

Francisco Jorge Bergamin Sakovic

As Diferenças da Visão Clássica e da  
Visão Frequentista no Conceito de  
Probabilidade

Especialização em Educação Matemática

PUC-SP

2010

Francisco Jorge Bergamin Sakovic

As Diferenças da Visão Clássica e da  
Visão Frequentista no Conceito de  
Probabilidade

Monografia apresentada a Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de ESPECIALISTA em Educação Matemática sob orientação da Prof<sup>a</sup> Dra. Ana Lúcia Manrique.

PUC-SP

2010

## Dedicatória

*Gostaria de agradecer principalmente a minha  
a mãe Estela por todo o apoio, ao meu pai José e  
ao meu irmão Pedro.*

## Agradecimentos

A todas as forças superiores que me deram garra, foco, determinação e disciplina para realizar essa pesquisa.

A minha família por todo apoio, toda compreensão e toda motivação.

A Prof<sup>a</sup> Dra Ana Lúcia Manrique, pela orientação, por todo apoio, toda atenção e todo companheirismo em todos os momentos dessa jornada. Seus comentários e suas sugestões sempre me guiaram para o caminho certo, tornando assim, nosso relacionamento uma verdadeira parceria.

A todos os professores e colegas de classe do curso de especialização em educação matemática, pelo incentivo oferecido.

# Resumo

O presente estudo tem como objetivo identificar aspectos relacionados às principais diferenças da visão clássica (Laplaciana) e da frequentista na introdução do conceito de probabilidade na opinião de professores de matemática. Foram analisados livros e materiais didáticos com o objetivo de diagnosticar de que forma eles introduzem o conceito de probabilidade. Utilizou-se a entrevista reflexiva como coleta de dados, ouvindo três professoras de matemática, duas professoras da educação básica, e uma pesquisadora, professora do ensino superior. Os resultados mostram que o tema probabilidade ainda é pouco abordado no ensino fundamental, e a visão frequentista é desconhecida pelas professoras do ensino fundamental e médio. Na análise dos livros e materiais didáticos, foi evidenciado que a maioria deles aborda o tema utilizando apenas a visão clássica, favorecendo com que os alunos fiquem apenas com uma visão incompleta do assunto, quando comparada à de um aluno que tenha compreendido o assunto de modo multifacetado, ou seja, de diversas formas. Conclui-se que é um desafio para o professor de matemática buscar estratégias e materiais para trabalhar a visão frequentista com seus alunos.

# Abstract

The purpose of this study is to identify features of the main differences between the classic (Laplacian) view and the frequentist approach when introducing the concept of probability, in the eyes of teachers of Mathematics. Teaching textbooks and materials were examined, aiming to diagnose how the concept of probability is introduced by teachers. A reflective interview was used to collect the data, targeting three Mathematics teachers, two primary school teachers, and one university level professor and researcher. The results obtained show that the subject of probability is still quite absent from primary schools [first nine years of education in Brazil], and that primary and secondary teachers are not aware of the frequentist approach. The review of teaching textbooks and materials indicated that most of them are limited to a classic view of the subject, and that this limitation entails an incomplete understanding by the students, when compared to those whose knowledge derives from a multiple-view of the subject, having learned in different forms. The conclusion is that it is a challenge for Mathematics teacher to search for strategies and materials to offer the frequentist approach to their students.

# Sumário

## **Capítulo I - Apresentação**

1. Da trajetória pessoal ao tema de pesquisa.....	9
---	---

## **Capítulo II – A visão clássica e a visão frequentista**

1. Introdução.....	12
2. Um estudo histórico da probabilidade.....	12
3. A introdução do conceito de probabilidade.....	17
3.1. A visão clássica.....	19
3.2. A visão frequentista.....	21
4. A noção de acaso.....	22
4.1. Desconhecimento das causas.....	23
4.2. Cruzamento de séries causais independentes.....	23
4.3. Ausência de causas.....	24
5. As diferenças da visão clássica e da visão frequentista.....	25

## **Capítulo III - Metodologia**

1. Introdução.....	26
2. Levantamento de estudos sobre a temática.....	26
3. Análise de livros e materiais didáticos.....	26
4. A coleta de dados da pesquisa.....	28
4.1. Tipo de entrevista.....	29
4.2. Entrevista reflexiva.....	29
4.3. Objetivos da entrevista.....	30

4.4. A entrevista.....	31
5. Os sujeitos da pesquisa.....	33
<b>Capítulo IV - Resultados</b>	
1. Realização, transcrição e análise da entrevista.....	34
1.1. Parte 1.....	34
1.2. Parte 2.....	35
<b>Capítulo V – Considerações Finais</b>	
1. Considerações finais.....	39
<b>Referências</b> .....	42

# Capítulo I: Apresentação

## 1. Da trajetória pessoal ao tema de pesquisa

Leciono matemática há quatro anos em escolas estaduais na cidade de São Paulo e realizo aulas particulares há oito anos para alunos de diversos níveis de ensino. Em 2009 realizei um acompanhamento escolar pré-vestibular com alguns alunos e alguns exercícios relacionados à Probabilidade e Análise Combinatória me chamaram a atenção. Percebi uma dificuldade muito grande por parte dos alunos em relação a esses exercícios. Eles afirmavam não terem visto esses conteúdos detalhadamente no Ensino Médio e alegavam que não nem tiveram a introdução do mesmo no Ensino Fundamental. Ao me defrontar com a resolução dos exercícios solicitados pelos alunos e ao explicar diversas vezes os mesmos exercícios, evidenciei que alguns conceitos não estavam muito claros para mim.

Assim em janeiro e fevereiro de 2010, realizei um curso de Probabilidade e Análise Combinatória no IME-USP (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo), com o intuito de me aprofundar um pouco mais nessa área. O curso foi de grande proveito para mim, pois pude esclarecer alguns conceitos que ainda possuía dúvidas e perceber que é possível resolver os exercícios dessa área, sem me prender ao uso mecânico de fórmulas.

O curso de especialização em educação matemática na PUC-SP me possibilitou rever minhas práticas de ensino e minha formação de uma maneira crítica. Assim, ao refletir sobre minha formação acadêmica, pude evidenciar que os conceitos de Probabilidade e Análise combinatória foram, na maioria das vezes, trabalhados de uma forma mecânica, ou seja, priorizando a aplicação de fórmulas. Esse curso de especialização também possuía uma disciplina denominada “Fundamentos Teóricos e Problemas de Ensino e Aprendizagem de Estatística e Probabilidade”. Essa disciplina

me instigou ainda mais a realizar a leitura de algumas dissertações relacionadas ao ensino do conceito de probabilidade. Ao realizar essas leituras, me deparei com a maioria delas abordando principalmente a introdução do conceito de probabilidade pela visão frequentista. Dentre as leituras realizadas, destaco a dissertação de Marcelo Rivelino Rodrigues (2007), intitulada “A urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de probabilidade”. Nela o autor utiliza a Urna de Bernoulli como modelo no ensino de probabilidade. O autor utiliza uma atividade intitulada “Garrafa de Brosseau”, para representar concretamente a urna. Apresenta também uma seqüência de ensino em que propõe, para alunos da última série do ensino fundamental, a construção do conceito probabilístico de base pelas concepções clássica e frequentista.

Destaco também a dissertação de Cileda de Queiroz e Silva Coutinho (1994), intitulada “Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista”. Este trabalho tem como objetivo estudar as concepções espontâneas ou pré-construídas dos alunos a propósito do acaso e de probabilidades, através da observação da estabilização de um evento após um grande número de repetições. Apresenta um questionário com o intuito de diagnosticar as concepções já existentes/pré-estabelecidas dos alunos. A autora pretende apresentar as vantagens ao se utilizar a visão frequentista para o ensino dos primeiros conceitos de probabilidade.

Destaco também a dissertação de Marcio Welker Corrêa (2010), intitulada “O Conhecimento Profissional e a Abordagem do Ensino da Probabilidade: Um estudo de caso”. Este trabalho tem como objetivo reconhecer de que forma o conhecimento profissional do professor de matemática influencia a abordagem da probabilidade em suas aulas. Para isso, o autor realizou um estudo de caso, com seis professores, utilizando como coleta de dados a entrevista semi-estruturada. O autor evidenciou que o ensino da probabilidade caracterizado por uma visão determinista da Matemática (enfoque formal) torna-se um entrave ou um obstáculo uma vez que se desenvolve em perspectivas distintas que estão dialeticamente ligadas.

Todo esse relacionamento com a probabilidade me motivou a realizar minha monografia nessa área, pois queria encontrar novas formas para a introdução deste conceito. Ao analisar alguns livros didáticos do ensino médio, pude diagnosticar que esses apresentam a introdução do conceito de probabilidade apenas pela visão laplaciana (clássica).

Ao ter contato com a dissertação de Ismael Silva (2002), intitulada “Probabilidades: a visão Laplaciana (clássica) e a visão frequentista na Introdução do conceito”, comecei a perceber uma nova possibilidade para a introdução do conceito de probabilidade integrando a duas visões - clássica e frequentista. O trabalho do autor tem como objetivo o estudo e aplicação de uma seqüência didática, na qual as noções que levam a definição de probabilidade são abordadas através de atividades ou situações-problema que integrem as concepções clássica e frequentista de probabilidade. Dessa forma, o autor espera que os alunos tenham uma aprendizagem mais profunda e mais significativa.

Ao refletir sobre a viabilidade da introdução do conceito de probabilidade por meio de situações-problema que utilizem as visões clássica e frequentista, decidi analisar a diferença entre as duas concepções, apontando aspectos positivos e negativos de cada uma delas. Dessa forma, minha questão de pesquisa foi se consolidando.

Assim, a questão norteadora deste trabalho é: “Quais são as principais diferenças da visão clássica e da frequentista na introdução do conceito de probabilidade na opinião de professores e pesquisadores?”

O objetivo principal desta pesquisa é identificar aspectos relacionados ao ensino do conceito de probabilidade na visão clássica e na visão frequentista por meio de uma entrevista a professores e professores/pesquisadores de educação matemática.

# Capítulo II: A visão clássica e a visão frequentista

## 1. Introdução

Neste capítulo apresento as diversas formas de introdução do conceito de probabilidade, porém meu foco principal será em cima de duas delas: a visão clássica e a frequentista. Faço um panorama sobre a origem dos cálculos de probabilidade, apresento a origem da visão frequentista e da visão clássica, alguns exemplos de cada uma delas e as diferenças das duas visões na introdução do conceito de probabilidade. Discuto também a noção de acaso.

## 2. Um Estudo histórico da probabilidade

Apresento alguns dos principais aspectos relacionados ao desenvolvimento da probabilidade.

Segundo Silva (2002), os primeiros indícios de probabilidade na história, se deram através dos jogos de azar. Até pouco tempo atrás, era comum atribuir a decisão de qualquer evento aos deuses ou alguma coisa sobrenatural. Nessa época ainda não atribuíam ao acaso essas ocorrências.

Foram precisos muitos anos para que notássemos a ligação entre a matemática e os jogos de azar. Segundo Silva (2002), isso se deve a três pontos principais:

- os primeiros dados não possuíam um balanceamento perfeito: isso impedia que fosse percebida alguma regularidade dos eventos possíveis;

-é fato que as idéias de acaso e não determinismo foram estranhas ao raciocínio humano durante muitos séculos;

-os acontecimentos terrenos eram dirigidos por “Deus” ou pelos deuses: assim se o resultado do lançamento de um dado era este ou aquele, isto era simplesmente a manifestação da vontade divina.

Ainda segundo Silva (2002), um poema medieval intitulado *De Vetula*, que continha cálculos sobre o lançamento de três dados, pode ser considerado o primeiro trabalho que se tem conhecimento. Esse poema foi amplamente difundido no século XIII, evidenciando assim que os europeus já possuíam conhecimento de cálculos probabilísticos elementares.

O desenvolvimento das idéias que formam a base da teoria das probabilidades ocorreu com os trabalhos de Gerolamo Cardano (Jérôme Cardan, 1501-1576) “*De ludo Aleae*” e Galileu Galilei (1564-1642) “*Sulla Scoperta dei Dadi*” (Silva, 2002).

Somente 100 anos depois de Cardano escrever sua obra “*De ludo Aleae*” (em torno de 1550) considerada o marco inicial da teoria das probabilidades, que foi dado o próximo passo nessa área (Silva, 2002).

Na França, Antoine Gambaud, o *Chevalier de Mére*, estava às voltas com problemas como: “Dois jogadores de igual habilidade resolvem interromper o jogo antes do término. Sendo conhecido o número de pontos de cada um até essa altura, em que proporção devem ser divididas as apostas?”. Gambaud decidiu recorrer ao grande matemático francês Blaise Pascal (1623-1662), o qual se interessou tanto com as questões, que começou a iniciar correspondência com seu conterrâneo Pierre de Fermat. Desse episódio resultaram-se as bases da moderna teoria das probabilidades (Silva, 2002).

Na famosa carta de 29 de julho de 1654 destinada a Fermat, Pascal descreveu a famosa fórmula da probabilidade de um evento A:

$P(A) = \frac{\text{total de casos favoráveis}}{\text{total de casos possíveis}}$ . Nesta carta, pascal também apresenta seu método

de resolução para o problema proposto por Gambaud (Coutinho, 1994).

Em 1657, influenciado pelos trabalhos de Pascal, Christian Huygens (1629-1695) publica *De ratiocínius in ludo aleae*, no qual introduz explicitamente e utiliza a noção de esperança matemática (Coutinho, 1994).

Segundo Coutinho (1994), a visão frequentista de Probabilidade foi iniciada por Jacques Bernoulli (1654-1705) em sua "*Ars Conjectandi*" (1713), quando calcula a probabilidade se apoiando na frequência com que os fatos, eventos e experimentos ocorrem, após um grande número de repetições. Bernoulli justifica este processo através da "lei dos grandes números", conhecida pelo Teorema de Bernoulli.

Aqui segue uma tradução moderna do teorema de Bernoulli:

"Se  $p$  é a probabilidade de um evento, se  $m$  é o número de ocorrências do evento em  $n$  experiências, se  $\varepsilon$  é um número positivo arbitrariamente pequeno, e se  $P$  é a probabilidade de que a desigualdade  $\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon$  esteja satisfeita, então  $\lim P = 1$ ."

(Boyer, 1996, pág. 308)

Segundo Coutinho (1994), em 1763, Thomas Bayes (1702-1761) escreveu *La doctrine dès chances*, na qual introduz uma nova concepção de probabilidade, matematicamente semelhante á de Pascal.

Um dado muito importante na história da probabilidade foi o questionamento feito Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), sobre a independência entre duas jogadas consecutivas de uma moeda:

(...) no curso normal da natureza, o mesmo evento (qualquer que seja ele) ocorre muito raramente duas vezes consecutivas, mais raramente

três e quatro vezes, e jamais cem vezes consecutivas (D'Alembert, 1784 apud Coutinho, 1994, pág. 18).

Segundo Silva (2002), no início do século XVIII a teoria das probabilidades teve inúmeros devotos, e desses, um dos mais importantes foi Abraham de Moivre (1667-1754). De Moivre fez uma quantidade de pesquisa considerável, um exemplo seria um longo trabalho sobre as leis do acaso publicado em 1711 e em edições posteriores.

Em 1785, Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, o Marquês de Condorcet (1743-1794), tentou utilizar as técnicas probabilistas na tentativa de fundar uma matemática social ao publicar *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix* (Coutinho, 1994).

Porém, foi somente com Pierre Simon Laplace (1749-1827) e suas obras "Teoria Analítica da Probabilidade" (1812) e "Ensaio Filosófico sobre probabilidade" (1825), entre outros trabalhos, que a probabilidade entrou de fato no quadro matemático (Coutinho, 1994).

Segundo Coutinho (1994), Laplace desenvolveu seu modelo matemático apoiando-se em dez princípios dispostos como axiomas e definições, traduzindo sua visão do modelo apresentado por Pascal. O primeiro princípio afirma que a probabilidade é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. O segundo princípio trata de casos em que os resultados não têm a mesma chance de ocorrer. Afirma que primeiro determina-se suas possibilidades respectivas, para depois encontrar a probabilidade que será a soma das possibilidades de cada caso favorável. No sexto princípio, faz uma reflexão sobre as probabilidades condicionais e enuncia a fórmula impropriamente devida a Bayes.

Henri Poincaré (1854-1912) deu ao conceito de acaso um enfoque moderno, conectando-o à complexidade dos fenômenos observados, sem, entretanto, tentar modificar os instrumentos fundamentais do cálculo das probabilidades (Coutinho, 1994).

Em 1914, Emile Borel (1871-1956), foi um dos pioneiros a realizar uma axiomatização do cálculo de probabilidade ao concluir sua obra *Le Hasard* (Coutinho, 1994).

A teoria de Von Mises, que aproxima a noção de probabilidade à de frequência experimental, dentro de sua teoria dedutiva, supõe essencialmente a probabilidade definida como limite de frequências (Coutinho, 1994, pág.24).

No que se refere à obra de Henri Lebesgue (1875-1941), a elaboração de uma Teoria de Integração, fundamentada pela Teoria da Medida de Borel, colocou a Análise Matemática em uma perspectiva revolucionária, mesmo que Lebesgue não tenha desenvolvido suas consequências e aplicações à Teoria das Probabilidades (Coutinho, 1994, pág.24, 25).

As hipóteses formuladas por Wilard Gibbs (1839-1903) para explicar o movimento molecular dos gases lançaram as bases da teoria da probabilidade do século XX (Silva, 2002, pág.42).

Por fim, Andrei Kolmogorov (1903-1987) que fornece uma apresentação axiomática à probabilidade fundamentada na teoria dos conjuntos.

Kolmogorov percebeu que seria possível, através da associação de probabilidade e medida, utilizar todo o conjunto de resultados conhecidos neste domínio (devidos a Borel e Lebesgue) e, por outro lado, relegar à etapa das aplicações o difícil problema da relação com o real (Coutinho, 1994, pág.25).

Nesses tempos, identificam-se inúmeras abordagens teóricas, mostrando assim a relação da matemática com o acaso e os obstáculos de construção presentes no percurso desse desenvolvimento.

### 3.A introdução do conceito de probabilidade

GODINO et AL (1996) apud SILVA (2002), relata que na obra "*Azar y Probabilidad*" é possível constatar diversas formas de se conceber o conceito de probabilidade, são elas:

- Usos informais da Probabilidade
- A Teoria Clássica de Probabilidade
- Teorias Lógicas
- Probabilidade frequentista ou empírica
- Probabilidade Subjetiva
- Probabilidade Formal

Como podemos observar existem diversas formas de se introduzir o conceito de probabilidade. Para este trabalho, iremos analisar somente as visões clássica e frequentista. Os motivos desta escolha referem-se a:

- no ensino médio e no ensino fundamental, a probabilidade quase sempre é introduzida pela visão clássica e, raramente, é introduzida pela visão frequentista, ou por uma abordagem que mescle as duas visões;
- analisando livros e materiais didáticos do ensino fundamental II e médio, pudemos perceber uma abordagem para a introdução do conceito de probabilidade que prioriza exclusivamente a visão clássica;
- lendo dissertações e monografias, pudemos evidenciar que algumas abordavam a introdução do conceito de probabilidade pela visão frequentista, ou por uma abordagem que mesclasse as duas visões.

Geralmente para a introdução do conceito de probabilidade os livros trabalham apenas com problemas relacionados a jogos de azar, ex: o lançamento de dados,

moedas, etc..., eventos com a mesma chance de ocorrer, ou seja, eventos equiprováveis. Para encontrar a probabilidade da ocorrência desses eventos, os livros se apóiam basicamente na visão clássica de probabilidade. Com essa abordagem, podemos passar a impressão aos alunos de que a única maneira de calcular a probabilidade de um evento ocorrer, é utilizando a visão clássica.

Segundo Coutinho, Gonçalves e Morais (2004), a definição clássica de probabilidade só se aplica aos eventos que possuem a mesma chance de ocorrer, ou, eventos equiprováveis. Sendo este caso o da maioria que envolve probabilidade nos jogos de azar. Porém, os autores afirmam que, estes jogos repetidos inúmeras vezes nos levam a considerar a probabilidade como sendo a frequência relativa, ou seja, o número de vezes que um evento acontece em um grande número de repetições, todas em iguais condições.

O professor pode superar essa dificuldade apresentando um exemplo em que a probabilidade é calculada dessa maneira, nesse caso, pela visão frequentista. Segundo Coutinho (1994), podem ser realizadas e analisadas várias experiências aleatórias, partindo de dados experimentais obtidos pelos próprios alunos, para que eles compreendam esse conceito como sendo a frequência limite de um evento, quando o repetimos um grande número de vezes. Alguns exemplos de atividades podem ser encontrados em sua dissertação, Coutinho (1994).

### **3.1-A visão clássica de probabilidade**

Segundo Coutinho (1994), podemos dizer que a visão clássica de probabilidade que conhecemos hoje se originou na carta que Pascal enviou a Fermat no dia 29 de julho de 1654 em que ele descreveu a famosa fórmula de probabilidade de um evento A:

$$P(A) = \frac{\text{total de casos favoráveis}}{\text{total de casos possíveis}}.$$

Segundo Eves (2004), nesta carta Pascal apresenta seu método de resolução para o problema dos pontos, cujo enunciado era: “Determine a divisão das opostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido o marcador no momento da interrupção e o número de pontos necessários para ganhar o jogo”. Pascal resolveu o problema dos pontos utilizando seu “triângulo aritmético”.

Porém foi somente com Pierre Simom LaPlace (1749-1827) e suas obras “Teoria Análítica da Probabilidade” (1812) e “Ensáio Filosófico sobre probabilidade” (1825), entre outros trabalhos, que a probabilidade entrou de fato no quadro matemático (Coutinho, 1994).

Segundo Coutinho (1994), Laplace desenvolveu seu modelo matemático apoiando-se em dez princípios dispostos como axiomas e definições, traduzindo sua visão do modelo apresentado por Pascal. O primeiro princípio diz que a probabilidade é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. O segundo princípio trata de casos em que os resultados não têm a mesma chance de ocorrer, e afirma que primeiro determina-se suas possibilidades respectivas, para depois encontrar a probabilidade que será a soma das possibilidades de cada caso favorável. No sexto princípio, faz uma reflexão sobre as probabilidades condicionais e enuncia a fórmula impropriamente devida a Bayes.

Segundo Silva (2002, pág. 54), Laplace acreditava num determinismo absoluto: “Uma coisa não pode começar a ser sem uma causa que a produza” e afirma que “a probabilidade é relativa em parte a nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos”. Segundo Eves (2004, pág. 487), Laplace cita que: “Em última instância, a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números.

Na concepção clássica a probabilidade de um evento ocorrer é definida pela razão entre o número de casos favoráveis pelo número de casos totais, desde que todos os resultados sejam equiprováveis. Segundo Coutinho, Gonçalves e Morais (2004), a definição clássica de probabilidade só se aplica aos eventos que possuem a mesma chance de ocorrer, sendo este caso o da maioria que envolve probabilidade nos jogos de azar.

Segundo Silva (2002, pág. 54), a teoria das probabilidades deve mais a Laplace do que a qualquer outro matemático.

Segundo Eves (2004, pág. 486), Laplace produziu seus melhores trabalhos nas áreas de mecânica celeste, probabilidade, equações diferenciais e geodésia.

Segundo Silva (2002), Laplace fez também grandes descobertas no campo da mecânica celeste, por exemplo, completando o trabalho de Newton no sentido de mostrar que todos os movimentos dos corpos do sistema solar são dedutíveis da lei da gravitação. Segundo Eves (2004, pág. 486), Laplace ganhou o cognome de “Newton da França” com os cinco volumes do *Traité de Mécanique Céleste* (cinco volumes, 1799-1825).

Segundo Silva (2002), a mecânica celeste teve uma forte contribuição para que a teoria das probabilidades viesse a ser uma das preocupações científicas de Laplace. Afinal, em suas observações, entre outras coisas, determinava a probabilidade de erros em dados de observações experimentais. Mas outros tópicos, como por exemplo a demografia, também o levou a pesquisar sobre o tema.

...Neste trabalho utilizo o termo “visão clássica” de probabilidade, tendo como base o primeiro princípio proposto por Laplace, em que define a probabilidade como sendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

## 3.2-A visão Frequentista de Probabilidade

Segundo Coutinho (1994), a visão frequentista de Probabilidade foi iniciada por Jacques Bernoulli (1654 – 1705) em sua “Ars Conjectandi” (1713), quando calcula a probabilidade se apoiando na frequência com que os fatos, eventos e experimentos ocorrem, após um grande número de repetições. Bernoulli justifica este processo através da “lei dos grandes números”, conhecida pelo Teorema de Bernoulli.

Segundo Coutinho, Gonçalves e Morais (2004), o conceito matemático que está por traz da visão frequentista é o de limite. Segundo os autores, “probabilidade é definida como sendo o limite das frequências relativas de um evento quando temos um número de repetições tendendo ao infinito ( $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = P(X)$ ”. O termo frequência é utilizado pelos autores com sendo o número de vezes que um valor aparece no domínio de uma classe.

Segundo Coutinho, Gonçalves e Morais (2004), se A é o evento em que estamos interessados, a probabilidade de A é dada por:  $P(A) \cong \frac{\text{número de vezes que A ocorreu}}{\text{número total de repetições do experimento}}$  (onde o número de repetições do experimento deve ser relativamente grande). Isto nos leva a definição apresentada anteriormente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(A) = P(A)$ .

Um exemplo de atividade pode ser encontrado em Coutinho, Gonçalves e Morais (2004, pág.5, 6). Segundo os autores, a atividade denominada Cesto de lixo é uma adaptação da atividade desenvolvida por Coutinho (2001). A atividade consiste em lançar bolinhas (de gude, ou papel) em direção ao cesto, e realizar uma contagem do número de bolinhas totais lançadas e do número de bolinhas que caíram dentro do cesto. A atividade também pode ser simulada em um ambiente informatizado, utilizando o software cabri II.

## 4-A noção de acaso

Segundo Entler (1997), “a complexidade do conceito de acaso já pode ser deduzida da quantidade de palavras que surgem em nosso cotidiano e que se relacionam ou se confundem com ele: sorte, azar, coincidência, acidente, contingência, indeterminação, destino, causa fortuita, aleatoriedade”. Porém, o autor afirma que não é um bom caminho definir tais palavras para definir o acaso, pois suas relações são obscuras, elas não se complementam e nem necessariamente se assemelham. Segundo o autor, cada vez mais o acaso está sendo o centro de debates na filosofia, matemática, física e biologia, assumindo assim um caráter interdisciplinar. Mas mesmo no interior de cada disciplina, estamos longe de poder observar um consenso sobre o significado desse termo.

Segundo Entler (1997), o que todas as definições parecem ter em comum, é o fato de que o acaso é sempre denominado a partir da impossibilidade de localizar as determinações de um fenômeno. Daí, outros fatores decorrem: a imprevisibilidade desse fenômeno, a falta de controle sobre ele, etc. Mas quando as várias disciplinas que abordam o acaso, ou ainda, quando nosso julgamento cotidiano afirma essa impossibilidade de determinação do fenômeno, pode-se estar dizendo coisas distintas sobre o fenômeno: as causas do fenômeno são desconhecidas, as causas do fenômeno são desconexas, ou o fenômeno não possui causa. Segundo o autor estas três situações não correspondem a classes de diferentes fenômenos, mas três fenomenologias, três posições epistemológicas, ou seja, três maneiras de abordar o acaso.

### 4.1-Desconhecimento das causas

Segundo Entler (1997), existe um princípio básico da filosofia que, em geral, não temos muita dificuldade para intuir, que é o de que todo efeito tem uma causa. E se algo imprevisto ocorre, posso denominar o acaso sem que isso signifique que o fenômeno escapou as determinações que regem o universo. Aqui segundo o autor, o acaso se refere a um lapso do conhecimento e não da natureza.

Exemplo: Se jogo uma moeda para o alto, não posso prever o lado em que ela irá cair porque não é possível localizar o conjunto de forças que agem sobre ela. No entanto, podemos afirmar que sua posição final tem um causa (Entler, 1997).

## 4.2-Cruzamento de séries causais independentes

Segundo Entler (1997), uma série causal é a cadeia de causas e efeitos interligados: um fenômeno que determina um outro, que determina um outro..., e juntos eles constituem uma série causal. Dentro dela, pode-se localizar as razões da existência de cada fenômeno.

Segundo o autor, duas séries são consideradas independentes uma da outra quando falta um elo de determinação entre os fenômenos que compõe cada uma delas, ou seja, não se pode observar numa série nada que possa ter determinado uma ação sobre a outra. Ex: hoje tem eclipse da lua, e furou o pneu do meu carro; são fenômenos que não possuem uma ligação, ou seja, fenômenos desconexos. Segundo Entler (1997), esta noção de acaso foi elaborada pelo matemático Antoine Augustin Cournot.

## 4.3-Ausência de causas

Entler (1997) afirma que a ausência de causas parece ser o significado mais popular do acaso. Quando alguém diz que algo aconteceu por acaso, quer dizer, ainda que

pouco refletidamente, que não há um “por quê” a ser considerado. Ainda que esta definição pareça conter o significado literal de acaso, ela corresponde também à situação mais difícil de compreender no âmbito de nossa natureza. Como é possível um fenômeno não ter causa?

Segundo o autor, uma descrição clássica desse acaso absoluto aparece no pensamento do filósofo romano Lucrécio.

Segundo Entler (1997), o físico francês Rémy Lestienne, no livro *Le hasard créateur*, (1993), aponta no pensamento de uma série de teóricos esse acaso absoluto: “o acaso, por definição, recusa todo recurso a um antecedente: podem ser ditos casuais, em sentido estrito, apenas os eventos que não são determinados por nenhuma causa”.

Como podemos evidenciar no decorrer deste item 4, existem muitas definições distintas de acaso. O termo em questão, é bem complexo, e, estudado por uma série de disciplinas, mas temos muito a que pesquisar sobre esse curioso termo.

## 5- As diferenças da visão clássica e da visão frequentista

A seguir apresentaremos as principais diferenças da visão clássica e da visão frequentista na introdução do conceito de probabilidade:

-Uma das características da visão clássica é trabalhar sempre com eventos equiprováveis, já a visão frequentista trabalha com eventos que não possuem a mesma chance de ocorrer. Porém, como já dito anteriormente neste trabalho, segundo Coutinho, Gonçalves e Morais (2004), ao considerar-mos um evento equiprovável e o repetirmos um número significativo de vezes, podemos considerar a probabilidade como sendo a relação entre o número de vezes que o evento ocorreu com o número de vezes

do experimento ocorrido. Portanto, podemos concluir que a visão frequentista também pode ser aplicada a eventos equiprováveis, e que, a partir da visão clássica podemos chegar na visão frequentista, ou seja, uma não exclui a outra. Exemplo: No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de se obter uma face cara? Lance uma moeda 30 vezes, anote os resultados obtidos, e determine a probabilidade de ocorrer uma face cara, com base nos dados que você obteve nos lançamentos.

-A visão frequentista possui uma maior proximidade com a realidade dos alunos, segundo Coutinho (1994), facilitando assim o aprendizado, e possuindo um caráter experimental.

# Capítulo III- Metodologia

## 1- Introdução

Neste capítulo apresentamos um levantamento de estudos sobre o tema, e uma análise há livros e materiais didáticos que realizamos.

Apresentamos a entrevista como método de coleta de dados da pesquisa e o seu respectivo tipo. Relatamos as bases para as perguntas realizadas na entrevista com alguns comentários e objetivos. Informamos também quem são os sujeitos dessa pesquisa.

## 2-Levantamento de estudos sobre a temática

Realizamos um levantamento de estudos sobre probabilidade com o intuito de nos aprofundarmos um pouco mais no assunto, e evidenciarmos o que as principais pesquisas dizem sobre o tema em questão.

Como já dito no capítulo I, as principais pesquisas abordam a probabilidade se utilizando da visão frequentista, e isso nos motivou a analisar esta visão, que juntamente com visão clássica, fizeram a temática desta pesquisa.

## 3-Análise de livros e materiais didáticos

Realizamos uma análise a livros e materiais didáticos com o objetivo de investigar como eles introduzem o conceito de probabilidade? Se eles abordam a visão frequentista?

Analisamos dois livros didáticos que são utilizados nas escolas do Estado de São Paulo. Um deles é o livro “Matemática aula por aula”, 2ª série do ensino médio, dos autores Benigno Barreto Filho e Claudio Xavier da Silva. O outro é o livro “Matemática”, 2ª série do ensino médio, das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Outro documento que analisamos foi o caderno de atividades proposto pelo estado de São Paulo, da 2ª série do ensino médio, relativo ao 3º bimestre.

Os critérios principais para a escolha do livro “Matemática aula por aula” são: primeiro por ele ser aprovado pelo PNLEM (Programa Nacional do Livro didático do Ensino Médio), e segundo por estar presente sempre em grande escala em diversas escolas estaduais de São Paulo por onde lecionamos.

O livro “Matemática aula por aula” introduz o conceito de probabilidade através da visão clássica, não mencionando a autoria da fórmula. Não menciona nem propõe alguma atividade sobre a visão frequentista, podendo passar assim ao aluno a imagem errônea de que o único meio de calcular a probabilidade de um evento é utilizando-se da visão clássica.

Os critérios principais para escolha do livro “Matemática” são: primeiro por ele ser aprovado pelo PNLEM (Programa Nacional do Livro didático do Ensino Médio), pelas suas autoras serem conhecidas por seus trabalhos na área do ensino da matemática e por ele por não estar presente na maioria das escolas em que lecionei, ou seja, não ser escolhido como livro para se trabalhar na escola.

O livro “Matemática” introduz o conceito de probabilidade através da visão clássica, apresentando a fórmula e mencionando a sua autoria. Apresenta alguns exemplos, e posteriormente faz uma citação muito interessante, em que afirma que a probabilidade é uma medida de tendência e não de certeza. Além disso, faz uma conexão entre a visão clássica e a visão frequentista implicitamente, quando afirma que, ao repetirmos um número grande de vezes o lançamento de um dado perfeito, desejando obter uma

face par, a tendência 1: 2 se revelará, significando que há 50% de chance de obtermos face par.

O livro “Matemática” após solicitar ao aluno alguns exercícios, no final do tópico de probabilidade, apresenta uma atividade intitulada probabilidade experimental. Nesta atividade, como primeira tarefa, solicita ao aluno lançar uma moeda 20 vezes e observar os seus resultados. A partir, daí, propõe determinar a probabilidade, com base nos resultados obtidos nos lançamentos. Podemos assim concluir, que o livro apresenta a visão frequentista, porém com o nome de probabilidade experimental.

Os critérios principais para a escolha do caderno de atividades destinado aos alunos da 2ª série do ensino médio do Estado de São Paulo, são: por estar sendo realizada um incentivo muito forte para a utilização destes cadernos e por esses terem sido alvo de recentes críticas.

...O caderno de atividades do aluno apresenta o conceito de probabilidade através de um jogo que leva o aluno a definição clássica de probabilidade, sem a mencioná-la. A seguir solicita ao aluno algumas situações-problema para fixação do conceito, evoluindo rapidamente para a probabilidade condicional. Não menciona nem propõe alguma atividade sobre a visão frequentista.

## 4 - A Coleta de dados da pesquisa

A coleta de dados dessa pesquisa se dará em forma de entrevista, que será destinado aos sujeitos. Temos como objetivo entrevistar professores e professores/pesquisadores de matemática a respeito das visões clássica e frequentista de probabilidade.

### 4.1-Tipo de entrevista

O tipo de entrevista que adotamos para nossa pesquisa é a entrevista reflexiva, na qual nos apoiamos nas idéias de Szymanski (2002). A entrevista reflexiva possui características semelhantes as da entrevista semi-estruturada e semi-dirigida, assim denominada por outros autores e por Szymanski (2002).

## 4.2. Entrevista reflexiva

A entrevista reflexiva segundo Szymanski (2002), se difere da convencional pois consideramos a interação social da mesma, na qual a natureza das relações entrevistador/entrevistado influencia tanto o seu andamento, como o tipo de informação que aparece.

Já a entrevista convencional, podemos dizer que seria um encontro entre duas pessoas, de modo que uma delas obtenha informações sobre um determinado assunto.

Na entrevista convencional consideramos apenas o aspecto neutro de coleta de dados e a posição passiva do entrevistado, considerado como um mero informante (Minayo, 1996 apud Szymanski, 2002).

Na entrevista reflexiva segundo Szymanski (2002), o entrevistador, que esta querendo conhecer algo, utiliza-se de um tipo de interação humana com quem é entrevistado, que possui um determinado conhecimento, mas que irá apresentá-lo de forma única naquele momento. Nesse encontro pode-se também construir um novo conhecimento, um conhecimento inesperado, sempre buscando uma horizontalidade nas relações de poder, ou seja, levando em conta o conhecimento do entrevistado.

O termo reflexividade é utilizado por Szymanski com o sentido de refletir a fala de quem foi entrevistado.

Em relação ao desenvolvimento da entrevista, Szymanski (2002) afirma, que como procedimento de pesquisa, podemos considerar uma entrevista semi-dirigida, a mesma sendo realizado em no mínimo dois encontros, individuais ou coletivos. Uma entrevista que não possui um roteiro fechado, mas com objetivos claros.

A autora apresenta também um exemplo dos diversos momentos de uma entrevista. São eles: contato inicial, atividades aquecimento, questão geradora, as expressões de compreensão do pesquisador, as sínteses, as questões de esclarecimento, focalizadoras, de aprofundamento e a devolução (Szymanski, 2002).

### 4.3. Objetivos da entrevista

Escolhi o tipo de entrevista reflexiva pois creio que a partir da interação humana vivenciada pelos protagonistas entrevistador/entrevistado, podem surgir idéias novas, novos rumos ou aspectos que não tinham sido previstos. Enriquecendo assim a pesquisa como um todo.

Outro aspecto que fez jus a minha escolha, foi permitir que o entrevistado tenha uma participação ativa no momento da entrevista, pois em minha pesquisa não preciso de meros informantes, e sim da colaboração de pesquisadores e futuros pesquisadores em educação matemática, no caso dos professores da educação básica.

O objetivo principal da minha entrevista é encontrar informações referentes as diferenças das visões clássica e frequentista e as estratégias utilizados pelos professores na introdução do conceito de probabilidade.

### 4.4. A Entrevista:

Ai segue o roteiro que utilizei para realizar a entrevista com os professores e acrescento também alguns comentários e objetivos sobre as questões.

Parte 1: Perguntas sobre a formação dos entrevistados

**1-Qual é sua formação? Há quanto tempo leciona?**

Escolhi a questão 1 pois desejo diagnosticar qual é o nível da formação e da experiência dos entrevistados.

**2-Para quais níveis de ensino leciona?**

A minha escolha a essa questão se deve ao fato de evidenciar para quais níveis de ensino os entrevistados lecionam, e assim poder supor se os mesmos introduziram o conceito de probabilidade neste ano.

**3-Realiza algum tipo de pesquisa na área da educação matemática? Se sim, comente a respeito.**

Escolhi a questão 3 com intuito de diagnosticar se os sujeitos realizam pesquisas na área da educação matemática, ou em alguma área da matemática.

Parte 2: Perguntas sobre probabilidade:

**4-Você lembra de ter estudado sobre probabilidade no ensino fundamental? E no ensino médio?**

**5-Você cursou a disciplina Probabilidade e Estatística na graduação?**

**6-Você julga adequado/possível introduzir o conceito de probabilidade em uma sala do segundo ano do ensino médio?**

**7-Se sim, quais seriam suas estratégias?**

**8-E seria possível para uma sala do sétimo ano do ensino fundamental?**

**9-Se sim, qual seria a estratégia? Seria diferente da adotada no ensino médio? Se sim, por que?**

**10-Você conhece a visão clássica de probabilidade? Comente.**

**11-Você conhece a visão frequentista de probabilidade? Comente.**

**12- Na sua opinião, quais seriam as principais diferenças entre as duas visões?**

Escolhi as questões da parte 1, pois desejo evidenciar informações referentes à formação e a experiência profissional dos sujeitos. Pretendo criar um clima de liberdade aos entrevistados ao propiciar momentos em que eles argumentarão sobre sua formação.

Na parte 2, tenho como objetivo diagnosticar se os entrevistados se recordam de ter estudado probabilidade na educação básica. Verificar também se os mesmos conhecem as visões clássica e frequentista, quais seriam suas principais estratégias para introduzir o conceito de probabilidade em uma sala do segundo ano do ensino médio, em uma sala do sétimo ano do ensino fundamental e comparar as estratégias. Evidenciar também quais seriam as principais diferenças das duas visões na opinião dos entrevistados.

## **5-Os sujeitos da pesquisa**

Os sujeitos da pesquisa são três professores e adotei a opção de omitir os nomes dos entrevistados. A primeira professora entrevistada foi chamada de P1, a segunda de P2 e a terceira de PQ (professora pesquisadora).

A primeira professora entrevistada P1 leciona matemática e trabalha em duas escolas em São Paulo no ano de 2010, uma pública e outra privada. Como P1 leciona para a segunda série do ensino médio e temos interesse em saber como trabalha a probabilidade para esta série, a escolhemos para a entrevista.

A segunda professora P2 leciona matemática no ano de 2010 para a segunda série do ensino médio em uma escola pública.

A terceira entrevistada PQ, leciona matemática no ensino superior em uma instituição privada.

# Capítulo IV- Resultados

## 1. Realização, transcrição e análise da entrevista

Apresento momentos de cada entrevista, indicando pontos convergentes e divergentes dos entrevistados. Começo apresentando as respostas da parte 1 da entrevista em forma de texto.

### 1.1.Parte-1

#### Entrevista com a professora 1-P1

A primeira professora P1, possui formação em licenciatura plena em matemática, leciona a disciplina há seis anos em escolas estaduais de São Paulo e há um ano e meio em uma escola particular também em São Paulo. P1 leciona em uma escola estadual para o ensino médio (segundo e terceiro ano) e em uma escola particular para o segundo ano do ensino médio e para o nono ano do ensino fundamental. P1 não realiza nenhuma pesquisa na área da educação matemática.

#### Entrevista com a professora 2-P2

A segunda entrevistada P2 possui como formação licenciatura em matemática e leciona há vinte e quatro anos em escolas estaduais. No ano da pesquisa P2 lecionava tanto ao ensino fundamental II como ao ensino médio. P2 não realiza nenhuma pesquisa na área da educação matemática.

## Entrevista com a professora pesquisadora - PQ

A professora pesquisadora PQ possui como formação licenciatura e bacharelado em matemática, mestrado em matemática pura e doutorado em educação matemática, sendo sua tese relacionada com a área da probabilidade. Leciona matemática há trinta e quatro anos, sempre para alunos do ensino superior. PQ participa de grupos de pesquisa, porém não possui nenhuma pesquisa específica na área da educação matemática em que trabalha no ano de 2010, e, enfatiza que sua maior pesquisa é a sala de aula.

### 1.2.Parte-2

Apresento a análise da entrevista em forma de texto, onde relato trechos da entrevista.

Em relação ao fato de os entrevistados lembrarem de ter estudado sobre probabilidade no ensino fundamental ou médio, a professora P1 afirma não se lembrar ter estudado esses assuntos na educação básica. Já P2, afirma se lembrar de ter estudado esse assunto apenas no ensino médio. PQ relata que seu ensino fundamental e médio foi de ótima qualidade, porém não se recorda de ter estudado o assunto em seus anos de escola.

Como podemos evidenciar, o ensino de probabilidade ainda não é muito trabalhado no ensino fundamental. Geralmente é apenas abordado no ensino médio.

Quando questionadas sobre se cursaram na graduação a disciplina probabilidade e estatística, P1 afirma se lembrar de ter estudado o assunto. P2, relata não se recordar e PQ cursou a disciplina sem muitas dificuldades.

Em relação ao fato de os entrevistados julgarem adequado introduzir o conceito de probabilidade em uma sala do segundo ano do ensino médio, P1 afirma achar muito adequado. P2, além de achar adequado, justifica sua posição afirmando que o conteúdo em questão é o programado para o segundo ano do ensino médio. PQ, além de achar adequado, afirma com clareza, julgar mais importante, já começar a introduzir o assunto, ou seja começar com as noções de estatística, a sua parte descritiva e probabilidade já nos últimos anos (sétimo, oitavo e nono ano) do ensino fundamental.

As três entrevistadas acham adequado introduzir o conceito de probabilidade há uma sala do segundo ano do ensino médio.

Quando questionadas sobre quais seriam as estratégias para introduzir o conteúdo em uma sala do segundo ano do ensino médio, P1 afirma começar com a origem ligada aos jogos de azar, utilizando situações-problema, e fazendo um paralelo com uma das possíveis e atuais conexões da probabilidade, que é com a biologia. P2 afirma introduzir o assunto começando com material concreto (dados, moedas). Relata que pode-se levar os alunos ao laboratório de informática para enriquecer um pouco a aprendizagem, porém não explica o que seria essa ida ao laboratório. PQ afirma começar sempre com estratégias que favoreçam o interesse dos alunos, um exemplo seriam os jogos. Relata que no ensino médio o professor deve trabalhar apenas as duas visões (clássica e frequentista) e não outras visões, como por exemplo o modelo axiomático de calcular probabilidade. PQ afirma ser este modo muito complexo para o ensino médio.

Podemos evidenciar com esses comentários, que PQ possui um vasto conhecimento matemático, particularmente sobre probabilidade, conhecendo diversas formas para o cálculo e introdução do conceito de probabilidade.

Podemos evidenciar que duas professoras (P1 e P2) utilizam como estratégia começar com a origem ligada aos jogos de azar.

Em relação ao fato de ser possível os entrevistados introduzirem a probabilidade para uma sala do sétimo ano do ensino fundamental, P1 afirma ser possível introduzir qualquer conteúdo matemático no ensino fundamental. P2 relata ser possível, porém com uma abordagem bem básica, um exemplo seriam os jogos simples de azar. PQ afirma ser muito adequado introduzir o assunto em salas do sétimo, oitavo e nono ano do ensino fundamental.

As três entrevistadas acham adequado introduzir a probabilidade para uma sala do sétimo ano ensino fundamental.

Quando questionadas sobre qual seria a estratégia que usariam e se seria diferente da adotada no ensino médio, P1 utilizaria as mesmas já utilizadas por ela no ensino médio. P2 afirma que mudaria apenas o nível de abordagem que daria no assunto há uma sala do sétimo ano do ensino fundamental, e não as estratégias. PQ relata que no ensino fundamental introduziria as noções aos poucos, e que é por meio da visão frequentista ou experimental que introduziria a probabilidade teórica (visão clássica). PQ ressalta que no ensino fundamental trabalharia mais a visão frequentista.

Podemos evidenciar que P1 e P2 utilizariam as mesmas estratégias já utilizadas ao ensino médio para introduzir o assunto há uma sala do sétimo ano do ensino fundamental. P2 mudaria apenas o nível da abordagem.

Em relação ao fato de os entrevistados conhecerem a visão clássica de probabilidade, P1 afirma em um primeiro momento, não conhecer a definição clássica de probabilidade. Porém quando comecei a explicar um pouco do que se referia a mesma, P1 diz ensinar seus alunos com algo bem parecido, porém, com o nome de “eventos” e não números casos favoráveis e números possíveis casos possíveis. P2 quando questionada sobre a visão clássica de probabilidade, indaga se a mesma é a que aparece nos livros didáticos. Quando eu começo a mencionar do que se trata a visão em questão, P2 pergunta se seria, como eles dizem, o modo das partes? Quando questiono o que seria

esse modo, P2 me explica apresentando um exemplo de um jogo de dados, onde calculava a probabilidade através da visão clássica, porém, sem saber. Logo podemos concluir que ela conhece o assunto, porém com outro nome ou termo utilizado por alguns professores. Como PQ recomenda a visão clássica de probabilidade, podemos supor que ela conhece a mesma.

Quando questionadas sobre se conhecem a visão frequentista de probabilidade, P1 e P2 afirmam desconhecer essa visão. PQ não só apenas conhece, como recomenda para introduzir o conceito de probabilidade a visão frequentista ou experimental.

Como P1 e P2 desconhecem a visão frequentista de probabilidade, podemos supor que a mesma ainda não é muito conhecida no âmbito de professores do ensino fundamental e médio.

Em relação ao fato de quais seriam as principais diferenças entre as duas visões, como P1 e P2 desconhecem a visão frequentista de probabilidade, elas não possuem subsídios para argumentar a respeito. PQ afirma que uma das principais diferenças entre as duas visões está no aspecto experimental da visão frequentista, sendo assim por ela descrito. PQ também considera a visão clássica como algo a posteriori da visão frequentista, e como sendo mais teórica ou formal.

# Capítulo V- Considerações Finais

## 1. Considerações Finais

“O que o professor pensa sobre o ensino determina o que este professor faz quando ensina” Showers, Joyce & Bennet (1987, pg. 79) apud Welker (2010).

Primeiramente, ao realizar um levantamento de estudos sobre a temática pudemos evidenciar que possuímos uma carência de pesquisas realizadas na área da probabilidade, pois encontramos uma quantidade pequena de materiais sobre o assunto.

Como diagnosticado na análise, existem livros e materiais didáticos que abordam a introdução de probabilidade. Porém, a grande maioria desses materiais não apresenta a visão frequentista, apenas a visão clássica. Com essa abordagem, os livros e materiais didáticos podem passar aos alunos a imagem de que o único meio de calcular a probabilidade de um evento ocorrer, é por meio da visão clássica.

Segundo Welker (2010, pg. 73), o significado da probabilidade constrói-se de modo multifacetado já que estas estão dialeticamente ligadas. Para que o conceito de probabilidade se torne significativo, o mesmo deve ser abordado de diversas maneiras, ou seja, não se deve usar uma abordagem unívoca. Como evidenciamos nas respostas das professoras P1 e P2, as mesmas utilizam apenas um tipo de abordagem para introduzir o conceito de probabilidade, enfraquecendo assim a compreensão dos alunos sobre o conteúdo. Batanero (2005, pg. 16) apud Welker (2010), afirma que o ensino não

pode limitar-se a uma das diferentes perspectivas. Dessa forma, podemos concluir que apenas PQ conseguiria fazer com que seus alunos tivessem uma aprendizagem ampla.

Podemos inferir a partir das respostas dos entrevistados que a visão frequentista ainda é desconhecida pela grande maioria professores, tornando-se assim um entrave na aquisição dos conteúdos de probabilidade. Antes de realizar a especialização e mesmo após ter realizado um curso de análise combinatória e probabilidade, também desconhecíamos a visão frequentista.

Pudemos evidenciar que nossas três entrevistadas acham adequado introduzir o conceito para uma sala do sétimo ano do ensino fundamental. Porém, pudemos diagnosticar nas respostas das entrevistadas, que o conceito de probabilidade ainda não é muito trabalhado no ensino fundamental, pois nenhuma delas ensina e não se recordam de ter estudado o assunto no ensino fundamental.

Apresentamos agora nossa questão de pesquisa: “Quais são as principais diferenças da visão clássica e da frequentista na introdução do conceito de probabilidade na opinião de professores e pesquisadores?” Podemos responder a esta pergunta nos baseando na resposta da entrevista da professora pesquisadora (PQ), que afirma que uma das principais diferenças entre as duas visões é o aspecto experimental da visão frequentista. PQ também considera a visão clássica como algo a posteriori da visão frequentista, e como sendo mais teórica ou formal. Coutinho (1994) afirma que a visão frequentista possui uma maior proximidade com a realidade dos alunos, facilitando assim o aprendizado.

Uma das características da visão clássica é trabalhar sempre com eventos equiprováveis, já a visão frequentista trabalha com eventos que não possuem a mesma chance de ocorrer. Porém, segundo Coutinho, Gonçalves e Morais (2004), ao considerarmos um evento equiprovável e o repetirmos um número significativo de vezes, podemos considerar a probabilidade como sendo a relação entre o número de

vezes que o evento ocorreu com o número de vezes do experimento ocorrido. Portanto, podemos concluir que a visão frequentista também pode ser aplicada a eventos equiprováveis, e que, a partir da visão clássica, podemos chegar à visão frequentista, ou seja, uma não exclui a outra

A visão frequentista de probabilidade pode ser uma estratégia diferenciada para a introdução do conceito de probabilidade, tanto no ensino fundamental, quanto no ensino médio. Pode-se depois, apresentar a visão clássica, e assim, fazer com que o aluno tenha uma aprendizagem mais rica, e diferenciada daquele que tenha aprendido o conceito de forma unívoca, ou seja, de uma forma só.

Como diagnosticado em nossa análise de livros e materiais didáticos, a maioria deles apresenta somente a visão clássica de probabilidade, tornando assim, um desafio para o professor buscar estratégias e materiais para trabalhar a visão frequentista com seus alunos.

## Referências:

- BOYER, C.B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- CORREA, Marcio Welker. *O conhecimento profissional e abordagem do ensino da probabilidade:Um estudo de caso*". Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2010
- COUTINHO, Cileda de Q.S. *Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista – Estudo epistemológico e didático*. Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 1994.
- COUTINHO, Cileda de Q.S; GONÇALVES, Mauro Cesar; MORAIS, Tula Maria Rocha. *A análise de livros didáticos como ferramenta docente para o ensino de conceitos probabilísticos e Estatísticos*. Mini-curso, PUC ou UFP, 2004.
- ENTLER, Ronald. *A definição do acaso*. Texto acessado na internet em: [www.entler.com.br/textos/acaso\\_definição.html](http://www.entler.com.br/textos/acaso_definição.html), em 18/10/2010.
- EVES, Horvard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora Unicamp, 2004.
- SILVA, Ismael Araujo. *Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito*. Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2002.
- SZYMANSKI, Heloisa; ALMEIDA, Laurinda; PRANDINI, Regina Célia Almeida Rego. *A entrevista na pesquisa em educação: a prática reflexiva*. Brasília: Editora Plano, 2002.