

**Pontifícia Universidade Católica de São Paulo  
PUC-SP**

**Chrystian Bastos de Almeida**

**A Gênese Documental de professoras em um trabalho colaborativo  
remoto para o ensino de Juros Compostos com o uso do GeoGebra**

**Doutorado em Educação Matemática**

**São Paulo**

**2022**

**Chrystian Bastos de Almeida**

**A Gênese Documental de professoras em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos com o uso do GeoGebra**

**Doutorado em Educação Matemática**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** no âmbito do PEPG em Educação Matemática da PUC-SP, sob a orientação da **Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar**.

**São Paulo  
2022**

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura\_\_\_\_\_

São Paulo, 30 de setembro de 2022.  
e-mail: chrystianbastosdealmeida@gmail.com

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -Ficha  
Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

Almeida, Chrystian Bastos de

A Gênese Documental de professoras em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos com o uso do GeoGebra. / Chrystian Bastos de Almeida. -- São Paulo: [s.n.], 2022.

249 p. il. ; cm.

Orientadora: Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.  
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,  
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Trabalho colaborativo. 2. Gênese Documental.  
3. GeoGebra. 4. Juros Compostos. 5. Investigação reflexiva. I.  
Abar, Celina Aparecida Almeida Pereira. II. Pontifícia Universidade  
Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em  
Educação matemática. III. Título.

CDD

**CHRYSYTIAN BASTOS DE ALMEIDA**  
**A GÊNESE DOCUMENTAL DE PROFESSORAS EM UM TRABALHO**  
**COLABORATIVO REMOTO PARA O ENSINO DE JUROS**  
**COMPOSTOS COM O USO DO GEOGEBRA**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Aprovado em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

Banca Examinadora

---

---

---

---

---

À minha família pelo seu afeto e pela ajuda constante.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, sob número do processo: 88887464098/2019-00

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001, process number: 88887-464098/2019-00

## **AGRADECIMENTOS**

À minha orientadora Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar pelo empenho em suas orientações concedidas na construção deste trabalho, sempre expressando profissionalismo e competência.

Às professoras Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglioni, Dra. Ana Lúcia Manrique, Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira e Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis, membros da banca examinadora desta tese, e à professora Dra. Rosilângela Maria de Lucena Scanoni Couto que contribuíram de maneira relevante, com sugestões e observações fundamentais para o aprimoramento do trabalho.

À minha família, por todo o apoio, afeto e paciência em todas as etapas desta jornada.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelas importantes contribuições ao longo desta jornada. À secretária Suzanne Lima Freitas pela dedicação e atenção a mim e a todos os alunos do programa.

Aos meus colegas do Programa e colegas de trabalho, pelo companheirismo e ajuda mútua.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pela ajuda financeira fundamental para o desenvolvimento da pesquisa.

**“Viva como se fosse morrer amanhã, aprenda como se fosse  
viver para sempre”**

Mahatma Gandhi

ALMEIDA, C. B. **A Gênese Documental de professoras em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos com o uso do GeoGebra.** 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022. 249 páginas.

## RESUMO

Esta tese tem por objetivo geral caracterizar a Gênese Documental de duas professoras de Matemática do Ensino Médio em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos articulado com o *software* GeoGebra. Como referencial teórico para o desenvolvimento da pesquisa foi adotada a Abordagem Documental do Didático, a qual tem como referência o trabalho documental desenvolvido pelo docente ao planejar sua aula, sendo essa documentação a base das práticas pedagógicas implementadas pelo professor e do seu aprimoramento profissional. Essa abordagem envolve o processo chamado Gênese Documental, na qual os recursos, associados aos esquemas de utilização, transformam-se em documentos. Desse modo, analisamos as dialéticas instrumentação/ instrumentalização, recurso “mãe”/recurso “filho” e atividade produtiva/atividade construtiva da gênese documental das professoras. Aportes teóricos complementares como a Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria da Orquestração Instrumental e o conceito de autoeficácia foram utilizados no aprofundamento das análises. Para o desenvolvimento do estudo, de natureza qualitativa, adotamos como referencial metodológico a investigação reflexiva, em um contexto colaborativo remoto de professoras. Na metodologia de investigação reflexiva, ocorre um comprometimento dinâmico do docente, o que favorece uma atitude reflexiva, pois ele é conduzido a detalhar sua própria atividade, compartilhar com os outros. Também foi considerado o conceito de trajetória documental, procurando entender a evolução do trabalho documental no decorrer do tempo. Nesta pesquisa, focamos a análise do trabalho documental de duas professoras que integraram diversos recursos para o ensino de Juros Compostos, entre eles o *software* matemático GeoGebra. Os resultados apontam que as professoras demonstraram aprimoramento de conhecimentos relativos ao ensino de Juros Compostos, a partir da interação desenvolvida no trabalho colaborativo. Houve um avanço no trabalho documental das docentes, destacando-se a metamorfose do seu sistema de recursos, o enriquecimento dos seus esquemas individuais, bem como o impacto no seu grau de autoeficácia para o ensino de Juros Compostos.

**Palavras-chave:** Trabalho Colaborativo, Gênese Documental, GeoGebra, Juros Compostos, Investigação Reflexiva.

ALMEIDA, C. B. **The Documentary Genesis of teachers in a remote collaborative work for the teaching of Compound Interest with the use of GeoGebra.** 2022. Thesis (Doctorate in Mathematics Education) - Pontifical Catholic University of São Paulo, São Paulo, 2022. 249 pages.

## ABSTRACT

This thesis has the general objective to characterize the Documentary Genesis of two High School Mathematics teachers in a remote collaborative work for the teaching of Compound Interest articulated with the GeoGebra software. As a theoretical reference for the development of the research, the Documental Approach of the Didactic was adopted, which has as reference the documental work developed by the teacher when planning his class, and this documentation is the basis of the pedagogical practices implemented by the teacher and his professional improvement. This approach involves the process called Documentary Genesis, in which resources, associated with usage schemes, are transformed into documents. Thus, we analyzed the instrumentation/instrumentalization dialectic, “mother”/“son” resource and productive activity/constructive activity of the teachers' documentary genesis. Complementary theoretical contributions such as the Theory of Conceptual Fields, the Theory of Instrumental Orchestration and the concept of Self-Efficacy were used to deepen the analyses. For the development of the study, of a qualitative nature, we adopted as a methodological reference the reflective investigation, in a remote collaborative context of teachers. In the reflective investigation methodology, there is a dynamic commitment of the teacher, which favors a reflective attitude, as he is led to detail his own activity, sharing with others. The concept of documentary trajectory was also considered, seeking to understand the evolution of documentary work over time. In this research, we focused on the analysis of the documentary work of two teachers who integrated several resources for the teaching of Compound Interest, including the GeoGebra mathematical software. The results show that the teachers showed improvement of knowledge related to the teaching of Compound Interest, from the interaction developed in the collaborative work. Progress was made in the teachers' documental work, highlighting the metamorphosis of their resource system, the enrichment of their individual schemes, as well as the impact on their degree of self-efficacy for teaching Compound Interest.

**Keywords:** Collaborative Work, Documentary Genesis, GeoGebra, Compound Interest, Reflective Investigation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema sobre a Abordagem Documental do Didático.....	30
Figura 2 - Representação da Gênese Documental.....	31
Figura 3 – Mapa reflexivo da trajetória documental de Carla.....	50
Figura 4 – Mapa reflexivo da trajetória documental de Genilda.....	51
Figura 5 – Esquema de palavras-chave.....	73
Figura 6 - Postagem de atividades através do <i>Google Sala de Aula</i> pela professora Carla.....	116
Figura 7 - Postagem de atividades através do <i>Google Sala de Aula</i> pela professora Genilda.....	117
Figura 8 - Gráfico da função $M(x) = 10 \cdot (1,02)^x$ no GeoGebra.....	118
Figura 9 – Estrutura do Trabalho Colaborativo.....	121
Figura 10 - Situação-problema de modelagem resolvida pela professora.....	124
Figura 11 - Gráfico da situação-problema de modelagem.....	124
Figura 12 – Situação-problema de modelagem a ser resolvida pelo aluno.....	125
Figura 13 - Resolução da situação-problema relacionando juros simples e composto com o GeoGebra.....	128
Figura 14 - Resolução da situação-problema relacionando juros simples e composto com o Excel.....	129
Figura 15 – Resolução da situação-problema envolvendo juros compostos, geometria analítica e vetor no GeoGebra.....	131
Figura 16 - Resolução da situação-problema sobre depreciação no GeoGebra.....	133
Figura 17 - Gráfico da situação-problema sobre depreciação.....	133
Figura 18 - Resolução da situação-problema sobre atualização financeira no GeoGebra.....	135
Figura 19 – Modelo de tabuleiro para o jogo dos juros.....	137
Figura 20 - Participação do pesquisador.....	144
Figura 21 - Participação da professora Carla.....	145
Figura 22 - Participação da professora Genilda.....	145
Figura 23 - Orientações do pesquisador sobre a criação de atividades no site do GeoGebra.....	146
Figura 24 - Orientações do pesquisador sobre a integração de materiais didáticos do GeoGebra com o <i>Google Sala de Aula</i> .....	146
Figura 25 - Orientações do pesquisador sobre a utilização do GeoGebra <i>Classroom</i> .....	147
Figura 26 - Dúvida da professora Carla sobre o uso da planilha.....	148
Figura 27 - Pesquisador orientando a professora Carla sobre o uso de planilha.....	148
Figura 28 – Esclarecimentos sobre atividade de leitura de texto.....	151
Figura 29 – Resolução interativa com os alunos da situação-problema de modelagem.....	152
Figura 30 – Generalização da situação-problema com modelagem.....	152
Figura 31 - Resolução interativa com os alunos da situação-problema que relaciona juros simples e juros compostos.....	153
Figura 32 - Interação com os alunos da transformação de unidades de medida, na resolução de problemas, envolvendo juros compostos.....	154
Figura 33 - Interação com os alunos na aproximação dos cálculos, na resolução de problemas, envolvendo juros compostos.....	154
Figura 34 - Interação com os alunos na utilização do <i>site</i> do GeoGebra.....	155
Figura 35 - Orientações aos alunos a respeito da construção de gráficos de funções com o software GeoGebra.....	156
Figura 36 - Reforço da compreensão dos alunos sobre a associação do montante dos juros compostos com uma função exponencial.....	157

Figura 37 - Instruções iniciais aos alunos para a realização das tarefas, pelo <i>Google Sala de Aula</i> .....	158
Figura 38 – Interação entre a professora Genilda e os alunos sobre o desenvolvimento do conceito de juros .....	159
Figura 39 - Envolvimento dos alunos com a atividade de modelagem do preço de um aparelho de som com uma função exponencial.....	160
Figura 40 - Interação da professora com um dos alunos na modelagem do preço de um aparelho de som por meio de uma função exponencial.....	160
Figura 41 - Envolvimento dos alunos com a atividade relacionada à comparação dos rendimentos entre a capitalização simples e a composta.....	161
Figura 42 - Interação da professora com dois alunos na atividade relacionada à comparação dos rendimentos entre a capitalização simples e a composta .....	162
Figura 43 - Envolvimento dos alunos com a atividade relacionada à depreciação de um automóvel.....	163
Figura 44 - Interação da professora com dois alunos sobre a atividade relacionada à depreciação de um automóvel.....	163
Figura 45 - Envolvimento dos alunos com a atividade da representação de um vetor por meio de um vetor.....	164
Figura 46 - Interação da professora com um aluno sobre a atividade relacionada à representação de um vetor.....	165
Figura 47 - Reflexões sobre o comentário de um aluno referente ao desenvolvimento do conceito de juros e a relação do assunto com o cotidiano.....	169
Figura 48 - Reflexões da professora Carla sobre as situações-problema que envolveram a modelagem por meio da função exponencial .....	170
Figura 49 - Reflexões da professora Carla sobre a generalização feita para obtenção da fórmula do montante .....	171
Figura 50 - Reflexões da professora Carla sobre aproximações diferentes nos cálculos....	171
Figura 51 - Reflexões da professora Carla sobre o <i>download</i> da calculadora gráfica do GeoGebra no celular .....	172
Figura 52 - Reflexões da professora Carla sobre a interação com os alunos na construção de gráficos de funções com o <i>software</i> GeoGebra.....	173
Figura 53 - Reflexões da professora Genilda sobre o envolvimento dos alunos com a situação-problema que envolve a modelagem do preço de um aparelho de som por uma função exponencial .....	174
Figura 54 - Reflexões da professora Genilda sobre a situação-problema que envolve a comparação dos rendimentos entre a capitalização simples e composta.....	175
Figura 55 - Reflexões da professora Genilda sobre a situação-problema que envolve a depreciação de um automóvel .....	176
Figura 56 - Reflexões da professora Genilda sobre a situação-problema que envolve a articulação entre juros compostos, geometria analítica e vetor.....	176

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Atividade implementada pelo professor regente .....	61
Quadro 2 – Lista das pesquisas comentadas na Revisão de Literatura.....	74
Quadro 3 - Questão resolvida sobre Juros Compostos .....	117
Quadro 4 – Situação-problema relacionando juros simples e composto resolvida pela professora .....	128
Quadro 5 – Situação-problema relacionando juros simples e composto a ser resolvida pelo aluno .....	128
Quadro 6 – Situação-problema envolvendo juros compostos, geometria analítica e vetor resolvida pela professora .....	130
Quadro 7 – Resolução da situação-problema envolvendo juros compostos, geometria analítica e vetor.....	130
Quadro 8 – Situação-problema envolvendo juros compostos, geometria analítica e vetor a ser resolvida pelo aluno.....	131
Quadro 9 – Situação-problema sobre depreciação resolvida pela professora .....	133
Quadro 10 – Situação-problema sobre depreciação a ser resolvida pelo aluno .....	134
Quadro 11 – Situação-problema sobre atualização financeira resolvida pela professora ...	135
Quadro 12 – Jogo dos juros .....	136
Quadro 13 – Quadro-resumo da Situação de Reflexão .....	140
Quadro 14 – Quadro-resumo da Situação de Formação .....	149
Quadro 15 – Quadro-resumo da Situação de Implementação .....	166
Quadro 16 – Quadro-resumo da Situação de Confrontação .....	177

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIações**

ADD - Abordagem Documental do Didático  
BNCC - Base Nacional Comum Curricular  
CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior  
CoP - Comunidade de Prática  
CRG - Collaboration Research Group  
E.A.I. - Esquemas de ação instrumental  
E.A.C.I. - Esquemas de atividade coletiva instrumental  
ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio  
E.U. - Esquemas de utilização  
E.Us. - Esquemas de uso  
KFLM - Knowledge of Features of Learning Mathematics  
KMLS - Knowledge of Mathematics Learning Standards  
KMT - Knowledge of Mathematics Teaching  
KoT - Knowledge of Topics  
MEP - Software Mathenpoche  
MK - Mathematical Knowledge  
MTSK - Mathematics Teacher's Specialized Knowledge  
PCK - Pedagogical Content Knowledge  
PIBID - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência  
PREMa – EB - Pensar os Recursos para o Ensino de Matemática no Ensino Básico  
ReVEA - Recursos vivos para o ensino e a aprendizagem  
SFoDEM - Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques  
STEM - Science, Technology, Engineering and Mathematics  
TAD - Teoria Antropológica do Didático  
TecDEM - Tecnologias Digitais na Educação Matemática  
TOI - Teoria da Orquestração Instrumental  
TRG - Teaching Research Group  
TRO - Teaching Research Officer

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	16
1.1 Justificativa.....	19
1.2 Problema de pesquisa .....	20
1.3 Hipótese da pesquisa .....	21
1.4 Objetivo Geral.....	21
1.5 Objetivos Específicos.....	21
1.6 Organização do Relatório .....	22
CAPÍTULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO.....	24
2.1 Construção teórica da Abordagem Documental do Didático .....	24
2.2 Considerações sobre a Abordagem Documental do Didático .....	29
CAPÍTULO 3 – REFERENCIAL METODOLÓGICO .....	37
3.1 Considerações sobre pesquisa qualitativa.....	37
3.2 Metodologia de investigação reflexiva.....	39
3.3 A pesquisa acadêmica associada ao trabalho colaborativo de docentes.....	41
3.4 Reflexões sobre pesquisa colaborativa .....	42
3.5 Etapas da pesquisa colaborativa .....	45
3.6 Considerações sobre colaboração e cooperação.....	46
3.7 Procedimentos metodológicos .....	47
3.8 Técnicas e instrumentos de coleta de dados .....	48
3.9 Sujeitos da pesquisa e mudanças dos seus Sistemas de Recursos.....	49
CAPÍTULO 4 - RECURSOS TECNOLÓGICOS DIGITAIS NA CONSTRUÇÃO DE DOCUMENTOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA.....	53
4.1 A importância da utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino de Matemática.....	53
4.2 Importância do <i>software</i> GeoGebra no ensino de Matemática .....	56
4.3 Utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino de Matemática sob a ótica da Gênese Documental .....	58
CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES SOBRE JUROS COMPOSTOS .....	63
5.1 Aspectos históricos do conceito de Juros Compostos .....	63
5.2 Capitalização Simples.....	66
5.3 Capitalização Composta .....	67
5.4 Reflexões sobre o ensino de Juros Compostos no Ensino Médio .....	68
CAPÍTULO 6 – REVISÃO DE LITERATURA .....	73
6.1 Rocha e Trouche (2015).....	76

6.2 Gueudet <i>et al.</i> (2016) .....	80
6.3 Gueudet e Parra (2017) .....	81
6.4 Pepin, Gueudet e Trouche (2017).....	83
6.5 Lima e Trgalová (2018) .....	86
6.6 Machado Jr. <i>et al.</i> (2018) .....	90
6.7 Xavier Neto, Silva e Trouche (2019) .....	93
6.8 Miyakawa e Xu (2019).....	95
6.9 Hoyos e Garza (2020) .....	102
6.10 Almeida <i>et al.</i> (2020) .....	105
6.11 Abar e Dias (2021) .....	108
6.12 Iglioni, Abar e Almeida (2022) .....	109
<b>CAPÍTULO 7 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS</b> .....	<b>113</b>
7.1 Descrição e análise de uma experiência preliminar .....	113
7.2 Descrição e análise do trabalho colaborativo desta pesquisa.....	120
7.2.1 Situação de Reflexão .....	121
7.2.2 Situação de Formação .....	143
7.2.3 Situação de Implementação .....	150
7.2.3.1 Implementação das aulas pela professora Carla .....	150
7.2.3.2 Implementação das aulas pela professora Genilda .....	158
7.2.4 Situação de Confrontação.....	167
7.2.4.1 Confrontação das aulas implementadas pela professora Carla.....	168
7.2.4.2 Confrontação das aulas implementadas pela professora Genilda.....	174
7.3 Análises sobre o trabalho documental das professoras Carla e Genilda.....	178
7.4 Considerações sobre as dialéticas instrumentação/ instrumentalização, recurso “mãe”/ recurso “filho” e atividade produtiva/ atividade construtiva .....	182
7.5 Considerações sobre a autoeficácia das professoras Carla e Genilda relacionada com os processos de instrumentação e instrumentalização .....	184
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>189</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>195</b>
<b>APÊNDICE A – ROTEIRO EM POWERPOINT ELABORADO PELA PROFESSORA GENILDA</b> .....	<b>207</b>
<b>APÊNDICE B – CAPÍTULO DO LIVRO DIDÁTICO SOBRE JUROS COMPOSTOS</b> .....	<b>235</b>
<b>APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO SOBRE TRAJETÓRIA PARA O ENSINO DE JUROS COMPOSTOS</b> .....	<b>244</b>
<b>ANEXO A – PARECER COMITÊ DE ÉTICA – PUC-SP</b> .....	<b>245</b>

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Esta pesquisa se desenvolveu no âmbito do *Grupo de pesquisa Tecnologias Digitais na Educação Matemática (TecDEM)*<sup>1</sup> da PUC-SP e trata-se de uma tese de Doutorado em Educação Matemática que começou fundamentada na percepção oriunda de nossa experiência como docente de Matemática, no desejo de avançar no campo de pesquisas acadêmicas após a conclusão do mestrado, no interesse em explorar e contribuir com a divulgação das potencialidades do *software* GeoGebra e também no conhecimento sobre a teoria da Abordagem Documental do Didático.

Meu envolvimento com pesquisas e atividades relacionadas com a Matemática advém da formação acadêmica na área de Matemática; na graduação, na Universidade Federal de Santa Catarina e no mestrado, na Fundação Visconde de Cairu (Bahia). Iniciei a carreira profissional como professor efetivo da Rede Pública Estadual da Bahia, no ano de 2000, lecionando a disciplina de Matemática para turmas do Ensino Médio.

Diferente do mestrado, no qual o foco da pesquisa foi a aprendizagem do aluno, nesta nova etapa de estudo interessei-me pelo trabalho docente, procurando caracterizar a Gênese Documental de duas professoras de Matemática do Ensino Médio em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos articulado com o *software* GeoGebra.

Nesse sentido, destaco a relevância do ensino do conteúdo Juros Compostos tanto em relação à sua utilidade prática no cotidiano das pessoas, como em relação à sua abrangência, pois, no seu desenvolvimento, o docente tem a oportunidade de reforçar a compreensão dos alunos inerente a vários conhecimentos matemáticos básicos envolvidos como porcentagens, números decimais, potências, exponenciais, logaritmos, transformação de unidades de medida, progressões, funções etc.

Convém destacar que, em repositórios de Teses e Dissertações da Capes e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, encontrei várias produções acadêmicas relativas à abordagem desse objeto matemático; entretanto, na minha pesquisa, procurei tratar de uma abordagem diferenciada do conteúdo, por meio do referencial teórico da Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE,

---

<sup>1</sup> [dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/4368765029741691](http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/4368765029741691)

2009), em um contexto colaborativo remoto de professoras.

Assim, nesta investigação, apresento, por meio da Abordagem Documental do Didático, como se deu a Gênese Documental de duas professoras de Matemática, em um contexto colaborativo remoto. Além disso, é analisado possível desenvolvimento profissional dos sujeitos, decorrente desse processo de Gênese Documental, no qual os recursos são transformados em documentos.

A Abordagem Documental do Didático pode contribuir de forma efetiva para esta investigação, pois há interesse na construção de documentos para o ensino de Juros Compostos por parte das professoras participantes da pesquisa. Para analisar a passagem do recurso a documento (entidade mista composta pelos esquemas de utilização e o recurso), verificou-se, no trabalho das professoras, os esquemas de utilização construídos, considerando que esses esquemas poderiam ser tanto individuais como coletivos. Buscou-se entender o que foi planejado e o que foi implementado, a metamorfose do sistema de recursos das docentes e como se desenvolveram novos recursos para o aprimoramento do ensino de Juros Compostos.

Dessa forma, foi feita uma revisão de trabalhos que focam a Abordagem Documental do Didático em contexto de trabalho colaborativo (os trabalhos apresentavam outros conteúdos matemáticos diferentes de Juros Compostos), com o intuito de se verificar a importância dessa investigação e as possibilidades em contribuir para a área de Educação Matemática. Desse modo, houve a possibilidade de fazer as escolhas adequadas para essa investigação.

Convicto da importância da temática escolhida, foi desenvolvido um caminho para esta pesquisa. Primeiramente, foi realizado um estudo da Abordagem Documental do Didático e sobre os esquemas abordados na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) que permitiram a formulação da questão de pesquisa.

Em uma segunda etapa, foram feitas as escolhas metodológicas que, em minha concepção, cooperariam com os objetivos desta investigação, na tentativa de responder a questão de pesquisa e indicar contribuições para a área de Educação Matemática. Desse modo, na pesquisa de natureza qualitativa, foi adotada como referencial metodológico, a investigação reflexiva (GUEUDET; TROUCHE, 2010), em um contexto de trabalho colaborativo remoto de professoras. Com base nesse referencial metodológico, foram pesquisados as ações e o aperfeiçoamento

profissional das docentes, observando os tópicos de estabilidade e os avanços do trabalho documental no intervalo de tempo considerado. Nesse sentido, também foi adotado o conceito de trajetória documental (ROCHA, 2019), procurando entender a evolução desse trabalho no decorrer do tempo.

Uma primeira experiência do trabalho colaborativo foi realizada no âmbito do projeto Pensar os Recursos para o Ensino de Matemática no Ensino Básico - PREMa – EB<sup>2</sup> e resultou na produção de um artigo (ALMEIDA; ABAR, 2020b) que foi apresentado e publicado nos anais do evento CIET-EnPED<sup>3</sup>. Esse projeto contou com a participação da pesquisadora Cibelle de Fátima Castro de Assis (UFPB) e do engenheiro pedagógico francês Pierre Bénech (IFE de l'École Normale de Lyon).

O trabalho colaborativo desta pesquisa foi estruturado em quatro situações profissionais: Situação de Reflexão, em que ocorre a construção de um roteiro de atividades para o ensino de Juros Compostos, a partir de recursos escolhidos pelas participantes de forma colaborativa; Situação de Formação, em que ocorre a viabilização de uma Orquestração Instrumental para apropriação de um modelo de ensino articulado com o *site* do GeoGebra; Situação de Implementação, em que ocorre a aplicação do roteiro de atividades pelas professoras participantes por meio de plataformas virtuais; Situação de Confrontação em que ocorre uma confrontação das visões das professoras sobre seu trabalho de documentação e a materialidade desse trabalho, relacionada à metodologia de investigação reflexiva.

Convém ressaltar que a situação da pandemia de COVID-19 provocou a necessidade do uso de plataformas e modelos para aprendizagem *online* em casa, enquanto as professoras procuraram adaptar seus próprios modelos e sistemas de apoio com base em necessidades locais e disponibilidade de ensino *online*. Essa situação inusitada forneceu uma visão importante sobre a aprendizagem das professoras em resposta à mudança de condição: o que aprenderam ou irão aprender sobre essa situação para o benefício de futuras crises e tempos de estabilidade.

Com a disponibilização desses elementos e informações, foi feita a análise dos resultados da pesquisa e, em seguida, foram destacadas algumas considerações sobre o trabalho realizado.

A seguir, apresenta-se a justificativa da pesquisa.

---

<sup>2</sup>Projeto apoiado pela PUC-SP no âmbito do PEPG-Ex de 2019.

<sup>3</sup>Congresso Internacional de Educação e Tecnologias – Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância realizado pela UFSCar em agosto de 2020.

## 1.1 Justificativa

A formação continuada é um elemento relevante da carreira do docente de Matemática. Essa formação também pode ocorrer pela associação entre pesquisa acadêmica e trabalho colaborativo de docentes, em que um pesquisador compartilha de suas reflexões, no decorrer do desenvolvimento do trabalho. Com base nesse pressuposto, foi desenvolvida esta pesquisa.

No decorrer dessa experiência, poderão ser aprimorados saberes formais importantes para a prática docente e que estão diretamente vinculados à utilização de determinados recursos. Assim, no decorrer da experiência, os professores desenvolvem diferentes recursos para melhor entender e ensinar a Matemática. Segundo Gueudet e Trouche (2009), os recursos são a base da prática profissional dos docentes.

Nesse sentido, há uma questão geral que induz a compreender como os docentes elaboram seus sistemas de recursos e seus documentos. Nesta pesquisa, é apresentada uma análise do trabalho colaborativo remoto de duas professoras de Matemática do Ensino Médio que integraram diversos recursos para o ensino de Juros Compostos, entre eles o *software* matemático GeoGebra.

Convém ressaltar que as funcionalidades do GeoGebra apontam para aprendizagens mais exploratórias, porém, conforme Abar e Alencar (2013), a utilização e o conveniente preparo dos professores continuam sendo objeto de investigações. Nessa pesquisa, com base em entrevistas, as professoras demonstraram domínio em relação ao uso de comandos básicos do *software*, mas também apresentaram interesse em aprofundar conhecimentos sobre sua utilização. Do mesmo modo, pode-se dizer que as professoras também demonstraram interesse em aprimorar conhecimentos relativos ao ensino de Juros Compostos, a partir da interação desenvolvida no trabalho colaborativo.

No início da pesquisa, tanto a escolha do *software* GeoGebra como a escolha do conteúdo Juros Compostos foram feitas pelas próprias professoras em comum acordo com o pesquisador. A escolha do GeoGebra se justificou pelo interesse das professoras em explorar as potencialidades do *software* para o ensino de Juros Compostos, em articulação com outros recursos. A escolha do conteúdo Juros Compostos se justificou pela relevância do conteúdo para o cotidiano das pessoas e

pela oportunidade que as professoras teriam de reforçar conhecimentos básicos dos alunos relacionados a esse tema.

Nesse contexto, a partir do conceito de esquemas de Vergnaud, foi abordada a construção de documentos pelas professoras para o ensino de Juros Compostos articulado com o *software* GeoGebra. A Teoria da Orquestração Instrumental - TOI (TROUCHE, 2004; DRIJVERS *et al.*, 2010) contribuiu com a ampliação das reflexões sobre todo o processo e conhecimentos subjacentes que o docente revela na ação de pensar ou repensar um recurso, algo imediatamente relacionado com os invariantes operatórios introduzidos por Vergnaud.

Também foi considerada, no desenvolvimento da pesquisa, a influência do trabalho colaborativo no grau de autoeficácia (BANDURA, 1997) das professoras; autoeficácia representa o fundamento para a motivação, o bem-estar e realizações futuras do sujeito. Sobre essa questão, laochite *et al.*(2016, p. 46) consideram que: “ao optar por realizar determinada tarefa, o indivíduo também analisa suas capacidades, habilidades atuais, faz julgamentos se será capaz de realizá-la, estabelece objetivos e toma decisões sobre o que e como, de fato, será realizado”.

Sobre a definição de autoeficácia no campo da docência, destacam laochite *et al.* (2016, p. 46): “está relacionada à maneira como os professores encaram a profissão, estruturam suas aulas e até mesmo à concepção de que todos os alunos podem aprender, inclusive aqueles que apresentam dificuldades de aprendizagem”.

Assim, é interesse da pesquisa o impacto do trabalho colaborativo no grau de autoeficácia das professoras, relacionando-o com os processos de instrumentação e instrumentalização apontados na Abordagem Documental do Didático.

A seguir, apresenta-se o problema de pesquisa.

## **1.2 Problema de pesquisa**

Diante do exposto, há condições de construção da questão de pesquisa, assim como os objetivos propostos para a investigação. Fundamentado nas justificativas apresentadas, na revisão de literatura, na Abordagem Documental do Didático, nos esquemas abordados por Vergnaud e em pesquisas que contribuíram para a problemática, é apresentada a seguinte questão de pesquisa:

De que forma caracterizar a Gênese Documental de duas professoras de Matemática do Ensino Médio em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de

Juros Compostos articulado com o *software* GeoGebra?

Convém destacar que a formulação do enunciado da questão teve importante contribuição das discussões desenvolvidas no Ciclo de dez seminários em torno da Abordagem Documental do Didático (TROUCHE, 2021), promovido pela PUC-SP.

No decorrer dos seminários, foram apresentadas as noções básicas relacionadas à gênese documental: noção de recurso, documento, sistemas de recursos e esquemas, sob o prisma das dialéticas instrumentação/instrumentalização, recurso “mãe”/recurso “filho” e atividade produtiva/atividade construtiva, a partir da leitura do artigo dos autores Gueudet e Trouche. (GUEUDET; TROUCHE, 2015).

A seguir, é apresentada a hipótese da pesquisa.

### **1.3 Hipótese da pesquisa**

O envolvimento das professoras nesse trabalho colaborativo pode enriquecer os seus esquemas individuais e impactar o seu grau de autoeficácia para o ensino de Juros Compostos por meio de tecnologias digitais.

Com base na questão de pesquisa, são apresentados como objetivos:

### **1.4 Objetivo Geral**

Caracterizar a Gênese Documental de duas professoras de Matemática do Ensino Médio em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos articulado com o *software* GeoGebra.

### **1.5 Objetivos Específicos**

- Identificar os recursos que as professoras adotam, ao longo de sua trajetória documental, para o ensino de Juros Compostos e como se relacionam com eles;
- Compreender quais esquemas de utilização são elaborados, em associação com os recursos utilizados pelas professoras, na situação de reflexão do trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos;
- Identificar a possível apropriação pelas professoras de um modelo de ensino articulado com o *site* do GeoGebra, apresentado na situação de formação do trabalho colaborativo.

- Identificar os esquemas de utilização individuais e coletivos dos recursos adotados para o ensino de Juros Compostos e mobilizados na situação de implementação de aulas remotas pelas professoras.

- Identificar novos elementos que possam favorecer a continuidade do acompanhamento da evolução da documentação das professoras, na situação de confrontação do trabalho colaborativo.

- Compreender as dialéticas instrumentação/ instrumentalização, recurso “mãe”/recurso “filho” e atividade produtiva/atividade construtiva da gênese documental das professoras.

- Identificar a autoeficácia das professoras para o ensino de Juros Compostos, no decorrer do trabalho documental e implementação das aulas.

A seguir, apresenta-se a organização do trabalho.

## **1.6 Organização do Relatório**

A seguir, apresentamos a estrutura da deste relatório da tese, que foi organizado em sete capítulos, conforme a seguinte apresentação:

O Capítulo 1 - Introdução – Apresenta a justificativa da pesquisa, o problema de pesquisa, hipótese da pesquisa, o objetivo geral, objetivos específicos e esta organização.

O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico, a Abordagem Documental do Didático, bem como outras teorias que serviram de orientação para o desenvolvimento desta pesquisa.

O Capítulo 3 aborda considerações sobre a pesquisa qualitativa, o referencial metodológico, a investigação reflexiva, em um contexto de trabalho colaborativo remoto de professoras.

No Capítulo 4 são apresentadas as discussões sobre recursos tecnológicos digitais na construção de documentos para o ensino de Matemática.

O Capítulo 5 trata de considerações sobre o ensino e a aprendizagem de Juros Compostos.

O Capítulo 6 apresenta uma revisão da literatura sobre a Abordagem Documental do Didático em pesquisas no contexto de trabalho colaborativo.

O Capítulo 7 destaca a apresentação e análise dos dados.

Por fim, nas considerações finais, são apresentadas as conclusões obtidas da

análise dos dados, apontando contribuições para a Educação Matemática e sugestões para possíveis aprimoramentos, envolvendo o problema e os objetivos desta investigação.

## CAPÍTULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO

Como fundamentação teórica desta pesquisa, apresentamos neste capítulo a Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009), a qual tem como referência o trabalho documental desenvolvido pelo docente ao planejar sua aula, sendo essa documentação a base das práticas pedagógicas implementadas pelo professor e do seu aprimoramento profissional. Como base nessa teoria, identificamos os esquemas de utilização desenvolvidos no trabalho documental de duas professoras de Matemática, envolvendo recursos tecnológicos digitais, para o ensino de Juros Compostos. Na primeira seção, apresentamos as teorias que serviram de base para a construção teórica da Abordagem Documental do Didático e, na segunda seção, tecemos considerações sobre os fundamentos dessa teoria.

### 2.1 Construção teórica da Abordagem Documental do Didático

Antes de detalharmos a Abordagem Documental do Didático, é importante discutirmos alguns conceitos como artefato e instrumento, presentes na Abordagem Instrumental de Rabardel (1995). Para Folcher e Rabardel (2007), o artefato é um dispositivo utilizado como meio de ação, e o instrumento uma construção do sujeito ao longo de um processo em que o artefato transforma-se progressivamente. O artefato pode ser um dispositivo material (como exemplo, uma caneta, um compasso, uma calculadora) ou simbólico (como exemplo, uma imagem, uma representação gráfica, uma tabela, uma propriedade). Segundo Rabardel (2002), a expressão instrumento pode ser utilizada:

[...] para designar o artefato em situação, inscrito ao uso, em uma relação instrumental à ação do sujeito, como um meio dele. É somente uma primeira definição correspondente a uma abordagem minimal da noção psicológica de instrumento que corresponderá a um dos usos, o mais fraco, que nós teremos da noção de instrumento (RABARDEL, 2002, p. 39-40, tradução nossa).

Segundo Abar e Alencar (2013, p. 352), “a Abordagem Instrumental estuda os aspectos próprios que existem no artefato e no instrumento, e processos que envolvem a transformação progressiva do artefato em instrumento, denominada de Gênese Instrumental”. A Gênese Instrumental é um processo que está associado às utilidades e restrições do artefato e às ações do sujeito (saberes, vivências e habilidades). Digamos que uma calculadora financeira, por exemplo, pode ser um

dispositivo inútil e insignificante quando não há montantes e taxas de aplicação a serem calculadas, porém, no cálculo da depreciação de um bem, torna-se um instrumento bastante útil. Dessa forma, o sujeito pode desenvolver habilidades para reconhecer problemas que possam ser solucionados por um instrumento que seja adequado.

De acordo com Rabardel (2002), a Gênese Instrumental envolve dois processos: a instrumentação e a instrumentalização, definidos assim:

O processo de instrumentalização diz respeito ao surgimento e evolução de componentes relativas aos artefatos do instrumento: seleção, agregação produção e instituição de funções, desvios e catacrese, atribuição de propriedades, transformação dos artefatos (sua estrutura, seu funcionamento, etc.) que se estendem às realizações e criações de artefatos cujos limites são, portanto, difícil de determinar;

O processo de instrumentação está relacionado ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e de ação instrumentada: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução para acomodação, coordenação combinada, inclusão e assimilação recíproca, assimilação de novos artefatos aos esquemas já constituídos etc. (RABARDEL, 2002, p. 103, tradução nossa).

Consoante Abar e Alencar (2013),

O foco de interesse de Rabardel (1995) é a transformação do uso do artefato em um instrumento, propondo, então, o modelo de situações de utilização de um instrumento, composto por: *sujeito*: usuário, operador, trabalhador etc. É ele que dirige a ação psíquica sobre o objeto; *instrumento*: ferramenta, máquina, produto etc. É o mediador entre o sujeito e o objeto; *objeto*: material, real, objeto da atividade, objeto de trabalho ou outros sujeitos. É sobre ele que a ação é dirigida (ABAR; ALENCAR, 2013, p. 353).

A Gênese Instrumental procura, então, clarificar de que maneira um sujeito atua para obter um instrumento a partir de um artefato. Nesse sentido, argumenta Bittar (2011):

Consideremos um professor para o qual o *software* é desconhecido. Ao entrar em contato com este material que não conhece, não sabe manipular nem mesmo as ferramentas básicas, este *software* é, para este professor, um artefato. À medida que ele começa a desvendar o material, descobrir como ele funciona e elaborar situações de uso do *software*, o professor está desenvolvendo e agregando ao artefato esquemas de utilização e, então, o artefato é transformado, para este professor, em instrumento. Quanto mais ele usar este instrumento, mais esquemas podem ser construídos, agregados ao *software* e o professor terá, então, um novo instrumento (BITTAR, 2011, p. 161).

Dessa forma, quando o professor começa a explorar o artefato, vinculando-o a esquemas de utilização, temos o processo da instrumentação; à medida em que novos esquemas vão sendo elaborados, vinculados ao instrumento, temos o processo da instrumentalização.

Convém destacar a Teoria da Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2004;

DRIJVERS *et al.*, 2010), a qual fundamenta-se na Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995). De acordo com Trouche (2005):

Uma orquestração instrumental é o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. É sistemático porque como método, desenvolve-se numa ordem definida e com um foco determinado, podendo ser entendido com um arranjo integrado a um sistema; é intencional porque uma orquestração não descreve um arranjo existente (sempre existe um), mas aponta para a necessidade de um pensamento *a priori* desse arranjo (TROUCHE, 2005, p. 126, tradução nossa).

Desse modo, nessa teoria, por meio de uma metáfora, é feita a comparação da sala de aula com uma orquestra. Segundo Lucena, Gitirana e Trouche (2016),

A abordagem instrumental da TOI estuda o desenvolvimento dos sujeitos na utilização de artefatos, transformando-os em instrumentos, por meio dos processos de instrumentalização e instrumentação. A Teoria da Orquestração busca modelar a ação docente em um ambiente rico em tecnologias digitais que favoreça a gênese instrumental dos indivíduos, tomando por base três fases: a configuração didática, o modo de execução e o desempenho didático. As duas primeiras foram caracterizadas por Trouche (2004) e a última, por Drijvers *et al.* (2010) (LUCENA; GITIRANA; TROUCHE, 2016, p. 3).

A orquestração instrumental apresenta um elemento temporal que está associado com o desempenho didático. Um desempenho didático abarca as escolhas admitidas no decorrer do processo de ensino, conforme foi decidido na configuração didática e no modo de execução: que questão formular agora, de que forma fazer a validação de uma intervenção particular de um estudante, como tratar um elemento imprevisto da tarefa matemática ou do recurso tecnológico, ou outros propósitos que possam surgir.

Sobre o conceito de esquema, em seus estudos sobre a Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1990) destaca que esquema é a organização invariante da conduta para uma classe de situações dadas, por meio da qual se devem investigar os conhecimentos em ato do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que essa ação seja operatória.

Segundo Vergnaud (1998), um campo conceitual é, ao mesmo tempo, um conjunto de situações e um conjunto de conceitos, todos inter-relacionados. Portanto, o significado de um conceito não pode ser analisado por uma única situação e, reciprocamente, uma situação não pode ser analisada por meio de um único conceito, mas por muitos deles, criando sistemas. Com isso, o conhecimento profissional de um

professor e sua evolução estão intimamente associados com as situações em que o professor amadurece esse conhecimento.

Vergnaud (1990) considera que o sujeito observa sentido para um conceito em situações e problemas, não limitando-se a uma definição. Além disso, destaca que o conhecimento racional é obrigatoriamente operatório. Sobre as situações, ele considera que existem aquelas em que o sujeito apresenta as devidas competências para a abordagem relativamente instantânea da situação; assim como aquelas em que o sujeito não apresenta todas as competências devidas. Na primeira situação, as ações do sujeito serão mecanizadas e serão estruturadas por apenas um esquema. Na segunda situação, o sujeito é estimulado a ponderar, explorar, fazer experiências, de forma a delinear diversos esquemas que serão adaptados e recombinações. Com isso, o sujeito terá acesso a novas descobertas.

Ainda sobre o conceito de esquemas de utilização, Bellemain e Trouche (2019) pontuam que:

Um esquema é definido por Vergnaud (2009) como uma entidade composta por quatro componentes: objetivos, regras de ação, tomada de informação e controle, invariantes operatórios e inferências em situação. Os invariantes operatórios são os componentes epistêmicos dos esquemas, compostos por conhecimentos, muitas vezes implícitos, que resultam da atividade e, ao mesmo tempo, orientam a ação. Isto significa que o esquema se desenvolve durante a realização repetida de uma determinada tarefa (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019, p. 108).

Segundo Pepin e Gueudet (2020), as regras de ação geram o comportamento de acordo com as características da situação; os invariantes operatórios envolvem os conceitos em ação, que são conceitos considerados relevantes (por exemplo “diferenciação de ensino”), e teoremas-em-ação, que são proposições consideradas como verdadeiras (por exemplo, “se os alunos têm baixo desempenho, então eles precisam de mais ajuda do professor”); como possibilidades de inferências exemplificaram “nesta aula, eu preciso adaptar meu esquema de diferenciação, porque há alguns alunos com desempenho muito alto”.

Os componentes do esquema registram simultaneamente o equilíbrio da estruturação da atividade e sua capacidade de variação. As inferências podem conduzir os sujeitos a ajustar suas regras de ação às particularidades da situação; os ajustes podem provocar o aparecimento de outros invariantes operacionais, ou mesmo de outros esquemas. Convém destacar que, para uma mesma situação, um docente pode elaborar certos esquemas, no entanto outro docente pode elaborar

outros esquemas diversos. Da mesma forma, um professor pode elaborar certos esquemas em um trabalho conjunto com outros docentes e elaborar outros esquemas, no trabalho com os estudantes, para uma mesma atividade.

Algumas outras considerações sobre o conceito de esquema estão presentes na literatura como apresentamos a seguir:

De acordo com Piaget (1970, p. 42), esquema é “tudo o que é repetível e generalizável em uma ação”. O conceito de esquema de Piaget é fundamentado em iteração. Porém, Piaget relaciona as ações com a aquisição de conhecimento, observando que

Qualquer esquema dado em si não tem um componente lógico, mas os esquemas podem ser coordenados entre si, implicando assim a coordenação geral das ações. Estas coordenações formam uma lógica de ações que são o ponto de partida para a lógica das estruturas matemáticas (PIAGET, 1970, p. 42).

Na teoria de Piaget, os símbolos exercem uma função relevante na construção do conhecimento pois fundamenta-se na associação entre ação e representação e argumenta que não se deve limitar a representação à linguagem (PIAGET, 1970, p. 45).

Em sua pesquisa, Radford (2005), assim se manifesta sobre o seu conceito de esquema:

O esquema, como o estou formulando, ainda é uma ação sensorial e intelectual ou um complexo de ações. Em sua dimensão intelectual, está inserido nas categorias teóricas da cultura. Em sua dimensão sensorial, é executado ou realizado de acordo com a tecnologia da *atividade semiótica* (Radford 2002b). Ainda salvamos algumas das características da formulação kantiana - síntese figurativa no processo heurístico, a diferença entre a execução do esquema e seu resultado, sua reiteração - mas coloco-a num contexto mais amplo da consciência subjetiva do indivíduo que, em seu esforço construtivo e criativo, cresce sustentado e emoldurado pelas categorias teóricas da cultura, sua tecnologia de atividade semiótica e o modo de conhecer historicamente constituído (Radford 2003b) (RADFORD, 2005, p. 144).

Nesse aspecto, o conceito de esquema inclui outros elementos, envolvendo não somente os instrumentos que o sujeito utiliza, mas sua realidade cultural e outros recursos semióticos, como a fala e gestos que, além de simples detalhamentos breves da realidade, apresentam-se como essenciais na construção do conhecimento. Esse conceito de esquema de Radford coaduna-se com a teoria de Rabardel (2002), o qual considera um esquema de utilização como uma estrutura que organiza a atividade de um sujeito com um artefato para um determinado objetivo, sendo que os esquemas têm um aspecto individual, como esquemas de um determinado assunto ou área

temática, mas também uma dimensão social essencial.

Rabardel (1995) define os esquemas associados ao uso do artefato como esquemas de utilização (E.U.), os quais envolvem os esquemas de uso (E.U.s.) referentes ao funcionamento e manipulação do artefato e os esquemas de ação instrumental (E.A.I.) referentes à concretização e realização da atividade. A partir desses esquemas, aparecem os esquemas de atividade coletiva instrumental (E.A.C.I.), relacionados à articulação de práticas individuais em um coletivo e à associação de seus resultados para atingir metas comuns. Dessa forma, podemos dizer que o surgimento de esquemas é, essencialmente, um processo coletivo, envolvendo os usuários e os criadores do artefato e seu impacto é um processo social.

Nesta pesquisa, foram identificados esquemas de utilização individuais e coletivos em um trabalho colaborativo remoto de professoras de Matemática que desenvolveram recursos para o ensino de Juros Compostos. Coletamos e analisamos, contando com a colaboração das professoras envolvidas, informações que nos permitiram inferir sobre a evolução dos esquemas mobilizados, ao longo do tempo, por essas professoras e que impactou tanto o enfrentamento dos possíveis obstáculos inerentes ao ensino de Juros Compostos como o desenvolvimento profissional desses sujeitos.

Na próxima seção, tecemos considerações sobre os fundamentos da Abordagem Documental do Didático.

## **2.2 Considerações sobre a Abordagem Documental do Didático**

Nesta seção, abordamos aspectos relevantes sobre o referencial teórico considerado, a Abordagem Documental do Didático. Gueudet e Trouche (2015) destacam essa abordagem e exemplos de sua utilização, relativos a professores de Matemática. De acordo com esses autores:

A abordagem teórica que propomos e chamamos de abordagem documental do didático, se alimenta de vários quadros teóricos, alguns usuais em educação matemática (a teoria das situações – BROUSSEAU, 1998 - a Teoria Antropológica do Didático – CHEVALLARD, 2002 - ou teoria conceitual VERGNAUD, 1996), outros já bem estabelecidos em estudos sobre a inclusão de instrumentos em Didática (RABARDEL teoria ergonômica - 1995), outras abordagens, finalmente, mais diretamente relacionadas ao nosso propósito, no campo da engenharia documental (PEDAUQUE, 2006, 2007) (GUEUDET; TROUCHE, 2015, p. 6).

A Abordagem Documental do Didático, segundo Gueudet e Trouche (2009),

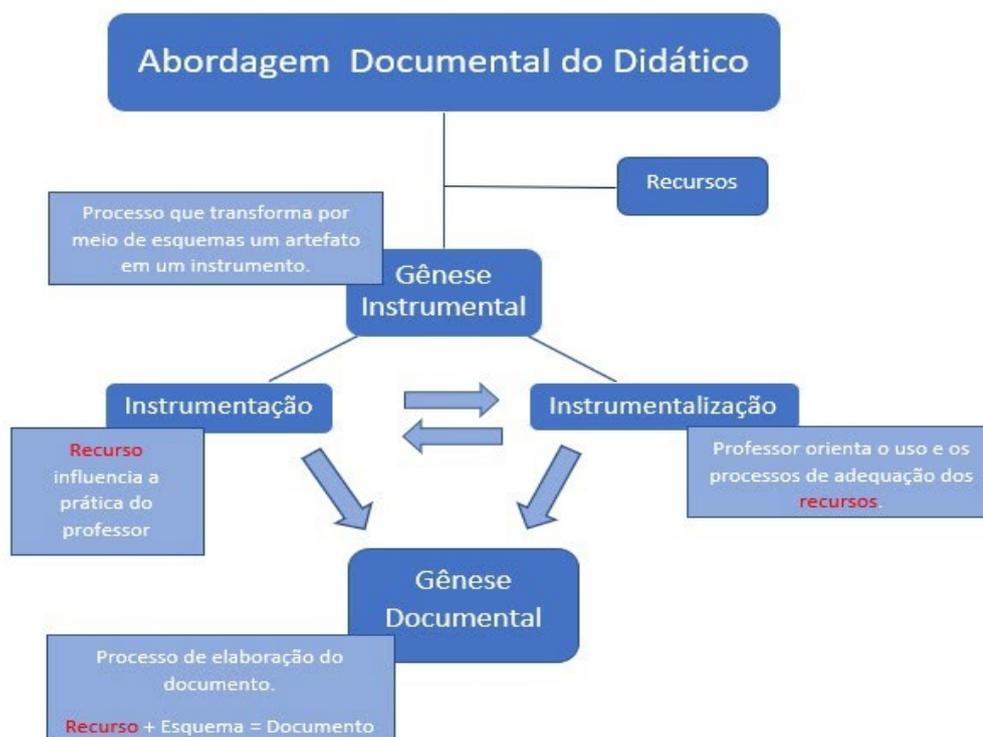
tem como referência o trabalho documental desenvolvido pelo docente ao planejar sua aula, sendo essa documentação a base das práticas pedagógicas e didáticas implementadas pelo professor e do seu aprimoramento profissional. Esse trabalho documental é um grupo de procedimentos em que os docentes modificam de forma considerável seus recursos periodicamente, em conexão com os esquemas de utilização, obtendo como resultado um documento.

O trabalho documental dos professores impulsiona uma Gênese Documental, a qual, segundo Gueudet e Trouche (2015), é o processo de transformação de recursos em documentos. Desse modo, Abar (2019) considera que a Gênese Documental:

[...] é um processo contínuo e ocorre quando os recursos passam ao status de documento diante dos esquemas de utilização adotados e da experiência do professor, que envolve conhecimentos prévios do ponto de vista matemático e didático do presencial (ABAR, 2019, p. 222).

Na Gênese Documental, os recursos norteiam a prática do professor (processo de instrumentação) e, reciprocamente, o professor começa a comandá-los, adaptando-os e modificando-os à medida que vão sendo utilizados (processo de instrumentalização). A Figura 1 apresenta um esquema desse quadro teórico:

Figura 1 – Esquema sobre a Abordagem Documental do Didático



Fonte: Dias, Almeida e Abar (2021, p. 8)

Em sua pesquisa que teve como objetivo apresentar um estado de conhecimento de pesquisas publicadas na Língua Portuguesa, no contexto da Abordagem Documental do Didático, Dias, Almeida e Abar (2021) enfatizam que:

A construção de um documento é algo contínuo e passa por diferentes fases, a escolha do recurso, sua adaptação, sua utilização e após análise *a posteriori*, sua reformulação, se necessário. Essa construção se dá ao longo de toda carreira docente, os documentos vão sendo constantemente renovados apoiados pelo surgimento de novos recursos, mudanças na grade curricular, metodologia de ensino da instituição, entre outros fatores. A Abordagem Documental do Didático vem com a perspectiva de compreensão do trabalho docente fundamentada na noção de recursos e se caracteriza como um trabalho de pesquisa a longo prazo (DIAS; ALMEIDA; ABAR, 2021, p. 7).

Conforme os estudos de Adler (2000), o termo recurso aqui é interpretado de maneira ampla, designando tudo o que contribui com a prática do docente e seu aprimoramento pedagógico, como um texto, as diretrizes curriculares, um *notebook*, um aplicativo, assim como um vídeo produzido pelos alunos ou uma atividade elaborada por outro docente. A Figura 2 ilustra o processo da Gênese Documental:

Figura 2 - Representação da Gênese Documental



Fonte: Adaptado de Gueudet e Trouche (2015, p. 8).

A Gênese Documental pode ser representada, de uma forma bem elementar, pela equação: Documento = recurso + esquema de utilização.

Segundo Assis e Trouche (2021), existem três dialéticas da gênese

documental: a dialética instrumentação/ instrumentalização leva em conta a relação entre os docentes e os recursos de seu ensino; a dialética recurso “mãe”/recurso “filho” ocorre entre todos os recursos disponíveis que o docente adquire para o ensino (os recursos mãe) e os recursos obtidos de sua transformação (os recursos filhos); a dialética atividade produtiva/atividade construtiva refere-se à relação entre atividade produtiva (o docente desenvolve recursos para o ensino) e atividade construtiva (o docente produz novos conhecimentos).

No desenvolvimento do seu trabalho, Gueudet e Trouche (2015) baseiam-se, em especial, em dois dispositivos experimentais associados com a documentação dos professores: o *software* Mathenpoche denotado por MEP, referente aos recursos *on line* e outro referente a dispositivos de treinamento, o SFoDEM<sup>4</sup>. Foram realizadas entrevistas que mostraram a relevância do trabalho documental dos professores, a diversidade de fontes que os favoreceram, o caráter evolutivo (relativo às tecnologias digitais), a complexidade resultante e o impacto de elementos individuais e coletivos.

Gueudet e Trouche (2015) apresentam um exemplo com uma professora do 9º ano do ensino fundamental referente à introdução do conceito de seno. No ano anterior, ela havia utilizado o *software* Geoplan, no ano considerado ela havia utilizado o MEP. Várias regras de ação surgiram. Parte delas estavam ligadas à organização didática adotada: o enunciado de uma tarefa (para a introdução do conceito de seno) é apresentado para toda a turma por um projetor de vídeo; a professora manipula o computador; os estudantes devem responder oralmente a vários questionamentos e, ao mesmo tempo, preencher as lacunas deixadas em um papel. Outras estavam associadas aos conteúdos específicos em questão: a demonstração do teorema de Thales é um dos elementos necessários.

Os autores esclarecem que, nesse exemplo, o invariante operatório que manifesta a utilidade de concluir uma demonstração geométrica (comprovando a validade da solução por meio de diversas figuras diferentes) extrapola a classe de situações concernente ao problema de ensino: "introdução de seno no 9º ano". Esse invariante é provavelmente um elemento de diversos documentos da docente, para o ensino da geometria em várias classes.

---

<sup>4</sup> Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques

Os autores destacam que o trabalho documental impulsiona a prática profissional dos professores; ele se desenvolve tanto fora da sala de aula quanto em sala de aula. Nesse sentido, as gêneses documentais formam a base do desenvolvimento profissional. As questões coletivas do trabalho documental não impactam todos os docentes da mesma forma. Um professor pode oferecer recursos para os demais professores, mas os mecanismos de compartilhamento, a cooperação ou colaboração não ocorrem rapidamente.

Como as investigações realizadas nesta tese relacionam-se a uma pesquisa que abarca um coletivo de professores trabalhando colaborativamente, destacamos o processo de Gênese Documental da comunidade. Sobre esse processo, considera Teixeira (2014):

[...] Gueudet e Trouche (2012) propõem a expressão: Gênese Documental da comunidade para descrever o processo de seleção, criação e partilha de recursos para alcançar os objetivos de ensino da comunidade. O resultado deste processo, a documentação da comunidade, é composto pelo repertório dos recursos partilhados e a partilha associada ao conhecimento (o que os professores aprendem a partir da concepção, implementação e discussão dos recursos). Além disso, esses recursos e esse conhecimento evoluem juntos ao longo do tempo. Os autores caracterizam a dualidade entre participação e documentação: por um lado, a documentação é um resultado da participação e, por outro lado, o repertório partilhado é o conhecimento associado que apoia a participação de cada membro no objetivo partilhado. A interpretação desses processos em termos de gênese aponta para a dualidade entre duas gêneses: a gênese da comunidade (o surgimento do contrato mútuo e empreendimento conjunto), e a Gênese Documental da comunidade (a criação de um repertório partilhado e a construção de conhecimento partilhado) (TEIXEIRA, 2014, p. 52).

Ocorrem interações importantes entre o participante e a Gênese Documental da comunidade. Cada participante incorpora conhecimento a partir do coletivo do qual faz parte e o conhecimento compartilhado é produzido pela Gênese Documental da comunidade. A documentação da comunidade não é a união da documentação dos seus participantes. A ação dos professores em um coletivo cria elementos (páginas na *internet*, instrumentos para a prática docente, etc.) que um professor, de forma isolada, não pode elaborar. Da mesma maneira, a documentação dele supera o que ele poderia conseguir do coletivo do qual faz parte. Por exemplo, o que um docente assimila das suas articulações com os seus alunos não é inteiramente partilhado com o coletivo.

Nesse aspecto, segundo Wenger (2001), um ponto importante da teoria de Comunidade de Prática é a negociação de significados, a qual envolve os processos de participação e reificação. Benites-Bonetti, Paulin e Richit (2018, p. 215)

argumentam que “a participação envolve a relação com outros membros da comunidade, e por isso, pressupõe todo tipo de relação, seja ela conflituosa, harmônica, íntima, política, competitiva ou colaborativa”. Miskulin, Silva e Rosa (2006, p. 5) enfatizam que a reificação “é uma maneira geral para se referir ao processo de dar forma à experiência, produzindo objetos que moldam essa experiência em uma coisa concreta”. Assim, a reificação pode envolver vários mecanismos como representar, descrever, codificar, decifrar, etc.

Desse modo, uma Comunidade de Prática é um coletivo de sujeitos envolvidos em processos de participação e reificação de saberes com base em um domínio comum e que, de forma colaborativa, compartilham conhecimentos e aprimoram a sua ação. Outrossim, a praticidade de comunicação pela *web* permite que essa abordagem leve em conta o aparecimento de diversas modalidades de trabalho coletivo de docentes: redes, agremiações *on-line* ou, também, agrupamentos mais ou menos rigorosos. A teoria das comunidades de prática (WENGER, 1998) e suas ideias de participação, negociação e reificação mostrou-se especialmente interessante para estudar o desenvolvimento de recurso por comunidade de professores e os processos de aprimoramento profissional relacionados.

Gueudet e Trouche (2015, p 23) falam do repertório da comunidade, “produzido pelo processo de reificação, para designar os recursos materiais evidenciados pela comunidade (o viveiro de recursos), mas também palavras, gestos, histórias, símbolos, atitudes, tudo o que a comunidade reconhece como parte do patrimônio comum”. A incrementação de repertório, em cada coletivo, está ligada ao aparecimento de uma estrutura comum de recursos, que denominamos de modelo, o produto de um mecanismo de modelagem do trabalho documental. Os autores tentam delinear os pontos de aproximação ou divergência entre as gêneses da comunidade e individuais.

Gueudet e Trouche (2015) consideram que, na gênese do sistema documental de um indivíduo membro de uma comunidade de prática, a comunidade intervém (pelo menos) em quatro aspectos:

Contribui trazendo novos recursos para o professor; contribui para a evolução dos recursos do professor através da implementação de alguns, enriquecendo-os com novos elementos; propõe novas classes de situações (por exemplo, um grupo do SFoDEM introduziu uma nova classe de situações para alguns de seus membros: gerenciar a troca via *internet* de pistas de resolução de problemas), ou participar da reconfiguração das classes de situações existentes; propõe ou critica os usos de recursos, e assim, participa

do desenvolvimento de seus próprios documentos (GUEUDET; TROUCHE, 2015, p. 31).

As interações intensas entre o trabalho documental do membro e o trabalho documental da comunidade deviam estar associadas ao projeto SFoDEM: era um dispositivo formativo, por isso direcionado para a obtenção de resultados no trabalho individual do docente; era um dispositivo que se preocupava com a evolução de comunidades de prática, a evolução de relações intensas entre distintas comunidades de prática e, além disso, a ponderação sobre a vivência individual e coletiva para uma disponibilização a outros indivíduos.

Os autores argumentam que, em todos os tópicos, as gêneses documentais individuais e coletivas se harmonizam: os recursos tecnológicos favorecem um grande desenvolvimento, ocasionando outros tópicos coletivos de trabalho documental; a dialética participação/reificação presente nas comunidades de prática favorece o entendimento da interação entre o envolvimento em um coletivo e a elaboração de um repertório associado; em relação às comunidades de prática dos professores, as gêneses documentais do indivíduo e da comunidade mostram-se fortemente entrelaçadas; no caso do SFoDEM, ficou clara a relevância dos modelos documentais da comunidade, como geradores e resultados do trabalho e de colaboração documental.

Os autores propõem um novo ponto de vista, considerando o trabalho documental como o núcleo da atividade dos docentes. A propagação dos recursos digitais para os docentes ocasiona uma transformação do trabalho documental dos professores. Entender e ajudar essa transformação representa um problema essencial para novas pesquisas em educação e didática.

Com relação à utilização de novos recursos pelo professor, comenta Jordão (2009):

O professor é o primeiro ator que deve mudar sua forma de pensar e agir na educação, pois existe uma grande tendência de repetição, em sala de aula, dos modelos que funcionaram na aprendizagem deste. Por este motivo, a formação do professor deve ocorrer de forma permanente e para a vida toda. Sempre surgirão novos recursos, novas tecnologias e novas estratégias de ensino e aprendizagem (JORDÃO, 2009, p. 12).

Nesse sentido, Oliveira Netto (2005) considera que:

Dentro desta perspectiva, a formação dos educadores deve favorecer uma reflexão sobre a relação entre teoria e prática e propiciar a experimentação de novas técnicas pedagógicas. Isso não significa jogar fora as velhas práticas, mas, sim apropriar-se das novas para promover a transformação necessária (OLIVEIRA NETTO, 2005, p. 125).

A percepção do professor sobre a relevância de sua formação é fundamental para que sejam descartados os padrões obsoletos de educação e para que o professor procure, continuamente, ajustar suas metodologias de ensino, seus documentos às novidades tecnológicas. Assim, em relação ao trabalho colaborativo remoto com o uso de recursos tecnológicos digitais desenvolvido nesta pesquisa, ocorreu, além da produção compartilhada de novos saberes, o desenvolvimento profissional das docentes envolvidas. Nesta pesquisa, caracterizamos a Gênese Documental de duas professoras de Matemática do Ensino Médio em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos articulado com o *software* GeoGebra.

Deste modo, apresentamos neste capítulo o referencial teórico que norteou a pesquisa e, no próximo capítulo, exibiremos o referencial metodológico.

## CAPÍTULO 3 – REFERENCIAL METODOLÓGICO

Nesta pesquisa de natureza qualitativa, adotamos como referencial metodológico a investigação reflexiva proposta por Gueudet e Trouche (2010), em um contexto de trabalho colaborativo de professoras.

Na primeira seção, tecemos considerações sobre a natureza da pesquisa qualitativa; na segunda seção, destacamos os princípios da metodologia de investigação reflexiva; na terceira seção, discutimos a importância da associação entre pesquisa acadêmica e trabalho colaborativo de professores; na quarta seção, apresentamos reflexões sobre a pesquisa colaborativa; na quinta seção, apresentamos as etapas da pesquisa colaborativa; na sexta seção, discorremos sobre a diferença entre colaboração e cooperação; na sétima seção, apresentamos os procedimentos metodológicos da pesquisa; na oitava seção, abordamos as técnicas e instrumentos de coleta de dados e, na nona seção, apresentamos os sujeitos da pesquisa e mudanças dos seus sistemas de recursos.

### 3.1 Considerações sobre pesquisa qualitativa

Em relação à pesquisa qualitativa, a preocupação básica não está em determinar variáveis e medi-las, mas em compreender como o contexto é construído pelos participantes vistos como atores sociais. Araújo e Borba (2019) enfatizam a relevância da técnica da triangulação para as investigações que utilizam a abordagem qualitativa:

Particularmente, a triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados. Os principais tipos de triangulação são a de fontes e a de métodos. Quando checamos, por exemplo, as informações obtidas em uma entrevista com as atas de uma reunião sobre um mesmo assunto, estamos fazendo uma triangulação de fontes. Por outro lado, se observarmos o trabalho de um grupo de alunos e depois entrevistarmos seus componentes sobre o trabalho desenvolvido, realizaremos uma triangulação de métodos (ARAÚJO; BORBA, 2019, p. 41).

Desse modo, o investigador desenvolve os seus pareceres a partir não somente de observações, mas adota, também, o procedimento da entrevista para averiguar possíveis pormenores ou para entender melhor determinado evento verificado no decorrer das observações, conferindo mais credibilidade à sua investigação.

Araújo e Borba (2019, p. 42) ainda consideram que “poderíamos, então, estender a noção de triangulação em uma pesquisa para a triangulação na pesquisa de um grupo, que se realiza, dentre outras formas, por meio das pesquisas de cada um de seus membros que, por sua vez, estão relacionadas entre si”. Com essa variedade de procedimentos, os estudos realizados por um determinado grupo de pesquisa ganham mais credibilidade, de modo que uma investigação não seja considerada de forma independente, mas sim associada a outras investigações.

Segundo Cai *et al.* (2019b), frequentemente os investigadores coletam dados insatisfatórios para desconsiderar explicações diferentes para os resultados. Assim, uma determinada pesquisa qualitativa pode não adotar adequadamente métodos como a triangulação para confrontar e avaliar pareceres finais. Nesse sentido, os autores consideram duas fases contínuas e diferenciadas na dinâmica de escolha, implementação e aprimoramento dos métodos para uma pesquisa. Sobre a primeira fase, assim os autores se manifestam:

A primeira fase consiste na seleção inicial e a descrição dos métodos de pesquisa por meio de (a) garantir que as questões de pesquisa sejam especificadas de forma tão precisa quanto possível; (b) formular predições ou hipóteses (e fazendo próprias hipóteses implícitas de um explícito) sobre respostas esperadas para as perguntas com base no desenvolvimento teórico anterior, a pesquisa empírica, e as próprias experiências anteriores; (c) imaginar os tipos de dados que serão necessários para testar essas hipóteses e responder às perguntas de pesquisa; e (d) determinar as melhores maneiras de reunir esses tipos de dados e analisá-los para que as hipóteses possam ser diretamente abordadas. Esta fase também pode incluir imaginar explicações alternativas para os dados-alternativas às hipóteses iniciais (CAI *et al.* 2019b, p. 345, tradução nossa).

Com isso, podemos assegurar que os métodos selecionados possibilitarão a obtenção de dados que possam tratar das diferentes hipóteses e, conseqüentemente, fundamentar argumentos razoáveis e que não suscitem qualquer dúvida de que uma hipótese tem uma chance maior de validade do que as outras. Com relação à segunda fase, os autores argumentam que:

A segunda fase envolve breves ciclos iterativos de testagem da escolha dos métodos e refiná-los para garantir os métodos mais produtivos a serem utilizados para abordar as questões de pesquisa. Experimentar os métodos de recolha e análise de um pequeno conjunto de dados pode ajudar os pesquisadores a determinar rapidamente se os métodos precisam ser refinados (CAI *et al.* 2019b, p. 346, tradução nossa).

Dessa forma, as atividades definidas podem ser adaptadas para proporcionar retornos informativos ou as questões da entrevista podem ser reelaboradas. Também, os métodos talvez precisem ser adaptados, de forma a produzir um quantitativo

adequado de dados para tratar as questões do estudo. As atividades talvez precisem ser aperfeiçoadas para produzir os dados mais importantes direcionados às respostas procuradas.

Numa perspectiva de futuro, Cai *et al.* (2019b) sugerem um caminho alternativo para a investigação em educação matemática que articula parcerias (professor-pesquisador) que atuam na resolução de problemas práticos por ciclos iterativos de inovação em tarefas e lições. Convém destacar que, ao contrário do caminho tradicional, o caminho alternativo pressupõe que a potencialização das vantagens da investigação para a prática não ocorre por meio de uma única pesquisa ou de uma pequena quantidade de pesquisas diferentes, mas por uma sequência de pesquisas interligadas.

É necessária uma boa justificativa dos métodos utilizados, assim como uma rigorosa associação dos métodos aos outros elementos da pesquisa para a produção de respostas confiáveis e relevantes e para a elaboração de um relatório adequado da pesquisa.

A seguir, complementando, destacamos os princípios da metodologia de investigação reflexiva.

### **3.2 Metodologia de investigação reflexiva**

Gueudet e Trouche (2010) elaboram para a investigação do trabalho documental dos professores a metodologia denominada, investigação reflexiva, a qual integra os seguintes princípios básicos: princípio de longa duração de acompanhamento; princípio de monitoramento em qualquer lugar; princípio da ampla coleção de recursos materiais utilizados e produzidos no trabalho documental e princípio do acompanhamento reflexivo do trabalho documental. Trouche, Gueudet e Pepin (2018) apresentam, depois, um novo princípio: princípio de confrontação das visões das professoras sobre seu trabalho de documentação e a materialidade desse trabalho.

Dessa forma, pesquisa-se a ação e o aperfeiçoamento profissional dos docentes, percebendo os tópicos de estabilidade e avanços do trabalho documental no intervalo considerado. É relevante que o investigador leve em consideração, ao máximo, o trabalho do professor, tanto na situação de sala de aula como em outras situações diferentes (como exemplo, na residência do professor, nas reuniões com

outros docentes, na biblioteca). Relaciona-se, profundamente, o docente à obtenção dos dados da investigação, no sentido de uma vasta coleta de dados e acompanhamento em diferentes situações; também acontece um comprometimento dinâmico do docente, o que favorece uma atitude reflexiva, pois ele é conduzido a detalhar sua própria atividade, compartilhar com os outros. Sobre isso, esclarecem Bellemain e Trouche (2019):

Não trata, é claro, de substituir o trabalho de coleta de dados, que é da responsabilidade do pesquisador, por um trabalho de coleta de dados realizado pelo próprio professor. Mas para o pesquisador se trata de recuperar, graças à colaboração do professor, os elementos de continuidade de seu trabalho documental em uma diversidade de lugares e momentos. Uma hipótese forte é que essa solicitação do professor sobre seu próprio trabalho documental irá estimular sua reflexão e lhe permitirá entender melhor a si mesmo, a estrutura dos seus próprios recursos (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019, p. 121).

Percebe-se que os elementos principais da investigação reflexiva não são apenas o pesquisador e o docente: a investigação reflexiva pode se basear também na articulação entre docentes e entre pesquisadores; por exemplo, nas entrevistas desenvolvidas nessa concepção coletiva, dois investigadores podem questionar dois docentes que atuam juntos frequentemente, de maneira que os docentes possam complementar reciprocamente o detalhamento de seus sistemas de recursos, em razão de um considerável conhecimento entre as partes.

Com essa metodologia, podem-se adotar diversas ferramentas, em especial: as cartografias reflexivas desenvolvidas pelo docente relativas ao seu sistema de recursos; o diário de bordo, no qual o docente registra, por um certo período, a ocasião e o ambiente onde seu trabalho documental se desenvolveu, os sujeitos envolvidos, os propósitos desse trabalho, os recursos adotados e os recursos desenvolvidos. O período considerado pode ser, por exemplo, o da elaboração e realização de uma aula. Dessa forma, o investigador é conduzido a estabelecer com o docente um contrato metodológico claro, pelo o qual as respectivas responsabilidades do investigador e do docente são bem definidas. Sobre isso, Trouche *et al.* (2020) consideram que:

O envolvimento ativo do professor é uma necessidade prática, pois é ele quem tem acesso direto ao seu trabalho de documentação (além da observação direta do pesquisador). Ele também fornece uma posição reflexiva, levando o professor a uma atitude introspectiva, tornando às vezes visível o que poderia ser recursos ou associações ocultos em seu sistema de recursos. Esse acompanhamento a longo prazo e estreitado de trabalho de documentação de professores deve ser, na medida do possível, claramente apresentado ao professor, o que o pesquisador está solicitando e com qual finalidade. Essa necessidade conduziu Sabra (2016) a propor a noção de

contrato metodológico, vinculando um professor e um pesquisador que estuda seu trabalho documental (TROUCHE *et al.*, 2020, p. 8).

Adotamos, portanto, essa metodologia explicitada para o desenvolvimento da pesquisa em um ambiente de trabalho colaborativo remoto de professoras de Matemática do Ensino Médio com a utilização de tecnologias digitais. Destacamos a importância da participação ativa do investigador, o qual teve contato com o trabalho documental das professoras, compartilhando de suas reflexões e, fundamentado nos princípios da investigação reflexiva, selecionou técnicas e instrumentos de coleta de dados adequados ao contexto da pesquisa.

A seguir, destacamos a pesquisa acadêmica associada ao trabalho colaborativo de docentes.

### **3.3 A pesquisa acadêmica associada ao trabalho colaborativo de docentes**

De acordo com Cai *et al.* (2019a), existe uma associação de causas interligadas para o distanciamento entre pesquisa e prática: falta de preocupação com os verdadeiros problemas de ensino pelos professores; desconhecimento da dimensão do esclarecimento que os docentes necessitam para aprimorar sua ação; pouco entendimento do impacto dos contextos sobre a viabilização e eficácia de procedimentos próprios de ensino; falta de um processo para elaborar uma base de conhecimento partilhada para ensino; limitações institucionais que desestimulam investigadores e docentes do desenvolvimento de parcerias frutíferas e sustentáveis; e uma cultura que determina as funções profissionais de docentes e investigadores, impulsionando-os a escolher o caminho convencional de investigação e desestimulando-os de aproveitar outros.

Por esses motivos, destacamos a importância de se utilizar caminhos de pesquisa que enriquecem as conexões entre escola e universidade, trazendo benefícios para a prática do professor, oportunizando a elaboração de novos entendimentos sobre as ações realizadas na escola, estabelecendo um engajamento da universidade com a busca de respostas aos desafios observados no contexto escolar. Assim, ocorre o envolvimento entre investigador externo e professor ou coletivo de professores, de forma que toda investigação é conduzida *com* o docente e não *para ele*, propiciando a formulação conjunta de saberes e intervenção no contexto focado. O trabalho colaborativo apresentado nesta pesquisa está

enquadrado nessa proposta.

Sobre a definição de Trabalho Colaborativo, Pinto e Leite (2014), assim se manifestam:

[...] trabalho em conjunto (dois ou mais sujeitos) com benefício para o desenvolvimento profissional dos envolvidos, visando ao alcance do seguinte objetivo comum: a formação integral dos estudantes, em que a aprendizagem e a ampliação do êxito são as metas. O conceito pressupõe apoio mútuo, interação produtora de conhecimentos e de saberes e concretização de ações conjuntas entre os atores escolares (PINTO; LEITE, 2014, p. 148).

Considerando-se as práticas que são valiosas à associação entre pesquisa acadêmica e trabalho colaborativo de docentes, procura-se, além de entender os desafios da escola ou das ações em sala de aula, conduzir o professor ao entendimento e desenvolvimento de novas alternativas a serem adicionadas às suas práticas. No decorrer da investigação teórico-metodológica e da elaboração de saberes, valoriza-se o debate sobre princípios e ideias, possibilitando que o trabalho contribua, de forma considerável, para o professor e para o investigador. Pela articulação entre investigador e professor, ambos verificam quanto e de que maneira podem trabalhar em parceria.

Nesse sentido, Horikawa (2008) considera a pesquisa colaborativa:

[...] como uma escolha metodológica que pode propiciar, no contexto escolar, um espaço permanente de reflexão, no sentido de se analisarem as práticas discursivas da sala de aula e investigar suas relações com as teorias de ensino-aprendizagem e os objetivos traçados pelos agentes do trabalho pedagógico, encontrando-se aí os descompassos entre a meta pretendida e o trabalho efetivamente realizado (HORIKAWA, 2008, p. 25).

O compromisso do investigador consiste em ser o mediador de todo o trabalho. Embora seja um trabalho coparticipativo, o investigador precisa garantir que as práticas sejam consensuais, assegurando um ambiente propício a questionamentos, debates e ajustes. A partir do compromisso do investigador, ocorre o envolvimento do professor num processo inusitado que envolve avaliação individual e coletiva de ações repetidas, continuamente, na sala de aula. Considerando que a participação do professor no trabalho seja de livre escolha, a colaboração envolve uma reunião de desejos e problematizações, que podem não se alinhar, mas que são orientados em direção a uma meta final.

A seguir, apresentamos reflexões sobre pesquisa colaborativa.

### **3.4 Reflexões sobre pesquisa colaborativa**

Ainda sobre pesquisa colaborativa, destacam Desgagné *et al.* (2002):

[...] a pesquisa colaborativa está inscrita em um conjunto de práticas de pesquisa de caráter participativo com relação aos professores e que dão origem a nomes diferentes: pesquisa-ação, pesquisa colaborativa, pesquisa-ação colaborativa, pesquisa participativa, pesquisa em parceria, etc. As fronteiras entre essas diferentes identidades de práticas de pesquisa (e entre diferentes práticas dentro da mesma identidade), não são impermeáveis e não precisam ser (DESGAGNÉ *et al.*, 2002, p. 35, tradução nossa).

Essas práticas de pesquisa expressam especificidades dos que consideram a participação de professores nas investigações como fator primordial para a evolução de saberes ligados à prática e, também, à evolução da própria prática.

Segundo Desgagné *et al.* (2002), o desafio colaborativo não será definido de acordo com uma participação de profissionais em tarefas de pesquisa, mas na medida em que duas lógicas, “questionamento prático” e “pesquisa formal”, cruzam-se no curso da atividade reflexiva.

Nesse aspecto, conforme Desgagné *et al.* (2002), certifica-se que a prática explorada tenha relevância para os profissionais que realizam seu “questionamento prático”, como para os pesquisadores que o tornam uma oportunidade para uma “investigação formal” (o que chamamos de estágio de cosituação); garante-se que o próprio processo de reflexão possa ser definido igualmente em termos de uma abordagem de desenvolvimento profissional para profissionais como um dispositivo de coleta de dados para pesquisadores (o que chamamos de estágio de cooperação), atividade que permite a co-construção do conhecimento sobre a prática; por fim, garante-se que os produtos do processo e sua divulgação tenham benefícios para a comunidade de prática como para a comunidade de pesquisa (o que chamamos de estágio de coprodução).

Convém destacar que o prefixo “co”, nas chamadas etapas de cosituação, cooperação e coprodução, não indica que os professores e pesquisadores façam tudo juntos, mas que em cada etapa da pesquisa, as duas lógicas sejam consideradas. A pesquisa colaborativa coloca o pesquisador em contexto de co-construção de um objeto de conhecimento com os professores, podendo ser considerada, ao mesmo tempo, como uma prática de pesquisa e de formação. Segundo Ibiapina (2008),

Quando o pesquisador aproxima suas preocupações das preocupações dos professores, compreendendo-as por meio da reflexividade crítica, e proporciona condições para que os professores revejam conceitos e práticas; e de outro lado, contempla o campo da prática, quando o pesquisador solicita a colaboração dos docentes para investigar certo objeto de pesquisa, investigando e fazendo avançar a formação docente, esse é um dos desafios colaborativos, responder as necessidades de docentes e os interesses de

produção de conhecimentos. A pesquisa colaborativa, portanto, reconcilia duas dimensões da pesquisa em educação, a produção de saberes e a formação continuada de professores. Essa dupla dimensão privilegia pesquisa e formação, fazendo avançar os conhecimentos produzidos na academia e na escola (IBIAPINA, 2008, p. 114-115).

Nesse aspecto, a construção coletiva de metas, das etapas do trabalho colaborativo, das tarefas a serem realizadas com os alunos são necessárias para a aproximação entre teoria e prática, enfatizando a reunião de vivências e saberes que pode ser muito favorável.

No entanto, não há necessidade de que todas as atividades sejam inteiramente realizadas coletivamente, podem ser realizadas por grupos, contanto que haja uma combinação prévia. Com esse agrupamento, investigador e professor podem ter uma certa liberdade no trabalho, encarando desafios, fazendo escolhas, ajustando práticas anteriormente realizadas que podem não se adequar à realidade atual. Com o exercício da liberdade, cada participante colabora com o que tem mais afinidade e experiência. O investigador, por exemplo, pode abordar questões relacionadas às bases teóricas que orientarão o processo, enquanto o professor é quem melhor compreende a realidade escolar e de sua sala de aula.

Em relação à conexão entre pesquisa e prática do trabalho colaborativo, Gasparotto e Menegassi (2016) argumentam que

[...] ao adquirir novos conhecimentos, não se deve esperar que o professor faça uma transposição direta para a sua prática. As novas informações são, na verdade, incorporadas, somadas a conhecimentos e experiências anteriores. Isso não pode ser desconsiderado. É justamente o não apagamento do sujeito do contexto macro e micro em que está inserido que proporciona a conexão teoria e prática de maneira consistente, com ações que efetivamente possam ser implementadas (GASPAROTTO; MENEGASSI, 2016, p. 955).

Também é importante destacar-se a necessidade de que as reuniões entre investigador e professor ocorram durante todo o processo, a fim de que se estabeleçam articulações e acertos. Essas reuniões podem envolver uma análise teórico-metodológica, construção coletiva de práticas ou tarefas, debate sobre o desenvolvimento das tarefas, momento avaliativo e reavaliativo, ajustes de metas ou de tarefas. As reflexões precisam ser registradas, pois consistem num elemento importante para estudo da construção e assimilação de novos saberes.

De acordo com Corazza *et al.* (2017, p. 475), na pesquisa colaborativa os professores da educação básica “se tornam co-autores na constituição e análise dos dados, na construção coletiva de conhecimentos ligados ao ensino, à aprendizagem

dos alunos”. Como as fases da pesquisa vão sendo elaboradas no transcorrer do trabalho de natureza coparticipativa, coletam-se todos os registros, tendo impacto tanto na etapa final da investigação, quanto no entendimento da evolução do trabalho e nas escolhas que precisem ser feitas. No final da investigação, a partir das anotações, áudios, vídeos, planejamentos, tarefas e mapas de experiência que foram cautelosamente coletados, deve-se fazer o reconhecimento daqueles que serão importantes para a análise dos dados.

A seguir, são apresentadas as etapas da pesquisa colaborativa.

### **3.5 Etapas da pesquisa colaborativa**

Bortoni-Ricardo (2009) apresenta uma proposta para implementação da pesquisa colaborativa, tendo como primeira etapa a elaboração de perguntas exploratórias que norteiam a ação do investigador, iniciando o desenvolvimento do trabalho. Foi proposta uma observação piloto que permitiu identificar o espaço em que a investigação seria desenvolvida, a construção do objetivo geral e de objetivos específicos, o levantamento de hipóteses sobre os resultados da pesquisa a ser desenvolvida e a identificação do contexto da investigação, por meio da coleta dos registros realizados por observação, entrevista, gravações, fotos, etc.

A autora também destaca como etapa essencial do trabalho colaborativo a interação entre os participantes, pela qual se assimilam e desenvolvem teorias e práticas, ocorrendo durante toda a pesquisa. Mais importante do que o conteúdo da interação é a forma como ela se desenvolve.

Outra etapa importante, segundo a autora, é a avaliação, a qual também ocorre durante todo o processo da pesquisa. As reuniões entre investigador e professor devem propiciar o levantamento do que foi favorável ou desfavorável no desenvolvimento do trabalho. Além disso, como resultado da avaliação, a redefinição de objetivos e discussão de elementos favoráveis e desfavoráveis podem promover ajustes nas ações. A autora ainda enfatiza que é necessário o investigador e o professor realizarem seus próprios registros sobre a evolução do trabalho. Esses registros podem favorecer novas práticas, pela disponibilização dos resultados da pesquisa para outros profissionais.

A ordem das etapas mostrada acima tem o fim meramente didático de nortear o trabalho do investigador no desenvolvimento da pesquisa, haja vista que várias

delas podem aparecer ao longo de todo o processo.

Na próxima seção, tecemos considerações sobre colaboração e cooperação.

### 3.6 Considerações sobre colaboração e cooperação

Fiorentini (2019), fazendo um esclarecimento de que nem todo trabalho coletivo pode ser considerado um trabalho colaborativo, argumenta que:

Para mostrar que nem todo trabalho coletivo é autenticamente colaborativo, Hargreaves (1998) desenvolve os conceitos de colegialidade artificial (colaboração não espontânea nem voluntária; sendo compulsória, burocrática, regulada administrativamente e orientada para objetivos estabelecidos em instâncias de poder; sendo previsível e fixa no tempo e espaço) e de balcanização (colaboração que divide) (FIORENTINI, 2019, p. 55).

A balcanização pode ser descrita pela segmentação do quadro de professores em pequenas equipes que pouco compartilham e se articulam, podendo, inclusive, haver competitividade entre eles. Nesse contexto pode acontecer que algumas dessas equipes sejam, dentro dos seus limites, grupos colaborativos. A balcanização pode produzir: a constituição de equipes isoladas que sejam mais aconchegantes, acolhedoras e benevolentes; comodismo em alguns participantes, os quais deixam de construir suas próprias trajetórias; a constituição de colegiados burocráticos, inférteis e subordinados administrativamente, caracterizando-se como estratégia de proteção de interesses privados.

Em seus estudos, Fiorentini (2019) cita os seguintes tipos de trabalho coletivo: cooperação e colaboração. A cooperação se constitui em uma etapa de trabalho coletivo que ainda não pode ser considerado colaborativo, pois, nessa etapa, embora ocorra a execução de práticas conjuntas e combinadas, parte do coletivo não dispõe de autonomia e controle sobre essas práticas. Fiorentini (2019) assim argumenta:

Embora as denominações cooperação e colaboração tenham o mesmo prefixo co, que significa ação conjunta, elas diferenciam-se pelo fato de a primeira ser derivada do verbo latino *operare* (operar, executar, fazer funcionar de acordo com o sistema) e a segunda, de *laborare* (trabalhar, produzir, desenvolver atividades tendo em vista determinado fim) (FIORENTINI, 2019, p. 56).

Desse modo, na cooperação, uns auxiliam os outros, realizando atividades cujos objetivos normalmente não geram de combinação do coletivo, de forma que uns possam estar submissos a outros, ou seja, podem ocorrer posições de comando e de subordinação. Na colaboração, ocorre o trabalho conjunto e o apoio recíproco entre os participantes, a fim de se alcançar metas comuns combinadas pelos participantes

conjuntamente. Com a colaboração, não existem posições de comando e submissão nas interações entre os participantes, ocorrendo gerenciamento e compromisso compartilhados na execução das ações.

Na próxima seção, destacamos os procedimentos metodológicos da pesquisa.

### **3.7 Procedimentos metodológicos**

A investigação foi desenvolvida no âmbito do Ensino Médio e a execução das atividades considerou as determinações curriculares, de forma que os documentos gerados foram observados a partir de competências e habilidades propostas para serem abordadas no Ensino Médio. As participantes da pesquisa foram professoras de escolas públicas do estado da Bahia. O trabalho colaborativo seria realizado de forma presencial e, preferencialmente, no laboratório de informática da escola; no entanto, em razão da situação de isolamento social provocada pela pandemia de COVID-19, houve a necessidade de se realizar o trabalho de forma remota, utilizando-se como um dos recursos tecnológicos digitais o *software* matemático GeoGebra, decisão tomada conjuntamente por professoras e pesquisador.

Para coleta de dados, utilizamos os seguintes recursos: questionários e entrevistas semiestruturadas, observações, anotações, gravações das professoras e alunos executando as atividades e registro fotográfico de materiais utilizados nas atividades e produzidos pelas professoras, para realizarmos as análises.

Foram realizadas quatro entrevistas virtuais com as docentes, pelo *Google Meet*, duas no mês de março, uma no mês de junho e outra no mês de julho de 2021; foi elaborado, pelo *Google* Formulários, um questionário respondido pelas docentes, apresentado no Apêndice C deste relatório; foram obtidas anotações, feitas pelas professoras, no decorrer do mês de março de 2021, pelo *Google Docs*, bem como foram feitas gravações em vídeo, no decorrer do mês de maio de 2021, pelo *Google Meet*, das aulas implementadas.

Para a efetivação das análises das informações e dados colhidos, apresentamos, em um primeiro momento, um detalhamento do trabalho colaborativo e recursos associados desenvolvidos pelas professoras. Esse detalhamento esclarece as escolhas feitas, os objetivos almejados, dentre outros elementos, dessa maneira propiciando entendimento dos esquemas de utilização mobilizados pelas participantes da pesquisa. Em um segundo momento, destacamos as análises

realizadas, de acordo com a teoria da Gênese Documental de Gueudet e Trouche (2009). Essas análises nos permitiram, no trabalho documental das professoras, inferir sobre a construção de documentos para a melhoria do ensino de juros compostos.

A seguir, apresentamos as técnicas e instrumentos de coleta de dados da pesquisa.

### **3.8 Técnicas e instrumentos de coleta de dados**

O pesquisador assumiu a função de mediador de todo processo, elaborando anotações sobre as situações do trabalho colaborativo com um grupo de professoras de Matemática do Ensino Médio, interferindo em suas reflexões. Foram registradas as conversas entre as professoras, durante o processo de construção de documentos do trabalho colaborativo com a utilização de recursos tecnológicos digitais, inclusive aquelas que envolveram dúvidas, questões e sugestões das professoras participantes.

O mesmo processo foi seguido nas gravações das aulas remotas e nos momentos que envolveram as ponderações sobre os desempenhos didáticos e as atividades desenvolvidas no trabalho colaborativo. As produções oral e escrita das professoras foram os principais instrumentos de coleta de dados, mas foram acrescentadas pelas conversas realizadas entre o pesquisador e as docentes.

Pela análise das produções obtidas e da leitura das anotações resultantes das produções orais, foram identificados os esquemas de utilização associados à Gênese Documental que favoreceram a construção de documentos com a integração de recursos tecnológicos digitais para a melhoria do ensino de Juros Compostos.

A partir dos princípios da metodologia de investigação reflexiva (GUEUDET; TROUCHE, 2010) e do conceito de contrato metodológico (SABRA, 2016), técnicas e instrumentos metodológicos foram desenvolvidos e ajustados ao problema de pesquisa, bem como ao seu contexto. Um instrumento que consideramos bem útil foi a representação esquemática do sistema de recursos das professoras envolvidas com a pesquisa. As professoras foram solicitadas a esboçar um esquema de seus recursos, mostrando aqueles que foram observados e aqueles que foram incorporados, destacando suas referências e propósitos.

Assim, desenvolvemos a análise e atendemos os objetivos propostos nesta pesquisa.

Na próxima seção, destacamos os sujeitos da pesquisa e mudanças dos seus Sistemas de Recursos.

### **3.9 Sujeitos da pesquisa e mudanças dos seus Sistemas de Recursos**

O pesquisador escolheu como sujeitos desta pesquisa duas professoras de Matemática do Ensino Médio, atuantes em um colégio da rede estadual da Bahia (o mesmo colégio onde o pesquisador atua como professor) e que costumam trabalhar com turmas do 3º ano do Ensino Médio, etapa em que normalmente planeja-se, no colégio, o ensino do conteúdo Matemática Financeira, em particular Juros Compostos.

As professoras percorreram uma trajetória na obtenção de um documento para o ensino de Juros Compostos, chamada de trajetória documental, a qual, de acordo com Rocha (2019, p. 75, tradução nossa), é “como um percurso (que expressa continuidades e mudanças) que articula os eventos profissionais (individuais e/ou coletivos) vivenciados pelo professor e as transformações em seu trabalho documental ao longo do tempo”. Conforme Rocha (2021):

Esses eventos profissionais podem ser identificados pelos professores, designados, neste caso, como eventos reflexivos ou identificados nos momentos de análise pelos pesquisadores designados como eventos inferidos. Esses eventos são marcadores de um momento específico em que houve uma transformação no trabalho documental dos professores. É muito importante ressaltar que a análise da trajetória documental dos professores não busca identificar todos os eventos vivenciados pelos professores, pois tal trabalho seria impossível. Procuramos, então, encontrar eventos “chaves” que nos permitam mostrar as transformações nesse trabalho (ROCHA, 2021, p. 48).

Um conceito importante associado a essa trajetória é o de experiência documental: a relação dos docentes com os recursos, no decorrer do tempo, permite “o acúmulo e a apropriação de sua história de trabalho documental” (ROCHA, 2019, p. 74, tradução nossa). De acordo com a autora, essa experiência fornece ao trabalho documental do docente particularidades identificáveis por ele e que guiarão o desenvolvimento da trajetória documental, o que conceitua o traço da experiência documental. A autora também destaca o dominante documental (orientação do trabalho documental para uma certa família de atividades em um certo período) e os eventos simbólicos de transição, os quais alteram o dominante documental.

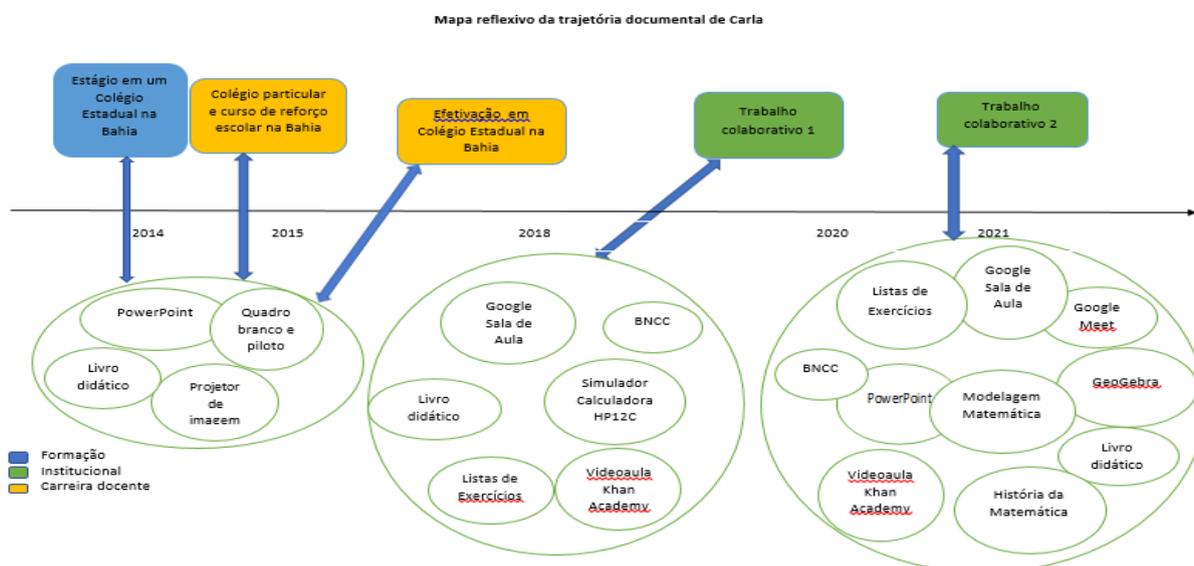
Assim, no decorrer de sua trajetória documental, as docentes participaram de alguns eventos que impactaram o seu trabalho documental para o ensino de Juros Compostos, incrementando seus recursos, incluindo novas regras de ações e

desenvolvendo diferentes esquemas.

A partir de uma adaptação da representação esquemática do sistema de recursos, Rocha (2019) propôs o mapeamento reflexivo da trajetória documental (MRTD), no qual o docente é solicitado a relembrar os eventos que julga mais importantes na sua vida profissional e a influência desses eventos no trabalho documental. A seguir, mostra-se a representação do MRTD de cada sujeito da pesquisa para o ensino de Juros Compostos.

A professora Carla é formada em Licenciatura Plena em Matemática e tem seis anos de experiência como professora na Educação Básica. A Figura 3 ilustra o Mapa Reflexivo da trajetória documental da professora Carla para o ensino de Juros Compostos, desde o início da sua carreira até o ano de 2021, quando foi realizada esta pesquisa. Observamos 5 eventos reflexivos considerados importantes pela professora e 13 recursos vinculados a eles, havendo o seu envolvimento em dois trabalhos colaborativos. O mapa resume a evolução do seu trabalho documental para o ensino do conteúdo.

Figura 3 – Mapa reflexivo da trajetória documental de Carla

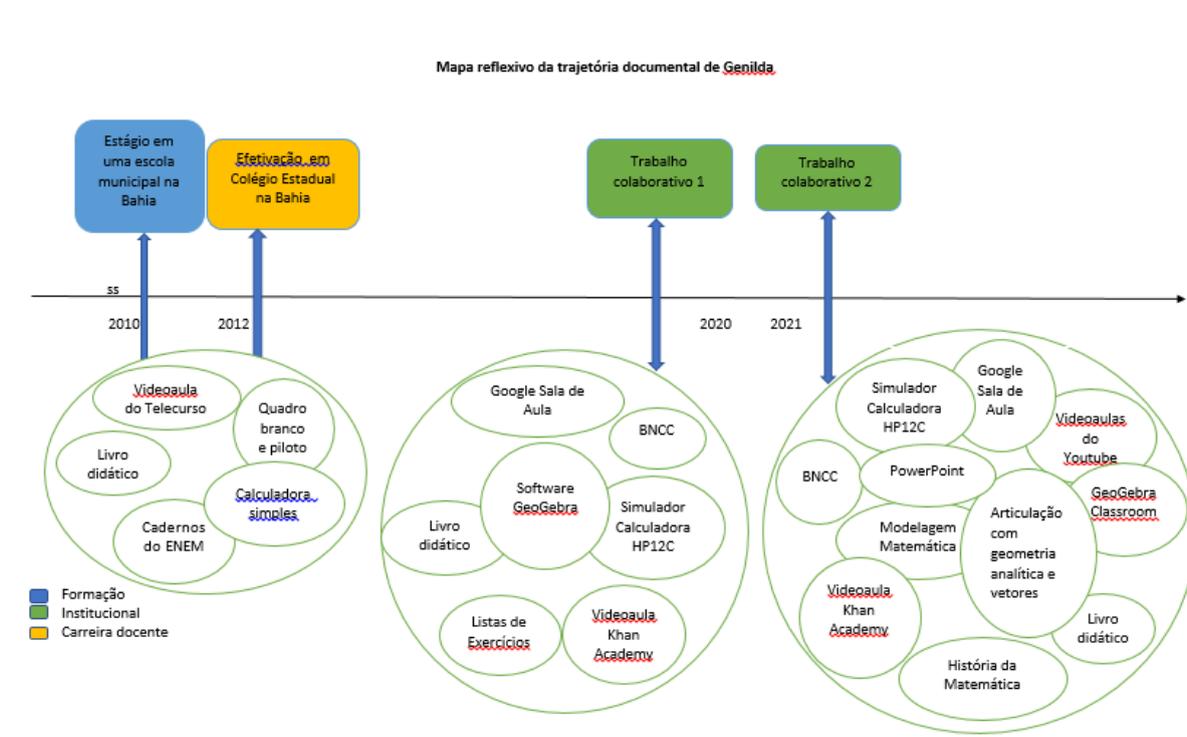


Fonte: Informado pela professora Carla

A professora Genilda é formada em Licenciatura Plena em Matemática e tem nove anos de experiência como professora no Ensino Médio. A Figura 4 ilustra o Mapa Reflexivo da trajetória documental da professora Genilda para o ensino de Juros Compostos, desde o início da sua carreira até o ano de 2021, quando foi realizada esta pesquisa. Observamos 4 eventos reflexivos considerados importantes pela

professora e 16 recursos vinculados a eles, havendo o seu envolvimento em dois trabalhos colaborativos. O mapa resume a evolução do seu trabalho documental para o ensino do conteúdo.

Figura 4 – Mapa reflexivo da trajetória documental de Genilda



Fonte: Informado pela professora Genilda

Conforme mostrado pela Figura 3, do primeiro para o segundo momento, a professora Carla descartou o uso do quadro branco, piloto, *PowerPoint* e projetor de imagem, passando a utilizar o *Google Sala de Aula*, vídeoaula da plataforma *Khan Academy*, simulador da calculadora HP12C, listas de exercícios e BNCC. Do segundo para o terceiro momento, a professora incrementou seu Sistema de Recursos com o *Google Meet*, História da Matemática, Modelagem Matemática, *software GeoGebra* e *PowerPoint*. O livro didático se manteve em todos os momentos.

Conforme mostrado pela Figura 4, do primeiro para o segundo momento, a professora Genilda descartou o uso do quadro branco, piloto, vídeoaula do Telecurso, calculadora simples e questões do ENEM, passando a utilizar o *Google Sala de Aula*, vídeoaula da plataforma *Khan Academy*, simulador da calculadora HP12C, listas de exercícios, *software GeoGebra* e BNCC. Do segundo para o terceiro momento, a professora incrementou seu Sistema de Recursos com o *GeoGebra Classroom*,

História da Matemática, Modelagem Matemática, articulação com geometria analítica e vetores, videoaulas do *YouTube* e *PowerPoint*. A lista de exercícios foi descartada e o livro didático se manteve em todos os momentos.

No ano de 2018, as professoras Carla e Genilda participaram de um curso *online* promovido pela Secretaria de Educação do Estado, no qual tiveram a oportunidade de aprender a utilizar ferramentas como *Google Sala de Aula*, *Google Meet*, *Google Formulários*, *Google Docs*. Porém, somente a partir de 2020, em razão de um trabalho colaborativo preliminar a essa pesquisa no contexto da pandemia, do qual as professoras aceitaram fazer parte, é que elas passaram a modificar seus Sistemas de Recursos para o ensino de Juros Compostos, adotando outros recursos como vídeoaulas da plataforma *Khan Academy*, o simulador da HP12C e o *Google Sala de Aula*, além do GeoGebra (no caso da professora Genilda).

No ano de 2021, já no contexto do trabalho colaborativo da pesquisa e ainda da pandemia, as professoras incrementaram seus Sistemas de Recursos, passando a incluir vários outros, como a História da Matemática e a Modelagem Matemática. Os “recursos-mãe” sugeridos por cada professora foram transformados na obtenção do “recurso-filho” das mesmas. Nesse sentido, conforme Machado Jr. *et al.* (2018, p. 273-274), “[...] faz-se necessário distinguir o que o professor utiliza e mobiliza para preparar o ensino de um tema (recursos - mãe) do que o professor produz e desenvolve a partir dos recursos de origem (recursos - filho)”. Assim, por exemplo, o *software* GeoGebra foi um recurso-mãe para as professoras, sendo reconfigurado em associação com outros recursos-mãe (videoaula, *Google Meet*, livro didático etc.), na composição do recurso-filho de ambas (coletânea de recursos integrados).

Essas representações foram feitas com base em informações colhidas por meio de entrevistas virtuais feitas com as professoras. Em ambos os casos, o livro didático foi enriquecido com o tempo na integração com o *software* GeoGebra, pelas adaptação e realização de atividades do livro por meio desse *software*.

Deste modo, apresentamos neste capítulo o referencial metodológico que norteou a pesquisa e, no próximo capítulo, discutiremos sobre recursos tecnológicos digitais na construção de documentos para o ensino de Matemática.

## CAPÍTULO 4 - RECURSOS TECNOLÓGICOS DIGITAIS NA CONSTRUÇÃO DE DOCUMENTOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Este capítulo está dividido em três seções: a primeira seção apresenta considerações sobre a importância da utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino de Matemática; a segunda seção discute a importância do *software* GeoGebra no ensino de Matemática a partir de recentes pesquisas acadêmicas; a terceira seção apresenta discussões sobre a utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino de Matemática sob a ótica da Gênese Documental.

### 4.1 A importância da utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino de Matemática

Nesta seção, destacamos a perspectiva de autores que concebem a função das tecnologias digitais como atores dentro dos grupos constituídos por sujeitos humanos e não-humanos, procurando compreender as mudanças que elas trazem no pensamento e que inquietações surgem com a utilização delas, especialmente na Educação Matemática. Sobre essa questão, argumentam Borba e Villarreal (2005):

O conhecimento é produzido junto com um dado meio ou tecnologia da inteligência. Essa é a razão de adotarmos uma perspectiva teórica que apoia a noção de que o conhecimento é produzido por um coletivo composto de seres-humanos-com-mídia, ou humanos-com-tecnologias, e não, como outras teorias sugerem, por indivíduos humanos sozinhos, ou por coletivos compostos somente de humanos (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 23, tradução nossa).

Desse modo, ocorrem mudanças qualitativas no pensamento que se apresentam no decorrer da execução de certas tarefas, caso a abordagem implícita associada a elas sintonize com as tecnologias digitais integradas no processo, de forma a possibilitar o levantamento de hipóteses, modelagens, descobertas, e o estabelecimento de uma interação dentro do coletivo que permita a troca de ideias entre os participantes.

Nesse aspecto, Santos (2020) observa que:

[...] o ambiente escolar ainda se encontra na fase dos desafios impostos pelas mudanças acarretadas pelo uso das tecnologias e reluta em se abrir para esse novo mundo de possibilidades, principalmente com a expansão maciça dos *smartphones* conectados à internet. Com os *smartphones*, levamos o mundo para a escola, podendo acessá-lo com apenas um toque. Entretanto, na escola, a maioria das atividades propostas para os alunos ainda é no modo *off-line* (SANTOS, 2020, p. 33).

Em razão disso, destacamos que a mera introdução de recursos tecnológicos

digitais nas atividades de ensino, utilizando *tablets*, *softwares* e outros recursos, não transforma a maneira pela qual o professor aborda o conteúdo para os seus alunos. Ocorre apenas um enriquecimento das práticas docentes com o apoio de recursos tecnológicos digitais, mas prevalecendo o ensino conteudista dos moldes tradicionais. Então, é necessário que a introdução de recursos tecnológicos digitais nas práticas docentes seja acompanhada de uma transformação na postura do docente frente às novas metodologias de ensino.

Em sua pesquisa, Kynigos (2007) analisa, de forma minuciosa, a dinâmica pela qual os futuros formadores de professores utilizaram mídias importantes e micromundos projetados para compreender Matemática. Seu objetivo era desenvolver algumas ideias sobre o caráter dos desafios associados às suas crenças e epistemologias, por meio deste processo de instrumentação. Especificamente, analisar a utilização de artefatos projetados para que os formadores de professores pudessem não somente desenvolver seus próprios instrumentos, mas também adaptar as aplicabilidades dos artefatos.

Em relação ao conhecimento do conteúdo pedagógico dos programas de formação de professores, Kynigos (2007) destaca que há um impacto nos valores tradicionais sobre o ensino como clareza na explicação, disponibilidade para fornecer respostas às perguntas dos alunos e uma estruturação clara e sequenciamento de entrega de conteúdo, ao invés de desafio e conflito cognitivo gerando matematização. No que se refere a cursos sobre a utilização de mídia digital para aprendizagem matemática, esses comumente têm o propósito de desenvolver uma postura reflexiva na prática do professor, o que implica no aparecimento de um elemento construtivista nas práticas de ensino.

Em sua pesquisa que associou as teorias da transposição didática e informática com a utilização de tecnologias digitais pelo professor, Abar (2020) argumenta que:

O desenvolvimento tecnológico propicia alternativas para a educação agregando aos seus recursos tradicionais ambientes digitais que permitem o aprendizado contínuo, afetam o processo educacional nas mais diversas dimensões e demandam uma cultura atual de formação permanente. As tecnologias não só permitem às pessoas transformar suas ações no dia a dia, como também possibilitam novos recursos ao ensino e à aprendizagem. Neste contexto, o professor, como profissional reflexivo, tem de optar por estratégias que vão de encontro com sua formação inicial, o que acarreta um aumento de estresse e de responsabilidade profissional (ABAR, 2020, p. 30).

Nesse aspecto, Rabardel (2001) diferencia a mídia digital de sua utilização e amplia o trabalho de Vygotsky (1980) sobre mediação semiótica, compreendendo a

utilização de mídia digital como mediação social com artefatos culturais. Sobre essa questão, Mariotti (2013) apud Stormowski, Gravina e Lima (2013) observa que:

É fundamental e indispensável, portanto, que se identifique previamente o potencial semiótico daquele artefato, para apenas depois se colocar no planejamento de atividades com seu uso. Para identificar este potencial é necessário analisar atividades em que o artefato é utilizado para realizar determinada tarefa, e pode envolver diferentes perspectivas: cognitiva, epistemológica etc. No caso de artefatos tecnológicos com softwares de GD, um ponto de partida são as funcionalidades didáticas projetadas pelos desenvolvedores, mas como são muitos os caminhos que se abrem na realização de uma atividade, este é apenas o primeiro passo (MARIOTTI, 2013 apud STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2013, p. 7).

Compreende-se que a maneira e a intenção com que um meio é utilizado por um sujeito merece muita atenção. Dessa forma, artefatos que favorecem a construção de instrumentos apresentam relevância nas atividades de ensino.

Em seu estudo que objetivou identificar aspectos do desenvolvimento profissional de licenciandos em Matemática por meio da análise do seu trabalho com recursos, Assis, Gitirana e Trouche (2019) exemplificam o envolvimento de mídia digital no sistema de recursos do professor:

No contexto da formação inicial, o trabalho com recursos alimenta uma problemática que consiste em entender como os licenciandos constituem seus primeiros sistemas de recursos. Temos observado que esses estudantes passam a 'adotar' alguns recursos particulares e que tais recursos promovem novas formas de aprender matemática e de desenvolver conhecimentos profissionais. Esse foi o caso do *software* GeoGebra para alguns dos estudantes da Licenciatura que acompanhamos: um recurso desconhecido na época em que cursaram a educação básica e que passou a integrar não apenas o repertório de recursos para aprender matemática na Licenciatura, mas, também, para conceber propostas de ensino que posteriormente foram desenvolvidas nas escolas (através dos estágios supervisionados, dos projetos de ensino e de trabalhos de conclusão de curso) (ASSIS; GITIRANA; TROUCHE, 2019, p. 34-35).

Ignácio (2018) também exemplifica esse envolvimento de mídia digital no sistema de recursos do professor:

Convém destacar que as novas tecnologias digitais disponíveis na *Internet* ampliaram de forma significativa as possibilidades de integração do livro didático a outros recursos, como áudios, vídeos e simulações, potencializando sua utilização como veículo para inovações pedagógicas. De fato, nos dias atuais, diversas iniciativas distintas como os manuais do *Sésamath*<sup>5</sup>, do *C-book*<sup>6</sup> e do GeoGebra *book*<sup>7</sup> permitem que professores se engajem em processos individuais ou colaborativos para a produção de seus próprios livros didáticos (IGNÁCIO, 2018, p. 46).

<sup>5</sup>Desenvolvido pelo grupo Francês *Sesamath* (<http://manuel.sesamath.net/>)

<sup>6</sup>Desenvolvido no âmbito do projeto europeu MC2 (<http://www.mc2-project.eu/index.php/technology>)

<sup>7</sup>Desenvolvido na plataforma *on line* do *software* GeoGebra. (<http://www.geogebra.org>)

Nesse sentido, consideramos que o processo de mudança no sistema de recursos do professor (mobilizando antigos e novos conhecimentos) esteja também vinculado à articulação entre as tecnologias digitais, o livro didático e diferentes abordagens de ensino, a exemplo da História da Matemática, a Modelagem Matemática, Jogos etc.

Na próxima seção, destaca-se a importância do GeoGebra no ensino de Matemática.

#### 4.2 Importância do *software* GeoGebra no ensino de Matemática

Na pesquisa, o *software* GeoGebra<sup>8</sup> teve um papel fundamental como um dos recursos tecnológicos digitais integrados ao trabalho colaborativo desenvolvido pelas professoras. Nesta seção, discutimos a importância desse *software* no ensino de Matemática, a partir de recentes pesquisas acadêmicas. De acordo com Abar e Santos (2021),

O *software* GeoGebra foi criado e desenvolvido por Markus Hohenwarter, coordenador do projeto GeoGebra com sede na Universidade Johannes Kepler, localizada em Linz, Áustria. De acordo com Hohenwarter e Preiner (2007), o *software* GeoGebra foi vencedor de vários prêmios internacionais com tradução para mais de cinquenta diferentes idiomas, incluindo a língua portuguesa (ABAR; SANTOS, 2021, p. 3).

Em sua tese que abordou a utilização do *software* GeoGebra apoiando os estudos sobre o sistema de recursos do professor para o ensino de Cálculo, Almeida (2017) observa que:

O computador, munido com determinado *software*, tem sido utilizado no desenvolvimento de pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo. Um exemplo de *software* que tem sido utilizado é o GeoGebra. Ele é gratuito e une a Geometria, a Álgebra e o Cálculo em uma mesma aplicação. Foi desenvolvido em linguagem Java e possui uma interface considerada simples. Com esse *software* é possível desenvolver e elaborar *applets* que podem ser utilizados tanto em computadores nos quais o GeoGebra não está instalado, quanto em sítios da Internet. Ademais, possui ferramentas e comandos específicos que podem ser utilizados para a introdução e desenvolvimento de materiais que visem à introdução de conceitos do Cálculo (ALMEIDA, 2017, p. 36).

Um aspecto importante relativo ao GeoGebra é a sua mobilidade e viabilidade de utilização em vários sistemas operacionais e plataformas. Pode ser utilizado nas versões *online*, *off-line* e *desktop*, com *notebook*, *smartphone* e outros. Segundo Lemke, Silveira e Siple (2016), com o GeoGebra articulamos as funcionalidades de

---

<sup>8</sup> <https://www.geogebra.org/about>

um *software* de geometria dinâmica com aplicabilidades de um CAS - Sistema de Álgebra Computacional, o que permite trabalhar de forma dinâmica com diferentes representações de um objeto matemático. Sobre o potencial semiótico desse *software*, Abar (2016) observa que:

No GeoGebra, todas as janelas (gráficas 2D e 3D, algébrica, CAS, Planilha) podem ser vistas ao mesmo tempo, permitindo a construção de um ambiente para possíveis conversões, pelos estudantes, de diferentes registros semióticos que podem ajudá-los na apropriação de objetos matemáticos. Por outro lado, elas também podem ser limitadas aos objetivos das atividades para evitar um *stress* cognitivo para os alunos. Além disso, os movimentos dinâmicos são elementos-chave nas variações simultâneas dos registros para a construção e associação dos significados matemáticos entre os conceitos propostos nas intervenções didáticas (ABAR, 2016, p. 7).

Percebe-se o potencial semiótico do GeoGebra no processo de transformação de artefato em instrumento, pelos esquemas de utilização dos sujeitos associados às funcionalidades do *software*, conforme a instrumentação e instrumentalização discutidas por Rabardel (2002).

Em sua investigação que fez um panorama das pesquisas sobre a utilização do GeoGebra no Brasil, Pereira Júnior e Bertol (2019) pontuam que:

Em alguns dos trabalhos analisados observamos nos sujeitos da pesquisa a preocupação da maioria dos pesquisadores, em discutir as potencialidades do *software* GeoGebra em aulas de matemática no que se refere a formação de professores, tanto na licenciatura, quanto para professores em atuação na Educação Básica. Ainda nas dissertações, os conteúdos matemáticos em sua maioria abordados se referem a geometrias, sugerindo que as potencialidades que o software oferece ainda poderão em novas pesquisas serem mobilizadas e amplamente exploradas. Em relação a modalidade de investigação das pesquisas todas se utilizaram do método e estratégias qualitativas de investigação (PEREIRA JÚNIOR; BERTOL, 2019, p. 595).

Em sua investigação sobre o uso do GeoGebra em um contexto de resolução de problemas, Poveda e García-Cuéllar (2021) argumentam que:

O uso dos recursos disponíveis intermedia o desenvolvimento do pensamento matemático; o GeoGebra torna-se um poderoso auxiliar nas atividades de aprendizagem, pois apresenta novas formas e procedimentos para a construção de representações de problemas, aproximando professores e alunos de ambientes dinâmicos de exploração, favorecendo o desenvolvimento de soluções (POVEDA; GARCÍA-CUÉLLAR, 2021, p. 64, tradução nossa).

Nesse sentido, consideramos que o GeoGebra estabelece uma natureza dinâmica, conferindo aos professores alternativas ao ambiente lápis-papel para ilustrar, explorar e compreender as situações-problema. De acordo com Abar e Iglioni (2021),

Pesquisas já desenvolvidas indicam que a exploração da Matemática com o GeoGebra é fundamental para o apoio ao levantamento de conjecturas e para

a demonstração em matemática, além de possibilitar seu uso em ensino remoto e a criação de atividades com feedback automático. Espera-se que os professores utilizem o GeoGebra em sua prática docente e sejam criadores de processos de avaliação automática permitidos pelo *software* (ABAR; IGLIORI, 2021, p. 4).

Sobre o potencial do GeoGebra em auxiliar o trabalho de modelagem de situações-problema, Sánchez *et al.* (2020) destacam que:

Na formação de professores de matemática, a modelagem é essencial, as formas pelas quais é realizada são mais frequentes; de maneira que o professor deve atualizar-se cada dia mais para facilitar o processo de ensino. O GeoGebra, especialmente na modelagem, é um software matemático interativo; é um aplicativo de código aberto desenhado principalmente para aprendizagem e ensino de geometria, álgebra e cálculo (SÁNCHEZ *et al.*, 2020, p. 90, tradução nossa).

Assim, com o apoio do *software*, o professor pode trabalhar com a modelagem de situações-problema, conduzindo os alunos a perceberem mais significado nos conceitos abordados. Nesse contexto, faz-se relevante que a atividade de modelagem de situações-problema baseie-se em desafios que incentivem o estudante a elaborar estratégias diferenciadas com vistas à solução dos problemas, por meio de hipóteses e experimentações.

Nesta pesquisa que envolve um trabalho colaborativo desenvolvido de forma remota, destacamos a importância do GeoGebra na construção de documentos para o ensino de juros compostos, envolvendo a modelagem de situações-problema, a articulação entre os registros de representação numérico, algébrico e gráfico, além do desenvolvimento de processos de *feedback* automático.

Na próxima seção, discute-se a utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino de Matemática sob a ótica da Gênese Documental.

### **4.3 Utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino de Matemática sob a ótica da Gênese Documental**

Nesta seção, comentamos sobre a utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino de Matemática na perspectiva da Gênese Documental. A pesquisa de Assis (2016) teve como objetivo investigar na formação inicial de professores de Matemática a Gênese Documental para o uso de sistemas de geometria dinâmica a partir de propostas do livro didático. Assim, reconhecendo que o livro didático é o mais importante recurso dos docentes de Matemática e o mais frequente nas escolas, a autora considera que uma alternativa seria entender como os alunos da Licenciatura elaboram sugestões didáticas a partir dele e como essa coletânea de recursos pode

favorecer a utilização de sistemas de geometria dinâmica.

Baseada nessa visão, a autora desenvolveu um estudo de caso com uma aluna da Licenciatura em Matemática, entre os meses de maio e junho de 2016, tendo como referência uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública do município de Guarabira - PB. No decorrer do Trabalho de Conclusão de Curso – TCC da aluna, a autora observava e articulava com ela no trabalho de planejamento de uma sequência didática sobre a classificação dos triângulos (lados e ângulos) e posterior implementação em sala de aula.

Com isso, a autora considera como fonte de informações:

1) a análise da estudante registrada no TCC sobre a proposta do livro da escola que serviu de referência para o roteiro de atividades; 2) as três versões do roteiro produzidas durante a orientação e enviadas por *email*; 3) uma entrevista gravada em vídeo onde a estudante revela as principais diferenças entre as versões do roteiro e 4) o desenvolvimento da aula na escola (gravada em vídeo) (ASSIS, 2016, p. 6).

A autora argumenta que os questionamentos sobre as sugestões dos exercícios foram considerados na versão final do roteiro, apresentada em Assis (2016, p. 9). Essas reflexões foram resultado de uma análise individual da estudante por meio das suas relações com o livro, com o GeoGebra e com as versões preliminares do roteiro e a participação da orientadora considerou o percurso individual da estudante. Percebeu-se um envolvimento com o livro didático e o GeoGebra, que produziu o documento roteiro de atividades. Adequações desses dois recursos foram consideradas no roteiro, de maneira que estivessem coerentes com os objetivos da aula, mas, simultaneamente, sujeitas às possibilidades e restrições do *software*. Assim, verificaram-se os processos de instrumentação e instrumentalização, que viabilizaram a elaboração do roteiro.

Fazendo uma comparação entre as contribuições dos recursos adotados, Assis (2016) considera que:

De maneira geral, enquanto o livro partiu de informações gerais sobre a classificação de triângulos usando notação simbólica e figuras prototípicas, as construções do Geogebra permitiram partir da observação de casos particulares e suas regularidades com várias possibilidades de triângulos em diferentes posições, para gerar conclusões e registros simbólicos (ASSIS, 2016, p. 13).

Destacaram-se algumas regras de ação para o roteiro, a exemplo de “apresentar um protocolo de construção para ser seguido pelos alunos com indicação de ferramentas e a sequência do uso delas”. O roteiro e sua implementação em sala de aula levaram a destacar também alguns invariantes operacionais, como: “o modelo

de protocolo apresentado facilita a construção dos triângulos no GeoGebra” (ASSIS, 2016) e a autora considera que todos os recursos articulados possibilitaram o desenvolvimento e combinação de novos recursos que constituiriam, mais adiante, um trabalho documental da futura professora.

No artigo de Almeida e Abar (2020), os autores destacam que o desejo de aprimorar a interação entre os agentes envolvidos nas atividades de coordenação pedagógica de área do colégio (professor articulador e professor de disciplina) tem sido recorrente na formação continuada de professores. Pois, nos momentos de coordenação pedagógica, os professores de disciplinas também têm a oportunidade de incrementar a sua formação continuada com o incentivo e colaboração do professor articulador.

Nesse sentido, conforme Almeida e Abar (2020), essa pesquisa foi estimulada por questionamentos sobre o impacto das sugestões de materiais didáticos e orientações dos professores articuladores aos professores regentes de Matemática, reportando-os às contribuições que os professores articuladores podem oferecer aos professores regentes no desenvolvimento de seu trabalho documental. A pesquisa também foi estimulada pela iniciativa em implementar uma avaliação, por parte do professor regente, do seu próprio fazer pedagógico, no que tange à elaboração de aulas e a sua viabilização em sala de aula.

Assim, destacou-se o objetivo de apresentar um estudo sobre o trabalho documental de um professor de Matemática do Ensino Médio e de um professor articulador de área, no processo de elaboração e viabilização de uma aula sobre circunferência, numa turma de 3ª série do Ensino Médio. Convém salientar que o professor articulador de área foi o primeiro autor desse artigo.

Para isso traçou-se uma trajetória metodológica fundamentada na Gênese Documental (ALMEIDA; ABAR, 2020), que apresenta como uma de suas particularidades considerar que o trabalho diário dos professores acontece tanto no contexto de sala de aula como em outros ambientes (em casa, na sala dos professores, na biblioteca, etc.). Levando em conta que, nessa abordagem, ocorreu uma preocupação destacada com o uso de recursos na trajetória de elaboração das aulas e com o mecanismo de modificação desses no transcorrer do aperfeiçoamento da prática do professor. Nesse caso, os autores se preocuparam com práticas formativas elaboradas com esse intuito.

Assim, levando em conta que o uso de materiais recicláveis são atualmente valorizados nas atividades pedagógicas, pensaram que uma alternativa seria entender como os professores regentes de Matemática implementam sugestões didáticas em função deles e em associação com outros recursos mais usuais, como apostilas e *softwares* matemáticos.

Com o fim de analisar os recursos, a apropriação e adaptação que os professores regentes executam sobre eles e seus impactos na qualificação docente, foi implementado um estudo de caso com um professor regente de Matemática em interação com um professor articulador de área. Tal estudo, conforme os autores, considerou o processo de formulação de uma atividade didática sobre o estudo da circunferência e consequente viabilização em sala de aula. Ele foi realizado em uma escola pública da rede estadual da Bahia e organizado em três fases: antes, durante e depois da aula. Todo o processo durou um intervalo de dois meses (entre setembro e outubro de 2018).

Destacou-se a relevância da orientação do professor articulador em relação ao trabalho documental do professor regente de Matemática, tendo como suporte a apresentação de vários recursos alternativos (materiais recicláveis, *softwares*, etc.), assim como debates sobre a importância pedagógica desses materiais, relativa à interdisciplinaridade e potencialidades das tecnologias digitais para o ensino, e a forma de articulação entre eles.

O Quadro 1 ilustra uma atividade implementada pelo professor envolvido na pesquisa:

Quadro 1 – Atividade implementada pelo professor regente

Questão 1 - Determine o raio, o diâmetro, o comprimento e a área delimitada pela circunferência de cada um dos pneus que você utilizou para a construção da horta. As medidas em centímetros podem ser aproximadas.  
 Questão 2 - Determine experimentalmente o valor aproximado de  $\pi$ , utilizando as medidas das grandezas dos pneus.  
 Questão 3 - Determine as equações das circunferências de cada um dos pneus que você utilizou para a construção da horta, considerando que eles sejam posicionados de forma a apresentarem o mesmo centro C (0, 0).  
 Questão 4 - Faça a representação gráfica de cada uma das circunferências dos pneus que você utilizou para a construção da horta, utilizando as ferramentas do *software* GeoGebra.  
 Questão 5 - Posicione dois desses pneus, de forma que apresentem centros diferentes, determine a posição relativa entre as circunferências dos pneus e também faça a representação gráfica no GeoGebra.  
 Observação: a atividade deve ser realizada em duplas.

Fonte: Adaptado de Almeida e Abar (2020, p. 25).

Tendo como base a Gênese Documental, os autores observaram esquemas de utilização de materiais recicláveis e do *software* GeoGebra que foram relevantes na atividade prática desenvolvida e constataram invariantes operacionais, apresentadas

pelo professor regente, de diferentes características: algébricas, geométricas, computacionais, etc. Em muitas atividades didáticas, o estudo da circunferência tem se limitado a desenvolver sugestões de apostilas e livros; no entanto, o desenvolvimento dessas atividades pode ser incrementado com a mobilização de outros tipos de conhecimentos, como o instrumental.

De acordo com os autores, a visão detalhada sobre as origens dos recursos implementados pelo professor regente, em especial daquele sugerido pelo professor articulador (pneus para construção de horta) favoreceu, na atividade de coordenação pedagógica de área, uma análise sobre o mecanismo de elaboração do trabalho documental. Esse é o mecanismo pelo qual um recurso-filho do professor articulador (pneus para construção de horta) passou a ser um recurso-mãe para o professor regente, tendo sido adaptado em associação com outros recursos-mãe (como o *software* GeoGebra) no desenvolvimento do recurso-filho do professor regente (coletânea de recursos integrados).

Os autores constataam que, tão relevante quanto nos familiarizarmos com o mecanismo de elaboração de um recurso-filho é nos familiarizarmos com as consequências de sua implementação em sala de aula e com a forma com que ele pode ser constantemente melhorado. Nesse sentido, argumentam os autores, quando o professor regente identifica o que necessita ser aperfeiçoado em seu trabalho docente, por meio de recursos que ele se apropria, desenvolve, ajusta, modifica, isso favorece a sua qualificação docente.

Deste modo, neste capítulo, discutimos sobre recursos tecnológicos digitais na construção de documentos para o ensino de Matemática e, no próximo capítulo, teceremos considerações sobre o ensino de Juros Compostos.

## **CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES SOBRE JUROS COMPOSTOS**

Neste capítulo, abordamos o conteúdo matemático Juros Compostos, tendo em vista que os documentos produzidos no trabalho colaborativo destacado nesta pesquisa estão relacionados ao ensino desse conteúdo. Este capítulo está dividido em quatro seções: na primeira seção, discutimos aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de Juros Compostos; na segunda seção, destacamos a capitalização simples; na terceira seção, destacamos a capitalização composta e, na quarta seção, apresentamos algumas reflexões sobre o ensino de Juros Compostos no Ensino Médio, com base nas diretrizes curriculares, emergindo uma questão norteadora por parte das professoras.

### **5.1 Aspectos históricos do conceito de Juros Compostos**

As origens da Matemática Financeira remontam à época do escambo, o qual consistia numa transação comercial em que se permutavam, de forma direta, insumos e produtos necessários aos povos primitivos. Na atualidade, a Matemática Financeira é aplicada em vários contextos do sistema econômico. Esses contextos estão presentes no dia-a-dia dos cidadãos, a exemplo de financiamento de imóveis e veículos, negociação de empréstimos, compras a prazo, aplicações na poupança, investimentos em ações, dentre outros contextos. As transações financeiras fundamentam-se na contratação inicial das taxas de juros. Na contratação de um empréstimo, por exemplo, a realização do pagamento ocorre por meio de parcelas mensais com um valor adicional (juros), de forma que o montante (valor futuro) da dívida é maior do que o valor no momento da contratação (valor presente).

De acordo com Piton-Gonçalves (2005), o conceito de juros teve uma ampla divulgação e utilização no decorrer da História, aparecendo, de forma natural, no momento em que o ser humano observou uma aproximação entre o dinheiro e o tempo. Transações ocorridas por conta do valor temporal do dinheiro, relativas a capital acumulado e moeda desvalorizada despertaram, naturalmente, a noção de juros. Segundo Assaf Neto (2009), o interesse básico da Matemática Financeira é verificar o que ocorre com o dinheiro no decorrer do tempo. Isso significa fazer uma comparação entre os valores das quantias no presente e no futuro.

Conforme observado por Piton-Gonçalves (2005), povos antigos como os

sumérios registravam documentos em tábuas (fatura, recibo, nota promissória, operações de crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de vendas e endossos). Os produtos agrícolas também eram documentados em tábuas matemáticas, pelas quais organizavam-se as informações relacionadas à utilização e à repartição desses produtos. As tábuas também apresentavam registros de empresas comerciais e eram adotadas como instrumentos auxiliares em questões ligadas ao sistema de peso e medida como: tábuas para multiplicação, inversos multiplicativos, quadrados, cubos e exponenciais.

As exponenciais relacionavam-se com os cálculos de juros compostos. Os agricultores efetuavam operações comerciais, através das quais obtinham sementes para o plantio. Depois da colheita, faziam o pagamento por meio de sementes com a quantidade adicional resultante dos juros da dívida.

Referindo-se à época da expansão comercial e marítima, Piton-Gonçalves (2005) observa que:

O surgimento dos bancos está diretamente ligado ao cálculo de juros compostos e o uso da Matemática Comercial e Financeira de modo geral. Em uma época em que o comércio estava a chegando ao topo, uma das atividades do mercador foi também a do comércio do dinheiro, tais como o ouro e a prata. Para isso, diversos países cunhavam moedas de ouro e prata (PITON-GONÇALVES, 2005, p. 5).

Nesse contexto, surgiram as operações de crédito, pelas quais pessoas que necessitavam de capital obtinham de um cambista (comerciante envolvido no intercâmbio de moeda) o empréstimo de relevantes quantidades de dinheiro a juros consideráveis. O juro era devido pela utilização da quantia recebida, sendo a recompensa pela insegurança dessa quantia ser devolvida posteriormente, situação que hoje é denominada de risco. O cambista trabalhava acomodado em um banco de madeira no interior dos estabelecimentos comerciais, surgindo, a partir disso, os termos banco e banqueiro.

Fisher (1990) define juro como o pagamento feito pela utilização do capital emprestado, sendo que esse pagamento incide sobre o total do dinheiro emprestado e é estabelecido conforme o montante desse dinheiro e o período durante o qual é disponibilizado. Assim, juro é a compensação pelo empréstimo de um dinheiro, por um período determinado, de acordo com uma taxa negociada. Nesse aspecto, segundo Santos Júnior (2017),

Para esta comparação do dinheiro ao longo de um determinado tempo, a matemática financeira traz em seu corpo elementos próprios. Um destes elementos é a taxa de juro. É a partir desta taxa que saberemos o que

acontecerá com determinada quantia ao longo de um determinado tempo. É comum também nomear as quantias observadas por capital (SANTOS JÚNIOR, 2017, p. 120).

De acordo com Marshall (1992), a taxa de juro é representada pelo símbolo % e lê-se: por cento. Assim, como exemplo: uma taxa de juros de 4% ao ano corresponde a dizer que, para cada 100 reais aplicados, são pagos 4 reais anuais. Considera-se, assim, que a contratação das taxas de juros está relacionada ao problema do crédito. Juro simples é aquele que se estabelece à medida que ocorre o seu vencimento, sem que seja adicionado ao capital inicial. Nesse caso, a taxa de juro incide sempre sobre o capital inicial. Juro composto é aquele que, adicionado ao capital depois do período determinado, gera outro capital, promovendo novo juro. Por essa razão, os juros compostos são denominados de “juros sobre juros”, de forma que a taxa de juro incide sobre o novo capital.

Nesse contexto das operações financeiras, as quais envolvem elementos como capital, montante e taxa de juro, Teixeira (2015) observa que

De acordo com a renda que as pessoas recebem no presente e o que esperam receber no futuro, por um lado, elas se dispõem a poupar no presente para consumo futuro. Por outro lado, há pessoas que preferem consumir mais que suas rendas no presente, o que pode comprometer seu consumo futuro. Além disso, há indivíduos que podem demandar fundos no presente para elaboração de projetos que trarão retornos no futuro (TEIXEIRA, 2015, p. 25).

De acordo com Dal Zot (2008), a operação financeira agrega, fundamentalmente, três classes de agentes econômicos: o superavitário, o deficitário e o agente de intermediação financeira. O superavitário, chamado de poupador, é detentor de uma receita maior que as despesas, transferindo o seu excedente chamado de capital (valor atual) para outros agentes. O deficitário, chamado de tomador, apresenta necessidades que vão além dos seus recursos disponíveis. São os agentes de intermediação financeira que viabilizam a transferência do excedente dos agentes superavitários para os deficitários, por meio do empréstimo. Com isso, o agente superavitário é favorecido com a remuneração e o deficitário assume a taxa associada ao juro sobre o capital.

Conforme Assaf Neto (2009), a taxa de juro envolve três critérios:

- o risco envolvido na operação (empréstimo ou aplicação), representado genericamente pela incerteza com relação ao futuro;
- a perda do poder de compra do capital motivada pela inflação. A inflação é um fenômeno que corrói o capital, determinando um volume cada vez menor de compra com o mesmo montante;
- o capital emprestado/aplicado. Os juros devem gerar um lucro (ou ganho)

ao proprietário do capital como forma de compensar a sua privação por determinado período de tempo. Este ganho é estabelecido basicamente em função das diversas outras oportunidades de investimentos e definido por custo de oportunidade (ASSAF NETO, 2009, p. 1).

Assim, no âmbito da Matemática Financeira podemos destacar cinco elementos essenciais: o capital (C), os juros (J), o montante (M), o tempo de aplicação (n) e a taxa de juro (i). Os três primeiros são designados em unidade monetária e os dois últimos em unidade de tempo. Em uma transação financeira, Assaf Neto (2009) considera a capitalização como a constituição dos juros, os quais são, de forma sucessiva, adicionados ao capital ao longo do tempo. Essa capitalização pode acontecer conforme dois regimes: simples e composto. Transcorrido o tempo determinado, o capital aplicado é devolvido com os juros e essa adição é chamada de montante, isto é,  $M = C + J$ . Sendo o capital invariável, o montante surge diretamente da incorporação dos juros e o seu cálculo utiliza conhecimento de porcentagem.

A seguir, discute-se a capitalização simples.

## 5.2 Capitalização Simples

De acordo com Castelo Branco (2008, p. 17), na capitalização simples “o percentual de juros incide apenas sobre o valor do capital inicial, ou seja, sobre os juros gerados, a cada período, não incidirão novos juros”. A partir dessa definição e com base em Teixeira (2015) e Santos Júnior (2017), apresenta-se a fórmula (I) para a capitalização simples, considerando-se os juros acumulados no decorrer de um período n, em que C é o capital inicialmente investido a uma taxa de juros i. Assim, para o primeiro período, temos:

$$J_1 = Ci$$

Para o segundo período,

$$J_2 = Ci + Ci \therefore J_2 = 2Ci$$

Para o terceiro período,

$$J_3 = Ci + Ci + Ci \therefore J_3 = 3Ci$$

Continuando com este raciocínio, para n períodos, temos:

$$J = \sum_{k=1}^n kCi$$

Ou, apenas,

$$J = Cin \quad (I)$$

O montante simples  $M$  é obtido fazendo-se a substituição da fórmula (I) na fórmula  $M = C + J$ . Assim,

$$M = C + J \therefore M = C + Cin$$

Fazendo-se a fatoração do capital  $C$ , temos:

$$M = C(1 + in) \quad (II)$$

De acordo com Assaf Neto (2009, p.5), “são raras as operações financeiras e comerciais que formam temporalmente seus montantes de juros segundo o regime de capitalização simples”. A utilização dos juros simples limita-se, especialmente, às transações executadas em um período curto de tempo.

A seguir, discute-se a capitalização composta.

### 5.3 Capitalização Composta

A maioria das transações financeiras, em nosso país, adota o regime de capitalização composta. Segundo Samanez (2004):

O regime de juros compostos é o mais comum no dia-a-dia, no sistema financeiro e no cálculo econômico. Nesse regime os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte. Dizemos, então, que os juros são capitalizados (SAMANEZ, 2004, p. 15).

Os juros compostos comumente chamados como “juro sobre juro” estão relacionados com o montante composto. Sobre esse montante, observa Assaf Neto (2009):

O montante, por sua vez, passará a render juros no período seguinte formando um novo montante (constituído do capital inicial, dos juros acumulados e dos juros sobre os juros formados em períodos anteriores), e assim por diante (ASSAF NETO, 2009, p. 17)

A partir dessa definição e com base em Teixeira (2015) e Santos Júnior (2017), apresenta-se a fórmula (III) para esse montante composto associado ao capital inicial  $C$  investido a uma taxa de juros  $i$  e acumulado no decorrer de um período  $n$ . Assim, para o primeiro período, temos:  $M_1 = C(1 + i)$

Para o segundo período, temos que o capital é  $C = M_1$  e, dessa forma,

$$M_2 = M_1 (1 + i) \text{ ou } M_2 = C(1 + i)(1 + i)$$

Assim, temos o montante acumulado:

$$M_2 = C(1 + i)^2$$

O montante referente ao terceiro período,  $M_3$ , é encontrado considerando-se  $C = M_2$  da seguinte forma:  $M_3 = M_2(1 + i)$  ou  $M_3 = C(1 + i)^2(1 + i)$

Desse modo, obtemos o seguinte:  $M_3 = C(1 + i)^3$

Genericamente, considerando o capital  $C$  aplicado por um período  $n$  de tempo, a uma taxa de juros compostos  $i$ , temos que o montante acumulado é:

$$M = C(1 + i)^n \quad (\text{III})$$

Segundo Leonardo (2016, p. 16), “a aplicação em regime de juro composto cresce, em cada período, a uma razão multiplicativa constante. O capital aplicado e os montantes nos períodos seguintes ao da aplicação formam uma progressão geométrica”. Com isso, a progressão geométrica referida é:

$(C, C(1 + i), C(1 + i)^2, C(1 + i)^3, \dots)$ , a qual apresenta como razão  $1 + i$ .

Considerando-se o montante composto e o capital investido, o valor dos juros referentes ao período  $n$  é obtido da fórmula  $M = C + J$  e, dessa forma,

$$J = M_n - C \quad \text{ou} \quad J = C(1 + i)^n - C$$

e, fatorando  $C$ , resulta

$$J = C[(1 + i)^n - 1] \quad (\text{IV})$$

Dessa forma, temos a fórmula (IV) para a capitalização composta, considerando-se os juros acumulados no decorrer de um período  $n$ , em que  $C$  é o capital inicialmente investido a uma taxa de juros  $i$ .

A seguir, apresentam-se reflexões sobre o ensino de Juros Compostos no Ensino Médio.

#### **5.4 Reflexões sobre o ensino de Juros Compostos no Ensino Médio**

Nesta seção, apresentamos algumas reflexões a partir das visões de alguns autores sobre a importância do ensino dos juros compostos no Ensino Médio. Sobre essa questão, Miranda e Philippsen (2014) observam que:

É certo que os alunos apresentam certa dificuldade e não conseguem assimilar os conteúdos quando se envolve o ensino da Matemática, em especial, as porcentagens. É sabido também que, quando se insere os conteúdos propostos com uma contextualização que envolva problemas do cotidiano, o aluno se sente formador de seu próprio conhecimento, razão pela qual se justifica a inserção do conteúdo de juros simples e compostos mostrando a relevância deste conteúdo e a importância do mesmo para o exercício da cidadania, vez que a atual conjuntura econômica mundial exige conhecimentos do gênero para se entender os rumos da economia, mesmo do mais simples, como a economia doméstica ao mais complexo, como a oscilação das bolsas de valores (MIRANDA; PHILIPPSEN, 2014, p. 3).

Dessa forma, consideramos que o professor precisa mobilizar práticas pedagógicas e didáticas a partir da ótica do aluno, ajudando-os na elaboração de

técnicas para solucionar desafios e na construção de conceitos matemáticos. As relações da Matemática com o cotidiano requerem muito empenho do professor, o qual deve estar preparado para aprimorar-se intelectualmente, transformando-se em um pesquisador e qualificando-se profissionalmente. O domínio dos conteúdos matemáticos e as articulações com outras áreas do conhecimento e com a realidade dos estudantes são essenciais, particularmente quando se associa às percepções de Matemática Financeira apresentadas pelos estudantes, desejando-se diminuir os impactos da subjetividade.

Em sua pesquisa, Schneider (2008) também destaca a importância de se discutir os tópicos de Matemática Financeira de maneira contextualizada e associada com a realidade. Conforme o autor, sua pesquisa pode ter contribuído para a educação:

[...] alertando sobre o importante papel da escola na preparação dos alunos para a vida no seu contexto social e econômico, como cidadãos consumidores mais conscientes, capazes não só de controlar seus gastos, mas, também, de planejar seu futuro, sabendo administrar melhor seus recursos financeiros (SCHNEIDER, 2008, p. 90).

O autor também propôs um ensino contextualizado, pela utilização de recursos informativos relacionados ao dia a dia como revistas e jornais que abordem situações da Matemática Financeira, favorecendo a necessária educação financeira. Destacou-se a importância de se promover a autonomia dos alunos, trabalhando-se com informações relativas ao orçamento familiar, despesas de água, luz, empréstimos, a fim de serem associadas com os conceitos de porcentagem, juros, investimentos financeiros etc.

Conforme Rezende (2002), as concepções dos estudantes podem impactar a aprendizagem matemática, inclusive a Matemática Financeira, particularmente os tópicos porcentagem, juros simples e juros compostos, os quais estão associados à realidade do estudante. Dessa forma, esses tópicos são assimilados com mais facilidade, utilizando-se da abordagem da Modelagem Matemática, isto é, transformando-se situações do dia a dia em problemas matemáticos e mostrando-se resoluções com linguagem do cotidiano. Nesse sentido, Miranda e Philippsen (2014) destacam que se espera do professor de Matemática:

[...] uma maior atenção no preparo dos conteúdos relacionados com porcentagens, potência, raízes, funções, visando uma melhor qualidade na apresentação dos conteúdos juros simples e compostos, bem como uma melhor seleção das situações problemas primando por temas atuais e que despertem no aluno a necessidade de interpretar, apreender e buscar o

conhecimento necessário para a solução das propostas apresentadas (MIRANDA; PHILIPPSEN, 2014, p. 8).

Nesse aspecto, Matta (2016) enfatiza que o conteúdo de Matemática Financeira trabalhado no Ensino Médio necessita de uma revisão, pois limita-se a poucas aplicações não relacionadas com o dia a dia dos estudantes. Em seus estudos, Matta (2016) observa que muitos estudantes e suas famílias apresentaram diversas dívidas oriundas do consumo demasiado e relacionadas com cheque especial, cartão de crédito, financiamentos etc., situação geralmente provocada pela ignorância dos riscos associados com esse consumo demasiado. Desse modo, faz-se necessário que, ao terminar o Ensino Médio, o estudante esteja apto para escolher adequadamente a melhor alternativa entre a compra a prazo ou à vista, além de observar a correção dos juros divulgados pelos estabelecimentos nas compras parceladas e dos cartões de crédito.

Com esse propósito, o professor pode contribuir para que os alunos compreendam os mecanismos de aplicação de juros do cheque especial, do rendimento de investimentos e do financiamento de bens móveis e imóveis no país. Enfatizamos que o trabalho colaborativo desenvolvido no âmbito da nossa pesquisa destacou como um dos objetivos específicos apresentar situações-problema que envolvam juros compostos. As situações-problemas apresentadas estavam alinhadas com os propósitos discutidos nesta seção.

Novaes (2009) propõe a abordagem visual, na qual o conhecimento é elaborado pela concepção das operações financeiras adotando um recurso visual, chamado eixo das setas. A pesquisadora aborda os juros simples, procurando desenvolver atividades em articulação com conteúdos como progressão aritmética e função afim; aborda os juros compostos, procurando desenvolver atividades em articulação com conteúdos como equações exponenciais e progressão geométrica. A abordagem é baseada em um eixo de setas, isto é, um eixo horizontal adotado como escala de tempo, que possibilita uma visualização da variação do capital, favorecendo o entendimento do conteúdo, ajudando e incentivando o estudante no desenvolvimento de sua técnica pessoal, além de favorecer a reflexão dos alunos em detrimento da mera memorização de fórmulas.

Em sua pesquisa, Cóser Filho (2008) analisa a abordagem do conteúdo juros compostos pelos livros didáticos e observa que não ocorre uma padronização nessa abordagem. Segundo o autor:

[...] alguns livros abordam o assunto entre os estudos de funções exponenciais e progressões geométricas; outros o fazem após o estudo das progressões e, em um caso específico, a abordagem ocorre consideravelmente antes dos dois conceitos citados, sendo estudada praticamente da mesma maneira como encerramento dos capítulos das funções exponenciais e das progressões; e novamente uma terceira vez, ao final do Ensino Médio (CÓSER FILHO, 2008, p. 57).

Nesse aspecto, ressaltamos que um dos objetivos específicos do trabalho colaborativo desenvolvido no âmbito da nossa pesquisa foi articular o ensino de juros compostos com outros conteúdos matemáticos como funções, geometria analítica e vetores. As funções abordadas foram a função exponencial e a função afim.

Em sua pesquisa, Caramori (2009) pesquisa as opiniões dos docentes de uma formação continuada relativas à utilização da calculadora HP-12C e do *software Excel* para a abordagem de conteúdos de Matemática Financeira. Nessa pesquisa, foram apresentados problemas matemáticos relacionados à porcentagem, juros simples e compostos, articulando-se com o simulador da calculadora HP-12C e com a planilha do *software Excel*.

Segundo a autora, a investigação revelou que, em razão da linguagem de programação da calculadora HP-12C, os docentes acharam complicada a sua utilização; mas, compreenderam que ela seria um recurso importante na abordagem dos conteúdos considerados. Sobre a utilização da planilha do *software Excel*, em razão da visualização, os dados revelaram que o recurso estimula o interesse dos alunos para compreender melhor os tópicos da Matemática Financeira.

Na pesquisa de Costa (2015), adotaram-se estratégias que pudessem incentivar os estudantes a procurar novos conhecimentos, favorecendo a formação de cidadãos críticos frente ao mundo explorador em que estamos inseridos. Para embasar a sua pesquisa, o autor fez as seguintes considerações: estamos envolvidos em transações comerciais em que determinados sujeitos almejam apenas a aquisição de lucro, explorando outros sujeitos; além disso, a Matemática Financeira costuma ser abordada de forma superficial nas instituições, levando os estudantes apenas a memorizar e aplicar fórmulas, ao invés de fazer uma comparação com os contextos financeiros que os cercam. Dessa forma, os tópicos ensinados acabam não apresentando utilidade para as tomadas de decisões nas transações financeiras em que esses estudantes tomarão parte.

De acordo com Costa (2015), os estudantes da educação básica, atualmente, encontram-se envolvidos por diversas tecnologias, razão pela qual não despertam

interesse pelos tópicos trabalhados nas escolas. Com isso, para abordar cada situação proposta no seu trabalho, o autor adotou os *softwares* GeoGebra e o WxMaxima, assim como a planilha do *Excel*, sugerindo recursos tecnológicos para que os estudantes se sentissem mais motivados pelo conhecimento e os utilizassem para interpretar, criticar e modelar a realidade financeira que os rodeia, tanto na escola, como no dia a dia. Esses *softwares* auxiliaram as atividades que envolveram operações fundamentais, simplificação de razões, fatoração, resolução de equações e sistema de equações e construção de gráficos.

Nesse aspecto, enfatizamos que o trabalho colaborativo, no âmbito desta pesquisa, apresentou, durante seu desenvolvimento, a seguinte questão norteadora colocada pelas professoras: “Quais recursos poderão ser desenvolvidos, de forma colaborativa e remota, a fim de possibilitar a compreensão do conceito de regime de capitalização composta?”. A questão norteadora acima destacou como objetivo geral: desenvolver recursos que possibilitem a compreensão do conceito de regime de capitalização composta. Foram destacados os seguintes objetivos específicos: apresentar situações-problema que envolvam juros compostos; adotar o *software* GeoGebra, a História da Matemática e jogos como recursos para o ensino de juros compostos; articular o ensino de juros compostos com outros conteúdos matemáticos como funções, geometria analítica e vetores.

Conforme discutido no Capítulo 4 desta pesquisa, o principal recurso tecnológico digital utilizado no trabalho colaborativo foi o *software* GeoGebra, o qual foi importante na construção de documentos para o ensino de juros compostos, envolvendo a modelagem de situações-problema, a articulação entre os registros de representação numérico, algébrico e gráfico, além do desenvolvimento de processos de *feedback* automático.

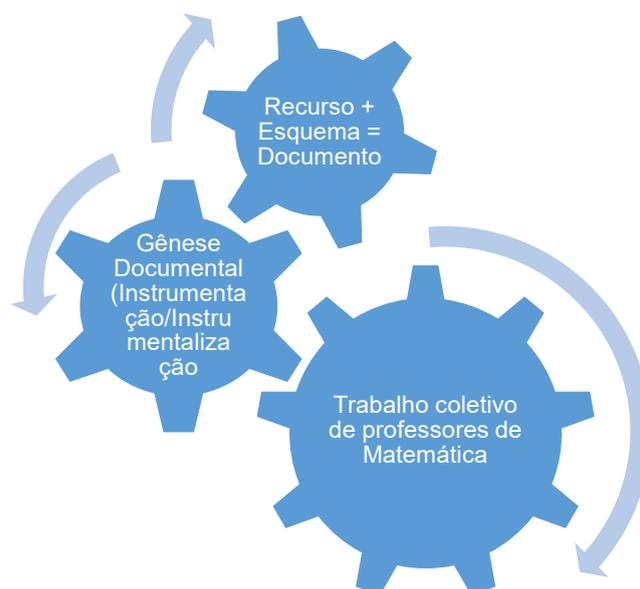
Deste modo, neste capítulo, tecemos considerações sobre o ensino de Juros Compostos, emergindo uma questão norteadora por parte das professoras e, no próximo capítulo, apresentaremos a revisão de literatura desta pesquisa.

## CAPÍTULO 6 – REVISÃO DE LITERATURA

De acordo com Creswell (2010), a revisão de literatura em uma pesquisa qualitativa engloba como uma de suas funções apresentar resultados de pesquisas associadas àquela que está sendo desenvolvida, incrementando essas investigações. Nesse aspecto, realizamos a revisão da literatura por meio dos bancos de dados Portal da CAPES<sup>9</sup> e Google Acadêmico<sup>10</sup>, pois ambos os bancos oferecem um mecanismo para uma vasta procura de literatura em diversas áreas e fontes, como dissertações, teses, livros e artigos de periódicos e anais de eventos. Por essa busca, encontramos pesquisas brasileiras e estrangeiras associadas a esta investigação.

Para escolha das produções, inicialmente procuramos definir as palavras-chave para a procura. Desejando uma adequada reflexão nessa busca, construímos o esquema da Figura 5, o qual ilustra o processo contínuo da Gênese Documental gerada por um trabalho coletivo de professores, produzindo constantemente documentos pela associação de recursos com novos esquemas de utilização.

Figura 5 – Esquema de palavras-chave



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Em seguida, acessamos o Google Acadêmico e Portal da CAPES e digitamos

<sup>9</sup> <https://www.periodicos.capes.gov.br/>

<sup>10</sup> <https://scholar.google.com.br/?hl=pt>

palavras-chave, como “Gênese Documental”, “Abordagem Documental do Didático”, “Trabalho Colaborativo”, “Trabalho coletivo”, “Documentary Genesis”, “Documentational Approach”, “Teacher Collaboration” e “Teachers’ Collective Work”. A busca foi feita em março de 2020, obtendo-se 48 pesquisas (entre teses, dissertações, capítulos de livros, artigos de periódicos e publicações em anais de eventos). Depois dessa busca, foi realizada uma seleção, fazendo-se a leitura dos resumos das pesquisas e levando-se em consideração as que mais se aproximavam desta investigação, adotando o referencial teórico da ADD em contexto de trabalho coletivo. Esse processo culminou na revisão da literatura que apresentamos.

Os resultados da seleção estão apresentados no Quadro 2 formado por cinco colunas correspondentes, nessa ordem, ao título da obra, nome dos autores, fonte, tipo e ano de publicação. Quanto à coluna correspondente à fonte de publicação, referimo-nos à instituição, no caso de teses; ao periódico ou evento, no caso de artigos e ao livro, no caso de capítulo de livro. Na coluna correspondente ao tipo de publicação, fazemos a discriminação dos trabalhos, utilizando os seguintes códigos: A (artigo) e C (capítulo de livro).

Quadro 2 – Lista das pesquisas comentadas na Revisão de Literatura

<b>TÍTULO</b>	<b>AUTORES</b>	<b>FONTE</b>	<b>TIPO</b>	<b>ANO</b>
Da produção coletiva de livros didáticos digitais aos usos feitos por professores de matemática: o caso do grupo francês Sésamath	ROCHA, K. M.; TROUCHE, L.	EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - vol. 6 - número 3.	A	2015
Collective design of an e-textbook: teachers’ collective documentation	GUEUDET, G.; PEPIN, B.; SABRA, H.; TROUCHE, L.	Journal of Mathematics Teacher Education, 19(2-3), 187- 203	A	2016
Teachers’ collective documentation work: A case study on tolerance intervals.	GUEUDET, G.; PARRA, V.	Proceedings of the Tenth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education. (CERME 10, February 1 – 5, 2017). (p. 3707-	A	2017

		3715).		
Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources.	PEPIN, B.; GUEUDET, G.; TROUCHE, L.	ZDM Mathematics Education, 49(5), 799- 812.	A	2017
Trabalho Coletivo de Professores de Matemática: um olhar na perspectiva da Gênese Documental	LIMA, I.; TRGALOVÁ, J.	EMD, v.5 n.3, p. 289-304.	A	2018
Abordagem Documental do Didático e o Ensino de Equação do 1º Grau na Educação de Jovens e Adultos – Ensino Médio.	MACHADO JÚNIOR, S. R. N.; ESPÍNDOLA, E. B. M.; TRGALOVA, J.; LUBERIAGA, E.	RPEM, Campo Mourão, PR, v.7, n.13, p.270-294, jan.-jun.	A	2018
A construção de atividades para o ensino de sequências numéricas: Uma análise pela lente da Abordagem Documental do Didático	XAVIER NETO, A. L.; SILVA, M. J. F.; TROUCHE, L.	Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.21, n.5, p .300-314.	A	2019
Teachers' Collective Work Inside and Outside School as an Essential Source of Mathematics Teachers' Documentation Work: Experiences from Japan and China	MIYAKAWA, T.; XU, B.	The 'Resource' Approach to Mathematics Education	C	2019
Identification Processes in Teacher Collaboration During Professional	HOYOS, V.; GARZA, R.	ICMI STUDY 25	A	2020

Development: Documentary Genesis in a Context of School Mathematics curriculum Reform				
Banco geométrico: Gênese Documental e orquestração instrumental	ALMEIDA, M. S.; ESPÍNDOLA, E. B. M.; COSTA, P. R. B.; MELLO, T. L.; DAMASCENA, J. S.	REVEMAT, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 01-22.	A	2020
A Gênese Documental e o contexto remoto no desenvolvimento de uma formação continuada de professores	ABAR, C. A. A. P.; DIAS, A. O.	Compreender o trabalho dos professores brasileiros do ensino básico: uma abordagem pelos recursos	C	2021
Considerações sobre a interação entre professores e pesquisadores no desenvolvimento do Projeto PREMa – EB	IGLIORI, S. B. C., ABAR, C. A. A. P.; ALMEIDA, C. B.	Ensino Em Re- Vista, 29(Continua), e019., p. 1-20	A	2022

Fonte: Próprio autor

Desse modo, neste capítulo, destacamos pesquisas envolvendo trabalhos coletivos de professores de Matemática sob o prisma da Gênese Documental.

### 6.1 Rocha e Trouche (2015)

A pesquisa de Rocha e Trouche (2015) teve como objetivo contribuir para a discussão "dos artefatos aos instrumentos: o trabalho individual e coletivo do professor de matemática" (ROCHA; TROUCHE, 2015, p. 1). O referencial teórico utilizado foi a Abordagem Documental do Didático, sendo os autores envolvidos no projeto nacional francês ReVEA (Recursos vivos para o ensino e a aprendizagem, [www.anr-revea.fr](http://www.anr-revea.fr)) que se interessa pelo trabalho documental de professores em quatro disciplinas escolares (matemática, física e química, inglês e tecnologia). Esse artigo está inscrito nesse projeto, mais especificamente, na tese da pesquisadora em Educação Matemática, Katiane Rocha, que se interessa pelo processo de design e usos do livro didático digital desenvolvido pela associação Sésamath.

Segundo os autores, a Associação Sésamath é uma "organização aprendiz" na qual "o indivíduo se anula diante do coletivo" e que os recursos têm uma "validação

colaborativa" em um espírito de "nunca criticar por criticar". Nessa associação, a produção de recursos é, na maior parte do tempo, a distância e todos os recursos são livres, podendo ser encontrados no site da associação ([www.sesamath.net](http://www.sesamath.net)). Os professores que participam desse processo não são reconhecidos como autores dos recursos, eles são apenas professores voluntários e não assalariados. Cita-se Gringoz (2015), segundo o qual, é o único caso nos direitos franceses em que uma obra, o autor da obra, é uma pessoa moral. É quando a obra é coletiva e baseada no trabalho colaborativo.

Os autores destacam que, na associação, há um grupo piloto, que se encarrega de acompanhar as evoluções da produção escrita dos capítulos, de assinalar a necessidade de finalizar uma discussão, de coordenar a produção em relação ao tempo, de apontar as partes que precisam ser relidas etc. Ocorre um trabalho contínuo de transformação e aperfeiçoamento de recursos: os professores-designers fazem, ao seu tempo, modificações ou apontam problemas que eles buscam resolver juntos. E a relação entre os membros nesse processo busca ser a mais cordial e convivial possível.

Com relação à Labomep, os autores enfatizam que é uma plataforma que permite ao professor propor planos de estudos para os estudantes por meio da criação de sessões, podendo ser utilizado tanto na sala de aula quanto em casa. Além de permitir acompanhar as evoluções dos estudantes.

Sobre o livro didático, os autores destacam que é possível encontrar sua versão digital gratuita no site, enquanto a versão impressa deve ser adquirida. Em relação aos livros didáticos para o ensino fundamental, cada capítulo é dividido em três partes: atividades de descoberta; métodos e noções essenciais; e exercícios do tipo: treinamento, aprofundamento, trabalho em grupo, alternativa e um exercício considerado lúdico. Conforme os autores, é importante destacar a diferença entre o livro didático digital e o impresso, pois o primeiro não se trata apenas do formato pdf do segundo. O livro digital é repleto de exercícios que são ligados a ferramentas interativas. Muitos exercícios, tanto do livro didático quanto do caderno de exercícios, possuem ajudas interativas que são feitas no formato apresentação - usando os efeitos similares aos de uma apresentação em slides: aparecer, desaparecer, riscar etc. - simulando as etapas das explicações de métodos ou resoluções de exercícios.

Quanto aos recursos para os professores, os autores afirmam que a plataforma

Sésaprof dá acesso a todos os recursos (Labomep, livro digital, Tracenpoche, entre outros) e pode ser usada para estabelecer comunicação com os membros da associação. Também afirmam que, entre as ferramentas para auxiliar o ensino, o Tracenpoche é um aplicativo que permite realizar algumas construções geométricas (usando segmentos, retas, interseções entre retas, ângulos, entre outros). Tem-se, também, o InstrumenPoche que é um aplicativo que permite a utilização de instrumentos tais como compasso, esquadro, transferidor, entre outros.

Em relação ao acompanhamento das aulas de Matemática da professora Anna, os autores afirmam que, por meio das observações da sala de aula (durante três meses no 6º ano do ensino fundamental), constatou-se que Anna utilizou diversos recursos: três livros didáticos diferentes (incluindo a projeção do livro didático Sésamath), imagens retiradas da internet, brochuras produzidas pelo grupo IREM, jogos *online*, desafios matemáticos propostos pelos alunos e o *software* GeoGebra. Descobriu-se a origem desses exercícios por meio da caixa de diálogo presente na RI box, na qual Anna colocou, também, os recursos que ela utilizou para preparar sua classe.

Quanto à trajetória documental de Anna, os autores destacam que ela usava a plataforma, pois podia acessar atividades propostas por vários professores, atividades que muitas vezes ela desconhecia, mas que era possível de entender a proposta por meio da explicação do professor. Entretanto, com o tempo, essas explicações desapareceram e ela perdeu o interesse por utilizar tais recursos. Conforme os autores, outro ponto que a fez utilizar menos os recursos Sésamath é que ela achou, no caso do livro didático, que o fato de pessoas diferentes trabalharem em capítulos diferentes deixa a proposta não muito coerente e, ainda, quando ela queria usar exercícios do livro com os alunos que estão mais avançados em relação ao conteúdo, a versão do livro em papel apresentava poucos exercícios.

Explorando-se a trajetória documental de Anna, os autores entenderam sua maneira diferenciada de usar os recursos Sésamath, destacando que uma ferramenta que ajudou a entender sua trajetória documental e sua influência nos usos do Sésamath é o RI box, pois a interação com a professora e o fornecimento de seus recursos foi primordial para essa análise;

Em relação ao conjunto de recursos produzidos pelo Sésamath, os autores perceberam a busca por fornecer um corpus de recursos que suprisse as

necessidades dos professores, uma vontade de ser um sistema completo, todavia, destacam que é importante saber quais desses recursos e por quais razões são usados efetivamente em sala. Nesse estudo, os autores levam esse aspecto em consideração e, por isso, foi feito um questionário com vários professores do ensino fundamental para identificar quais recursos Sésamath eles usaram e com qual intensidade, bem como seus pontos de vistas sobre os recursos propostos pela associação.

Para uma melhor compreensão do leitor, reforçamos as discussões com referências a outras pesquisas relacionadas ao trabalho de Rocha e Trouche (2015):

Essa pesquisa relaciona-se com o trabalho de Gueudet *et al.* (2016) discutido mais adiante, pois ambos foram desenvolvidos no âmbito da associação francesa Sésamath. Nesse aspecto, é interessante comentarmos a teoria de Comunidade de Prática (WENGER, 1998), pois os trabalhos realizados nessa associação estão respaldados nessa teoria. De acordo com Benites-Bonetti, Paulin e Richit (2018):

A teoria de Comunidade de Prática, do pesquisador Etienne Wenger e da antropóloga Jean Lave, surge em 1991 a partir da idealização de um modelo de aprendizagem que pudesse ocorrer fora das fronteiras de organizações formais, na qual as pessoas pudessem se unir, por meio de um tema de interesse, e encontrar meios para melhorarem o que fazem. Estes autores iniciaram uma discussão sobre a Teoria Social de Aprendizagem, em que a aprendizagem é vista inserida em um contexto de experiências, como um fenômeno social que reflete a natureza social dos seres humanos (BENITES-BONETTI; PAULIN; RICHIT, 2018, p. 211).

Percebemos que essa teoria conquistou notoriedade e repercussão, pois as Comunidades de Prática são eficazes em permitir a partilha de saberes entre sujeitos e grupos, motivando os indivíduos e ensejando o desenvolvimento pessoal e profissional, inclusive viabilizando a atualização das suas atividades profissionais. Nesse aspecto, Rodrigues, Silva e Miskulin (2015) mostram a Comunidade de Prática como um ambiente de aprendizagem favorável à ação formativa de professores, pois permite a implementação de práticas colaborativas e reflexivas entre os seus participantes. Nesse ambiente, observa-se um comprometimento dos seus membros, numa dinâmica de interação e colaboração, procurando, pelas práticas compartilhadas, maneiras de resolver ou compreender uma determinada questão.

Conforme Wenger (2001), uma Comunidade de Prática se estabelece por meio de três elementos: a comunidade, o seu domínio e a sua prática. A comunidade é um coletivo de sujeitos que compartilham um domínio comum, articulando, definindo práticas, desenvolvendo relações e partilhando saberes. O domínio comum determina

a identidade da Comunidade de Prática, distinguindo-a de um coletivo de sujeitos e refere-se à preocupação da comunidade (um tema, um problema, uma necessidade, um projeto, etc.). A prática nesse ambiente, segundo Wenger (2001), apresenta três dimensões: engajamento/compromisso mútuo, empreendimento conjunto e repertório compartilhado. É uma coletânea de ações de características diferenciadas como debater, analisar, utilizar os instrumentos tecnológicos, partilhar dados, estruturar formas de comunicação, documentar, tomar decisões.

Diante do exposto, consideramos que a pesquisa de Rocha e Trouche (2015) contribuiu com a nossa pesquisa, mostrando-nos que ambientes de trabalho colaborativo são eficazes em permitir a partilha de saberes entre sujeitos e grupos, motivando os indivíduos e ensejando o desenvolvimento pessoal e profissional, inclusive viabilizando a atualização das suas atividades profissionais.

## **6.2 Gueudet *et al.* (2016)**

No trabalho de Gueudet *et al.* (2016), os autores analisam gêneses documentais ocorrendo ao longo do trabalho de uma Comunidade de Prática (CoP) (WENGER, 1998) projetando um novo livro eletrônico para a 10<sup>a</sup> série, dentro da associação francesa Sésamath. Esta CoP foi seguida de junho de 2009 a dezembro de 2013. Os autores afirmam que este trabalho de design de longo prazo e a natureza “extraordinária” do objetivo (projetar um livro de texto eletrônico não é uma atividade comum para um professor de matemática do ensino médio) produziram fenômenos concernentes à Gênese Documental diferentes do que discutido anteriormente.

Segundo os autores, um dos objetivos compartilhados da CoP no início de seu trabalho era: decidir a estrutura do e-textbook. Eles primeiro estabeleceram juntos uma lista de 38 "átomos", com base no currículo oficial - esses átomos correspondiam a competências do novo currículo oficial. Em suas discussões, os autores observaram um teorema em ação compartilhado: precisamos apoiar os professores na organização de seus cursos de acordo com competências [currículo nacional]. Após essa primeira fase, os membros da CoP discutiram como esses átomos deviam ser organizados no livro eletrônico. Os professores da CoP teriam gostado de uma estrutura de rede, na qual todos os caminhos potenciais (considerados pelos professores) eram possíveis. Contudo, eles perceberam que isso não era possível (porque, se uma noção de geometria é necessária em um exercício sobre funções, o

curso de geometria deve ser colocado antes desse exercício).

As discussões, conforme os autores, conduziram os membros da CoP a decidir que o livro eletrônico seria estruturado em capítulos. Então, cada capítulo teria um kernel, uma lista de técnicas com uma determinada ordem. Essa lista determinou o conteúdo dos fundamentos, as atividades introdutórias e os exercícios básicos. Fora desse kernel, exercícios mais complexos foram propostos, que poderiam corresponder a outros, ou vários kernels.

A CoP desenvolveu um documento compartilhado com o objetivo de “escolher a estrutura de um livro didático eletrônico da 10ª série”. Este documento englobava vários recursos, em particular os átomos e esquemas de uso compartilhados para esses recursos. Em particular, os membros da CoP desenvolveram juntos teoremas em ação, como “não é possível deixar a possibilidade de nenhum caminho para os usuários”; e “as técnicas fornecem a coerência de um capítulo”.

Os autores destacam que, neste exemplo, os membros da CoP desenvolveram documentos comuns, relativos ao *design* de um *e-textbook*. Provavelmente, o uso do livro didático eletrônico em sala de aula seria diferente, por causa da pré-existência de esquemas. Mas, para a atividade de criação de um *e-textbook*, eles desenvolveram novos e comuns documentos, em particular esquemas comuns.

Diante do exposto, consideramos que a pesquisa de Gueudet *et al.* (2016) contribuiu com a nossa pesquisa, mostrando-nos que ambientes de trabalho colaborativo são eficazes em permitir a partilha de saberes entre sujeitos e grupos, ensejando o desenvolvimento pessoal e profissional e favorecendo reflexões sobre todo o processo e conhecimentos subjacentes que o docente revela na ação de pensar ou repensar um recurso, algo imediatamente relacionado com os invariantes operatórios discutidos por Vergnaud (2009).

### **6.3 Gueudet e Parra (2017)**

A pesquisa de Gueudet e Parra (2017) relata o trabalho de documentação de duas professoras de matemática (Valeria e Gwen) trabalhando juntas. De acordo com os autores, ambas eram professoras experientes e assumiam uma classe de 11ª série (especializada em matemática e economia) em 2015-2016 quando as acompanharam. Juntas decidiram traçar seu curso sobre os intervalos de tolerância (com a lei binomial), e propor uma avaliação comum às duas turmas ao final do curso.

Os autores seguiram o design e implementação desse curso, com o método de investigação reflexiva (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2019) associado à DAD.

Os autores analisaram os dados coletados ao final do acompanhamento e identificaram os documentos desenvolvidos pelas duas professoras. Apesar de sua forte intenção de trabalho coletivo, os autores argumentam que todos esses documentos eram pelo menos parcialmente diferentes. Afirmam que a principal razão para isso é que, como professoras experientes, elas anteriormente desenvolveram seus próprios esquemas individuais, relativos ao ensino de intervalos de tolerância.

Os autores citam, como exemplo, que para o objetivo “Ensinar como encontrar um intervalo de tolerância com uma lei binomial”, Valeria desenvolveu um esquema que abrangeu o seguinte teorema em ação: “os alunos devem aprender a ler a tabela da lei binomial e encontrar nela os extremos do intervalo”. Gwen tinha diferentes teoremas em ação, em particular: “a técnica para encontrar o intervalo para a lei binomial é muito complexa e nunca avaliada no bacharelado”; “os alunos devem aprender a programar sua calculadora”.

De acordo com os autores, Gwen propôs trabalhar isso em um exercício com os alunos, sendo necessário para escrever (na calculadora) um programa que dá o intervalo de tolerância da lei binomial, uma vez que o parâmetro apropriado tenha sido inserido. Valeria aceitou e realmente usou esse exercício. Para ela isso foi apenas um exercício, o programa não foi utilizado além disso (ela não queria que seus alunos usassem a calculadora como uma “caixa preta”); enquanto para Gwen, a calculadora programada foi então usada em cada exercício que requeria encontrar um intervalo de tolerância.

A avaliação comum, segundo os autores, incluiu um exercício sobre os intervalos de tolerância. Elas escolheram esse exercício juntas; o texto do exercício incorporou um extrato de diário, e isso correspondeu a um invariante operacional compartilhado: os alunos devem aprender a encontrar informações em um texto. No entanto, as perguntas foram modificadas, para propor os dois métodos diferentes para encontrar um intervalo de tolerância: com a tabela da lei binomial, para a classe de Valéria; com a calculadora, para a aula de Gwen.

Os autores constatarem vários aspectos desse exemplo. Em primeiro lugar, quando existem invariantes operacionais comuns, os professores podem desenvolver documentos compartilhados (pelo menos parcialmente compartilhados). Esta

existência de invariantes operacionais compartilhados certamente fomentam o trabalho comum.

Em segundo lugar, segundo os autores, quando os invariantes operacionais são diferentes, mesmo um trabalho coletivo leva a diferentes documentos. Isso também pode explicar por que os professores usando o mesmo recurso (por exemplo, um livro didático) funcionam de maneira diferente (com o livro didático) em sala de aula. Os invariantes operacionais podem evoluir ao longo do trabalho coletivo: Valeria desenvolveu um novo teorema em ação sobre o interesse de escrever um programa na calculadora para intervalos de tolerância. No entanto, durante um trabalho coletivo de curto prazo, os invariantes operacionais tendem a permanecer estáveis.

Diante do exposto, consideramos que a pesquisa de Gueudet e Parra (2017) contribuiu com esta pesquisa, mostrando-nos que ambientes de trabalho colaborativo são eficazes em permitir a partilha de saberes entre sujeitos e grupos, ensejando o desenvolvimento pessoal e profissional e favorecendo reflexões sobre todo o processo e conhecimentos subjacentes que o docente revela na ação de pensar ou repensar um recurso, algo imediatamente relacionado com os invariantes operatórios discutidos por Vergnaud (2009).

#### **6.4 Pepin, Gueudet e Trouche (2017)**

A pesquisa relatada em Pepin, Gueudet e Trouche (2017) diz respeito ao trabalho de documentação de um professor norueguês (Cora) no contexto de um grande projeto europeu (PRIMAS - <https://primasproject.eu>), em que se trabalhou em colaboração com um grupo de professores de matemática e ciências de sua região. O objetivo do projeto PRIMAS era desenvolver capacidade (em termos de ensino e aprendizagem baseados em investigação) na educação matemática e científica nas escolas; daí desenvolver líderes instrucionais ("multiplicadores") que, por sua vez, trabalhariam com pequenos grupos de colegas em escola. O projeto PRIMAS na Noruega ofereceu, e Cora participou, de sessões de desenvolvimento profissional (PD) durante 18 meses, além de seu trabalho com colegas em sua escola entre sessões de PD.

De acordo com os autores, o projeto PRIMAS forneceu recursos curriculares concebidos por 'designers especializados' (ou seja, acadêmicos que trabalham nas universidades das equipes parceiras). Esses materiais incluíam: tarefas matemáticas

e científicas e módulos desenvolvidos para sessões de desenvolvimento profissional de professores. Eles foram vistos como a base para o trabalho / sessões com colegas na escola.

Os seguintes dados foram analisados pelos autores: o uso geral de Cora dos módulos PRIMAS (entrevista; Representação esquemática do sistema de recursos de Cora) e sua adaptação e uso de um módulo PRIMAS específico e tarefas associadas sobre 'divisão de frações' (preparação da aula; vídeo de observação; entrevista). Os resultados, segundo os autores, mostraram que em termos de trabalho de documentação, Cora atuou em três níveis, sendo que os dois primeiros relacionam-se ao redesenho coletivo e o terceiro ao redesenho individual de recursos curriculares: o redesenho de tarefas e módulos de DP nas sessões de DP da universidade (de modo que eles correspondessem aos contextos escolares norueguês e individuais); o redesenho de tarefas (e aulas usando essas tarefas) nas sessões de DP nas escolas de Cora; e o redesenho de tarefas (e aulas) para o próprio ensino de Cora.

Os autores enfatizam que Cora redesenhou e adaptou as tarefas digitais do PRIMAS, individualmente para suas próprias aulas, além de seu trabalho de redesenho com e para seus colegas em seu papel de multiplicadora, bem como nas sessões de DP da universidade. Em termos de esquemas, o objetivo maior de Cora era desenvolver suas habilidades de aprendizagem baseadas em investigação, que incluía como regra geral de ação ouvir atentamente os alunos e construir suas aulas em torno do aluno pensante.

Portanto, os princípios do bom questionamento eram importantes para ela - aqui os autores observam que inicialmente ela tinha invariantes operacionais compatíveis com PRIMAS: por exemplo, Bom questionamento como um conceito em ação. Ela usou os módulos PRIMAS, junto com seus colegas, para desenvolver boas habilidades de questionamento e, por sua vez, aumentar sua compreensão do pensamento dos alunos.

Os autores destacam que os recursos digitais do PRIMAS forneceram a ela (e ao grupo) exemplos promissores de como adaptar suas habilidades de questionamento. Essas adaptações ilustraram o que os autores chamam de "flexibilidade de design": por exemplo, adaptando as ferramentas digitais do PRIMAS para aulas, Cora desenvolveu formas flexíveis de questionamento a fim de orientar o pensamento do aluno e ajudá-lo a dar sentido às atividades propostas. Seus

invariantes operacionais relacionaram-se à aplicação de princípios de questionamento a diferentes áreas temáticas da educação matemática, e Cora adaptou seus projetos ao contexto de ensino.

Em termos de inferências, tarefas de diferenciação para públicos diferentes, e com recursos diversos, faziam parte da expectativa de Cora para atender indivíduos em sua classe. Com isso, eles faziam parte dos esquemas de Cora que eram reforçados e desenvolvidos pelo seu trabalho no PRIMAS, consoante os autores.

Os autores constataam que, em primeiro lugar, os professores trabalham em diferentes níveis com e em coletivos; em segundo lugar, enquanto o PRIMAS forneceu os recursos e projetos / módulos coletivos, Cora trabalhou com diferentes esquemas compartilhados em diferentes coletivos: nas sessões de DP da universidade, ela desenvolveu esquemas compartilhados ligados a adaptações de recursos ao contexto da “cultura de currículo” norueguesa (por exemplo, esquemas ligados ao questionamento e avaliação formativa).

Nas sessões de DP da escola, conforme os autores, recursos específicos e esquemas associados foram selecionados (por Cora e colegas) e estes foram “misturados” com esquemas individuais, a fim de desenvolver uma certa coerência de instrução em toda a série / s; e no trabalho de documentação individual de Cora, ela desenvolveu “novos” esquemas considerando exemplos promissores de recursos PRIMAS e incluindo-os em seu novos esquemas individuais.

Para os autores, ficou claro que, em cada nível, os recursos PRIMAS (projetados) tiveram um impacto em esquemas associados a professores; ao mesmo tempo, nos diferentes coletivos, Cora e o respectivo grupo de professores compartilharam e desenvolveram seus esquemas. Conforme os autores, isso ficou evidente nas entrevistas e observações da sessão, quando os professores falaram sobre seus pensamentos e práticas matemático-didáticas.

Diante do exposto, consideramos que a pesquisa de Pepin, Gueudet e Trouche (2017) contribuiu com a nossa pesquisa, mostrando-nos que ambientes de trabalho colaborativo são eficazes em permitir a partilha de saberes entre sujeitos e grupos, ensejando o desenvolvimento pessoal e profissional e favorecendo reflexões sobre todo o processo e conhecimentos subjacentes que o docente revela na ação de pensar ou repensar um recurso, algo imediatamente relacionado com os invariantes operatórios discutidos por Vergnaud (2009).

### 6.5 Lima e Trgalová (2018)

A pesquisa de Lima e Trgalová (2018) teve o objetivo de estudar como os professores escolhiam, dentre os recursos disponíveis, aqueles que consideravam mais pertinentes para o projeto de ensino e como eles os transformavam (criação de esquemas). Os sujeitos da pesquisa foram três professores franceses realizando um trabalho colaborativo e que se envolveram com a mesma atividade relacionada com o conteúdo matemático “Simetria Axial”. O público alvo da aplicação foi uma classe equivalente ao sexto ano no Brasil.

Os autores utilizaram como teorias a Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2010) e a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1998), procurando olhar não só o trabalho do professor em relação à transformação do recurso, mas também o que eles pretendiam provocar com tal transformação, na aprendizagem do aluno.

A metodologia de ensino empregada na pesquisa foi a Progressão espiral (BARTOLUCCI, 2004). Conforme os autores, esse tipo de organização de ensino pode permitir a articulação de vários conhecimentos matemáticos e retomá-los durante todo o ano escolar, por meio de situações bem escolhidas. O acompanhamento foi feito no ano de 2012, através das postagens e trocas de mensagem entre os professores.

Com relação à construção do recurso, os autores destacam que a construção das atividades foi realizada à distância; depois de aplicada em sala de aula por um dos professores, a experiência era compartilhada *online* com os demais.

Os autores enfatizam que a coleta de dados ocorreu a partir de um espaço na internet, onde os professores depositavam os recursos, informações que utilizavam, troca de mensagens, artigos e fichas de atividades. Além disso, foram feitas entrevistas individuais semiestruturadas, buscando informações tais como motivação, como escolheu o recurso e sob quais critérios, o lugar do livro didático como recurso, trabalho coletivo, vantagens e inconvenientes observados.

O trabalho documental do professor foi observado pelos autores a partir de questões sobre o tipo de recurso, critérios de escolha e as transformações dos recursos escolhidos. Como resultado desse trabalho documental, conforme os autores, foi obtido o recurso: “les napperons” – que se trata de uma situação proposta por Peltier (2001) para trabalhar simetria axial.

Com relação ao trabalho coletivo, os autores consideram que houve uma forte articulação dos professores, sobretudo na concepção e escolha das atividades, compartilhamento de conhecimentos, o que resultou na elaboração de atividades de boa qualidade. Apontam o trabalho coletivo como não limitado apenas a divisão de tarefas, mas permitindo diminuir a carga de trabalho dos envolvidos.

Com relação ao trabalho documental, os autores consideram que os professores utilizaram a internet como fonte principal de pesquisa e alguns documentos de professores franceses que utilizaram a metodologia de progressão espiral. Observou-se que as transformações realizadas no recurso e as escolhas das variáveis didáticas consideradas pelos professores foram no sentido de melhor atender às necessidades dos alunos e de sua sala de aula.

Com relação às variáveis didáticas inseridas, os autores exemplificam a utilização de papel quadriculado para simplificar a atividade escolhida, a escolha da quantidade de eixos de simetria, para comparações, apresentação dos modelos em cor preta para evidenciar os detalhes de recorte. Os autores também observam que foi possível a aquisição de novos saberes por parte dos professores a partir da escolha da mudança de metodologia de ensino (Progressão Espiral).

Para uma melhor compreensão do leitor, reforçamos as discussões com referências a outras pesquisas relacionadas ao trabalho de Lima e Trgalová (2018):

Convém destacar que a primeira autora desse trabalho foi responsável por uma pesquisa anterior (LIMA, 2006), na qual analisou livros didáticos utilizados na França, enumerando os tipos de tarefas sugeridas nesses livros sobre o conteúdo simetria axial:

Reconhecimento de figuras simétricas com relação a uma reta  $d$ ; reconhecimento dos eixos de simetria; construção de figuras simétricas (à mão livre, sobre o papel quadriculado, com os instrumentos de desenho); construção de eixos de simetria (à mão livre, sobre o papel quadriculado, com os instrumentos de desenho) (LIMA, 2006, p. 59, tradução nossa).

Nesse contexto, Silva e Almouloud (2018) também analisam livros didáticos, observando outros tipos de tarefas sobre simetria axial além das citadas pela autora acima: a identificação da conservação de algumas propriedades geométricas, identificação de pontos simétricos em uma figura plana e a criação de padrões decorativos por meio de simetria axial. Com essa análise, Silva e Almouloud (2018, p. 269) chegam a algumas conclusões sobre o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, destacando que “um exemplo é a forma intuitiva como a simetria ortogonal

é apresentada, pois observamos que o aluno não é instigado a questionar ou discutir sobre os procedimentos adotados nas tarefas propostas”. Os autores também destacam que:

[...] análise de livros didáticos contribuiu para nossa compreensão de certa realidade que cerca o ensino da simetria ortogonal, além de apontar algumas variáveis a serem consideradas pelos professores no momento da construção, análise e aplicação de uma sequência de ensino. Por exemplo, que sejam propostas tarefas que explorem as definições e propriedades matemáticas relacionadas à simetria ortogonal, seja por meio de exercícios envolvendo técnicas como dobradura, espelhamento e decalque ou por meio de construções geométricas, com a utilização de instrumentos de desenho (SILVA; ALMOULOUD, 2018, p. 269).

Nesse sentido, o recurso “les napperons” obtido no trabalho documental descrito na pesquisa de Lima e Trgalová (2018) coaduna-se com a proposta dos autores acima. Conforme observado por Peltier (2001), a situação de treinamento apresentada com o recurso desenvolve a noção de simetria axial em resposta a um problema e nos permite localizar adiante: o papel da antecipação (é necessário formular hipóteses, antecipar a ação, antes de executá-la); o papel da manipulação (suporte da antecipação). Assim, a situação permite refletir sobre os problemas, considerando de uma forma diferente a noção de simetria axial no plano e algumas de suas propriedades. Na análise didática, conforme a autora, também se reflete sobre o papel do erro na situação, a noção do teorema em ação (VERGNAUD, 2009) e a validação (realizada por comparação visual com o modelo).

Analisar a ação e o aprimoramento profissional do docente, nessa trajetória de desenvolvimento de seu sistema de documentos, verificando os elementos de estabilidade e evolução do trabalho documental pode ser uma experiência complexa. É interessante que o investigador leve em conta, no processo de obtenção de dados, o trabalho do professor, tanto no âmbito de sala de aula quanto em outros (em sua casa, nos encontros com outros docentes, na biblioteca etc.).

Nesse sentido, a escolha de outra teoria pode favorecer uma análise mais rigorosa dos dados da investigação. Conforme Trouche (2021), precisa-se levar em conta a pergunta de pesquisa, o que particularmente se deseja investigar. Como exemplo, na pesquisa sobre o conhecimento dos docentes pode-se adotar uma modelagem apropriada como as desenvolvidas por Brousseau (1998), Chevallard (1992), Vergnaud (1996), entre outras. Na pesquisa de Lima e Trgalová (2018), o aporte teórico complementar utilizado foi a Teoria das Situações Didáticas. Sobre essa teoria, observa Brousseau (1986):

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos (BROUSSEAU, 1986, p. 8, tradução nossa).

Esse modelo teórico favorece a investigação sobre as interações entre os objetos de ensino e os procedimentos pedagógicos e, de modo mais geral, refere-se à didática como domínio de estudo cujo objeto é a propagação dos saberes matemáticos e suas adaptações. Uma situação didática envolve as diversas relações pedagógicas construídas entre professor, estudante e saber com o propósito de elaborar atividades direcionadas ao ensino e à aprendizagem dos vários temas, sendo influenciadas tanto pelo ambiente interno como externo.

Nesse aspecto, Brousseau (2008) sinaliza como um dos mais importantes elementos condicionantes da situação didática o *milieu*, ou seja, o meio externo onde o aluno se insere e que viabiliza a aquisição de conhecimento por uma necessidade própria e não, obrigatoriamente, por exigência do docente ou da instituição. Esse meio externo circunda tudo que atua sobre o aluno e/ou tudo sobre o que o aluno atua.

Sobre o trabalho do professor, Brousseau (2008) designa as situações didáticas em três fases: Adidática, Didática e Fundamental. Na fase Adidática, o professor sugere situações de maneira a não apresentar soluções ao estudante, pois, nessa fase, o estudante deve obter conhecimento adequando-se ao ambiente e a função do professor é estimular ajustes que julgar convenientes. Na fase Didática, ocorre um contexto mais abrangente em que a atividade proposta pelo professor deve integrar o estudante e o seu meio. Na fase Fundamental, o professor deve sugerir atividades que favoreçam noções básicas diante de novos saberes, ou seja, provocar situações que viabilizem o entendimento (por parte do aluno) dos conceitos preliminares sobre as propriedades dos conteúdos.

Nesse sentido, o professor pode fazer decisões, a partir dos recursos acessíveis, relacionadas ao tema a ser ensinado e, fundamentado na sua experiência, elaborar uma situação didática. O professor precisa analisar sobre quais questões devem ser colocadas, além de como ele deve intermediar e avaliar a aprendizagem.

Com base no exposto, a pesquisa de Lima e Trgalová (2018) contribuiu com o desenvolvimento da nossa pesquisa, revelando-nos a importância de se adotar mais

de um aporte teórico para se aprofundar as análises sobre o trabalho documental de um coletivo de professores, procurando olhar não só o trabalho do professor em relação à transformação do recurso, mas também o que eles pretendiam provocar com tal transformação, na aprendizagem do aluno.

### **6.6 Machado Jr. *et al.* (2018)**

A pesquisa de Machado Jr. *et al.* (2018) teve como objetivo analisar o trabalho documental de um estudante estagiário da licenciatura em matemática e de um professor-supervisor de estágio, no processo de preparação e implementação de uma aula sobre Equação do 1º grau, na Educação de Jovens e Adultos no Ensino Médio (EJA - EM). Os autores desenvolveram a pesquisa, em um período de dois meses, tendo como participantes: uma professora-orientadora da disciplina de Estágio Supervisionado na Licenciatura em Matemática, um estudante-estagiário do 9º período deste curso (pela primeira vez à frente de uma turma do Ensino Médio, em especial da EJA) e um professor supervisor, formado em Engenharia Civil e em Física, que ministrava aulas de Matemática e Física na escola-campo de estágio.

Fundamentados na ideia de que “a praxeologia matemática é instituída com base nos tipos de tarefas (T) a serem realizadas por meio da técnica ( $\tau$ ), que, por sua vez, é explicada e legitimada por elementos tecnológicos ( $\theta$ ), justificados e esclarecidos por uma teoria ( $\Theta$ )” (MACHADO JR. *et al.*, 2018, p. 274), os autores traçaram o acompanhamento das ações do estudante-estagiário, estruturando-o em três momentos: antes, durante e depois da sua aula.

O primeiro momento focou o trabalho documental para a retomada do assunto combinado entre professor supervisor e estagiário: Equação do 1º grau. Nesta ocasião, procuraram discutir os recursos considerados por estes dois sujeitos. Para isso, adotou-se o diário de bordo com a intenção de acompanhar, regularmente, ao máximo possível, o trabalho desenvolvido pelo estagiário, verificando os registros relacionados ao processo de elaboração de sua aula a ser implementada com alunos do 2º módulo da EJA - EM, de uma instituição pública, em Recife – PE.

Segundo os autores, através de uma entrevista semiestruturada (do estagiário ao professor supervisor) foram obtidos dados sobre: perfil dos estudantes; recursos já adotados para a elaboração da aula sobre o assunto, o que já havia sido desenvolvido em sala de aula e quais as estimativas do professor supervisor sobre a aula do

estagiário. Depois, foi realizada outra entrevista semiestruturada (da professora orientadora ao estagiário) relativa ao material desenvolvido para o ensino de Equação do 1º grau: os recursos adotados e as estimativas sobre as definições, os exemplos e as tarefas propostas aos alunos da turma envolvida.

No decorrer da aula, salientam os autores, foram adotados dois procedimentos: a videogravação e a observação do professor-supervisor, a fim de se analisar a viabilização do “recurso-filho do estagiário” na turma. Esse “recurso-filho” é resultante da articulação e recombinação dos seguintes “recursos-mãe”: ficha de exercícios do professor supervisor, balança virtual, exercícios de sites na internet e slides. Por meio de uma câmera, gravaram-se duas aulas de 80 minutos. O professor supervisor preencheu uma ficha de observação, disponibilizando dados sobre elementos positivos e negativos relativos ao ensino do assunto, tarefas sugeridas aos alunos, gestão da turma, otimização do tempo.

De acordo com os autores, a professora orientadora teve acesso às videogravações das aulas e escolheu alguns tópicos sobre: abertura da aula; apresentação do assunto e articulação do estagiário com os alunos. Na etapa de autoconfrontação, à proporção que se passavam as situações de sala de aula no vídeo, foram registrados os seus comentários do estagiário, alguns naturalmente, outros provocados pelo professor orientador.

No momento final, destacam os autores que a professora orientadora foi à escola para entrevistar o professor supervisor, com base na ficha de observação da aula do estagiário. Ocorreu uma discussão entre os três sujeitos, reavendo-se toda coleta feita durante a investigação, objetivando-se a avaliação da atividade realizada durante o estágio, os recursos adotados, o que poderia ser conservado e o que poderia ser alterado no desenvolvimento de uma nova proposta de ensino da Equação do 1º grau.

Os autores consideram que, possivelmente, a mudança de recursos para o ensino do assunto tenha sido relevante, porém a análise dos recursos e o desenvolvimento do trabalho documental dos sujeitos da pesquisa é o que os incentivou à realização deste trabalho e o que mais os atraiu.

Para uma melhor compreensão do leitor, reforçamos as discussões com referências a outras pesquisas relacionadas ao aporte teórico complementar da TAD utilizado no trabalho de Machado Jr. *et al.* (2018):

Em relação à Teoria Antropológica do Didático, considera Almouloud (2015):

A Teoria Antropologia do Didático, segundo Chevallard, estuda o homem frente ao saber matemático, e mais especificamente, frente a situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo “antropológico” é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática no âmbito do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (ALMOULOU, 2015, p. 10).

A Teoria Antropológica do Didático considera a definição de praxeologia que, conforme Chevallard (1999), apresenta as noções de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Essas noções padronizam as ações sociais em geral, especialmente as atividades matemáticas. Sobre isso, Gáscon e Nicolás (2021) destacam que

[...] reside a gênese, pessoal ou institucional, de uma praxeologia no "bloco de práxis"  $[T / \tau]$  formado por um tipo de tarefas  $T$  e uma técnica  $\tau$  associado e que seu desenvolvimento requer um "bloco teórico-tecnológico"  $[\theta / \Theta]$ , também chamado de logos, que é composto por dois níveis sucessivos, tecnologia  $\theta$  e teoria  $\Theta$ , de descrição e justificativa da práxis [...]. É importante sublinhar que as quatro noções (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias) não descrevem nenhuma propriedade intrínseca aos objetos matemáticos, elas se referem apenas às diferentes funções que podem desempenhar em uma atividade. Essas funções podem depender da instituição em que a atividade é realizada (relatividade institucional) e ainda, na mesma instituição, um objeto matemático pode desempenhar diferentes funções, dependendo da atividade em que intervém. A união, institucional ou pessoal, de um bloco de práxis e um bloco de logos são chamados de praxeologia e são denotados por  $[T / \tau / \theta / \Theta]$  (GÁSCON ; NICOLÁS, 2021, p. 10-11, tradução nossa).

Ambos os blocos, práxis e logos, se desenvolvem conjuntamente. O bloco de logos influencia a práxis, revelando as técnicas que são justificadas e seu campo de validade, além do tipo de tarefas que podem ser tratadas com as técnicas escolhidas e os resultados aceitáveis. Entre os papéis executados pelo elemento tecnológico está o desenvolvimento de outras técnicas e a interação entre elas. Em contrapartida, a construção da práxis desenvolve um conjunto de resultados que, após algum tempo, pode ser associado ao bloco de logos, incrementando-o através de novas ideias e outros elementos teórico-tecnológicos que ocorrem para caracterizar, justificar e compreender as mudanças sequenciais das técnicas.

Na pesquisa de Machado Jr. *et al.* (2018), os investigadores utilizaram como aporte teórico complementar a TAD para a investigação do trabalho documental do estudante-estagiário e do professor supervisor sobre Equação do 1º Grau, considerando que a TAD disponibiliza ferramentas de estudo que permitem elucidar as organizações praxeológicas matemáticas e didáticas comuns relacionadas aos objetos de ensino. No estudo do desenvolvimento da atividade pelo estagiário buscou-

se verificar no seu esquema de utilização do recurso, as tarefas (T) a serem executadas, a técnica ( $\tau$ ), os elementos tecnológicos ( $\theta$ ) e a teoria ( $\Theta$ ).

Com base no exposto, a pesquisa de Machado Jr. *et al.* (2018) contribuiu com o desenvolvimento da nossa pesquisa, revelando-nos a importância de se adotar mais de um aporte teórico para se aprofundar as análises sobre o trabalho documental de um coletivo de professores, favorecendo as reflexões sobre a atividade do docente e o seu sistema de recursos, os critérios de sua adoção e suas aplicações, além dos resultados relacionados aos conhecimentos profissionais envolvidos.

### **6.7 Xavier Neto, Silva e Trouche (2019)**

A pesquisa de Xavier Neto, Silva e Trouche (2019) teve como objetivo analisar a construção de um conjunto de atividades para introduzir o tema sequências numéricas para alunos do 1o Ano do Ensino Médio sob a lente da Abordagem Documental do Didático. Essa pesquisa ocorreu em um ambiente de formação continuada com trabalho coletivo de professores. Com relação aos sujeitos da pesquisa, os autores afirmam que houve, inicialmente, a inscrição de doze professores, mas por diversos motivos apenas seis participaram efetivamente dos oito encontros que ocorreram até o momento considerado na escrita do artigo. Desses professores, um grupo de três licenciados em Matemática escolheram o tema sequências (progressão aritmética e progressão geométrica).

Segundo os autores, os professores(as) foram informados que poderiam sugerir temas matemáticos a serem desenvolvidos na formação, que teria início em fevereiro de 2018 e ocorreria aos sábados pela manhã na PUC-SP com duração de três horas.

Os autores destacam que a teoria utilizada na pesquisa foi a Abordagem Documental do Didático e a metodologia utilizada foi a investigação reflexiva, citando como procedimentos metodológicos: questionário de apresentação pessoal do professor; diário de bordo sobre o trabalho documental preenchido pelo professor durante pelo menos três semanas; sessões gravadas com áudio e os documentos produzidos por meio de foto digital; construção de uma representação esquemática dos recursos que o professor utilizou para preparar suas atividades; reflexões sobre as evoluções que observou nos recursos utilizados nos últimos 10 anos e que mudanças prevê para os próximos 10 anos.

Conforme os autores, o conteúdo matemático abordado foi “Sequências Numéricas”, o público da aplicação foram alunos do 1º Ano do Ensino Médio e, apesar do estudo em estágio preliminar, os dados coletados permitiram analisar a relação entre o sistema de recursos dos professores pesquisados e a construção de documentos em um ambiente coletivo de formação continuada.

Em um primeiro momento da formação continuada, consoante os autores, foi proposto aos sujeitos que esboçassem seus sistemas de recursos e foi possível constatar o recurso livro didático ou apostilado e a presença do recurso digital nos três; houve, também, a preparação de um conjunto de quatro atividades destinadas ao ensino de sequências numéricas.

Os autores enfatizam que, durante a concepção da atividade 1, os sujeitos debateram diversas possibilidades de como introduzir o tema “Sequências Numéricas”, com intervenção dos pesquisadores; um dos professores (Antonio), influenciado por seu sistema de recursos, foi resistente em aceitar outra proposta que não fosse ligada aos recursos que utiliza em sua prática; finalmente, escolheram o “Soneto da Fidelidade” do autor brasileiro Vinícius de Moraes (sonetos possuem um padrão de regularidade nas estrofes dos versos, que podiam ser interpretados como sequência (4, 4, 3, 3).

Segundo os autores, durante a elaboração da segunda atividade, um professor sugeriu um problema do livro didático, envolvendo eventos como As Olimpíadas, a Copa do Mundo e os Jogos Pan-americanos, de modo que os professores modificaram o problema original, a fim de que o professor não formalizasse – ainda – qualquer conceito;

Os professores debateram, consoante os autores, a utilização do jogo “corrida ao 20”, concluindo que a divisão determinava o controle da estratégia do jogo e que poderia favorecer a apresentação das sequências numéricas aos alunos e, ainda, que a generalização poderia ocorrer com a proposta de outros números e outros divisores para a corrida, além de ordens claras para serem dadas aos alunos.

Os pesquisadores observam que cada professor mobilizou recursos e esquemas de uso já existentes para constituir o conjunto de atividades propostas e que houve articulação de documentos desenvolvidos nas atividades anteriores; com relação à introdução da tecnologia, testaram algumas possibilidades, mas não houve consenso, fazendo com que abandonassem essa opção.

Houve, conforme os autores, a criação de uma quarta atividade, que possibilitaria que os alunos definissem PA, a partir da experiência acumulada ao longo das atividades anteriores, levando a uma generalização.

Os pesquisadores fazem as seguintes considerações finais: Maria mobilizou antigos esquemas de uso e construiu novos durante a construção das atividades 2 e 3, as quais favoreceram a Gênese Documental de Antonio que adaptou-se a novas situações a fim de adotar os recursos; Jonas continuou durante as ações a articular seu sistema de recursos e a desenvolver conhecimentos profissionais; o ambiente do trabalho coletivo implementado nessa formação continuada impulsionou a criação de um documento para o ensino do tema sequências numéricas.

Diante do exposto, consideramos que a pesquisa de Xavier Neto, Silva e Trouche (2019) contribuiu com a nossa pesquisa, mostrando-nos que ambientes de trabalho colaborativo são eficazes em permitir a partilha de saberes entre sujeitos e grupos, ensejando o desenvolvimento pessoal e profissional e favorecendo reflexões sobre todo o processo e conhecimentos subjacentes que o docente revela na ação de pensar ou repensar um recurso, algo imediatamente relacionado com os invariantes operatórios discutidos por Vergnaud (2009).

### **6.8 Miyakawa e Xu (2019)**

No artigo de Miyakawa e Xu (2019), os autores comentam que hoje as ações coletivas de professores dentro e fora da escola recebem particular atenção na pesquisa em educação matemática. Uma ampla gama de trabalhos coletivos é realizada em diferentes partes do mundo para diferentes fins: o desenvolvimento coletivo de recursos para preparar o ensino do dia-a-dia, redação coletiva *online* de livros didáticos na França, aulas de estudos japoneses, Grupos de Pesquisa de Ensino Chinês para o desenvolvimento profissional baseado na escola e grupos de trabalho em associações de professores de matemática, para citar apenas alguns.

De acordo com os autores, recursos como materiais de ensino, planos de aula e livros didáticos desempenham um papel crucial de qualquer trabalho coletivo docente. A preparação das aulas exige que os professores investiguem e desenvolvam vários recursos. O trabalho do professor não pode ser dissociado do uso de recursos. Esse é o fundamento lógico da Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009), que investiga o trabalho dos professores e sua

evolução através do uso de recursos.

Nesse trabalho, os autores apresentam um estudo comparativo do trabalho de documentação de professores na China e no Japão de uma perspectiva internacional. Seu objetivo foi compartilhar ilustrações selecionadas do trabalho dos professores que são menos acessíveis a pesquisadores de fora da China e Japão, e fornecer alguns insights e questões a serem investigadas na pesquisa futura. Isso ilustrará que a China e o Japão compartilham uma cultura comum que enfatiza a integração e harmonia e reflete a orientação social de seu povo.

O caso chinês é recolhido a partir do trabalho coletivo de professores realizado dentro da escola, e o caso japonês é retirado das atividades em grupo de uma associação local de professores de Matemática fora da escola. Esses dois casos se complementam, em termos dos dois tipos de trabalho coletivo de professores no Leste Asiático, dentro e fora da escola. Com base nesses dois exemplos ilustrativos, os autores afirmam que o trabalho coletivo de professores dentro e fora da escola é uma fonte essencial do trabalho de documentação dos professores de Matemática.

O trabalho dos professores é complexo e inclui uma variedade de atividades. A fim de enquadrar e organizar a análise do trabalho de documentação dos professores nos casos chinês e japonês, os autores compartilham a visão da Abordagem Documental do Didático, confiando-se especialmente na ideia de que um documento consiste em (1) recursos como artefatos e (2) um esquema de utilização sobre como usar esses recursos (GUEUDET; TROUCHE, 2009). "Esquema", nesse caso, significa "a organização invariável da atividade para uma determinada classe de situações" (VERGNAUD, 2009, p. 88), e consiste em quatro componentes: objetivos, regras, invariantes operacionais e possibilidades de inferência.

Enfatiza-se a ideia de que o esquema de utilização é específico para uma determinada classe de situações. Ou seja, se a situação fosse diferente, haveria outra forma de usar o mesmo recurso. Por meio dos exemplos de trabalho coletivo de professores na China e Japão, os autores identificam diferentes classes de situações, dentro e fora da escola, requerendo esquemas de utilização diferentes, portanto, diferentes trabalhos de documentação do professor.

As questões orientadoras nesse trabalho foram as seguintes:

- Que tipo de trabalho coletivo de professores é realizado e de que maneira?
- Que tipos de recursos são usados e / ou desenvolvidos no processo, e em

quais maneiras?

A primeira pergunta teve como objetivo identificar diferentes classes de situações, enquanto a segunda questão visou revelar os tipos de recursos em jogo e os esquemas de utilização relacionados. Para responder a essas perguntas, os autores realizam um estudo comparativo entre o caso chinês dentro da escola e o caso japonês fora da escola.

Em ambos os casos, os autores apresentam os primeiros quadros institucionais que criam oportunidades formal ou informal para professores de Matemática trabalharem juntos, mostrando diferentes estruturas institucionais no Japão e na China que devem fornecer várias formas de trabalho coletivo dos professores. Para esclarecer o trabalho coletivo desses professores, analisam um caso típico de cada um, e elucidam o trabalho de documentação dos professores, bem como os recursos associados a tal trabalho. Por fim, por meio da comparação dos resultados obtidos nos estudos de caso, discutem as semelhanças e diferenças entre os dois casos, bem como as perspectivas para pesquisas futuras sobre o trabalho coletivo dos professores com recursos.

Os autores resumem os resultados dos dois estudos de caso na Tabela 7.2 do seu trabalho (MIYAKAWA; XU, 2019, p. 168). Como esses casos estão em contextos educacionais muito diferentes (dentro e fora da escola), a mesa de comparação sugere a complementaridade do trabalho de documentação dos professores em Países do Leste Asiático, ao invés das diferenças entre China e Japão. A comparação não significa, portanto, que o trabalho e os recursos dos professores na China não existem no Japão, ou vice-versa, mas são específicos para cada caso, independentemente de país.

Segundo os autores, em ambos os países, diferentes estruturas institucionais nos diferentes níveis - variando da escola ao nível nacional - fornecem aos professores oportunidades de trabalho juntos. No caso do CRG, vale ressaltar que a universidade está envolvida como setor principal, além de TRO que realiza oficialmente TRG de cima para baixo por aproximação. Em contrapartida, a reunião mensal organizada pela associação local de professores é o resultado de uma ação ascendente de professores voluntários, que promove, além disso, o trabalho dos professores nas associações de nível regional e nacional.

Os autores destacam que, com relação ao trabalho dos professores, China e

Japão adotam uma forma de prática baseada no desenvolvimento profissional, incluindo a concepção e implementação de práticas de ensino, em vez de uma forma de palestra ou *workshop* que às vezes é dissociada das práticas usuais de ensino com os alunos. Notavelmente, a orientação para o trabalho de pesquisa é promovida, e o termo “pesquisa” é frequentemente usado em ambos os países. O trabalho do professor é considerado um tipo de trabalho de pesquisa focado nos problemas enfrentados na prática do ensino. Além disso, existe uma estreita relação entre os pesquisadores da universidade e os professores de escola.

O modelo CRG na China e a reunião mensal no Japão, de acordo com os autores, envolvem pesquisadores da universidade, que trazem recursos cognitivos para as escolas como experiências de pesquisa e pontos de vista teóricos desenvolvidos em pesquisa em educação matemática. Além disso, a diversidade de participantes, que é um ponto em comum nos dois casos, é um aspecto crítico a fim de enriquecer os recursos cognitivos compartilhados em trabalho coletivo dos professores.

Segundo os autores, em termos de recursos, nos dois países, o livro didático ocupa lugar de destaque entre os recursos dos professores, e o estudo dos livros didáticos é uma das obras essenciais para professores. Além disso, vale ressaltar que as comunidades de professores estão equipadas com a infraestrutura de publicação de periódicos ou livros profissionais que permitem que os professores divulguem seu trabalho e, portanto, tornem-se acessíveis a outros professores.

Embora o trabalho coletivo dos professores exista em todo o mundo, os autores consideram que a natureza do trabalho coletivo e os formatos que o promovem variam consoante os países. Ou seja, as diferenças e semelhanças entre os países orientais e ocidentais em termos de trabalho coletivo e recursos associados ainda estão por serem investigados. São discutidas, nesse trabalho, as perspectivas para pesquisas futuras a esse respeito por meio dos casos chinês e japonês. Considerando-se, em primeiro lugar, a necessidade de uma análise mais aprofundada do trabalho coletivo dos professores em Países da Ásia Oriental.

Os autores citam, por exemplo, o caso da Lesson Study, que está bem conhecida hoje e praticada em diferentes lugares fora do Japão. Argumentam que a análise do trabalho dos professores na Lesson Study japonesa ainda é limitada e que, embora o trabalho coletivo seja frequentemente enfatizado na Lesson Study, há

muitos trabalhos individuais associados, e ainda não compreendem como o trabalho individual é combinado com o trabalho coletivo e como essas diferentes práticas de trabalho de documentação afetam a aprendizagem profissional dos professores.

Para uma melhor compreensão do leitor sobre a Lesson Study, reforçamos as discussões sobre o assunto através de outras referências apresentadas a seguir:

Nesse sentido, destacamos a publicação mais atual de García-Alonso (2020), em que o autor apresenta e analisa o ProyectoMates, programa de formação contínua que segue a metodologia da Lesson Study japonesa (LS) como meio de desenvolvimento profissional do professor. García-Alonso (2020) destaca que essa é uma metodologia:

[...] que busca espaços de interação e colaboração entre profissionais com diferentes níveis de experiência, que intervêm no sistema de formação e aperfeiçoamento através da análise da implementação de uma atividade em sala de aula que tenham desenvolvido em conjunto e pela qual todos os professores são igualmente responsáveis. Para que a análise se concentre na proposta implementada e não no professor que a desenvolveu (GARCIA-ALONSO, 2020, p. 181, tradução nossa).

No projeto citado, García-Alonso (2020) parou na fase de Reflexão da Lesson Study, fase em que foi revelada tanto a formação recebida como elementos relacionados à prática dos professores. O autor estudou as intervenções dos professores e observou as mudanças que essas intervenções produziram nos professores, de forma a contribuir para modificar sua ação em sala de aula e para ampliar seus conhecimentos matemáticos e didáticos.

Conforme o autor, o ProyectoMates é um projeto em que se trabalha a resolução de problemas matemáticos e se oferecem diferentes estratégias que se destinam a que os professores os conheçam e os incorporem ao seu ensino. Tudo isso em uma formação que segue o ciclo da Lesson Study e cuja análise reflexiva é feita através da visualização da gravação em vídeo da proposta implementada em sala de aula por um dos professores, proposta essa previamente elaborada por todos os professores em formação.

Assim, García-Alonso (2020) analisa a contribuição feita conjuntamente por professores do Ensino Básico e Secundário querendo saber como, na referida análise reflexiva, os saberes práticos e os saberes teóricos recebidos são capazes de modificar o discurso dos professores e promover novas aprendizagens, tanto didáticas como matemáticas. Para tanto, o autor investigou o discurso que ocorreu quando os professores analisaram a implementação em sala de aula da proposta que todos eles

desenvolveram previamente durante a formação e de forma cooperativa.

De acordo com García-Alonso (2020), os professores iniciaram o projeto na primeira fase (Definindo o Problema), em que eles fizeram uma auto-análise sobre como desenvolveram a resolução de problemas na sala de aula, o papel que desempenhou no seu ensino e como integraram a resolução de problemas com o ensino de matemática nas suas aulas. Alguns resultados dessa análise foram publicados na obra García-Alonso, García-Díaz e Camacho-Machín (2019).

Essa fase, conforme o autor, também ofereceu treinamento sobre diferentes estratégias para desenvolver a resolução de problemas em sala de aula e permitiu treinadores a concentrar o treinamento no fortalecimento dos pontos fracos que foram mostrados nessa análise preliminar. Portanto, o treinamento foi oferecido em resolução de problemas em sala de aula, em que foram apresentadas estratégias de desenvolvimento e estratégias de resolução para os professores incorporarem em suas aulas.

Mais tarde, consoante García-Alonso (2020), os professores passaram a desenvolver a segunda fase (Design do Plano), na qual foi desenvolvida uma linha de ação orientada para a sala de aula que incorpora a resolução de problemas como elemento central e forma de desenvolvimento da matemática. O autor destaca que essa fase foi realizada por equipes de trabalho em etapas que desenvolveram trajetórias de aprendizagem que, além de incorporar a proposta de ensino, incluíram também as dificuldades de aprendizagem que os alunos poderiam apresentar.

A fase de Desenvolvimento da Lição, conforme observado por García-Alonso (2020), ocorreu em um centro educacional, mas sem a presença de todos os professores envolvidos, devido a incompatibilidade de tempo. Mas essa circunstância foi salva por gravação de vídeo da sessão, entendendo como tal a coleta de informações que é próprio dessa fase também. A implementação em sala de aula, segundo o autor, foi assistida por professores em formação inicial e pesquisadores do projeto. Para os professores em formação inicial foi uma ação formativa, na qual observaram modelos de ensino que depois discutiriam com os outros professores. O autor enfatiza que a última fase da Lesson Study foi a Reflexão sobre o que aconteceu e a contribuição de melhorias à proposta de implantação desenvolvida em sala de aula, sendo nessa fase em que a análise foi focada.

Retornando ao trabalho de Miyakawa e Xu (2019), os autores salientam que a

necessidade de uma análise mais detalhada também é o caso do trabalho coletivo dos professores chineses. Observaram na China que os professores às vezes seguem a "voz coletiva", em vez de expressar sua própria "voz" e que será importante entrar em detalhes como os professores mantêm sua própria identidade enquanto trabalham coletivamente. Isso a fim de compreender profundamente como o trabalho coletivo apoia a aprendizagem do professor.

Em segundo lugar, os autores consideram que, embora usemos recursos semelhantes com termos semelhantes nos países do Oriente e no Ocidente, seus papéis e funções e o trabalho do professor associado podem ser diferentes, e é necessário realizar uma análise mais detalhada de tais recursos e trabalho de documentação. Citam, por exemplo, que no caso de livros didáticos, embora se refiram à importância do livro nos países do Leste Asiático, o livro é geralmente um recurso importante para professores em qualquer país. No entanto, a forma como esse recurso é usado pode variar de país para país, ou seja, existem diferentes esquemas de utilização relacionados ao livro didático. A análise profunda e cuidadosa dos livros didáticos é uma prática comum e essencial para professores chineses e japoneses.

Os autores também observam que os professores na China prestam atenção ao desenvolvimento cognitivo dos alunos ao usar livros didáticos. Isso é, em certa medida, devido ao status específico dos livros didáticos nos países do Leste Asiático: os livros didáticos devem ser aprovados pelo governo e seu uso tornou-se obrigatório. Em tais análises sobre o trabalho de documentação de professores em países do Leste Asiático, é importante não apenas identificar as diferenças entre os países ocidentais e orientais, mas também revelar os elementos culturais que fazem tais diferenças. O trabalho do professor é afetado e moldado por vários elementos. Um novo sistema de um país não pode ser transposto para outro país sem adaptação e apropriação.

Argumentam os autores que é necessário, portanto, não apenas aprender com outros países, mas também compreender, como pesquisadores, o mecanismo de trabalho de documentação docente em nosso próprio país, a fim de melhorar o desenvolvimento profissional do professor e, conseqüentemente, melhorar as práticas de ensino em sala de aula.

Diante do exposto e considerando que uma ampla gama de trabalhos coletivos é realizada em diferentes partes do mundo para diferentes fins, a pesquisa de

Miyakawa e Xu (2019) contribuiu com a nossa pesquisa apresentando um estudo comparativo do trabalho de documentação de professores na China e no Japão de uma perspectiva internacional, destacando que o trabalho coletivo de professores dentro e fora da escola é uma fonte essencial do trabalho de documentação dos professores de Matemática.

### **6.9 Hoyos e Garza (2020)**

O artigo de Hoyos e Garza (2020) é baseado em dados e resultados que fazem parte de um estudo longitudinal maior que buscou construir um modelo mexicano para o desenvolvimento profissional de professores de Matemática do ensino médio. Ele conta com informações sobre as características gerais dos programas de desenvolvimento profissional oficiais implementados pelo Ministério da Educação do México na época. O trabalho empírico nesse estudo começou identificando as filosofias pessoais dos professores ou imagens da Matemática, no caso particular dos professores de Matemática em serviço que participaram do estudo.

Os autores levantam a hipótese de que o modelo de desenvolvimento profissional que foi finalmente obtido serve para ser utilizado no desenvolvimento profissional docente, baseado em processos de identificação que fundamentam a colaboração do professor na concepção de novas aulas. Diferentes pontos de atenção têm sido enfatizados no estudo do desenvolvimento profissional de professores em serviço. Por exemplo, cita-se Azcarate (1998), de acordo com o qual problemas profissionais dos professores giram principalmente em torno da concepção e / ou materialização das propostas curriculares. Por outro lado, também citam-se Hiebert *et al.* (2003) destacando que a qualidade da prática do professor também tem sido um problema persistente, sugerindo que o progresso pode ser feito projetando programas que poderiam influenciar a natureza e qualidade desta prática.

Citam-se novamente Hiebert *et al.* (2003) observando que os programas de treinamento de professores tem um período de expiração, o que torna necessária a revisão contínua de seu projeto e implementação. Cita-se Marcelo (2002), segundo o qual, a formação inicial proporciona ao professor uma bagagem de conhecimentos que deve ser complementada ao longo da vida profissional ativa do professor. Também cita-se Montecinos (2003), segundo o qual, tudo isso aliado a contextos educacionais marcados pela implantação de grandes reformas curriculares de

Matemática nas escolas tornam imperativo oferecer programas de desenvolvimento profissional para professores em serviço.

Segundo os autores, a esse respeito, o México não é particularmente uma exceção, dada uma série constante de reformas no currículo escolar de Matemática. O objetivo principal do estudo de caso mostrado nesse artigo foi construir um modelo cíclico de desenvolvimento profissional para professores em serviço com foco na aprendizagem de novas práticas pedagógicas (aquelas induzidas pela introdução de novos conteúdos na reforma curricular) e baseadas em sua reflexão sobre o que constitui sua profissão e sua prática em sala de aula.

Os autores também apontam a necessidade de aproximar ou estabelecer ligações entre os conhecimentos teóricos sobre ensino e práticas do professor em sala de aula. Nas sucessivas mudanças que foram implementadas pelas diferentes reformas curriculares de matemática nas escolas do México, os professores sempre foram considerados protagonistas da transformação educacional.

Os autores destacam que as características centrais da reforma curricular integral de 2011, que concentra as diretrizes e desdobramentos da reforma de 2006, em relação ao desenvolvimento profissional dos professores, basearam-se no reconhecimento de que a reflexão e as práticas educativas na escola são fundamentais para fortalecer a formação continuada de professores e o pessoal acadêmico adicional e para promover processos de gestão escolar colaborativa. Em particular, as diferentes abordagens de reformas curriculares apelaram ao compromisso e ao desenvolvimento profissional de professores para consolidá-las.

Desta forma, conforme os autores, o desenvolvimento profissional dos professores tem sido considerado um eixo fundamental no processo de reforma que tem sido realizado em escolas de ensino médio mexicanas, pois tem se destacado como a possibilidade de gerar transformações substantivas nas práticas pedagógicas.

De acordo com os autores, o estudo de caso apresentado nesse artigo foi desenvolvido em duas fases. A primeira foi exploratória e construtiva, e a segunda, comparativa e inferencial. A primeira fase foi desenvolvida especificamente através da execução de processos de identificação de professores para saber de imagens coletivas de professores de Matemática e sobre o seu ensino, sendo a especificação das tarefas implementadas apresentadas em Hoyos e Garza (2020, p. 138). A segunda fase mudou a concepção do professor de novas aulas ou atividades (a

implementar em sala de aula) em novos conteúdos curriculares incluídos na reforma curricular de Matemática escolar de 2006, nomeadamente a generalização de padrões, para a aprendizagem da álgebra escolar.

Os autores afirmam que os participantes dessa pesquisa foram 21 professores de Matemática em serviço pertencentes a escolas públicas de ensino médio na Cidade do México, sendo que todos eles eram professores experientes no ensino médio de matemática. A participação do professor nesse estudo de caso ocorreu em um quadro de reuniões presenciais, em centro oficial para desenvolvimento de profissionais docentes ou *workshops* específicos, durante os meses de outubro de 2007 e novembro de 2008 (na primeira fase do estudo), e de janeiro a junho de 2009 (durante a segunda fase do estudo).

Segundo os autores, todos esses foram estabelecidos no contexto da revisão do currículo de Matemática da reforma do ensino médio de 2006. Os professores sempre foram agrupados em equipes de três ou quatro participantes, e o objetivo das reuniões foi analisar a nova abordagem oficial de ensino de 2006 para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos em sala de aula.

Havia resoluções, consoante os autores, que permitiam explorar o conhecimento do professor por meio da materialização do ensino particular do professor para conteúdos específicos em sala de aula. Especialmente esse tipo de resposta constituiu o espaço adequado para a concepção e teste do tipo de tarefas para desenvolvimento profissional que corresponde ao cerne dessa pesquisa, ou seja, a co-construção de um modelo cíclico para o desenvolvimento profissional de professores de matemática em serviço no ensino médio. No início da investigação, os autores trabalharam com as produções dos 21 professores, porém uma vez a atenção se concentrou (para a segunda fase) na abordagem de ensino dos conteúdos de generalização de padrões, restando apenas 14 professores participantes, aqueles que expressaram de forma particular sua urgência em abordar esse tema.

Os autores enfatizam que, na segunda fase desse estudo, também foi importante observar como as equipes de professores participantes usaram recursos pedagógicos e matemáticos para criar ou projetar coletivamente novas aulas, a fim de articular e projetar suas identidades docentes, referindo-se a Cerulo (1997). Hoyos e Garza (2020, p. 140) mostram nesse artigo um diagrama do modelo cíclico do desenvolvimento profissional do professor, principal resultado desse estudo de caso,

com base nos dados empíricos dessa investigação, podendo-se perceber que ele ecoa o esquema de representação da Gênese Documental. Consideram os autores que o lugar de um documento - ou o resultado de uma Gênese Documental no modelo cíclico esquemático para o desenvolvimento profissional do professor é ocupado pela concepção coletiva do professor ou pela elaboração de novas aulas.

Diante do exposto e considerando que uma ampla gama de trabalhos coletivos é realizada em diferentes partes do mundo para diferentes fins, a pesquisa de Hoyos e Garza (2020) contribuiu com a nossa pesquisa, mostrando-nos um modelo mexicano para o desenvolvimento profissional de professores de matemática do ensino médio, baseado em processos de identificação que fundamentam a colaboração do professor na concepção de novas aulas.

#### **6.10 Almeida *et al.* (2020)**

Na pesquisa de Almeida *et al.* (2020), as teorias utilizadas foram: Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2010); Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2004; DRIJVERS *et al.*, 2010) e *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) traduzido por “Conhecimento Especializado de Professores de Matemática” (CARRILLO *et al.*, 2014). Dentro do MTSK são explorados os registros de representação semiótica no Conhecimento dos tópicos matemáticos (KoT).

O trabalho não chega a mostrar a construção de um documento em si, ele trata mais dos aspectos mobilizados pelos bolsistas na construção do recurso a partir do MTSK e a adaptação do recurso por meio da OI. Segundo os autores, a metodologia de análise foi a metodologia reflexiva, o objetivo foi a construção de um recurso para o ensino de poliedros e o recurso utilizado foi o Jogo Banco Geométrico, um jogo de tabuleiro inspirado no jogo Banco Imobiliário.

Os autores destacam que o conteúdo matemático abordado foi “Poliedros”, os sujeitos da pesquisa foram bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e o trabalho colaborativo desenvolvido contou com Licenciandos do PIBID, uma professora da UFPE e uma coordenadora de uma escola de Ensino Médio. O Público da aplicação foram alunos do 1º ano do Ensino Médio da EREM Professor Alfredo Freyre (8 alunos).

O período de análise, conforme os autores, foi de fevereiro de 2018 a janeiro de 2020, sendo o acompanhamento feito dentro e fora de sala de aula, no laboratório

da Universidade, na sala do PIBID, no laboratório da escola; os dados foram obtidos através de relatórios de atividades do projeto PIBID, entrevistas não estruturadas, videogravações e observações. A construção do recurso envolveu: concepção, aplicação entre os bolsistas, adequações, aplicação com alunos e, novamente, adequações.

Com relação ao MTSK, os pesquisadores observam que os alunos do PIBID mobilizaram o Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK) no sentido de recorrerem ao Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Matemática (KMLS), tanto das diretrizes curriculares estaduais quanto da BNCC para a concepção do recurso. Nesse sentido, foi emergente o Conhecimento Matemático (MK) dos bolsistas, no que se refere ao Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT), em particular sobre o conhecimento dos registros de representação de um conteúdo matemático.

No aspecto do Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK), quanto ao Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT) que foram mobilizados pelos bolsistas na concepção do BG, destaca-se o conhecimento das características matemáticas específicas de recursos didáticos para o ensino do conteúdo matemático e a mobilização do conhecimento das estratégias, técnicas e tarefas para o ensino do conteúdo matemático.

Os pesquisadores destacam que, com relação à produção de um documento, os bolsistas, nos termos da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), elaboraram os elementos da organização matemática do jogo Banco Geométrico elencando as tarefas e técnicas utilizadas na concepção do jogo. Com relação à orquestração instrumental (OI), para utilização do BG com os alunos do 1º ano do EM, entre os membros do PIBID, foram elaboradas duas OI's, de acordo com os autores: uma OI voltada à demonstração técnica do jogo e outra, voltada ao trabalho de acompanhamento - exploração dos tipos e subtipos de tarefas e de técnicas sobre o tema Poliedros.

Segundo os autores, em razão do desempenho didático dos alunos relacionado à OI voltada à demonstração técnica do jogo, os bolsistas observaram a necessidade de adequações no material, com modificação no tabuleiro, tipo de pinos, ampliação do número de jogadores, adequação dos valores da moeda e sua concepção em formato de cédulas, entre outras, no sentido de melhorar a viabilização do jogo; na OI voltada ao trabalho de acompanhamento (exploração dos tipos e subtipos de tarefas

e de técnicas presentes no jogo) foram feitas modificações nas perguntas das cartas desafio, no sentido de buscar reforçar as técnicas esperadas e a exploração dos registros de representação dos poliedros: algébrico, geométrico e numérico.

Os autores constataam que, com relação aos bolsistas, a experiência proporcionou a evolução do Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática (KFLM), relacionado ao PCK; com relação ao jogo, o uso do BG favoreceu aos alunos do 1º ano do EM o estudo do tema Poliedros de forma dinâmica, interativa e divertida, possibilitando aos ID's uma melhor compreensão sobre limites e possibilidades do uso de jogos (de sua concepção à utilização em sala de aula).

Para uma melhor compreensão do leitor, reforçamos as discussões com referências a outras pesquisas relacionadas ao trabalho de Almeida *et al.* (2020):

Segundo Lucena, Gitirana e Trouche (2016), a Teoria da Orquestração toma por base três fases: a configuração didática, o modo de execução e o desempenho didático. Como exemplo, em relação à pesquisa de Almeida *et al.* (2020), temos como um dos elementos da configuração didática “quatro alunos dispostos em grupo em torno de uma mesa (participantes do jogo)”; como um dos elementos do modo de execução da orquestração voltada à demonstração técnica do jogo temos “um ID explicou o material e os detalhes para o uso do jogo”; sobre o desempenho didático dos alunos referente à orquestração voltada à demonstração técnica do jogo, citamos que “trouxe à tona a necessidade de se desenvolver um tabuleiro que pudesse ser impresso e disponibilizado para um número maior de alunos e com os indicadores das quinas”.

Sobre a teoria MTSK, Carrillo *et al.* (2014) destacam que se refere-se a um modelo teórico que designa o conhecimento profissional específico e especializado apresentado pelo docente para ensinar Matemática. Almeida *et al.* (2020) utilizam esse modelo para investigar de que forma os docentes articulam seus conhecimentos para o desenvolvimento do recurso.

Com base no exposto, a pesquisa de Almeida *et al.* (2020) contribuiu com o desenvolvimento da nossa pesquisa, revelando-nos a importância de se adotar mais de um aporte teórico para se aprofundar as análises sobre o trabalho documental de um coletivo de professores, de forma a se fazer reflexões mais abrangentes sobre todo o processo e conhecimentos subjacentes que o docente revela na ação de

pensar ou repensar um recurso, algo imediatamente relacionado com os invariantes operatórios discutidos por Vergnaud (2009).

### **6.11 Abar e Dias (2021)**

O capítulo de Abar e Dias (2021) apresenta resultados parciais de um projeto de pesquisa das autoras, denominado *Um estudo da formação continuada do professor a partir de sua interação com recursos no contexto STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics)*, aprovado nas instâncias da PUC-SP, desenvolvido, de modo remoto, com seis professores de uma escola pública da rede Estadual de Ensino do município de São Paulo, com a utilização da plataforma *Teams* da *Microsoft*.

Conforme as autoras, foi composta uma equipe de seis professores voluntários participantes e que autorizaram o registro dos dados obtidos nos encontros para o desenvolvimento da pesquisa. O projeto teve início em final de julho de 2020 e, até o momento do desenvolvimento do capítulo, foram realizados cinco encontros com todos os participantes do projeto e outros encontros apenas entre os professores, sempre por meio da plataforma *Teams*. Com o objetivo de contribuir para a formação continuada de professores para o ensino e a aprendizagem da Matemática, com a integração da tecnologia como ferramenta potenciadora de novas ideias para o ensino em ciências, o contexto da formação envolve um trabalho colaborativo entre professores e pesquisadores, com a finalidade exposta na teoria subjacente ao projeto que é a Gênese Documental (TROUCHE; GUEUDET, 2015).

De acordo com Abar e Dias (2021), reflexões sobre os encontros, as ações executadas e o tempo percorrido levaram-nas à indagação: que estratégias são necessárias para compreender, motivar e acompanhar a escolha de recursos por esses professores, em colaboração com os demais participantes, de forma remota, para um trabalho documental? As autoras esperam identificar, nos passos iniciais da proposta, quais elementos permitem desenvolver mudanças de postura de pesquisadores e de professores que os conduzam a uma prática colaborativa e reflexiva na construção de recursos que possam influenciar sua prática educativa, mesmo de forma remota e sem encontros presenciais.

Abar e Dias (2021) destacam que o contexto STEM no ensino e proposto no projeto são sugeridos por diversos especialistas e interessa estudar de que modo os

recursos de Matemática se adaptam à prática docente nesse contexto. Para a concretização destes desafios, consideram as autoras que o(a)s professores de Matemática têm um papel fundamental, uma vez que a Matemática ocupa um papel de linguagem e de ciência comum em tal espaço, interessando estudar de que modo o conhecimento científico dos professores da escola básica na área da Matemática e das ciências se adequa ao contexto STEM.

Nesse contexto, as autoras esperam identificar quais elementos permitem desenvolver mudanças de postura de pesquisadores e de professores que os conduzam a uma prática colaborativa e reflexiva, questionando “que estratégias podem ser necessárias para acompanhar a formação continuada dos professores em suas interações na construção de recursos no contexto STEM?”.

Para obter respostas a essa questão, as autoras consideram que um dos desafios está em conseguir com que os sujeitos envolvidos no contexto escolar reflitam sobre sua prática pedagógica; tenham domínio completo do percurso de um conteúdo; investiguem e compreendam quais os estilos de aprendizagem de seus alunos, e mergulhem no uso das tecnologias desde os seus primeiros passos.

Segundo Abar e Dias (2021), os professores foram observados em uma fase de internalização do projeto, compreendendo o significado de um trabalho colaborativo, sua forma de desenvolvimento, os temas a serem discutidos e sua forma de abordagem, sempre considerando seus conhecimentos prévios e muitos questionamentos, até mesmo algumas resistências a novas ideias. Nesse processo, os professores rompem com as práticas já postas para se lançarem a um novo modo de trabalho.

Diante do exposto, consideramos que o capítulo de Abar e Dias (2021) contribuiu com a nossa pesquisa, mostrando-nos que ambientes de trabalho colaborativo são eficazes em permitir a partilha de saberes entre sujeitos e grupos, ensejando o desenvolvimento pessoal e profissional e favorecendo reflexões sobre todo o processo e conhecimentos subjacentes que o docente revela na ação de pensar ou repensar um recurso, algo imediatamente relacionado com os invariantes operatórios discutidos por Vergnaud (2009).

### **6.12 Igliori, Abar e Almeida (2022)**

No artigo de Igliori, Abar e Almeida (2022), os autores buscam apresentar a

contribuição da Gênese Documental, em especial os impactos da noção de esquema no trabalho colaborativo de professores realizado no âmbito do projeto Pensar os Recursos para o Ensino de Matemática no Ensino Básico - PREMa – EB, um projeto de pesquisa colaborativa.

Nesse artigo, as ações descritas envolveram professores de uma escola particular e de algumas escolas públicas do município de São Paulo, pesquisadores em educação matemática<sup>11</sup>, estudantes de pós-graduação e um engenheiro pedagógico francês convidado<sup>12</sup> para orientar a organização metodológica das incubações, que aconteceram uma vez por semana durante o desenvolvimento dessa pesquisa-formação-ação. O autor desse trabalho participou do projeto na condição de doutorando do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e as autoras participaram na condição de pesquisadoras do mesmo programa.

Nesse contexto, buscaram desenvolver esse trabalho direcionado pela seguinte questão: “De que forma a Gênese Documental, em especial a noção de esquema, contribuiu com o trabalho colaborativo de professores do projeto PREMa - EB e seus impactos?”.

O PREMa – EB, coordenado por uma das autoras, foi desenvolvido tendo como alicerce a pesquisa-ação-formação, discutida por Vanderclayen, L’Hostie e Dumoulin (2019), enquadrando-se na proposta de um caminho de pesquisa que favorece a articulação entre pesquisadores de universidades e grupos de professores da educação básica, sendo que toda investigação é realizada com o docente e não para ele, promovendo a formulação coletiva de saberes e interferência sobre o contexto analisado. As considerações realizadas neste trabalho sobre interações entre professores e pesquisadores do PREMa - EB têm como base o referencial teórico da Gênese Documental, discutida por Gueudet e Trouche (2009), o qual tem como pilar a noção de documento (recursos combinados e os esquemas de utilização).

Esse artigo está organizado em quatro partes: na primeira parte, discute-se a importância da conexão entre pesquisa e prática com suporte no referencial teórico do trabalho, a Gênese Documental. Na segunda parte, apresenta-se o detalhamento

---

<sup>11</sup> Sonia Barbosa Camargo Iglioni- PUC-SP; Celina Aparecida Almeida Pereira Abar- PUC-SP; Maria José Ferreira da Silva- PUC-SP e Cibelle de Fátima Castro de Assis- UFPB

<sup>12</sup> Pierre Bénech- IFE de l’Ecole Normale de Lyon

do projeto PREMa-EB, enfatizando as atividades desenvolvidas em uma das escolas participantes. Na terceira parte, discorre-se sobre a análise do projeto com base na Gênese Documental e, finalmente, na quarta parte, pondera-se sobre as reflexões finais do desenvolvimento da pesquisa realizada.

Segundo os autores, em relação ao trabalho desenvolvido nos ateliês 1 e 2 do PREMa – EB, houve o cenário (construído pelo grupo do Colégio São Domingos de forma colaborativa) referente ao ensino de densidade populacional, cuja viabilização em sala de aula foi realizada por um dos professores do grupo e registrada por recursos audiovisuais. Nesse caso, em razão das invariantes operacionais comuns, os professores puderam desenvolver um documento compartilhado (ou parcialmente compartilhado). A ocorrência de invariantes operacionais compartilhados provavelmente estabeleceu um trabalho comum.

Os autores enfatizam que esse documento envolveu diversos recursos, em particular o Diário de Bordo, e esquemas de uso compartilhados para esses recursos. Os professores do grupo desenvolveram juntos teoremas em ato, como: é preciso incentivar o levantamento de hipóteses conceituais dos alunos sobre densidade, pedindo que façam suas anotações das informações. Foram desenvolvidos, então, documentos comuns, referentes ao ensino de densidade populacional. Certamente, suas utilizações de recursos em sala de aula seriam diferentes, em razão de seus esquemas pré-existentes. Porém, na atividade de criar um cenário, eles desenvolveram documentos novos e comuns, em particular esquemas comuns.

Em relação aos ateliês 3 e 4 do PREMa – EB, consoante os autores, foram destacadas as reflexões do professor do Colégio São Domingos (mediadas por um pesquisador) relativas ao quesito: novas ideias e novas perspectivas de uso do Portfólio/Diário de Bordo. De acordo com o professor, os alunos vão preenchendo o Diário de Bordo na construção do conceito do objeto matemático Números Complexos, seguindo determinadas etapas. Percebe-se que a intenção do professor era desenvolver habilidades de aprendizado nos alunos, fundamentadas em problematizações e perguntas, tendo como regra geral de ação "escutar atentamente os alunos" e desenvolver suas atividades em função do raciocínio dos alunos.

De acordo com os autores, no âmbito do PREMa – EB, o professor mostrou ter desenvolvido boas habilidades de questionamento e melhorado seu entendimento do raciocínio do aluno. As ações implementadas no projeto apresentaram ao professor e

todo grupo procedimentos relevantes para ampliar suas habilidades de questionamento, como exemplo o uso de analogias.

Os autores destacam que, fazendo a adequação das ações do projeto às suas aulas, o professor desenvolveu formas flexíveis de questionar, de modo a guiar o raciocínio dos alunos e auxiliá-los na compreensão das tarefas. O professor também enfatizou que, em relação às possibilidades de inferências, ele havia considerado diferentes atividades para categorias diferenciadas de alunos e com outros recursos. Esse elemento já estava presente nos esquemas do professor que foram incrementados por sua participação no projeto.

Os autores concluem destacando a importância do PREMa-EB no tocante ao processo de formação continuada de um coletivo de professores que desejavam desenvolver recursos para novas práticas de ensino, tomando decisões, de forma colaborativa, para atingir determinadas metas. Com isso, os pesquisadores do projeto contribuíram com os grupos de professores da educação básica, auxiliando-os cuidadosamente nas suas reflexões e reforçando os elos entre escola e universidades.

Diante do exposto, consideramos que a pesquisa de Iglori, Abar e Almeida (2022) contribuiu com a nossa pesquisa, mostrando-nos que ambientes de trabalho colaborativo são eficazes em permitir a partilha de saberes entre sujeitos e grupos, ensejando o desenvolvimento pessoal e profissional e favorecendo reflexões sobre todo o processo e conhecimentos subjacentes que o docente revela na ação de pensar ou repensar um recurso, algo imediatamente relacionado com os invariantes operatórios discutidos por Vergnaud (2009).

De uma maneira geral, destacamos que os trabalhos abordados na revisão de literatura contribuíram com a pesquisa, mostrando-nos que ambientes de trabalho colaborativo são eficazes em permitir a partilha de saberes entre sujeitos e grupos, inclusive viabilizando a atualização das suas atividades profissionais; revelando-nos a importância de se adotar mais de um aporte teórico para se aprofundar as análises sobre o trabalho documental de um coletivo de professores.

Deste modo, neste capítulo, apresentamos a revisão de literatura da pesquisa e, no próximo capítulo, discutiremos a apresentação e análise dos dados.

## CAPÍTULO 7 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, fazemos a apresentação e análise dos dados. Ele está organizado em cinco seções: na primeira seção, fazemos a descrição e análise de uma experiência preliminar; na segunda seção, fazemos a descrição e análise do trabalho colaborativo desta pesquisa; na terceira seção, são apresentadas análises sobre o trabalho documental das professoras; na quarta seção, tecemos considerações sobre as dialéticas instrumentação/ instrumentalização, recurso “mãe”/ recurso “filho” e atividade produtiva/ atividade construtiva; na quinta seção, fazemos considerações sobre a autoeficácia das professoras Carla e Genilda relacionada com os processos de instrumentação e instrumentalização.

### 7.1 Descrição e análise de uma experiência preliminar

Uma primeira experiência do trabalho colaborativo foi realizada no âmbito do projeto Pensar os Recursos para o Ensino de Matemática no Ensino Básico - PREMa – EB e resultou na produção de um artigo (ALMEIDA; ABAR, 2020b) que foi apresentado e publicado nos anais do evento CIET-EnPED. Nessa primeira experiência do trabalho colaborativo ocorreu o processo de planejamento e implementação de aulas sobre Juros Compostos, pelas plataformas Documentos *Google* e *Google* Sala de Aula. Nesta seção, fazemos a descrição e análise dessa experiência, a qual está sendo ampliada nesta tese.

Convém destacar que, em projetos como o PREMa – EB, considera-se no diálogo entre o investigador e o docente a diminuição das dissonâncias entre o objetivo pretendido e o trabalho pedagógico realmente executado, considerado nesse estudo. As atividades descritas foram desenvolvidas, em caráter excepcional, em razão da suspensão de aulas presenciais no período da pandemia de COVID – 19. Foram utilizadas ferramentas de comunicação entre investigador e professoras, como telefone, *WhatsApp* e e-mail.

Realizamos essa experiência guiada pelo seguinte questionamento: “De que forma é desenvolvido o trabalho colaborativo de duas professoras de Matemática do ensino médio, no processo de planejamento e implementação de uma aula sobre Juros Compostos, pelas plataformas Documentos *Google* e *Google* Sala de Aula?”.

Assim, essa investigação direcionou-se para o trabalho colaborativo virtual

entre o pesquisador e duas professoras de Matemática do ensino médio, as quais atuavam em diferentes turmas do 3º ano do Ensino Médio e pretendiam, de forma remota, dar continuidade ao planejamento e implementação de suas aulas sobre o tema Juros Compostos. Além do interesse em favorecer a aprendizagem dos alunos, as duas professoras perceberam que teriam uma oportunidade de aprimoramento profissional, contando com a colaboração de um pesquisador no trabalho, o qual poderia participar de suas reflexões.

Esse trabalho colaborativo ocorreu entre os meses de abril e maio de 2020, estruturado em duas situações profissionais (planejamento e implementação), tendo o pesquisador (autor deste trabalho) como mediador. As duas professoras atuavam em diferentes turmas do 3º ano do ensino médio e, previamente, por contatos virtuais entre elas e o pesquisador, decidiram pela realização do trabalho colaborativo, inclusive como forma de possibilitar a aprendizagem dos alunos que ficariam ociosos nesse período.

Sobre a situação de planejamento, nas discussões preliminares entre as professoras, combinou-se que o trabalho estaria focado no objeto matemático Juros Compostos, conteúdo que elas já haviam introduzido antes da interrupção das aulas presenciais, mas que não foi devidamente assimilado pelos alunos, pois chegaram a discutir apenas a definição e um exemplo inicial, não tendo realizado tarefas e atividades avaliativas. Assim, o pesquisador ressaltou a importância de se consultar a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) do Ensino Médio, a fim de se encontrar competências e habilidades que respaldassem o trabalho a ser desenvolvido. Nessa consulta, as professoras encontraram, no contexto das competências específicas para Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio, a competência específica 2:

Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática (BRASIL, 2017, p. 526).

Em associação com a competência acima mencionada, as professoras encontraram a habilidade (EM13MAT203): “Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões” (BRASIL, 2017, p. 526).

Em conformidade com a competência e habilidade descritas, as professoras deram prosseguimento ao trabalho colaborativo (situação de planejamento), utilizando-se do aplicativo Documentos *Google* (processador de texto *on-line* que possibilita criar e editar documentos e compartilhar com outras pessoas) para fazerem colaborativamente a preparação de atividades. Essas atividades seriam posteriormente disponibilizadas no ambiente *Google* Sala de Aula para cada uma das turmas sob responsabilidade de cada professora.

Na preparação de atividades feitas pelas duas professoras com o uso do aplicativo Documentos *Google*, foi definido como objetivo geral: compreender o conceito de regime de capitalização composta. Foram definidos como objetivos específicos: identificar e resolver problemas que envolvam Juros Compostos; fazer a representação gráfica da função que expressa o montante da aplicação. Foram sugeridos pela professora Genilda os seguintes recursos: plataforma *Google* Sala de Aula, simulador<sup>13</sup> da calculadora HP 12C e uma lista de exercícios sobre o conteúdo. Foram sugeridos pela professora Carla os seguintes recursos: videoaulas<sup>14</sup> sobre o conteúdo da plataforma *Khan Academy* e o capítulo referente ao conteúdo do livro didático (LEONARDO, 2016).

Sobre a situação de implementação, logo em seguida, pela plataforma *Google* Sala de Aula, cada professora criou uma turma específica para seus alunos, fazendo a postagem das atividades e as recomendações necessárias para a realização dessas atividades. Os alunos tiveram acesso às turmas, utilizando o código de acesso fornecido pela professora por e-mail.

Sobre a plataforma *Google* Sala de Aula, comentam Silva e Netto (2018):

O *Google* Sala de Aula, também conhecido por *Google Classroom*, é a plataforma educacional do *Google*, criado em 2014. Com a ferramenta o professor pode gerenciar conteúdo, simplificar a criação, distribuição e avaliação de trabalhos escolares, bem como características de interatividade e colaboração entre os agentes do processo de aprendizagem. Tais funcionalidades em conjunto com outras existentes na plataforma facilitam a troca de conhecimentos entre os agentes do processo por meio dos caminhos alternativos de comunicação entre eles (SILVA; NETTO, 2018, p. 120).

---

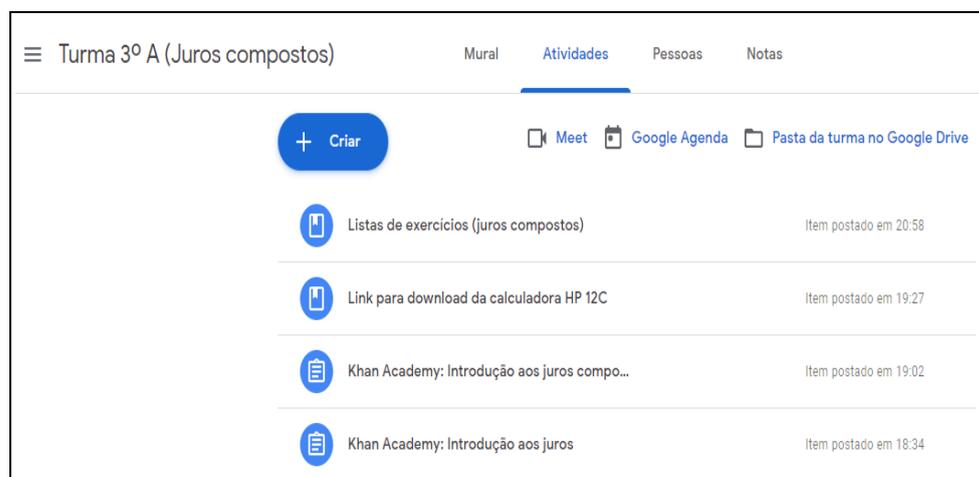
<sup>13</sup>Link do simulador da calculadora financeira  
<https://www.baixaki.com.br/site/dwnld115333.htm>

<sup>14</sup>Links das videoaulas da plataforma Khan Academy  
<https://pt.khanacademy.org/economics-finance-domain/core-finance/interest-tutorial/compound-interest-tutorial/v/introduction-to-compound-interest>  
<https://pt.khanacademy.org/economics-finance-domain/core-finance/interest-tutorial/interest-basics-tutorial/v/introduction-to-interest>

Nessa plataforma, o professor compartilha os recursos com seus alunos, inclusive as tarefas, as quais podem ser executadas e postadas no ambiente, de maneira que o professor possa fazer uma devolutiva. O ambiente é mais um meio de articulação, no qual podem ser realizadas conversas entre professores e alunos sobre os recursos e tarefas disponibilizados.

A Figura 6 ilustra a postagem das atividades de uma das professoras na plataforma *Google Sala de Aula*:

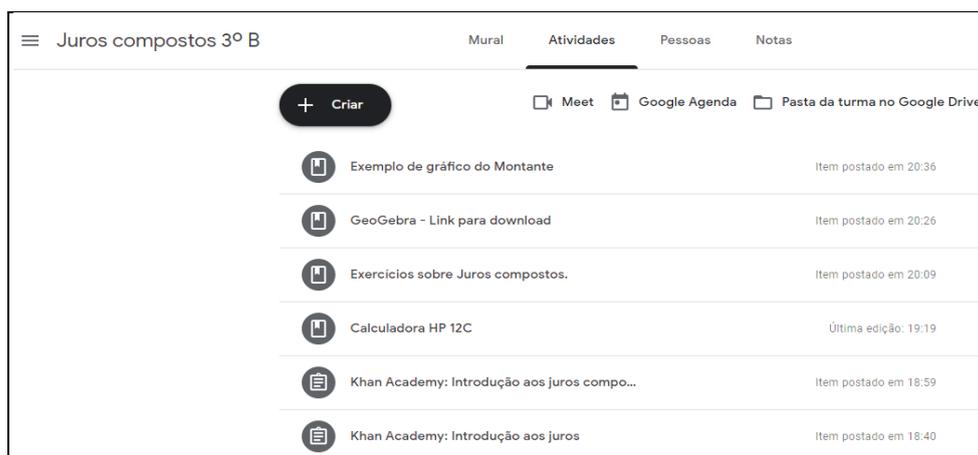
Figura 6 - Postagem de atividades através do *Google Sala de Aula* pela professora Carla



Fonte: Elaborada pela professora Carla (2020)

De acordo com as recomendações dadas pela professora dessa turma, os alunos deveriam, inicialmente, ler o capítulo do livro didático referente ao assunto e assistir às videoaulas sobre Juros Compostos da plataforma *Khan Academy*. Depois, deveriam tentar resolver os exercícios propostos (envolvendo cálculo de montante, capital aplicado, taxa de juros e período de aplicação), contando com o auxílio do simulador da calculadora financeira HP-12C. Também deveriam fazer a representação gráfica da função que expressa o montante, no ambiente lápis-papel. Durante todo o processo, os alunos poderiam colocar os devidos questionamentos à professora através do *Google Sala de Aula*.

A Figura 7 ilustra a postagem das atividades da outra professora na plataforma *Google Sala de Aula*:

Figura 7 - Postagem de atividades através do *Google Sala de Aula* pela professora Genilda

Fonte: Elaborada pela professora Genilda

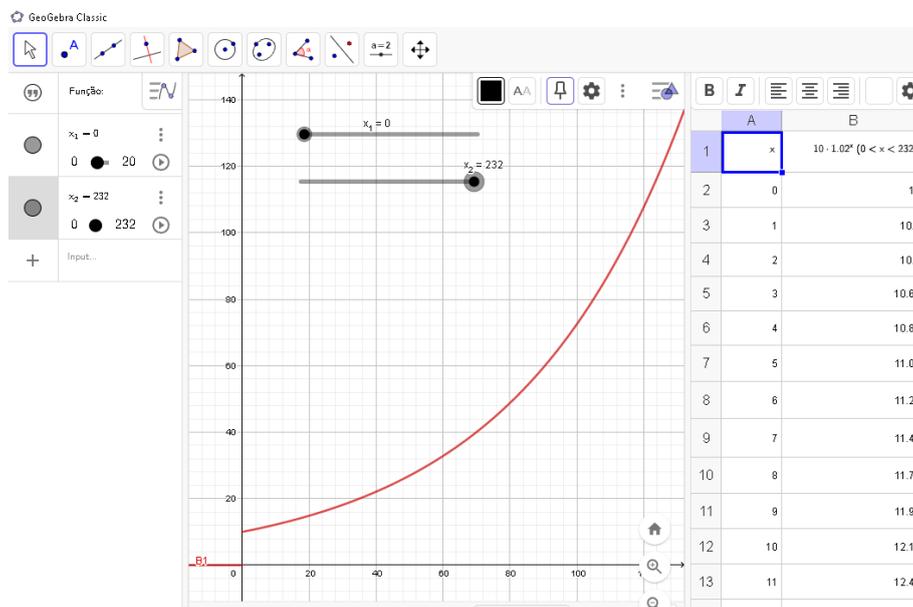
As recomendações dadas pela professora dessa turma para a realização das tarefas foram semelhantes às recomendações da professora da outra turma; no entanto, ao contrário da primeira que sugeriu a construção do gráfico da função que expressa o montante no ambiente lápis-papel, a professora dessa turma sugeriu a construção do gráfico no *software* GeoGebra. Inclusive, a professora disponibilizou um link para que os alunos fizessem o *download* do *software*, além de fornecer dois arquivos que serviriam como exemplo para a construção do gráfico. O Quadro 3 ilustra o primeiro arquivo (uma questão resolvida, a partir da qual construiu-se o gráfico da função):

Quadro 3 - Questão resolvida sobre Juros Compostos

<b>Questão resolvida – Juros compostos</b>	
Um capital de R\$ 10,00 foi investido em uma aplicação financeira que rende 2% ao mês. Qual o montante dessa aplicação após 4 meses?	
$M = C \cdot (1 + i)^n$	
$M = 10 \cdot (1 + 0,02)^4$	
$M = 10 \cdot (1,02)^4$	
$M = 10,82$	Logo, o montante será de R\$ 10,82.

Fonte: Elaborada pelo professora Genilda

A professora construiu o gráfico da função que expressa o montante relacionado à questão do Quadro 3, utilizando o *software* GeoGebra. A Figura 8 ilustra o arquivo com o gráfico da função:

Figura 8 - Gráfico da função  $M(x) = 10 \cdot (1,02)^x$  no GeoGebra

Fonte: Elaborada pela professora Genilda

As professoras de ambas as turmas esperavam que os alunos reconhecessem o gráfico da função que expressa o montante como sendo o gráfico de uma função exponencial, conteúdo que eles já haviam estudado no 1º ano. Inclusive, nessa ocasião, a professora Genilda já havia utilizado o *software* GeoGebra como recurso para o estudo das funções, de maneira que seus alunos já conheciam os comandos básicos de utilização do *software*.

Em cada uma das turmas de 3º ano envolvidas no trabalho, havia uma média de quarenta alunos, de modo que boa parte deles desenvolveu as atividades e interagiu com as professoras, fazendo considerações e expressando dúvidas sobre o conteúdo Juros Compostos, as quais foram devidamente esclarecidas pelas professoras. Em especial, houve esclarecimento de dúvida sobre questões que solicitam o cálculo do período de aplicação, cujo desenvolvimento pode envolver o uso das propriedades dos logaritmos. Como exemplo, sobre a questão “qual o tempo necessário para que um capital, aplicado a uma taxa efetiva de 3% a.m., duplique seu valor?”, a professora Genilda esclareceu que “após a substituição dos valores usando a fórmula de juros compostos, independente de qual seja o capital, para que se encontre o valor procurado, divide-se o logaritmo de 2 pelo logaritmo de 1,03, podendo usar o simulador da calculadora financeira”.

A coleta de dados foi realizada por meio de reflexões conjuntas, observações e registros escritos, enfatizando-se que as professoras contribuíram com essa coleta, favorecendo a análise do trabalho documental. Investigamos os dados coletados e observamos os documentos criados pelas duas professoras. Ambas as professoras, antes do trabalho colaborativo, criaram seus próprios esquemas individuais, relacionados ao ensino de Juros Compostos. Por exemplo, com o objetivo “Ensinar a fazer a representação gráfica da função que expressa o montante da aplicação”, a professora Carla havia criado um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos utilizarem o ambiente lápis-papel, então eles aprenderão a fazer a representação gráfica da função que expressa o montante da aplicação”.

Destacamos que os invariantes operacionais podem se desenvolver ao longo de um trabalho colaborativo, pois a professora Genilda criou um novo teorema em ação sobre o desejo de utilizar, em suas aulas, um *software* matemático para a plotagem de gráficos de funções. Quando os professores compartilham determinados invariantes operacionais, eles podem criar documentos comuns ou, em parte, comuns.

Em relação ao planejamento feito pelas duas professoras pelo Documentos *Google*, de forma colaborativa, por causa dos invariantes operacionais compartilhados, as professoras puderam construir um documento comum ou, em parte, comum. Tendo como regra geral de ação “Interagir com os alunos pela plataforma virtual”, este documento abarcou vários recursos (plataforma *Google* Sala de Aula, vídeoaulas da plataforma *Khan Academy*, simulador da calculadora financeira HP-12C, etc.) e esquemas de utilização. As duas professoras criaram juntas teoremas em ação como “Se os alunos utilizarem vídeoaulas da plataforma *Khan Academy*, então eles terão um reforço da compreensão do regime de capitalização composta”.

Foram criados, assim, documentos comuns, relacionados ao ensino de Juros Compostos. De fato, cada professora utilizaria os recursos em sala de aula de forma diferenciada, por causa de seus esquemas anteriores. No entanto, no trabalho colaborativo, elas criaram documentos novos e comuns, em especial invariantes operacionais comuns. Através da Gênese Documental, verificamos esquemas de utilização de vários recursos virtuais que foram fundamentais para o desenvolvimento do trabalho colaborativo e destacamos invariantes operacionais, relacionados às duas

professoras participantes, de diferentes tipos: algébricos, didáticos, tecnológicos etc.

Em muitas propostas didáticas, o ensino de Juros Compostos tem se direcionado apenas à utilização do livro didático; contudo, o desenvolvimento dessas propostas pode ser incrementado com o envolvimento de outros tipos de conhecimentos, como o das tecnologias digitais.

## **7.2 Descrição e análise do trabalho colaborativo desta pesquisa**

A execução do trabalho colaborativo desta pesquisa baseou-se na metodologia de investigação reflexiva (GUEUDET; TROUCHE, 2010) e alinhou-se com as discussões apresentadas no referencial metodológico (DESGAGNÉ *et al.*, 2002; IBIAPINA, 2008; HORIKAWA, 2008; BORTONI-RICARDO, 2009; GASPAROTTO; MENEGASSI, 2016; CORAZZA *et al.*, 2017; CAI *et al.*, 2019a; FIORENTINI, 2019).

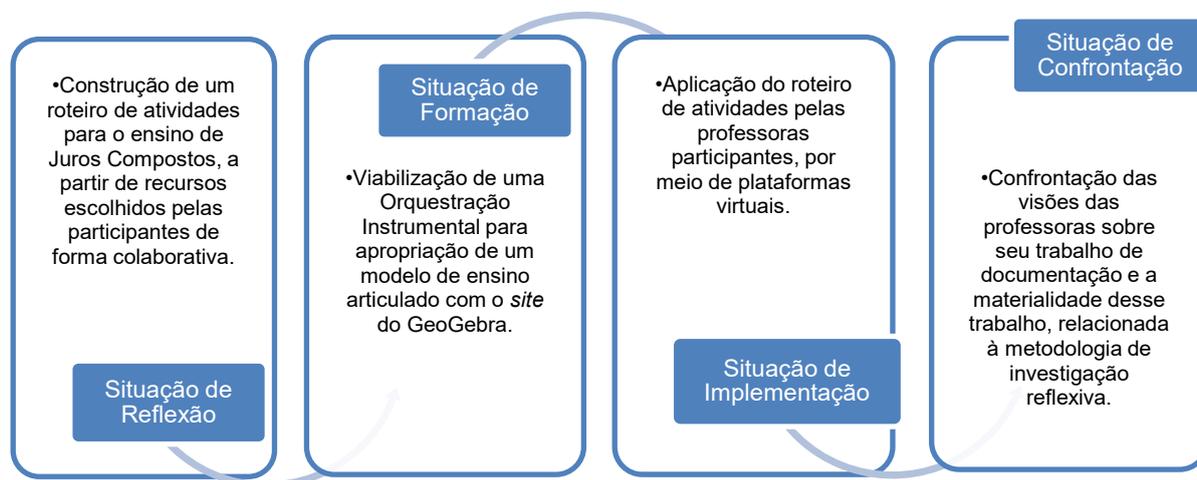
Dessa forma, o pesquisador estabeleceu com os sujeitos um contrato metodológico (SABRA, 2016) claro, pelo o qual as respectivas responsabilidades do investigador e das docentes foram bem definidas, como: envolvimento ativo e atitude reflexiva das docentes e acompanhamento do trabalho de documentação dessas pelo pesquisador; considerou-se, inclusive, conforme Fiorentini (2019), que por se tratar de uma colaboração e não uma cooperação, no trabalho não haveria posições de comando e submissão, mas o apoio recíproco entre os participantes, a fim de se alcançar metas comuns combinadas pelos mesmos conjuntamente.

O trabalho ocorreu no período de março até junho de 2021 e estruturou-se conforme exibido na Figura 9. Esse trabalho colaborativo viabilizou a elaboração de um Roteiro de Atividades (Apêndice A) composto por um conjunto de recursos selecionados colaborativamente para aplicação em sala de aula de alunos do 3º ano do EM, bem como a apropriação de um modelo de ensino articulado com o *site* do GeoGebra. Dessa forma, foi possível analisar a documentação dos sujeitos de pesquisa.

De modo a atingir os objetivos propostos, a execução do trabalho colaborativo foi estruturada em quatro situações profissionais: Situação de Reflexão, Situação de Formação, Situação de Implementação e Situação de Confrontação (Figura 9). Essa estrutura tem como fonte de inspiração um modelo desenvolvido por Lucena (2018) e adaptado por Xavier Neto (2021), que procurava articular situações e OIs em um ambiente de formação de professor, empoderando o docente a conceber OIs que

dessem suporte à gênese instrumental do estudante.

Figura 9 – Estrutura do Trabalho Colaborativo



Fonte: Elaborada pelo Pesquisador

O trabalho colaborativo foi desenvolvido com as plataformas virtuais Documentos *Google* ou *Google Docs* (processador de texto *online* que possibilita criar e editar documentos e compartilhar com outras pessoas) e *Google Meet* (aplicativo de videoconferência baseado em padrões que usa protocolos proprietários para transcodificação de vídeo, áudio e dados) no qual foram desenvolvidos recursos para o ensino de Juros Compostos.

Esses recursos seriam, posteriormente, disponibilizados no ambiente *Google Sala de Aula* e/ou implementados com os alunos pelo *Google Meet*, para cada uma das turmas sob responsabilidade de cada professora. Antes do desenvolvimento do trabalho colaborativo, o pesquisador também teve contato com as professoras por telefone, *WhatsApp* e e-mail para tratar de questões preliminares referentes ao trabalho, como agendamentos.

A seguir, é discutida a situação de reflexão do trabalho colaborativo.

### 7.2.1 Situação de Reflexão

Nesse item ocorre a construção de um roteiro de atividades para o ensino de Juros Compostos, a partir de recursos escolhidos pelas participantes de forma colaborativa (Figura 9).

A experiência da situação de reflexão foi planejada de maneira a habilitar as professoras a refletir criticamente sobre suas decisões para o ensino de Juros Compostos no 3º ano do Ensino Médio. Essa situação profissional ocorreu no decorrer do mês de março de 2021 com o propósito de propor aos sujeitos da pesquisa a construção colaborativa de um roteiro de atividades para ensinar Juros Compostos por meio da livre escolha de tarefas e recursos. Durante seu desenvolvimento, desejou-se que as professoras articulassem esquemas e classes de situações para atender às demandas provocadas pela situação. Nessa situação, também foi possível observar as estratégias adotadas pelo pesquisador para discutir as decisões tomadas pelas professoras.

No dia 08 de março de 2021, tivemos uma reunião no *Google Meet* sobre o trabalho colaborativo quando combinamos utilizar o *Google Docs* para desenvolver os documentos para o ensino de Juros Compostos. Definiu-se que cada professora postaria seus recursos e estratégias, de forma que a outra professora faria seus comentários e sugeriria adequações aos recursos e estratégias propostos pela colega.

Cogitou-se trabalhar com as seguintes abordagens: modelagem de situações-problema, uso das Tecnologias Digitais (em especial o *software* GeoGebra), História da Matemática, jogos (digitais ou não digitais), articulação com outras áreas da Matemática. A construção de documentos no *Google Docs* ocorreria de 14 a 17.03.2021. Foi dado um prazo de 08 a 14.03 (período que coincidiu com a jornada pedagógica de planejamento do colégio) para as professoras pesquisarem e refletirem sobre os possíveis recursos a serem utilizados.

Na reunião do dia 8 de março de 2021 pelo *Google Meet*, as professoras discutiram que o trabalho colaborativo seria pautado na competência específica 2 para Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio da BNCC, especificamente na Habilidade (EM13MAT203): “Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões” (BRASIL, 2017, p. 526).

Em conformidade com o cruzamento das duas lógicas “questionamento prático”

e “pesquisa formal” discutidas por Desgagné *et al.* (2002), definiram a seguinte questão norteadora para a realização do trabalho colaborativo: “Quais recursos poderão ser desenvolvidos, de forma colaborativa e remota, a fim de possibilitar a compreensão do conceito de regime de capitalização composta?”.

Também definiram os seguintes objetivos do trabalho colaborativo:

Objetivo geral: Desenvolver recursos que possibilitem a compreensão do conceito de regime de capitalização composta.

Objetivos Específicos:

- Apresentar situações-problema que envolvam Juros Compostos;
- Adotar o *software* GeoGebra, a História da Matemática e jogos como recursos para o ensino de Juros Compostos;
- Articular o ensino de Juros Compostos com outros conteúdos matemáticos como funções, geometria analítica e vetores.

Segue abaixo a descrição da construção dos documentos<sup>15</sup> pelo *Google Docs*:

O pesquisador fez a primeira edição do documento com a seguinte observação:

Pesquisador: Caros colegas, conforme discutido no encontro presencial eventual que tivemos no dia 22.12.2020, nas nossas conversas por telefone, whatsapp e Google Meet, vamos dar continuidade ao trabalho iniciado no ano passado. Nesse ambiente, vamos apresentar, discutir e integrar recursos e estratégias para o ensino de juros compostos. Lembrando que devemos seguir as orientações da BNCC e, conforme combinado, vamos focar na criação de situações-problema e uso de tecnologias digitais. À medida que cada um for postando suas contribuições, os demais poderão fazer seus comentários e reflexões, a fim de melhorar o que for apresentado. Proponho o uso de cores diferentes para a postagem de cada um. Depois de todos postarem suas contribuições e comentários, faremos uma reunião virtual para organizar melhor a apresentação do material e fazer os ajustes necessários. Bom trabalho!!!

Em seguida, a professora Genilda fez o seguinte comentário:

Professora Genilda: Oi, vou começar propondo uma situação-problema em que o aluno gradativamente vai poder inferir sobre a fórmula do montante.

A Figura 10 ilustra o primeiro recurso proposto por Genilda:

---

<sup>15</sup> Link da construção dos documentos pelo Google Docs  
<https://docs.google.com/document/d/1891Qe-ellW7LcRIso7oOz3jNYWDDeTtvqCScyliWbBc/edit>

Figura 10 - Situação-problema de modelagem resolvida pela professora

**Situação – problema resolvida pelo professor:** João tem um capital de R\$14.000,00 aplicado em uma instituição financeira, a uma taxa de juros compostos de 8% ao ano. Determine o valor do montante da aplicação com o passar do tempo, preenchendo o quadro a seguir. Para o preenchimento dos campos referentes às expressões, utilize os dados do ano anterior e coloque os termos comuns em evidência.  
Generalizando, escreva uma expressão capaz de determinar o valor do montante com o passar do tempo:

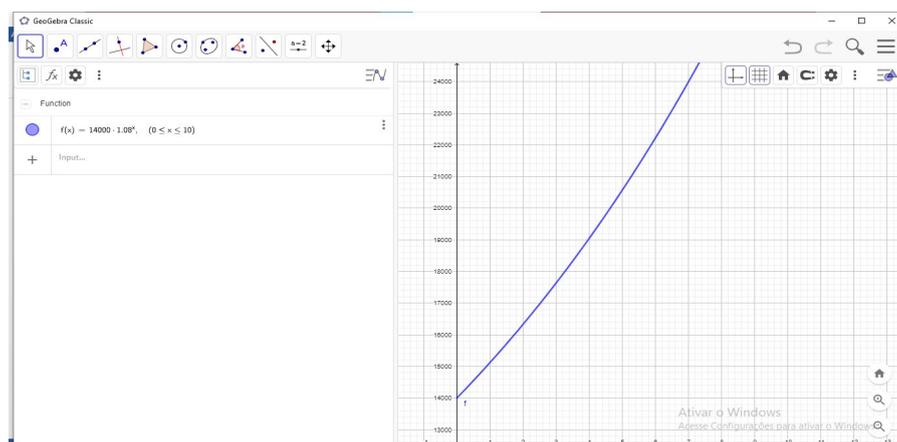
Tempo	Expressão	Valor do Montante
Hoje	$M_0 = 14000$	14000
Após 1 Ano	$M_1 = 14000 + 14000 \cdot 0,08 = 14000(1 + 0,08) = 14000 \cdot 1,08$	15120
Após 2 Anos	$M_2 = 14000 \cdot 1,08 + 14000 \cdot 1,08 \cdot 0,08 = 14000 \cdot 1,08(1 + 0,08) = 14000 \cdot 1,08^2$	16329,60
Após 3 Anos	$M_3 = 14000 \cdot 1,08^2 + 14000 \cdot 1,08^2 \cdot 0,08 = 14000 \cdot 1,08^2(1 + 0,08) = 14000 \cdot 1,08^3$	17635,96
Após 4 Anos	$M_4 = 14000 \cdot 1,08^3 + 14000 \cdot 1,08^3 \cdot 0,08 = 14000 \cdot 1,08^3(1 + 0,08) = 14000 \cdot 1,08^4$	19046,83
Após n anos	$M = 14000 \cdot 1,08^n$	

Utilizando o software GeoGebra, obtenha o gráfico da função que representa o montante dessa aplicação e faça suas observações. Esse gráfico lembra o de algum tipo de função estudada anteriormente?

Fonte: Elaborado pela professora Genilda

A Figura 11 apresenta o gráfico da função obtido pela professora com o uso do GeoGebra:

Figura 11 - Gráfico da situação-problema de modelagem



Fonte: Elaborado pela professora Genilda

A professora sugeriu apresentar essa situação-problema a ser resolvida, de forma interativa, com os alunos e, em seguida, propor uma outra situação semelhante para que os alunos resolvessem. A Figura 12 ilustra essa outra situação:

Figura 12 – Situação-problema de modelagem a ser resolvida pelo aluno

<b>Situação – problema a ser resolvida pelo aluno:</b> Uma loja vende um aparelho de som à vista por R\$ 450,00. Se a loja cobra uma taxa de juro composto de 6% ao mês no crediário, determine o preço do aparelho com o passar do tempo, preenchendo o quadro a seguir. Para o preenchimento dos campos referentes às expressões, utilize os dados do ano anterior e coloque os termos comuns em evidencia.		
Tempo	Expressão	Preço do aparelho
Hoje		
Após 1 mês		
Após 2 meses		
Após 3 meses		
Após 4 meses		
Generalizando, escreva uma expressão capaz de determinar o preço do aparelho com o passar do tempo:		
Utilizando o software GeoGebra, obtenha o gráfico da função que representa o preço do aparelho com o passar do tempo e faça suas observações. Esse gráfico lembra o de algum tipo de função estudada anteriormente?		

Fonte: Elaborado pela professora Genilda

A professora ainda fez a seguinte observação:

Professora Genilda: Elaborei essa situação-problema fazendo uma modificação e ajustamento de uma questão do livro didático. O livro sugeria o uso da lei da função e não solicitava construção gráfica. Nessa adaptação o aluno precisará generalizar para encontrar a fórmula e também vai precisar usar o GeoGebra para plotar o gráfico da função montante.

Sobre esse recurso, o pesquisador e a professora Carla fizeram os seguintes comentários:

Pesquisador: Interessante, assim o aluno ao invés de receber a lei da função, ele pode desenvolvê-la e perceber mais significado nela.

Professora Carla: Essa atividade descarta a mecanização e ajuda no desenvolvimento da capacidade de raciocínio do aluno.

Esse recurso corresponde a uma situação-problema apresentada em língua natural, a qual é modelada por uma função exponencial (relacionada ao montante), fazendo-se a articulação dos registros de representação numérico, algébrico e gráfico. Com esse recurso, a professora viabiliza que os alunos percebam a relação de dependência entre as grandezas presentes e observa se, depois da execução de alguns procedimentos aritméticos, os estudantes tiveram êxito na generalização da situação abordada.

Na resolução, os estudantes devem identificar as unidades de sentido, ou seja, os dados matematicamente apropriados, apresentados em língua natural, e esboçar as modificações dessas unidades, primeiramente, da língua natural para o registro numérico. Isso significa converter dessa língua para o registro de representação numérico, de forma que essa ação conduza à elaboração dos registros de representação algébrico e gráfico.

Convém destacar que os recursos utilizados pela professora Genilda na elaboração desse recurso foram o livro didático de autoria de Leonardo (2016) e o artigo de Mendonça e Pires (2018), o qual aborda atividades relacionadas com funções exponenciais realizadas em ambiente computacional.

Em seguida, a professora Carla fez a seguinte observação:

Professora Carla: Olá Cristian e Genilda, as situações-problema são importantes, mas acho que antes é interessante trabalhar um pouco com a história do assunto, o desenvolvimento do conceito. Por isso, sugiro antes dessa atividade: Fazer a leitura do texto disponível no link<sup>16</sup> sobre o desenvolvimento do conceito de juros. No final das atividades, redigir um pequeno texto (1 a 2 páginas), relacionando o conteúdo da leitura feita com as outras atividades e com o seu cotidiano. Na verdade, essa discussão do conteúdo do texto também pode ser feita no decorrer das atividades.

Sobre esse recurso, o pesquisador e a professora Genilda fizeram as seguintes observações:

Pesquisador: Esse texto é muito interessante, pois fornece uma visão geral da história dos juros, começando pela época do escambo, passando pelo surgimento dos bancos na época da expansão comercial e marítima, até os dias atuais com financiamento de imóveis e veículos, negociação de empréstimos, compras a prazo, aplicações na poupança, investimentos em ações etc.

Professora Genilda: Com essa atividade o professor pode contribuir para os estudantes compreenderem o desenvolvimento histórico do conceito de juros e refletir sobre a sua evolução nos dias de hoje.

Sobre o recurso livro didático utilizado pelas professoras (LEONARDO, 2016), o pesquisador fez o seguinte questionamento:

Pesquisador: Vocês também pretendem propor a leitura do capítulo sobre o assunto no livro didático, a análise dos exercícios resolvidos e a resolução dos exercícios propostos no capítulo?

Em resposta ao questionamento do pesquisador, as professoras fizeram as seguintes observações:

Professora Genilda: Sim, acho que também pode-se propor aos alunos o uso do simulador da calculadora HP 12C para auxiliar na resolução dessas questões. O link de acesso é: <https://www.baixaki.com.br/site/dwnld115333.htm>.

Professora Carla: Certamente, podemos também solicitar que os alunos resolvam todas as questões apresentadas no capítulo sobre juros compostos fazendo uso, quando possível, da janela de álgebra, da janela CAS e janela de visualização do Geogebra para obter os gráficos do montante, simplificar os cálculos e interpretar o problema de diferentes formas.

---

<sup>16</sup> Link do texto sobre o desenvolvimento do conceito de juros  
[https://www.dm.ufscar.br/profs/jpiston/downloads/artigo\\_hist\\_mat\\_fin\\_2aed.pdf](https://www.dm.ufscar.br/profs/jpiston/downloads/artigo_hist_mat_fin_2aed.pdf)

O recurso livro didático adotado pelas professoras (LEONARDO, 2016) tem o primeiro capítulo destinado à Matemática Financeira, sendo o conteúdo Juros Compostos abordado da página 16 à página 24. Apresenta uma breve fundamentação teórica, exercícios resolvidos, exercícios propostos, exercícios complementares (incluindo questões de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio), além de exercícios de autoavaliação. Também tem uma seção destinada ao uso de planilhas eletrônicas para auxiliar nos cálculos relacionados a operações financeiras e outra seção que aborda planejamento financeiro familiar.

As professoras também adotaram o recurso planilha eletrônica no contexto de algumas situações-problema apresentadas adiante, utilizando funcionalidades do próprio GeGebra e do *software Excel*. Quanto à atividade proposta na seção sobre planejamento financeiro familiar, as professoras decidiram não implementá-la nesse contexto de isolamento social, pois trata-se de trabalho em grupo que requer encontros presenciais.

Convém ressaltar que os exercícios não contemplam construção de gráficos que possam colaborar com a compreensão do problema, nem fazem correlação do conteúdo Juros Compostos com as Funções Exponenciais, fato que estimulou as professoras a fazerem modificações, adaptações e combinações de recursos, integrando o livro didático com o *software GeoGebra* e outros recursos. A integração do livro didático com a janela de álgebra e de visualização do GeoGebra permite que o professor articule com os alunos, para uma mesma situação, os registros de representação algébrico e gráfico, de forma a se obter uma observação concomitante dos diferentes registros de representação e uma compreensão mais ampla do problema.

Quando o professor planeja a integração do livro didático com a janela CAS do GeoGebra e com o simulador da calculadora financeira HP 12C, isso conduz a uma maior agilidade na resolução dos problemas, simplificação dos cálculos, bem como a uma comparação e validação dos resultados obtidos pelos alunos no ambiente lápis-papel.

Em continuidade ao trabalho colaborativo, a professora Carla propôs as seguintes situações-problema, relacionando juros simples e juros compostos, conforme o Quadro 4:

Quadro 4 – Situação-problema relacionando juros simples e composto resolvida pela professora

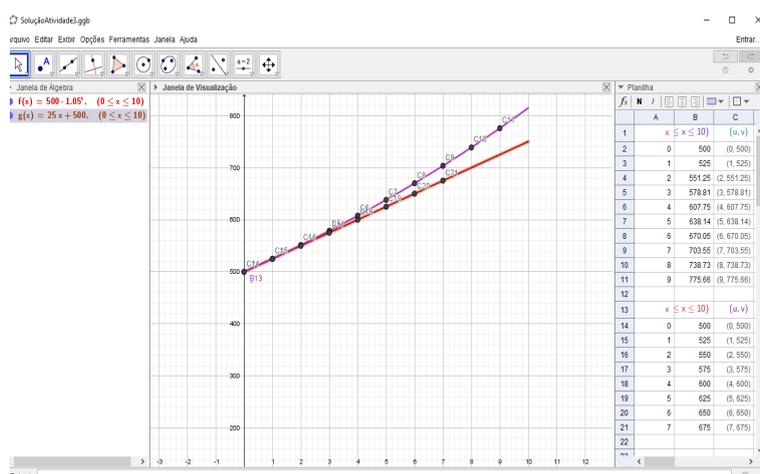
**Situação problema resolvida pelo professor:** Maria quer fazer uma aplicação de R\$ 500,00, mas está em dúvida sobre em qual situação terá maior rendimento e de quanto a mais:

- Na capitalização simples, à taxa de 5% ao mês, durante 3 meses?
- Na capitalização composta, à taxa de 5% ao mês, durante 3 meses?
- Obtenha o gráfico que representa a função Montante x período, para as duas situações e na mesma janela do Geogebra.
- Analisando os dois gráficos, responda qual situação é mais rentável.

Fonte: Elaborado pela professora Carla

Segue a resolução da situação-problema pela professora:

Figura 13 - Resolução da situação-problema relacionando juros simples e composto com o GeoGebra



Fonte: Elaborado pela professora Carla

Segue a situação-problema proposta pela professora Carla para ser resolvida pelos alunos, conforme o Quadro 5:

Quadro 5 – Situação-problema relacionando juros simples e composto a ser resolvida pelo aluno

**Situação problema a ser resolvida pelo aluno:** Ana quer fazer uma aplicação de R\$ 4000,00, mas está em dúvida sobre em qual situação terá maior rendimento e de quanto a mais:

- Na capitalização simples, à taxa de 3% ao mês, durante 7 meses?
- Na capitalização composta, à taxa de 2% ao mês, durante 8 meses?
- Obtenha o gráfico que representa a função Montante x período, para as duas situações e na mesma janela do Geogebra.
- Analisando os dois gráficos, responda qual situação é mais rentável.

Fonte: Elaborado pela professora Carla

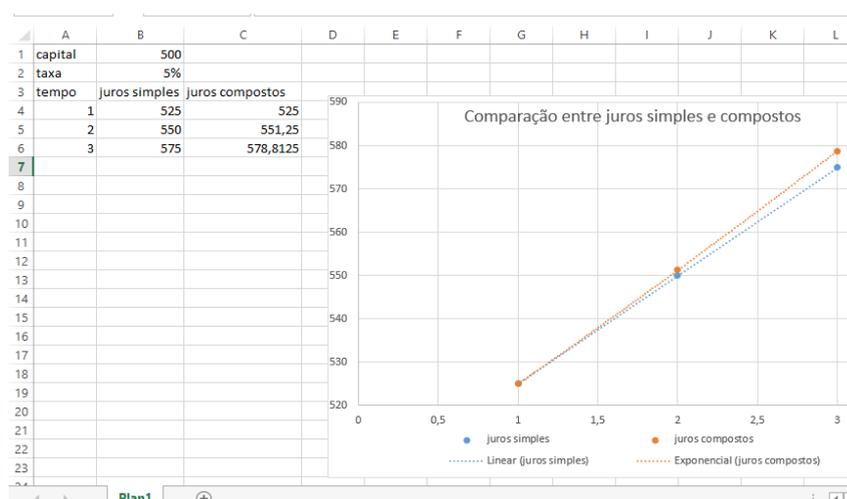
Sobre esse recurso, as professoras Carla e Genilda observaram que:

Professora Carla: Assim como a Genilda eu também elaborei essas situações-problema fazendo adaptações de questões do nosso livro didático, porém integrando questões de juros simples e compostos e solicitando o auxílio do Geogebra na construção dos gráficos e análises.

Professora Genilda: Gostei dessa ideia de dar oportunidade ao aluno de comparar os rendimentos a juros simples e compostos através da representação gráfica. Sugiro complementar essas situações problema com a seguinte atividade: “É interessante, caso seja possível, a utilização de planilhas e gráficos do Excel para se comparar com os resultados do Geogebra”.

Complementando o recurso proposto pela professora Carla, a professora Genilda apresentou a solução da situação-problema resolvida por Carla, utilizando o *software Excel*:

Figura 14 - Resolução da situação-problema relacionando juros simples e composto com o Excel



Fonte: Elaborado pela professora Genilda

Com esse recurso, o professor também tem a oportunidade de trabalhar com os alunos a articulação dos registros de representação algébrica e gráfico para as duas situações (capitalização simples e composta), de forma a se comparar os rendimentos das situações numa mesma janela do GeoGebra, fazer inferências e tomar decisões, a partir dessa comparação. O recurso conduz o aluno a compreender que, a depender dos valores das variáveis envolvidas (capital, taxa de juros e tempo) uma ou outra situação será mais vantajosa financeiramente.

O professor também pode viabilizar, com esse recurso, que os alunos percebam que a função do montante na capitalização simples é uma função afim, destacando as variáveis dependente e independente, coeficientes angular, linear etc.

e que a função do montante na capitalização composta é uma função exponencial, destacando os casos em que a função é crescente ou decrescente.

Na sequência do trabalho, a professora Genilda propôs as seguintes situações-problema envolvendo conhecimentos de juros compostos, geometria analítica e vetores, conforme o Quadro 6:

Quadro 6 – Situação-problema envolvendo juros compostos, geometria analítica e vetor resolvida pela professora

**Situação-problema resolvida pelo professor:** Há exatamente 3 meses, Antônio fez uma aplicação de R\$ 1.000,00 no Banco X, a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, durante 3 meses; no entanto, ele tinha um saldo negativo na sua conta do Banco Y de R\$ 2.000,00. Hoje, ele fez um depósito na sua conta do Banco Y, quitando sua dívida e restando-lhe um saldo positivo de R\$ 1.000,00. A partir de um sistema de eixos cartesianos, represente um vetor associado à variação dos saldos dessas contas entre os dois momentos. Determine, também, o módulo desse vetor.

Fonte: Elaborado pela professora Genilda

Segue a resolução da situação-problema proposta pela professora Genilda, conforme o Quadro 7:

Quadro 7 – Resolução da situação-problema envolvendo juros compostos, geometria analítica e vetor

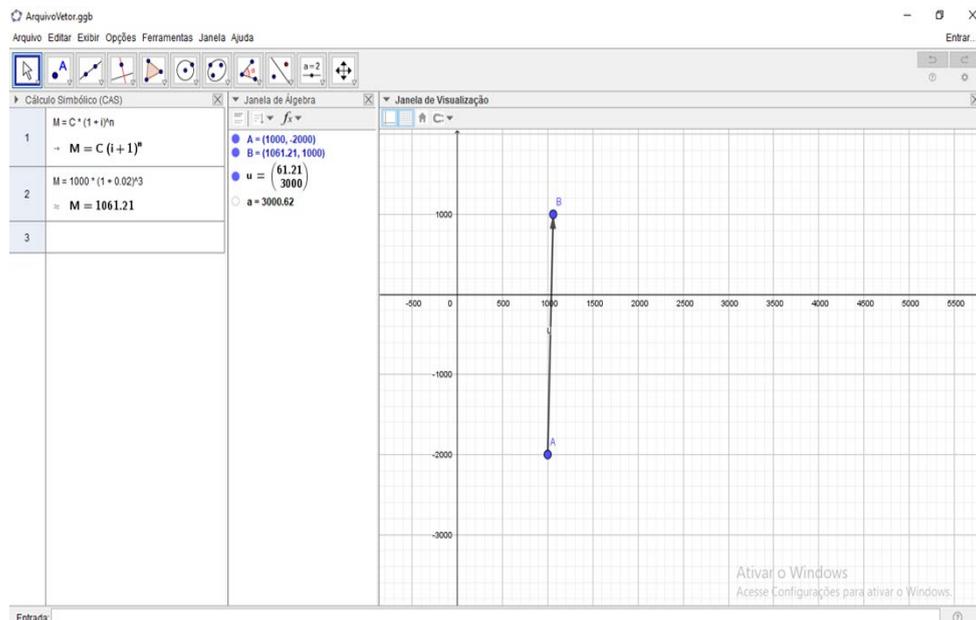
#### **Resolução**

- a) Através da janela CAS do Geogebra, encontre o montante da aplicação no Banco X, após 3 meses, cujo valor é de R\$ 1.061,21.
- b) Através da Janela de Visualização do Geogebra, marque dois pontos cujas coordenadas correspondam ao saldos das duas contas nos dois períodos. Os pontos são A(1000, -2000) e B(1061.21, 1000).
- c) Na Janela de Entrada do Geogebra, digite Vetor(<Ponto Inicial>, <Ponto Final>), substituindo ponto inicial por A e ponto final por B. Na Janela de Visualização, aparecerá a representação do vetor  $u = (61.21, 3000)$  cujos componentes correspondem às variações nos saldos das contas.
- d) Na Janela de Entrada, digite Comprimento(<Objeto>), substituindo Objeto por u. Na Janela de Álgebra, aparecerá  $a = 3000,62$ , que corresponde ao módulo do vetor. Discutir com os alunos que esse valor também pode ser interpretado como a distância entre os pontos A e B.

Fonte: Elaborado pela professora Genilda

A professora Genilda também apresentou o *print* da tela do GeoGebra com a solução, conforme a Figura 15:

Figura 15 – Resolução da situação-problema envolvendo juros compostos, geometria analítica e vetor no GeoGebra



Fonte: Elaborado pela professora Genilda

Segue a situação-problema proposta pela professora Genilda para ser resolvida pelos alunos, conforme o Quadro 8:

Quadro 8 – Situação-problema envolvendo juros compostos, geometria analítica e vetor a ser resolvida pelo aluno

**Situação-problema a ser resolvida pelos alunos:** Represente um vetor associado à variação dos saldos das contas de Antônio entre os dois momentos e determine o módulo desse vetor, considerando agora que as situações de Antônio nos dois bancos são as seguintes: Há exatamente 4 anos, Antônio fez uma aplicação de R\$ 3.000,00 no Banco X, a uma taxa de juros compostos de 0,25% ao mês, durante 4 anos; no entanto, ele tinha um saldo negativo na sua conta do Banco Y de R\$ 2.000,00. Hoje, ele fez um depósito na sua conta do Banco Y, quitando sua dívida e restando-lhe um saldo positivo de R\$ 1.000,00.

**Obs.: Nesse caso, a taxa e o tempo estão em unidades de medida diferentes.**

Fonte: Elaborado pela professora Genilda

A professora Genilda destacou que também fez adaptações de questões do livro didático (LEONARDO, 2016) para criar essas situações-problema. Sobre esse recurso, a professora Carla e o pesquisador fizeram as seguintes observações:

Professora Carla: Muito boa essa articulação entre juros compostos, geometria analítica e vetor, o conteúdo de matemática financeira costuma ser trabalhado de forma muito isolada, sem conexão com as outras áreas da matemática.

Pesquisador: Também é possível um trabalho interdisciplinar, pois o conteúdo vetor também é trabalhado na disciplina de Física.

Convém ressaltar que esse recurso proposto pela professora Genilda

resultou da adaptação de uma questão do livro didático (LEONARDO, 2016, p. 22) a qual abordava juros simples, porém a professora modificou para juros compostos, além de combinar com a utilização das janelas CAS, janela de álgebra e janela de visualização do GeoGebra, a fim de se articular conhecimentos de juros compostos, geometria analítica e vetor. Esse é mais um recurso que permite fazer uma integração dos juros compostos com outros conhecimentos matemáticos, em especial a geometria analítica que também costuma ser trabalhada no 3º ano do Ensino Médio, relacionando-se as variações nos saldos das contas com as noções de coordenadas cartesianas, distância entre dois pontos, vetor etc.

Os pares de coordenadas dos pontos mostram os saldos de duas contas e vetores são considerados como pares de depósitos (ou retiradas) que modificam os valores das duas contas. Assim, os pontos estão relacionados às posições das contas, vetores aos deslocamentos dessas posições.

No decorrer do trabalho colaborativo, também houve a discussão sobre a utilização de videoaula como recurso para o ensino de Juros Compostos:

Professora Carla: Colegas, proponho também a utilização de uma videoaula<sup>17</sup> da *Khan Academy* para ampliar a compreensão dos alunos sobre o assunto.  
Professora Genilda: Muito interessante, pois essa videoaula esclarece adequadamente a diferença entre os regimes de juros simples e compostos, fazendo uma comparação.

Esse recurso proposto pela professora Carla encontra-se na plataforma *Khan Academy*, um ambiente de recurso educacional *on-line*, acessível de forma gratuita na *Internet*, que disponibiliza videoaulas e exercícios de Matemática contemplando desde a Educação Infantil até o Ensino Superior. Nesse ambiente, as videoaulas oferecem explicações detalhadas sobre os mais diversos conteúdos de cada disciplina, acompanhadas de textos de revisão para reforçar o aprendizado; também é disponibilizado, na forma de exercícios, um jogo de perguntas e respostas, no qual a cada resposta correta o aluno vai pontuando e avançando para uma próxima pergunta; caso ele erre a resposta, tem a opção de tentar de novo, obter ajuda (descrição de um método de resolução) ou avançar para uma próxima pergunta.

Na continuidade do trabalho colaborativo, a professora Genilda apresentou uma situação-problema, envolvendo o conceito de depreciação:

---

<sup>17</sup>Link da videoaula da plataforma Khan Academy  
<https://pt.khanacademy.org/economics-finance-domain/core-finance/interest-tutorial/interest-basics-tutorial/v/introduction-to-interest>.

Professora Genilda: No livro didático tem uma questão resolvida sobre depreciação onde a resposta é encontrada fazendo-se muitos cálculos usando as propriedades dos logaritmos. Essa resposta pode ser encontrada de uma forma mais prática com o uso da fórmula do juro composto através da janela CAS do Geogebra. Também acrescento a questão, pedindo o gráfico da depreciação em função do tempo.

Segue a situação-problema proposta pela professora Genilda, conforme o Quadro 9:

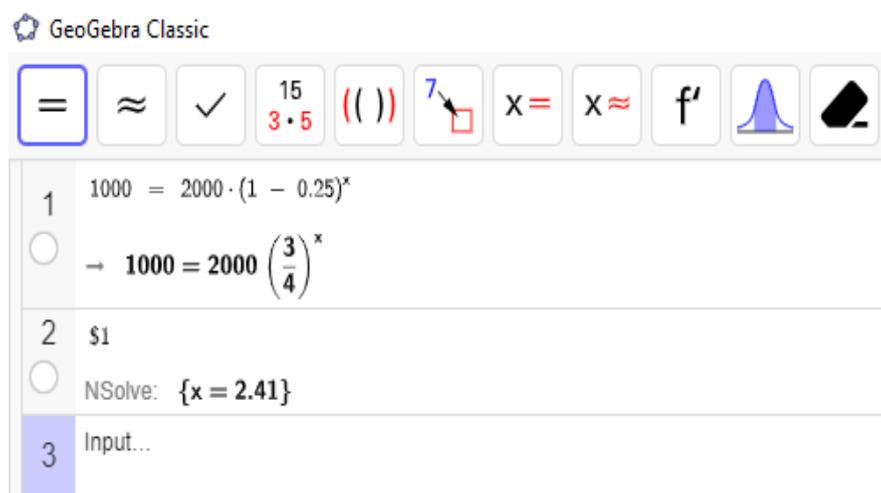
Quadro 9 – Situação-problema sobre depreciação resolvida pela professora

**Situação-problema resolvida pelo professor:** O valor de uma máquina sofre depreciação anual de 25%. Se ela custa hoje R\$ 2.000,00, daqui a quantos anos valerá metade do que vale hoje? Resolva através da janela CAS do GeoGebra e construa o gráfico da depreciação em função do tempo.

Fonte: Elaborado pela professora Genilda

A Figura 16 apresenta a resolução desenvolvida pela professora Genilda na janela CAS do GeoGebra:

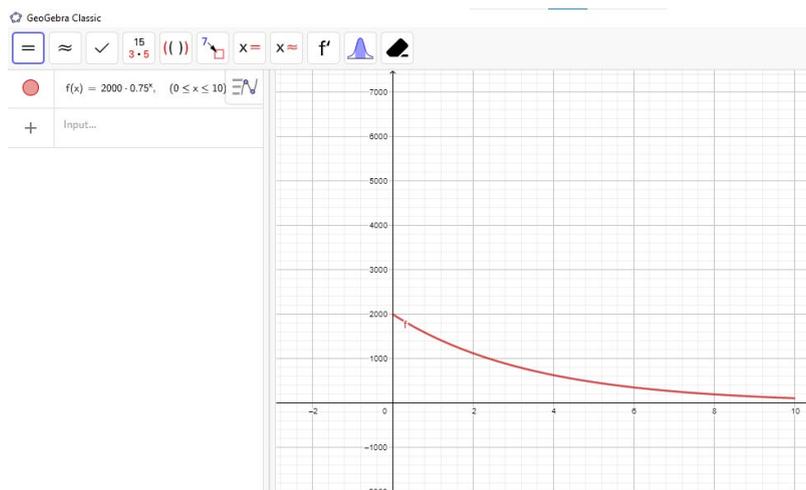
Figura 16 - Resolução da situação-problema sobre depreciação no GeoGebra



Fonte: Elaborado pela professora Genilda

A professora Genilda também apresentou o *print* da tela do GeoGebra com o gráfico da depreciação em função do tempo, conforme Figura 17:

Figura 17 - Gráfico da situação-problema sobre depreciação



Fonte: Elaborado pela professora Genilda

Segue outra situação-problema semelhante à anterior, proposta pela professora Genilda, para ser resolvida pelos alunos, conforme Quadro 10:

Quadro 10 – Situação-problema sobre depreciação a ser resolvida pelo aluno

**Situação-problema a ser resolvida pelos alunos:** Se um automóvel 0 km custa hoje R\$ 36.000, 00 e ele sofre depreciação anual de 6%, daqui a quantos anos valerá um quarto do que vale hoje? Resolva através da janela CAS do GeoGebra e construa o gráfico da depreciação em função do tempo.

Fonte: Elaborado pela professora Genilda

Sobre esse recurso, a professora Carla fez a seguinte observação:

Professora Carla: Essa questão é muito válida, pois o aluno é incentivado a utilizar a fórmula do juro composto, mas ao comparar com as questões anteriores, vai perceber que nesse caso como ocorre uma desvalorização, os valores vão diminuindo com o tempo em vez de aumentar. O gráfico ajuda a perceber isso claramente.

A professora Genilda elaborou essa situação-problema, fazendo uma adaptação de uma questão do livro didático (LEONARDO, 2016, p. 17). Esse é mais um recurso com o qual o professor tem a oportunidade de trabalhar com os alunos a articulação dos registros de representação algébrica e gráfico; no entanto, ao contrário das situações anteriores, nessa situação o gráfico da depreciação relaciona-se ao de uma função exponencial decrescente.

O professor pode destacar, por exemplo, que a base da potência na representação algébrica da função é um número que está entre 0 e 1, o que justifica a função ser decrescente. Nos casos anteriores, a base da potência é um número

maior do que 1, o que justifica a função ser crescente. A simplificação dos cálculos com o uso da janela CAS do GeoGebra também viabiliza a confrontação dos resultados obtidos pelos alunos nesse ambiente com os resultados obtidos no ambiente lápis-papel.

Em seguida, a professora Carla apresentou uma situação-problema, envolvendo o conceito de atualização financeira:

Professora Carla: Também observei uma questão resolvida no livro didático sobre atualização financeira que apresenta muitos cálculos para sua resolução. Podemos propor sua resolução usando o GeoGebra para comparar com os cálculos feitos no papel.

Segue a situação-problema proposta pela professora Carla, conforme Quadro 11:

Quadro 11 – Situação-problema sobre atualização financeira resolvida pela professora

**Situação-problema resolvida pelo professor:** Uma compra de R\$ 600,00 vai ser paga em 3 parcelas mensais e iguais, sendo a primeira à vista. Determinar o valor de cada parcela sabendo que a loja cobra juro de 6,5% a.m.

Fonte: Elaborado pela professora Carla

A Figura 18 mostra a resolução proposta pela professora com o uso do GeoGebra:

Figura 18 - Resolução da situação-problema sobre atualização financeira no GeoGebra

The screenshot shows the GeoGebra Classic CAS interface. The toolbar at the top includes symbols for equals, approximate, check, fraction (15/3\*5), parentheses, square root, x=, x≈, f', and a graph icon. The input field contains the equation:  $x + \frac{x}{1.065} + \frac{x}{(1.065)^2} = 600sssss$ . The output shows the solution:  $\rightarrow \frac{127969}{45369} x = 600 sssss$ . Below the equation, there are three numbered steps: 1, 2, and 3. Step 2 shows the result: \$1. Step 3 shows the final solution: NSolve: {x = 212.72}.

Fonte: Elaborado pela professora Carla

A professora Carla completou com a seguinte observação:

Professora Carla: Assim, os alunos podem usar essa estratégia para

comparar com os cálculos feitos no papel para resolver as outras questões semelhantes no livro didático: questões 29 a 33 da página 19.

Sobre essa situação-problema o pesquisador e a professora Genilda comentaram:

Pesquisador: Questões desse tipo que envolvem compras parceladas são muito importantes, pois estão relacionadas com a realidade de muitas famílias que utilizam sempre o crediário.

Professora Genilda: Gostei, algumas dessas questões solicitam o valor das parcelas, outras solicitam o valor da taxa de juro e outra solicita o valor presente da dívida.

Esse recurso proposto pela professora Carla resultou da integração de questões do livro didático (LEONARDO, 2016, p. 19) com a utilização da janela CAS do GeoGebra. As resoluções apresentadas pelo livro envolvem cálculos com frações, equações racionais e equações do 2º grau. Como esses cálculos costumam ser trabalhosos e muitos alunos apresentam grandes dificuldades com seu desenvolvimento, a proposta desse recurso também permite auxiliá-los pela comparação entre os resultados obtidos com o GeoGebra e os resultados obtidos no ambiente lápis-papel.

Finalizando o desenvolvimento de recursos do trabalho colaborativo, a professora Carla sugeriu uma atividade para se trabalhar o lúdico com os alunos, usando conhecimentos de juros compostos. O Quadro 12 descreve essa atividade:

Quadro 12 – Jogo dos juros

#### **Jogo dos juros**

Adaptar um tabuleiro (semelhante ao apresentado abaixo) que possa ser utilizado para o “jogo dos juros”, abordando situações como compras com juros, pagamento de boleto bancário atrasado, dívidas e etc. Formar grupos de 2 ou 4 pessoas. As regras do jogo são:

- Inicialmente, considere um capital de R\$ 5000,00 para cada participante.
- Anotem esse valor na folha de papel.
- Escolha quem será o primeiro a jogar o dado.
- Cada participante, na sua vez, lança o dado duas vezes. A primeira vez indicará o número da coluna do quadro e a segunda vez, o número da linha, obtendo uma coordenada (coluna, linha). As coordenadas podem ser compostas apenas de números de 1 a 5.
- Toda vez que o dado indicar o número 6, o participante que lançou deverá adicionar R\$ 100,00 ao seu montante e lançar novamente o dado para obter as coordenadas (números de 1 a 5).
- Obtidas as coordenadas, cada participante deverá localizá-la no quadro e realizar os cálculos sugeridos na situação correspondentes às coordenadas. Nas situações, pode-se acrescentar ou retirar um determinado valor do montante.
- O vencedor será o participante que tiver a maior quantia em seu montante após certa quantidade de jogadas, determinadas por vocês. (RIBEIRO, 2009, p. 42).

Fonte: Ribeiro (2009, p. 42).

Segue o modelo de tabuleiro proposto pela professora Carla que pode ser

adaptado para o jogo, conforme Figura 19:

Figura 19 – Modelo de tabuleiro para o jogo dos juros

	1	2	3	4	5
1	Qual a quantidade de juros produzidos por um capital de R\$ 30.000,00 durante 2 anos, a uma taxa de juros compostos de 60% ao ano? <b>Retire esse valor</b>	<b>PASSE A VEZ!</b>	Qual a quantidade de juros produzidos por um capital de R\$ 900,00 durante 5 meses, a uma taxa de juros compostos de 9% ao mês? <b>Acrescente esse valor</b>	João aplicou R\$20.000,00 durante 3 meses em uma aplicação a juros compostos com uma taxa de 6% ao mês. Qual o valor recebido por João ao final desta aplicação? <b>Acrescente esse valor</b>	Qual montante teremos em 4 meses se aplicarmos um capital inicial de R\$5.000,00 a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês? <b>Retire esse valor</b>
2	Num balancete de uma empresa consta que certo capital foi aplicado a uma taxa de 30% ao ano durante 8 meses, rendendo juros compostos no valor de R\$ 192,00. O capital aplicado foi de: <b>Acrescente esse valor</b>	Qual será o montante (valor inicial + juros) produzido por um capital de R\$ 20.000,00 empregado à taxa de juros compostos de 0,4% ao mês, no fim de 3 anos, 4 meses e 15 dias? <b>Retire esse valor</b>	<b>JOGUE NOVAMENTE!</b>	Um capital de R\$ 80,00 aplicado a juros compostos à taxa de 2,4% a.m. atinge, em 45 dias, um montante, em reais, de: <b>Retire esse valor</b>	Uma pessoa tinha uma dívida da qual podia pagar apenas 20%. Para pagar o restante, fez um empréstimo que, a uma taxa fixa de 5% ao mês, lhe custou juros compostos de R\$ 12.000,00, ao final de um ano. A dívida era de: <b>Acrescente esse valor</b>
3	<b>PASSE A VEZ!</b>	Qual o montante gerado por um capital de R\$ 10.000, aplicado a uma taxa de juros compostos de 3% ao mês, durante 8 meses? <b>Acrescente esse valor</b>	Uma pessoa aplicou o capital de R\$ 1.200,00 a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês durante 14 meses. Determine o montante dessa aplicação. <b>Retire esse valor</b>	Um capital aplicado a juros compostos durante 2 anos, sob taxa de juros de 5% ao mês, gerou um montante de R\$ 26.950,00. Determine o valor do capital aplicado. <b>Acrescente esse valor</b>	Quanto terei de aplicar hoje num fundo de renda fixa para que, ao final de 10 anos a uma taxa de juros compostos de 1,3% a.m., haja um montante de R\$ 100.000,00? <b>Retire esse valor</b>
4	Um investidor aplica R\$ 1.000,00 a juros compostos de 3% ao mês. Determine o valor recebido após um ano: <b>Acrescente esse valor</b>	Calcule o juro que renderá um capital de R\$ 15.000,00 aplicado a uma taxa de juros compostos de 12% ao ano, durante seis meses. <b>Retire esse valor</b>	Um capital de 7.500,00 foi aplicado em um investimento que rende juro composto de 5% ao mês. Qual será o saldo dessa aplicação após seis meses? <b>Acrescente esse valor</b>	Um capital foi aplicado a juro composto com taxa de 10% ao mês, durante cinco meses. Se no fim desse período o juro produzido foi de R\$ 305, qual foi o capital aplicado? <b>Retire esse valor</b>	<b>JOGUE NOVAMENTE!</b>
5	Aplicando hoje na caderneta de poupança a quantia de R\$ 20.000,00, qual será o montante gerado ao final de 4 anos, sabendo que a rentabilidade mensal é de 0,5%?	Qual a quantidade de juros produzidos por um capital de R\$ 7.000,00 durante 3 anos, a uma taxa de juros compostos de 80% ao ano? <b>Acrescente esse valor</b>	João tomou R\$ 200,00 a juros compostos de 5% ao mês. Um mês após o empréstimo, pagou R\$100,00 e, um mês depois desse pagamento, liquidou a dívida. O	<b>PASSE A VEZ!</b>	Determinado capital gerou, após 24 meses, um montante de R\$ 15.000,00. Sabendo que a taxa de juros compostos é de 2% ao mês,

	<b>Retire esse valor</b>		valor do último pagamento foi de: <b>Acrescente esse valor</b>		determine o valor desse capital. <b>Retire esse valor</b>
--	--------------------------	--	---	--	--

Fonte: Adaptado de Ribeiro (2009) e elaborado pela professora Carla.

Sobre esse recurso, o pesquisador e a professora Genilda fizeram os seguintes comentários:

Pesquisador: Trabalhar com o lúdico é sempre uma estratégia eficaz, contribui com a aprendizagem significativa<sup>18</sup> e os alunos se sentem mais motivados.

Professora Genilda: Os alunos adoram esse tipo de atividade em que eles aprendem brincando, poderia ser feita quando retornarem as aulas presenciais ou então poderia ser feita uma adaptação no ambiente virtual.

Esse recurso foi proposto pela professora Carla que adotou como referência a obra de Ribeiro (2009, p. 42). Destacamos que o uso didático do jogo pode ser uma estratégia de integração social, desenvolvimento do raciocínio lógico, de habilidades, ideias e contato com uma Matemática mais contextualizada. A implementação desse recurso não ocorreu durante o desenvolvimento desta pesquisa, pois as aulas estavam sendo desenvolvidas apenas de forma remota e havia a necessidade de contato presencial entre os participantes.

No período de 12 a 15.03.2021, nas conversas com as professoras pelo *WhatsApp*, elas sugeriram fazer a implementação dos documentos criados a partir do mês de maio de 2021, pois, embora as aulas remotas na rede estadual da Bahia começassem no dia 15.03.2021, as duas primeiras semanas de aulas seriam destinadas a atividades integradoras de recepção aos alunos, conscientização, adaptação ao ambiente virtual, familiarização com os recursos tecnológicos utilizados etc. Além disso, as professoras também precisariam concluir aulas pendentes em 2020, já que o ano letivo engloba os anos de 2020 e 2021.

No dia 19.03.2021, tivemos uma reunião<sup>19</sup> pelo *Google Meet*, quando discutimos e refletimos a respeito do documento construído colaborativamente com o *Google Docs* sobre o ensino de Juros Compostos. Foram sugeridos ajustes, adaptações e inclusões, como exemplo: uso de vídeos do *YouTube* que abordam o

<sup>18</sup> Com base na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (Moreira, 1997).

<sup>19</sup> Links dos vídeos da reunião de 19.03.2021

<https://www.veed.io/download/ef88e257-1e77-4a2b-8c6a-e9348b15220b>

<https://www.veed.io/download/ab71f53c-057b-4340-8e71-db95c5e8db8c>

uso de comandos básicos do GeoGebra pela professora Genilda; uso de aplicativos de jogos como alternativa a um jogo de tabuleiro (difícil de ser utilizado em um contexto de isolamento social por conta da pandemia) pela professora Carla. Convém destacar que as professoras autorizaram, por meio de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), as gravações das reuniões, e por meio de um termo autorizando o uso da imagem, os quais todos aprovados pelo Comitê de Ética da PUC-SP (Anexo A), a fim de que pudessem ser utilizados nas análises dos dados.

Segundo a professora Genilda, muitos alunos não sabem utilizar o GeoGebra e outros nem sabem o que é o GeoGebra. Essa professora também desconhecia, até aquele momento, que o GeoGebra poderia ser utilizado em celular, fato que ela julga ser bastante favorável à implementação das aulas virtuais, pois muitos alunos não dispõem de computador em casa, apenas de celular. Conforme sugestão da professora Genilda, o pesquisador forneceu dicas de links<sup>20</sup> de vídeos no *YouTube* que abordam construções iniciais no GeoGebra, gráficos de funções e planilhas, além de instalação do GeoGebra no celular.

Para analisar os dados à luz do referencial teórico da ADD, planejou-se, por meio dos registros escritos no *Google Docs* e das gravações das reuniões no *Google Meet*, identificar esquemas documentais e recursos articulados para a elaboração do roteiro de atividades, a fim de realizar inferências sobre o trabalho documental estimulado pela experiência da situação de reflexão.

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), destacamos que os invariantes operacionais podem se desenvolver ao longo de um trabalho colaborativo, pois ambas as professoras criaram novos teoremas em ação sobre o desejo de utilizar, em suas aulas, novos recursos que auxiliem a compreensão da capitalização composta. Em conformidade com os princípios da metodologia de investigação reflexiva, pesquisamos a ação e o aperfeiçoamento profissional das docentes, percebendo os tópicos de estabilidade e avanços do trabalho documental no intervalo considerado (entre a experiência preliminar descrita na seção 7.1 e o desenvolvimento

---

<sup>20</sup>Interface do GeoGebra e construções iniciais: <https://youtu.be/O9ZWD31K4Hs>

Funções: <https://youtu.be/Z67pv76nZ6U>

Funções e Planilha: <https://youtu.be/EquQHtQ-8II>

Funções e controles deslizantes: <https://youtu.be/Y-WOukSzXyl>

Instalação do GeoGebra no smartphone: <https://youtu.be/whl01RBxa3o>

desta pesquisa). Quando os professores compartilham determinados invariantes operacionais, eles podem criar documentos comuns ou, em parte, comuns.

Sobre o planejamento feito pelas duas professoras com o apoio do Documentos *Google* e *Google Meet*, de forma colaborativa, por causa dos invariantes operacionais compartilhados, as professoras puderam construir um documento comum ou, em parte, comum. Tendo como regra geral de ação “Interagir com os alunos através de plataforma virtual”, esse documento apresentou os seguintes tópicos de estabilidade quando comparado com o documento da experiência preliminar: abarcou alguns recursos anteriores (plataforma *Google Sala de Aula*, vídeo-aulas da plataforma *Khan Academy*, simulador da calculadora financeira HP-12C, livro didático etc.) e esquemas de utilização compartilhados.

O documento também apresentou os seguintes tópicos de avanços quando comparado com o documento da experiência preliminar: abarcou novos recursos (plataforma *Google Meet*, software *GeoGebra*, modelagem de situações-problema, História da Matemática, conexões com a geometria analítica e vetores, jogo de tabuleiro) e esquemas de utilização compartilhados. As duas professoras compartilharam juntas teoremas em ação como, por exemplo: “Se trabalharmos com a história do assunto, o desenvolvimento do conceito de juros, então isso favorecerá uma melhor compreensão do conceito pelos alunos”; “Se os alunos generalizarem, então eles encontrarão uma expressão capaz de determinar o valor do montante com o passar do tempo”.

Foram compartilhados, assim, documentos comuns, relacionados ao ensino de Juros Compostos. De fato, cada professora utilizou os recursos em sala de aula de forma diferenciada, por causa de seus esquemas anteriores. No entanto, no trabalho colaborativo, elas compartilharam documentos novos e comuns, em especial invariantes operacionais comuns. A seguir, é apresentado um quadro-resumo com as situações, recursos, usos, invariantes operacionais e competências profissionais considerados nessa situação de reflexão do trabalho colaborativo:

Quadro 13 – Quadro-resumo da Situação de Reflexão

Situações	Recursos	Usos	Invariantes operacionais	Competências profissionais
Trabalhar a história dos Juros Compostos, o desenvolvimento do conceito.	Texto na Internet.	Adotar a História da Matemática como recurso para o ensino de juros compostos.	Se os alunos fizerem a leitura do texto disponível sobre o desenvolvimento do conceito de juros,	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos

			então isso favorecerá a compreensão do conceito”; “Se os alunos redigirem um pequeno texto, relacionando o conteúdo da leitura feita com as outras atividades e com o seu cotidiano, então isso reforçará o conhecimento dos alunos.	(digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
Modelar situações-problema sobre Juros Compostos por meio de funções exponenciais relacionadas ao montante.	Livro didático, artigo científico, software GeoGebra.	Articular registros numérico, algébrico e gráfico.	Se os alunos aprenderem a determinar o valor do montante da aplicação para cada tempo solicitado, então isso contribuirá com o seu aprendizado; Se os alunos generalizarem, então eles encontrarão uma expressão capaz de determinar o valor do montante com o passar do tempo; Se os alunos utilizarem as funcionalidades do software GeoGebra, então eles aprenderão a fazer a representação gráfica da função montante.	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos.	Livro didático, software GeoGebra.	Relacionar juros simples e juros compostos.	Se os alunos identificarem, entre as situações envolvendo capitalização simples e composta, qual a mais rentável, então isso reforçará o seu conhecimento.	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos.	Livro didático, software GeoGebra.	Articular conhecimentos de juros compostos, geometria analítica e vetores.	Se os alunos aprenderem a representar um vetor associado à variação dos saldos de duas contas entre dois momentos e determinar o módulo desse vetor, então isso reforçará o seu conhecimento.	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
Apresentar situações-problema	Livro didático, software GeoGebra.	Mobilizar conhecimentos	Se os alunos resolverem o problema utilizando	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a

que envolvam juros compostos.		sobre depreciação de um bem.	a janela CAS do GeoGebra, então isso contribuirá com o seu aprendizado; Se os alunos utilizarem as funcionalidades do software GeoGebra, então eles aprenderão a fazer a representação gráfica da função que expressa a depreciação do bem com o passar do tempo.	utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos.	Livro didático, software GeoGebra.	Mobilizar conhecimentos sobre atualização financeira.	Se os alunos resolverem o problema utilizando a janela CAS do GeoGebra, então isso contribuirá com o seu aprendizado.	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
Trabalhar o lúdico com os alunos, usando conhecimentos de juros compostos.	Tabuleiro adaptado para o "jogo dos juros".	Abordar situações como compras com juros, pagamento de boleto bancário atrasado, dívidas e etc.	Se for utilizado um recurso lúdico para o ensino de juros compostos, então isso contribuirá para a motivação dos estudantes.	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
Sugerir o uso do simulador da calculadora financeira HP 12C.	Site da Internet.	Auxiliar na resolução das questões do roteiro de atividades.	Se os alunos utilizarem a calculadora financeira, então haverá maior praticidade na resolução dos problemas, simplificação dos cálculos, bem como uma comparação e validação dos resultados obtidos pelos alunos no ambiente lápis-papel.	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
Propor a utilização de videoaulas.	Plataforma Khan Academy.	Ampliar a compreensão dos alunos sobre Juros Compostos.	Se for utilizada uma videoaula da Khan Academy que esclarece a diferença entre juros simples e juros compostos, então isso contribuirá para a aprendizagem dos estudantes.	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre

				outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
Propor a utilização de videoaulas.	Plataforma YouTube.	Abordar o uso de comandos básicos do GeoGebra.	Se forem utilizados vídeos do YouTube, então os alunos terão acesso a construções iniciais no GeoGebra, gráficos de funções e planilhas, além de instalação do GeoGebra no celular.	Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

Fonte: Elaborado pelo autor

Desse modo, na situação de reflexão, as professoras refletiram criticamente sobre suas decisões para o ensino de Juros Compostos no 3º ano do Ensino Médio, construindo um roteiro de atividades, a partir de recursos escolhidos pelas participantes de forma colaborativa.

A seguir, é discutida a situação de formação do trabalho colaborativo.

### 7.2.2 Situação de Formação

Nesse item ocorre a viabilização de uma Orquestração Instrumental para apropriação de um modelo de ensino articulado com o *site* do GeoGebra (Figura 9).

A segunda situação, de caráter formativo, ocorreu no mês de abril de 2021 e teve como propósito que os sujeitos se apropriassem de um modelo de ensino articulado com o *site* do GeoGebra. Para alcançar esse propósito, foi concebida uma Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2004; DRIJVERS *et al.*, 2010), cuja configuração didática e cujo modo de execução foram planejados de modo a permitir que os sujeitos se deparassem com uma nova situação de ensino. Essa situação sugeria propositalmente o ensino articulado com o *site* do GeoGebra e foi adotada com base nas potencialidades desse *site* na contribuição para os processos de planejamento e implementação de aulas pelos professores.

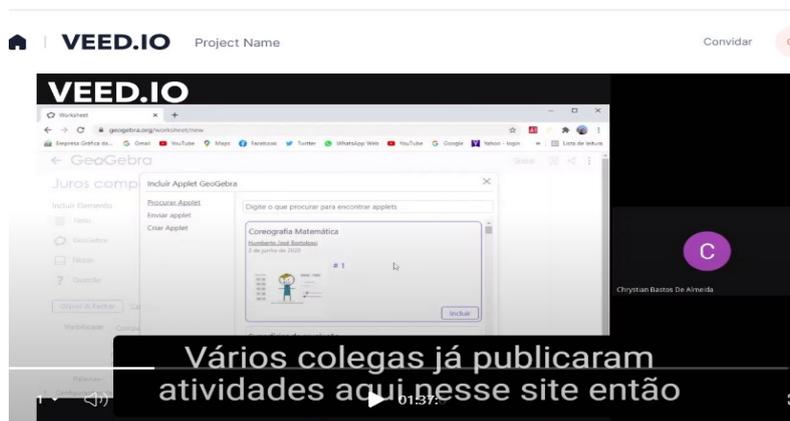
A situação não objetivava ensinar Matemática aos sujeitos, mas colocá-los em um contexto que buscou simular os processos de elaboração e implementação de aulas com a utilização do *site* do GeoGebra, guiando os sujeitos nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos.

Convém destacar que essa situação também não objetivava que as professoras adotassem os esquemas do investigador relativos ao uso do *site*, mas disponibilizar outro desafio de atuarem criticamente na busca de recursos para as suas práticas, relacionando suas experiências e conhecimentos prévios com o novo recurso apresentado, a fim de desenvolver seus próprios esquemas.

Assim, no dia 09.04.2021, tivemos uma nova reunião<sup>21</sup> por meio do *Google Meet*, quando o pesquisador concedeu orientações às professoras relativas às contribuições do *site* [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), a fim de favorecer as reflexões dessas professoras sobre as possibilidades de uso desse *site* na construção de documentos para o ensino. Por meio das orientações, as professoras e pesquisador interagiram a respeito da criação de atividades no *site* do GeoGebra, a integração de materiais didáticos do GeoGebra com o *Google Sala de Aula* e a utilização do GeoGebra *Classroom* (plataforma virtual por meio da qual os professores podem atribuir tarefas interativas e visualizar o progresso dos alunos, de maneira síncrona e assíncrona).

Podemos dizer que ocorreu uma Orquestração Instrumental, cuja configuração didática foi: “professoras e pesquisador interagindo por meio da plataforma de videoconferência *Google Meet*”. As Figuras 20, 21 e 22 ilustram essa configuração didática:

Figura 20 - Participação do pesquisador



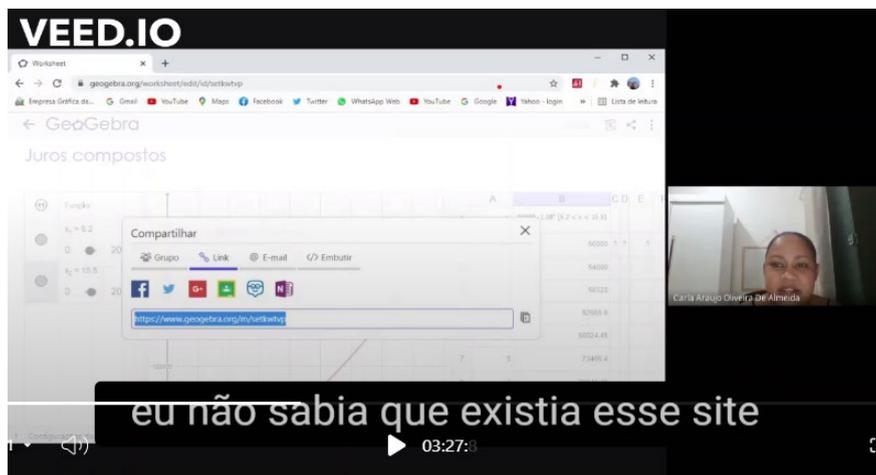
Fonte: <https://www.veed.io/download/756a3418-fd32-4c3a-8a8c-af01cf77a265>

<sup>21</sup> Links dos vídeos da formação

<https://www.veed.io/download/756a3418-fd32-4c3a-8a8c-af01cf77a265>  
<https://www.veed.io/download/5c933c23-18e8-4d2e-a711-281675f05148>  
<https://www.veed.io/download/f2fa4209-25c0-436a-9d9f-2ae02ecbac85>  
<https://www.veed.io/download/742e07c7-c18e-4cc2-8de2-5b21f73b0b08>  
<https://www.veed.io/download/c7282109-5226-48d8-b0d3-44a34ff5f45a>

A Figura 20 ilustra o pesquisador interagindo com as professoras Carla e Genilda por meio da plataforma *Google Meet*, fornecendo as informações iniciais a respeito do *site* do GeoGebra.

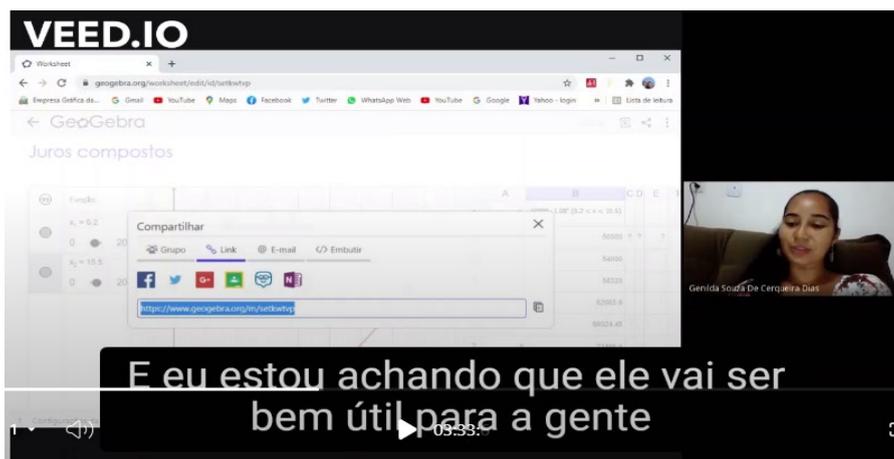
Figura 21 - Participação da professora Carla



Fonte: <https://www.veed.io/download/5c933c23-18e8-4d2e-a711-281675f05148>

A Figura 21 ilustra a professora Carla interagindo com o pesquisador e a professora Genilda por meio da plataforma *Google Meet*, demonstrando o seu desconhecimento da existência do *site* do GeoGebra.

Figura 22 - Participação da professora Genilda



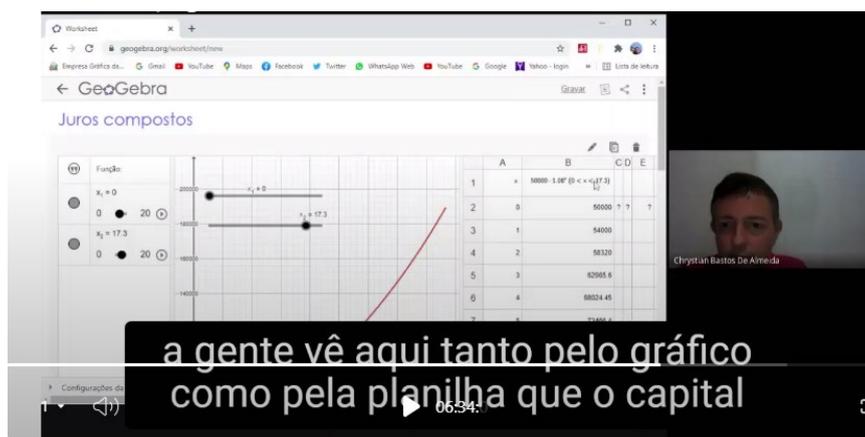
Fonte: <https://www.veed.io/download/5c933c23-18e8-4d2e-a711-281675f05148>

A Figura 22 ilustra a professora Genilda interagindo com o pesquisador e a professora Carla por meio da plataforma *Google Meet*, demonstrando o seu

entusiasmo em relação às funcionalidades do *site* do GeoGebra.

O modo de execução dessa Orquestração Instrumental foi: “o pesquisador concedeu orientações a respeito da criação de atividades no *site* do GeoGebra, a integração de materiais didáticos do GeoGebra com o *Google Sala de Aula* e a utilização do *GeoGebra Classroom*”. A Figura 23 ilustra orientações do pesquisador sobre a criação de atividades no *site* do GeoGebra:

Figura 23 - Orientações do pesquisador sobre a criação de atividades no site do GeoGebra

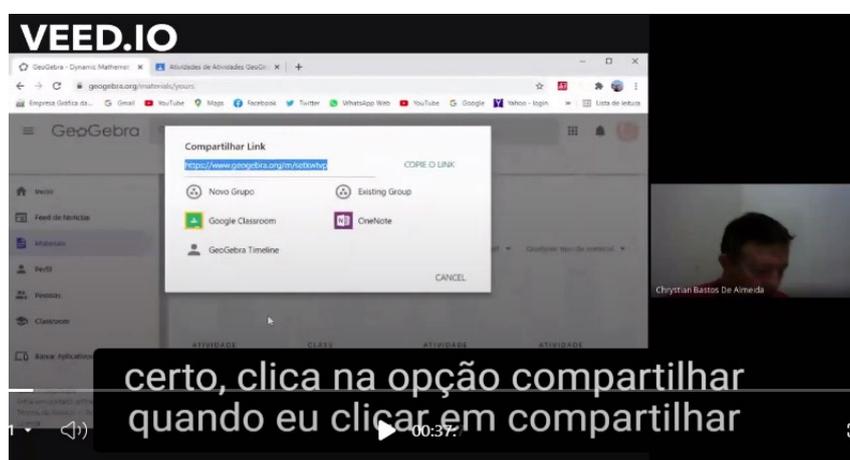


Fonte: <https://www.veed.io/download/756a3418-fd32-4c3a-8a8c-af01cf77a265>

Destacou-se que o professor pode, com esse *site*, incrementar uma atividade já salva no computador, criada no próprio *site* ou já publicada no *site* por outras pessoas, utilizando-se das interfaces do GeoGebra (Gráfico, CAS, Planilha etc), vídeos, textos, imagens, questões etc.

A Figura 24 ilustra orientações do pesquisador sobre a integração de materiais didáticos do GeoGebra com o *Google Sala de Aula*:

Figura 24 - Orientações do pesquisador sobre a integração de materiais didáticos do GeoGebra com o *Google Sala de Aula*

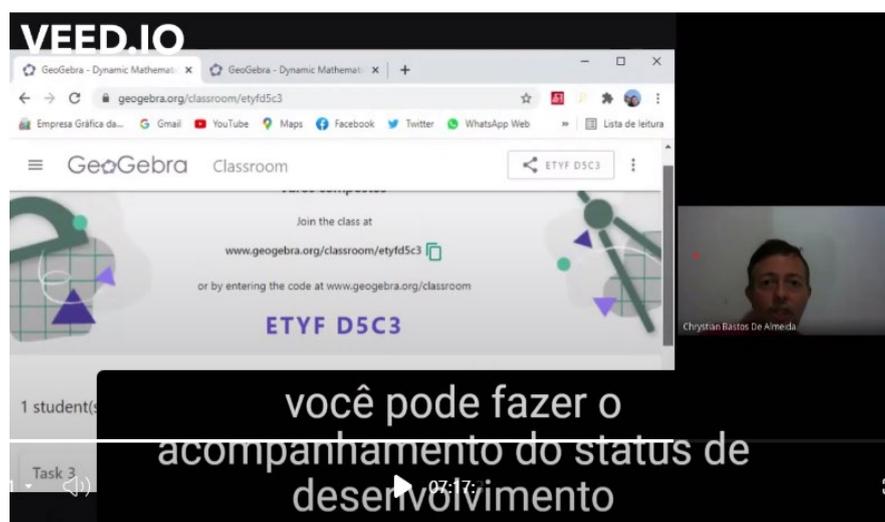


Fonte: <https://www.veed.io/download/f2fa4209-25c0-436a-9d9f-2ae02ecbac85>

Também destacou-se que o professor pode compartilhar atividades publicadas no *site* do GeoGebra com alguma turma do professor no *Google Sala de Aula*, de modo que o estudante dessa turma faz a atividade no *site* sem precisar estar cadastrado nele, pois a atividade fica visível no *Google Sala de Aula*.

A Figura 25 ilustra orientações do pesquisador sobre a utilização do GeoGebra *Classroom*:

Figura 25 - Orientações do pesquisador sobre a utilização do GeoGebra *Classroom*



Fonte: <https://www.veed.io/download/c7282109-5226-48d8-b0d3-44a34ff5f45a>

Sobre o GeoGebra *Classroom*, enfatizou-se a possibilidade de se trabalhar com o GeoGebra de forma *online*, numa aula sincronizada; como exemplo, numa videoconferência com o *Google Meet* pode-se articular com os estudantes uma atividade já editada pelo professor; para isso, o professor cria uma sala a partir da atividade, copia o *link* gerado e o envia para os alunos, os quais poderão editar e gravar a atividade já publicada e interagir com o professor, recebendo *feedback* automático.

Sobre o desempenho didático das professoras referente à Orquestração Instrumental, destacamos que “revelou a necessidade de se reforçar os conhecimentos das professoras relativos à utilização de certas funcionalidades do GeoGebra, como o uso de controles deslizantes e planilhas”. As Figuras 26 e 27 exemplificam essa situação:

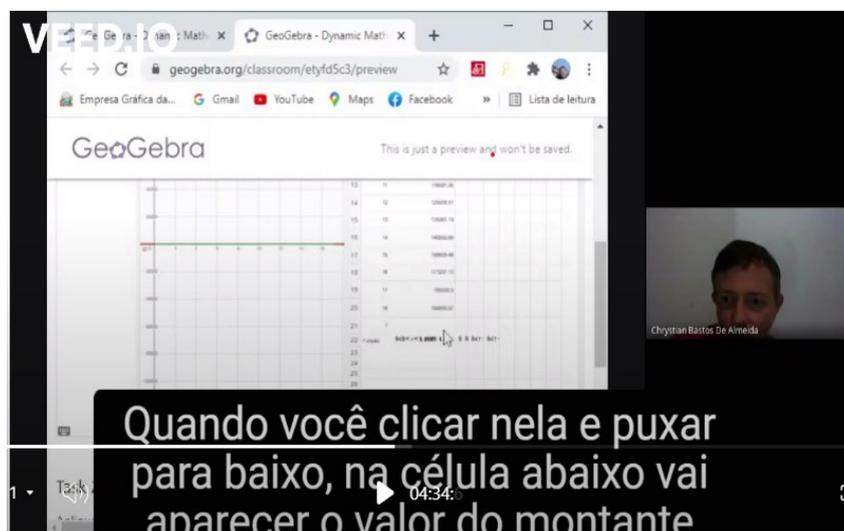
Figura 26 - Dúvida da professora Carla sobre o uso da planilha



Fonte: <https://www.veed.io/download/c7282109-5226-48d8-b0d3-44a34ff5f45a>

A Figura 26 ilustra a professora Carla expressando uma dúvida relacionada à obtenção do valor do montante de uma aplicação utilizando-se de uma planilha do GeoGebra.

Figura 27 - Pesquisador orientando a professora Carla sobre o uso de planilha



Fonte: <https://www.veed.io/download/c7282109-5226-48d8-b0d3-44a34ff5f45a>

A Figura 27 ilustra o pesquisador esclarecendo a professora Carla sobre os procedimentos que podem ser adotados para se obter o valor do montante diretamente na planilha do GeoGebra.

A seguir, é apresentado um quadro-resumo com as situações, recursos, usos,

invariantes operacionais e competências profissionais considerados nessa situação de formação do trabalho colaborativo:

Quadro 14 – Quadro-resumo da Situação de Formação

Situações	Recursos	Usos	Invariantes operacionais	Competências profissionais
Propor a apropriação de um modelo de ensino articulado com o site do GeoGebra.	Google Meet, site do GeoGebra.	Conceder orientações a respeito da criação de atividades no site do GeoGebra.	Se com o uso do site do GeoGebra as professoras incrementarem uma atividade já salva no computador, criada no próprio site ou já publicada no site por outras pessoas, isso favorecerá a evolução do seu sistema de documentos.	Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo, com base na análise das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática
Propor a apropriação de um modelo de ensino articulado com o site do GeoGebra.	Google Meet, site do GeoGebra, Google Sala de Aula	Conceder orientações sobre a integração de materiais didáticos do GeoGebra com o Google Sala de Aula.	Se as professoras integrarem materiais didáticos do site do GeoGebra com o Google Sala de Aula, então isso favorecerá a evolução do seu sistema de documentos.	Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo, com base na análise das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática
Propor a apropriação de um modelo de ensino articulado com o site do GeoGebra.	Google Meet, GeoGebra <i>Classroom</i> .	Conceder orientações sobre a utilização do GeoGebra <i>Classroom</i> .	Se as professoras utilizarem o GeoGebra <i>Classroom</i> na implementação de aulas, então isso favorecerá a evolução do seu sistema de documentos.	Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo, com base na análise das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática

Fonte: Elaborado pelo autor

Pretendia-se verificar os recursos e saberes associados articulados pelos sujeitos, no decorrer da próxima situação (situação de implementação), para examinar o nível de apropriação do modelo apresentado nesta situação de formação.

A seguir, é discutida a situação de implementação do trabalho colaborativo.

### 7.2.3 Situação de Implementação

Nesse item ocorre a aplicação do roteiro de atividades pelas professoras participantes, por meio de plataformas virtuais (Figura 9).

A situação de implementação ocorreu entre os meses de maio e junho de 2021 e foi planejada para executar o roteiro de atividades desenvolvido na situação de reflexão, verificar a evolução do processo de documentação das professoras no contexto de aulas remotas sobre Juros Compostos, inclusive a possível apropriação do modelo de ensino articulado com o *site* do GeoGebra.

Durante a implementação do roteiro de atividades, esperou-se das professoras que continuassem a desenvolver o processo de documentação para o ensino de Juros Compostos no 3<sup>o</sup> ano do EM, por meio da articulação de esquemas e recursos, principalmente diante de novos questionamentos suscitados por alunos. Da mesma forma, esperou-se que a execução do roteiro de atividades favorecesse a compreensão do conteúdo Juros Compostos pelos alunos e conduzisse as professoras à elaboração de reflexões sobre suas concepções ao trabalhar esse conteúdo.

A seguir, é discutida a implementação das aulas pela professora Carla.

#### 7.2.3.1 Implementação das aulas pela professora Carla

A professora Carla implementou suas aulas<sup>22</sup> de forma síncrona, utilizando a plataforma *Google Meet*. A implementação envolveu 3 turmas do 3<sup>o</sup> ano do Ensino Médio do turno matutino, tendo cada turma aproximadamente 35 alunos; no entanto, em razão da baixa frequência dos alunos, as turmas foram reunidas em uma única turma nos momentos de implementação de aulas. Em razão do curto tempo disponível para concluir a unidade, a professora alegou que selecionou alguns

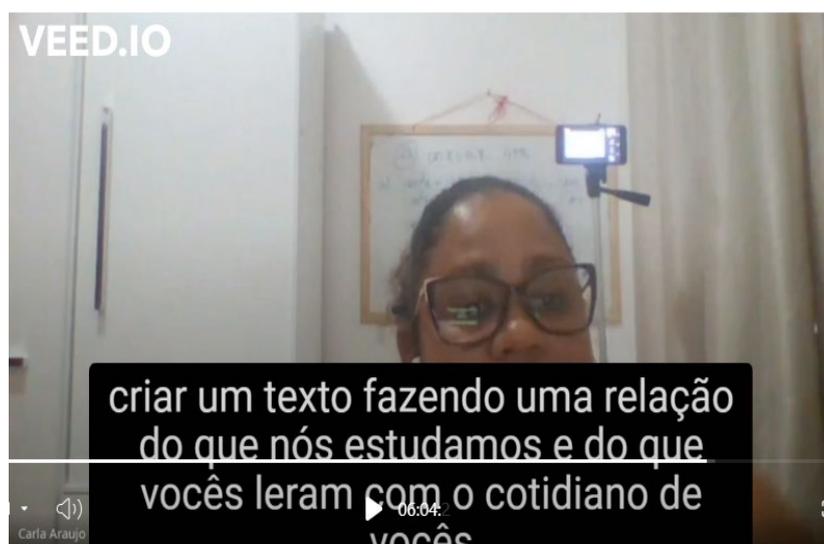
---

<sup>22</sup> Links dos vídeos da implementação das aulas pela professora Carla  
<https://www.veed.io/download/fdb374d5-bfd3-4d50-8d5d-96cff9d12e42>  
<https://www.veed.io/download/16178158-17f1-48f5-9479-9f44bbfbaa87>  
<https://www.veed.io/download/d7a08ee6-8b0b-4678-980b-cc981e8d925e>  
<https://www.veed.io/download/975c3122-ca3c-44ab-a853-825d346d1356>  
<https://www.veed.io/download/21b69844-6c37-4250-914f-5af3bae52787>  
<https://www.veed.io/download/fd707be8-491a-4d39-b055-62d27bd7b3f2>

recursos desenvolvidos no trabalho colaborativo que ela julgou serem mais relevantes, deixando os demais para uma outra oportunidade.

A Figura 28 ilustra a professora Carla fazendo esclarecimentos aos alunos sobre a atividade relacionada à leitura do texto disponível no link [https://www.dm.ufscar.br/profs/jpiton/downloads/artigo\\_hist\\_mat\\_fin\\_2aed.pdf](https://www.dm.ufscar.br/profs/jpiton/downloads/artigo_hist_mat_fin_2aed.pdf) que aborda o desenvolvimento do conceito de juros:

Figura 28 – Esclarecimentos sobre atividade de leitura de texto



Fonte: <https://www.veed.io/download/fdb374d5-bfd3-4d50-8d5d-96cff9d12e42>

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Adotar a História da Matemática como recurso para o ensino de juros compostos”, a professora Carla desenvolveu um esquema composto pelos seguintes teoremas em ação: “Se os alunos fizerem a leitura do texto disponível sobre o desenvolvimento do conceito de juros, então isso favorecerá a compreensão do conceito” e “Se os alunos redigirem um pequeno texto, relacionando o conteúdo da leitura feita com as outras atividades e com o seu cotidiano, então isso reforçará o conhecimento dos alunos”. Esse esquema também apresentou a seguinte inferência em situação: “Nessa turma, eu preciso discutir com os alunos sobre a aplicação do conteúdo na vida prática, pois um aluno fez provocações sobre essa questão”.

A Figura 29 ilustra a professora Carla resolvendo interativamente com os alunos a primeira situação-problema, a qual é modelada por uma função exponencial (relacionada ao montante):

Figura 29 – Resolução interativa com os alunos da situação-problema de modelagem

**VEED.IO**

**Problema 1:** João tem um capital de R\$14.000,00 aplicado em uma instituição financeira, a uma taxa de juros compostos de 8% ao ano. Determine o valor do montante da aplicação com o passar de 1 ano, 2 anos, 3 anos e 4 anos.

$$M_1 = C + C \cdot i = 14000 + 14000 \cdot 8\% = 14000 + 1120 = 15.120$$

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = 15120 + 15120 \cdot 8\% = 15120 + 1029,60 = 16329,60$$

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = 16329,60 + 16329,60 \cdot 8\% = 16329,60 + 1306,36 = 17635,96$$

$$M_4 = M_3 + M_3 \cdot i = 17635,96 + 17635,96 \cdot 8\% = 17635,96 + 1410,87 = 19046,83$$

O montante ao final de um ano é igual ao capital investido mais os juros

Fonte: <https://www.veed.io/download/16178158-17f1-48f5-9479-9f44bbfbaa87>

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos”, a professora Carla mobilizou um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos aprenderem a determinar o valor do montante da aplicação para cada tempo solicitado, então isso contribuirá para o seu aprendizado”.

A Figura 30 ilustra a professora Carla apresentando aos alunos a generalização da situação abordada:

Figura 30 – Generalização da situação-problema com modelagem

**VEED.IO**

Generalizando

$$M_1 = C + C \cdot i = C(1+i)$$

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = C(1+i) + C(1+i) \cdot i = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$$

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = C(1+i)^2 + C(1+i)^2 \cdot i = C(1+i)^2 \cdot (1+i) = C(1+i)^3$$

$$M_4 = M_3 + M_3 \cdot i = C(1+i)^3 + C(1+i)^3 \cdot i = C(1+i)^3 \cdot (1+i) = C(1+i)^4$$

Com essa fórmula você calcula diretamente.

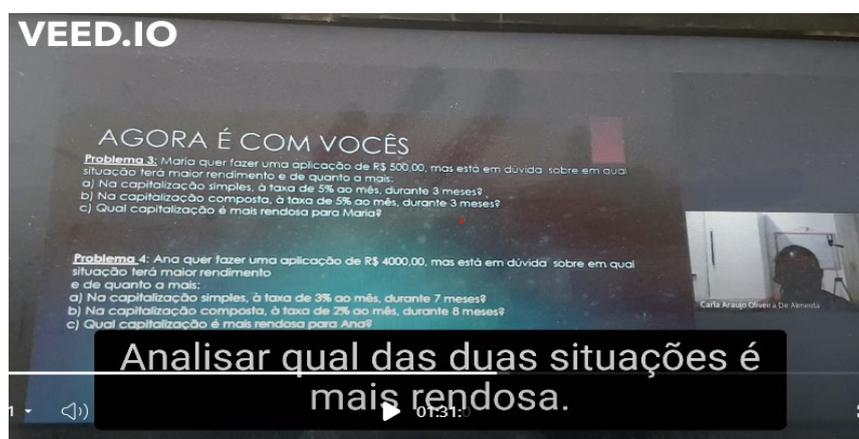
Fonte: <https://www.veed.io/download/975c3122-ca3c-44ab-a853-825d346d1356>

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que

com o objetivo “Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos”, a professora Carla mobilizou um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos generalizarem, então eles encontrarão uma expressão capaz de determinar o valor do montante com o passar do tempo”.

A Figura 31 ilustra a professora Carla resolvendo interativamente com os alunos a situação-problema em que se relaciona juros simples e juros compostos:

Figura 31 - Resolução interativa com os alunos da situação-problema que relaciona juros simples e juros compostos



Fonte: <https://www.veed.io/download/975c3122-ca3c-44ab-a853-825d346d1356>

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos”, a professora Carla mobilizou um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos identificarem, entre as situações envolvendo capitalização simples e composta, qual a mais rentável, então isso reforçará o seu conhecimento”.

A Figura 32 ilustra a professora Carla interagindo com os alunos e compartilhando a transformação de unidades de medida, na resolução de problemas, envolvendo juros compostos:

Figura 32 - Interação com os alunos da transformação de unidades de medida, na resolução de problemas, envolvendo juros compostos



Fonte: <https://www.veed.io/download/21b69844-6c37-4250-914f-5af3bae52787>

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos”, a professora Carla mobilizou um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos adotarem a transformação de unidades mais conveniente das variáveis envolvidas, na resolução dos problemas, então isso contribuirá com o seu aprendizado”. Esse esquema também apresentou a seguinte inferência em situação: “Nessa turma, eu preciso reforçar as habilidades dos alunos com a transformação de unidades de medida, pois alguns demonstraram dificuldades sobre essa questão”.

A Figura 33 ilustra a professora Carla interagindo com os alunos na aproximação dos cálculos, na resolução de problemas, envolvendo juros compostos:

Figura 33 - Interação com os alunos na aproximação dos cálculos, na resolução de problemas, envolvendo juros compostos

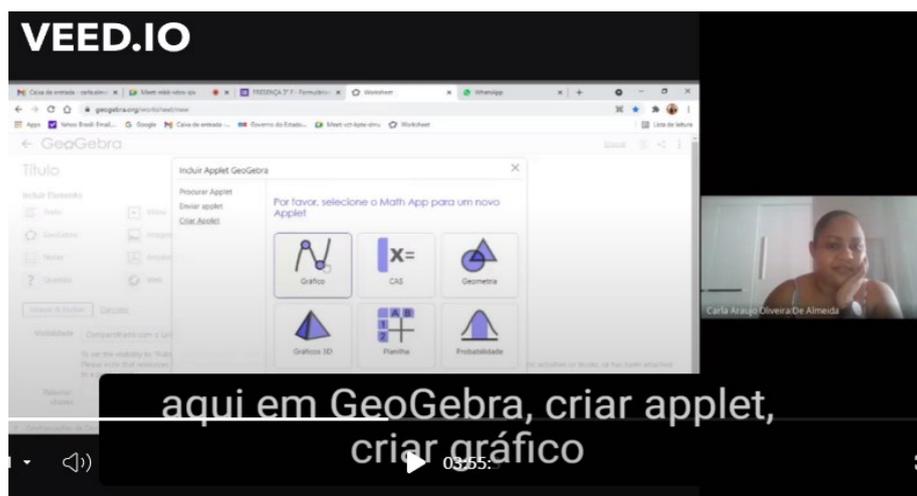


Fonte: <https://www.veed.io/download/21b69844-6c37-4250-914f-5af3bae52787>

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos”, a professora Carla desenvolveu um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos adotarem a aproximação nos cálculos mais adequada, na resolução dos problemas, então isso contribuirá com o seu aprendizado”. Esse esquema também apresentou a seguinte inferência em situação: “Nessa turma, eu preciso comparar os caminhos diferentes utilizados pelos alunos na resolução dos problemas, pois alguns apresentaram grandes diferenças na solução por conta das aproximações”.

A Figura 34 ilustra a professora Carla interagindo com os alunos na utilização do site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org):

Figura 34 - Interação com os alunos na utilização do site do GeoGebra



Fonte: <https://www.veed.io/download/fd707be8-491a-4d39-b055-62d27bd7b3f2>

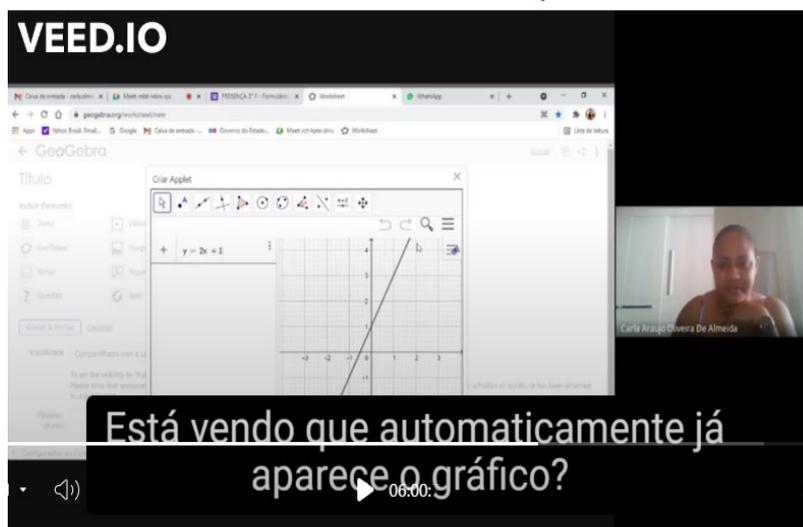
Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Adotar o *software* GeoGebra como recurso para o ensino de juros compostos”, a professora Carla desenvolveu um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos fizerem login no site do GeoGebra e acessarem a calculadora gráfica, então eles poderão fazer a plotagem de gráficos de funções”. Esse esquema também apresentou a seguinte inferência em situação: “Nessa turma, eu preciso apresentar aos alunos diferentes caminhos para acessarem a calculadora gráfica do GeoGebra, pois eles tanto podem acessar pelo site como baixarem

diretamente pelo celular”.

No intuito de efetivar uma situação de ensino que favorecesse a gênese instrumental dos estudantes em relação ao GeoGebra, a professora Carla concebeu uma Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2004; DRIJVERS *et al.*, 2010), cuja configuração didática e cujo modo de execução foram planejados de modo a permitir que os estudantes se deparassem com essa nova situação de ensino. Essa situação sugeria propositalmente a construção de gráficos de funções através do GeoGebra e foi adotada com base nas potencialidades desse *software* nessa direção. Nessa Orquestração Instrumental, a configuração didática foi: “professora e alunos interagindo por meio da plataforma de videoconferência *Google Meet*”.

O modo de execução dessa Orquestração Instrumental foi: “a professora concedeu orientações aos alunos a respeito da construção de gráficos de funções com o *software* GeoGebra”. A Figura 35 ilustra essa situação:

Figura 35 - Orientações aos alunos a respeito da construção de gráficos de funções com o software GeoGebra



Fonte: <https://www.veed.io/download/fd707be8-491a-4d39-b055-62d27bd7b3f2>

Sobre o desempenho didático dos alunos referente à Orquestração Instrumental, destacamos que “revelou a necessidade de se reforçar a compreensão dos alunos sobre as noções de variável dependente e independente no estudo de funções, bem como sobre um modelo matemático do montante dos juros compostos com uma função exponencial”. A Figura 36 ilustra essa situação:

Figura 36 - Reforço da compreensão dos alunos sobre a associação do montante dos juros compostos com uma função exponencial



Fonte: <https://www.veed.io/download/fd707be8-491a-4d39-b055-62d27bd7b3f2>

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Adotar o *software* GeoGebra como recurso para o ensino de juros compostos”, a professora Carla desenvolveu um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos utilizarem as funcionalidades do *software* GeoGebra, então eles aprenderão a fazer a representação gráfica da função que expressa o montante da aplicação”. Esse esquema também apresentou a seguinte inferência em situação: “Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão dos alunos sobre as noções de variável dependente e independente no estudo de funções, enfatizando que o montante é a variável dependente e o tempo é a variável independente”.

Constatou-se que os recursos e saberes associados para a viabilização da situação de implementação pela professora Carla foram compreendidos como fatores de observação da evolução da documentação desenvolvida por ela para o ensino de Juros Compostos. Potencializou-se a coleta de dados e fortaleceu-se a capacidade de acompanhamento de seus processos de documentação. Apoiando-se nesses acompanhamentos, também pode-se concluir que as experiências das situações de formação e implementação contribuíram na apropriação do modelo de ensino articulado com o *site* do GeoGebra pela professora Carla, porém de uma forma diferenciada da professora Genilda.

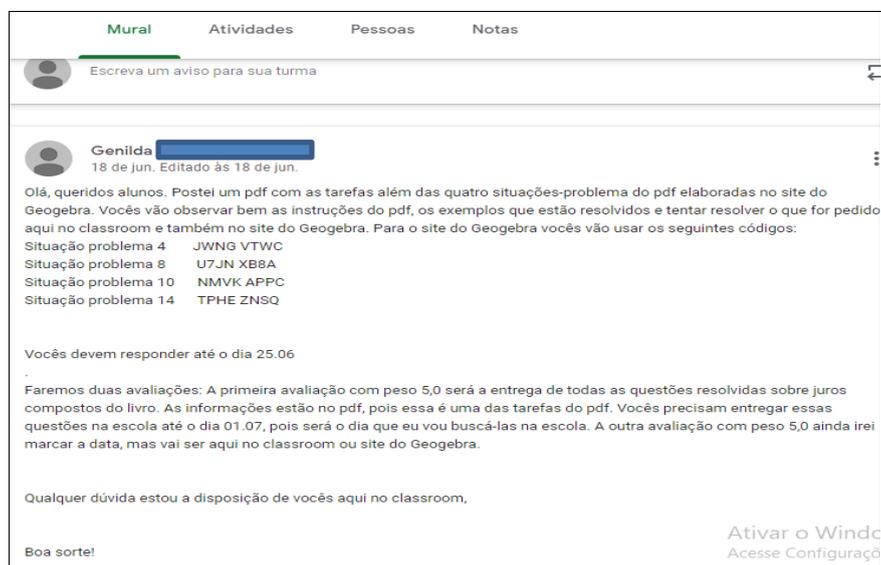
A seguir, é discutida a implementação das aulas pela professora Genilda.

### 7.2.3.2 Implementação das aulas pela professora Genilda

A professora Genilda implementou suas aulas de forma assíncrona, utilizando as plataformas *Google Sala de Aula* e *GeoGebra Classroom*. A implementação envolveu uma turma do 3º ano do Ensino Médio do turno noturno, com 5 alunos apenas. Nessa turma, em especial, os professores de todas as disciplinas decidiram ministrar suas aulas apenas de forma assíncrona, em razão das dificuldades apresentadas pelos alunos em fazer o acompanhamento de aulas de forma síncrona; a professora Genilda explica essa situação em um vídeo de confrontação de aulas apresentado mais adiante.

Para implementar suas aulas assíncronas, a professora Genilda disponibilizou aos alunos, pelo *Google Sala de Aula*, um roteiro em *PowerPoint* em que ela organizou todos os recursos e estratégias desenvolvidos no trabalho colaborativo. Esse roteiro está apresentado no Apêndice A desta pesquisa. A Figura 37 mostra a professora Genilda fornecendo as instruções iniciais aos alunos para a realização das tarefas, pelo *Google Sala de Aula*:

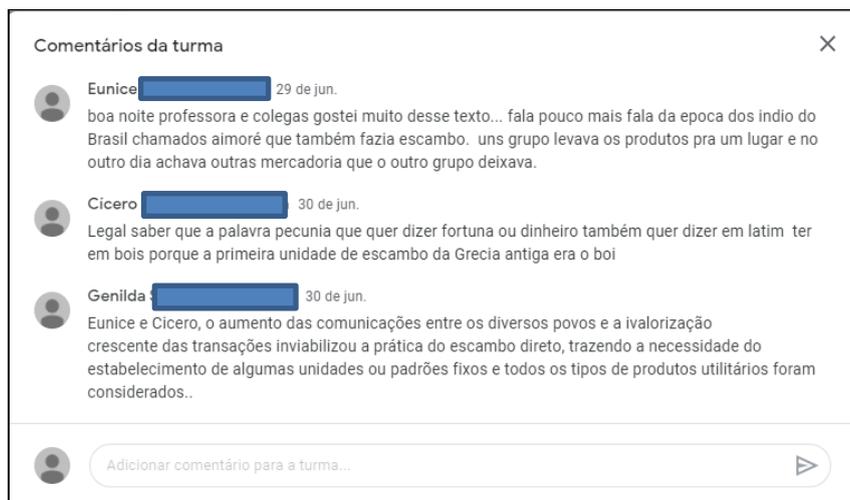
Figura 37 - Instruções iniciais aos alunos para a realização das tarefas, pelo *Google Sala de Aula*



Fonte: Informado pela professora Genilda

Em relação ao Recurso 1 (Apêndice A) apresentado no roteiro sobre o desenvolvimento do conceito de juros, a professora Genilda e os alunos estabeleceram a seguinte interação com o *Google Sala de Aula*, conforme Figura 38:

Figura 38 – Interação entre a professora Genilda e os alunos sobre o desenvolvimento do conceito de juros



Fonte: Informado pela professora Genilda

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Adotar a História da Matemática como recurso para o ensino de juros compostos”, a professora Genilda mobilizou um esquema composto pelos seguintes teoremas em ação: “Se os alunos fizerem a leitura do texto disponível sobre o desenvolvimento do conceito de juros, então isso favorecerá a compreensão do conceito” e “Se os alunos redigirem um pequeno texto, relacionando o conteúdo da leitura feita com as outras atividades e com o seu cotidiano, então isso reforçará o conhecimento dos alunos”.

Esse esquema também apresentou a seguinte inferência em situação: “Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão dos alunos sobre a evolução do escambo direto para o uso de padrões fixos, pois alguns demonstraram interesse sobre essa questão”.

Em relação ao Recurso 4 (Apêndice A) apresentado no roteiro sobre a modelagem com uma função exponencial do preço de um aparelho de som, a Figura 39 ilustra o envolvimento dos alunos com a atividade com o GeoGebra *Classroom* e a Figura 40 ilustra a interação da professora com um dos alunos com o *Google Sala de Aula*:

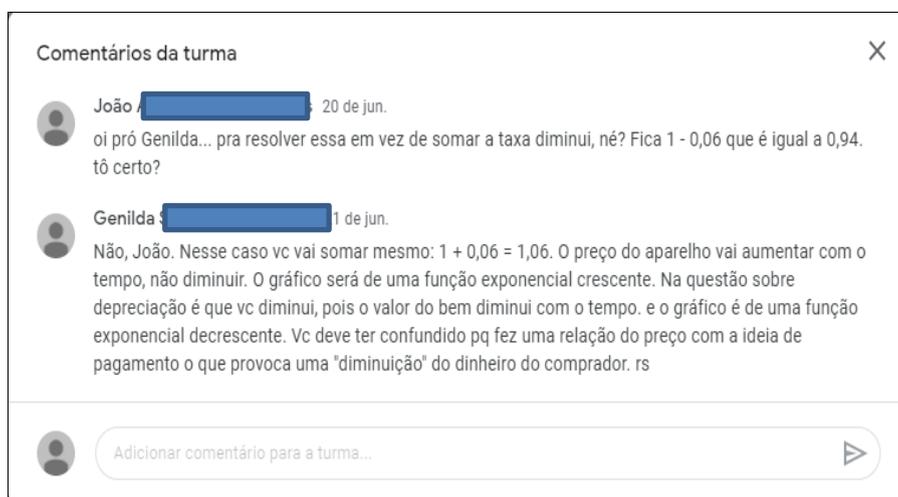
Figura 39 - Envolvimento dos alunos com a atividade de modelagem do preço de um aparelho de som com uma função exponencial



Fonte: Informado pela professora Genilda

Convém ressaltar que o acesso a essa atividade pode se feito por meio do [site www.geogebra.org/classroom](http://www.geogebra.org/classroom), digitando-se o código `jwngvtwc` e, em seguida, digitando-se o nome da pessoa.

Figura 40 - Interação da professora com um dos alunos na modelagem do preço de um aparelho de som por meio de uma função exponencial



Fonte: Informado pela professora Genilda

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos”, a professora Genilda mobilizou um esquema composto pelos seguintes teoremas em

ação: “Se os alunos generalizarem, então eles encontrarão uma expressão capaz de determinar o preço do aparelho com o passar do tempo” e “Se os alunos utilizarem as funcionalidades do *software* GeoGebra, então eles aprenderão a fazer a representação gráfica da função que expressa o preço do aparelho com o passar do tempo”.

Esse esquema também apresentou a seguinte inferência em situação: “Nessa turma, eu preciso auxiliar um dos alunos a compreender que o preço do aparelho aumenta com o tempo, pois ele fez uma operação errada envolvendo a taxa, obtendo um gráfico de uma função decrescente”.

Em relação ao Recurso 8 (Apêndice A) apresentado no roteiro sobre a comparação dos rendimentos entre a capitalização simples e a composta, a Figura 41 ilustra o envolvimento dos alunos com a atividade por meio do GeoGebra *Classroom* e a Figura 42 ilustra a interação da professora com dois alunos por meio do *Google Sala de Aula*:

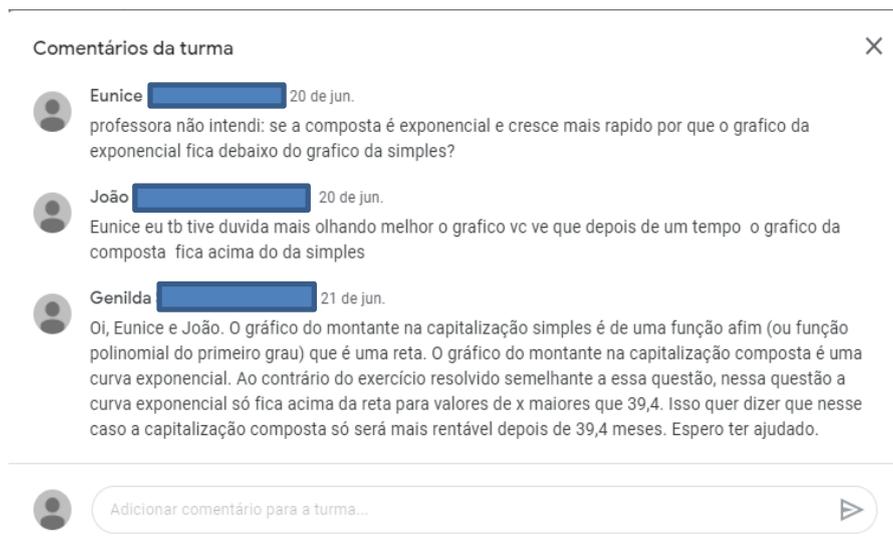
Figura 41 - Envolvimento dos alunos com a atividade relacionada à comparação dos rendimentos entre a capitalização simples e a composta

The screenshot shows the GeoGebra Classroom interface for a class titled "Situação-problema 8 do PDF". The class ID is "U7JN XB8A". There are 4 students in the class. The interface displays four task cards. The first task card is titled "Task 1" and contains the text "a simples é melhor ganha mais". The other three task cards are titled "Task 2" and each shows a graph with two lines. Below each task card, the student's name and progress are shown: Eunice (2 out of 2), Joao Antonio (2 out of 2), Cícero (2 out of 2), and Mell (2 out of 2). There are buttons for "PAUSE" and "HIDE NAMES" in the top right corner.

Fonte: Informado pela professora Genilda

Convém ressaltar que o acesso a essa atividade pode se feito por meio do site [www.geogebra.org/classroom](http://www.geogebra.org/classroom), digitando-se o código u7jnx8a e, em seguida, digitando-se o nome da pessoa.

**Figura 42** - Interação da professora com dois alunos na atividade relacionada à comparação dos rendimentos entre a capitalização simples e a composta



Fonte: Informado pela professora Genilda

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos”, a professora Genilda desenvolveu um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos identificarem, entre as situações envolvendo capitalização simples e composta, qual a mais rentável, então isso reforçará o seu conhecimento”. Esse esquema também apresentou a seguinte inferência em situação: “Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão de uma das alunas sobre interpretação de gráficos, pois ela fez uma análise parcial da situação, comprometendo a resposta”.

Em relação ao Recurso 10 (Apêndice A) apresentado no roteiro sobre a depreciação de um automóvel, a Figura 43 ilustra o envolvimento dos alunos com a atividade com o GeoGebra *Classroom* e a Figura 44 ilustra a interação da professora com dois alunos por meio do *Google Sala de Aula*:

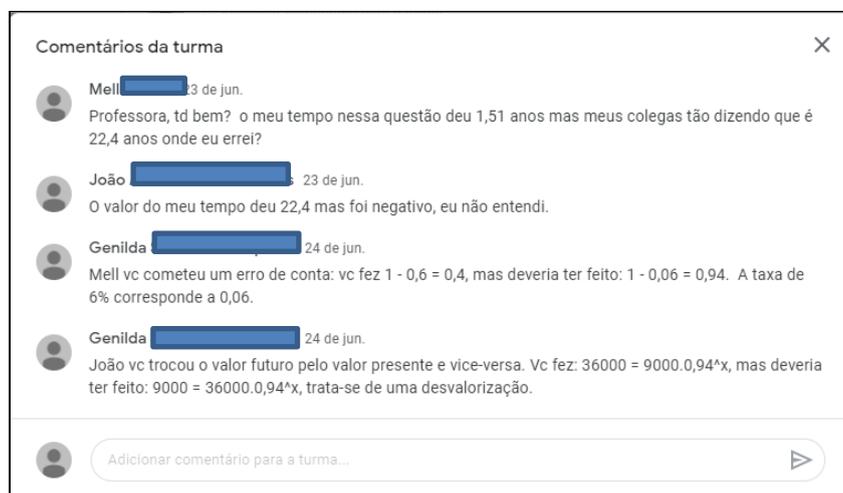
Figura 43 - Envolvimento dos alunos com a atividade relacionada à depreciação de um automóvel



Fonte: Informado pela professora Genilda

Convém ressaltar que o acesso a essa atividade pode se feito por meio do site [www.geogebra.org/classroom](http://www.geogebra.org/classroom), digitando-se o código nmvkappc e, em seguida, digitando-se o nome da pessoa.

Figura 44 - Interação da professora com dois alunos sobre a atividade relacionada à depreciação de um automóvel



Fonte: Informado pela professora Genilda

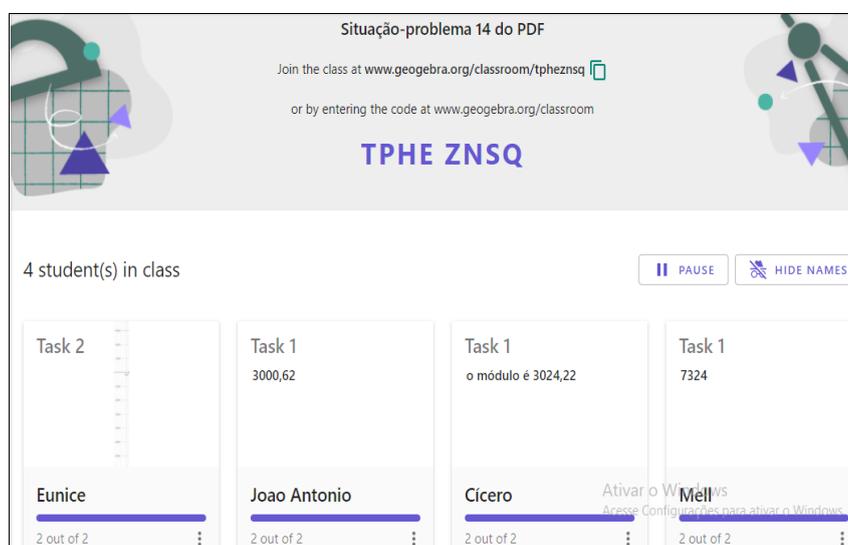
Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos”, a professora Genilda desenvolveu um esquema composto pelos seguintes teoremas em ação: “Se os alunos resolverem o problema utilizando a janela CAS do GeoGebra,

então isso contribuirá com o seu aprendizado” e “Se os alunos utilizarem as funcionalidades do *software* GeoGebra, então eles aprenderão a fazer a representação gráfica da função que expressa a depreciação do automóvel com o passar do tempo”.

Esse esquema também apresentou as seguintes inferências em situação: “Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão de uma aluna sobre conversão de taxa percentual em unitária, pois ela fez uma conversão errada, comprometendo os cálculos” e “Nessa turma, eu preciso auxiliar um aluno a compreender que, na depreciação, o valor futuro é menor que o valor presente, pois ele fez uma substituição errada na fórmula, comprometendo a resposta”.

Em relação ao Recurso 14 (Apêndice A) apresentado no roteiro sobre a representação de um vetor, a Figura 45 ilustra o envolvimento dos alunos com a atividade com o GeoGebra *Classroom* e a Figura 46 ilustra a interação da professora com um aluno com o *Google Sala de Aula*:

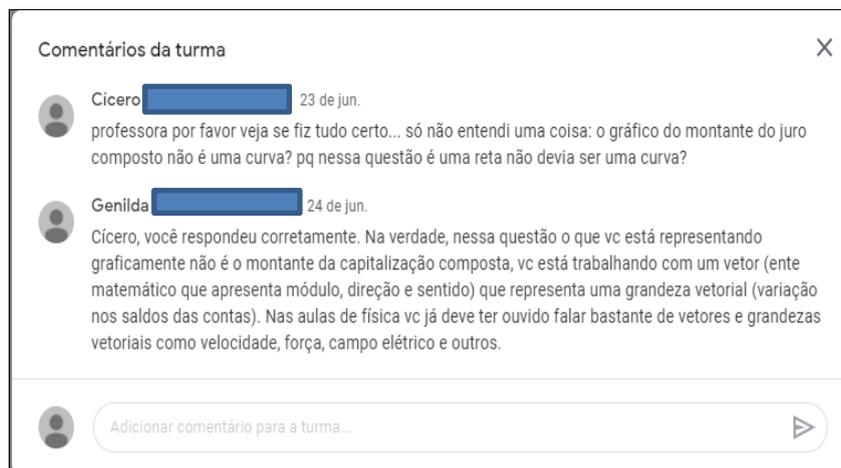
Figura 45 - Envolvimento dos alunos com a atividade da representação de um vetor por meio de um vetor



Fonte: Informado pela professora Genilda

Convém ressaltar que o acesso a essa atividade pode se feito por meio do *site* [www.geogebra.org/classroom](http://www.geogebra.org/classroom), digitando-se o código `tpheznsq` e, em seguida, digitando-se o nome da pessoa.

Figura 46 - Interação da professora com um aluno sobre a atividade relacionada à representação de um vetor



Fonte: Informado pela professora Genilda

Com base na Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2009) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), podemos dizer que com o objetivo “Articular o ensino de juros compostos com a geometria analítica e vetores”, a professora Genilda desenvolveu um esquema composto pelo seguinte teorema em ação: “Se os alunos aprenderem a representar um vetor associado à variação dos saldos de duas contas entre dois momentos e determinar o módulo desse vetor, então isso reforçará o seu conhecimento”. Esse esquema também apresentou a seguinte inferência em situação: “Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão de um aluno sobre vetores, pois embora ele tenha respondido corretamente a questão, confundiu a representação gráfica do montante com um vetor”.

Constatou-se que os recursos e saberes associados para a viabilização da situação de implementação pela professora Genilda foram compreendidos como fatores de observação da evolução da documentação desenvolvida por ela para o ensino de Juros Compostos. Potencializou-se a coleta de dados e fortaleceu-se a capacidade de acompanhamento de seus processos de documentação. Apoiando-se nesses acompanhamentos, também pode-se concluir que as experiências das situações de formação e implementação contribuíram na apropriação do modelo de ensino articulado com o *site* do GeoGebra por parte das duas professoras, cada uma de uma forma diferenciada.

A seguir, é apresentado um quadro-resumo com os esquemas mobilizados

nessa situação de implementação do trabalho colaborativo e que impactaram o trabalho documental das professoras:

Quadro 15 – Quadro-resumo da Situação de Implementação

Esquemas	Objetivos	Regras de ação	Invariantes operacionais	Possibilidades de inferências
Professora Carla e Professora Genilda	Adotar a História da Matemática como recurso para o ensino de juros compostos	-Interagir com os alunos por meio do Google Meet e Google Sala de Aula.(Carla). -Interagir com os alunos por meio do Google Sala de Aula (Genilda).	-Se os alunos fizerem a leitura do texto disponível sobre o desenvolvimento do conceito de juros, então isso favorecerá a compreensão do conceito -Se os alunos redigirem um pequeno texto, relacionando o conteúdo da leitura feita com as outras atividades e com o seu cotidiano, então isso reforçará o conhecimento dos alunos	-Nessa turma, eu preciso discutir com os alunos sobre a aplicação do conteúdo na vida prática, pois um aluno fez provocações sobre essa questão (Carla). - Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão dos alunos sobre a evolução do escambo direto para o uso de padrões fixos, pois alguns demonstraram interesse sobre essa questão (Genilda).
Professora Carla e Professora Genilda	Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos	-Interagir com os alunos por meio do Google Meet e Google Sala de Aula.(Carla). -Interagir com os alunos por meio do Google Sala de Aula e GeoGebra Classroom (Genilda)	Se os alunos aprenderem a determinar o valor do montante da aplicação (ou preço do aparelho de som) para cada tempo solicitado, então isso contribuirá para o seu aprendizado	
Professora Carla e Professora Genilda	Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos	-Interagir com os alunos por meio do Google Meet e Google Sala de Aula.(Carla). -Interagir com os alunos por meio do Google Sala de Aula e GeoGebra Classroom (Genilda).	Se os alunos generalizarem, então eles encontrarão uma expressão capaz de determinar o valor do montante (ou preço do aparelho de som) com o passar do tempo.	-Nessa turma, eu preciso auxiliar um dos alunos a compreender que o preço do aparelho aumenta com o tempo, pois ele fez uma operação errada envolvendo a taxa, obtendo um gráfico de uma função decrescente (Genilda).
Professora Carla e Professora Genilda	Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos	-Interagir com os alunos por meio do Google Meet e Google Sala de Aula.(Carla). -Interagir com os alunos por meio do Google Sala de Aula e GeoGebra Classroom (Genilda).	Se os alunos identificarem, entre as situações envolvendo capitalização simples e composta, qual a mais rentável, então isso reforçará o seu conhecimento	- Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão de uma das alunas sobre interpretação de gráficos, pois ela fez uma análise parcial da situação, comprometendo a resposta (Genilda).
Professora Carla	Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos	-Interagir com os alunos por meio do Google Meet e Google Sala de Aula.	Se os alunos adotarem a transformação de unidades mais conveniente das variáveis envolvidas, na resolução dos problemas, então isso contribuirá para o seu aprendizado	Nessa turma, eu preciso reforçar as habilidades dos alunos com a transformação de unidades de medida, pois alguns demonstraram dificuldades sobre essa questão.
Professora Carla	Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos	-Interagir com os alunos por meio do Google Meet e Google Sala de Aula.	Se os alunos adotarem a aproximação nos cálculos mais adequada, na resolução dos problemas, então isso contribuirá com o seu aprendizado.	Nessa turma, eu preciso comparar os caminhos diferentes utilizados pelos alunos na resolução dos problemas, pois alguns apresentaram grandes

				diferenças na solução por conta das aproximações
Professora Carla	Adotar o software GeoGebra como recurso para o ensino de juros compostos.	-Interagir com os alunos por meio do Google Meet e site do GeoGebra.	Se os alunos fizerem login no site do GeoGebra e acessarem a calculadora gráfica, então eles poderão fazer a plotagem de gráficos de funções.	Nessa turma, eu preciso apresentar aos alunos diferentes caminhos para acessarem a calculadora gráfica do GeoGebra, pois eles tanto podem acessar pelo site como baixarem diretamente pelo celular.
Professora Carla e Professora Genilda	Adotar o software GeoGebra como recurso para o ensino de juros compostos	-Interagir com os alunos por meio do Google Meet e site do GeoGebra (Carla). -Interagir com os alunos por meio do Google Sala de Aula e GeoGebra Classroom (Genilda).	Se os alunos utilizarem as funcionalidades do software GeoGebra, então eles aprenderão a fazer a representação gráfica da função que expressa o montante da aplicação (ou preço do aparelho de som).	-Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão dos alunos sobre as noções de variável dependente e independente no estudo de funções, enfatizando que o montante é a variável dependente e o tempo é a variável independente (Carla).
Professora Genilda	Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos	-Interagir com os alunos por meio do Google Sala de Aula e GeoGebra Classroom.	-Se os alunos resolverem o problema utilizando a janela CAS do GeoGebra, então isso contribuirá para o seu aprendizado -Se os alunos utilizarem as funcionalidades do software GeoGebra, então eles aprenderão a fazer a representação gráfica da função que expressa a depreciação do automóvel com o passar do tempo	"-Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão de uma aluna sobre conversão de taxa percentual em unitária, pois ela fez uma conversão errada, comprometendo os cálculos.. -Nessa turma, eu preciso auxiliar um aluno a compreender que, na depreciação, o valor futuro é menor que o valor presente, pois ele fez uma substituição errada na fórmula, comprometendo a resposta
Professora Genilda	Articular o ensino de juros compostos com a geometria analítica e vetores.	-Interagir com os alunos por meio do Google Sala de Aula e GeoGebra Classroom.	Se os alunos aprenderem a representar um vetor associado à variação dos saldos de duas contas entre dois momentos e determinar o módulo desse vetor, então isso reforçará o seu conhecimento.	Nessa turma, eu preciso reforçar a compreensão de um aluno sobre vetores, pois embora ele tenha respondido corretamente a questão, confundiu a representação gráfica do montante com um vetor.

Fonte: Elaborado pelo autor

Conforme mostrado no Quadro 15, na situação de implementação, cada professora mobilizou diferentes esquemas individuais, envolvendo objetivos, regras de ação, invariantes operacionais e possibilidades de inferências. No entanto, em determinados esquemas, houve o compartilhamento de invariantes operacionais.

A seguir, é discutida a Situação de Confrontação do trabalho colaborativo.

#### 7.2.4 Situação de Confrontação

Nesse item ocorre uma confrontação das visões das professoras sobre seu

trabalho de documentação e a materialidade desse trabalho, relacionada à metodologia de investigação reflexiva (Figura 9).

A situação de confrontação ocorreu no mês de junho de 2021 e objetivou viabilizar uma experiência avaliativa sobre a implementação das aulas pelas professoras. Essa situação foi planejada de maneira que o pesquisador tivesse acesso prévio aos vídeos de implementação das aulas pelas professoras e pudesse elaborar alguns comentários e questionamentos sobre os recursos e esquemas mobilizados por elas nesse processo.

Considerou-se que esses comentários e questionamentos auxiliariam a viabilização do processo de acompanhamento reflexivo e a confrontação do trabalho de documentação das professoras, com base no princípio de confrontação das visões das professoras sobre seu trabalho de documentação e a materialidade desse trabalho, relacionado à metodologia de investigação reflexiva (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018).

Também considerou-se que a experiência da situação de confrontação permitiria às professoras enriquecer o roteiro de atividades, mediante avaliações críticas sobre os recursos adotados desde sua construção até a implementação, quando continuariam a articular esquemas e adaptar o documento produzido.

A seguir, é discutida a confrontação das aulas implementadas pela professora Carla.

#### **7.2.4.1 Confrontação das aulas implementadas pela professora Carla**

Com base no princípio de confrontação das visões das professoras sobre seu trabalho de documentação e a materialidade desse trabalho, relacionado à metodologia de investigação reflexiva (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018) o pesquisador e a professora Carla fizeram uma reunião<sup>23</sup> por meio da plataforma *Google Meet*, em que o pesquisador compartilhou alguns trechos relevantes das aulas da professora, de forma que pudessem fazer discussões e análises. A Figura 47

---

<sup>23</sup> Links dos vídeos de confrontação das aulas da professora Carla  
<https://www.veed.io/download/70903ea8-dc78-4134-9b51-90f1ae2fc36d>  
<https://www.veed.io/view/5f8b634a-9b80-4f03-94e6-c1d5d3a7a608>

<https://www.veed.io/view/134ec05b-3591-4571-8038-ee540fdbecd9>  
<https://www.veed.io/download/11b8867f-a36b-4920-8564-5cde228c6e48>

ilustra reflexões da professora Carla sobre o comentário de um aluno referente ao desenvolvimento do conceito de juros e a relação do assunto com o cotidiano:

Figura 47 - Reflexões sobre o comentário de um aluno referente ao desenvolvimento do conceito de juros e a relação do assunto com o cotidiano



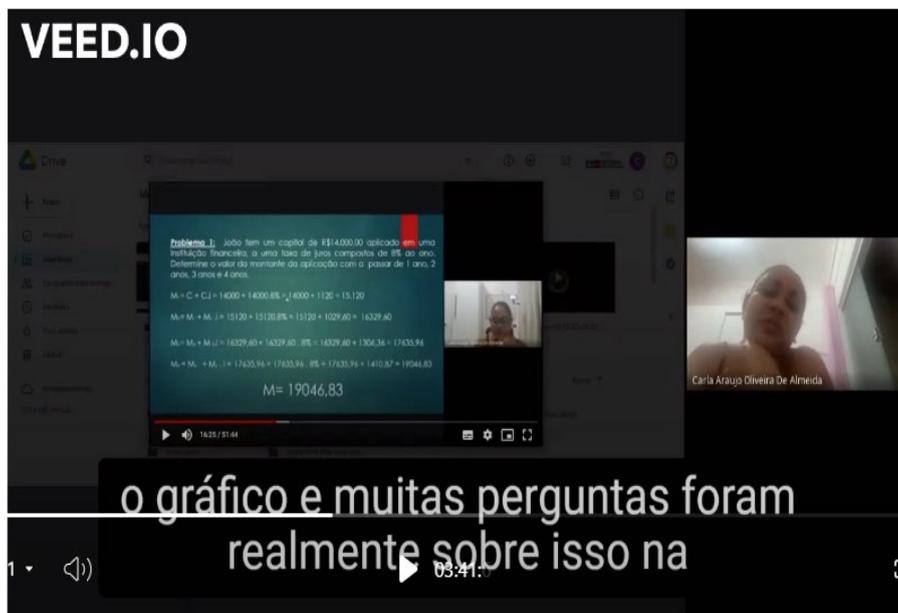
Fonte: <https://www.veed.io/download/70903ea8-dc78-4134-9b51-90f1ae2fc36d>

A partir do comentário de um aluno relacionado às altas taxas de juros estabelecidas pelos bancos nas operações de empréstimo, a professora destacou a necessidade de se discutir com os alunos “onde a matemática é utilizada?”, “por que ela é utilizada?”, “o que de fato esses meninos enxergam da matemática” no trabalho com todos os conteúdos matemáticos. Conforme a professora, a atividade proposta aos alunos sobre a leitura do texto (relacionado ao desenvolvimento do conceito de juros) e a redação de um pequeno texto (associando a leitura com o cotidiano) favoreceu a concepção dessa relação que os professores muitas vezes não fazem.

A professora também destacou a importância de se chamar a atenção dos alunos quanto ao surgimento de termos como “banco”, o qual foi discutido no texto. De acordo com a professora, esse termo “hoje é algo assim tão bem elaborado e antes era simplesmente um banco e um homem sentado fazendo conta”.

A Figura 48 ilustra reflexões da professora Carla sobre as situações-problema que envolveram a modelagem por meio da função exponencial (relacionada ao montante da aplicação):

Figura 48 - Reflexões da professora Carla sobre as situações-problema que envolveram a modelagem por meio da função exponencial



Fonte: <https://www.veed.io/view/5f8b634a-9b80-4f03-94e6-c1d5d3a7a608>

A professora admitiu que, no momento da resolução dessa situação-problema, ela já poderia ter feito a associação do montante da aplicação com uma função exponencial; no entanto, ela só fez essa associação mais adiante, o que provocou muitas dúvidas aos alunos no momento da construção dos gráficos solicitados, relacionadas principalmente às variáveis dependente e independente. Segundo a professora, na construção dos gráficos pelo GeoGebra, a fim de fazer a troca de variável, os alunos questionavam, por exemplo, “quem era y, quem era x”; dessa forma, a professora esclarecia que o y referia-se ao montante (M) e o x referia-se ao tempo (t).

A Figura 49 ilustra reflexões da professora Carla sobre a generalização feita para obtenção da fórmula do montante relacionado às situações-problema apresentadas:

Figura 49 - Reflexões da professora Carla sobre a generalização feita para obtenção da fórmula do montante



Fonte: <https://www.veed.io/view/5f8b634a-9b80-4f03-94e6-c1d5d3a7a608>

A professora Carla fundamentou essa estratégia, alegando que “não faz sentido mostrar uma fórmula pronta, sem mostrar de onde ela veio”, de forma que, inicialmente, ela fez a resolução passo a passo e, depois, ela mostrou que poderia ter encurtado o caminho fazendo essa generalização. Com isso, a professora destacou que procurou dar sentido a todas as contas que foram feitas na resolução das situações-problema.

A Figura 50 ilustra reflexões da professora Carla sobre a comparação feita entre as repostas de dois alunos que fizeram aproximações diferentes nos cálculos:

Figura 50 - Reflexões da professora Carla sobre aproximações diferentes nos cálculos



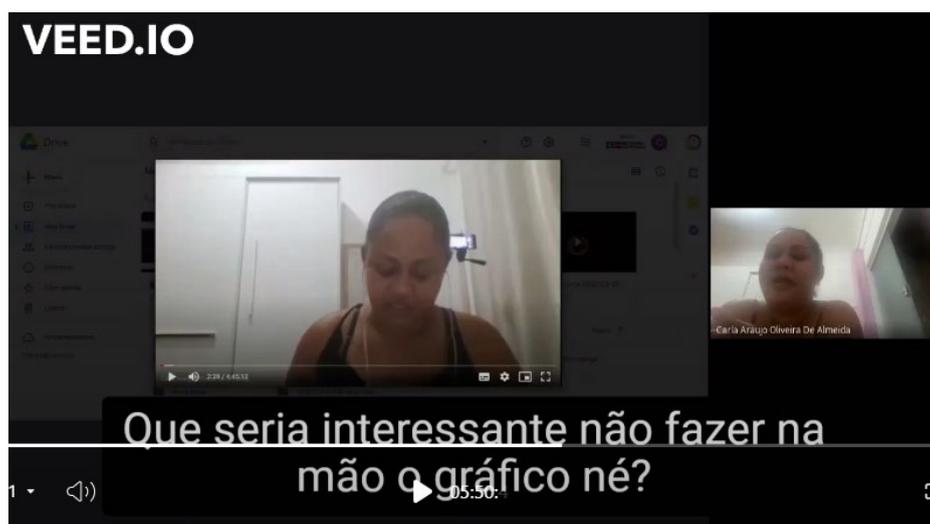
Fonte: <https://www.veed.io/view/134ec05b-3591-4571-8038-ee540fdbecd9>

Outro ponto interessante destacado pela professora Carla na resolução das situações-problema foi a preocupação que ela teve, juntamente com os alunos, em comparar os resultados obtidos, dado que dois alunos que fizeram aproximações diferentes das casas decimais obtiveram respostas com diferenças não tão pequenas entre elas. Segundo a professora, um dos alunos efetuava os cálculos com a calculadora, considerando todas as casas decimais que encontrava no decorrer dos cálculos; enquanto outra aluna fazia arredondamentos, considerando apenas uma casa decimal. A professora observou que “houve uma disparidade da conta dela para a conta dele, mas quando a gente terminou fazendo pelos dois métodos, a gente viu que a diferença realmente veio das aproximações das casas decimais”.

A professora considerou que, a depender do contexto, ambas as respostas podem ser consideradas corretas e que numa prova de múltipla escolha, por exemplo, o aluno deve considerar a resposta mais próxima do que encontrar nos cálculos. O pesquisador lembrou a professora que a janela CAS do GeoGebra também pode ser utilizada como recurso para a comparação dos cálculos feitos, conforme ambas as professoras destacaram no desenvolvimento do trabalho colaborativo.

A Figura 51 ilustra reflexões da professora Carla sobre a solicitação aos alunos para fazerem o *download* da calculadora gráfica do GeoGebra no celular, a fim de obterem os gráficos relacionados às situações-problema apresentadas:

Figura 51 - Reflexões da professora Carla sobre o *download* da calculadora gráfica do GeoGebra no celular



Fonte: <https://www.veed.io/view/134ec05b-3591-4571-8038-ee540fdbecd9>

A professora destacou que os alunos se interessaram bastante em acessar a

calculadora gráfica do GeoGebra pelo celular, fazendo questionamentos sobre os procedimentos necessários para fazerem o *download* do aplicativo. A professora também enfatizou que, embora tenha considerado as dificuldades que muitos alunos têm na utilização de celulares para fins pedagógicos, argumentou com os alunos que “se eles conseguissem fazer a atividade seria legal, porque eles iriam aprender a mexer com o programa matemático, que seria interessante não fazer na mão o gráfico e que eles iriam enviar para mim”.

A Figura 52 ilustra reflexões da professora Carla sobre a interação com os alunos na construção de gráficos de funções com o *software* GeoGebra.

Figura 52 - Reflexões da professora Carla sobre a interação com os alunos na construção de gráficos de funções com o *software* GeoGebra.



Fonte: <https://www.veed.io/download/11b8867f-a36b-4920-8564-5cde228c6e48>

A professora Carla destacou que, após as explicações que ela concedeu sobre a construção de gráficos de funções com o GeoGebra, poucos alunos ainda demonstraram algumas dúvidas, citando o exemplo de uma aluna que alegou que respondeu a questão, mas não entendeu como e por que ela precisaria buscar uma função se ela já tinha encontrado o montante; a professora respondeu à aluna “porque você tinha um montante para aquele tempo que foi pedido, a intenção do gráfico é te mostrar o montante para vários tempos”. O pesquisador aproveitou para lembrar a professora que, além de função exponencial, outro conteúdo matemático que pode ser relacionado com juros compostos é progressão geométrica, pois, na capitalização composta, o capital e os montantes dos meses seguintes formam uma progressão geométrica de razão  $(1 + i)$ .

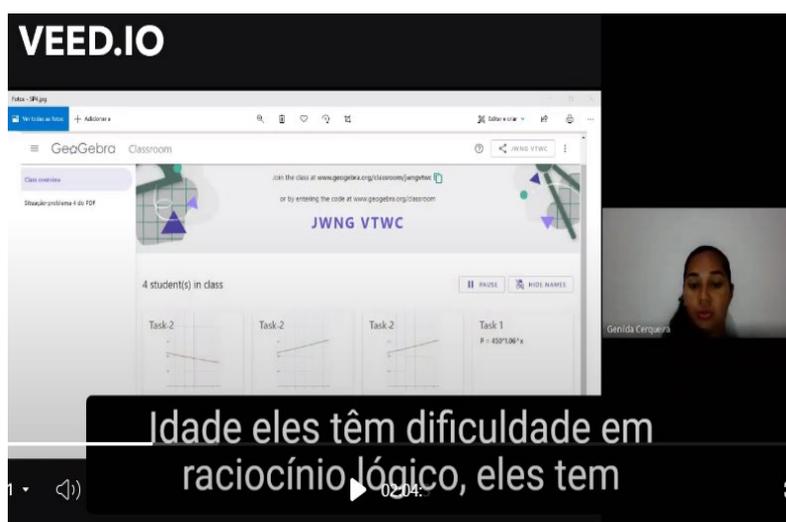
Segundo a professora, o envolvimento e o *feedback* dos alunos com essa atividade foi favorável e essa foi a primeira oportunidade que ela teve de trabalhar com o *software* GeoGebra, sendo a experiência proveitosa para o seu desenvolvimento profissional.

A seguir, é discutida a confrontação das aulas implementadas pela professora Genilda.

#### 7.2.4.2 Confrontação das aulas implementadas pela professora Genilda

Com base no princípio de confrontação das visões das professoras sobre seu trabalho de documentação e a materialidade desse trabalho, relacionado à metodologia de investigação reflexiva (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018), o pesquisador e a professora Genilda fizeram uma reunião<sup>24</sup> pela plataforma *Google Meet*, quando o pesquisador compartilhou alguns trechos relevantes das aulas da professora, de forma que pudessem fazer discussões e análises. A Figura 53 ilustra reflexões da professora Genilda sobre o envolvimento dos alunos com a situação-problema que envolve a modelagem do preço de um aparelho de som por uma função exponencial:

Figura 53 - Reflexões da professora Genilda sobre o envolvimento dos alunos com a situação-problema que envolve a modelagem do preço de um aparelho de som por uma função exponencial



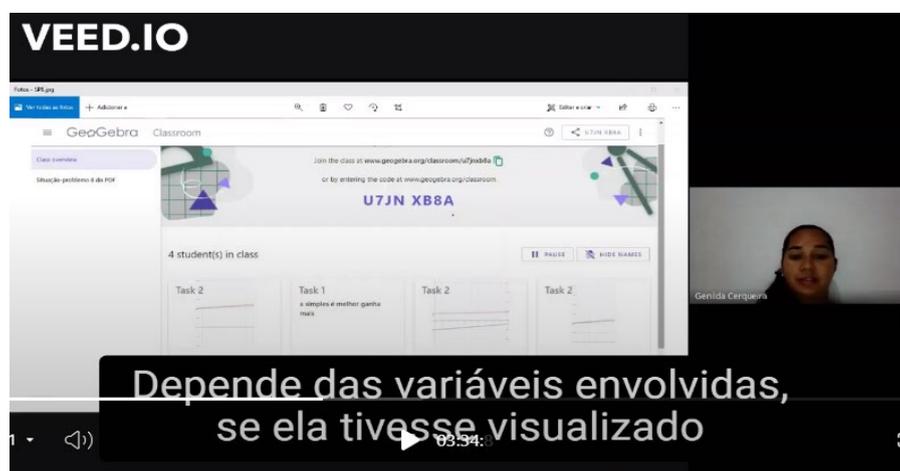
Fonte: <https://www.veed.io/view/2e7937b2-e26e-48d4-9ec8-533ba20ea598>

<sup>24</sup>Link do vídeo de confrontação das aulas da professora Genilda  
<https://www.veed.io/view/2e7937b2-e26e-48d4-9ec8-533ba20ea598>

A professora destacou que um aluno fez uma subtração do valor da taxa ao invés de somar, obtendo um função decrescente em vez de crescente. Com esse tipo de questão em que eles vão gradativamente obtendo a fórmula, temos a oportunidade de observar essas dificuldades que eles têm com raciocínio lógico, com as operações básicas e ajudá-los a amenizá-las.

A Figura 54 ilustra reflexões da professora Genilda sobre a situação-problema que envolve a comparação dos rendimentos entre a capitalização simples e composta:

Figura 54 - Reflexões da professora Genilda sobre a situação-problema que envolve a comparação dos rendimentos entre a capitalização simples e composta

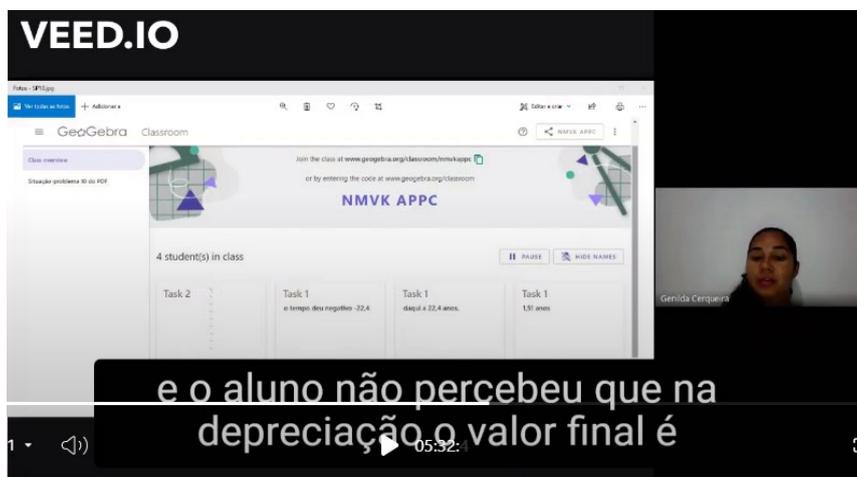


Fonte: <https://www.veed.io/view/2e7937b2-e26e-48d4-9ec8-533ba20ea598>

A partir da resposta de uma aluna sobre essa situação-problema, a professora observou que, nesse tipo de questão, temos a oportunidade de ajudar os alunos a terem mais atenção na análise dos gráficos. A aluna se confundiu porque ela achou que a capitalização composta será sempre mais rentável, mas nem sempre isso acontece, depende das variáveis envolvidas. Se ela tivesse visualizado melhor o gráfico, ela teria percebido isso e não teria uma conclusão precipitada.

A Figura 55 ilustra reflexões da professora Genilda sobre a situação-problema que envolve a depreciação de um automóvel:

Figura 55 - Reflexões da professora Genilda sobre a situação-problema que envolve a depreciação de um automóvel

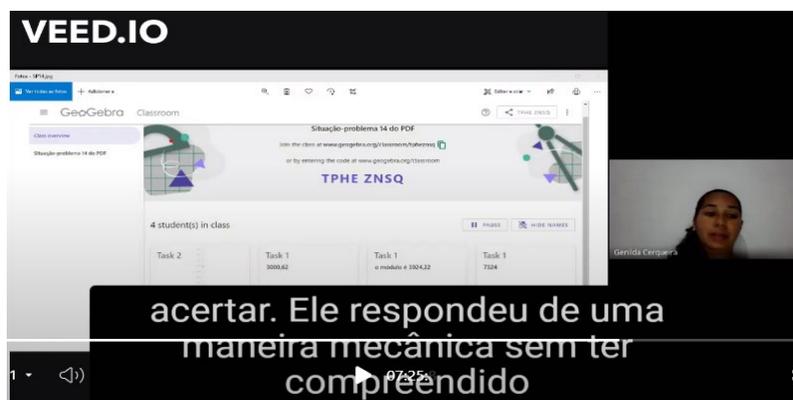


Fonte: <https://www.veed.io/view/2e7937b2-e26e-48d4-9ec8-533ba20ea598>

A professora considerou que se trata de outro tipo de questão em que temos a oportunidade de observar essas dificuldades que eles têm com porcentagens, números decimais, operações com números decimais e suas representações, além do raciocínio lógico. Com isso, podemos ajudá-los a amenizar essas dificuldades, percorrendo caminhos diferentes. Uma aluna fez erradamente a representação decimal de uma porcentagem e um aluno não percebeu que na depreciação o valor final é menor que o valor inicial.

A Figura 56 ilustra reflexões da professora Genilda sobre a situação-problema que envolve a articulação entre juros compostos, geometria analítica e vetor:

Figura 56 - Reflexões da professora Genilda sobre a situação-problema que envolve a articulação entre juros compostos, geometria analítica e vetor



Fonte: <https://www.veed.io/view/2e7937b2-e26e-48d4-9ec8-533ba20ea598>

Segundo a professora, esse tipo de questão é bem complexa, os alunos não estão acostumados com esse tipo de questão, a qual pode permitir desenvolver o potencial dos alunos, levando-os a pensar, analisar e não se limitando simplesmente à aplicação de fórmula. Apenas um aluno acertou, mas ele respondeu de uma maneira mecânica, sem ter compreendido bem o significado da grandeza que ele estava representando, ele confundiu os significados das grandezas envolvidas e suas representações. Assim, temos a oportunidade de ajudá-los a fazer essa diferenciação.

O Quadro 16 mostra um resumo da Situação de Confrontação:

Quadro 16 – Quadro-resumo da Situação de Confrontação

Situações	Evolução dos esquemas da Professora Carla	Evolução dos esquemas da Professora Genilda
Trabalhar a história dos Juros Compostos, o desenvolvimento do conceito.	Se for discutido com os alunos "onde a matemática é utilizada?", "por que ela é utilizada?" no trabalho com todos os conteúdos matemáticos, isso favorecerá o aprendizado.	
Modelar situações-problema sobre Juros Compostos por meio de funções exponenciais relacionadas ao montante.	Se logo após a resolução da situação-problema, a professora orientar a construção do gráfico da função montante ao invés de solicitar essa construção mais adiante, isso pode evitar dúvidas aos alunos no momento da obtenção dos gráficos solicitados pelo GeoGebra	Se a professora trabalha com esse tipo de questão em que os alunos vão gradativamente obtendo a fórmula, tem a oportunidade de observar as dificuldades que eles têm com raciocínio lógico, com as operações básicas e ajudá-los a amenizá-las.
Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos.	Se além de função exponencial, a professora relacionar com juros compostos a progressão geométrica, isso contribuirá para o aprendizado.	Se a professora trabalha com situações-problema que envolvem a comparação de rendimentos entre a capitalização simples e a composta, tem a oportunidade de ajudar os alunos a terem mais atenção na análise dos gráficos.
Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos.		Se a professora trabalha com situações-problema que envolvem a depreciação de um automóvel, tem a oportunidade de observar as dificuldades que os alunos têm com porcentagens, números decimais, operações com números decimais e suas representações, além do raciocínio lógico e ajudá-los a amenizá-las.
Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos.		Se a professora trabalha com situações-problema que envolvem a articulação entre juros compostos,

		geometria analítica e vetores, tem a oportunidade de ajudar os alunos a diferenciar os significados das grandezas envolvidas e suas representações.
--	--	---

Fonte: Elaborado pelo autor

Desse modo, no decorrer da situação de confrontação, foi possível perceber que a avaliação da implementação das aulas revelou novos elementos que favoreceram a continuidade do acompanhamento da evolução da documentação das professoras Carla e Genilda.

A seguir, são feitas análises sobre o trabalho documental das professoras Carla e Genilda.

### 7.3 Análises sobre o trabalho documental das professoras Carla e Genilda

Analisamos que, desde o início da carreira de ambas as professoras até o desenvolvimento do trabalho colaborativo no âmbito desta pesquisa houve, além da mudança de recursos, a utilização de outros esquemas que impactou o trabalho documental das docentes para o ensino de Juros Compostos, bem como o seu desenvolvimento profissional. No decorrer da experiência preliminar e do trabalho colaborativo, as professoras passaram a adotar diferentes recursos em associação com esquemas de utilização, desenvolvendo novos documentos para o ensino de Juros Compostos, conforme destacado nas seções anteriores e no questionário<sup>25</sup> elaborado no *Google* Formulários (Apêndice C) respondido por elas.

Observamos no questionário respondido e no MRTD da professora Carla para o ensino de Juros Compostos (Figura 3) que o primeiro evento reflexivo indicado é o estágio supervisionado, ocorrido em 2014, etapa da formação inicial da professora em que ela teve seu primeiro contato com a sala de aula; segundo a docente, havia uma insegurança relativa ao desempenho das suas ações didático-pedagógicas, de forma que ela passou a se identificar com as aulas ministradas pelo seu professor de Matemática Financeira no curso de licenciatura, o qual costumava utilizar o *PowerPoint* e o retroprojeto.

Com base em Rocha (2019), podemos dizer que a experiência documental

<sup>25</sup> Link do questionário respondido pelas professoras  
[https://docs.google.com/forms/d/1eNbkVZ4375g42OiM\\_DOoVa64moANO3MkjafPvsrx4U4/viewanalytics](https://docs.google.com/forms/d/1eNbkVZ4375g42OiM_DOoVa64moANO3MkjafPvsrx4U4/viewanalytics)

vivenciada pela professora Carla na sua formação inicial (insegurança nas ações didático-pedagógicas) deixou um traço dessa experiência (utilização do *PowerPoint* e retroprojeter) que a acompanhou nas suas ações no segundo evento reflexivo (ingresso em colégio particular e curso de reforço), ocorrido em 2015; no terceiro evento reflexivo (efetivação em colégio estadual na Bahia), ocorrido em 2018 e no quinto evento reflexivo (trabalho colaborativo 2), ocorrido em 2021.

Também com base em Rocha (2019), podemos dizer que a dominante documental da professora Carla, anteriormente ao quarto evento reflexivo (trabalho colaborativo 1), ocorrido em 2020, foi a criação de recursos para o seu ensino. Convém ressaltar que o terceiro evento reflexivo (efetivação em colégio estadual na Bahia) produziu um outro evento (participação em curso *online* promovido pela Secretaria de Educação do Estado), em 2018, que abordava o uso de alguns recursos digitais para o ensino, como as ferramentas do *Google*, *YouTube* e *Khan Academy*; no entanto, esse evento não teve impacto imediato no trabalho documental da professora, pois a sua experiência documental deixou um outro traço: resistência a modalidades de ensino não tradicionais.

A dominante documental da professora Carla após o quarto evento reflexivo (trabalho colaborativo 1) foi a descoberta de novos recursos; assim, esse é o evento simbólico de transição. É importante destacar que esse evento ocorreu no contexto da pandemia de COVID-19, que provocou a necessidade do uso de plataformas e modelos para aprendizagem *online* em casa, enquanto as professoras procuraram adaptar seus próprios modelos e sistemas de apoio com base em necessidades locais e disponibilidade de ensino *online*. Dessa forma, o curso promovido pela Secretaria de Educação anteriormente provocou, nesse período, impacto no trabalho documental de Carla, pois ela já tinha alguma familiaridade com as funcionalidades de alguns recursos como as ferramentas do *Google* e o *Khan Academy* abordados no curso.

Durante o quinto evento reflexivo (trabalho colaborativo 2), no contexto desta pesquisa e ainda no contexto da pandemia, a experiência documental (compartilhamento de novas modalidades, recursos e estratégias de ensino) vivenciada por Carla, no evento reflexivo anterior, deixou alguns traços dessa experiência: adoção de diferentes recursos digitais e não digitais para elaborar e implementar aulas; continuidade da adoção do livro didático como referência básica e continuidade da utilização do *PowerPoint*, mas sendo menos dependente dele.

A professora Carla, no início da sua carreira, para o ensino de Juros Compostos, mobilizava apenas esquemas relacionados à exposição oral do conceito e resolução de alguns exercícios do livro didático. Segundo a professora Carla, a interação com a professora Genilda e o pesquisador nesse trabalho lhe oportunizaram entrar em contato com alguns recursos tecnológicos digitais, cujas funcionalidades poderiam lhe dar suporte para a adoção de estratégias diferenciadas de ensino, em especial nesse contexto de isolamento social que demanda essa adoção.

A professora Carla destaca a oportunidade que teve, no decorrer do trabalho, de se familiarizar com o *software* GeoGebra e o seu *site* (que ela nunca tinha utilizado antes com os alunos) e poder vivenciar algumas de suas possibilidades geométricas e algébricas, a fim de ter condições de preparar e ministrar aulas de Juros Compostos cada vez mais enriquecedoras. A professora apenas utilizava papel quadriculado para construções gráficas.

A professora Carla também considera que a utilização das abordagens de ensino destacadas nesse trabalho, juntamente com as funcionalidades dos recursos tecnológicos digitais, também podem favorecer uma adequada intervenção do professor nas situações em que o alunos apresentam maiores dificuldades de compreensão, o que contribui para a qualificação docente.

Observamos no questionário respondido e no MRTD da professora Genilda para o ensino de Juros Compostos (Figura 4) que o primeiro evento reflexivo indicado é o estágio supervisionado, ocorrido em 2010, etapa da formação inicial da professora em que ela teve seu primeiro contato com a sala de aula; de acordo com a professora, desde a sua formação no ensino médio, ela apresentava dificuldades de compreender algumas questões sobre juros compostos abordadas nas provas do ENEM; preocupação essa que ela levou para a licenciatura, contando com o apoio de colegas e professores no sentido de resolver determinadas questões, inclusive para as aulas ministradas no estágio. Além disso, ela trocava ideias com os colegas de curso a partir de videoaulas sobre o conteúdo, aplicando-as na sala de aula. .

Com base em Rocha (2019), podemos dizer que a experiência documental vivenciada pela professora Genilda na sua formação inicial (dificuldades com questões sobre juros compostos das provas do ENEM) deixou um traço dessa experiência (resolução de questões das provas do ENEM) que a acompanhou nas suas ações no segundo evento reflexivo (efetivação em colégio estadual na Bahia),

ocorrido em 2012, e outro traço (aplicação de videoaulas na sala de aula), em todos os períodos seguintes.

Também com base em Rocha (2019), podemos dizer que a dominante documental da professora Genilda, anteriormente ao terceiro evento reflexivo (trabalho colaborativo 1), ocorrido em 2020, foi a criação de recursos para o seu ensino. Convém ressaltar que o segundo evento reflexivo (efetivação em colégio estadual na Bahia) produziu um outro evento (participação em curso *online* promovido pela Secretaria de Educação do Estado) que, de forma semelhante ao que ocorreu com Carla, não teve impacto imediato no trabalho documental de Genilda, pois a sua experiência documental deixou um outro traço: resistência a modalidades de ensino não tradicionais.

A dominante documental da professora Genilda após o terceiro evento reflexivo (trabalho colaborativo 1) foi a descoberta de novos recursos; assim, esse é o evento simbólico de transição, valendo as mesmas informações sobre o contexto da pandemia e o impacto do curso da Secretaria de Educação sobre o trabalho documental, relacionadas a Carla.

Durante o quarto evento reflexivo (trabalho colaborativo 2), no contexto desta pesquisa e ainda no contexto da pandemia, a experiência documental (compartilhamento de novas modalidades, recursos e estratégias de ensino) vivenciada por Genilda no evento reflexivo anterior deixou alguns traços dessa experiência: adoção de diferentes recursos digitais e não digitais para elaborar e implementar aulas; continuidade da adoção do livro didático como referência básica; continuidade da utilização de videoaulas e exploração do GeoGebra.

Assim como a professora Carla, a professora Genilda, no início da sua carreira, para o ensino de Juros Compostos, também mobilizava esquemas relacionados à exposição oral do conceito e resolução de alguns exercícios do livro didático. No entanto, ao contrário de Carla, Genilda também mobilizava outros esquemas relacionados ao uso de videoaulas, questões do ENEM e calculadora simples que poderiam favorecer a assimilação do conceito de capitalização composta pelos alunos.

Segundo a professora Genilda, a sua participação nesse trabalho colaborativo permitiu que ela aprimorasse alguns conhecimentos que detinha sobre o *software* GeoGebra, o que pode favorecer o seu desempenho em sala de aula, pois uma maior

exploração das potencialidades desse *software* com os alunos pode permitir que eles construam o conhecimento sobre capitalização composta de forma mais dinâmica e interativa.

Conforme a professora Genilda, a oportunidade que teve de conhecer e adotar o *site* do GeoGebra para elaborar atividades sobre capitalização composta e o GeoGebra *Classroom* para viabilizar as aulas de forma assíncrona foi bem proveitosa, tanto considerando o contexto em que seus alunos não tinham condições de participar de aulas *online*, como vislumbrando a utilização desses recursos, futuramente, de forma síncrona, por meio da associação com plataformas de videoconferência e *feedback* automático. Desse modo, pode-se ampliar os canais de interação com os alunos, deixá-los mais motivados e contribuir com o aprimoramento do ensino.

A professora Genilda também destaca que o uso do GeoGebra associado com os outros recursos do trabalho colaborativo para o ensino da capitalização composta pode tornar o processo de mediação da construção do conhecimento pelo aluno mais motivador e proveitoso, contribuindo, assim, para a formação continuada docente.

A seguir, são feitas considerações sobre as dialéticas instrumentação/ instrumentalização, recurso “mãe”/ recurso “filho” e atividade produtiva/ atividade construtiva.

#### **7.4 Considerações sobre as dialéticas instrumentação/ instrumentalização, recurso “mãe”/ recurso “filho” e atividade produtiva/ atividade construtiva**

Apresenta-se, neste momento, uma análise sob o ponto de vista das dialéticas instrumentação/ instrumentalização, recurso “mãe”/ recurso “filho” e atividade produtiva/ atividade construtiva (GUEUDET; TROUCHE, 2015). Sobre a primeira dialética, na dimensão instrumentação, o livro didático serviu como recurso para estudo das professoras e também para a implementação das aulas sobre juros compostos. O livro didático foi um dos recursos que guiou a organização do roteiro de atividades. Porém, o refletir sobre como ensinar fez as professoras ponderarem sobre possíveis entraves dos estudantes com a abordagem do livro.

Para as professoras, por exemplo, o estudo da capitalização composta sem a compreensão do desenvolvimento histórico do conceito e sem a articulação dos registros de representação numérico, algébrico e gráfico seria uma limitação à aprendizagem dos estudantes.

Na dimensão instrumentalização, destacam-se as adaptações feitas nas questões do livro didático para elaborar o roteiro de atividades. De fato, os ajustes das questões envolveram o acesso a videoaulas, o simulador da calculadora financeira, a modelagem por meio de uma função exponencial, a integração com outras áreas da matemática e a utilização do GeoGebra (a fim de promover a articulação dos registros de representação numérico, algébrico e gráfico).

Sobre a segunda dialética, no caso desta pesquisa, consideramos recursos "mãe": o livro didático, o texto sobre história da matemática, o artigo científico sobre modelagem, as videoaulas, o simulador da calculadora financeira, o jogo de tabuleiro, a BNCC e o GeoGebra. Como foi apresentado, esses recursos foram articulados na gênese documental. De outra forma, como produto da relação das professoras com esses mesmos recursos, destacamos os recursos "filho". Como exemplo, temos as situações-problema elaboradas a partir dos enunciados das questões do livro didático e das recomendações de uso do GeoGebra para a articulação dos registros de representação algébrico e gráfico. Na análise dessa dialética, destacamos também o surgimento de um sistema de recursos das professoras elaborado para ensinar juros compostos com o GeoGebra.

Sobre a terceira dialética, os recursos produzidos compreendem a dimensão produtiva da gênese documental. Na pesquisa, o roteiro de atividades sobre juros compostos com o GeoGebra e tudo que o compõe, é um produto da atividade das professoras na situação. Porém, é na dinâmica de construção do documento que verificamos as professoras articularem conhecimentos.

Considerando o esquema de produção de um roteiro de atividades para a situação profissional de elaborar um planejamento de aulas sobre juros compostos para alunos do 3º ano do Ensino Médio, constatamos alguns conhecimentos relacionados, por meio das entrevistas feitas com as professoras:

a) as professoras enxergam o livro didático como um recurso importante do docente e do estudante, pois aborda o conteúdo matemático de forma organizada, apresenta exercícios resolvidos, propostos, de autoavaliação e atividades complementares;

b) as professoras compreendem o texto sobre a história da matemática como um recurso importante, pois destaca o desenvolvimento do conceito de juros, favorecendo a sua assimilação pelos alunos;

c) as professoras consideram videoaulas como recursos importantes para a abordagem do conteúdo matemático, pois complementam as informações do livro didático;

d) as professoras entendem que a obtenção de um modelo matemático (um padrão ou fórmula matemática) por meio da abordagem de situações-problemas pode aprimorar a habilidade de interpretação do aluno, despertando nele uma postura crítica e espírito explorador ao tentar solucioná-las, percebendo que podem existir várias alternativas para obter a solução.

e) as professoras acreditam que as funcionalidades do GeoGebra contribuem para a abordagem do conteúdo matemático, pois permitem a exploração de registros de representação algébrico e gráfico, a obtenção das respostas das questões por meio da janela CAS e a relação com outros conteúdos matemáticos como a geometria analítica e vetores.

Os procedimentos com o GeoGebra foram produto de aprendizagens sobre as possibilidades do *software* que ocorreram por meio de pesquisas individuais dos sujeitos e da interação entre eles e o pesquisador no trabalho colaborativo e que não compunham o sistema de recursos das professoras. Compreendemos que a transição do contexto com lápis e papel para o ambiente do GeoGebra incrementou sua formação profissional. As explorações foram aumentando na dinâmica de refletir sobre como ensinar. Neste estudo consideramos: a assimilação do próprio conteúdo matemático juro compostos nos recursos livro didático e GeoGebra e seus registros geométrico e algébrico, e a elaboração de um roteiro de atividades com o uso do *software*.

A seguir, apresentam-se considerações sobre a autoeficácia das professoras Carla e Genilda relacionada com os processos de instrumentação e instrumentalização.

### **7.5 Considerações sobre a autoeficácia das professoras Carla e Genilda relacionada com os processos de instrumentação e instrumentalização**

Nesta seção, com base na metodologia de investigação reflexiva (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018), discutimos como o desenvolvimento do trabalho colaborativo influenciou o grau de autoeficácia (BANDURA, 1997) das professoras Carla e Genilda. Consideramos que esse grau de autoeficácia pode ser analisado em

associação com os processos de instrumentação e instrumentalização relacionados à Gênese Documental das professoras para o ensino de Juros Compostos.

Segundo Bandura (1997 apud IAICHITE *et al.*, 2016, p. 46), a autoeficácia é definida como um julgamento que o indivíduo faz acerca de suas capacidades e habilidades atuais para agir em um domínio específico e constitui-se na base para a motivação, o bem-estar e as realizações pessoais futuras. No campo da docência, a autoeficácia refere-se à avaliação feita pelo docente sobre suas habilidades para lecionar, inclusive para os estudantes desestimulados; nesse aspecto, relaciona-se com a forma como os docentes enxergam sua função, organizam suas aulas e também à percepção de que todos os estudantes podem evoluir na construção de novos conhecimentos, até mesmo aqueles que apresentam consideráveis dificuldades de compreensão dos conteúdos.

Docentes que acreditam bastante na sua autoeficácia avaliam-se aptos para intermediar e impactar a aprendizagem dos estudantes e, dessa forma, utilizam variadas estratégias pedagógicas, adotam novas abordagens de ensino, são mais realizados profissionalmente e mostram-se mais motivados para a docência.

Em seu artigo que aborda a autoeficácia no uso do computador, Guimarães e Abbad (2015), destacam quatro fontes de informação que podem influenciar o grau de autoeficácia observado pelo indivíduo: experiência pessoal, observação vicária, persuasão verbal e foco emocional. A primeira associa-se à experiência pessoal do indivíduo e revela que a percepção de um sujeito relativa às suas habilidades de executar uma tarefa tende a evoluir se suas experiências preliminares lhe disponibilizarem dados favoráveis sobre as habilidades semelhantes.

A segunda fonte, denominada observação vicária, associa-se à oportunidade de o sujeito observar outros indivíduos semelhantes experimentando situações bem ou mal sucedidas; nesse aspecto, a observação de sujeitos próximos sendo bem (ou mal) sucedidos através de dedicação pessoal impacta a crença dos observadores relativa à sua habilidade para também serem bem (ou mal) sucedidos nessas situações.

A terceira fonte, a persuasão verbal, indica que um sujeito pode impactar o grau de autoeficácia de outro, através de informações verbais relacionadas à atividade e à capacidade do indivíduo em executá-la; nesse sentido, os sujeitos que são persuadidos verbalmente a crerem que têm potencial para executar as tarefas

adequadamente são propensos a uma maior e contínua dedicação, ao invés de serem dominados por dúvidas e dificuldades pessoais diante dos desafios. A quarta fonte de influência mostra-se com um foco emocional, através do qual os sujeitos têm mais chance de acreditarem que serão bem sucedidos se não apresentarem uma alta ansiedade relacionada a uma certa situação.

Com base na Abordagem Documental do Didático, destacamos que essas fontes de informação também foram recursos que, combinados com outros recursos mobilizados pelas professoras, no ambiente colaborativo, impactaram o trabalho documental dessas docentes para o ensino de Juros Compostos.

A professora Carla, tendo como fonte de informação sua experiência pessoal, ao adotar como recurso um texto sobre a história dos juros compostos, observou um impacto no grau de autoeficácia relativa a essa abordagem. Esse texto era um recurso novo para a professora até o momento da realização do trabalho colaborativo, quando a professora passou a utilizá-lo, sendo orientada por ele e associando-o a alguns esquemas comuns de utilização (referentes à sua leitura e à redação de um pequeno texto relacionado). Nesse caso, temos o processo de instrumentação. Reciprocamente, a professora passou a associar novos esquemas de utilização ao recurso (relativos às discussões a partir dos comentários dos alunos), o que caracterizou o processo de instrumentalização.

Em relação à professora Genilda, ocorreu situação semelhante, no entanto a fonte de informação que influenciou o grau de autoeficácia observado pela professora foi a persuasão verbal; nesse sentido, a professora Carla impactou o grau de autoeficácia da professora Genilda, através de informações verbais relacionadas ao recurso e à capacidade do indivíduo em utilizá-lo.

Tanto a professora Carla como a professora Genilda, tendo como fontes de informação suas experiências pessoais ou a persuasão verbal, ao adotarem como recurso situações-problema sobre juros compostos, observaram um impacto no grau de autoeficácia relativa a essa abordagem. As situações que foram modeladas por uma função exponencial (relacionada ao montante) consistiam em um recurso novo para as professoras até o momento da realização do trabalho colaborativo, quando as professoras passaram a utilizá-lo, sendo orientadas por ele e associando-o a alguns esquemas comuns de utilização (relativos a alguns procedimentos aritméticos e generalização). Nesse caso, temos o processo de instrumentação.

Reciprocamente, as professoras passaram a associar novos esquemas de utilização ao recurso relativos à representação gráfica por meio do GeoGebra, à transformação de unidades e aproximações nos cálculos (caso da professora Carla) e ao raciocínio lógico, às porcentagens e aos números decimais (caso da professora Genilda), o que caracterizou o processo de instrumentalização.

Com relação à adoção do *software* GeoGebra como recurso para o ensino de Juros Compostos, as professoras Carla e Genilda tiveram como fonte de informação suas experiências pessoais e observaram um impacto no grau de autoeficácia relativa a essa estratégia. Esse *software* era um recurso novo para a professora Genilda (até o momento da experiência preliminar a esta pesquisa) e para a professora Carla (até o momento da realização do trabalho colaborativo desta pesquisa), quando as professoras passaram a utilizá-lo, sendo orientadas por ele e associando-o a alguns esquemas comuns de utilização (referentes ao uso de comandos básicos). Nesse caso, temos o processo de instrumentação.

Reciprocamente, as professoras passaram a associar novos esquemas de utilização ao recurso relativos à compreensão de variável dependente e independente (no caso da professora Carla), à interpretação de gráficos e aos significados das grandezas (no caso da professora Genilda), o que caracterizou o processo de instrumentalização.

Com relação à adoção do *site* do GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) como recurso para o ensino de Juros Compostos, as professoras Carla e Genilda tiveram como fonte de informação a observação vicária, pois elas tiveram a oportunidade de observar o pesquisador experimentando situações bem sucedidas e observaram um impacto no grau de autoeficácia relativa a essa estratégia. As professoras passaram a utilizá-lo, sendo orientadas por ele e associando-o a alguns esquemas comuns de utilização (referentes ao reconhecimento das suas funcionalidades). Nesse caso, temos o processo de instrumentação.

Reciprocamente, as professoras passaram a associar novos esquemas de utilização ao recurso relativos ao acesso às várias interfaces do GeoGebra pelo *site* (no caso da professora Carla), à criação e acompanhamento de atividades pelo GeoGebra *Classroom* (no caso da professora Genilda), o que caracterizou o processo de instrumentalização.

Convém ressaltar que, em contrapartida, a autoeficácia das professoras

também influenciou o desenvolvimento do trabalho colaborativo para o ensino de Juros Compostos, tendo em vista que o trabalho foi viabilizado com base na mobilização de recursos e esquemas associados com as experiências preliminares das docentes e as trocas de informações entre os sujeitos da pesquisa.

Assim, nesta seção, tecemos considerações sobre a autoeficácia das professoras relacionada com os processos de instrumentação e instrumentalização. No próximo capítulo, apresentamos as considerações finais da pesquisa.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas considerações finais, realizaremos uma reflexão sobre elementos relevantes na investigação. Desse modo, consideraremos o referencial teórico, o referencial metodológico, o contexto da pandemia, os resultados mais importantes e suas contribuições para a Educação Matemática e, finalmente, perspectivas para estudos futuros.

Nossa preocupação em caracterizar a Gênese Documental de duas professoras de Matemática do Ensino Médio em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos, articulado com o *software* GeoGebra, motivou a realização deste estudo. A Abordagem Documental do Didático e a Teoria dos Campos Conceituais contribuíram para pesquisar esse tema. Identificamos os recursos que, agregados aos esquemas de utilização individuais e coletivos construídos no trabalho das professoras, transformaram-se em documentos.

Inicialmente, tínhamos por hipótese que o envolvimento das professoras no trabalho colaborativo poderia enriquecer os seus esquemas individuais e impactar o seu grau de autoeficácia para o ensino de Juros Compostos por meio de tecnologias digitais. As análises dos dados obtidos nesta pesquisa confirmaram nossa hipótese, visto que percebemos nas ações dos sujeitos, no decorrer das ações colaborativas e nas implementações das aulas, que os “recursos-mãe” sugeridos por cada professora foram transformados na obtenção do “recurso-filho” das mesmas, o que contribuiu para incrementar os esquemas individuais de ambas; além disso, as próprias experiências pessoais dos sujeitos, a troca de ideias e a contribuição do pesquisador auxiliando-os nas suas reflexões também favoreceram esse enriquecimento dos esquemas individuais e a autoeficácia.

Como as discussões realizadas neste trabalho relacionam-se a uma pesquisa que abarca um coletivo de professores trabalhando colaborativamente, destacamos o processo de Gênese Documental da comunidade. Na gênese do sistema documental de cada professora participante do trabalho, a comunidade interveio em quatro aspectos: contribuiu trazendo novos recursos para cada professora; contribuiu para a evolução dos recursos de cada docente por meio da implementação de alguns, enriquecendo-os com novos elementos; propôs novas classes de situações (por exemplo: apropriar-se de um modelo de ensino articulado com o *site* do GeoGebra), e participou da reconfiguração das classes de situações existentes; criticou os usos

de recursos, e assim, participou do desenvolvimento de seus próprios documentos.

A dualidade instrumentação/instrumentalização ajudou-nos a compreender como atuaram as professoras na organização dos recursos digitais (*softwares*, videoaulas, textos *online*, plataformas de videoconferência etc.) em tempos de incerteza e como elas adaptaram esses recursos.

A questão da produção ou construção de recursos nos ajudou a entender a ligação entre o desenvolvimento deles e o desenvolvimento profissional. O caso da professora Genilda foi representativo nesse contexto, pois além de adaptar recursos já existentes, mostrou ser capaz de criar o seu próprio recurso relacionando juros compostos, geometria analítica e vetores com características específicas para sua atividade.

A dualidade trabalho individual/coletivo de documentação apareceu claramente no contexto da pandemia, em que as professoras, diante da complexidade do ensino *online*, desenvolveram uma nova forma de trabalho coletivo ao combinar usos de algumas plataformas digitais.

Assim, avaliamos que a Abordagem Documental do Didático foi pertinente para a investigação, pois, por meio dela pudemos analisar o trabalho colaborativo de professoras, quando utilizavam recursos na construção de documentos para o ensino de Juros Compostos, ou seja, analisamos o processo de Gênese Documental dessas docentes para o ensino desse objeto matemático, a elaboração dos documentos no trabalho desenvolvido, em suas duas orientações: instrumentação e instrumentalização.

Referimo-nos à Teoria da Orquestração Instrumental, a qual contribuiu com a ampliação das nossas reflexões sobre todo o processo e conhecimentos subjacentes que o docente revela na ação de pensar ou repensar um recurso, algo imediatamente relacionado com os invariantes operatórios discutidos por Vergnaud (1990). Essa referência aconteceu em dois momentos: na situação de formação do trabalho colaborativo, quando o pesquisador concedeu orientações às professoras relativas às contribuições do *site* do GeoGebra, a fim de favorecer as reflexões delas sobre as possibilidades de uso desse *site* na construção de documentos para o ensino; na situação de implementação, quando a professora Carla interagiu com os alunos sobre a construção de gráficos de funções por meio do *software* GeoGebra.

Assim, verificamos um desenvolvimento dos sujeitos na utilização do GeoGebra, por meio dos processos de instrumentação e instrumentalização, tomando por base as fases da configuração didática, o modo de execução e o desempenho didático.

Nos dois momentos considerados, nas situações de formação e de implementação, o desempenho didático envolveu as escolhas admitidas no decorrer do processo de orientação, conforme foi decidido na configuração didática e no modo de execução: a necessidade de formulação de questões em determinados momentos, a forma de se fazer a validação de uma intervenção particular, a forma de se tratar um elemento imprevisto da tarefa matemática ou do recurso tecnológico etc.

Também referimo-nos ao conceito de autoeficácia, o qual contribuiu com a ampliação das nossas reflexões ao discutirmos como o desenvolvimento do trabalho colaborativo influenciou o grau de autoeficácia das professoras Carla e Genilda, analisando-o em associação com os processos de instrumentação e instrumentalização relacionados à Gênese Documental das professoras para o ensino de Juros Compostos.

Também discutimos que, em contrapartida, a autoeficácia das professoras impactou o desenvolvimento do trabalho colaborativo, de maneira que as fontes de informação da autoeficácia também foram recursos mobilizados pelas professoras para o ensino de Juros Compostos.

De uma maneira geral, com relação à adoção dos recursos para o ensino de Juros Compostos, as professoras Carla e Genilda tiveram como fontes de informação suas experiências pessoais, persuasão verbal ou observação vicária e observaram um impacto no grau de autoeficácia relativa às estratégias adotadas na utilização desses recursos. Os “recursos-mãe” sugeridos por uma professora foram transformados na obtenção do “recurso-filho” da outra professora, a qual passou a utilizá-lo, sendo orientada por ele e associando-o a alguns esquemas comuns de utilização, caracterizando o processo de instrumentação. Reciprocamente, a professora passou a associar novos esquemas de utilização ao recurso, o que caracterizou o processo de instrumentalização.

Exemplificamos a evolução da professora Carla em relação ao uso do GeoGebra, pois antes ela apenas solicitava a construção de gráficos por meio de papel quadriculado e, com base na sua experiência pessoal e também na influência

da outra professora que já utilizava o GeoGebra, houve um impacto no grau de autoeficácia da professora Carla em relação às crenças na suas habilidades em usar novas tecnologias digitais para o ensino.

Também exemplificamos a evolução da professora Genilda em relação ao uso do GeoGebra *Classroom*, pois, com base na observação vicária relacionada à situação de formação do trabalho colaborativo, houve um impacto no grau de autoeficácia da professora Genilda em relação às crenças nas suas habilidades em adotar novos canais de elaboração e implementação de aulas.

Além disso, adotamos a abordagem qualitativa de pesquisa, posto que procuramos compreender o processo através do significado desenvolvido por duas professoras e interessamo-nos pelos resultados e pelo processo de construção de documentos pelos sujeitos. E, ao propormos um estudo que objetivava caracterizar a Gênese Documental de duas professoras de Matemática do Ensino Médio em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos articulado com o *software* GeoGebra, adotamos como referencial metodológico a investigação reflexiva, uma vez que procuramos compreender como se deu a ação e o aperfeiçoamento profissional das docentes, percebendo os tópicos de estabilidade e avanços do trabalho documental no intervalo considerado.

Entendemos que houve evolução do trabalho documental das professoras, por meio da sua trajetória documental (ROCHA, 2019) para o ensino de Juros Compostos, considerando os conceitos de experiência documental, traço da experiência documental, eventos simbólicos de transição e dominante documental.

Nesse sentido, o contrato metodológico foi claramente explicitado às professoras. Desde o primeiro momento, discutiu-se a assimetria das posições, em que cada uma das partes teria sua função bem definida, porém cada uma trabalharia colaborativamente dentro das suas funções. Elas sempre souberam que o pesquisador iria analisar o desenvolvimento do trabalho, a preparação e implementação das aulas. Como a metodologia é reflexiva, as professoras contribuíram com a coleta e análise dos dados, de modo que o pesquisador procurou relacionar o que elas explicitaram com os seus pontos de vista, inferindo-se que houve aperfeiçoamento profissional das docentes para o ensino de Juros Compostos.

Dessa forma, destacamos a relevância do conteúdo Juros Compostos no trabalho documental e na autoeficácia das docentes, pois, em razão da sua utilidade

prática no cotidiano das pessoas e da sua abrangência, os avanços no trabalho documental para o ensino desse conteúdo e seus impactos nas crenças das professoras em suas habilidades para lecioná-lo, também influenciam o trabalho documental e as crenças das professoras em suas habilidades para lecionar outros conteúdos matemáticos relacionados, como porcentagens, números decimais, funções, exponenciais, logaritmos, progressões, educação financeira e outros.

Dadas as limitações impostas pela situação de isolamento social provocado pela pandemia de COVID-19, levamos em consideração, ao máximo possível, o trabalho remoto das professoras, tanto na construção dos documentos como na implementação das aulas síncronas ou assíncronas. Relacionamos as docentes à obtenção dos dados do estudo, no sentido de uma importante coleta de dados e acompanhamento das implementações e confrontações por meio de gravações; também ocorreu um comprometimento dinâmico das docentes, o que favoreceu uma atitude reflexiva, pois elas foram conduzidas a detalhar sua própria atividade e compartilhar com os outros.

Convém destacar que o contexto remoto, apesar de suas limitações, não prejudicou a metodologia adotada pelo pesquisador, pois foram respeitados os princípios de longa duração de acompanhamento; da ampla coleção de recursos materiais utilizados e produzidos no trabalho documental; do acompanhamento reflexivo e de confrontação das visões das professoras sobre seu trabalho de documentação e a materialidade desse trabalho. Apenas o princípio de monitoramento em qualquer lugar que precisou ser adaptado, por conta da situação de isolamento social, sendo utilizados registros no *Google Docs* e gravações em vídeo das situações de reflexão, formação, implementação e confrontação em ambiente colaborativo.

Sobre o contexto da pandemia, os professores de uma maneira geral em suas atuações, encontraram desafios no aspecto tecnológico, em relação aos alunos, em relação aos conteúdos matemáticos e em relação aos recursos. No caso das professoras desta pesquisa, elas não apresentaram dificuldades com a tecnologia, pois tinham alguma familiaridade com as funcionalidades das plataformas de ensino *online*. Houve algumas dificuldades de comunicação com alguns alunos, em razão de limitações desses com relação ao acesso à *Internet* e restrições em atividades de grupos *online* que promovam interações entre os alunos. Acreditamos que o trabalho

colaborativo contribuiu para amenizar o problema da falta de tempo e suporte para identificar ou projetar recursos digitais apropriados para o aprendizado dos alunos em casa.

Neste momento, retomamos o problema de pesquisa – de que forma caracterizar a Gênese Documental de duas professoras de Matemática do Ensino Médio em um trabalho colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos articulado com o *software* GeoGebra?

Com base nas reflexões apresentadas nas análises e neste momento de nossa tese, acreditamos ter respondido a essa questão, posto que identificamos os recursos e os esquemas de utilização individuais e coletivos mobilizados no trabalho documental e na implementação das aulas pelas professoras; apresentamos as dimensões de instrumentação e instrumentalização na construção de documentos pelas professoras para o ensino de Juros Compostos, ou seja, o processo de Gênese Documental. Além disso, identificamos a autoeficácia das professoras, no decorrer do trabalho documental e implementação das aulas sobre Juros Compostos.

Assim, consideramos que os objetivos específicos apresentados puderam ser atingidos e favoreceram o alcance do objetivo geral, contribuindo para responder ao nosso problema de pesquisa.

Nesse contexto, conforme Bittar (2011, p. 169):

Não se trata de querer ou imaginar que seja possível, após algum tempo de trabalho conjunto, ou mesmo de um curso, ter participantes com a mesma posição relativamente a um determinado saber. O que está em jogo é, justamente, o que cada um deles incorpora em sua ação a partir do trabalho realizado.

Na revisão de literatura da pesquisa, não encontramos trabalhos com a Abordagem Documental do Didático com foco no aspecto colaborativo remoto para o ensino de Juros Compostos; assim, acreditamos que esta investigação contribuiu para o avanço dessa abordagem teórica e, dessa maneira, para a Educação Matemática.

Finalizando, acreditamos que, para o trabalho colaborativo envolvendo o ensino de conteúdos matemáticos, esta pesquisa apresenta a especificidade de abordar o conteúdo de Juros Compostos, somando-se a várias outras baseadas na Abordagem Documental do Didático. Em continuidade a essas pesquisas, poderemos pensar em outros trabalhos que preencham lacunas referentes a outros conteúdos matemáticos, nos diferentes níveis de ensino.

## REFERÊNCIAS

- ABAR, C. A. A. P.; ALENCAR, S. V. A Gênese Instrumental na interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. **Bolema**, v. 27, n. 46, p. 349-365, 2013.
- ABAR, C. A. A. P. A mediação semiótica na gênese instrumental: um estudo da transformação de artefatos em instrumentos. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1, 2016, Bonito. **Anais...** Bonito, 2016.
- ABAR, C. A. A. P. Articulações teóricas sobre a Abordagem Documental do Didático Theoretical articulations on the documentary approach of didactics. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [s.l.], v. 21, n. 5, p. 217-229, 6 nov. 2019. Portal de Revistas PUC- SP. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p217-229>>. Acesso em: 14 dez. 2019.
- ABAR, C. A. A. P. Teorias da transposição didática e informática na criação de estratégias para a prática do professor com a utilização de tecnologias digitais. **ReviSeM**, n. 1, p. 29-45, 2020.
- ABAR, C. A. A. P.; SANTOS, J. M. S. Mapeamento dos artigos publicados na Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo entre 2013 e 2018. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura -REMATEC**, Belém/PA, v. 16, n. 37, p. 01-13, Jan.-Abril, 2021. DOI: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p01-13.id259>
- ABAR, C. A. A. P.; IGLIORI, S. B. C. Um Ensaio sobre as Potencialidades de Constructos Teóricos da Educação Matemática. **Unión**, n. 61, p. 1-14, 2021.
- ABAR, C. A. A. P.; DIAS, A. O. A Gênese Documental e o contexto remoto no desenvolvimento de uma formação continuada de professores. In: IGLIORI, S. B. C. (Org.). **Compreender o trabalho dos professores brasileiros do ensino básico: uma abordagem pelos recursos**. São Paulo : Blucher, p. 257-275, 2021.
- ADLER, J. Conceptualising resources as a theme for teacher education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 3, pp. 205-224, 2000.
- ALMEIDA, C. B.; ABAR, C. A. A. P. Elaboração e viabilização de uma aula sobre circunferência no ensino médio: um estudo de caso baseado na Gênese Documental. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 9, p. 18-30, 2020a.
- ALMEIDA, C. B.; ABAR, C. A. A. P. Desenvolvimento de uma aula virtual sobre juros compostos em ambientes colaborativos. In: CIET:EnPED: 2020 - Congresso Internacional de Educação e Tecnologias/Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância. **Anais...** São Carlos - SP, 2020b.
- ALMEIDA, M. S.; ESPÍNDOLA, E. B. M.; COSTA, P. R. B.; MELLO, T. L.;

DAMASCENA, J. S. Banco geométrico: Gênese Documental e orquestração instrumental. **Revista Eletrônica de Educação matemática- REVEMAT**, v. 15, n. 1, p. 1-22, 2020.

ALMEIDA, M. V. **Material para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche**. 259 f. Tese (Doutorado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2017.

ALMOULOU, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Unión**, San Cristobal de La Laguna, v. 42, p. 09-34, 2015.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. São Paulo: Autêntica, 2019.

ASSAF NETO, A. **Matemática financeira e suas aplicações**. 11. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

ASSIS, C. F. C. A Gênese Documental na formação de professores de Matemática: interações entre o livro didático e a geometria dinâmica. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1, 2016, Bonito. **Anais...** Bonito, 2016.

ASSIS, C. F. C.; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. A metamorfose do sistema de recursos de licenciandos em matemática na formação inicial. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 6, n. 16, p. 33-47, 2019.

ASSIS, C. F. C.; TROUCHE, L. Unindo as peças de um quebra-cabeça: perspectivas dialéticas e a gênese documental na formação inicial de professores de Matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 23, n. 3, p. 399-427, 2021.

AZCARATE, P. La formación inicial del profesor de matemáticas: Análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. **Revista universitaria de formación del profesorado**. No 3. p. 129- 142, Mayo/ agosto 1998.

BANDURA, A. **Self-efficacy: The exercise of control**. New York: Freeman, 1997.

BARTOLUCCI, A. Décloisonner les chapitres en maths en collège: progression d'année spiralee. **Journées nationales de l'APMEP**, Orléans 2004. Disponível em <http://www.apmep.fr/IMG/pdf/atelierL20.pdf>.

BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 105-144, 2019.

BENITES-BONETTI, V. C.; PAULIN, J. F. V.; RICHIT, A. Formação de professores e Comunidades de Prática: um olhar a partir das produções do grupo de formação de professores. In: PINHEIRO, J. M. L.; LEAL JUNIOR, L. C. (Orgs.). **A Matemática e seu ensino: olhares em educação matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, p. 209-234, 2018.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em revista**, Curitiba, p. 157- 171, 2011.

BORBA, M. C.; VILARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005. 232 p.

BORTONI-RICARDO, S. M. **O professor pesquisador**: introdução à pesquisa qualitativa. 2. ed. São Paulo: Parábola, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC - Ensino Médio**. Brasília, 2017.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage, 1998. 395 p.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das Situações Didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CAI, J.; MORRIS, A.; HOHENSEE, C.; HWANG, S.; ROBISON, V.; HIEBERT, J. Research Pathways Education That Connect Research and Practice. **Journal for Research in Mathematics**, v. 50, n. 1, p. 2–10, 2019a.

CAI, J.; MORRIS, A.; HOHENSEE, C.; HWANG, S.; ROBISON, V.; CIRILLO, M.; KRAMER, S. L.; HIEBERT, J. Choosing and Justifying Robust Methods for Educational Research. **Journal for Research in Mathematics**, v. 50, n. 4, p. 342–348, 2019b.

CARAMORI, M. F. **O estudo de tópicos de Matemática Financeira com tecnologias informáticas: opiniões de professores participantes de um grupo de formação continuada**. 2009. 110 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2009.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. Á.; ESCUDERO, D.; MEDRANO, E. F. **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas**. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones, 2014.

CASTELO BRANCO, A. C. **Matemática Financeira Aplicada – Método Algébrico**, HP-12C, Microsoft Excel. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

CERULO, K. A. Identity construction: New issues, new directions. **Annual Review of sociology**, Vol. 23, p. 385- 409, 1997.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en didactique de mathématiques**, Paris, v.12, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologie didactique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, 19 (2), 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Ecologie et régulation. In: ÉCOLE D'ÉTE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 11, 2001, Corps. **Actes de la XI<sup>e</sup> École d'été de didactique des mathématiques**. Grenoble: La pensée sauvage, 2002. p. 41-56.

CORAZZA, M. J.; RODRIGUES, J. L.; JUSTINA, L. A. D.; VIEIRA, R. M. Comunidades de prática como espaços de investigação no campo de pesquisa formação de professores. **Revista Pesquisa Qualitativa**. São Paulo (SP), v. 5, n.9, p. 466-494, dez, 2017.

COSER FILHO, M. S. **Aprendizagem de Matemática financeira no Ensino Médio: uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas**. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

COSTA, N. V. **A utilização de recursos computacionais para o ensino da Matemática Financeira no Ensino Médio**. 2015. 154f . Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2015 .

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução Lopes, M.; 3 ed. – Porto Alegre: Artmed, 2010.

DAL ZOT, W. **Matemática financeira**. 5. ed. Porto Alegre: UFRGS Editora, 2008.

DESGAGNÉ, S.; BEDNARZ, N.; LEBUIS, P.; POIRIER, L.; COUTURE, C. L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. **Articles**, [s.l.], v. 27, n. 1, p.33-64, 18 out. 2002. Consortium Erudit. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.7202/000305ar>>. Acesso em: 14 dez. 2019.

DIAS, A. O.; ALMEIDA, C. B.; ABAR, C. A. A. P. Estado de conhecimento sobre a Abordagem Documental do Didático em pesquisas na Língua Portuguesa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 1, p. 1-25, 12 fev. 2021.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVMEIJER, K. The Teacher and the Tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, Holanda, v. 75, n. 2, p. 213-234, 2010.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. São Paulo: Autêntica, p. 53-83, 2019.

FISHER, I. **A Imaginação Econômica**. São Paulo, Ed. Ática, 1990.

FOLCHER, V.; RABARDEL, P. Homens, artefatos, atividades: perspectiva instrumental. In: FALZON, P. (Org.). **Ergonomia**. São Paulo: Editora Blucher, 2007.

GARCÍA-ALONSO, I.; GARCÍA-DÍAZ, A.; CAMACHO-MACHÍN, M. (2019). La resolución de problemas no rutinarios en el aula de Primaria y Secundaria. Un estudio con profesores. In: MARBÁN, J. M.; ARCE, M.; MAROTO, A.; MUÑOZ-ESCOLANO, J. M.; ALSINA, Á. (Eds.). **Investigación en Educación Matemática XXIII**. Valladolid: SEIEM, p. 323-332, 2019.

GARCÍA-ALONSO, I. ProyectaMates: Reflexiones sobre la práctica docente como medio de formación continua en matemáticas. **Unión**, Ano XVI, n. 60, p. 177-195, 2020.

GASCÓN, J; NICOLÁS, P. Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. **Educación Matemática**, v. 33, n. 1, p. 7-40, abril de 2021.

GASPAROTTO, D. M; MENEGASSI, R. J. Aspectos da pesquisa colaborativa na formação docente. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 34, n. 3, p. 948-973, 2016.

GRINGOZ, H. Communication au séminaire ReVEA: "quelles grandes questions, en particulier du point de vue du travail collectif des enseignants?": depoimento. 11 de maio, 2015. França: Lyon. Disponível em formato áudio: <http://ife.enslyon.fr/ife/recherche/groupes-de-travail/revea-collectif>.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199-218, 2009.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In: G. GUEUDET; L. TROUCHE (dir.), **Ressources vives. La documentation des professeurs en mathématiques**, 57-74, INRP et PUR, 2010.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Do trabalho documental dos professores: gêneses, coletivos, comunidades: o caso da Matemática. 2015. **Em teia**, 6(3). Tradução de Katiane de Moraes. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2243>. Acesso em: 12 ago. 2019.

GUEUDET, G.; PEPIN, B.; SABRA, H.; TROUCHE, L. Collective design of an e-textbook: teachers' collective documentation. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 19(2-3), 187- 203, 2016.

GUEUDET, G.; PARRA, V. Teachers' collective documentation work: A case study on tolerance intervals. In: DOOLEY, T.; GUEUDET, G., **Proceedings of the Tenth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education**. (CERME 10, February 1 – 5, 2017). (p. 3707-3715). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

GUIMARÃES, V. F.; ABBAD, G. S. Autoeficácia no uso do computador em situações de aprendizagem: uma análise da literatura internacional. **Revista Psicologia: Organizações e Trabalho**, v. 15, n. 2, p. 170-187, abr.-jun. 2015.

HIEBERT, J.; MORRIS, A.; GLASS, B. Learning to learn to teach: An “experiment” model for teaching and teacher preparation in mathematics. **Journal of Mathematics. Teacher Education**, 66, 201–222, 2003.

HORIKAWA, A. Y. Pesquisa Colaborativa: uma construção compartilhada de instrumentos. **Revista Intercâmbio**, São Paulo, v. 18, p. 22-42, 2008.

HOYOS, V.; GARZA, R. Identification processes in teacher collaboration during professional development: documentary genesis in a context of school mathematics curriculum reform. **Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups Proceedings of ICMI Study 25**, p. 134-141, 2020.

IAOCHITE, R. T.; COSTA FILHO, R. A.; MATOS, M. M.; SACHIMBOMBO, K. M. C. Autoeficácia no campo educacional: revisão das publicações em periódicos brasileiros. **Psicologia Escolar e Educacional**, SP, v. 20, n. 1, p. 45-54, jan.-abr. 2016.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa Colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos**. Brasília: Líber Livro Editora. 2008. v. 1.

IGLIORI, S. B. C., ABAR, C. A. A. P.; ALMEIDA, C. B. Considerações sobre a interação entre professores e pesquisadores no desenvolvimento do Projeto PREMa – EB. **Ensino Em Re-Vista**, 29(Contínua), e019., p. 1-20, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.14393/ER-v29a2022-19>>. Acesso em: 28 mar. 2022.

IGNÁCIO, R. S. **Criação de capítulo de livro didático digital no estágio curricular supervisionado: uma análise da documentação na formação inicial do professor de matemática**. (Tese de doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2018.

JORDÃO, T. C. A formação do professor para a educação em um mundo digital. In: Tecnologias Digitais na Educação. **Cadernos “Salto para o Futuro”**. Ano XIX. Boletim 19, Brasília: Secretaria de Educação a Distância, novembro/dezembro 2009.

KYNIGOS, C. Using half-baked microworlds to challenge teacher educators’ knowing. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 12, n. 2, p. 87-111, 2007.

LEMKE, R.; SILVEIRA, R. F.; SIPLE, I. Z. GeoGebra: uma tendência no Ensino de Matemática. In: II COLÓQUIO LUSO-BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO. **Anais eletrônicos do II COLBEDUCA**. Joinville - SC, 2016.

LEONARDO, F. M.(Org.). **Conexões com a matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIMA, I. **De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs: Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale.** 2006. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade Joseph Fourier Grenoble I. França. 2006.

LIMA, I.; TRGALOVÁ, J. Trabalho Coletivo de Professores de Matemática: um olhar na perspectiva da Gênese Documental. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 5, n. 3, p. 289–304, 2018.

LUCENA, R; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. Teoria da Orquestração Instrumental: um olhar para a formação docente. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1, 2016, Bonito. **Anais...** Bonito, 2016.

LUCENA, R. **Metaorquestração Instrumental: um modelo para repensar a formação de professores de matemática.** 382 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MACHADO JR., S. R. N.; ESPÍNDOLA, E. B. M.; TRGALOVA, J.; LUBERIAGA, E. Abordagem Documental do Didático e o ensino de Equação do 1º grau na Educação de Jovens e Adultos - Ensino Médio. **RPEM**, Campo Mourão, PR, v.7, n. 13, p. 270-294, jan.-jun. 2018.

MARCELO, C. Aprender a enseñar para la sociedad del conocimiento. **Education Policy Analysis Archives**, 10(35), 2002. Disponível em: <http://epaa.asu.edu/epaa/v10n35>

MARSHALL, A. **Princípios de Economia.** São Paulo: Abril Cultural, 1992.

MATTA, G. P. **A Matemática Financeira no Ensino Médio e suas aplicações no cotidiano.** 2016. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2016.

MENDONÇA, M. S.; PIRES, R. F. Um Estudo sobre a Aprendizagem de Função Exponencial no Ambiente Computacional. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, [s.l.], v. 26, n. 2, p.1-28, 7 maio 2018. Sociedade Brasileira de Computacao - SB. <http://dx.doi.org/10.5753/rbie.2018.26.02.1>.

MIRANDA, L. A. N.; PHILIPPSEN, A. S. A importância da Matemática Financeira no Cotidiano e na construção da cidadania. **Cadernos PDE**, Vol. I. Artigos 2014. Unespar, Paranavai(PR). Disponível em: <[www.diaadiaeducacao.pr.gov.br](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br)>. Acesso em: 21 fev. 2021.

MISKULIN, R. G. S.; SILVA, M. R. C.; ROSA, M. Comunidades de Prática Baseadas na Tecnologia Como Histórias Compartilhadas na Formação Continuada de Professores de Matemática. In: REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL, 7, 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: PUC-SP, 2006. p. 1-11.

MIYAKAWA, T.; XU, B. Teachers' collective work inside and outside school as an essential source of mathematics teachers' documentation work: experiences from Japan and China. In: TROUCHE, L.; GUEUDET, G.; PEPIN, B. (Eds.). **The 'Resource' Approach to Mathematics Education**. New York: Springer, p. 145-172, 2019.

MONTECINOS, C. Desarrollo profesional docente y aprendizaje colectivo. Psicoperspectivas. **Revista de la escuela de psicología facultad de filosofía y educación pontificia**, Vol. II, p. 105 – 128. Valparaíso: Universidad católica de Valparaíso, 2003.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. In: ENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, 1997, Burgos, Espanha. **Actas**. Burgos: ENAS, 1997.

NOVAES, R. C. N. **Uma abordagem visual para o Ensino da Matemática Financeira no Ensino Médio**. 2009. 205 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

OLIVEIRA NETTO, A. A. **Novas tecnologias & universidade: da didática tradicionalista à inteligência artificial: desafios e armadilhas**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005.

PELTIER, M.-L. Le napperon. Un problème pour travailler sur la symétrie axiale. **Petit x**, 68, p. 17-27, 2001.

PEPIN, B.; GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. **ZDM Mathematics Education**, 49(5), 799- 812, 2017. DOI 10.1007/s11858-017-0870-8

PEPIN, B.; GUEUDET, G. Studying teacher collaboration with the documentational approach: from shared resource to common schemes? **Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups Proceedings of ICMI Study 25**, p. 158-165, 2020.

PEREIRA JÚNIOR, J. C. A.; BERTOL, D. B. O Software GeoGebra no Ensino da Matemática: Relatos a partir de Teses e Dissertações. In: **Anais dos Workshops do VIII Congresso Brasileiro de Informática na Educação (WCBIE 2019)**. Disponível em: <https://www.br-ie.org/pub/index.php/wcbie/article/view/9001>. Acesso em: 23 jan. 2021.

PIAGET, J. **Genetic epistemology** (DUCKWORTH, E., Trans.). New York: Columbia University Press, 1970.

PINTO, C. L. L.; LEITE, C. Trabalho Colaborativo: um conceito polissêmico. **Conjectura: Filos. Educ.**, Caxias do Sul, v. 19, n. 3, p. 143-170, set./dez. 2014.

PITON-GONÇALVES, J. **A história da matemática comercial e financeira**. 2005. Acesso em 18 de janeiro de 2021. Disponível em: [https://www.dm.ufscar.br/profs/jpiton/downloads/artigo\\_hist\\_mat\\_fin\\_2aed.pdf](https://www.dm.ufscar.br/profs/jpiton/downloads/artigo_hist_mat_fin_2aed.pdf)

POVEDA, W. E.; GARCÍA-CUÉLLAR, D. J. Estrategias asociadas al uso de GeoGebra en un contexto de resolución de problemas. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 16, n. 37, p. 61-79, Jan.-Abril, 2021. DOI: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p61-80.id252>

RABARDEL, P. **Les hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin, 1995.

RABARDEL, P. Instrument mediated activity in situations. In: BLANDFORD, A.; VANDERDONCKT, J.; GRAY, P. (Eds.). **People and computers XV—Interactions without frontiers**. Berlin: Springer-Verlag, p. 17-30, 2001.

RABARDEL, P. **People and technology: a cognitive approach to contemporary instruments**. Paris: Université Paris 8, 2002. Disponível em: <[http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act\\_group=1](http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1)>. Acesso em: 17/04/2020.

RADFORD, L. The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the Calculator. In: HOFFMANN, M. H. G.; LENHARD, J.; SEEGER, F. (Eds.). **Activity and sign grounding mathematics education**. New York: Springer, p. 137-152, 2005.

REZENDE, M. C. **O pensar Matemático no ensino superior: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos**. Tese (Doutorado), Faculdade de Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

RIBEIRO, J. **Assessoria pedagógica Matemática – 9º ano**. São Paulo: Scipione, 2009. p. 42.

ROCHA, K. M.; TROUCHE, L. Da produção coletiva de livros didáticos digitais aos usos feitos por professores de matemática: o caso do grupo francês Sésamath. **EM TEIA | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 6, n. 3, 2015.

ROCHA, K. M. **Une étude des effets du travail documentaire et collectif sur le développement professionnel des enseignants de mathématiques: apport des concepts d'expérience et de trajectoire documentaires**. [Tese (Doutorado) – Curso de Didactique Des Mathématiques, Ecole Normale Supérieure de Lyon], 2019. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02399664/document>.

ROCHA, K. M. O Aporte do Conceito de Trajetória Documental para Análise do Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. In: **Compreender o Trabalho dos Professores Brasileiros do Ensino Básico: Uma Abordagem pelos Recursos**. São Paulo: Blucher, p. 41-64, 2021. DOI 10.5151/9786555500813-02. <https://docplayer.com.br/214202325-O-aporte-do-conceito-de-trajetoria-documental-para-analise-do-desenvolvimento-profissional-de-professores-de-matematica.html>

RODRIGUES, M. U.; SILVA, L. D.; MISKULIN, R. G. S. Desenvolvimento do conceito de Comunidade de Prática e seus reflexos nas pesquisas na área da educação. In:

SIMPÓSIO NACIONAL DE GRUPOS COLABORATIVOS E DE APRENDIZAGEM DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA, 3, 2015, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Sbem-SP, 2015. p. 1-14.

SABRA, H. L'étude des rapports entre documentations individuelle et collective : incidents, connaissances et ressources mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 36(1), 49- 95, 2016, acessível para <https://revue-rdm.com/2016/l-etude-des-rapports-entre/>

SAMANEZ, C. P. **Matemática financeira: aplicações à análise de investimentos**, 3. ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

SÁNCHEZ, R. V.; LANTIGUA, Z.; RODRÍGUEZ, M. E.; GARCÍA, M. I. B.; GARCÍA, A. Modelización matemática y GeoGebra en la formación de profesionales de la educación. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 89-105, 2020.

SANTOS, E. C. **R-Ver Mat: Uma Proposta para Recuperação Paralela de Conteúdos de Matemática para Cursos Técnicos**. 300 f. Tese (Doutorado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2020.

SANTOS JÚNIOR, V. B. **Juros simples e compostos: análise ecológica, praxeológica e um percurso de estudo e pesquisa**. 495 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

SCHNEIDER, I. J. **Matemática financeira: um conhecimento importante e necessário para a vida das pessoas**. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2008.

SILVA, C. V.; ALMOULOU, S. A. Um estudo sobre o objeto matemático simetria ortogonal à luz da ecologia do didático. In: ALMOULOU, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (Orgs.). **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. Curitiba: CRV, p. 225-264, 2018.

SILVA, G. M. L.; NETTO, J. F. M. Um Relato de Experiência Usando Google Sala de Aula para Apoio à Aprendizagem de Química. In: VII CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO. **Anais do XXIV Workshop de Informática na Escola**. 2018.

STORMOWSKI, V.; GRAVINA, M. A.; LIMA, J. V. Tecnologia na aula de matemática: a importância do potencial semiótico. **RENOTE – Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, vol.11, n. 3, 2013.

TEIXEIRA, P. C. A. **Construindo novas ferramentas didáticas em matemática: professores, aula e recursos tecnológicos**. 171 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciências da Educação, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2014.

TEIXEIRA, J. **Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre**

**educação financeira e matemática financeira.** 159 f. Tese (Doutorado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2015.

TROUCHE, L. Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? **Educational Studies in Mathematics**, 55, 181-197, 2004.

TROUCHE, L. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v..25, p. 91-138, 2005.

TROUCHE, L.; GUEUDET, G.; PEPIN, B. The Documentational approach to didactics. In: S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. Online first, N.Y.: Springer, 2018.

TROUCHE, L.; GUEUDET, G.; PEPIN, B. (Eds.). **The 'Resource' Approach to Mathematics Education**. New York: Springer, 2019.

TROUCHE, L.; GUEUDET, G.; PEPIN, B.; ROCHA, K.; ASSIS, C.; IGLIORI, S. A **Abordagem Documental do Didático**. DAD-Multilingual, 2020. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02664943/document>>. Acesso em: 28/02/2021.

TROUCHE, L. Ciclo de 10 seminários em torno da Abordagem Documental do Didático. PUC-SP, Projeto PIPRINT- PG 9302/2020 da PUC-SP, São Paulo, 2021.

VANDERCLEYEN, F.; L'HOSTIE, M.; DUMOULIN, M.-J. **Le groupe de codéveloppement professionnel pour former à l'accompagnement des stagiaires: conditions, enjeux et perspectives**. Québec: Presses de l'Université du Québec, 2019.

VERGNAUD, G. La teoria de los campos conceptuales. [Traducción de Juan D. Godino. Espanha]. **Recherches em Didactique dès Mathématiques**. v. 10, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. In: ÉCOLE D'ETE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES. **Actes de la 8ème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques**. Clermont-Ferrand: IREM (Université Clermont-Ferrand 2), 1996. p. 174-185.

VERGNAUD, G. Toward a cognitive theory of practice. In: SIERPINSKA, A.; J. KILPATRICK, J. (eds.), **Mathematics education as a research domain: a search for identity**. Dordrecht: Kluwer, p. 227-241, 1998.

VERGNAUD, G. The theory of conceptual fields. **Human development**, v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009.

VYGOTSKY, L. S. **Mind in society: The Development of higher psychological processes**. COLE, M.; JOHN-STEINER, V.; SCRIBNER, S.; SOUBERMAN, E. (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press, 1980.

XAVIER NETO, A. L.; SILVA, M. J. F.; TROUCHE, L. A construção de atividades para o ensino de sequências numéricas: Uma análise pela lente da Abordagem Documental do Didático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 5, p. 300–314, 2019.

XAVIER NETO, A. L. **Um estudo da Gênese Documental de professores para função de uma variável real com várias sentenças matemáticas**. 338 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

WENGER, E. **Communities of practice. Learning, meaning, identity**. New York, NY: Cambridge University Press, 1998.

WENGER, E. **Comunidades de Prática: Aprendizaje, Significado e Identidad – Cognición e Desarrollo Humano**. Barcelona: Paidós, 2001.

**APÊNDICE A – ROTEIRO EM POWERPOINT ELABORADO PELA PROFESSORA  
GENILDA**

**Colégio Estadual Joaquim Inácio de Carvalho**

**Trabalho colaborativo**

**Tema: Desenvolvimento de recursos para o ensino dos Juros Compostos**

Professoras: Carla e Genilda

Alunos:

## Bases legais e Objetivos

- ▶ BNCC Ensino Médio - Competência 2
- ▶ Habilidade (EM13MAT203): Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões. (p. 526)
  
- ▶ Objetivo Geral: Desenvolver recursos que possibilitem a compreensão do conceito de regime de capitalização composta.
- ▶ Objetivos Específicos:
  - Apresentar situações-problema que envolvam juros compostos;
  - Adotar o software GeoGebra, a História da Matemática e jogos como recursos auxiliares ao ensino dos juros compostos;
  - Articular o ensino dos juros compostos com outros conteúdos matemáticos como funções, geometria analítica e vetores.

# Recurso 1

- ▶ Solicitar aos alunos que façam a leitura do texto disponível no link abaixo sobre o desenvolvimento do conceito de juros.
- ▶ Enquanto estiver mediando a resolução das situações-problema pelos alunos, incentivar discussões e questionamentos relacionados com o texto.
- ▶ Solicitar que escrevam um pequeno texto (1 a 2 páginas), relacionando o conteúdo da leitura feita com as situações-problema apresentadas e com o seu cotidiano.
- ▶ [https://www.am.ufscar.br/profs/jpifan/downloads/artigo\\_hist\\_mat\\_fi\\_n\\_2aed.pdf](https://www.am.ufscar.br/profs/jpifan/downloads/artigo_hist_mat_fi_n_2aed.pdf)

## Recurso 2

- ▶ Sugerir aos alunos o acesso a vídeos do Youtube que abordam as construções iniciais no GeoGebra, gráficos de funções e planilhas, além de instalação do GeoGebra no celular. Seguem os links:
- ▶ Interface do GeoGebra e construções iniciais: <https://youtu.be/O9ZWD31K4Hs>
- ▶ Funções: <https://youtu.be/Z67pv76nZ6U>
- ▶ Funções e Planilha: <https://youtu.be/EaoQHtQ-8ll>
- ▶ Funções e controles deslizantes: <https://youtu.be/Y-WOukSzXyl>
- ▶ Instalação do GeoGebra no smartphone: <https://youtu.be/whl01RBxa3o>

## Recurso 3

**Situação – problema resolvida pelo professor:** João tem um capital de R\$14.000,00 aplicado em uma instituição financeira, a uma taxa de juros compostos de 8% ao ano. Determine o valor do montante da aplicação com o passar do tempo, preenchendo o quadro a seguir. Para o preenchimento dos campos referentes às expressões, utilize os dados do ano anterior e coloque os termos comuns em evidência.

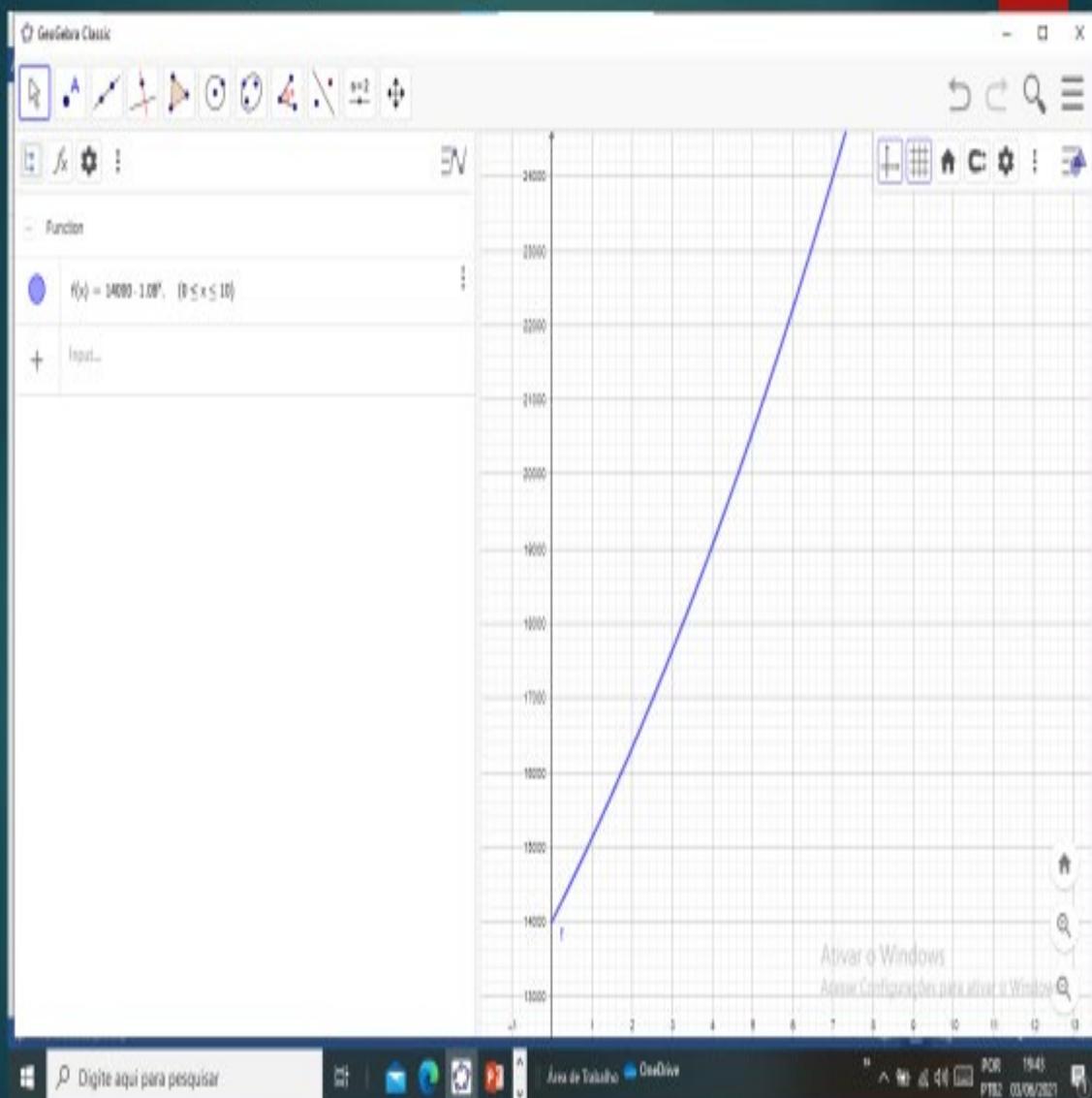
Generalizando, escreva uma expressão capaz de determinar o valor do montante com o passar do tempo:

Tempo	Expressão	Valor do Montante
Hoje	$M_0 = 14000$	14000
Após 1 Ano	$M_1 = 14000 + 14000 \cdot 0,08 = 14000(1 + 0,08) = 14000 \cdot 1,08$	15120
Após 2 Anos	$M_2 = 14000 \cdot 1,08 + 14000 \cdot 1,08 \cdot 0,08 = 14000 \cdot 1,08(1 + 0,08) = 14000 \cdot 1,08^2$	16329,60
Após 3 Anos	$M_3 = 14000 \cdot 1,08^2 + 14000 \cdot 1,08^2 \cdot 0,08 = 14000 \cdot 1,08^2(1 + 0,08) = 14000 \cdot 1,08^3$	17635,96
Após 4 Anos	$M_4 = 14000 \cdot 1,08^3 + 14000 \cdot 1,08^3 \cdot 0,08 = 14000 \cdot 1,08^3(1 + 0,08) = 14000 \cdot 1,08^4$	19046,83

Após n anos  $M = 14000 \cdot 1,08^n$

Utilizando o software GeoGebra, obtenha o gráfico da função que representa o montante dessa aplicação e faça suas observações. Esse gráfico lembra o de algum tipo de função estudada anteriormente?

## Gráfico da função (Recurso 3)



**Recurso 04 - Situação – problema a ser resolvida pelo aluno:** Uma loja vende um aparelho de som à vista por R\$ 450,00. Se a loja cobra uma taxa de juro composto de 6% ao mês no crediário, determine o preço do aparelho com o passar do tempo, preenchendo o quadro a seguir. Para o preenchimento dos campos referentes às expressões, utilize os dados do ano anterior e coloque os termos comuns em evidencia.

Tempo	Expressão	Preço do aparelho
Hoje		
Após 1 mês		
Após 2 meses		
Após 3 meses		
Após 4 meses		

Generalizando, escreva uma expressão capaz de determinar o preço do aparelho com o passar do tempo:

Utilizando o software GeoGebra, obtenha o gráfico da função que representa o preço do aparelho com o passar do tempo e faça suas observações. Esse gráfico lembra o de algum tipo de função estudada anteriormente?

## Recurso 5

- ▶ Solicitar aos alunos que leiam o capítulo sobre Juros Compostos no livro didático (Leonardo, 2016), analisem as questões resolvidas e tentem resolver todas as questões propostas no capítulo (da página 16 à página 24). Sugerir que os alunos façam uso, quando possível, da janela de álgebra, da janela CAS e janela de visualização do GeoGebra para obter os gráficos do montante, simplificar os cálculos e interpretar os problemas de diferentes formas.
- ▶ Também propor aos alunos o uso do simulador da calculadora HP 12C para auxiliar na resolução dessas questões, quando necessário. O link de acesso é: <https://www.baixaki.com.br/site/dwnld115333.htm>.

## Recurso 6

- ▶ Propor a utilização de uma videoaula da plataforma Khan Academy para ampliar a compreensão dos alunos sobre o assunto. O link é o seguinte:
- ▶ <https://pt.khanacademy.org/economics-finance-domain/core-finance/interest-tutorial/interest-basics-tutorial/v/introduction-to-interest>

**Recurso 7 – Situação – problema resolvida pelo professor:** Maria quer fazer uma aplicação de R\$ 500,00, mas está em dúvida sobre em qual situação terá maior rendimento e de quanto a mais:

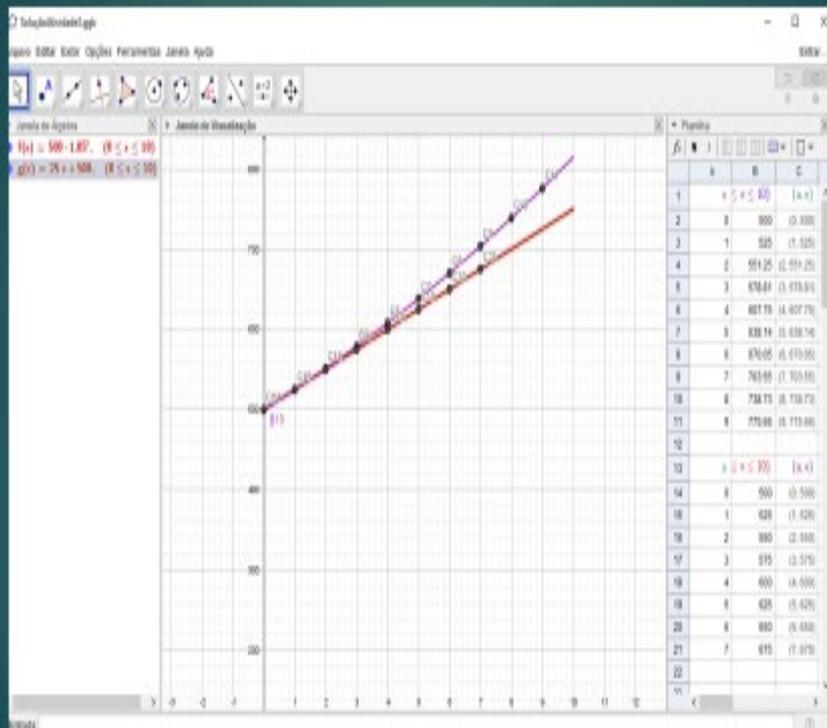
- Na capitalização simples, à taxa de 5% ao mês, durante 3 meses?
- Na capitalização composta, à taxa de 5% ao mês, durante 3 meses?
- Obtenha o gráfico que representa a função Montante x período, para as duas situações e na mesma janela do GeoGebra.
- Analisando os dois gráficos, responda qual situação é mais rentável.

Obs.: A resposta está no próximo slide. Analisando os gráficos, verificamos que, na capitalização simples, o montante será de R\$ 575,00; na capitalização composta, o montante será de R\$ 578,81. Logo, a capitalização composta é mais rentável.

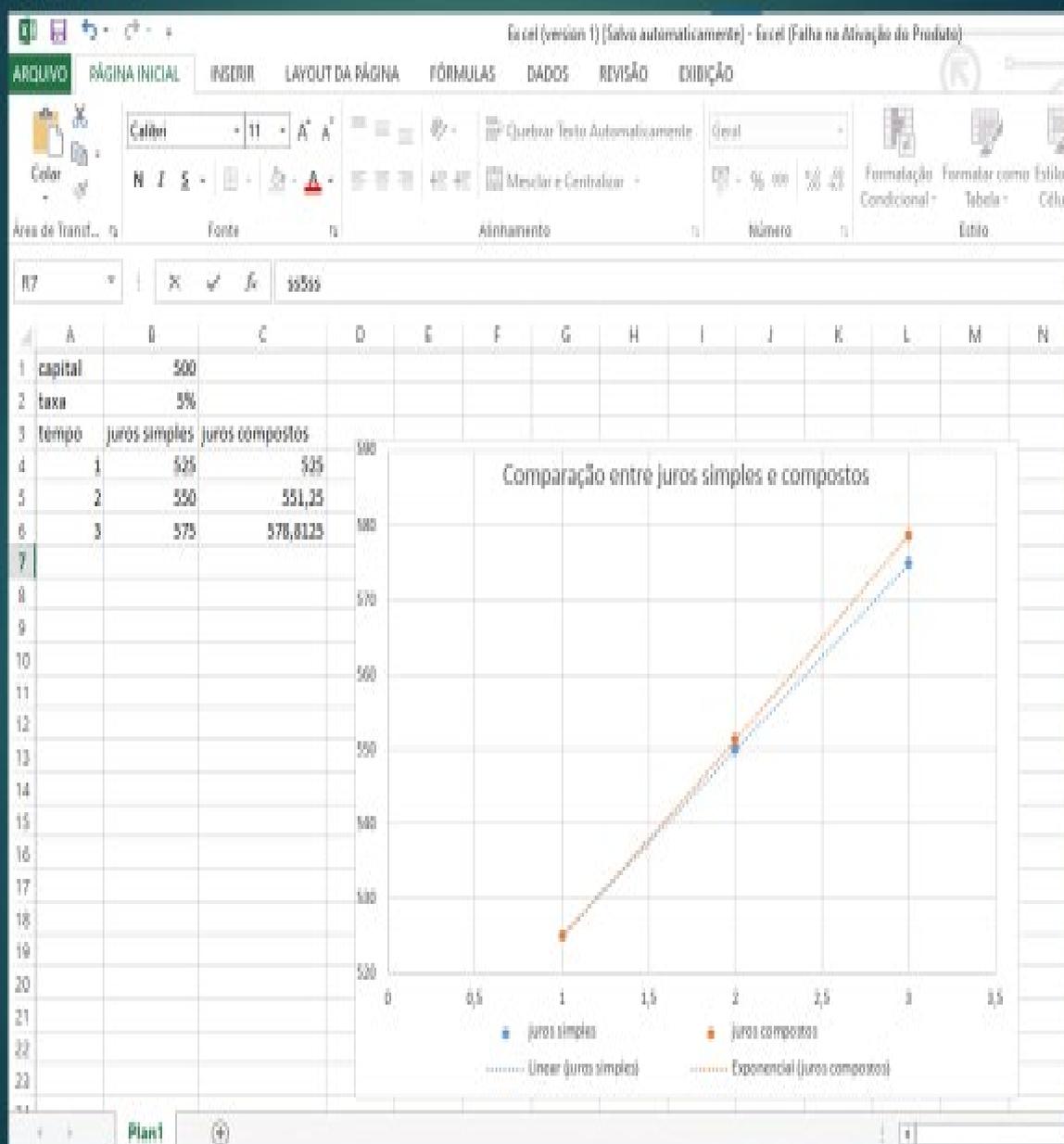
**Recurso 8 – Situação – problema a ser resolvida pelo aluno:** Ana quer fazer uma aplicação de R\$ 4000,00, mas está em dúvida sobre em qual situação terá maior rendimento e de quanto a mais:

- Na capitalização simples, à taxa de 3% ao mês, durante 7 meses?
- Na capitalização composta, à taxa de 2% ao mês, durante 8 meses?
- Obtenha o gráfico que representa a função Montante x período, para as duas situações e na mesma janela do GeoGebra.
- Analisando os dois gráficos, responda qual situação é mais rentável.

# Resposta da situação-problema com o GeoGebra (Recurso 7)



# Resposta da situação-problema com o Excel (Recurso 7)

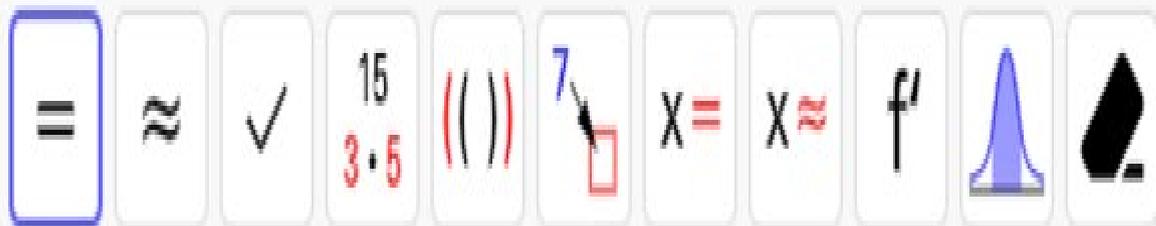


## Recurso 9

- ▶ Situação-problema resolvida pelo professor: O valor de uma máquina sofre depreciação anual de 25%. Se ela custa hoje R\$ 2.000,00, daqui a quantos anos valerá metade do que vale hoje? Resolva através da janela CAS do GeoGebra e construa o gráfico da depreciação em função do tempo.

# Resposta do problema (Recurso 9)

GeoGebra Classic



1  $1000 = 2000 \cdot (1 - 0.25)^x$

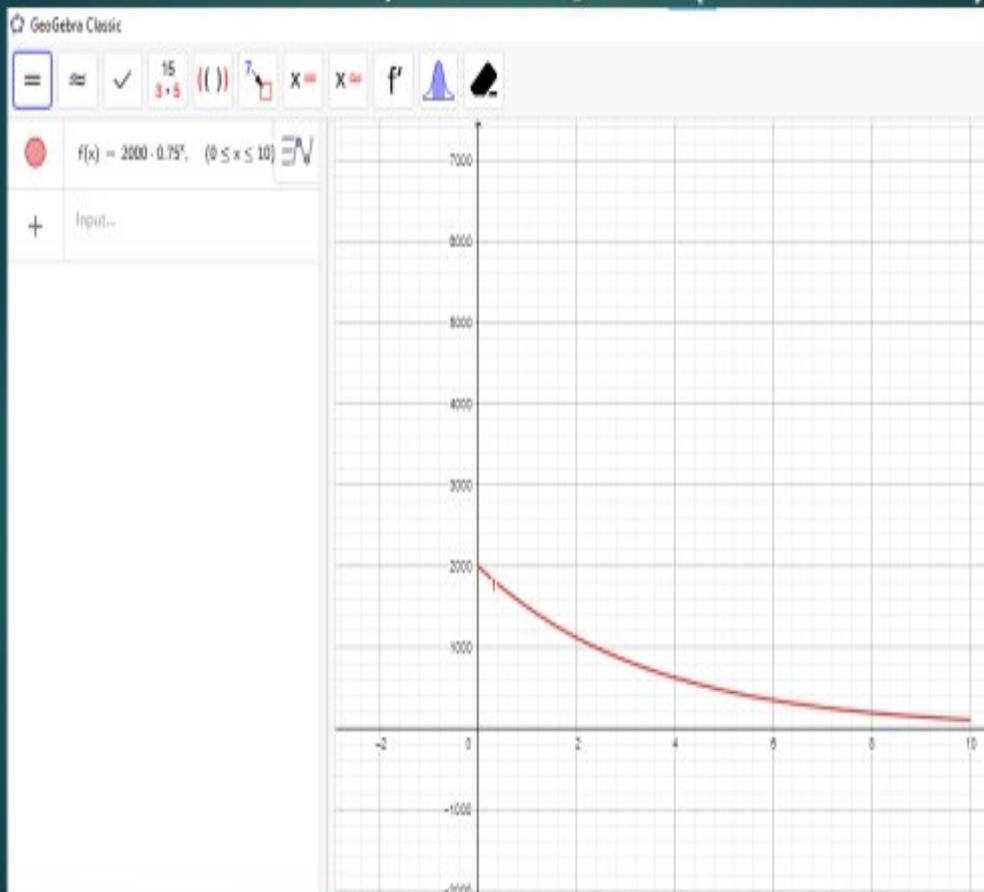
$\rightarrow 1000 = 2000 \left(\frac{3}{4}\right)^x$

2 \$1

NSolve:  $\{x = 2.41\}$

3 Input...

# Gráfico da depreciação (Recurso 9)



## Recurso 10

- ▶ Situação-problema a ser resolvida pelo aluno: Se um automóvel 0 km custa hoje R\$ 36.000, 00 e ele sofre depreciação anual de 6%, daqui a quantos anos valerá um quarto do que vale hoje? Resolva através da janela CAS do GeoGebra e construa o gráfico da depreciação em função do tempo.

## Recurso 11

Problema resolvido pelo professor: Uma compra de R\$ 600,00 vai ser paga em 3 parcelas mensais e iguais, sendo a primeira à vista. Determinar, utilizando o GeoGebra, o valor de cada parcela sabendo que a loja cobra juro de 6,5% a.m.

# Resposta (Recurso 11)

GeoGebra Classic

1  $x + \frac{x}{1.065} + \frac{x}{(1.065)^2} = 600$  sssss

→  $\frac{127969}{45369} x = 600$  sssss

2 \$1

NSolve: {x = 212.72}

3

## Recurso 12

- ▶ Propor aos alunos, com base na resolução anterior e com auxílio do GeoGebra, que resolvam as outras questões sobre atualização financeira do livro didático (Leonardo, 2016): questões 29 a 33 da página 19. Propor a comparação com os cálculos feitos no ambiente lápis-papel.

## Recurso 13 – Articulando Juros Compostos, Geometria Analítica e Vetores.

**Situação-problema resolvida pelo professor:** Há exatamente 3 meses, Antônio fez uma aplicação de R\$ 1.000,00 no Banco X, a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, durante 3 meses; no entanto, ele tinha um saldo negativo na sua conta do Banco Y de R\$ 2.000,00. Hoje, ele fez um depósito na sua conta do Banco Y, quitando sua dívida e restando-lhe um saldo positivo de R\$ 1.000,00. A partir de um sistema de eixos cartesianos, represente o vetor associado à variação dos saldos dessas contas entre os dois momentos. Determine, também, o módulo desse vetor.

### Resolução

- Através da janela CAS do GeoGebra, encontre o montante da aplicação no Banco X, após 3 meses, cujo valor é de R\$ 1.061,21.
- Através da Janela de Visualização do GeoGebra, marque dois pontos cujas coordenadas correspondam ao saldos das duas contas nos dois períodos. Os pontos são  $A(1000, -2000)$  e  $B(1061,21, 1000)$ .

## Continuação

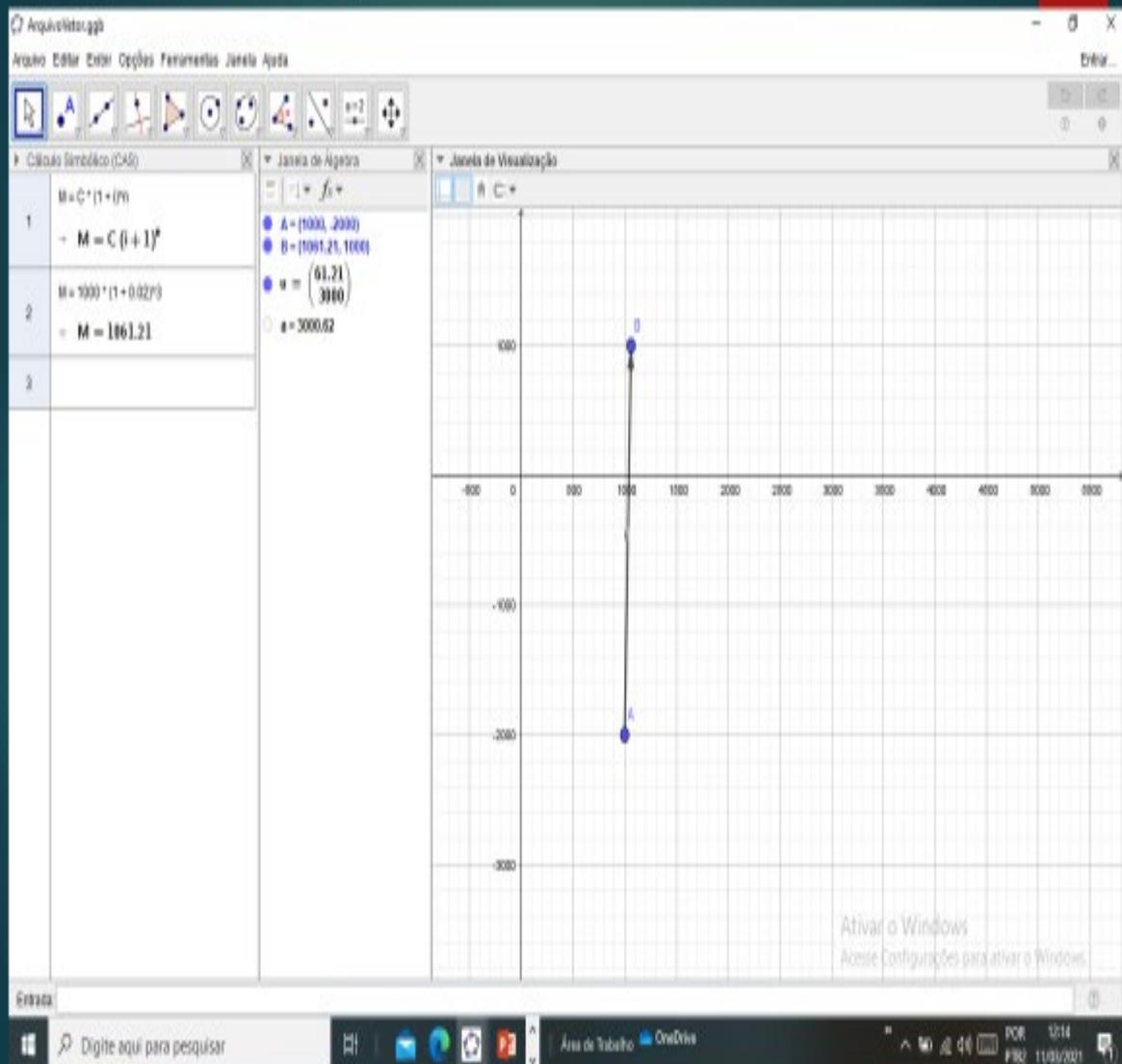
c) Na Janela de Entrada do GeoGebra, digite  $\text{Vetor}(\langle \text{Ponto Inicial} \rangle, \langle \text{Ponto Final} \rangle)$ , substituindo ponto inicial por A e ponto final por B. Na Janela de Visualização, aparecerá a representação do vetor

$u = (61.21, 3000)$  cujos componentes correspondem às variações nos saldos das contas.

d) Na Janela de Entrada, digite  $\text{Comprimento}(\langle \text{Objeto} \rangle)$ , substituindo Objeto por  $u$ . Na Janela de Algebra, aparecerá  $a = 3000,62$ , que corresponde ao módulo do vetor. Discutir com os alunos que esse valor também pode ser interpretado como a distância entre os pontos A e B.

No próximo slide, temos o print da tela do GeoGebra com a solução.

## Resolução (Recurso 13)



## Recurso 14

**Situação-problema a ser resolvida pelos alunos: Represente o vetor associado à variação dos saldos das contas de Antônio entre os dois momentos e determine o módulo desse vetor, considerando agora que as situações de Antônio nos dois bancos são as seguintes:**

Há exatamente 4 anos, Antônio fez uma aplicação de R\$ 3.000,00 no Banco X, a uma taxa de juros compostos de 0,25% ao mês, durante 4 anos; no entanto, ele tinha um saldo negativo na sua conta do Banco Y de R\$ 2.000,00. Hoje, ele fez um depósito na sua conta do Banco Y, quitando sua dívida e restando-lhe um saldo positivo de R\$ 1.000,00.

**Obs.: Nesse caso, a taxa e o tempo estão em unidades de medida diferentes.**

## Recurso 15

- ▶ Acessar o site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), clicar em Classroom e em seguida inserir os seguintes códigos para responder às situações-problema apresentadas anteriormente:

Situação problema 4	JWNG VTWC
Situação problema 8	U7JN XB8A
Situação problema 10	NMVK APPC
Situação problema 14	TPHE ZNSQ

## Recurso 16 (opcional) – Jogo dos juros

- ▶ Adaptar um tabuleiro (semelhante ao apresentado no último slide) que possa ser utilizado para o "jogo dos juros", abordando situações como compras com juros, pagamento de boleto bancário atrasado, dívidas e etc. Formar grupos de 2 ou 4 pessoas. As regras do jogo são:
- ▶ Inicialmente, considere um capital de R\$ 5000,00 para cada participante.
- ▶ Anotem esse valor na folha de papel.
- ▶ Escolha quem será o primeiro a jogar o dado.
- ▶ Cada participante, na sua vez, lança o dado duas vezes. A primeira vez indicará o número da coluna do quadro e a segunda vez, o número da linha, obtendo uma coordenada (coluna, linha). As coordenadas podem ser compostas apenas de números de 1 a 5.

## Continuação do Jogo dos Juros

- ▶ Toda vez que o dado indicar o número 6, o participante que lançou deverá adicionar R\$ 100,00 ao seu montante e lançar novamente o dado para obter as coordenadas (números de 1 a 5).
- ▶ Obtidas as coordenadas, cada participante deverá localizá-la no quadro e realizar os cálculos sugeridos na situação correspondentes às coordenadas. Nas situações, pode-se acrescentar ou retirar um determinado valor do montante.
- ▶ O vencedor será o participante que tiver a maior quantia em seu montante após certa quantidade de jogadas, determinadas por vocês. (RIBEIRO, 2009, p. 42).

# Referências

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC - Ensino Médio*. Brasília, 2017.

LEONARDO, F. M.(Org.). *Conexões com a matemática*. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

MENDONÇA, M. S.; PIRES, R. F. Um Estudo sobre a Aprendizagem de Função Exponencial no Ambiente Computacional. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, [s.l.], v. 26, n. 2, p.1-28, 7 maio 2018. Sociedade Brasileira de Computacao - SB. <http://dx.doi.org/10.5753/rble.2018.26.02.1>.

PITON-GONÇALVES, J. *A história da matemática comercial e financeira*. 2005. Acesso em 18 de janeiro de 2021. Disponível em:  
[https://www.dn.ufrpe.br/revista/ufpe/download/ufpe/ufpe\\_mat\\_18\\_2aedi.pdf](https://www.dn.ufrpe.br/revista/ufpe/download/ufpe/ufpe_mat_18_2aedi.pdf)

RIBEIRO, J. *Assessoria pedagógica Matemática – 9º ano*. São Paulo: Scipione, 2009. p. 42 e 57.

# Anexo

## Modelo de tabuleiro (pode ser modificado)

1	2	3	4	5
5	4	3	2	1
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

## APÊNDICE B – CAPÍTULO DO LIVRO DIDÁTICO SOBRE JUROS COMPOSTOS

### 4 Juro composto

#### Observação

Regime de capitalização é o método pelo qual o capital é remunerado.

Destacam-se o Regime de capitalização simples e o Regime de capitalização composto.

No regime de **juro composto**, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem ao montante. Dessa forma, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior, o que chamamos de “juro sobre juro”. Essa é a modalidade de remuneração mais empregada pelas instituições financeiras.

Os cálculos envolvidos na resolução de problemas de juro composto em geral são trabalhosos; por isso, recomenda-se usar uma calculadora.

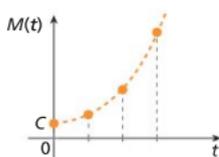
Acompanhe, na tabela abaixo, a evolução do montante gerado pelo investimento de R\$ 1.000,00 à taxa de 2% ao mês sob os dois regimes de capitalização estudados.

Período	Juro simples	Juro composto
início	$M_0 = 1.000$	$M_0 = 1.000$
após 1 mês	$M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0,02 \cdot 1 \Rightarrow M_1 = 1.020$	$M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0,02 \Rightarrow M_1 = 1.020$
após 2 meses	$M_2 = 1.000 + 1.000 \cdot 0,02 \cdot 2 \Rightarrow M_2 = 1.040$	$M_2 = 1.020 + 1.020 \cdot 0,02 \Rightarrow M_2 = 1.040,40$
após 3 meses	$M_3 = 1.000 + 1.000 \cdot 0,02 \cdot 3 \Rightarrow M_3 = 1.060$	$M_3 = 1.040,40 + 1.040,40 \cdot 0,02 \Rightarrow M_3 \approx 1.061,21$
após 4 meses	$M_4 = 1.000 + 1.000 \cdot 0,02 \cdot 4 \Rightarrow M_4 = 1.080$	$M_4 \approx 1.061,21 + 1.061,21 \cdot 0,02 \Rightarrow M_4 \approx 1.082,43$
após 5 meses	$M_5 = 1.000 + 1.000 \cdot 0,02 \cdot 5 \Rightarrow M_5 = 1.100$	$M_5 \approx 1.082,43 + 1.082,43 \cdot 0,02 \Rightarrow M_5 \approx 1.104,08$
após $t$ meses	$M_t = 1.000 \cdot (1 + 0,02t)$	$M_t = 1.000 \cdot (1 + 0,02)^t$

#### Refleta

Para valores de  $t$  naturais, a aplicação em regime de juro composto cresce, em cada período, a uma razão multiplicativa constante. O capital aplicado e os montantes nos períodos seguintes ao da aplicação formam uma **progressão geométrica**, mostrada no gráfico abaixo. Qual é a razão dessa progressão?

ADILSON BECCO



A progressão geométrica formada é  $(C, C(1+i), C(1+i)^2, C(1+i)^3, \dots)$ , em que  $C$  é o capital aplicado inicialmente e  $i$  é a taxa de juro ao fim de cada período.

A razão é dada por:

$$\frac{C(1+i)}{C} = 1+i$$

Portanto, a razão dessa PG é  $1+i$ .

Vamos detalhar os cálculos feitos na coluna do juro composto ao final de cada mês. Para isso, considere o capital investido  $C$ , a taxa de juro composto  $i$  e o período de aplicação  $t$ .

- Após 1 mês:  $M_1 = C + C \cdot i \Rightarrow M_1 = C(1+i)$
- Após 2 meses:  $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1+i) \Rightarrow M_2 = C(1+i) \cdot (1+i) = C(1+i)^2$
- Após 3 meses:  $M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1+i) \Rightarrow M_3 = C(1+i)^2 \cdot (1+i) = C(1+i)^3$
- Após  $t$  meses:  $M_t = M_{t-1} + M_{t-1} \cdot i = M_{t-1}(1+i) \Rightarrow M_t = C(1+i)^{t-1} \cdot (1+i) = C(1+i)^t$

Então, podemos calcular o montante resultante dessa aplicação da seguinte forma:

$$M = C(1+i)^t$$

### Exercícios resolvidos

**R7.** Com um capital de R\$ 1.500,00 foi feita uma aplicação que rende juro composto de 1,2% ao mês. Qual será o saldo (montante) dessa aplicação após 6 meses se, durante esse período, não houver nenhuma outra movimentação na conta?

#### Resolução

Aplicando a fórmula do juro composto, temos:

$$M = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{1,2}{100}\right)^6 \Rightarrow M = 1.500 \cdot (1,012)^6$$

Utilizando uma calculadora, obtemos  $M \approx \text{R\$ } 1.611,29$ .

**R8.** Uma dívida contraída a juro composto aumenta 69% em 2 meses. Qual é a taxa mensal de juro?

► **Resolução**

É importante perceber que 69% é a taxa acumulada em 2 meses para essa dívida.

$$(1 + 0,69) = (1 + i_{a.m.})^2 \Rightarrow 1 + i_{a.m.} = \sqrt{1,69} \Rightarrow i_{a.m.} = 30\%$$

**R9.** Uma loja oferece as seguintes alternativas para o pagamento de uma mercadoria:

- à vista, com 3% de desconto sobre o preço de tabela;
- com cheque pré-datado para 30 dias, no valor de tabela da mercadoria.

Considerando que um consumidor tenha dinheiro para comprar a mercadoria à vista e que esse dinheiro possa ser aplicado em uma instituição financeira à taxa de 0,8% a.m., qual é a opção mais vantajosa para comprar nessa loja? Explique.

► **Resolução**

Seja  $P_t$  o preço de tabela da mercadoria e  $P_v$  seu preço à vista, temos:  $P_v = 0,97 \cdot P_t$  (desconto de 3% sobre o preço de tabela)

O valor à vista da mercadoria pode ser aplicado e produzir um montante, após 1 mês, de:

$$M = 0,97 \cdot P_t \cdot (1 + 0,008) \Rightarrow M = 0,97776 \cdot P_t$$

Logo, o valor do resgate seria insuficiente para saldar o cheque pré-datado, pois:  $0,97776 \cdot P_t < P_t$

Portanto, é mais vantajoso para o consumidor pagar a mercadoria à vista.

Vamos representar por  $i$  o valor da taxa de juro da aplicação.

O valor à vista da mercadoria pode ser aplicado e produzir um montante, após 1 mês, de:  $M = 0,97 \cdot P_t \cdot (1 + i)$

Para que o consumidor não tenha desvantagem em aplicar o valor à vista, devemos ter:

$$0,97 \cdot P_t \cdot (1 + i) \geq P_t$$

$$1 + i \geq \frac{1}{0,97} \Rightarrow i \geq \frac{0,03}{0,97} \approx 3,1\%$$

Portanto, a taxa procurada é  $\frac{0,03}{0,97}$ ,

aproximadamente 3,1%.

Esse tipo de questão é recorrente no cotidiano. Em uma economia como a brasileira, geralmente é mais vantajoso o pagamento à vista. Esse tipo de situação-problema leva os alunos a refletir nas decisões de sua economia e a exercer sua cidadania.

◆ **Refleta**

Considerando a situação dada no exercício R9, qual é o menor valor da taxa de juro que a aplicação deveria ter para que a decisão de pagar em 30 dias não fosse desvantajosa?

**R10.** O valor de uma máquina sofre depreciação anual de 25%. Se ela custa hoje R\$ 2.000,00, daqui a quantos anos valerá metade do que vale hoje? (Adotar:  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,48$ )

► **Resolução**

Aplicando a fórmula do juro composto, a definição e as propriedades operatórias dos logaritmos, temos:

$$1.000 = 2.000 \cdot (1 - 0,25)^t \Rightarrow (0,75)^t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \log_{0,75} \left( \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log \left( \frac{1}{2} \right)}{\log (0,75)} = \frac{\log \left( \frac{1}{2} \right)}{\log \left( \frac{3}{4} \right)} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 2^2} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - 2 \cdot \log 2}$$

Adotando  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,48$ , temos:

$$t = \frac{0 - 0,30}{0,48 - 2 \cdot 0,30} = \frac{-0,30}{-0,12} = 2,5$$

Logo, a máquina terá seu valor reduzido à metade em 2 anos e meio, contados a partir de hoje.

◆ **Observação**

Satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, são válidas as seguintes propriedades:

•  $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

•  $\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

•  $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$

•  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

**Exercícios propostos**

Registre as respostas em seu caderno

**22.** Quanto Mariana deveria aplicar hoje em um investimento que rende juro composto à taxa de 10% a.a para ter um montante de R\$ 13.310,00 daqui a 3 anos? **R\$ 10.000,00**

**23.** (UEL-PR) Um empresário comprou um apartamento com intenção de investir seu dinheiro.

Sabendo-se que esse imóvel valorizou 12% ao ano, é correto afirmar que seu valor duplicou em, aproximadamente: **alternativa e**

(Dados:  $\log_{10} 2 \approx 0,30$  e  $\log_{10} 7 \approx 0,84$ )

**a)** 3 anos. **d)** 6 anos e 7 meses.

**b)** 4 anos e 3 meses. **e)** 7 anos e 6 meses.

**c)** 5 anos.

24. Um capital de R\$ 1.500,00 foi aplicado a juro composto à taxa de 2% ao mês. Ao completar 2 meses de aplicação, o montante foi retirado e aplicado a juro simples à taxa de 5% ao mês. Se, após certo prazo, o montante final era R\$ 1.950,75, qual foi o prazo da segunda aplicação? **5 meses**
25. Certo capital duplica em 2 meses de aplicação no regime de juro composto. Qual é, aproximadamente, a taxa mensal de juro desse investimento? **41%**
26. Em 3 anos, o crescimento do setor agroindustrial de certa região foi 700%. Qual foi a taxa de crescimento média por ano? Se a taxa de crescimento no primeiro ano foi 25% e a do segundo foi 100%, qual foi a taxa de crescimento no terceiro ano? **100%; 220%**
27. Em uma loja, as vendas de 2017 foram 40% superiores em relação às de 2016. Em relação a 2017, as vendas de 2016 foram inferiores em que porcentagem, aproximadamente? **≈ 29%**
28. Um investidor aplicou R\$ 4.000,00 em um fundo de ações que lhe causou um prejuízo, no primeiro mês, de 40% sobre o total do investimento. Na tentativa de recuperar o dinheiro perdido, aplicou o montante da primeira aplicação por um prazo de 60 dias a uma taxa de 20% a.m. Esse investidor conseguiu recuperar o dinheiro investido? Após a segunda aplicação, qual foi a taxa percentual do montante em relação aos R\$ 4.000,00 aplicados? **não; 86,4%**

## 4.1 Atualização financeira

Já vimos que certo capital, aplicado por um período  $t$ , a juro composto, tem seu valor calculado pela fórmula  $M = C \cdot (1 + i)^t$ . Agora, acompanhe a situação.

Um capital de R\$ 500,00, aplicado, rende juro composto de 2% a.m. e produz os montantes a seguir.

- Após 1 mês:  $M_1 = 500 \cdot (1 + 0,02) \Rightarrow M_1 = 510,00$
- Após 2 meses:  $M_2 = 500 \cdot (1 + 0,02)^2 \Rightarrow M_2 = 520,20$
- Após 3 meses:  $M_3 = 500 \cdot (1 + 0,02)^3 \Rightarrow M_3 \approx 530,60$
- ⋮
- Após  $t$  meses:  $M_t = 500 \cdot (1 + i)^t$

Observe que, ao projetarmos o valor de uma aplicação ou de uma dívida, devemos multiplicar o valor presente pelo fator  $(1 + i)^t$ .

Vamos analisar agora o que ocorre na situação inversa, ou seja, a de uma dívida cujo valor já está calculado com juro composto embutido, que vence daqui a um tempo, mas tem seu pagamento antecipado. Observe.

Uma loja vende um aparelho de som por R\$ 505,62 para pagamento com cheque pré-datado para 60 dias. Se a loja está cobrando juro de 6% ao mês no crediário, qual é o preço à vista do aparelho?

Para saber o preço à vista, devemos atualizar seu preço monetariamente, isto é, devemos calcular o valor presente do aparelho. Para isso, devemos "tirar" o juro embutido no preço final da mercadoria.

Utilizando  $M = C \cdot (1 + i)^t$ , temos:

$$505,62 = C \cdot (1 + 0,06)^2 \Rightarrow C = \frac{505,62}{(1,06)^2} \Rightarrow C = 450$$

Portanto, o preço à vista do aparelho é R\$ 450,00.

Observe que agora, para trazer o valor da mercadoria para o presente (preço à vista), dividimos o valor no futuro pelo fator  $(1 + i)^t$ . Normalmente, nesta etapa do estudo, alteramos a classificação de montante ( $M$ ) para dívida ( $D$ ) e de capital ( $C$ ) para valor presente ( $VP$ ). Assim, temos:  $D = VP \cdot (1 + i)^t$

Logo, o valor presente é dado por:

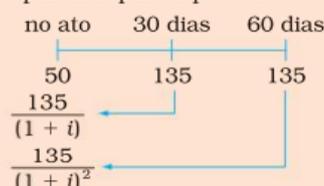
$$VP = \frac{D}{(1 + i)^t}$$

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

- R11.** Uma loja vende uma bicicleta por R\$ 300,00 à vista, ou por R\$ 50,00 de entrada e mais 2 pagamentos mensais de R\$ 135,00. Qual é a taxa mensal de juro no plano a prazo? (Usar:  $\sqrt{6.129} = 78$ )

## ► Resolução

No esquema da situação trazemos o valor de todas as parcelas para o presente:



Nesse caso, temos:

$$50 + \frac{135}{(1+i)} + \frac{135}{(1+i)^2} = 300$$

Fazendo  $(1+i) = k$ , temos:

$$50 + \frac{135}{k} + \frac{135}{k^2} = 300$$

$$50k^2 - 27k - 27 = 0$$

$$k = \frac{-(-27) \pm \sqrt{6.129}}{2 \cdot 50}$$

Logo,  $k \approx 1,05$  ou  $k \approx -0,51$  (não serve).

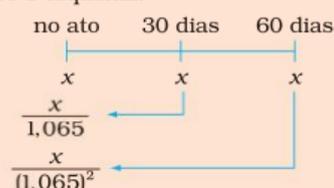
Logo,  $1+i \approx 1,05$ , ou seja,  $i \approx 0,05$ .

Portanto, a taxa de juro no plano a prazo é de, aproximadamente, 5% a.m.

- R12.** Uma compra de R\$ 600,00 vai ser paga em 3 parcelas mensais e iguais, sendo a primeira à vista. Determinar o valor de cada parcela sabendo que a loja cobra juro de 6,5% a.m.

## ► Resolução

Observe o esquema:



A soma da entrada com as demais parcelas atualizadas monetariamente (descontado o juro) fornece o valor da compra à vista:

$$x + \frac{x}{1,065} + \frac{x}{(1,065)^2} = 600$$

$$(1,065)^2 x + 1,065x + x = (1,065)^2 \cdot 600$$

$$3,199225x = 680,535$$

$$x \approx 212,72$$

Logo, cada parcela do financiamento é de, aproximadamente, R\$ 212,72.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

- 29.** Um imóvel, no valor total de R\$ 364.000,00, vai ser pago em 3 parcelas anuais iguais, sendo a primeira à vista. Qual é o valor de cada parcela, se está sendo cobrado juro de 20% ao ano na segunda e na terceira parcelas? **R\$ 144.000,00**
- 30.** Um ventilador que custa R\$ 100,00 à vista é vendido em uma loja em 2 parcelas iguais de R\$ 60,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda a vencer em 30 dias. Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja? **50%**
- 31.** Um aparelho de TV custa R\$ 800,00 à vista, ou zero de entrada e mais 2 parcelas iguais de R\$ 430,00, com vencimentos em 30 e 60 dias após a compra.



Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja nesse plano de pagamento? (Use:  $\sqrt{15.609} = 125$ ) **5%**

- 32.** No dia 15/7/2017, João contraiu uma dívida, com a promessa de quitá-la em 15/7/2018, mediante

um único pagamento de R\$ 208.080,00. Nessa quantia já está incluso o juro composto correspondente aos 12 meses, à taxa mensal de 2%. Hoje, ele entrou em contato com o credor, mostrando interesse em liquidar sua dívida no dia 15/5/2018, desde que a dívida seja recalculada com a retirada do juro correspondente aos 2 meses de antecipação. Supondo que o credor concorde com João, quanto ele terá de pagar? **R\$ 200.000,00**

- 33.** Em um comercial de televisão, o garoto-propaganda anuncia:

AMANHÃ É O DIA DO REFRIGERADOR. LEVE SEU REFRIGERADOR POR R\$ 400,00 AGORA E MAIS R\$ 600,00 DAQUI A 2 MESES OU TRAGA SUA PROPOSTA PARA ANÁLISE!



Um consumidor, ouvindo a propaganda, foi até a loja e propôs pagar R\$ 400,00 de entrada e mais 2 prestações mensais e iguais. Sabendo que a loja opera com taxa de juro composto de 5% ao mês, qual deve ser o valor de cada prestação para que os dois planos sejam equivalentes? **≈ R\$ 292,68**

## 5 O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros

Além da calculadora, as planilhas eletrônicas são muito usadas para auxiliar nos cálculos relacionados a operações financeiras. Vamos acompanhar dois exemplos de problemas resolvidos empregando planilhas.

a) Lorena tem R\$ 50.000,00 e duas opções para investir esse dinheiro:

- Aplicação A: rendimento à taxa de 1% a.m. em regime de juro simples.
- Aplicação B: rendimento à taxa de 0,9% a.m. em regime de juro composto.

Qual das aplicações é mais vantajosa para Lorena?

Vamos analisar, com o auxílio de uma planilha eletrônica, o que acontece com o montante no decorrer do tempo em cada uma das aplicações.

O estudo deste item é opcional. Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica. Caso opte por não estudar este tópico, verificar a necessidade de explicar aos alunos como funciona uma planilha eletrônica no **Pesquisa e ação** deste capítulo.

Ao apresentar os exemplos, discutir as dificuldades e até que ponto seria trabalhoso resolver ambos os problemas realizando os cálculos um a um, sem o auxílio da planilha eletrônica.

Comentar com os alunos que, na planilha, os resultados aparecem arredondados para a segunda casa decimal.

Campo que mostra a célula selecionada. B3 é a célula que está na coluna B e na linha 3.

Campo que mostra a fórmula associada à célula.

Números que indicam as linhas da planilha.

Letras que indicam as colunas da planilha.

Para preencher a coluna A, digitamos 0, 1 e 2, identificando, assim, os primeiros meses. Selecionamos essas três células e, com o cursor na quina da seleção e com o botão esquerdo do mouse clicado, arrastamos a seleção para preencher os meses seguintes.

Para calcular o montante da aplicação A (regime de juro simples) ao fim do 1º mês, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:  
 $=50000*(1+0,01*A3)$   
 valor da célula A3  
 taxa mensal  
 capital inicial  
 [Calcula o valor de:  $50.000 \cdot (1 + 0,01 \cdot 1)$ ]

Para preencher a coluna B com os montantes ao fim de cada mês, basta selecionar a célula B3 e arrastar a seleção para baixo, assim como foi feito na coluna A. Esse procedimento copia a fórmula da célula B3 para as células B4, B5, B6, B7, ... substituindo A3, respectivamente, por A4, A5, A6, A7, ...

	A	B	C	D
1	Período (mês)	Montante (R\$) na aplicação A	Montante (R\$) na aplicação B	
2	0	50.000,00	50.000,00	
3	1	50.500,00		
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			

Ativar o Acesso Cor

Para calcular o montante da aplicação B (regime de juro composto) ao fim do 1º mês, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:  
 $=50000*(1+0,009^A3)$   
 valor da célula A3  
 taxa mensal  
 capital inicial  
 [Calcula o valor de:  $50.000 \cdot (1 + 0,009)^1$ ]

Assim como fizemos para a coluna B, arrastamos a seleção da célula C3 para as outras células da coluna.

	A	B	C	D
1	Período (mês)	Montante (R\$) na aplicação A	Montante (R\$) na aplicação B	
2	0	50.000,00	50.000,00	
3	1	50.500,00	50.450,00	
4	2	51.000,00		
5	3	51.500,00		
6	4	52.000,00		
7	5	52.500,00		
8	6	53.000,00		
9	7	53.500,00		
10	8	54.000,00		

Ativar o Acesso Cor

Com os dados da planilha preenchidos, é possível comparar os montantes no decorrer do tempo para as duas aplicações. Preenchendo apenas o começo da planilha, acharemos, erroneamente, que a aplicação A é sempre mais vantajosa.

Mas, arrastando a seleção das fórmulas para um número maior de meses, veremos que a partir do 25º mês a aplicação B passa a ser mais vantajosa que a aplicação A.

Portanto, deve-se considerar o tempo em que Lorena deixará esse capital aplicado. Caso esse tempo seja inferior a 25 meses, a aplicação A será mais vantajosa; caso seja superior ou igual a 25 meses, a aplicação B será mais vantajosa.

	Fórmula			
	A	B	C	D
1	Período (mês)	Montante (R\$) na aplicação A	Montante (R\$) na aplicação B	
2	0	50.000,00	50.000,00	
3	1	50.500,00	50.450,00	
4	2	51.000,00	50.904,05	
5	3	51.500,00	51.362,19	
25	23	61.500,00	61.442,21	
26	24	62.000,00	61.995,19	
27	25	62.500,00	62.553,15	
28	26	63.000,00	63.116,12	

- b) Para comprar uma casa, Juliana deu uma entrada correspondente a 10% do valor do imóvel e fez um financiamento para o restante da dívida, a uma taxa fixa de 0,97% ao mês, a ser pago em 10 anos, com prestações mensais fixas de R\$ 2.700,00. Qual é o valor do imóvel à vista?

Vamos usar uma planilha eletrônica para calcular o valor presente de cada uma das 120 parcelas mensais (equivalentes a 10 anos de pagamento). Em seguida, basta adicionar esses valores para calcular o valor presente da dívida e, então, calcular o valor do imóvel considerando que a dívida equivale a 90% de seu valor.

Ativar o Wi

Comentar com os alunos que, na planilha, os resultados aparecem arredondados para a segunda casa decimal.

Para calcular o valor presente das parcelas ao fim de cada período, digitamos, em B2, a fórmula:  $=2700/(1+0,0097)^{A2}$   
 Calcula o valor de:  $\frac{2.700}{(1 + 0,0097)^1}$   
 Em seguida, selecionamos essa célula e arrastamos a seleção até B121.

Inicialmente, preenchemos a coluna com os períodos até o 120º mês.

B2	Fórmula	=2700/(1+0,0097)^A2
	A	B
1	Período (mês)	Valor presente da parcela (R\$)
2	1	2.674,06
3	2	
4	3	
5	4	
118	117	
119	118	
120	119	
121	120	
122		

Assim, calculados os valores presentes de todas as parcelas, digitamos em uma célula da planilha, na célula C2, por exemplo, a fórmula:  $=SOMA(B2:B121)$   
 (Adiciona os valores das células B2 a B121)  
 Essa soma representa o valor total da dívida no presente.

C2	Fórmula	=SOMA(B2:B121)		
	A	B	C	D
1	Período (mês)	Valor presente da parcela (R\$)	Valor presente total da dívida (R\$)	Valor total do imóvel (R\$)
2	1	2.674,06	190.950,95	212.167,72
3	2	2.648,37		
4	3	2.622,93		
5	4	2.597,73		
118	117	872,09		
119	118	864,30		
120	119	856,00		
121	120	847,78		
122				

Para calcular o valor total do imóvel à vista, digitamos, em outra célula, a fórmula:  $=C2/0,90$   
 (Calcula a razão entre o valor da célula C2 e 0,90)  
 Essa razão fornece o valor à vista do imóvel.

Portanto, o valor do imóvel de Juliana à vista é R\$ 212.167,72.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

34. Luana está juntando dinheiro para fazer uma viagem, que custará R\$ 4.200,00. Ela vai aplicar seu dinheiro em uma poupança, com rendimento de 0,6% ao mês. Sabendo que hoje aplicou R\$ 1.000,00 e que ao fim de cada mês ela depositará na poupança R\$ 200,00, após quanto tempo, no mínimo, Luana conseguirá juntar a quantia necessária para fazer a viagem? (Resolva o problema usando uma planilha eletrônica.)

15 meses

35. Everton fez um empréstimo de R\$ 50.000,00 em uma instituição financeira, a juro de 8% ao mês sobre o saldo devedor. Ao fim de cada mês após o empréstimo, ele pagou R\$ 3.000,00 à instituição, a fim de diminuir a dívida. Porém, devido ao crescimento acelerado da dívida, contactou a instituição, após 38 meses, para renegociar a dívida. Calcule, usando uma planilha eletrônica, quanto era a dívida de Everton nessa data. R\$ 270.315,95

## Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

### Aplicação

- (Mackenzie-SP) O setor de recursos humanos de uma empresa entrevistou candidatos a empregos, sendo  $\frac{2}{3}$  a razão entre o número de aprovados e o de reprovados. Dos entrevistados, foram aprovados: **alternativa d**  
**a) 30%   b) 32%   c) 36%   d) 40%   e) 45%**
- Antes de colocar certo produto à venda, um comerciante aumentou seu preço em 20%. Se o desconto no ato da venda também for de 20%, que porcentagem do preço inicial o comprador pagará pelo produto? **96%**
- O preço original de um objeto de R\$260,00 sofreu dois aumentos sucessivos: um de 20% e outro de 30%. **não**  
**a) O novo valor do objeto é 50% maior que o original?**  
**b) Qual é o novo valor e qual é a taxa acumulada pelos dois aumentos? R\$ 405,60 e 56%**
- Em uma sessão de ginástica de uma academia, 25% dos presentes são do sexo feminino. Se 3 moças se retirarem, a porcentagem passará a ser 20%. Quantas moças continuarão na sessão de ginástica? **9 moças**
- (Fuvest-SP) Um reservatório com 40 ℓ de capacidade já contém 30 ℓ de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de: **alternativa d**  
**a) 20%   b) 22%   c) 24%   d) 26%   e) 28%**
- (PUC) Em uma indústria é fabricado certo produto ao custo de R\$ 9,00 a unidade. O proprietário anuncia a venda desse produto ao preço unitário de  $x$  reais, para que possa, ainda que dando ao comprador um desconto de 10% sobre o preço anunciado, obter um lucro de 40% sobre o preço unitário de custo. Nessas condições, o valor  $x$  é: **alternativa d**  
**a) 24   b) 18   c) 16   d) 14   e) 12**
- Em um período em que a inflação é 25%, qual será a perda do poder aquisitivo da moeda? **20%**
- Um contrato estabelece a aplicação, a juro simples, de  $\frac{2}{3}$  de um capital à taxa de 6% a.m., durante 2 meses; o restante à taxa de 4,5% a.m., também a juros simples, durante 3 meses. Para que todo o capital em uma mesma aplicação tivesse em 3 meses a mesma rentabilidade, qual deveria ser a taxa anual? **50%**
- (Faap-SP) Um investimento de R\$ 24.000,00 foi aplicado parte a juro simples de 1,8% ao mês e parte a 3% ao mês. Se o juro mensal é igual a R\$ 480,00, quais são as partes correspondentes do investimento?  
**R\$ 20.000,00; R\$ 4.000,00**

- (UFC-CE) Uma pessoa, dispondo de 60.000 reais, aplica parte dessa quantia no banco A, a uma taxa de juro simples de 5% ao ano. O restante é aplicado no banco B, a uma taxa de juro simples de 7% ao ano. Depois de 1 ano verificou-se que as quantias aplicadas tiveram o mesmo rendimento. Pode-se afirmar, corretamente, que a quantia aplicada no banco A, em reais, foi: **alternativa e**  
**a) 19.000   c) 27.000   e) 35.000**  
**b) 20.000   d) 30.000**
- Em 1º de abril de determinado ano, um artigo que custava R\$ 250,00 teve seu preço diminuído em  $p\%$  de seu valor. Em 1º de maio do mesmo ano, o novo preço foi diminuído em  $p\%$  do seu valor, passando, então, a R\$ 211,60. Utilizando uma calculadora, determine o valor de  $p$ . **8**
- Quanto uma pessoa deve aplicar hoje, a juro composto com taxa de 1,4% ao mês, para pagar uma dívida de R\$ 3.600,00 daqui a 3 meses? E uma dívida de R\$ 8.700,00 daqui a 5 meses?  
**≈ R\$ 3.452,94; ≈ R\$ 8.115,77**  
 Ativar o Acesso Cor
- (FGV) No regime de juro composto, a taxa de juro anual que produz um montante 44% superior ao capital inicial, no prazo de aplicação de 2 anos, é:  
**a) 20%   b) 21,5%   c) 21%   d) 20,5%   e) 22%**  
 alternativa a
- (FGV) Uma aplicação financeira rende juros de 10% ao ano, compostos anualmente.

$x$	2	5	11
$\log x$	0,30	0,70	1,04

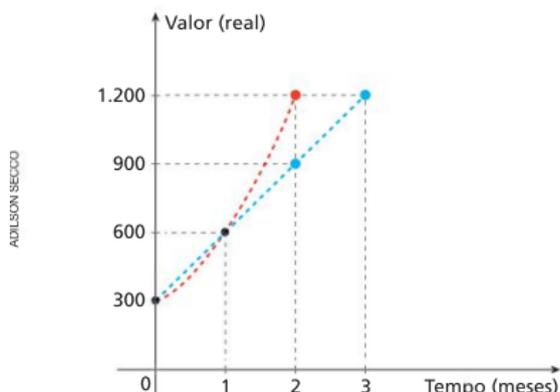
Utilizando para os cálculos as aproximações fornecidas na tabela, pode-se afirmar que uma aplicação de R\$ 1.000,00 seria resgatada no montante de R\$ 1.000.000,00 após: **alternativa e**

- mais de 1 século
  - 1 século
  - $\frac{4}{5}$  de século
  - $\frac{2}{3}$  de século
  - $\frac{3}{4}$  de século
- Uma mercadoria é vendida em 3 parcelas iguais de R\$ 320,00, sem entrada. Se a taxa de juro do financiamento for 5% ao mês, qual será o valor aproximado dessa mercadoria para pagamento à vista?  
**≈ R\$ 871,44**  
 Ativar o Acesso Cor

### Aprofundamento

- (Vunesp) Uma loja vende um produto no valor de R\$ 200,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista, com 10% de desconto, ou em 2 prestações mensais de mesmo valor, sem desconto, a primeira sendo paga no momento da compra. A taxa mensal de juro embutida na venda a prazo é: **alternativa d**  
**a) 5%   b) 10%   c) 20%   d) 25%   e) 90%**

17. Observe os gráficos abaixo. Um deles representa a aplicação de R\$ 300,00 a juro composto, e o outro, a aplicação desse mesmo valor a juro simples.



- a) No regime de juro composto, qual será o montante após 3 meses? **R\$ 2.400,00**
- b) Após que mês é menos vantajoso o regime de juro simples? **após o 1º mês**
18. Em determinado ano, nos meses de janeiro, fevereiro e março, as taxas de inflação foram, respectivamente, de 1,2%, 0,8% e 1,3%. Qual foi a taxa de inflação acumulada nesse primeiro trimestre? E qual deve ser a taxa máxima de inflação de abril para que a taxa acumulada no quadrimestre seja de, no máximo, 4%?  
**≈ 3,34%; ≈ 0,64%**

19. (Enem) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esse investimento, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

$n$	$1,03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá: **alternativa c**

- a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
- b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

- c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
- d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
- e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

20. (Enem) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R\$ 55.000,00.
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 30.000,00, e mais uma prestação de R\$ 26.000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 20.000,00, mais uma prestação de R\$ 20.000,00, para dali a 6 meses e outra de R\$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R\$ 39.000,00.
- Opção 5: Pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R\$ 60.000,00.

Ativar o Win  
Acesse Configurar

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção:

- a) 1    b) 2    c) 3    d) 4    e) 5 **alternativa d**

### Desafio

21. Um supermercado negocia com seus fornecedores 150.000 unidades de determinado produto. Na primeira semana de vendas, o público consumiu  $\frac{2}{3}$  das unidades, com lucro unitário de 30% sobre o custo para o supermercado; na semana seguinte, consumiu todas as restantes, com lucro unitário de 15% sobre o custo. Qual foi a taxa percentual média do lucro do supermercado nessas vendas? **25%**
22. (Ibmec-SP) Se  $x$  reais forem investidos em determinada aplicação, então o rendimento gerado por essa aplicação e o imposto que irá incidir sobre esse rendimento serão ambos iguais a  $x\%$ . O maior valor de  $x$  para o qual essa aplicação não gera prejuízo é:  
**alternativa c**
- a) R\$ 50,00                      d) R\$ 125,80
- b) R\$ 83,33                      e) R\$ 161,80
- c) R\$ 100,00

## Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

- Em uma sala de aula, a razão entre o número de meninos e o número de meninas é  $\frac{3}{5}$ . Em relação ao total de alunos na sala, a porcentagem de meninas é: **alternativa c**
  - 37,5%
  - 60%
  - 62,5%
  - 40%
- Na composição do feijão, 22% são proteínas. A massa de proteínas, em grama, existente em 300 g de feijão é: **alternativa a**
  - 66
  - 132
  - 156
  - 660
- Ao comprar uma bicicleta de R\$ 950,00 com desconto de 18%, o cliente pagará: **alternativa c**
  - R\$ 932,00
  - R\$ 968,00
  - R\$ 779,00
  - R\$ 171,00
- Após um aumento de 15%, um produto passou a ser vendido por R\$ 48,30. O preço desse produto, antes do aumento, era: **alternativa b**
  - R\$ 33,30
  - R\$ 42,00
  - R\$ 43,30
  - R\$ 32,00
- Um aparelho de TV cujo preço original é R\$ 1.000,00 está sendo vendido por R\$ 885,00. Assim, a loja está oferecendo um: **alternativa d**
  - aumento de 88,5%.
  - desconto de 88,5%.
  - aumento de 11,5%.
  - desconto de 11,5%.
- Ao ser aplicado, um capital  $C$  aumentou em 4% no primeiro mês. No segundo mês, houve um desconto de 4% sobre o novo valor, obtendo o montante  $M$ . Podemos dizer que: **alternativa b**
  - houve lucro.
  - houve prejuízo.
  - $C$  é igual a  $M$ .
  - $M$  é maior que  $C$ .
- No regime de **■■■■■**, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o montante resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro. **alternativa c**
  - juro composto
  - aplicações sucessivas
  - juro simples
  - descontos sucessivos
- o rendimento obtido ao fim de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem a um novo montante; a partir daí, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior. **alternativa a**
  - No regime de juro composto
  - No regime de juro simples
  - Em qualquer regime de capitalização
  - Não há regime de capitalização no qual
- Uma loja vende um produto no valor de R\$ 150,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista com 10% de desconto ou, sem desconto, em 2 parcelas iguais, sendo uma no ato da compra e outra 30 dias depois. A taxa de juro cobrada na compra parcelada é: **alternativa d**
  - 10%
  - 15%
  - 18%
  - 25%
- O salário líquido mensal de uma pessoa é R\$ 3.000,00. Todo mês ela poupa 10% de seu salário líquido e aplica esse valor em um fundo que rende juros compostos à taxa de 2% ao mês. O saldo dessa aplicação logo depois de ela fazer o terceiro depósito é: **alternativa a**
  - R\$ 918,12
  - R\$ 906,00
  - R\$ 903,00
  - R\$ 618,12

Ativar  
Acesse C

## Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

Objetivos do capítulo	Número da questão									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resolver problemas que envolvam taxa percentual.	X	X	X	X	X	X			X	X
Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.						X	X	X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	10 a 12	10 a 12	10 a 12	10 a 12	10 a 12	11 a 14	14 e 15	16 a 18	16 a 19	16 a 19

## APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO SOBRE TRAJETÓRIA PARA O ENSINO DE JUROS COMPOSTOS

Questionário sobre trajetória para o ensino de juros compostos

Perguntas Respostas 2 Configurações

### Questionário sobre trajetória para o ensino de juros compostos

Questionário sobre trajetória do professor para o ensino de juros compostos

**E-mail \***

E-mail válido

Este formulário está coletando e-mails. [Alterar configurações](#)

**Qual a sua formação e tempo de experiência? Com quais turmas você trabalha? \***

Texto de resposta longa

**Como foi o planejamento de aulas no início da sua carreira para o ensino de juros compostos? Quais fatores tiveram impacto nesse processo? \***

**Quais recursos você utilizou no início da carreira para o ensino de juros compostos? Que estratégias utilizava? \***

Texto de resposta longa

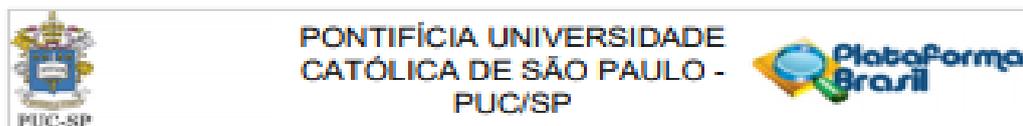
**Quais acontecimentos impactaram o seu trabalho com juros compostos ao longo do tempo? Quais recursos e estratégias passou a utilizar? \***

Texto de resposta longa

**Como você compara o trabalho realizado hoje com o do início da carreira para o ensino de juros compostos? \***

Texto de resposta longa

## ANEXO A – PARECER COMITÊ DE ÉTICA – PUC-SP



## PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

## DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

**Título da Pesquisa:** A GÊNESE DOCUMENTAL EM UMA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO COM A UTILIZAÇÃO DE TECNOLOGIAS

**Pesquisador:** CHRYSTIAN BASTOS DE ALMEIDA

**Área Temática:**

**Versão:** 1

**CAAE:** 29890220.5.0000.5482

**Instituição Proponente:** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP

**Patrocinador Principal:** Financiamento Próprio

## DADOS DO PARECER

**Número do Parecer:** 4.031.021

**Apresentação do Projeto:**

O trabalho visa acompanhar e analisar a produção de novos recursos por professores de Matemática do Ensino Médio, a partir de cursos de formação continuada com tecnologias, promovidos pela rede pública estadual da Bahia, verificando se a construção desses recursos contribui para amenizar as dificuldades dos alunos que ingressam no ensino médio. Será acompanhado o processo de elaboração, desenvolvimento e implementação de recursos e atividades dos professores cursistas de Matemática que frequentaram os programas de formação continuada desenvolvidos pela rede estadual da Bahia, através do sistema EAD, em parceria com instituições de ensino superior, entre os anos de 2012 e 2018. Serão analisados relatórios de avaliações e questionários respondidos pelos próprios professores-cursistas. Serão realizados encontros e oficinas com 20 professores envolvidos no processo.

**Objetivo da Pesquisa:**

Analisar o desenvolvimento de recursos criados por professores de Matemática do Ensino Médio, em uma formação continuada com a utilização de tecnologias.

**Avaliação dos Riscos e Benefícios:**

Não há riscos evidenciados.

**Endereço:** Rua Ministro Godói, 999 - sala 03 C  
**Bairro:** Perdizes **CEP:** 05.015-001  
**UF:** SP **Município:** SÃO PAULO  
**Telefone:** (11)3570-8466 **Fax:** (11)3570-8466 **E-mail:** cometica@pucaq.br



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE  
CATÓLICA DE SÃO PAULO -  
PUC/SP



Continuação do Parecer: 4.031.031

**Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:**

Não há comentários específicos.

**Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:**

Satisfatórios.

**Recomendações:**

Não há recomendações específicas.

**Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

Não há pendências ou inadequações.

**Considerações Finais a critério do CEP:**

O Colegiado do Comitê de Ética em Pesquisa, campus Monte Alegre da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - CEP-PUC/SP, aprova integralmente o parecer oferecido pelo(a) relator(a).

**Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:**

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PE_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_P RÓJETO_1443195.pdf	09/03/2020 23:13:41		Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Declaração_Institucao.odt	09/03/2020 23:05:58	CHRYSYTIAN BASTOS DE ALMEIDA	Aceito
Parecer Anterior	Parecer.pdf	09/03/2020 23:05:14	CHRYSYTIAN BASTOS DE	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_Tese.docx	09/03/2020 22:16:45	CHRYSYTIAN BASTOS DE ALMEIDA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.odt	09/03/2020 22:14:16	CHRYSYTIAN BASTOS DE ALMEIDA	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_rosto.pdf	09/03/2020 22:12:01	CHRYSYTIAN BASTOS DE	Aceito

Endereço: Rua Ministro Godói, 999 - sala 63 C

Bairro: Perdizes

CEP: 05.015-001

UF: SP

Município: SÃO PAULO

Telefone: (11)3670-8466

Fax: (11)3670-8466

E-mail: cometica@pucsp.br



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE  
CATÓLICA DE SÃO PAULO -  
PUC/SP



Continuação do Parecer: 4.001.001

**Situação do Parecer:**  
Aprovado

**Necessita Apreciação da CONEP:**  
Não

SÃO PAULO, 15 de Maio de 2020

---

**Assinado por:**  
Antonio José Romero Valverde  
(Coordenador(a))

**Endereço:** Rua Ministro Godói, 999 - sala 83 C  
**Bairro:** Perdizes **CEP:** 05.015-001  
**UF:** SP **Município:** SÃO PAULO  
**Telefone:** (11)3570-8488 **Fax:** (11)3570-8488 **E-mail:** cometica@pucsp.br