x , P_1 e P_2 são as pressões naquelas duas localizações e k uma constante real. Note que adotamos um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com x em lugar de z como componente axial, ou seja, (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u_p) . Deduza expressões que permitam calcular a medida da:

- a. velocidade de escoamento dentro do tubo e estime a força de cisalhamento viscoso por unidade de área de superfície agindo na parede do tubo;
- b. velocidade máxima do fluido;
- c. vazão volumétrica através do tubo.

Primeiro Momento:

A partir dos resultados da Atividade 1, forme um grupo, converse com seus colegas e responda às questões abaixo, tendo como referência o problema analisado.

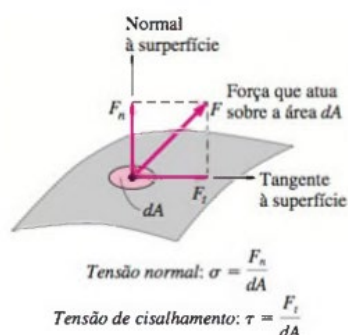
- 1) Em qual contexto esse problema é abordado?

Resposta esperada: Em *Mecânica dos Fluidos*, parte da Física que trata do comportamento dos fluidos em movimento e da interação entre esses fluidos e sólidos ou entre outros fluidos e a fronteira que os contém.

2) Você está estudando “Forças” na disciplina Mecânica dos Sólidos e já estudou em Mecânica Geral. De acordo com seus conhecimentos e com a leitura prévia realizada, quais as forças relacionadas ao problema considerado? Explique cada uma delas e depois construa, usando lápis e papel, um diagrama que indique a ação dessas forças.

Resposta esperada: Tensão normal, tensão de cisalhamento, além da força do campo gravitacional. A tensão é determinada, dividindo-se a medida da força pela medida da área sobre a qual ela atua; a tensão normal é a componente da força que atua sobre a superfície por unidade de área; a tensão de cisalhamento é o componente tangencial da força que atua sobre uma superfície por unidade de área; e a força do campo gravitacional é a força da gravidade.

Figura 87 – Tensão normal e tensão de cisalhamento na superfície de um elemento de um fluido



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p. 3

3) Qual o tipo de fluido envolvido no problema? Como ele pode ser definido?

Resposta esperada: Um *fluido newtoniano* é aquele no qual a tensão de cisalhamento é linearmente proporcional à taxa de deformação do cisalhamento, aqui entendido como o fenômeno de deformação ao qual um corpo está sujeito quando as forças que agem sobre ele provocam um deslocamento em planos diferentes, mantendo o volume constante.

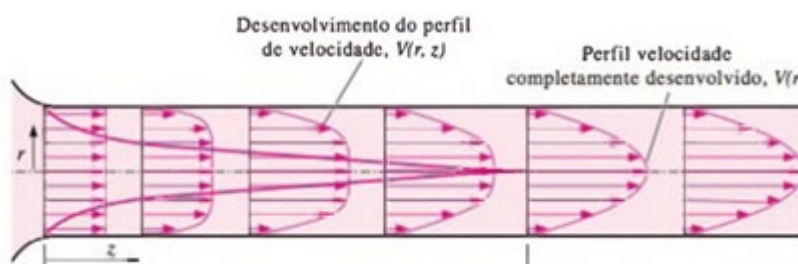
4) Caracterize, considerando as propriedades, o tipo de escoamento de fluidos abordado no problema.

Resposta esperada: O escoamento é laminar, portanto, o deslocamento do fluido acontece de forma ordenada, em camadas suaves, com a velocidade constante. Como o deslocamento é incompressível, a densidade permanece aproximadamente constante ao longo de todo o tempo de escoamento e o volume do fluido permanece inalterado durante o movimento. Como o deslocamento é também escoamento estacionário (em regime permanente) não há mudança de velocidade, como já foi citado, de temperatura ou de qualquer outra propriedade do fluido ao longo do tempo de escoamento.

5) O problema faz referência a um escoamento *completamente desenvolvido* ao longo de um cano cilíndrico. Caracterize esse escoamento. Faça um “desenho” para ajudar na construção de sua resposta.

Resposta esperada: Um escoamento completamente desenvolvido ao longo de um cano cilíndrico é unidimensional, pois a velocidade varia na direção radial r (direção do raio da seção circular do tubo) indicando que o perfil da velocidade será o mesmo em qualquer ponto ao longo do eixo axial z (eixo do tubo cilíndrico e na direção de escoamento) e o movimento simétrico em torno do eixo do cano. Isso significa que o perfil de velocidade se desenvolve completamente, permanecendo sem alterações após se distanciar do ponto de entrada. A caracterização está ilustrada na Figura 88.

Figura 88 – Caracterização

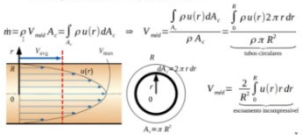
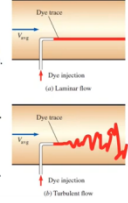
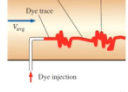
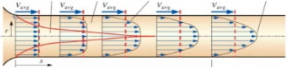
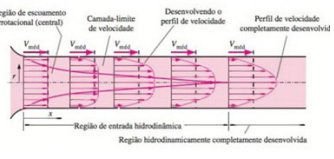
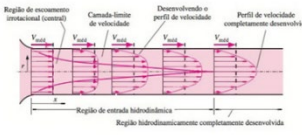
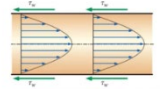
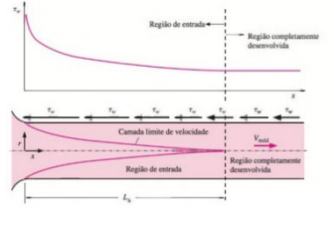
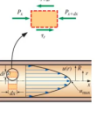


Fonte: Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p. 4

Segundo momento:

Socialização das respostas pelos estudantes com intervenção da professora de Mecânica dos Fluidos. Ampliação, sistematização e formalização dos conceitos elaborados com o uso do material (*Slides*) constante na Figura 89, em uma ação conjunta entre os professores de Mecânica dos Fluidos e Cálculo Diferencial e Integral III.

Figura 89 – Material utilizado para a formalização dos conceitos elaborados na atividade 2

Mecânica dos Fluidos Cálculo Diferencial e Integral III Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=d8NwK5K5E3s	Objetivos - Ao final desta aula, o aluno deverá saber: - As características do escoamento laminar e turbulento e do escoamento completamente desenvolvido nos tubos.	Introdução - O escoamento de líquido ou gás através de tubos ou dutos - Aplicações de aquecimento e resfriamento e nas redes de distribuição de fluidos. Tubos circulares podem suportar grandes diferenças de pressão entre o interior e o exterior, mas os tubos não-circulares não podem. 
Introdução - O escoamento de líquido ou gás através de tubos ou dutos - Forçado por um ventilador ou uma bomba a escoar através de uma seção de escoamento. - Atrito → queda de pressão/perda de carga durante o escoamento. - Qual o requisito de potência de bombeamento? - Soluções analíticas obtidas apenas para alguns poucos casos simples. - Ex: escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo circular Resultados experimentais e relações empíricas utilizados na maioria dos problemas.	Introdução Perda de carga: altura adicional a que o fluido precisa ser elevado por uma bomba para superar as perdas por atrito do tubo. - Depende de: - Propriedades do fluido - Viscosidade, densidade. - Propriedades do escoamento - Tipo (laminar, turbulento), velocidade média. - Propriedades dos tubos - Geometria (comprimento, seção transversal), rugosidade. Outros componentes da tubulação - Conexões, válvulas, tipos de entrada e saída.	Introdução Velocidade média em uma seção transversal - Princípio da conservação da massa: $\dot{m} = \rho V_{\text{méd}} A_c = \int_A \rho u(r) dA_c = \int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr$ $V_{\text{méd}} = \frac{1}{A_c} \int_A u(r) dA_c = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr$ 
Tipos de escoamento Laminar - Linhas de corrente suaves e movimento altamente ordenado. - Fluidos altamente viscosos escoam em pequenos tubos ou passagens estreitas. Turbulento - Flutuações de velocidade e movimento altamente desordenado. - Majoria dos escoamentos na prática. Transição - flutua entre laminar e turbulento. 	Tipos de escoamento - Dependem da razão entre as forças inerciais e as forças viscosas. Número de Reynolds (Re) $Re = \frac{\rho V_{\text{méd}} D}{\mu} = \frac{\rho V_{\text{méd}} D}{\mu} = \frac{V_{\text{méd}} D}{\nu}$ $V_{\text{méd}}$: velocidade média D: diâmetro ρ: densidade μ: viscosidade dinâmica $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosidade cinemática Re pequeno/moderado (laminar) - Forças viscosas suficientes para suprimir flutuações (forças inerciais) → movimento ordenado Re grande (turbulento) - Forças viscosas insuficientes para suprimir flutuações (forças inerciais) → flutuações rápidas e aleatórias	Tipos de escoamento Número de Reynolds crítico (Re_{cr}) - Limite para o escoamento ser turbulento. - Varia entre geometrias e condições de escoamento. - Para tubos circulares: $Re \leq 2300$: laminar $2300 \leq Re \leq 4000$: de transição $Re \geq 4000$: turbulento 
Região de entrada - Desenvolvimento do perfil de velocidades - Entrada com velocidade uniforme - Condição de não-eskorregimento na superfície - Desaceleração progressiva das camadas adjacentes Viscosidade! - Velocidade na seção média começa a aumentar: - Compensação para manter vazão em massa constante! 	Região de entrada Camada limite: onde os efeitos das forças de cisalhamento viscosas são sentidas. Região de escoamento irrotacional (central): onde os efeitos do atrito são desprezíveis e a velocidade permanece essencialmente constante na direção radial. 	Região de entrada Região de entrada hidrodinâmica: da entrada do tubo até o ponto no qual o perfil de velocidade se mantém constante ao longo do tubo (comprimento L_h). Escoamento hidrodinamicamente em desenvolvimento: onde o perfil de velocidade se altera ao longo do tubo. 
Região de entrada - Escoamento hidrodinamicamente completamente desenvolvido: $\frac{\partial u(r, x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(r)$ - O perfil de velocidade não muda a jusante. - Tensão de cisalhamento da parede também permanece constante. $\tau_w = -\mu \frac{\partial u(r)}{\partial r}$ 	Região de entrada 	Região de entrada Comprimento de entrada hidrodinâmica (L_h) - Distância da entrada do tubo até onde a tensão de cisalhamento da parede chega até cerca de 2% do valor completamente desenvolvido. $\frac{L_{h, \text{laminar}}}{D} \approx 0,05 Re$ $\frac{L_{h, \text{turbulento}}}{D} \approx 1,359 Re^{1/4} \approx 10$ - Na prática, $L_{h, \text{turb}} \gg L_h$ - Escoamento quase sempre considerado como completamente desenvolvido para todo o comprimento. - Resultados ruins para tubos curtos - Subestima a tensão de cisalhamento/perda de carga.
Qual o perfil de velocidade? - Hipóteses: - Escoamento estacionário e completamente desenvolvido. - Perfil de velocidade $u(r)$ constante. - Não há aceleração. - Fluido incompressível com propriedades constantes. - Tubo circular reto.  Velocidade axial constante ao longo de uma linha de corrente. Não há movimento na direção radial.	Diagrama de corpo livre - Elemento fluido diferencial em forma de anel - Raio r, espessura dr e comprimento dx. - Orientado coaxialmente a um tubo horizontal. 	Diagrama de corpo livre $\sum F_r = 0$ $(2\pi r dr) P_1 - (2\pi r dr) P_2 + (2\pi r dr) \tau_1 - (2\pi r dr) \tau_2 = 0$ $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P_1 - P_2}{dr} = \frac{dP}{dr}$ $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tau_1 - \tau_2}{dr} = \frac{d\tau}{dr}$ $\frac{dP}{dr} = r \frac{d\tau}{dr}$

Tensão de cisalhamento $r \frac{dP}{dx} + \frac{d}{dr} \left(r \mu \frac{du}{dr} \right) = 0$ Para manter igualdade para todo x e r, ambos devem ser uma constante! Balanco de forças: $\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$ τ_w = constante (escoamento completamente desenvolvido)	Tensão de cisalhamento $r \frac{dP}{dx} + \frac{d}{dr} \left(r \mu \frac{du}{dr} \right) = 0$ Para manter igualdade para todo x e r, ambos devem ser uma constante! Balanco de forças: $\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$ τ_w = constante (escoamento completamente desenvolvido)	• Para obter $u(r)$, integrar 2 vezes em r: $\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \mu \frac{du}{dr} \right) = -\frac{2\tau_w}{R}$ $\int \frac{d}{dr} \left(r \mu \frac{du}{dr} \right) dr = \int -\frac{2\tau_w}{R} dr \Rightarrow r \mu \frac{du}{dr} = -\frac{2\tau_w}{R} r + C_1$ $\int \frac{1}{\mu} \frac{du}{dr} dr = \int \left(-\frac{2\tau_w}{R} \frac{1}{r} + \frac{C_1}{r \mu} \right) dr \Rightarrow \ln u = -\frac{2\tau_w}{R} \ln r + \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2$
Condições de contorno: Em $r=0$, $\frac{du}{dr}=0$ (velocidade máxima) $\Rightarrow C_1=0$ Em $r=R$, $u=0$ (não-escoamento) $\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} R^2$ $\Rightarrow u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2) \Rightarrow u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$	• Velocidade média • Tubos circulares, escoamento incompressível. $V_{\text{med}} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr$ $u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \Rightarrow u(r) = 2V_{\text{med}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$ $u(0) = u_{\text{max}} = 2V_{\text{med}}$ Velocidade máxima na linha central (2 vezes a velocidade média)	Referências • ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações. São Paulo, SP: McGraw-Hill, 2007. xxv, 816 p., il. ISBN 9788586804588.

Fonte: Nishitani, 2020

Finalizamos concluindo que, para a análise de um fluido incompressível tridimensional, há quatro incógnitas a serem estudadas (componentes da velocidade u, v, w , e pressão P) e quatro equações são utilizadas, uma da conservação da massa, que é uma equação escalar, e outras três da Segunda Lei de Newton, que é uma equação vetorial, a equação de Navier-Stokes. Essas equações são acopladas, o que significa que algumas das variáveis aparecem nas quatro equações; o conjunto de equações diferenciais deve ser, portanto, resolvido simultaneamente para as quatro incógnitas. Além disso, as condições de contorno para as variáveis devem ser especificadas em todas as fronteiras do domínio do escoamento, incluindo entradas, saídas e paredes.

Atividade 3: Apresentação da Equação da Continuidade Incompressível, dada em coordenadas cartesianas

Objetivo: Apresentar, em uma primeira abordagem, as equações da continuidade incompressível utilizada na análise diferencial de um sistema de escoamento de fluidos.

Primeiro Momento:

Assistir às Aulas gravadas: Equação de Navier-Stokes, disponíveis no Módulo IV da Disciplina Cálculo Diferencial e Integral III na Plataforma Canvas.

<https://www.youtube.com/watch?v=FL0ZODPpayM>

<https://www.youtube.com/watch?v=e06ZRzdO4iM>

<https://www.youtube.com/watch?v=na2kGOSYNv8>

Segundo Momento:

Após assistir às aulas que versam sobre a Equação de Navier-Stokes, disponibilizadas no Ambiente Virtual de Aprendizagem, promova discussões com os seus colegas de grupo e elabore respostas para as seguintes proposições:

- 1) Caracterize um elemento material em movimento.

Resposta esperada: um elemento material de um fluido em movimento é uma partícula infinitesimal de massa m (constante) e velocidade $\vec{v}$, com $\vec{p}$ representando a quantidade de movimento e a força resultante que atua sobre essa partícula é dada pela *Segunda Lei de Newton*, podendo ser representada pela expressão $\vec{F}_r = m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, em que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ é aceleração.

- 2) Discorra acerca do significado da derivada parcial total:

$$\frac{D\vec{V}}{DT} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Resposta esperada: Para cada elemento material localizado em um ponto de coordenadas (x, y, z) em um campo de velocidade de escoamento de um fluido, a direção do vetor velocidade é indicada pela tangente à curva sobre a qual o ponto está e a função velocidade, representada por $\vec{V}(x, y, t)$ sendo t o tempo transcorrido, depende das coordenadas x e y do ponto considerado, pois o elemento material se move em relação ao tempo e do tempo, pois o campo de velocidade também pode variar com o transcorrer do tempo.

Essa dependência é representada por essa derivada parcial total e representa a aceleração do movimento do fluido.

- 3) Como é possível calcular a quantidade de massa de um elemento material, considerando-o em uma forma cúbica?

Resposta esperada: Considerando que um elemento material de um fluido em movimento, pode assumir a forma cúbica, com dimensões $\Delta x, \Delta y$ e Δz , podemos calcular a quantidade de

massa desse elemento material, multiplicando o seu volume (produto $\Delta x. \Delta y. \Delta z$) pela densidade ρ , ou seja: $m = \Delta x. \Delta y. \Delta z. \rho$.

4) Considerando que um elemento material na forma cúbica se move conforme a Segunda Lei de Newton, como podemos representar as forças resultantes que atuam sobre ele?

Resposta esperada: Basta substituir o valor da massa e da aceleração que é dado pela equação diferencial total, na expressão: $\vec{F}_r = m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ obtendo:

$$\vec{F}_r = \Delta x. \Delta y. \Delta z. \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right)$$

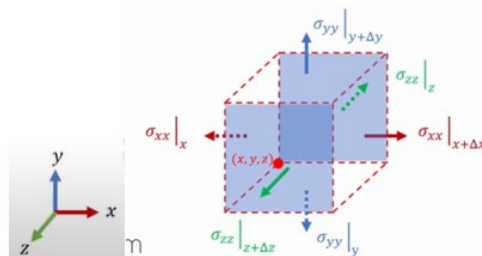
5) Quais são as forças que atuam no elemento material?

Resposta esperada: As forças que atuam sobre um elemento material de um fluido são: a tensão normal $\left(\sigma = \frac{F_n}{dA}\right)$; a força de tensão de cisalhamento $\left(\tau = \frac{t}{dA}\right)$; e a força do campo gravitacional (g).

6) É possível representar geometricamente todas as tensões normais que atuam nas faces de um elemento material na forma cúbica? Como?

Resposta esperada: Figura 90.

Figura 90: Representação geométrica de todas as tensões normais que atuam nas faces de um elemento material na forma cúbica

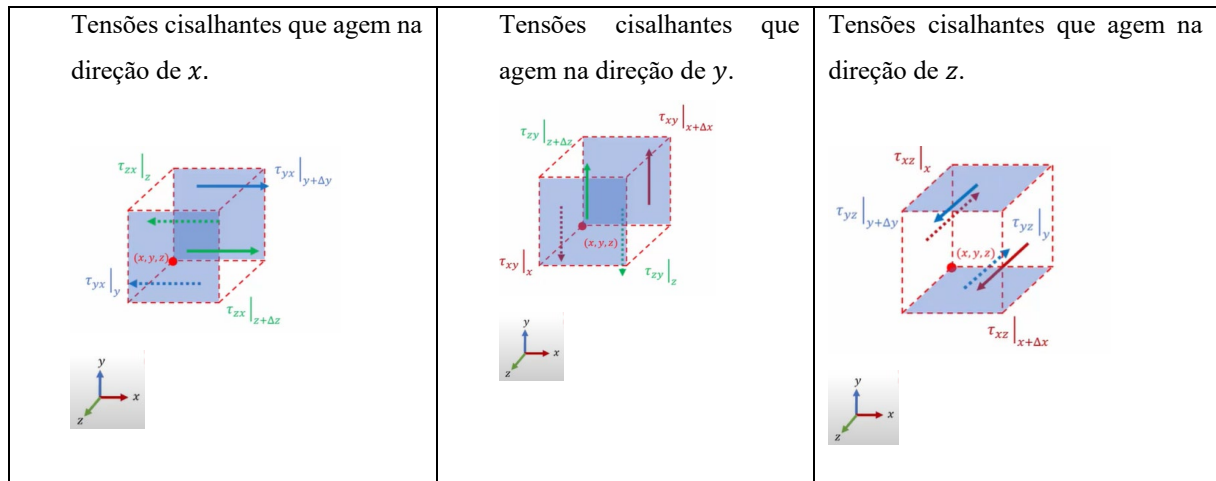


Fonte: Vianna Neto, 2019

7) É possível representar geometricamente todas as tensões de cisalhamento que atuam nas faces de um elemento material na forma cúbica? Como?

Resposta esperada: Figura 91.

Figura 91 – Representação Geométrica das tensões de cisalhamento que atuam sobre um elemento material de um fluido

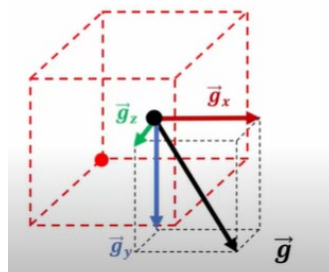


Fonte: Vianna Neto, 2019

- 8) É possível representar geometricamente a força de efeito do campo gravitacional que atua nas faces de um elemento material na forma cúbica? Como?

Resposta esperada: Figura 92.

Figura 92 – Representação Geométrica da força de efeito do campo gravitacional que atua sobre um elemento material de um fluido



Fonte: Vianna Neto, 2019

Terceiro Momento:

Socialização das respostas dos estudantes com a intervenção da Professora de Mecânica dos Fluidos.

Quarto Momento:

Aula expositiva dialogada: *Explicitar a Equação da Continuidade Incompressível* em coordenadas cartesianas, bem como explicitar como essa equação é utilizada na análise diferencial de um sistema de escoamento de fluidos. Essa aula é realizada pela professora de Mecânica dos Fluidos.

Equação da continuidade incompressível

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Componente x da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z^2} \right)$$

Componente y da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 z^2} \right)$$

Componente z da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z^2} \right)$$

Quinto momento:

Você deve realizar a leitura da seção 15.8 do livro didático de Cálculo Diferencial e Integral, páginas 922 e 923, além de outros textos buscados por vocês para melhor apropriação do tema. Produza um texto explicativo sobre Coordenadas Cilíndricas e poste no AVA de nossa disciplina até a data indicada.

Atividade 4: Apresentação da *Equação da Continuidade Incompressível* em coordenadas cilíndricas

Objetivo: Apresentar a Equação da Continuidade incompressível em coordenadas cilíndricas.

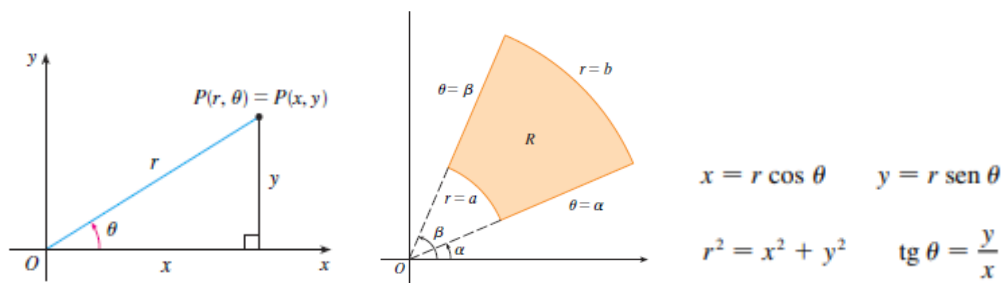
Primeiro Momento:

Apresentação das Coordenadas Cilíndricas a partir do Problema proposto.

Considerando o Problema proposto na Atividade II, agrupem-se e respondam às questões que se seguem:

- 1) Você aprendeu em Cálculo Diferencial e Integral I que pode representar um ponto $P(x, y)$ em coordenadas polares, como ilustrado na Figura 93.

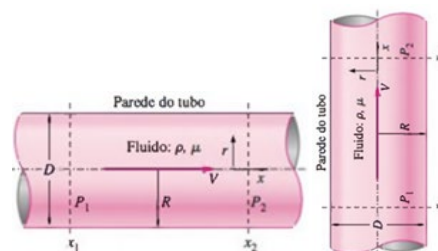
Figura 93 – Coordenadas retangulares, Retângulo Polar



Fonte: Stewart, 2014, p. 895-896

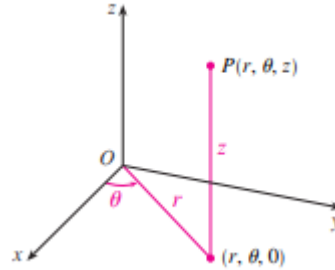
Considerando a representação geométrica elaborada a partir do problema analisado, você saberia explicitar as coordenadas de um ponto P qualquer que representa a localização de um elemento material do fluido se esse elemento estiver em repouso?

Figura 94 – Geometria do problema



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p. 486

Resposta esperada: No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z) , em que r e θ representam as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z representa a distância orientada do plano xy a P (Figura 95).

Figura 95 – Coordenadas cilíndricas de um ponto P 

Fonte: Stewart, 2014, p. 923

Como no problema foi adotado um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com x em lugar de z como componente axial, as coordenadas de um ponto P qualquer são (r, θ, x) se desconsideramos as propriedades físicas desse ponto.

Segundo Momento:

Aula expositiva dialogada apresentando a Equação de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas realizada pela professora de Mecânica dos Fluidos.

Equação da continuidade incompressível

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0$$

Componente r da equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Componente θ da equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Componente z da equação de Navier-Stokes incompressível

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \mu_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

Atividade 5: Resolução dos itens (a) e (b) do Problema

Objetivo: Resolver os itens (a) e (b) do Problema inicial.

Obs.: Essa atividade foi construída considerando a Modelagem Matemática para Engenheiros, conforme proposto pelo livro didático da disciplina de Mecânica dos Fluidos.

Primeiro Momento:

Forme um grupo, faça novamente a leitura do problema proposto considerado na Atividade 2 e resolva-o por meio das questões propostas.

1) Em que implica a solução do problema?

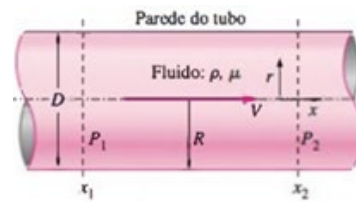
Resposta esperada: Deduzir expressões para calcular a medida da:

- a) velocidade de escoamento dentro do tubo e estime a força de cisalhamento viscoso por unidade de área de superfície agindo na parede do tubo;
- b) velocidade máxima do fluido;
- c) vazão volumétrica através do tubo.

2) Construa, usando lápis e papel, um esquema que represente geometricamente a situação abordada no problema, adotando um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com x em lugar de z como componente axial, ou seja, (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u_p) descrevendo os elementos do esquema construído.

Resposta esperada: Figura 96.

Figura 96 – Geometria do problema



Fonte: Çengel e Cimbala, 2012, p. 486

3) Retire os dados do Problema, caracterizando cada um deles por meio de suas propriedades.

Resposta esperada: O escoamento é permanente, portanto, todas as derivadas parciais em relação ao tempo são nulas, pois elas representam a aceleração e em escoamentos permanentes a velocidade é constante. O escoamento é paralelo às paredes do tubo, portanto, a componente r da velocidade u_r deve ser nula. O fluido é incompressível e newtoniano com propriedades constantes de escoamento laminar. Foi aplicado um gradiente de pressão na direção de x de modo que a pressão muda linearmente com relação a x de acordo com a equação $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1}$, entretanto, esse gradiente é constante. O campo de velocidade é axissimétrico, ou seja, apresenta simetria na direção axial do movimento; é também sem turbilhão, pois é um escoamento laminar, portanto, a componente $u_\theta = 0$ e todas as derivadas parciais com relação a θ são nulas. Os efeitos da gravidade devem ser ignorados.

4) Quais as condições que devem ser observadas para que a resolução encontrada ao final da letra (a) seja validada? Essas condições são conhecidas como condições de contorno.

Resposta esperada: Como o escoamento é estacionário, não provoca escorregamento na parede do tubo o que faz com que a componente do perfil da velocidade em coordenadas cilíndricas, seja igual ao raio da seção transversal do tubo, $r = R$, e a $\vec{V} = 0$. Outra condição considerada é que tanto a componente axial r quanto o gradiente de pressão $\frac{\partial P}{\partial x}$ são nulos, pois o eixo central do tubo, o eixo x na direção axial do movimento é também um eixo de simetria uma vez que o movimento é axissimétrico. Então, em $r = 0$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$. Logo, as condições de contorno são:

$$(1) \quad (r = R) \Rightarrow \vec{V} = 0$$

$$(2) \quad (r = 0) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

5) Qual a equação diferencial parcial que é utilizada para resolver o problema?

Resposta Esperada: A *equação da continuidade incompressível* e suas componentes em coordenadas cilíndricas.

6) Escreva a equação diferencial identificada na questão 4 e simplifique cada uma de suas componentes de acordo com o que você concluiu com as questões 2 e 3.

Resposta esperada: Devemos escrever a *equação da continuidade incompressível* em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0$$

considerando a coordenada x no lugar da coordenada z , pois essa foi uma condição imposta no problema quanto à escolha dos eixos coordenados:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Podemos desconsiderar o primeiro e segundo termo, pois como o escoamento é paralelo às paredes do tubo, já concluímos que a componente r da velocidade u_r deve ser nula. Como se trata de um escoamento laminar, o campo de velocidade é axissimétrico e sem turbilhão, já concluímos que $u_\theta = 0$ e todas as derivadas parciais com relação a θ são nulas. Portanto, temos:

$$\cancel{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru_r)}{\partial r}} + \cancel{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial \theta}} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

o que implica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Desse resultado, inferimos que u (velocidade) não é uma função de x , pois a posição da origem do sistema de coordenadas não é importante em um escoamento, é laminar estacionário, sendo o perfil de velocidades igual para qualquer posição x , o que pode ser inferido, também, diretamente do fato de o tubo ser infinitamente longo com um escoamento completamente desenvolvido. Além disso, u não é uma função do tempo, pois como o escoamento é permanente, todas as derivadas parciais em relação ao tempo são nulas, uma vez que a velocidade é constante. Quanto a θ , também não é uma função do tempo, pois a componente $u_\theta = 0$ faz com que todas as derivadas parciais com relação a θ sejam nulas, o que foi inferido do fato de campo de velocidade ser axissimétrico. Portanto, concluímos que u é, no máximo, uma função de r , e esse é o resultado da continuidade:

$$u = u(r).$$

E essa é a primeira equação obtida na análise.

Vamos analisar a equação do momento axial, componente x da equação de Navier-Stokes incompressível, usando uma versão modificada para equação da componente θ dessa equação:

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right]$$

Considerando a modificação nas coordenadas, indicada no problema, considerando $\frac{\partial u}{\partial t}$ ou contrário de $\frac{\partial u_\theta}{\partial t}$ e substituindo x no lugar da coordenada z . Observemos que a escolha $\frac{\partial u}{\partial t}$ implicou outras modificações decorrentes da forma como essa equação foi deduzida. Assim, temos:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Vamos, então, simplificar essa equação; retomemos as propriedades levantadas no problema. Como o escoamento é permanente, todas as derivadas parciais em relação ao tempo são nulas; como o escoamento é paralelo às paredes do tubo e a componente r da velocidade u_r é nula, o campo de velocidade é axissimétrico e sem turbilhão, portanto, a componente $u_\theta = 0$ e todas as derivadas parciais com relação a θ são nulas e, ainda, devemos ignorar os efeitos da gravidade. Assim, eliminando os termos indicados na equação:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ &\quad \rho \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{hipótese 2}} + \underbrace{u_r \frac{\partial u}{\partial r}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}}_{\text{hipótese 6}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{continuidade}} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{hipótese 7}} + \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_{\text{hipótese 6}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{continuidade}} \right) \end{aligned}$$

obtemos a equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Entretanto, a aceleração material (todo o membro da esquerda da equação) do momento na direção x é zero, implicando que as partículas de fluido não estão acelerando nesse campo de escoamento e linearizando a equação de Navier-Stokes.

Analogamente, cada termo da equação do momento radial, ou seja, da equação da componente r :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

desaparece, obrigando o termo do gradiente de pressão a ser igual a zero e:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

é o componente r do momento.

Isso significa que P não é uma função de r , mas também não é uma função do tempo, pois já vimos que todas as derivadas parciais em relação ao tempo são nulas. P também não é uma função de θ , todas as derivadas parciais com relação a θ são nulas, de onde concluímos que P pode ser, no máximo, uma função de x :

$$P = P(x),$$

sendo esse o resultado do momento radial.

Quanto à equação do momento angular, ou, seja, da componente θ da *equação da continuidade incompressível*:

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right]$$

Após análises análogas, todos os termos são anulados.

7) Resolva as Equações Diferenciais obtidas na questão 4.

Resposta esperada:

- a) A equação da continuidade já aparece desenvolvida e é uma função de r : $u = u(r)$;
- b) o mesmo aconteceu com a Equação do movimento radial, indicando que P é uma função de x : $P = P(x)$;
- c) Todos os termos da componente do momento angular se anularam, portanto, a equação referente ao momento angular já foi resolvida.

- d) a Equação do momento na direção x , ou seja, do momento axial é então, a única a ser resolvida:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}.$$

- 1º) Multiplicando ambos os membros por r , obtemos essa variável em ambos os termos da equação:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{r}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}.$$

- 2º) Podemos, então, integrar ambos os membros em relação a r , temos:

$$\int \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr = \int \frac{r}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dr$$

$\Leftrightarrow$

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r^2}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + C_1, \quad (*)$$

Sendo C_1 constante de integração.

Aqui, usamos, que a integral e a derivada são operações inversas e que tanto a viscosidade e o gradiente de pressão são constantes (μ e $\frac{\partial P}{\partial x}$, constantes).

- 3º) Dividindo ambos os membros de (*) por r , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{C_1}{r} \quad (**)$$

- 4º) Integrando ambos os membros de (**) em relação a r , temos:

$$\int \frac{\partial u}{\partial r} dr = \int \frac{r}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} dr + \int \frac{C_1}{r} dr$$

$$\Leftrightarrow (r > 0)$$

$$u = \frac{r^2}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + C_1 \ln|r| + C_2 = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + C_2 \ln r + C_2 \quad (***)$$

C_1, C_2 constantes de integração.

5º) Aplicando as condições de contorno (1) e (2)

$$(1) (r = R) \Rightarrow \vec{V} = 0$$

$$(2) (r = 0) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Nas equações (***) e (*) respectivamente, temos:

$$r = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$r = R, \quad \vec{V} = 0 \Rightarrow u = \frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + 0 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Portanto, pela equação (***), a velocidade axial é dada por:

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} (r^2 - R^2).$$

Segundo Momento:

Socialização das respostas dos estudantes e discussão dos resultados com a intervenção das professoras de Cálculo e Física.

Atividade 6: Integrais Duplas: apresentação e formalização por meio do Teorema de Fubini

Objetivo: Apresentar as Integrais Duplas e formalizar quanto ao Teorema de Fubini.

Primeiro Momento:

Tema: Integrais Duplas

Atividade desenvolvida no AVA.

Faça uma pesquisa em livros de Cálculo Diferencial e Integral III e outros materiais que vocês encontrarem versando sobre a Integral Dupla.

A partir das leituras realizadas, organizem-se em grupos escolhidos por vocês, compostos por até cinco estudantes e gravem um vídeo curto de 7 a 10 minutos, explicando o que vocês entenderam sobre *Integrais Duplas*, destacando o que vocês consideram mais importante nas leituras realizadas. Tragam a definição dessas integrais, as propriedades, modos de representação algébrica e geométrica, ou seja, façam um estudo bem completo, não se esqueçam de abordar a importância do estudo dessas integrais para o Engenheiro Civil. Não se esqueçam de colocar as referências que vocês utilizaram para a produção do vídeo. O vídeo deve ser postado no Módulo IV da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III até a data determinada na Plataforma. Após essa data, os vídeos construídos por todos os grupos estarão disponíveis a todos os estudantes que deverão acessá-los e assistir a eles.

Bom trabalho!

Segundo Momento:

Sabendo que a vazão volumétrica, também chamada de vazão em volume, é definida como o volume de fluido que atravessa certa seção do escoamento de um fluido por unidade de tempo, ou seja, a medida do volume dividido pela medida do tempo e que, no escoamento do fluido conforme dados do problema, podemos calcular a vazão volumétrica multiplicando-se a medida da velocidade axial do escoamento pela medida da área da seção por onde o escoamento ocorre, encontre uma maneira de resolver o item (c) do problema analisado na atividade 2.

Resposta esperada: Sendo $u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} (r^2 - R^2)$ a expressão que representa a velocidade axial do escoamento do fluido, e a seção transversal do tubo cilíndrico na qual acontece o escoamento conforme as especificações do problema proposto é uma seção circular, os limites são determinados em função do raio da circunferência e do ângulo θ e da componente radial r :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq r \leq R,$$

a integral que representa a vazão procurada é:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R u r dr d\theta \quad (*)$$

Lembrando que, em coordenadas cilíndricas, o diferencial é dado por $r dr d\theta$.

Substituindo a velocidade axial $u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} (r^2 - R^2)$ em (*) temos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} (r^2 - R^2) \cdot r \right] dr d\theta .$$

Como $\frac{1}{4\mu}$ e $\frac{\partial P}{\partial x}$ são constantes, podem ser extraídos do sinal de integração:

$$\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 - R^2) r dr d\theta$$

pelo Teorema de Fubini:

$$V = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} (r^2 - R^2) r d\theta \right] dr$$

$$V = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^R \theta (r^2 - R^2) dr$$

$$V = \frac{1}{4\mu} \cdot 2\pi \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^R (r^2 - R^2) r dr$$

$$V = \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^R (r^3 - R^2 r) dr$$

$$V = \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \left[\int_0^R r^3 dr - \int_0^R R^2 r dr \right]$$

$$V = \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{R^2 r^2}{2} \right]$$

$$V = \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2} \right)$$

$$V = \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \left(-\frac{R^4}{4} \right)$$

$$V = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$$

Logo, a vazão procurada é:

$$V = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$$

Terceiro Momento:

1) Existem condições para que essa integração seja possível? Quais?

Resposta esperada: que a função $u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} (r^2 - R^2)$ seja contínua e positiva no seu domínio de integração.

2) Que Teorema foi usado na resolução?

Resposta esperada: o Teorema de Fubini.

3) Faça uma pesquisa rápida e enuncie o Teorema de Fubini para a Integral Dupla.

Resposta esperada: Teorema de Fubini

Se f for contínua em: $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ então:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R , f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista.

4) Resolva os exercícios 1 a 8, 28, 35 e 36 da seção 15.4 do livro didático utilizado em Cálculo Diferencial e Integral III. Esses exercícios deverão ser resolvidos em casa e postados na

plataforma até a data determinada.

5) Como uma avaliação das atividades realizadas a partir da análise do problema proposto, responda às questões apresentadas no Quadro 68.

Quadro 68 – Avaliação

1. A experiência de discutir sobre o Cálculo Diferencial e Integral e Mecânica dos Fluidos como um trabalho conjunto da forma como fizemos foi interessante pra você? Porquê?
2. Destaque os pontos positivos e negativos da atividade.
3. Quais foram as principais dificuldades que você teve ao resolver as atividades propostas?
4. Qual a importância dessa atividade tendo em vista a sua futura profissão como engenheiro civil?
5. Escreva em um parágrafo uma avaliação geral das atividades considerando o que julgar importante.
6. Insira aqui sugestões de atividades futuras.
Obrigada!

Fonte: A autora, 2021

6.9 Técnica τ_{ic8}

Nesta investigação, elaboramos o EC apresentado na seção anterior como uma Proposta Alternativa para apresentar alguns aspectos das Integrais Dupla para estudantes de Engenharia Civil da instituição de referência, de forma que essas integrais fossem entendidas como uma extensão das integrais de funções reais de uma variável real, bem como fossem mobilizadas como uma ferramenta para resolver problemas dessa habilitação de Engenharia, com vistas à formação integral do estudante. Nesse sentido, apresentamos, neste capítulo, a organização didática proposta para uma futura implementação do EC, baseada nos resultados do estudo das três dimensões do problema didático elaborado neste estudo.

É importante esclarecer que não foi nosso propósito nesta investigação aplicar o EC aos estudantes, sendo esse um aspecto que pode ser explorado em investigações futuras.

De forma geral, o Evento Contextualizado descreve as atividades organizadas para serem implementadas em diferentes momentos, nos quais os estudantes são convidados a realizar leituras prévias de materiais disponibilizados no AVA e outros materiais obtidos por meio de pesquisas autônomas e a realizar discussões em grupo e socializar tais discussões sob a intervenção das professoras responsáveis pelas disciplinas de Cálculo Diferencial III e Mecânica dos Fluidos; envolvem, entre outros, aula expositiva dialogada com a participação das Professoras dessas disciplinas, ocupando o mesmo espaço da sala de aula ou não.

A ideia é que o EC seja realizado como um projeto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, a ser iniciado após o estudo das derivadas parciais. Para que o EC seja viável de implementação, é necessário, inicialmente, realizar reuniões prévias entre as professoras de Cálculo e de Mecânica dos Fluidos para explicar a proposta, bem como para construir um cronograma acordado entre elas. Nesta tese, apresentamos uma sugestão de cronograma no Quadro 69.

Quadro 69 – Proposta de Cronograma para implementação do EC

Atividade	Momento da atividade	Tempo de aula	Local da aula	Professores presentes
Conceitos Básicos de Escoamento Interno	Único	-	AVA.	-
Contextualização do Problema	Primeiro Segundo Terceiro	2h/a.	Sala de aula de Cálculo.	Cálculo e Mecânica dos Fluidos.
Apresentar as equações diferenciais parciais utilizadas no estudo do escoamento de fluidos incompressíveis.	Primeiro.	-	AVA.	Cálculo e Mecânica dos Fluidos.
	Segundo Terceiro Quarto	2h/a.	Sala de aula de Cálculo.	
	Quinto	-	AVA.	
Apresentar as equações diferenciais parciais utilizadas no estudo do escoamento de fluidos incompressíveis em coordenadas cilíndricas.	Primeiro	-	AVA.	-
	Segundo Terceiro Quarto.	2h/a.	Sala de aula de Cálculo.	Cálculo e Mecânica dos Fluidos.
Resolver os itens (a) e (b) do problema.	Primeiro Segundo	2h/a	Sala de aula de Cálculo.	Cálculo.
	Terceiro.	2h/a	Sala de aula de Cálculo.	Cálculo.
Integrais Duplas e Formalização por meio do Teorema de Fubini	Primeiro.	-	AVA.	Cálculo.
	Segundo Terceiro	2h/a	Sala de aula de Cálculo.	Cálculo.

Fonte: A autora, 2021

Na organização curricular das disciplinas do ciclo básico das Engenharias da instituição de referência, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III é ministrada no terceiro período e a disciplina de Mecânica dos Fluidos é ministrada no quarto período, ou seja, os estudantes não terão o domínio dos conhecimentos específicos da Mecânica dos Fluidos necessários à resolução do problema. Assim, nossa primeira preocupação foi elaborar as atividades de forma a munir os estudantes da fundamentação do contexto do problema, levando em conta os elementos do bloco teórico-tecnológico do ponto de vista da Mecânica dos Fluidos.

Assim, o EC prevê uma primeira atividade em que os estudantes devem realizar leituras prévias, disponibilizadas no AVA da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III e outras pesquisas de forma autônoma, e produzir um vídeo sobre o assunto a fim de ter um primeiro

contato com os conceitos de escoamento interno envolvidos no problema. O vídeo deverá ser produzido em grupo, cujos membros são escolhidos por afinidade entre eles. Após a construção do vídeo, cada grupo deve postá-lo no AVA e o professor poderá deixar visível a todos os estudantes para consulta. O tempo previsto para essa atividade por ser determinado a partir do planejamento do professor.

Na instituição de referência, atividades desse tipo são comumente realizadas tendo em vista as necessidades do projeto interdisciplinar, também da metodologia ativa *sala de aula invertida*⁵⁴ que é praticada pelos professores. Quanto ao uso do AVA, todos os professores da instituição têm uma sala virtual disponível para a sua disciplina, independentemente de a disciplina ser oferecida de modo virtual, híbrido ou presencial.

Após realização das leituras, a praxeologia didática da Atividade II prevê, após a apresentação do Problema aos estudantes, que eles respondam a questões específicas, elaboradas a partir do seu enunciado. Essa atividade, no primeiro momento, deve ser realizada em grupos cujos membros devem ser determinados pelo professor, mesclando os membros dos grupos da atividade anterior. Essa ideia é interessante, pois os estudantes podem compartilhar entre eles os resultados das pesquisas que realizaram na atividade anterior. Em uma proposta investigativa, as professoras devem assumir a posição de mediadoras enquanto as respostas são elaboradas pelos estudantes.

No segundo momento, está prevista a socialização das respostas das questões propostas entre os estudantes dos grupos. Nesse momento, as professoras devem solicitar que cada grupo apresente suas respostas, que comentem as respostas dos outros grupos, enfim, que promovam uma discussão detalhada sobre o assunto. A intervenção das professoras é importante para a condução da discussão e elaboração das definições corretas. Por fim, a sistematização e formalização dos conceitos discutidos são realizadas por meio de uma aula expositiva e dialogada com a apresentação dos *Slides* constantes na Figura 89, mostrados na Atividade 2, em uma ação conjunta das professoras de Mecânica dos Fluidos e Cálculo Diferencial e Integral III. Nesta pesquisa, os *Slides* disponibilizados foram retirados da aula do Professor Wagner Shin Nishitani (2020) que se encontram disponíveis em <https://www.youtube.com/watch?v=d8NwK5K5E3s>.

⁵⁴ A sala de aula invertida (do inglês, *flipped classroom*) é uma metodologia ativa em que primeiro o estudante faz a internalização dos conceitos essenciais antes de aula para posteriormente, junto à turma, discutir os conhecimentos adquiridos, construindo o conhecimento mediado pelo professor. (SAE DIGITAL, 2019)

A Atividade 3 é prevista para que os estudantes compreendam que a análise de um fluido incompressível tridimensional é realizada por meio de quatro equações diferenciais parciais acopladas, em que algumas das variáveis aparecem em todas elas e que o conjunto dessas equações deve ser, portanto, resolvido simultaneamente para as quatro incógnitas, durante a análise diferencial. Assim, no primeiro momento, o estudante deve previamente assistir a três videoaulas curtas, disponibilizadas no AVA da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, que discorrem sobre essas equações.

No segundo momento, em sala de aula de Cálculo, os estudantes devem responder às questões propostas na atividade em um trabalho em grupo, sendo os componentes dos grupos escolhidos pelos professores. Em uma proposta investigativa, a atividade deve ser mediada pelas professoras de Cálculo e Mecânica dos Fluidos para, posteriormente, no terceiro momento da aula, haver a socialização das respostas dos estudantes sob intervenção das professoras, da mesma forma como foi proposta na atividade anterior. No quarto momento, a atividade prevê que a professora de Mecânica dos Fluidos explicita a *Equação da Continuidade Incompressível* em coordenadas cartesianas, bem como explicita como essa equação é utilizada na análise diferencial de um sistema de escoamento de fluidos. Nesse momento, não deve haver intenção de deduzir passo a passo essas equações, mas de enfatizar como ela é utilizada no estudo do escoamento de fluidos laminares, tendo ênfase nas propriedades descritas no problema.

Ao final dessa atividade, as professoras devem pedir aos estudantes que façam a leitura prévia da seção 15.8 do livro didático de Cálculo Diferencial e Integral, páginas 922 e 923, disponível no AVA, e que pesquisem outras fontes que versam sobre Coordenadas Cilíndricas. Após as leituras realizadas, os estudantes devem produzir um texto explicativo sobre o assunto e postar na plataforma AVA até a data determinada pelas professoras.

Na Atividade 4, propomos inicialmente uma discussão sobre coordenadas cilíndricas, em que, a partir de leituras prévias realizadas no livro didático de Cálculo Diferencial e Integral III, os estudantes são convidados a resolver uma única atividade com o objetivo de levá-los a entender como representar um ponto no espaço em coordenadas cilíndricas. Embora a formalização das coordenadas cilíndricas seja possível, não está prevista nesse momento, pois o foco das atividades são as Integrais Duplas, entretanto, esse estudo pode ser explorado em investigações futuras.

No segundo momento da Atividade 4, previmos a apresentação da *equação da continuidade incompressível* em coordenadas cilíndricas, por meio de aula expositiva e

dialogada conduzida, principalmente, pela professora de Mecânica dos Fluidos, na qual a professora pode utilizar material em *slides* previamente elaborados.

Na atividade 5, o primeiro momento prevê que os estudantes, organizados em grupos, resolvam as questões propostas pelos itens (a) e (b) do problema. Nesse momento, as professoras devem assumir uma postura investigativa, mediando o trabalho dos estudantes. No segundo momento, propomos a socialização das respostas dos estudantes entre os grupos com a intervenção das professoras, conforme foi realizado nas atividades anteriores.

Nessa atividade, como as equações diferenciais parciais são abordadas, segundo a grade curricular do curso estudado, apenas no quarto período, a exposição dessa equação nesse momento é prevista sem muita formalidade, mais como uma apresentação de sua funcionalidade prática, sem intenção de aprofundar o seu estudo. Como os estudantes já terão visto as derivadas parciais, essa ideia é possível de ser implementada. Ademais, após as simplificações da equação diferencial da continuidade incompressível durante a resolução do problema, a única equação diferencial que exigirá solução é a equação: $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$, a ser resolvida em função de r , que, se multiplicarmos ambos os membros dessa equação por r , podemos facilmente resolvê-la, utilizando o método de separação de variáveis.

A atividade 6 tem o propósito de apresentar as Integrais Duplas aos estudantes como uma ferramenta para encontrar a vazão volumétrica do fluido dadas as condições do problema inicial, bem como formalizar o estudo dessas integrais por meio do Teorema de Fubini. Assim, no primeiro momento, prevemos um estudo prévio dessas integrais com os estudantes organizados em grupos, cujos membros foram escolhidos por eles, em que eles devem selecionar material por meio de pesquisas realizadas e gravar um vídeo curto com o tema: *Integrais Duplas: uma expansão das integrais de funções reais de uma variável real*. O vídeo deve, também, discutir como essas integrais são mobilizadas na formação do Engenheiro Civil. Os vídeos produzidos devem ser postados no AVA em data previamente combinada e disponibilizada a todos os estudantes.

A ideia é que os estudantes, estabelecendo relações com o que já sabem sobre as integrais de funções reais de uma variável real e sobre o que já estudaram em derivadas parciais, possam resolver a integral dupla proposta na atividade seguinte. Assim, no segundo momento, partindo da definição de vazão volumétrica aplicada no escoamento de fluidos, conforme problema proposto, é solicitada aos estudantes a tarefa de explicitar uma maneira de encontrar a expressão para o cálculo da vazão volumétrica, resolvendo o item (c) do problema. Essa atividade é aberta, portanto, não será conduzida por questões como as atividades anteriores.

Espera-se que os estudantes, a partir da atividade 5, primeiro momento da atividade 6 e das discussões propostas nos grupos mediadas pela professora de Cálculo Diferencial e Integral III em uma proposta investigativa, possam construir a Integral Dupla, definir o seu domínio de integração e calcular a integral.

No terceiro momento, são propostas questões que levem os estudantes a explicitar o Teorema de Fubini como a teoria que fundamentou os procedimentos utilizados na resolução do item (c) do problema proposto.

Finalizamos a atividade com uma avaliação do EC pelos estudantes, que deve ser observada para a construção e implementação de eventos contextualizados futuros. É importante, também, propor listas de exercícios para que os estudantes possam construir os conhecimentos visados em contextos puramente matemáticos e, finalmente, construir o conhecimento desejado. Os exercícios podem ser retirados do livro didático utilizado na disciplina.

Finalizamos este capítulo tecendo alguns comentários acerca das condições que, a nosso ver, deveriam ser instauradas para que seja possível, na instituição de referência considerada no estudo, a vida de organizações matemáticas e organizações didáticas com as características presentes no modelo alternativo para o ensino de integrais duplas que elaboramos.

Concordamos com as afirmações de Lima *et al.* (2021), segundo as quais a implementação de abordagens didáticas concernentes ao MoDiMaCo demanda, como primeiro passo, o estabelecimento de diálogos entre os professores das disciplinas da área de Matemática e os das outras áreas que constituem os currículos de determinada habilitação de Engenharia – a Civil no caso em análise. Esses diálogos são potencialmente produtivos no sentido de possibilitarem “a identificação de situações de diferentes habilitações da Engenharia que requerem a mobilização de conhecimentos das ciências básicas para suas abordagens e que poderão servir como ponto de partida para a construção dos eventos contextualizados” (LIMA *et al.*, 2021, p. 813).

Além disso, é preciso considerar que, como discutem Lima, Gomes e Bianchini (2021, p. 101), “para a construção de um evento contextualizado, a maioria das tarefas a ser executada pelo professor requer a mobilização simultânea e articulada de diferentes categorias de conhecimentos docentes”. Dessa forma, uma condição crucial para viabilizar a implementação de Modelos Alternativos de Ensino como o proposto é:

[...] estruturar formações continuadas para professores que lecionam disciplinas de ciências básicas nessas graduações. Por meio da fase docente da TMCC, estabelecem-

se, inclusive, conforme ressalta Camarena (2013b), os elementos cognitivos mínimos que devem possuir um programa de formação e atualização para tais professores. Esses elementos dizem respeito a quatro categorias: (i) conhecimentos dos conteúdos a serem ensinados; (ii) conhecimento acerca dos processos de ensino e de aprendizagem; (iii) conhecimentos sobre as habilitações de Engenharia em que os docentes atuam; e (iv) conhecimento sobre o uso de tecnologias digitais de informação e de comunicação como mediadoras da aprendizagem do estudante” (LIMA *et al.*, 2021, p. 813-814).

Lima, Gomes e Bianchini (2021) propõem inclusive que, quando contratado por uma instituição de ensino superior para ministrar aulas de Matemática ou de outras ciências básicas em cursos de Engenharia, o professor deve “experimentar algum tipo de formação para exercer tal atividade e, nesse sentido, o conhecimento dos preceitos da TMCC, do MoDiMaCo e, principalmente, do trabalho com eventos contextualizados podem contribuir para um enfoque interdisciplinar entre as disciplinas básicas e as específicas” (p. 102). Os autores também apresentam uma alternativa para o caso daqueles professores já em exercício que não tiveram a oportunidade de participar de cursos de formação com a orientação citada: que os “investigadores, juntamente com as instituições, desenvolvam estratégias de autoformação que possam ser compartilhadas com os docentes” (LIMA; GOMES; BIANCHINI, 2021, p. 102).

Assim, não apenas a instituição de referência considerada neste estudo, mas todas as Instituições de Ensino Superior que oferecem cursos de graduação em Engenharia poderiam, além de se preocuparem em implementar as atuais Diretrizes Curriculares para estes cursos, “colocar em ação programas de formação para seus professores. Afinal, de nada adiantam Diretrizes com pressupostos inovadores se, em sala de aula, elas se traduzirem em práticas já consagradas, mas totalmente em dissonância a esses pressupostos e aos novos objetivos visados” (LIMA *et al.*, 2021, p. 814).

Seguimos, no próximo capítulo, para a apresentação das considerações finais deste estudo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos o processo de investigação, que culminou na redação desta tese de doutorado, com o olhar voltado para o ensino de Cálculo para estudantes dos cursos de Engenharia, movidos pela intenção de contribuir, de alguma forma, para minimizar as dificuldades que esses, geralmente, enfrentam nas disciplinas dessa área, que os desmotivam e, muitas vezes, levam-nos às sucessivas reprovações e à evasão. Por meio das leituras iniciais que realizamos, compreendemos que essa desmotivação em relação ao estudo do Cálculo e as dificuldades enfrentadas pelos graduandos podem ser decorrentes do fato de, nas abordagens usualmente presentes nas disciplinas de Matemática que compõem a formação do futuro engenheiro, os professores, em geral, não primarem pela vinculação entre os conteúdos do Cálculo e os das disciplinas específicas e profissionalizantes da matriz curricular desses cursos. Constatamos, também, uma carência de investigações científicas contemplando processos de ensino e de aprendizagem de alguns tópicos de Cálculo Diferencial e Integral relacionados às funções reais de várias variáveis reais, entre eles as Integrais Duplas. Decidimos, então, que essas integrais seriam o objeto em estudo nesta investigação.

No intuito de compreender o que já havia sido estudado a respeito do ensino e da aprendizagem de integrais duplas e, especialmente, de identificar lacunas que justificassem novos estudos referentes a esse objeto matemático, aprofundamos e refinamos a revisão de literatura, adotando como foco pesquisas versando sobre essa temática. Por meio dessa revisão, constatamos que a maioria dos trabalhos tratavam sobre essas integrais no contexto do cálculo de medidas de áreas e de volumes e foi desenvolvida tendo como alvo o ensino ou a aprendizagem do mencionado objeto matemático em alguma habilitação em Engenharia.

Algumas das investigações sinalizaram a necessidade de estudos priorizando a abordagem dessas integrais nas salas de aula de Engenharia, por meio de estratégias de ensino e de aprendizagem elaboradas a partir de trabalhos colaborativos e interdisciplinares entre os professores de Cálculo e os da área do eixo específico da graduação em Engenharia. E esses trabalhos poderiam culminar na elaboração de atividades de ensino contextualizadas na prática do Engenheiro que, possivelmente, ao serem trabalhadas em sala de aula, poderiam despertar o interesse dos estudantes e possibilitar a eles a construção de conhecimentos acerca desse objeto matemático.

Optamos então por, em nossa investigação de doutorado, contribuir com reflexões que possibilitassem, em alguma medida, atender a essa necessidade, uma vez que a Engenharia é

uma área de formação muito ampla, havendo atualmente, no Brasil, cerca de 60 habilitações diferentes registradas, desse modo, estabelecemos como esfera para nosso estudo a Engenharia Civil e, nesse âmbito, voltamos nossa atenção ao seguinte problema docente: *compreender como discutir as Integrais Duplas com estudantes de Engenharia Civil, de modo a despertar o interesse dos futuros engenheiros por esse conteúdo e possibilitar que eles passem a ver sentido em estudar tais integrais para além de uma abordagem majoritariamente procedimental subsidiada por cálculos algébricos associados às suas interpretações gráficas.*

Subsidiados pelos pressupostos teórico-metodológicos da Teoria Matemática no Contexto das Ciências (TMCC), desenvolvida pela pesquisadora mexicana Patricia Camarena Gallarado, e, posteriormente, percebendo as potencialidades que poderiam trazer para nosso estudo também daqueles oriundos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), concebida pelo pesquisador francês Yves Chevallard, optamos por assumir como premissa, nesta investigação, as vantagens para alcançar uma compreensão em rede do fenômeno em estudo, de articulações entre diferentes referenciais teóricos e, de forma concordante a esta ideia, construir o referencial teórico-metodológico desta pesquisa, buscando a articulação entre as teorias TMCC e TAD, por meio das estratégias de comparação e/ou do contraste entre teorias da Educação Matemática construídas em Prediger, Bikner-Ahsbahr e Arzarello (2008). Optamos então por tomar a articulação da TMCC com a TAD, como uma *Praxeologia de Investigação Didática* (PID), isto é, como “um instrumento para descrever a estrutura e o funcionamento da atividade científica, para unificar a linguagem e para moldar o diálogo entre diferentes enfoques de investigação didática” (GASCÓN, 2021, p. 12).

A partir do problema docente anteriormente mencionado e assumida a articulação da TMCC com a TAD como uma PID, elaboramos o problema didático ao qual nos dedicamos nesta investigação: *realizar uma investigação que nos permitisse desenvolver uma proposta de ensino de Integrais Duplas para estudantes do Curso de Engenharia Civil (um Modelo Alternativo de Ensino) de modo a transformá-las em uma ferramenta de apoio a esses estudantes, visando ao exercício da profissão, para que possam interpretá-las e aplicá-las como um instrumento útil sem perder de vista o caráter científico e o discurso formal a elas inerentes.* Formulamos então a seguinte questão de pesquisa: *Como elaborar uma atividade interdisciplinar para o ensino de Integrais Duplas na Engenharia Civil, de modo a favorecer o diálogo entre a Matemática e esta habilitação da Engenharia e explicitar o caráter ferramental dessas integrais no futuro exercício profissional do engenheiro?*

No intuito de buscar subsídios que nos possibilitassem responder a essa questão, estabelecemos como objetivo geral: *assumindo a articulação da TMCC com a TAD como uma Praxeologia de Investigação Didática, elaborar um Modelo Alternativo para o ensino de Integrais Duplas para estudantes do curso de Engenharia Civil, por meio de uma atividade interdisciplinar, de modo a favorecer o diálogo entre a Matemática e a Engenharia Civil, sem perder de vista o caráter científico e o discurso formal a elas inerentes*. Para auxiliar-nos no alcance desse objetivo geral, formulamos três objetivos específicos, os quais evidenciamos na sequência, simultaneamente à apresentação de considerações acerca de como esses puderam ou não ser atingidos em nosso estudo.

O primeiro objetivo específico visado foi: *estabelecer uma articulação entre a TAD e a TMCC e caracterizá-la como uma Praxeologia de Investigação Didática (PID)*. Esse objetivo foi alcançado por meio de uma apresentação dos aspectos centrais de ambos os referenciais teóricos e, particularmente, com a explicitação do que assumimos como sendo, nesta PID, o bloco do logos científico – ou seja, o conjunto de postulados determinando o tipo de entidades e processos que fazem parte dos seus componentes, as relações entre eles e os critérios para descrever e justificar a *práxis* científica – e o bloco da *práxis* – isto é, os tipos de problemas científicos que estão sendo estudados e as técnicas ou metodologias de pesquisa que são utilizadas para estudá-los.

Quanto ao bloco do logos, podemos dizer de maneira sintética que, na TAD, em termos pedagógicos, assume-se o *Paradigma de Questionamento do Mundo*, por meio do qual se preconiza a indagação, desencadeada por uma questão problemática que em geral não pode ser respondida diretamente, como propulsora dos processos de aprendizagem. Esse paradigma, a nosso ver, está diretamente relacionado ao *Paradigma Didático da Matemática em Contexto* inerente à TMCC. Especificamente em relação à Matemática, assume-se na TAD o *Paradigma da Modelização Matemática*, por meio do qual a aprendizagem da Matemática é interpretada como “um processo de construção de conhecimentos (relativos a um sistema matemático ou extramatemático) que é efetivado mediante a construção de um modelo matemático do mencionado sistema” (GASCÓN; NICOLÁS, 2021, p. 27).

As estratégias didáticas planejadas para a implementação desse paradigma sustentam-se por dispositivos didáticos que, devido à sua grande flexibilidade, possibilitam “converter a atividade de modelização matemática em um trabalho sistemático, paciente, aprofundado e a longo prazo” (Idem). Por outro lado, na TMCC, como pontua Camarena (1995; 2008, 2012), os Paradigmas Educacionais são assumidos como aqueles que fornecem a base para um trabalho

com a Matemática no Ensino Superior em cursos que não visam formar matemáticos, em conformidade com a ideia de “que os estudantes construam uma matemática para a vida e sejam capazes de se mover na sociedade e em todas as suas esferas, de forma crítica, criativa e analítica, além de desenvolver competências matemáticas para a profissão” (CAMARENA, 2021, p. 75). Explicitamente, os paradigmas que fundamentam a TMCC são: a matemática é uma ferramenta de apoio a outras ciências e uma disciplina formativa aos profissionais, a matemática tem uma função específica no Ensino Superior e os conhecimentos nascem integrados.

Os três paradigmas assumidos na TMCC reforçam o pressuposto educacional preconizado no âmbito desse referencial quanto à formação integral do estudante e dão subsídio para formular, no domínio da TAD, um problema didático tendo como objeto de estudo as integrais duplas de forma consonante ao *Paradigma da Modelização Matemática*. A essencialidade de considerar, como Bachelard (1981), a relação epistemológica do conhecimento nos processos de ensino e de pesquisa é premissa assumida na TMCC, conforme descrevem Camarena e Flores (2012), sendo também fundamental para a construção do problema didático no domínio da TAD.

A respeito do bloco da *práxis*, destacamos que, na TAD, perante as problemáticas de naturezas matemática e didática, conforme pontuam Gascón e Nicolás (2019), realizam-se investigações objetivando responder questões atreladas a cada uma das três dimensões consideradas fundamentais nestas problemáticas: como se comportam as praxeologias em uma instituição determinada? (dimensão econômica), por que as praxeologias chegaram ao estágio em que se encontram atualmente na instituição considerada e como elas poderiam ser modificadas? (dimensão ecológica), e como construir um modelo epistemológico-didático de referência, específico das praxeologias que estão em jogo, que responda à problemática didático-matemática em estudo? (dimensão epistemológica).

Na TMCC, por sua vez, as investigações estão relacionadas, segundo Camarena (2021), entre outras, às seguintes problemáticas: (i) o caráter abstrato da Matemática, (ii) a ausência de sentido dos conhecimentos matemáticos para os estudantes, (iii) a necessidade de os estudantes desenvolverem competências e (iv) a necessidade de atingir os propósitos da Matemática Social (construir uma matemática significativa para o estudante, que permita sua aplicação na prática social da profissão e que o ajude a desenvolver habilidades profissionais, de trabalho e de vida). Essas problemáticas particulares determinam questões pontuais que devem ser observadas quando se tem um problema didático.

Nesta investigação, a partir do problema didático elaborado, considerando a articulação da TMCC com a TAD como uma PID, determinamos as tarefas e, a partir delas, construímos as praxeologias de investigação por elas determinadas e que permitiram conduzir os estudos em busca de respostas ao mencionado problema. Ou seja, alcançamos o segundo objetivo específico visado, a saber: *a partir da articulação entre a TAD e a TMCC como PID, realizar o estudo das dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático.*

Elaboramos primeiramente a Praxeologia de Investigação I, praxeologia menor da PID, por meio da qual realizamos, em interface com um dos procedimentos da fase epistemológica da TMCC, o estudo da dimensão epistemológica do problema didático, desencadeado pela tarefa de analisar do ponto de vista epistemológico como se deu a construção das Integrais Duplas ao longo do tempo. Os resultados evidenciaram que os problemas que deram origem a essas integrais emergiram de contextos sociais e culturais que se construíram a partir das necessidades relacionadas a questões da natureza e que foram discutidas nos âmbitos de diferentes áreas científicas: Física, Astronomia e Matemática. Concluímos que a razão de existir da Integral Dupla está associada ao cálculo das medidas de áreas de superfícies tridimensionais, ao cálculo de medidas de volumes de sólidos, à necessidade de calcular a quantidade de calor que passa por um ponto de uma massa sólida e à necessidade de reduzir equações diferenciais a equações algébricas de soluções mais simples.

Considerando a articulação da TMCC com a TAD como PID, com base no estudo epistemológico realizado, elaboramos o Modelo Epistemológico de Referência (MER) assumido como norte na análise dos eixos didáticos e matemáticos associados ao problema didático em que as Integrais Duplas estão inseridas. O MER foi elaborado no estudo da dimensão epistemológica do problema didático para ser contrastado com o Modelo Epistemológico Dominante, o modelo presente na instituição que condiciona o tipo de atividades matemáticas relacionadas às Integrais Duplas que são efetivamente desenvolvidas com os estudantes de Engenharia Civil na instituição considerada, bem como as atividades didáticas correspondentes que são materializadas no modelo docente desempenhado.

Assim, do estudo epistemológico do problema didático, pudemos concluir que diferentes escolhas para o ensino de Integrais Duplas são influenciadas, por um lado, pelo contexto social da época, associado aos interesses institucionais que incluem a apresentação dos conceitos por meio de seus diferentes tipos de representações (representação gráfica; representação analítica e representação algébrica) e interações entre elas, que refletem nas

praxeologias utilizadas, e, por outro lado, pelos elementos de outros conteúdos matemáticos pelos quais essas integrais são alimentadas, bem como por outras áreas científicas às quais elas estão a serviço.

O estudo da dimensão econômico-institucional do problema didático foi realizado por meio da Praxeologia de Investigação II, praxeologia menor da PID, e desencadeado pela tarefa de analisar, a partir de preceitos gerais da TMCC e de alguns procedimentos da fase epistemológica dessa teoria, de que maneira as Integrais Duplas no Curso de Engenharia Civil passam por transformações para se adaptarem a essa área de formação relacionada ao campo de conhecimento em que se insere a profissão do Engenheiro Civil, na qual a Matemática e, portanto, as Integrais Duplas, são uma ferramenta, e as necessidades sociais vinculadas a essa área.

Nesse sentido, é fundamental identificar as competências matemáticas relativas a essas integrais que devem ser desenvolvidas no estudante para serem aplicadas no âmbito da Engenharia Civil e que possam vir a contribuir para a sua formação integral, ou seja, que contribua com os elementos e as características que um egresso deve construir durante a sua formação escolar e acadêmica. Por meio do estudo da dimensão econômico-institucional, foi possível evidenciar que resultados têm produzido a ação da transposição didática nas praxeologias institucionais que vêm sendo realizadas, tendo as Integrais Duplas como objeto em estudo, o que nos permitiu, considerando a articulação da TMCC com a TAD como uma PID, construir o Modelo Epistemológico Dominante (MED) para descrever e analisar as características dessas praxeologias.

Assim, por meio da análise do MED vigente na instituição de referência, que foi por nós delineado a partir das análises de documentos institucionais, constatamos que tal Modelo está fundamentado no que dispõe a legislação nacional vigente, com o currículo organizado por disciplinas e não por competências e apresenta estratégias voltadas para que a formação do estudante reflita a sua futura atuação profissional. Quanto às ID, constatamos que estão presentes no estudo cálculo de medidas de área de regiões planas e medidas de volume de sólidos, que são discutidas em coordenadas cartesianas e polares; interação com os objetos matemáticos: integrais triplas, cálculo vetorial: campos vetoriais, integrais curvilíneas, independência de caminhos, além de ser ferramenta para o Teorema de Green, Teorema de Gauss, Teorema de Stokes e Equações Diferenciais.

As praxeologias didáticas realizadas no ensino das ID têm discursos teórico-tecnológicos ancorados em bases intuitivas relativas ao cálculo de medidas de áreas e de

volumes por somas de Riemann e, posteriormente, no Teorema de Fubini, em que as definições, propriedades e conceitos das integrais de funções reais de uma variável real são estendidas às Integrais Duplas. Tais praxeologias didáticas são organizadas por meio de aulas expositivas dialogadas e de aulas com metodologias ativas, tendo *softwares* matemáticos utilizados como recursos tecnológicos. As integrais duplas são encontradas no nicho aplicativo da Física, estando presente nas disciplinas: Mecânica Geral, Mecânica dos Fluidos e Mecânica dos Sólidos.

Constatamos ainda, que as praxeologias matemáticas, geralmente se iniciam por meio da realização de partições em superfícies decorrentes de funções de duas variáveis contínuas e limitadas nas quais são aplicados os conceitos análogos aos desenvolvidos por Riemann para situações similares, decorrentes de funções de uma variável real. Há também praxeologias matemáticas com discursos teórico-tecnológicos fundamentados pelo Teorema de Fubini, com técnicas desenvolvidas por meios algébricos associados ou não a um registro de representação geométrico. Constatamos, por fim, que as integrais duplas interessam aos estudantes da Engenharia Civil da instituição estudada também por auxiliar na resolução de equações diferenciais aplicadas em situações que envolvem o escoamento de fluidos.

O estudo da terceira e última dimensão do problema didático, a ecológica, foi realizado por meio da Praxeologia de Investigação III, praxeologia menor da PID. A respeito da tarefa principal dessa praxeologia teceremos comentários, posteriormente, ao evidenciarmos de que forma o terceiro objetivo específico proposto para a pesquisa foi atingido. Por ora, vamos nos ater a alguns resultados obtidos por meio de subtarefas inerentes a esta Praxeologia de Investigação III, que foram realizadas recorrendo a alguns pressupostos gerais da TMCC e a outros vinculados às suas fases epistemológica, didática, curricular e docente.

Por meio da realização dessas subtarefas, pudemos explicitar que uma proposta alternativa para o ensino de Integrais Duplas na instituição de referência deve considerar, além das praxeologias desenvolvidas e legitimadas pelo âmbito científico identificadas por meio do estudo epistemológico e presentes no MER elaborado nesta investigação, que, segundo a Transposição Didática, quando o professor organiza as suas ações praxeológicas para a sua aula, ele imprime a partir do saber sábio (científico) um saber a ensinar que ainda sofrerá as modificações no processo do ensino em sala de aula, pois o professor imprime a sua interpretação pessoal e a transmite em uma linguagem própria, produzindo um significado para o saber ensinado. Além disso, deve-se ter em conta que a Transposição Contextualizada visa à

formação integral do estudante com finalidade na profissão, devendo o saber sábio ser transformado em um saber de aplicação antes de se constituir um saber ensinado.

Devem ser consideradas também as seguintes condições presentes na instituição de referência e que favorecem modificações no ensino de Integrais Duplas no curso de Engenharia Civil: (i) a presença na matriz curricular do curso de Engenharia Civil, de forma institucionalizada, de um projeto interdisciplinar aglutinando as diferentes disciplinas que o estudante está cursando no semestre; (ii) as indicações, ainda que de forma pontual, no livro didático empregado, estimulando o uso de recursos tecnológicos no trabalho com as Integrais Duplas; (iii) a familiaridade do corpo docente com as metodologias ativas; e (iv) a valorização, no processo avaliativo em vigor na instituição de referência, de atividades considerando a participação e a produção dos estudantes durante as aulas, também sua participação no projeto interdisciplinar.

Por fim, ainda devem ser consideradas as seguintes condições e restrições institucionais que dificultam modificações no ensino de Integrais Duplas no curso de Engenharia Civil da instituição de referência: (i) a necessidade de atrelar ao rompimento, ao menos em alguns aspectos, do paradigma didático vigente a manutenção de indicadores que na instituição de referência são considerados desejáveis nas avaliações externas, sendo esses, em parte, também decorrentes do paradigma didático vigente; (ii) o fato de a maioria dos professores que lecionam a disciplina na qual, na instituição de referência, as Integrais Duplas são abordadas terem formação na área de Matemática e não dominarem as aplicações específicas dessa ciência na Engenharia Civil, também não terem à disposição aplicações dessa natureza no livro didático que usualmente adotam como referência e (iii) a necessidade de o processo avaliativo contemplar provas realizadas em datas predeterminadas pela Pró-Reitoria de Ensino da instituição.

Como terceiro objetivo específico, estabelecemos: *no âmbito do estudo da dimensão ecológica do problema didático considerado, elaborar um Evento Contextualizado para as Integrais Duplas destinado a estudantes de Engenharia Civil*. Esse objetivo foi alcançado por meio da proposição de um evento contextualizado para o ensino de alguns aspectos das Integrais Duplas no contexto do curso de Engenharia Civil, como uma proposta alternativa em contraposição ao paradigma didático vigente na instituição de referência, considerando, as condições e restrições por ela impostas.

O evento contextualizado foi desencadeado por um problema de Mecânica dos Fluidos, tendo como pressupostos o que determina a Matemática em Contexto, paradigma didático

assumido na TMCC, com o propósito de apresentar ao estudante de Engenharia Civil uma aplicação das ID que usualmente não está presente na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III. Em nossa proposta, essas integrais são mobilizadas no cálculo da medida da vazão volumétrica determinada durante o estudo do escoamento laminar, estacionário, incompressível, de um fluido newtoniano em um tubo cilíndrico, situação que encontra aplicações diretas na construção civil, especialmente no planejamento e na implementação de sistemas de escoamento de óleos lubrificantes muito viscosos e em baixa velocidade, camada limite e escoamento em meios porosos (solos). Nesse sentido, as Integrais Duplas, cujo *habitat* é o Cálculo Diferencial e Integral, ao serem abordadas no problema proposto, encontram-se relacionadas ao nicho aplicativo da Física, mais precisamente ao cálculo da medida da vazão volumétrica de um fluido, conforme foi especificado no decorrer da elaboração deste EC.

Os processos de determinação do objetivo do evento, de fundamentação de seu contexto, de análise das praxeologias didáticas e matemáticas presentes na abordagem dada ao problema no livro didático da disciplina específica com a qual se deseja vincular a Matemática, de redação da história do evento contextualizado e de organização didática do evento, todos descritos no capítulo 6 desta investigação e decorrentes de todo o estudo realizado, explicitam como responder a questão central desta pesquisa: *como elaborar uma atividade interdisciplinar para o ensino de Integrais Duplas na Engenharia Civil de modo a favorecer o diálogo entre a Matemática e esta habilitação da Engenharia e a explicitar o caráter ferramental dessas integrais no futuro exercício profissional do engenheiro?* Além disso, evidenciam a proposição de uma organização praxeológica de possível implementação em um trabalho interdisciplinar a ser realizado entre os professores de Cálculo Diferencial e Integral III e Mecânica dos Fluidos, no contexto do curso de Engenharia Civil da instituição estudada.

Em termos das condições que devem ser instauradas para que seja possível uma reorientação do ensino de Integrais Duplas no curso de Engenharia Civil da instituição de referência em concordância com o Modelo Alternativo construído, destacamos, especialmente, a necessidade da consolidação de diálogos entre os professores das disciplinas da área de Matemática e os das outras áreas que constituem os currículos da Engenharia Civil e a estruturação de formações continuadas para professores que lecionam disciplinas de ciências básicas nessa graduação, enfocando, especialmente, a construção de conhecimentos relativos aos preceitos da TMCC, do MoDiMaCo e, principalmente, do trabalho com eventos contextualizados de maneira a contribuir para um enfoque interdisciplinar entre as disciplinas básicas, como a Matemática, e as específicas, como a Mecânica dos Fluidos.

Encerramos a redação desta tese apresentando algumas sugestões para futuras investigações. A primeira é a implementação do evento contextualizado construído e a posterior análise dos resultados obtidos sob diferentes perspectivas cognitivas, no intuito de evidenciar as contribuições – e as dificuldades – desse tipo de abordagem, no que se refere à aprendizagem dos estudantes. Outra possibilidade é elaborar outros eventos contextualizados visando complementar o Modelo Alternativo construído de forma a contemplar outras aplicações das Integrais Duplas no contexto da Engenharia Civil. A engenheira civil participante da banca examinadora, durante sua arguição, citou uma série de outras situações da área nas quais as integrais múltiplas são requeridas e que, portanto, poderiam servir de ponto de partida para a elaboração de eventos contextualizados em futuras pesquisas. Alguns exemplos são os estudos de estruturas complexas, como cascas e barragens em arco duplo; os estudos hidráulicos de conservação da massa, quantidade de movimento e energia, nos quais são utilizadas as equações de Saint Venant (usualmente presentes em problemas descrevendo o fenômeno de escoamento em canais abertos); e situações de hidrologia relacionadas a isoietas (curvas de nível que unem pontos com igual precipitação) e a isotacas (curvas de nível que unem pontos com a mesma velocidade em um fluido). A examinadora sugeriu ainda alguns livros que podem inspirar pesquisadores e docentes a elaborarem eventos contextualizados relacionados às integrais múltiplas na Engenharia Civil: *Hidráulica Básica* (de autoria de Rodrigo Melo Porto), *Mecânica dos Fluidos – Fundamentos e Aplicações* (de autoria de Tufi Mamed Ássy) e *Mecânica dos Fluidos* (de autoria de Merle Potter, David Wiggert e Bassem Ramadan).

A comparação do Modelo Epistemológico Dominante na instituição que tomamos como referência em nossa pesquisa com os presentes em outras instituições de referência também se constitui como um caminho de estudo a ser trilhado. Além disso, como sugeriu engenheira civil membro da banca examinadora desta tese, levando em consideração, segundo sua ampla experiência com docente e pesquisadora na área, que na maior parte dos cursos de Engenharia Civil o estudo de estruturas fica restrito àquelas como formatos básicos (circular, retangular e trapezoidal), deixando-se de lado, por exemplo, cascas e arco duplo, mostra-se pertinente investigar não apenas uma nova forma de abordar as integrais duplas (e as múltiplas de maneira geral) na Engenharia Civil, mas analisar se realmente estes objetos matemáticos encontram aplicações nos cursos de graduação em Engenharia Civil da maneira como estes encontram-se atualmente organizados ou se a mobilização destas integrais – e consequentemente seu estudo mais aprofundado – faria mais sentido apenas na pós-graduação, quando são trabalhadas

modelagens mais complexas, dentre as quais fluidos não-newtonianos, transportes de sedimentos, mecânica dos fluidos ambiental, sólidos especiais e maré fluvial.

Também em pesquisas futuras, outras habilitações de Engenharia podem ser tomadas como objetos de estudo e articulações da TMCC com outras teorias podem ser assumidas como Praxeologias de Investigações Didáticas, visando estudar o mesmo problema didático enfocado nesta investigação ou ainda outros problemas didáticos relacionados a problemas docentes distintos dos que consideramos.

Há necessidade também de reflexões futuras contemplando um aspecto mencionado por um dos examinadores na defesa desta tese: um dos subsídios teóricos adotados na fase curricular da TMCC – a abordagem de Ralph Tyler para currículo – é tecnicista, enquanto a ideia de interdisciplinaridade, central na teoria proposta por Camarena, é originária da escola progressista e, portanto, está atrelada à uma abordagem curricular que rompe com a lógica tecnicista. Neste sentido, os eventos contextualizados, embora sejam elaborados articuladamente ao contexto social dos estudantes e desempenhem o papel de entes integradores de conhecimentos, são propostos pelo professor, a partir da compreensão de competências a serem desenvolvidas e de conteúdos previamente estabelecidos para serem trabalhados, o que os filia a um currículo de natureza tecnicista. Uma vez que a fase curricular da TMCC foi a primeira a ser desenvolvida, por volta de 1982, parece-nos pertinente investigar, a partir de todo o repertório de conhecimentos desenvolvidos desde então no âmbito deste referencial, possíveis atualizações nesta fase e, conseqüentemente, na forma de trabalhar com os eventos contextualizados, de maneira a efetivamente desvincular, tanto quanto possível, do tecnicismo, os currículos de Matemática dos cursos nos quais esta disciplina esta a serviço, como é o caso das Engenharias.

REFERÊNCIAS

- AGNESI, M. G. **Instituzioni Analitiche ad Uso Della Gioventù Italiana**. Milano: Nella Régia-Ducal Corte, 1748. Disponível em: https://www.google.com.br/books/edition/Instituzioni_Analitiche_Ad_Uso_Della_Gioventu_Italiana_1748+Volume+2&printsec=frontcover. Acesso em: 18 abr. 2021.
- AGUIAR, M.A.M. **Tópicos de Mecânica Clássica**. Campinas, 22 de dezembro de 2021. Disponível em: <https://sites.ifi.unicamp.br/aguiar/files/2014/10/top-mec-clas.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2022.
- AIRES, J. A. Integração curricular e Interdisciplinaridade: Sinônimos? **Educ. Real.**, Porto Alegre, v. 36, n.1, p. 215-230, jan./abr., 2011.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, n. 42, pp. 09-34, noviembre, 2015.
- ANTON, H. **Cálculo**. Vol. 2. 10. ed. Porto Alegre: Bookmann, 2014.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p.193-217.
- ARTIGUE, M. Epistémologie et didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 10, n. 2-3. p. 241-286, 1990.
- AUSUBEL, D. P. **Educational Psychology: A cognitive view**. Nova Yorkm Holt, Rinehart and Winston Inc., 1968.
- AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D., HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericano, 1980.
- ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, v.10, 2010. Disponível em <https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf>. Acesso em: 10 mai. 2021.
- ÁVILA, G. **Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis**. 5. ed. São Paulo: Editora LTC 2002.
- BACHELARD, G. **El nuevo espíritu científico**. 23 ed. México: Editorial Nueva Imagen. 1981.
- BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 184 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BASSALO, J.M.F. Nascimentos da Física. **Revista Brasileira de Física**, v. 17, n. 4, 1995.
 BEANE, J. A. **Integração Curricular**: a concepção do núcleo da educação democrática. Lisboa: Didática Editora, 1997.

BEER, F. P. *et al.* **Estática e mecânica dos materiais**. Porto Alegre: AMGH, 2013.

BEER, F. **Resistência dos materiais**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. 1255 p.

BENITO, R. N. **Construção de um percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores**: o ensino de Cônicas. 2019. Tese (Doutorado em educação Matemática) - Programa de estudos pós-graduados em educação Matemática, Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. DE; GOMES, E. Competências matemáticas: perspectivas da SEFI e da MCC. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 49-79, 2017.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L., GOMES, E. Cálculo, Análise e Álgebra Linear: indicações para novas pesquisas a partir das investigações do GT04. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VII - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018, **Anais...** Foz do Iguaçu, Brasil, p.1-11, 2018.

BOLEA, P., BOSCH, M.; GASCÓN, J. Cómo se construyen los problemas en Didáctica delas Matemáticas. **Educación Matemática**, 2001, v.13, n.3, p. 22-63.

BOUGAINVILLE, L-A de. **Traité du calcul intégral**: pour servir de suite à l'Analyse des infiniment-petits de M. le marquis de L'Hôpital. Paris: Chez H.L. Guerin & L.F. Delatour, 1754. Disponível em: https://www.google.com.br/books/edition/Trait%C3%A9_du_calcul_int%C3%A9gral/oCEOAAAAQAAJ?hl=pt-BR&gbpv=0. Acesso em: 10 mar. 2022.

BOYER, C. B. **Cálculo**. Trad. de Hygino H. Domingues. v. 6. São Paulo: Editora Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula).

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1906.

BOYER, C. **História da Matemática**. 1. ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Blücher, 2 ed, 1996.

BOYER, C. B. **The history of calculus and its conceptual development**. New York: Dover publications, 1959.

BRANDÃO, A. K. D. C. **Um percurso de estudo e pesquisa para o ensino de integral dupla**: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de engenharias e de licenciatura em matemática. 2021. 438 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Superior. Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. **Diário Oficial da União**, Edição 80, Seção 1, Página 43, 26 de abril de 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Superior. Resolução CNE/CES 11/2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. **Diário Oficial da União**, Brasília, 9 de abril de 2002. Seção 1, p. 32.

BROLEZZI, Antonio Carlos. **A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática**. 1996. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologique et les problèmes en Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 4.2, p.165-198, 1983.

BRUNETTI, F. **Mecânica dos Fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

CAMARENA, P. G. A treinta años de la teoria educativa “Matemática em el Contexto de las Ciencias”. **Innov. educ. (Méx. DF)**, México, v. 13, n. 62, p. 17-44, agosto 2013a. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200003. Acesso em: 24 jan. 2021.

CAMARENA, P. G. **Competências Matemáticas**: marcos teóricos y metodologías. Reporte de Programa de investigación. Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional, 2009.

CAMARENA, P. G. Concepción de competencias de las ciencias básicas em el nivel universitario. In: DIPP, Adla J.; MACÍAS, Arturo B. (Org.). **Competencias y Educación – miradas múltiples de una relación**. México: Instituto Universitario Anglo Español A.C e Red Durango de Investigadores Educativos A.C., 2011, p. 88-118.

CAMARENA, P. G. Constructos teóricos de la metodologia *Dipping* en el área de la matemática. In: CONGRESO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA Y DE SISTEMAS, 3., 2004, Ciudad de México. **Memorias...** Ciudad de México: IPN: ESIME: SEPI, 2004.

CAMARENA, P. G. Didáctica de la matemática en contexto. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n. 2, p.1-26, 2017b.

CAMARENA, P. G. El conocimiento de las ciencias básicas en profesores de ingeniería. In: CARRILLO, A.J.; ONTIVEROS, H. V.; CECEÑA, T. P. (ed.). **Formación docente: Una análisis desde la práctica**. Ciudad de México: Red Durango de Investigadores Educativos, 2013b. p. 212-249.

CAMARENA, P.G. Epistemología de las impedancias complejas en ingeniería, año 2012, en **Revista Innovación Educativa**, ISSN: 1665-2673, v. 12, n.58, enero-abril, 2012.

CAMARENA, P. G. **Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica**. Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional, 1990.

CAMARENA, P.G. Formación por competencias en las ciencias básicas de la ingeniería. **R. bras. Ens. Ci. Tecnol.**, Ponta Grossa, v. 11, n. 2, p. 294-320, mai./ago. 2018.

CAMARENA, P. G. La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. In: XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, 1995, **Anais...** México, 1995.

CAMARENA, P. G. **La Matemática en el Contexto de las Ciencias: Modelo Didáctico**. 2000a. Editorial ESIME-IPN, México.

CAMARENA, P. G. La serie de Fourier en el Contexto de Transferencia de Masa. **Científica: the Mexican Journal of Electromechanical Engineering** Esime, v. 6, n. 4, 2002.

CAMARENA, P. G. **Las Funciones Generalizadas en Ingeniería, construcción de una alternativa didáctica**. 2001. Colección Biblioteca de la Educación Superior, Series Investigación, Editorial ANUIES, México.

CAMARENA, P. G. Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. **Revista: Innovación Educativa**, México, v. 2, n. 10, (primera parte) pp. 22-28 y v. 2, n. 11, (segunda parte), pp. 4-12. 2002.

CAMARENA, P. G. Reporte de proyecto de investigación titulado: **Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería**. 2000b. Con No. de registro CGPIIPN-990413. Editorial ESIME-IPN, México.

CAMARENA, P. G. Reporte de proyecto de investigación titulado: **Vinculación epistemológica entre Matemática Social y Ciencias en Contexto**. 2017a. Con No. de registro SIP-IPN-20160925. Editorial ESIME-IPN, México.

CAMARENA, P. G. Teoría de la ciencia en contexto de su relación con las competencias. **Ingenian**, vol. 16, n.31, pp108-127, 2015.

CAMARENA, P. G. **Teoría de la Matemática en el contexto de las Ciencias**. Argentina: Edunse Digital, 2021.

CAMARENA, P. G. Teoría de la Matemática en el contexto de las ciencias. In: COLOQUIO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, 3., Conferencia Magistral, 2008, Lima. **Actas...** Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, 2008.

CAMARENA, P. G.; FLORES. I. P. Epistemología de lo variacional. In: XIII SIMPOSIUM INTERNACIONAL "APORTACIONES DE LAS UNIVERSIDADES A LA DOCENCIA, LA INVESTIGACIÓN, LA TECNOLOGÍA Y EL DESARROLLO", 13., 2012, Ciudad de México. **Memorias...** Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional, 2012.

CAMARENA, P. G.; GONZÁLEZ, L. G. Contextualización de las series en ingeniería. **Científica: The Mexican Journal of Electromechanical Engineering**, Ciudad de Mexico, v. 5, n. 4, p. 201-206, 2001.

CAMARENA, P. G.; MURO, C. **Campos conceptual de la interdisciplinariedad en la ingeniería**. Alemanha: Editorial Académica Española, 2012.

CAVALCANTE, J. L.; LIMA, A. P. A. B.; ANDRADE, V. L. V. X. A dimensão cognitiva na Teoria Antropológica do Didático: proposição de um modelo para investigação da cognição como fenômeno situado. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.3, pp. 188-212, 2018.

ÇENGEL, Y.A.; CIMBALA, J.M. **Mecânica dos Fluidos – Fundamentos e Aplicações**, 1. ed. São Paulo: Editora McGrawHill, 2012.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, 2019 – ISSN 2358-4750.

CHEVALLARD, Y. **Concepts fondamentaux de la didactique**: perspectives apportées par une approche anthropologique. Renne: Université de Rennes, 1991.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. **Recherches em Didactique dès Mathématiques**, v.19, n. 2, pp.221-26, 1999.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches em Didactique dès Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v.12, n.1, p.73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. Condições. In: **Curso da Escola de Altos Estudos – EAE**. Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, 2011. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gwf5xCetWTM>. Acesso em: 08 jul. 2021.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude**: 1. Structures & fonctions. Cours donné à la XI^e école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 3-32., 2002.

CHOUILLET, A-M.; DE GANDT, F.; PASSERON, I. A edição das Obras Completas de d'Alembert (1717-1783). **Gazette des Mathématiciens**, n. 77, p. 59-71, janeiro de 1998.

COMETTI, A. M. **Discutindo o ensino de integrais múltiplas no cálculo de várias variáveis**: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem. 2018. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.

CORREIA, J. J.; LIMA, L. S.; MAGALHÃES, L. D. R. Obstáculos Epistemológicos e o conceito de calor. **Sitientibus Série Ciências Físicas**, v. 4, p. 1-10, 2008.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: ARTMED, 2010.

DIAZ-BARRIGA, A. **Didáctica y curriculum** - Convergencias en los programas de estudio. México: Nuevomar, 1984.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, p. 37-65, 1993.

EISENHART, M. Conceptual Frameworks for Research. Ideas from a Cultural Anthropologist; Implications for Mathematics Education Researchers. In: R. Underhill (ed.), **Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education – North America**. Blakburg, VA: Psychology of Mathematics Education, 1991.

EULER, L. **Institutiones Calculi Differentialis**. Ticini: Galeazzi, 1770. Disponível em: <https://www.e-rara.ch/search>. Acesso em: 28 mar. 2021.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

FARRAS, B.B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Lastres dimensiones del problema didáctico. **Educación Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.15, p.1-28, 2013.

FERRUZZI, E. C. **A modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de tecnologia**. 2003. 154 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis, 2003.

FIEDLER, M. F. M. **Unidade 2** - Fundamentos da teoria da dinâmica dos fluidos. Brasília: Agência Nacional de Águas – ANA, 2020.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Coleção formação de professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FONTOURA, L. R. **Uma sequência de ensino para o estudo de integrais duplas**. 2016. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2016.

FOURIER, J. **Analytical Theory of heat**. 1878. Disponível em: <https://www.google.com/books/edition/TheAnalyticalTheoryofHeat/No8IAAAAMAAJ?hl=en&gbpv=1> Acesso em: 21 mar. 2021.

FOX, R. W; PRITCHARD, P. J.; McDONALD, A. T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. Tradução de Ricardo Nicolau Nassar Koury. 8. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2014.

FROTA, M. C. Competências de Representação e Comunicação em Matemática: o papel do livro didático. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, IX, Goiânia, 2002. **Anais...** Goiânia, Goiás, 2002, p. 1-16

FROTA, M. C. Leitura e escrita em Cálculo. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, n.3, pp. 489-508, 2011.

GASCÓN, J. incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, vol. 4, núm. 2, julio, 2001, pp. 129-159. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/335/33540202.pdf> . Acesso em 15 ago. 2021.

GASCÓN, J. Las três dimensiones fundamentales de um problema didático. El caso Del Álgebra Elemental. **Revista latinoamericana de Investigación Educativa**, v. 14, n. 2, pp. 203-231, 2011.

GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación Matemática**, mar. 2014.

GASCÓN, J.; NICOLÁS, P. **Economía, ecología y normatividades en la teoría antropológica de lo didáctico**. In: V Congreso internacional de la TAD. Castro Urdiales, 2016.

GASCÓN, J.; NICOLÁS, P. Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico. **Educación Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 4, p. 36–52, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p036-052>. Acesso em: 14 maio. 2021.

GASCÓN, J.; NICOLÁS, P. Incidencia de los paradigmas didácticos sobre La investigación didáctica y La práctica docente. **Educación Matemática**, v. 33, n. 1, abril de 2021. DOI: 10.24844/EM3301.01.

GRANVILLE, W. A.; SMITH, P. F. LONGLEY, W. R. **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1961.

GRATTAN-GUINNESS, I. **The development of the foundations of mathematical analyses from Euler to Riemann**. Massachusetts: The Colonial Press Inc., 1970.

HALLIDAY, D.; RESNIK R.; KRANE, D. S. **Física 1**. Vol.1. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. 326 p.

HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: Analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple**. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Université Joseph Fourier, Grenoble, Alpes, França, 2006.

HENRIQUES, A. Um Estudo de superfícies e de integrais múltiplas em ambiente computacional. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM, Recife, 15 a 18 de julho de 2004. **Anais...**, Recife: UDPE, 2004.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. **Revista Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, pp. 1261-1288, dez. 2012.

HIBBELER, R.C. **Estática Mecânica para Engenharia**. Tradução de Daniel Vieira. 14. ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2017.

JUDCE, E. D. **Funções de várias variáveis**. Belo Horizonte: Instituto de Ciência Exatas UFMG, 1978.

KÍTOR, G. L. **Momento de Inércia**. InfoEscola, 2021. Disponível em: <https://www.infoescola.com/mecanica/momento-de-inercia/>. Acesso em 20 out. 2021.

KLUTH, V. S, ALMOULOUS, S. A. Transposição Didática em Chevallard: Conceitos e Teorização primordiais para a Teoria Antropológica do Didático. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 01-22, 2020. Universidade Federal de Santa Catarina. ISSN 1981-1322. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e72961>.

LACROIX, S.F. **Traitéé lémentaire de calcul différentiel e de calcul integral**. Paris: Gauthier-Villars, 1806.

LAKATOS, I. **History of Science and Its Rational Reconstructions**. PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, 1970, 91–136. <http://www.jstor.org/stable/495757>

LIMA, G.L. **O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934**: os cursos das escolas militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L.; GOMES, E.; PHILOT, J. M. O Ensino da Matemática na Engenharia e as Atuais Diretrizes Curriculares Nacionais: o modelo didático da matemática em contexto como possível estratégia. **Currículo Sem Fronteiras**, p. 785-816, 2021.

LIMA, G.L.; BIANCHINI, B.L.; GOMES, E. *Dipcing*: uma metodologia para o planejamento ou redirecionamento de programas de ensino de matemática em cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, XLIV, 2016, Natal. **Anais do XLIV COBENGE**. Natal: ABENGE, 2016, p. 1-10.

LIMA, G. L. BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. Cálculo e análise: Mapeamento das Pesquisas do GT04 – Educação Matemática no Ensino Superior. **Vidya**, v. 37, n.2, p. 317-334, jul./dez., 2017 – Santa Maria, 2017, ISSN 2176-4603.

LIMA, G.L.; BIANCHINI, B.L.; GOMES, E. Conhecimentos docentes e o Modelo Didático da Matemática em reflexões iniciais. **Educação matemática em Debate**, Montes Claros, v. 2, n. 4, jan. /abr. 2018.

LIMA, G. L.; GOMES, E.; BIANCHINI, B. L. Evento contextualizado en ingeniería: tareas docentes y conocimientos movilizados en ellas. **Revista Paradigma**, v. 42, n. 1, p. 82-105, 2021.

LUCAS, C.; GASCÓN, J.; FONSECA, C.; CASAS, J. A utilidade do cálculo diferencial/integral na construção e estudo de modelos em contexto escolar. Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I.; Guimarães, H. (Eds.). **Atas do XXVII Seminário de investigação em educação matemática**. Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, 2016.

MARQUES, S. A. S. S. **Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de integrais duplas e triplas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia, 2016.

MATOS, F. C.; PEREIRA, J. C. S.; NUMES, J. M. V.; GERRA, R. B.; ALMOULOUD, S. A. A metodologia do percurso de estudo e pesquisa adaptada à formação inicial e continuada de professores de matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.20, n.1, pp. 448-470, 2018.

MEHL, S. **L'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert**. 1751. Disponível em: http://serge.mehl.free.fr/anx/integral_dd.html. Acesso em: 12 abr. 2021.

MENONCINI, L.O **jogo das operações semióticas na aprendizagem da Integral Definida no cálculo de área**. 2018. 274 p. Tese (Doutorado Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2018.

MINEIRO, R. M. **Estudo das três dimensões do problema didático de Inequações**. 2019. 224 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

MIRANDA, C. G. M; LAUDARES, J. B. A Matemática na Atuação Profissional do Engenheiro. In: XXXIX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia – COBENGE, 2011, Blumenau – SC, **Anais...** Blumenau: ABENGE, 2011.

MIRANDA, G. M. H. **Esculturas matemáticas: a atividade para o estudo da Integral Dupla**. 2018. 321 f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera, São Paulo, 2018.

MOREIRA, M. A. O que é afinal Aprendizagem Significativa? **Revista cultural La Laguna España**, 2012. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueefinal.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2019.

MOREIRA, M. A; MASINI E. F. S. **Aprendizagem Significativa** – A teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

MOSCOSO, J. N. Razonamiento abductivo: una contribución a la creación del conocimiento en educación. **Cadernos Pesquisa**, São Paulo, v. 49, n. 171. p. 308-328, jan./mar. 2019.

MOURA, E. C. M; OLIVEIRA, C.V. O Método de Integração de Kepler. **Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática**. Aracaju, 2011.

MOURA, R. A. **Um estudo sobre a Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi: álgebra e análise na Itália setecentista**. 2017. 219 f. Tese (Doutorado em Educação

Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. **Uma introdução concisa à mecânica dos fluidos**. Tradução de Euryale de Jesus Zerbini. São Paulo: E. Blücher, 2005. 372 p.

MURO, C. U. **Campo conceptual de la interdisciplinariedad**. La serie de Fourier em el contexto de transferencia de masa, 2012.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de estudantes de cálculo no tratado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisa e debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 11-25.

NISHITANI, W.S. **Fenômenos de Transporte** - 6) Escoamento interno. (ÇENGEL, cap. 8). YouTube, 28 de abr. de 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=d8NwK5K5E3s>. Acesso em 12 abr. 2022.

NUNES, C. B.; FERREIRA, L.L; SILVA, L.B.; ESPÍNDOLA, M. J. O ensino-Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral através da resolução de problemas na Engenharia Civil. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 17, p. 01-21, 2020.

OLIVEIRA, S.M.F. de. **Área de superfície**. Aula 21. Cálculo Diferencial e Integral III. UECE, 2017. Disponível em: https://suzanamatos.github.io/materiais/2017-2_UECE_calculoIII/Aula21-AreaDeSuperficie.pdf. Acesso em:

PEIRCE, C.S. **Semiótica**. Tradução de: José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PERRENOUD, P.; MAGNE, B. C. **Construir: as competências desde a escola**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PIAGET, J. **Seis estudos de Psicologia**. Rio de Janeiro: Forence, 1991.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 160 p.

POPPER, K. R. **Autobiografia intelectual**. 2. ed. São Paulo: Cultrix, 1986.

POPPER, K. R. **Conhecimento objetivo**. São Paulo: EDUSP, 1975.

POPPER, K. R. **Conjecturas e refutações**. Brasília: Ed. UNB, 1982.

POPPER, K. R. O realismo e o objetivo da ciência. Lisboa: D. Quixote, 1987a.

POPPER, K. R.; LORENNZ, K. **O futuro está aberto**. Lisboa: Fragmentos, 1990.

PREDIGER, S., BIKNER-AHSBAHS, A., ARZARELLO, F. Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. **ZDM Mathematics Education**, Dordrecht, v.40, n.2, p.165–178, 2008.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin, 1995.

RADFORD, L. Connecting Theories in Mathematics Education: Challenges and possibilities. **ZDM Mathematics Education**, Dordrecht, v.40, n.2, p.317-327, 2008.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise. In: FROTA, M. C. R., NASSER, L. **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisa e Debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 81-97.

REMBOLD, S. B. **Tópicos especiais em física: Astronomia – EAD; módulo 3, volume 4**. Ilhéus, BA: UAB /UESC, 2011.

RIBEIRO JÚNIOR, M.L.; MONDINI, F.; MOCROSKY, L.F. O cálculo diferencial e integral e a formação de engenheiros. **Cadernos de Pós-graduação**, São Paulo, v. 18, n.2, p. 249-261, jul./dez. 2019.

RIBEIRO, M. V. **O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da Matemática e da resolução de problemas**. 2010. 327 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

SAE DIGITAL. **Sala de aula invertida: o que é, como funciona e seus principais benefícios**. 2019. Disponível em: <https://sae.digital/sala-de-aula-invertida/>. Acesso em: 18 abr. 2022.

SANTOS, J. M. **Quadratura da parábola: Uma abordagem possível para o ensino de Somas** 2014. 46 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

SANTOS, S. P. dos; MATOS, M. G. de O. O ensino de Cálculo I no curso de Licenciatura em Matemática: obstáculos na aprendizagem. **Revista Eventos Pedagógicos**, v. 3, n. 3, p. 458-473, ago./dez, 2012.

SCHMIDT, L.F.T. **Investigando a eficiência de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o ensino de Integrais Múltiplas mediadas por Tecnologias Digitais**. 2019. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa maria, 2019.

SCHMIDT, P.; SANTOS, J. L. O pensamento epistemológico de Karl Popper. **ConTexto**, Porto Alegre, v. 7, n. 11, 1º semestre 2007.

SILVA, B.A. Diferentes dimensões entre o ensino e aprendizagem de Cálculo. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.13, n.3, pp.393-413, 2011.

SILVA, G.S. **A História do Cálculo**. 18/12/2017. Disponível em: <https://www.phylos.net/2017-12-18/a-historia-do-calculo/>. Acesso em: 06 abr. 2022.

SILVEIRA, F. L. A filosofia da ciência de Karl Popper: o racionalismo crítico. **Cad. Cat. Ens. Fis.**, v.13, n. 3: p.197-218, dez.1996.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. v.1. Pearson Makron Books, 1987.

SIMÕES, R., SIPLE, I. Z. FIGUEIREDO, E. B. Aplicação da Integral na determinação de características geométricas de seções planas de estruturas em barras. IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, Ponta Grossa/PR, novembro, 2014. **Anais...**, 2014.

SIPLE, I. Z; FIGUEIREDO, E. B. Um olhar à aplicação das Integrais Múltiplas: da projeção gráfica à Maquete. **Actas del VII CIBEM**. Montevideo, Uruguay, 2013.

SOARES, M. **Letramento**: um tema em três gêneros. Belo Horizonte: Autêntica. 2000.

SOUZA, G. M. **Uma estratégia metodológica para a introdução de um curso de equações diferenciais ordinárias**. 2011. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

STERNBERG, R. J. **Psicologia cognitiva**. Tradução Roberto Cataldo Costa. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 2. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

STRUICK. D. J. Kepler. Integration Methods. In: **A Source Book in Mathematics**, 1200-1800. Princeton-New Jersey: Princeton University Press, p. 192-198, 1969.

TABA, Hilda. **Elaboración del currículo**. Teoria y práctica. Buenos Aires: Ediciones Troquel S.A., 1974.

TDJ. **Sistema e Volume de Controle**. Mecânica dos Fluidos, 9 de abril de 2012. Disponível em: <http://mecaflu.blogspot.com/2012/04/sistema-e-volume-de-controle.html>. Acesso em: 9 abr. 2021.

TIMOSHENKO; Gere. **Mecânica dos Sólidos**, vol. 1 e 2. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

THOMAS, G. B.; FINNEY, R. L.; WEIR, M. D.; GIORDANO, F. R. **Cálculo**. Vol. 1. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

THOMAS, G. B; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. Vol. 2. Tradução Carlos Scalici. 12 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

TREJO, T. E.; CAMARENA, P. G. Vinculación: matemáticas, ciencias y aprendizaje. In: INTER AMERICAN CONFERENCE ON MATHEMATICS EDUCATION, 13., 2011, Recife. **Memórias...** Recife: [s.n.], 2011.

VIANNA NETO, Márcio. **Equação de Navier-Stokes (Parte 2)** - Equação diferencial da quantidade de movimento. YouTube, 22 de janeiro de 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=e06ZRzdO4iM>. Acesso em: 22 abr. 2022.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: Tall D. O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1991. p. 65-81.

VYGOTSKY, L. S. **Mind in Society** – the Development of Higher Psychological Processes. Cambridge MA: Harvard University Press. 1978.

ANEXO I – DCN Curso de Graduação em Engenharia**CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO
CÂMARA DE EDUCAÇÃO SUPERIOR****RESOLUÇÃO CNE/CES 11, DE 11 DE MARÇO DE 2002.⁵⁵**

Institui Diretrizes Curriculares Nacionais do
Curso de Graduação em Engenharia.

O Presidente da Câmara de Educação Superior do Conselho Nacional de Educação, tendo em vista o disposto no Art. 9º, do § 2º, alínea “c”, da Lei 9.131, de 25 de novembro de 1995, e com fundamento no Parecer CES 1.362/2001, de 12 de dezembro de 2001, peça indispensável do conjunto das presentes Diretrizes Curriculares Nacionais, homologado pelo Senhor Ministro da Educação, em 22 de fevereiro de 2002, resolve:

Art. 1º A presente Resolução institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, a serem observadas na organização curricular das Instituições do Sistema de Educação Superior do País.

Art. 2º As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino de Graduação em Engenharia definem os princípios, fundamentos, condições e procedimentos da formação de engenheiros, estabelecidas pela Câmara de Educação Superior do Conselho Nacional de Educação, para aplicação em âmbito nacional na organização, desenvolvimento e avaliação dos projetos pedagógicos dos Cursos de Graduação em Engenharia das Instituições do Sistema de Ensino Superior.

Art. 3º O Curso de Graduação em Engenharia tem como perfil do formando egresso/profissional o engenheiro, com formação generalista, humanista, crítica e reflexiva, capacitado a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando seus aspectos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais, com visão ética e humanística, em atendimento às demandas da sociedade.

⁵⁵ BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CES 11/2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. **Diário Oficial da União**, Brasília, 9 de abril de 2002. Seção 1, p. 32.

Art. 4º A formação do engenheiro tem por objetivo dotar o profissional dos conhecimentos requeridos para o exercício das seguintes competências e habilidades gerais:

- I - aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;
- II - projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;
- III - conceber, projetar e analisar sistemas, produtos e processos;
- IV - planejar, supervisionar, elaborar e coordenar projetos e serviços de engenharia;
- V - identificar, formular e resolver problemas de engenharia;
- VI - desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas;
- VI - supervisionar a operação e a manutenção de sistemas;
- VII - avaliar criticamente a operação e a manutenção de sistemas;
- VIII - comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica;
- IX - atuar em equipes multidisciplinares;
- X - compreender e aplicar a ética e responsabilidade profissionais;
- XI - avaliar o impacto das atividades da engenharia no contexto social e ambiental;
- XII - avaliar a viabilidade econômica de projetos de engenharia;
- XIII - assumir a postura de permanente busca de atualização profissional.

Art. 5º Cada curso de Engenharia deve possuir um projeto pedagógico que demonstre claramente como o conjunto das atividades previstas garantirá o perfil desejado de seu egresso e o desenvolvimento das competências e habilidades esperadas. Ênfase deve ser dada à necessidade de se reduzir o tempo em sala de aula, favorecendo o trabalho individual e em grupo dos estudantes.

§ 1º Deverão existir os trabalhos de síntese e integração dos conhecimentos adquiridos ao longo do curso, sendo que, pelo menos, um deles deverá se constituir em atividade obrigatória como requisito para a graduação.

§ 2º Deverão também ser estimuladas atividades complementares, como trabalhos de iniciação científica, projetos multidisciplinares, visitas teóricas, trabalhos em equipe, desenvolvimento de protótipos, monitorias, participação em empresas juniores e outras atividades empreendedoras.

Art. 6º Todo o curso de Engenharia, independente de sua modalidade, deve possuir em seu currículo um núcleo de conteúdos básicos, um núcleo de conteúdos profissionalizantes e um núcleo de conteúdos específicos que caracterizem a modalidade.

§ 1º O núcleo de conteúdos básicos, cerca de 30% da carga horária mínima, versará sobre os tópicos que seguem:

- I - Metodologia Científica e Tecnológica;
- II - Comunicação e Expressão;
- III - Informática;

- IV - Expressão Gráfica;
- V - Matemática;
- VI - Física;
- VII - Fenômenos de Transporte;
- VIII - Mecânica dos Sólidos;
- IX - Eletricidade Aplicada;
- X - Química;
- XI - Ciência e Tecnologia dos Materiais;
- XII - Administração;
- XIII - Economia;
- XIV - Ciências do Ambiente;
- XV - Humanidades, Ciências Sociais e Cidadania.

§ 2º Nos conteúdos de Física, Química e Informática, é obrigatória a existência de atividades de laboratório. Nos demais conteúdos básicos, deverão ser previstas atividades práticas e de laboratórios, com enfoques e intensividade compatíveis com a modalidade pleiteada.

§ 3º O núcleo de conteúdos profissionalizantes, cerca de 15% de carga horária mínima, versará sobre um subconjunto coerente dos tópicos abaixo discriminados, a ser definido pela IES:

- I - Algoritmos e Estruturas de Dados;
- II - Bioquímica;
- III - Ciência dos Materiais;
- IV - Circuitos Elétricos;
- V - Circuitos Lógicos;
- VI - Compiladores;
- VII - Construção Civil;
- VIII - Controle de Sistemas Dinâmicos;
- IX - Conversão de Energia;
- X - Eletromagnetismo;
- XI - Eletrônica Analógica e Digital;
- XII - Engenharia do Produto;
- XIII - Ergonomia e Segurança do Trabalho;
- XIV - Estratégia e Organização;
- XV - Físico-química;
- XVI - Geoprocessamento;
- XVII - Geotecnia;
- XVIII - Gerência de Produção;
- XIX - Gestão Ambiental;
- XX - Gestão Econômica;
- XXI - Gestão de Tecnologia;
- XXII - Hidráulica, Hidrologia Aplicada e Saneamento Básico;

- XXIII - Instrumentação;
- XXIV - Máquinas de fluxo;
- XXV - Matemática discreta;
- XXVI - Materiais de Construção Civil;
- XXVII - Materiais de Construção Mecânica;
- XXVIII - Materiais Elétricos;
- XXIX - Mecânica Aplicada;
- XXX - Métodos Numéricos;
- XXXI - Microbiologia;
- XXXII - Mineralogia e Tratamento de Minérios;
- XXXIII - Modelagem, Análise e Simulação de Sistemas;
- XXXIV - Operações Unitárias;
- XXXV - Organização de computadores;
- XXXVI - Paradigmas de Programação;
- XXXVII - Pesquisa Operacional;
- XXXVIII - Processos de Fabricação;
- XXXIX - Processos Químicos e Bioquímicos;
- XL - Qualidade;
- XLI - Química Analítica;
- XLII - Química Orgânica;
- XLIII - Reatores Químicos e Bioquímicos;
- XLIV - Sistemas Estruturais e Teoria das Estruturas;
- XLV - Sistemas de Informação;
- XLVI - Sistemas Mecânicos;
- XLVII - Sistemas operacionais;
- XLVIII - Sistemas Térmicos;
- XLIX - Tecnologia Mecânica;
- L - Telecomunicações;
- LI - Termodinâmica Aplicada; LII - Topografia e Geodésia; LIII - Transporte e Logística.

§ 4º O núcleo de conteúdo específicos se constitui em extensões e aprofundamentos dos conteúdos do núcleo de conteúdos profissionalizantes, bem como de outros conteúdos destinados a caracterizar modalidades. Estes conteúdos, consubstanciando o restante da carga horária total, serão propostos exclusivamente pela IES. Constituem-se em conhecimentos científicos, tecnológicos e instrumentais necessários para a definição das modalidades de engenharia e devem garantir o desenvolvimento das competências e habilidades estabelecidas nestas diretrizes.

Art. 7º A formação do engenheiro incluirá, como etapa integrante da graduação, estágios curriculares obrigatórios sob supervisão direta da instituição de ensino, através de relatórios

técnicos e acompanhamento individualizado durante o período de realização da atividade. A carga horária mínima do estágio curricular deverá atingir 160 (cento e sessenta) horas.

Parágrafo único. É obrigatório o trabalho final de curso como atividade de síntese e integração de conhecimento.

Art. 8º A implantação e desenvolvimento das diretrizes curriculares devem orientar e propiciar concepções curriculares ao Curso de Graduação em Engenharia que deverão ser acompanhadas e permanentemente avaliadas, a fim de permitir os ajustes que se fizerem necessários ao seu aperfeiçoamento.

§ 1º As avaliações dos estudantes deverão basear-se nas competências, habilidades e conteúdos curriculares desenvolvidos tendo como referência as Diretrizes Curriculares.

§ 2º O Curso de Graduação em Engenharia deverá utilizar metodologias e critérios para acompanhamento e avaliação do processo ensino-aprendizagem e do próprio curso, em consonância com o sistema de avaliação e a dinâmica curricular definidos pela IES à qual pertence.

Art. 9º Esta Resolução entra em vigor na data de sua publicação, revogadas as disposições em contrário.

ARTHUR ROQUETE DE MACEDO

Presidente da Câmara de Educação Superior

ANEXO II – Matrizes Curriculares I e II do Curso de Engenharia Civil da Instituição de Referência

Matriz Curricular I

INTEGRALIZAÇÃO CURRICULAR – ENGENHARIA CIVIL									
1º Período	2º Período	3º Período	4º Período	5º Período	6º Período	7º Período	8º Período	9º Período	10º Período
Núcleo de Formação básica				N.F.Profissional		Núcleo de Formação Específico			
Cálculo Diferencial e Integral I 80h	Cálculo Diferencial e Integral II 80h	Cálculo Diferencial e Integral III 80h	Cálculo Diferencial e Integral IV 80h	Engenharia das Estruturas				Gestão	
				Resistência de Materiais I 80h	Resistência dos Materiais II 80h	Concreto Armado I 80h	Cálculo Estrutural por software 80h	Perícia 40h	Administração e Empreendedorismo 40h
Metodologia Científica 40h	Física Geral I 80h	Física Geral II 80h	Física Geral III 80h	Análise estrutural I 80h	Análise estrutural II 80h	Processos construtivos 80h	Estruturas metálicas 80h	Pontes 80h	Direito e legislação 40h
Algoritmo e Programação 80h	Ciências Sociais 60h	Cálculo Numérico 80h	Estatística e Probabilidade 80h	Geologia aplicada a Engenharia 60h	Construção Civil				Segurança do trabalho 40h
					Materiais de Construção I 60h	Materiais de Construção II 80h	Construção de Edifícios I 80h	Construção de Edifícios II 60h	
Português 40h	Química Geral 80h	Gestão do Meio Ambiente 40h	Mecânica Geral 80h	Topografia 80h	Geotecnia e Transportes			Instalações Prediais 80h	Gestão de Custos 80h
					Mecânica dos Solos 80h	Estradas, Projetos e Construção 80h	Fundações 80h		

Matriz Curricular II

ENGENHARIA CIVIL									
1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Período	Período	Período	Período	Período	Período	Período	Período	Período	Período
Núcleo de conhecimentos básicos - Todas as engenharias									
Geometria Analítica Álgebra Linear	Física Geral I	Física Geral II	Física Geral III	LEAN	Química geral	Gestão de projetos	Metodologias gerais	Engenharia de segurança do trabalho	Direito e legislação
80	80	80	80	20			40		
Metodologia da pesquisa e produção textual	Cálculo Diferencial e Integral I	Cálculo Diferencial e Integral II	Cálculo numérico	Mecânica dos Fluidos	60	80	Tópicos especiais I	60	80
60	80	80	60	60	60	80	40	60	80
Núcleo de específicos (Comum) - Mínimo de duas engenharias juntas por disciplina									
Introdução a computação	Algoritmo e programação	Estatística e probabilidade	Energias renováveis	Resistência de Materiais I	Resistência dos materiais II	Planejamento do Transporte	Estruturas metálicas	Instalações Elétricas	Projeto de Infiltração
40	40	80	40					80	40
Pré cálculo	Desenho técnico	Desenho auxiliado por computador	Engenharia Tecnológica		80	40		Tópicos especiais II	Projetos acessíveis
40	80	60	40	80	80	40	80	40	40
Administração e empreendedorismo	Estudos filosóficos e Sociológicos	Sustentabilidade	Mecânica Geral	80	80	40	80	40	40
Núcleo de conhecimentos profissionalizantes - Engenharia Civil									
Engenharia Civil	Materiais de Construção I	Materiais de Construção II	Geologia aplicada a Engenharia	Análise estrutural I	Análise estrutural II	Estruturas em concreto armado	Processos construtivos	Construção de Edifícios I	Construção de Edifícios II
				80		80	80	60	80
				Mecânica dos Sólidos	80	Hidráulica geral	Instalações Prediais	Saneamento ambiental	Avaliações e Perícias
60	60	60	80	60	80	60	80	40	40
				Topografia	Estradas projetos e Construção		Hidrologia e	Cálculo Estrutural por software	Pontes
								80	80
Núcleo de conhecimentos em EAD - Todos juntos				80	80	Estruturas em concreto armado	aproveitamento de recursos hídricos	ESTÁGIO	
Planejamento de Carreira	Relações Étnico raciais	Direitos Humanos	Meio Ambiente	Gestão de Carreira	Libras (Opcativa)			Estágio Supervisionado	Estágio Supervisionado
20	20	20	20	20	40	80	60	80	80
ATIVIDADES DE EXTENSÃO								TRABALHO FINAL - ENGENHARIAS	
Projeto Interdisciplinar I	Projeto Interdisciplinar II	Projeto Interdisciplinar III	Projeto Interdisciplinar IV	Projeto Interdisciplinar V	Projeto Interdisciplinar VI	Projeto Interdisciplinar VII	Projeto Interdisciplinar VIII	TFG 1	TFG 2
40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
SIMPEX	SIMPEX	SIMPEX	SIMPEX	SIMPEX	SIMPEX	SIMPEX	SIMPEX	SIMPEX	SIMPEX
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
ATIVIDADES COMPLEMENTARES									
SIMFIP	SIMFIP	SIMFIP	SIMFIP	SIMFIP	SIMFIP	SIMFIP	SIMFIP	SIMFIP	SIMFIP
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
400	400	400	400	400	400	400	400	400	400
NÚCLEO BÁSICO				1600					
NÚCLEO COMUM				320					
NÚCLEO PROFISSIONALIZANTE				1360					
CONHECIMENTOS EM EAD				80					
ATIVIDADES EXTENSÃO				600					
ESTÁGIO				160					
ATIVIDADES COMPLEMENTARES				200					
				4320					

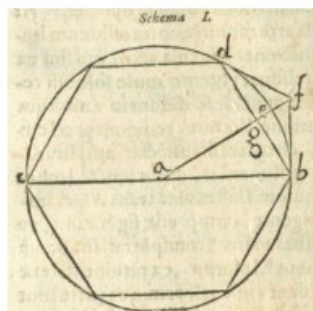
ANEXO III – As integrais de Kepler

Teoremas apresentados em *Nova Stereometria dos Barris de Vinho, denominados por Struick (1969) como a Integral de Kepler.*

Nova Stereometria de Kepler

Teorema I: A razão da circunferência para o diâmetro é aproximadamente o número 22 por 7.

Figura 1 - Figura utilizada para designar a proporção da circunferência para o diâmetro.

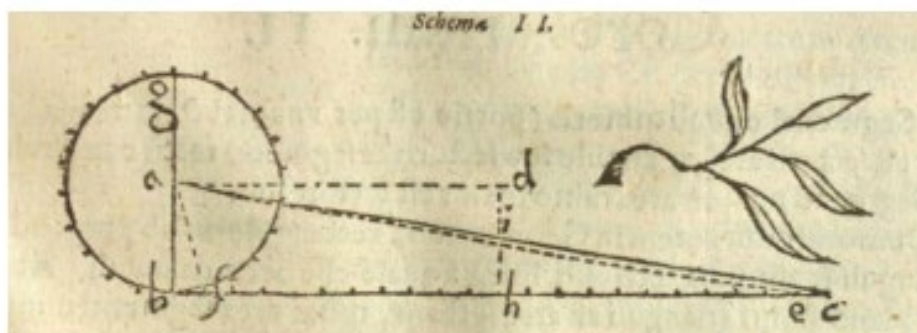


Primeiramente, é preciso o conhecimento da proporção da circunferência para o diâmetro. Do mesmo modo Arquimedes ensinou: A razão da circunferência para o diâmetro é aproximadamente o número 22 por 7. Para isso ser demonstrado, é [feito] o uso de figuras inscritas e circunscritas em um círculo, as quais porque são infinitas, nós, por razões de facilidade, usaremos o hexágono. Seja, na verdade, [inscrito] no círculo CDB, um hexágono regular, cujos ângulos C, D, B, o lado DB, e F a intersecção das duas tangentes em D e B, respectivamente. Também a linha AF conecta o centro A em F, e cruza a linha de DB em G, e o arco DB em E. Consequentemente, como DGB é uma linha reta, isto é, a menor [distância] entre D e B, por outro lado, o arco DEB não é a menor [distância] entre D e B. Assim, DEB é mais longo que DGB. Por outro lado, a reta BF tangencia o círculo e, então, todas as partes do arco EB estão entre FB e GB. Mas se EB fosse reta, seria completamente menor que FB. Para AEB, FEB é equivalente a um ângulo reto, enquanto EFB é um ângulo agudo. Portanto, EB, oposto ao menor ângulo EFB, é menor que FB, já que está oposto ao maior ângulo. Se bem que, por outro lado, é considerado que EB [é] uma linha reta, porque no caminho da demonstração o círculo é cortado em arcos mínimos, que parecem ser iguais a retas. Contudo, entre estas que são notadas pelo senso comum, pode assumir que o arco DEB, dentro do triângulo DBF, deve ser menor do que as linhas DF e FB, já que inclina em direção ao ângulo DFB, e ainda não tem nenhuma parte fora das linhas DF e FB. Por outro lado, o que contém, segundo o senso comum, é maior que o contido. Esta seria diferente, se o arco DEB for uma linha sinuosa e irregular. Consequentemente, como DB é um lado do hexágono inscrito e DF e FB são duas metades do hexágono circunscrito, o arco DEB será a sexta parte do círculo, mas ele era maior que DB e menor que DF e FB. Então, seis linhas DB são menores que a circunferência do círculo e 12 linhas DF, ou FB, são maiores do que a circunferência. Mas, o lado DB do hexágono regular é igual ao próprio semidiâmetro AB. Portanto, seis semidiâmetros AB, que são três diâmetros CB ou (se o diâmetro é dividido por sete) vinte e um sétimos [de CB], são menores que a circunferência. E, novamente, já que DG e GB são iguais, GB será a metade do próprio AB, no entanto, o quadrado de AB é igual a junção dos quadrados de AG e GB, e é o quádruplo do quadrado de GB. Portanto, AG é o triplo do quadrado de GB. Portanto, a proporção dos quadrados de AB e AG são quatro terços das linhas, pois a proporção de AB e AG é $\sqrt{\frac{4}{3}}$, e certamente essa é [a proporção] dos números 100.000 e 86.603. Mas, como AG e AB, assim é GB e BF. Então, também BF e GB é a proporção $\sqrt{\frac{4}{3}}$, e porque GB é a metade do próprio AB, certamente é 50.000. BF deve ter cerca de 57.737 de tais partes. Essas doze vezes em um número total, embora será maior que a circunferência do círculo. É somado o número 477.974 para aqueles [círculos] que têm 200.000 para o diâmetro. E aqueles de diâmetro 7 tem para doze vezes BF o valor 24 menos um décimo. Mas, esse número é maior do que a própria circunferência. Por outro lado, o número 21 é menor do que ela [a circunferência]. E é patente aos olhos, que o arco BE está mais próximo do próprio BG do que da linha BF. A circunferência, no entanto, está mais próxima do número 21 do que 24 menos um décimo. É suposto que difere por 1 a partir de 21, e a partir do outro por 2 menos um décimo, assim será, sem dúvida, 22. Isso, no entanto, Arquimedes demonstra com muito mais precisão com figuras de vários lados, como são as figuras de 12, 24 e 48 lados. Lá já se torna evidente que é pequena [a diferença] da circunferência, que ao menos seja 22. Adrianus

Romanus demonstrou pelo mesmo Método que se o diâmetro do círculo é dividido em 20.000.000.000.000 partes, então, cerca de 62.831.853.071.795.862 de tais partes compõem a circunferência.

Teorema II: A área do círculo comparada com a área do quadrado do diâmetro tem esta razão, que é aproximadamente 11 por 14. Arquimedes usa uma demonstração indireta, a qual conduz ao impossível, se a área excede a essa razão é também maior. A meu senso isto é visto:

Figura 2 - Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte I.



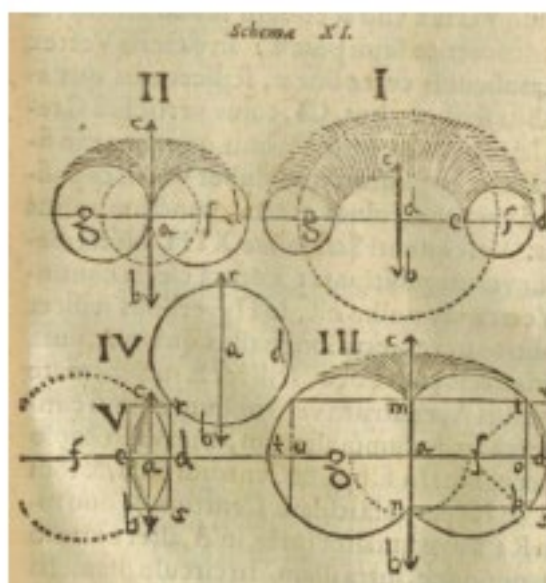
A circunferência do círculo BG tem tantas partes quanto pontos, supostamente uma infinidade, cada uma dessas é considerada como a base de um triângulo isósceles em particular com lados iguais AB, desde que haja uma infinidade de triângulos na área do círculo. Todos convergem com os seus vértices para o centro A, portanto, a circunferência do círculo BG é estendida para fora da linha BC, igual a ela, e AB perpendicular a ela. As bases destes triângulos infinitos ou setores são, no entanto, supostamente tais colocadas sobre a linha reta BC, arranjados um próximo do outro. Faça com que BF seja uma dessas bases, e CE qualquer outra igual a ela, e faça [com que] os pontos F, E e C sejam conectados com A. Já que existem muitos triângulos ABF e AEC sobre a linha BC quanto há setores na área do círculo, e as bases BF e EC iguais a elas, e todas têm altitude comum BA, que é também um dos setores do círculo, entretanto, os triângulos EAC e BAF serão iguais, e igual a um dos setores do círculo. Como todos eles têm bases sobre BC, o triângulo BAC constituído por todos os triângulos será igual a todos os setores do círculo e, portanto, igual à área do círculo que consiste em todos eles. Isso é equivalente à conclusão de Arquimedes, por meio de um absurdo. Se BC é dividida no meio H, então se faz um paralelogramo ABHD, assim faça DH cruzar AC em I. Esse paralelogramo retângulo é igual à área do círculo. Na verdade, CB está para a metade CH, assim como AB está para IH, ou seja, DH está para a metade IH. No entanto, IH igual a ID e HC igual a DA, isto é, HB. Os ângulos A e I são iguais, e D e H são ângulos retos. Portanto, o triângulo ICH, que está fora do paralelogramo é igual ao triângulo IAD, através da qual o paralelogramo excede o trapézio AIHB. Se agora o diâmetro GB é de 7 partes, então o quadrado do diâmetro será 49. E desde que a circunferência seja composta de 22 partes, portanto, a sua metade BH, que é BC, será composta de 11, pouco menos. Multiplique-o pelo semidiâmetro 3 e meio que é AB, e obtemos para o retângulo AH 38 e meio.

Figura 3 - A área do círculo comparada com a área do quadrado do diâmetro

Portanto qual o quadrado do diâmetro	Tal a área do círculo inscrito
ht. 49. —	ht. 38 e meio.
duas vezes. 98. —	— 77.
Ao dividir por 7, se fazem 14. —	— 11. O que devia ser demonstrado.

Teorema XVIII: Todo anel com seção [transversal] circular ou elíptica é igual a um cilindro cuja altitude iguala à longitude da circunferência, que o centro da figura rotacionada descreve, e cuja base é a mesma com a seção [transversal] do anel.

Figura 4 - Esquema 11 das Integrais de Kepler – Parte II



Moura e Oliveira (2011, p.3)

Entendo a seção [transversal] que faz [a interseção de] um plano através do centro do espaço [em forma] de anel e perpendicular à superfície [em forma] de anel. A demonstração desse teorema vem a partir do teorema XVI e pode ser estabelecido pelos mesmos elementos que Arquimedes ensina nos princípios da Estereometria. Na verdade, se cortamos o anel GCD (no esquema XI), de centro A em um número infinito de discos muito finos ED, qualquer um deles será mais fino, para o centro A, quanto mais próximo a sua parte, tal como E repousa no centro A para E e a normal através de F erguida na intersecção plana para a linha ED. Ela também será mais grossa o quanto mais perto está do ponto D. Em dois pontos extremos, tal como D e E, a soma de duas espessuras será duas vezes a uma espessura do centro do disco. Esta consideração não seria válida sem as partes de E e D do disco sobre qualquer um dos dois lados de uma circunferência FG e a perpendicular por F e G se não estivesse igual e igualmente situada. **Corolário I.**

Esse modo de medição é válido para anéis circulares e elípticos, bem como alto, estreito ou reclinável, para esses abertos e fechados e parecidos, como de fato ainda para todos e quaisquer anéis cuja forma da seção transversal deles pode ter (em vez disso do círculo ED) tão distante como no plano através de AD perpendicular ao anel as partes sobre qualquer um dos dois lados de F são iguais e igualmente situadas. Nós exploraremos isto no caso de seção quadrada. Permitir que o anel seja de forma quadrada e assumo o quadrado para esta sobre ED. Esse anel pode também ser medido de outra maneira. Para ele, é parte externa de um cilindro com AD com raio e cuja altura é DE. A partir desse cilindro, segundo o Teorema XVI, a parte do centro deve ser subtraída, que é, o cilindro base é o círculo de raio AE e cuja altura é ED. O produto, portanto, de ED e a área circular AD menos a área circular AE é igual ao volume do anel com um quadrado como seção transversal. E se ED é multiplicação pela diferença do quadrado de AD e AE, então a proporção desse corpo da quarta parte do anel será como o quadrado para o círculo, portanto, como 14 para 11. Permita que AE seja igual 2, AD igual 4, então seu quadrado é 16, mas o quadrado de AE é 4, portanto, a diferença dos quadrados é 12. Esse número multiplicado pela altura 2 dá o volume igual a 24 do qual o quadrado é 96. Assim como 14 está para 11 como 96 por 75 com três sétimos, o volume do anel quadrado é 75 com três sétimos. Isto é de acordo com o teorema XVI. E de acordo com o método precedente, se AF é 3, FG é 6. Assim como 7 está para 22 como 6 está para 19 menos um sétimo. Assim, portanto, será o comprimento da circunferência FG, a altitude do cilindro. E assim, ED será 2, o quadrado desse é 4. Para obter a base do cilindro, multiplica 4 por 19 menos um sétimo. Nessa forma também vimos a verdade do teorema.

Teorema XIX & Analogia: Um anel fechado é igual ao cilindro que tem uma base [que seja] o círculo da seção [transversal] do anel e a altitude igual à longitude do círculo descrito. Como esse método é válido para todo anel, qualquer proporção de AE e AF pode ser válida também para um anel fechado, no qual o centro F do círculo EC descreve o círculo FG, onde FG é igual ao DA rotacionado nele mesmo. Isto é porque tal anel fechado é intersectado por A em discos que não têm espessura em A e em D e duas vezes a espessura daquele em F, portanto, o círculo através de D é duas vezes aquele através de F. Corolário 1: O corpo de cilindro que é criado pela rotação de MIKN (no esquema XI) os quatro lados da figura de

linhas reta e curva estão de acordo com as mesmas considerações iguais. Uma coluna com esta figura como base e comprimento do círculo FG como altura. Mas, a margem externa IKD que cerca o corpo do cilindro, como um arco de madeira cerca um barril, claramente não produz para esse teorema, e tem que ser calculado por outros meios. Analogia. Desde já, esse teorema é válido para todos os corpos cilíndricos ou partes da maçã (ou figo), não importam o quão fino, até que I e K coincidam com M e N, o que ocorre na formação da esfera, ao invés de duas linhas MN e IK onde existe somente uma, a saber, BC. Para esse corpo, a demonstração e uso desse teorema falha nos primeiros momentos. Corolário 2: A razão da esfera para o anel fechado criado pelo mesmo círculo, 7 está para 33, desde um terceiro de raio multiplicado por 4 vezes a área do círculo maior, ou dois terços do diâmetro multiplicado pela área do círculo maior, produzir um cilindro igual para a esfera. E um cilindro igual ao anel fechado, tem a mesma base, e a sua altitude é a circunferência [formada pelo centro]. Portanto, como a circunferência está para dois terços do diâmetro, que é, 33 por 7, assim um anel [está] para a esfera.

Fonte: Adaptado de Moura e Oliveira (2011)

ANEXO IV – Tradução dos Teoremas de Kepler

Tradução dos Teoremas de Kepler

No **Teorema I**, Kepler faz referência ao método de Arquimedes da proporção da circunferência para o diâmetro. Tal proporção é aproximadamente $22/7$ que é o valor de π como certo de duas casas decimais.

A demonstração é feita geometricamente com o uso de polígonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo. A análise geométrica do hexágono regular inscrito e circunscrito ao círculo conduz a demonstração do valor aproximado da proporção. No entanto, fica a sugestão de que Arquimedes utilizou polígonos com maior número de lados para melhor aproximação.

Na sua demonstração, ele inscreve no círculo CBD um hexágono regular, o ponto F é a intersecção das tangentes de D e B e a linha AF conecta o ponto F ao centro A passando pela reta DB em G e pelo arco DB em E.

Kepler mostra que o arco DEB tem medida maior que a linha DBG e menor do que a soma das linhas DF e FB. Para isso, ele não faz nenhuma demonstração, mas recorre simplesmente ao senso comum e como o menor caminho entre dois pontos é uma reta, ele conclui que o arco DEB é maior do que a reta DGB.

Também recorrendo ao senso comum, ele diz que o arco BE pode ser considerado uma reta, já que ao fazer esta demonstração utilizando polígonos regulares cada vez com mais lados, o arco ficará cada vez menor e se aproximará de uma reta. Sendo assim, ele diz que o arco DEB será menor do que a soma das linhas DF e BF, pois se o arco fosse considerado como duas retas, DE e BE, estas (DE e EB) seriam menores do que as outras (DF e BF), porque DE e EB estão mais próximas da reta DGB.

No trecho “Então, também BF e GB é a proporção $\sqrt{4/3}$ e porque GB é a metade do próprio AB, certamente é 50.000.” No original, Kepler escreve *semisesquiertia*, ou seja, “metade de $3/4$ ”, mas, na verdade, ao usar a expressão *semi*, “metade”, ele está se referindo à raiz quadrada, expressão que remonta ao período de Boécio (século VI a.C.) a Euclides (STRUICK, 1969).

Os valores obtidos por Kepler são relacionados com uma circunferência de diâmetro 7. Nesse caso, o raio AB valeria 3,5 e o lado DB do hexágono também seria 3,5. Logo, o perímetro do hexágono inscrito será 21.

O hexágono circunscrito vale doze retas BF, ou seja, 24,2487113059... Mas, Kepler chega a $24 - 1/10$. Há uma discrepância de mais de três décimos no valor obtido.

Segundo Kepler, “está patente aos olhos” que a circunferência está mais próxima da reta BG do que de BF. Sendo assim, a circunferência deve valer uma mais que 21 e dois menos um décimo de $24 - 1/10$. Logo a circunferência vale aproximadamente 22 e a razão de seu perímetro para o diâmetro é $22/7$. Ele diz que esse valor é melhor demonstrado por Arquimedes, com polígonos de mais lados.

Kepler teve contato com a obra *Ideae mathematicae pars prima* de Adriaan Van Roomen que mostra o número π com 15 casas decimais corretas. Isso nos leva a crer que a escolha pela aproximação de Arquimedes é que Kepler considerava necessário o uso de apenas duas casas decimais.

No **Teorema II**, Kepler trata da proporção da área do círculo com o quadrado do diâmetro que é aproximadamente 11 por 14. A descrição e análise geométrica desse teorema também se refere a Arquimedes.

Kepler utiliza o senso de dividir infinitas vezes a circunferência conforme os números de pontos nela existentes, supostamente infinitos. Estes pontos dividem o círculo em infinitas partes, cujas partes do vértice convergem para o centro e são considerados triângulos isósceles. A circunferência é “esticada” e os triângulos isósceles são “arrumados” de forma a todos terem a mesma base na circunferência e vértice convergido para o raio, que à altura dos triângulos.

O triângulo formado pelos diversos triângulos isósceles tem a mesma área que o círculo. O que segundo Kepler é equivalente à conclusão de Arquimedes, por meio de um absurdo.

A demonstração se desenvolve transformando o triângulo em paralelogramo. O diâmetro é dividido em 7 partes. É feita então a proporção entre o quadrado desse diâmetro e a área do círculo, o valor é duplicado e dividido por sete e obtém a proporção de 11/14 e Kepler encerra com a frase “o que devia ser demonstrado”.

Percebemos a permanência do diâmetro 7, a escolha de Kepler por esse valor não é explicada nos teoremas que foram traduzidos. É comum aos matemáticos daquele período usarem medidas que fossem convenientes para os seus trabalhos.

A demonstração da proporção 22/7, o π , no teorema I e a demonstração da proporção 11/14 no teorema II são utilizados nos teoremas seguintes para o cálculo de volume de anéis, conhecido como o método de integração de Kepler.

O **Teorema XVIII** se trata do cálculo da medida do volume do anel formado pela rotação de uma figura plana circular ou elíptica em torno de um centro. Kepler, nesse teorema, não cita o termo eixo de rotação, percebemos algo similar no esquema XI da figura 3

O anel é o que atualmente chamamos de toro, e tem a medida do volume igual a medida do volume do cilindro com mesma base da seção transversal e mesma altura do comprimento do anel.

Kepler corta o anel em um número infinito de discos muito finos o que nos faz lembrar atualmente a ideia de infinitésimo. E explica que a demonstração do teorema está no Teorema XVI e pode ser estabelecido pelos mesmos elementos que Arquimedes ensina nos princípios da Estereometria.

A medida do volume do anel de seção quadrada é explorada, obtida pela diferença dos cilindros externos e internos formados pelo anel. Fornece também por meio do produto da altura da seção quadrada do anel pela diferença do quadrado do raio da circunferência maior pelo quadrado do raio da circunferência menor $\frac{1}{4}$ da medida do volume de um anel de forma quadrada.

Kepler faz a proporção das medidas dos volumes destes dois sólidos como 14 para 11, temos que: A medida do volume do anel quadrado está para a medida do volume de anel de seção quadrada assim como 14 está para 11. E continua, que a medida do diâmetro está para a medida do comprimento da circunferência assim como 7 está para 22, sendo o raio da circunferência formada pela rotação igual a 3 e diâmetro 6, então temos que 6 está para 19 $\frac{1}{7}$, assim como 7 está para 22.

O **Teorema XIX** se trata do cálculo da medida do volume do anel fechado sendo igual ao cilindro cuja base é igual ao círculo da seção transversal e altura igual ao comprimento da circunferência formada na rotação. Nesse teorema, Kepler esclarece que as operações anteriores realizadas no anel aberto não são válidas para o anel fechado.

No segundo corolário desse teorema, Kepler estabelece uma razão da esfera para o anel fechado criado pelo mesmo círculo “7 está para 33 assim como”, nesse momento descreve proporções da esfera que vem a ser $\frac{4}{3}r^3$ e encerra a circunferência está para $\frac{2}{3}$ do diâmetro que é $\frac{33}{7}$, “assim como o anel está para a esfera”.

Fonte: Adaptado de Moura e Oliveira, 2011

ANEXO V – Solução do problema movimento do calor

Solução do problema de determinar a medida do movimento do calor em um determinado ponto de uma massa sólida.

Denotando por t o tempo decorrido e por v a temperatura atingida após um tempo t por uma molécula infinitamente pequena cujas coordenadas são x, y, z ; o estado variável do sólido será expresso por uma equação similar ao seguinte $v = F(x, y, z, t)$. Suponha que a função F seja dada, e que consequentemente podemos determinar a cada instante a temperatura de qualquer ponto; imagine que, através do ponto m , traçamos um plano horizontal paralelo ao plano xy , e que nesse plano traçamos um círculo infinitamente pequeno w , cujo centro está em m ; é necessário determinar qual é a quantidade de calor que durante o instante dt passará através do círculo w da parte do sólido que está abaixo do plano para a parte acima dele.

Todos os pontos extremamente próximos ao ponto m e sob o plano exercem sua ação durante o instante infinitamente pequeno dt , em todos aqueles que estão acima do plano e extremamente próximos ao ponto m , ou seja, cada um dos pontos situados em um lado desse plano enviará calor para cada um dos que estão situados no outro lado.

Devemos considerar como positiva uma ação cujo efeito é transportar certa quantidade de calor acima do plano, e como negativa aquela que faz com que o calor passe abaixo do plano. A soma de todas as ações parciais que são exercidas através do círculo w , ou seja, a soma de todas as quantidades de calor que, cruzando qualquer ponto desse círculo, passam da parte do sólido abaixo do plano para a parte acima, compõe o fluxo cuja expressão que deve ser encontrada.

É fácil imaginar que esse fluxo pode não ser o mesmo em toda a extensão do sólido, e que se em outro ponto m' traçamos um círculo horizontal w' igual ao anterior, as duas quantidades de calor que se elevam acima desses planos w e w' durante o mesmo instante podem não ser iguais: essas quantidades são comparáveis entre si e suas proporções são números que podem ser facilmente determinados.

Já sabemos o valor do fluxo constante para o caso de movimento linear e uniforme; assim, no sólido encerrado entre dois planos horizontais infinitos, um dos quais é mantido na temperatura a e o outro na temperatura b , o fluxo de calor é o mesmo para todas as partes da massa; podemos considerá-lo ocorrendo apenas na direção vertical. O valor correspondente à unidade de superfície e à unidade de tempo é: $K \left(\frac{a-b}{e} \right)$, em que e denota a distância perpendicular dos dois planos e K a condutibilidade específica. As temperaturas nos diferentes pontos do sólido são expressas pela equação:

$$v = a - \left(\frac{a-b}{e} \right) z$$

Quando o problema se refere a um sólido compreendido entre seis planos retangulares, pares dos quais são paralelos, e as temperaturas nos diferentes pontos são expressas pela equação:

$$v = A + ax + by + cz$$

a propagação ocorre ao mesmo tempo ao longo das direções de x , de y , de z ; a quantidade de calor que flui através de uma porção definida de um plano paralelo ao de w e y é a mesma em toda a extensão do prisma; seu valor correspondente à unidade de superfície e à unidade de tempo é $-cK$, na direção de z , é $-BK$, na direção de y , e $-aK$ na direção de x . Em geral, o valor do escoamento vertical, nos dois casos que acabamos de citar, depende apenas do coeficiente de z e da condutibilidade específica K ; esse valor é sempre igual a $-K \frac{dv}{dz}$.

A expressão da quantidade de calor que, durante o instante dt , flui através de um círculo horizontal infinitamente pequeno, cuja medida da área é w , e passa da parte do sólido que está abaixo do plano do círculo para a parte acima, é, para os dois casos em questão: $-K \frac{dv}{dz} w dt$.

É fácil generalizar esse resultado e reconhecer que ele existe em todos os casos do movimento variado de calor expresso pela equação $v = F(x, y, z, t)$. Denotemos de fato por x', y', z' , as coordenadas desse ponto m , e sua temperatura real por v' . Sejam $a' + \xi, y' + \eta, z' + \zeta$ as coordenadas de um ponto μ infinitamente próximo ao ponto m , e cuja temperatura é w ; ξ, η, ζ são quantidades infinitamente pequenas adicionadas às coordenadas a', y, z' ; eles determinam a posição das moléculas infinitamente próximas ao ponto m , em relação a três eixos retangulares, cuja origem está em m , paralela aos eixos de x, y e z . Diferenciando a equação $v = F(x, y, z, t)$ e substituindo as diferenciais por ξ, η, ζ , teremos, para expressar o valor de w que é equivalente a $v + dv$, a equação linear:

$$w = v' + \frac{dv'}{dx} \xi + \frac{dv'}{dy} \eta + \frac{dv'}{dz} \zeta$$

em que os coeficientes: $v', \frac{dv'}{dx}, \frac{dv'}{dy}$ e $\frac{dv'}{dz}$ são funções dx', dy', dz' de x, y, z, t , em que os valores dados e constantes x', y', z' , que pertencem ao ponto m , foram substituídos por x, y, z .

Suponha que o mesmo ponto m pertença também a um sólido encerrado entre seis planos retangulares, e que as temperaturas reais dos pontos desse prisma, cujas dimensões são finitas, são expressas pela equação linear $w = A + a\xi + b\eta + c\zeta$; e que as moléculas situadas nas faces que limitam o sólido são mantidas por alguma causa externa na temperatura que lhes é atribuída pela equação linear. ξ, η, ζ , são as coordenadas retangulares de uma molécula do prisma, cuja temperatura é w , refere-se a três eixos cuja origem está em m .

Isso organizado, se tomarmos como os valores dos coeficientes constantes A, a, b, c , que entram na equação para o prisma, as quantidades $v', \frac{dv'}{dx}, \frac{dv'}{dy}$ e $\frac{dv'}{dz}$ que pertencem à equação diferencial; o estado do prisma expresso pela equação:

$$w = v' + \frac{dv'}{dx} \xi + \frac{dv'}{dy} \eta + \frac{dv'}{dz} \zeta$$

coincidirá o mais próximo possível com o estado do sólido; isto é, todas as moléculas infinitamente próximas ao ponto m terão a mesma temperatura, quer as consideremos no sólido ou no prisma. Essa coincidência do sólido com o prisma é bastante análoga à das superfícies curvas com os planos que as tocam.

É evidente, a partir disso, que a quantidade de calor que flui no sólido através do círculo w , durante o instante dt , é a mesma que flui no prisma através do mesmo círculo; pois todas as moléculas cujas ações concorrem em um ou outro efeito, têm a mesma temperatura nos dois sólidos. Portanto, o fluxo em questão, em um sólido ou outro, é expresso por $-K \frac{dv}{dz} w dt$. Seria $-K \frac{dv}{dy} w dt$ se o círculo cujo centro é m fosse perpendicular ao eixo y , e $-K \frac{dv}{dx} w dt$ se o círculo fosse perpendicular ao eixo x .

O valor do fluxo que acabamos de determinar varia no sólido de um ponto a outro, também varia com o tempo. Poderíamos imaginá-lo como tendo, em todos os pontos de uma unidade de superfície, o mesmo valor do ponto m , e preservar esse valor durante a unidade de tempo; o fluxo, então, será expresso por $-K \frac{dv}{dz}$, seria $-K \frac{dv}{dy}$ na direção de y e $-K \frac{dv}{dx}$ na direção de x .

Devemos normalmente empregar no cálculo esse valor do fluxo assim referido à unidade de tempo e à unidade de superfície.

Esse teorema serve em geral para medir a velocidade com que o calor tende a atravessar um dado ponto de um plano situado de qualquer maneira no interior de um sólido cujas temperaturas variam com o tempo. Através do ponto m dado, uma perpendicular deve ser elevada sobre o plano, e em cada ponto dessa perpendicular ordenadas devem ser desenhadas para representar as temperaturas reais em seus diferentes pontos. Uma curva plana será formada, cujo eixo de abscissas é a perpendicular. A fluxão da ordenada dessa curva, respondendo ao ponto m , tomada com o sinal oposto, expressa a velocidade com que o calor é transferido através do plano. Esta fluxão da ordenada é conhecida por ser a tangente do ângulo formado pelo elemento da curva com um paralelo à abscissa.

O resultado que acabamos de explicar é aquele cujas aplicações mais frequentes foram feitas na teoria do calor. Não podemos discutir os diferentes problemas sem formar uma ideia muito exata do valor do fluxo no ponto ereto de um corpo cujas temperaturas são variáveis. É necessário insistir nesta noção fundamental; um exemplo que estamos prestes a referir irá indicar mais claramente o uso que foi feito dele na análise.

Suponha que os diferentes pontos de uma massa cúbica, uma aresta da qual tem o comprimento π , tenham temperaturas reais desiguais representadas pela equação $v = \cos x \cos y \cos z$. As coordenadas x, y, z são medidas em três eixos retangulares, cuja origem está no centro do cubo, perpendicular às faces. Os pontos da superfície externa do sólido estão na temperatura real 0, e supõe-se também que as causas externas mantenham em todos esses pontos a temperatura real 0. Nessa hipótese o corpo será cada vez mais resfriado, as temperaturas de todos os pontos situados no interior da massa irão variar, e, após um tempo infinito, todos eles irão atingir a

temperatura da superfície. Agora, vamos provar na sequência, que o estado variável desse sólido é expresso pela equação:

$$v = e^{-gt} \cos x \cos y \cos z$$

o coeficiente g , dado por $g = 3k/CD$ é a condutibilidade específica da substância da qual o sólido é formado, D é a densidade e C o calor específico; t é o tempo decorrido.

Supondo a equação verdadeira passamos a examinar o uso dela para encontrar a quantidade de calor que cruza um dado plano paralelo a um dos três planos perpendiculares.

Se, através do ponto m , cujas coordenadas são x, y, z , traçarmos um plano perpendicular a z , encontraremos, como visto anteriormente, que o valor do fluxo, nesse ponto e através do plano é:

$$-K \frac{dv}{dz}, \text{ ou } Ke^{-gt} \cos x \cos y \cos z.$$

A quantidade de calor que, durante o instante dt , atravessa um retângulo infinitamente pequeno, situado nesse plano, e cujos lados são dx e dy , é:

$$Ke^{-gt} \cos x \cos y \cos z \cdot dx dy dt$$

Assim, a quantidade de calor que, durante o instante dt , atravessa toda a área do mesmo plano, é:

$$ke^{-gt} \cos(z) dt \iint \cos(x) \cos(y) dx dy$$

Calculando a integral para $x = -\frac{1}{2}\pi$ até $x = \frac{1}{2}\pi$ e para $y = -\frac{1}{2}\pi$ até $y = \frac{1}{2}\pi$, encontraremos a expressão:

$$4Ke^{-gt} \cos z dt$$

representando o calor total.

Se tomarmos a integral em relação a t , de $t = 0$ a $t = t$, encontraremos a quantidade de calor que cruzou o mesmo plano desde o início do resfriamento até o momento real. Esta integral é:

$$\frac{4K}{g} \cos z (1 - e^{-gt})$$

Cujo valor na superfície será dado por:

$$\frac{4K}{g} (1 - e^{-gt})$$

de modo que, após um tempo infinito, a quantidade de calor perdida em $4K$ por uma das faces é $4k/g$. Sendo o mesmo raciocínio aplicável a cada uma das seis faces, concluímos que o sólido perdeu pelo seu resfriamento completo uma quantidade total de calor equivalente a $\frac{24k}{g}$ ou $8CD$, uma vez que g é equivalente a $3k/CD$. O calor total que é dissipado durante o resfriamento deve, de fato, ser independente da condutibilidade específica K , que só pode influenciar mais ou menos a velocidade de resfriamento.

Fonte: Fourier (1878, p.78-83)