

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Isabelle Coelho da Silva

Um estudo da relação entre número e quantidade na realização de operações com frações no tratado *The Ground of Artes*, de Robert Recorde

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2024

Isabelle Coelho da Silva

Um estudo da relação entre número e quantidade na realização de operações com frações no tratado *The Ground of Artes*, de Robert Recorde

Tese apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTORA em Educação Matemática, sob a orientação do Professor Doutor Gabriel Loureiro de Lima.

SÃO PAULO
2024

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

Silva, Isabelle Coelho da
Um estudo da relação entre número e quantidade na realização
de operações com frações no tratado The Ground of Artes, de
Robert Recorde. / Isabelle Coelho da Silva. -- São Paulo:
[s.n.], 2024.
112p. il. ; cm.

Orientador: Gabriel Loureiro de Lima.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica de São
Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação
matemática.

1. Interface entre história e educação matemática. 2. The
Ground of Artes. 3. Robert Recorde. 4. Relação entre número
e quantidade. I. Lima, Gabriel Loureiro de. II. Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós
Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

ISABELLE COELHO DA SILVA

Um estudo da relação entre número e quantidade na realização de operações com frações no tratado *The Ground of Artes*, de Robert Recorde

Tese apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTORA em Educação Matemática, sob a orientação do Professor Doutor Gabriel Loureiro de Lima.

Aprovada em: __/__/____

BANCA EXAMINADORA

Dr(a). Gabriel Loureiro de Lima – PUC-SP

Dr(a). Fumikazu Saito – Pesquisador Independente

Dr(a). Maria José Ferreira da Silva – PUC-SP

Dr(a). Ana Carolina Costa Pereira – UECE

Dr(a). Barbara Lutaif Bianchini – PUC-SP

A meus pais e minha família.

Agradeço à CAPES, pela concessão da bolsa que financiou meus estudos e tornou possível a realização deste sonho. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Número do processo: 88887.369794/2019-00.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001 – Process number 88887.369794/2019-00.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela oportunidade de estudar e por me guiar todos os dias durante o meu doutorado e por toda minha vida.

Agradeço à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, em particular, ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática pela oportunidade em cursar este doutorado.

Agradeço aos meus orientadores, que não mediram esforços durante esses anos de orientação, possibilitando que eu chegasse a este momento. Inicialmente, ao Prof. Dr. Fumikazu Saito, que me acolheu na PUC-SP, me orientou durante os 2 primeiros anos de doutorado e continuou a me ajudar mesmo após seu afastamento. Em seguida, à Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva, que não permitiu que eu desistisse, fez inúmeras correções e me guiou até a qualificação. E, finalmente, ao Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima, que me recebeu no último semestre e se disponibilizou totalmente para me ajudar a concluir essa etapa. Acredito que nada seja por acaso e que, em meu caminho acadêmico, precisaria passar por cada um de vocês para conseguir escrever esta tese. Levarei para sempre em meu coração o carinho que cada um teve comigo.

Agradeço à Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira, que conhece cada etapa do meu crescimento como pesquisadora, me orientando na graduação e no mestrado e me ajudando a chegar ao doutorado. Agradeço por fazer parte desta banca e por toda a ajuda que disponibilizou para a conclusão desta tese.

Agradeço à Profa. Dra. Barbara Lutaif Bianchini, por todo o carinho que sempre me deu desde que ingressei no programa – durante sua gestão na coordenação do programa – por gentilmente ler e contribuir para minha pesquisa, por todas as observações, questionamentos e considerações durante esta defesa.

Agradeço a todos os docentes do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, por toda a formação que recebi, em especial, aos professores das disciplinas que cursei, além daqueles já mencionados, à Profa. Dra. Ana Lucia Manrique, Profa. Dra. Celina Abar e Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud e à Profa. Dra. Cileda Coutinho, que contribuiu muito com minha pesquisa durante a minha qualificação.

Agradeço à Suzanne Lima Freitas, assistente de coordenação do nosso programa de Educação Matemática, por estar sempre disponível para ajudar a todos os alunos, e por se tornar uma amiga que inúmeras vezes me ajudou e incentivou a concluir esta tese.

Agradeço aos grupos de pesquisa que fiz parte nos últimos anos, GPEHM, HEEMA e GPEA, e a todos os seus membros, por tanto aprendizado compartilhado. Participar desses grupos me proporcionou inúmeros conhecimentos e momentos ímpares para minha formação como pesquisadora e professora de matemática.

Agradeço a todos os professores dos quais tive a honra de ser aluna, sejam do doutorado, mestrado, da graduação ou da educação básica, por todos os ensinamentos gentilmente passados.

Agradeço à Profa. Ivoneide Pinheiro de Lima, quem primeiro acreditou no meu potencial, desde o primeiro semestre como graduanda na UECE, me incentivando a seguir na carreira acadêmica.

Agradeço a meu pai Júlio, minha mãe Graça, minhas irmãs, Julianne e Nathália, minhas tias, Núbia, Socorro e Gláucia, meu sobrinho Julinho, meu cunhado Edson, meu afilhado Nicolas e toda minha família que sempre me apoiou e incentivou a seguir meus sonhos, nunca medindo esforços para me ajudar a realizá-los. Não existem palavras que possam expressar o que vocês significam para mim.

Agradeço a meu noivo, Raul, que me apoia em todos os meus sonhos, embarcou comigo na aventura de morar em outro estado para cursar o doutorado e não me deixar sozinha e que me deu todo o auxílio necessário para que eu pudesse me concentrar e escrever essa tese.

Agradeço à minha Chloe, por me dar suporte emocional e fazer companhia em tantos momentos da escrita deste texto.

Agradeço aos amigos que o doutorado e que São Paulo me deram, em especial, Zaqueu, Ana Paula, Clarissa, Ronaldo, Jorge, Carlos, Alexandre, Laura, Marília e tanto outros, que me deram tanto apoio nos últimos quatro anos.

Agradeço aos meus amigos de muitos anos, Tiago, Hélison, Rayanne, Bruna, Vitória, Agrício, Edivânia, Suziê, Naiara, Verusca, Andressa, Gisele, Adriana e Wagner, por todo carinho e suporte durante esses anos e, mesmo com a distância, sempre se fizeram presentes.

E agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a concretização deste trabalho e deste sonho.

“Nós trabalhamos para um outro futuro, no qual nós acreditamos.” (D’AMBRÓSIO, 1996, s.p.).

SILVA, Isabelle Coelho da. **Um estudo da relação entre número e quantidade na realização de operações com frações no tratado *The Ground of Artes*, de Robert Recorde.** 2024. 112 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2024.

RESUMO

Os estudos que visam construir uma interface entre história e educação matemática têm tendenciado a investigar tratados produzidos no Renascimento, que possam ter registrado aspectos que remetem à construção dos conhecimentos atuais. Uma dessas obras é *The Ground of Artes*, de Robert Recorde, que se caracteriza como um livro de aritmética prática e, em uma de suas seções, trata do ensino de frações no século XVI, em que o conteúdo é introduzido a partir de questões inseridas em contexto relacionado, principalmente, ao comércio, discutindo diversos exemplos. Com isso, nos questionamos como a abordagem prática apresentada na obra *The Ground of Artes* pode fomentar uma discussão a respeito da relação entre número e quantidade nas operações com frações? Assim, nesta tese, temos o objetivo principal de compreender a relação entre número e quantidade na realização de operações com frações que pode ser estabelecida a partir da obra *The Ground of Artes*. Para tanto, realizamos uma pesquisa qualitativa, partindo de uma abordagem bibliográfica e documental para analisar o tratado e a rede de textos em que ele está inserido. Além disso, tomamos como base a realização de uma pesquisa histórica para levantar questões epistemológicas com vistas à construção de interfaces entre história e educação matemática, segundo uma escrita historiográfica atualizada. A partir desse estudo, percebemos que Recorde opera com quantidades em seus exemplos, partindo de um contexto prático renascentista. Além disso, também concluímos que o tratado não seria utilizado propriamente por um jovem que desejasse aprender aritmética e os cálculos e regras presentes nele. Na verdade, ele possui o intuito de registrar o conhecimento, visando uma reforma curricular que valorizasse os saberes práticos. Com isso, vislumbramos que a discussão apresentada nesta tese possa servir futuramente como material para proporcionar esse debate da relação entre número e quantidade com os professores que ensinam matemática.

Palavras-chave: *The Ground of Artes*; Robert Recorde; Interface entre história e educação matemática; Relação entre número e quantidade.

SILVA, Isabelle Coelho da. **A study on the relation between number and quantity in the operations with fractions in the treatise *The Ground of Artes*, by Robert Recorde.** 2024. 112 p. Thesis (Doctorate in Mathematics Education). Postgraduate Studies Programme in Mathematics Education. Pontifical Catholic University of São Paulo, São Paulo, 2024.

ABSTRACT

Studies that aim to build an interface between history and mathematical education have tended to investigate treatises produced in the Renaissance, which may have recorded aspects that refer to the construction of the current knowledge. One of these works is *The Ground of Artes*, by Robert Recorde, which is characterized as a practical arithmetic book and, in one of its sections, deals with the teaching of fractions, in which the content is introduced based on questions inserted in a context related mainly to commerce, discussing several examples. With this, we ask ourselves how the practical approach presented in the work *The Ground of Artes* can encourage a discussion about the relation between number and quantity in the operations with fractions? Thus, in this thesis, our main objective is to understand the relationship between number and quantity when carrying out operations with fractions, which can be established from the work *The Ground of Artes*. To this end, we carried out qualitative research, using a bibliographic and documentary approach to analyze the treatise and the network of texts in which it is inserted. Furthermore, our fundament is on execution of a historical research to purpose epistemological questions aiming at the construction of interfaces between history and mathematical education, according to updated historiographical writing. From this study, we realize that Recorde operates with quantities in his examples, basing on a practical Renaissance context. Furthermore, we also concluded that the treatise would not be exactly used by a young person who wanted to learn arithmetic and the calculations and rules present in it. In fact, it aims to record knowledge, aiming for a curricular reform that would value practical knowledge. With this, we envision that the discussion presented in this thesis can serve, in the near future, as material to provide this debate on the relationship between number and quantity with teachers who teach mathematics.

Keywords: *The Ground of Artes*; Robert Recorde; Interface between history and mathematics education; Connection between number and quantity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Frontispício de <i>The Ground of Artes</i> (1543)	18
Figura 2 – Monumento em homenagem à Robert Recorde	35
Figura 3 – Processo de impressão de livros	44
Figura 4 – A ordem para estudo das obras de Robert Recorde	63
Figura 5 – Frontispício da edição de 1648	66
Figura 6 – Tabelas de estatutos de moedas e pesos em <i>The Ground of Artes</i>	72
Figura 7 – Posição dos números no cálculo da Regra de Ouro	80
Figura 8 – Posição dos números no exemplo libra de peso de prata	81
Figura 9 – Cálculo da regra de três para encontrar o valor que cada homem receberá	88

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Os conteúdos apresentados no Livro	68
Quadro 2 – Conteúdo das seções sobre frações de <i>The Ground of Artes</i>	74
Quadro 3 – Equivalência das unidades de medida de comprimento	83

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	15
2 PROBLEMÁTICA.....	21
2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	21
2.2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	30
2.3 JUSTIFICATIVA.....	32
2.4 QUESTÃO E OBJETIVOS.....	37
2.5 CAMINHOS METODOLÓGICOS.....	38
3 O CONTEXTO DE ELABORAÇÃO DE <i>THE GROUND OF ARTES</i>.....	40
3.1 O CONTEXTO RENASCENTISTA INGLÊS E A PRODUÇÃO DE CONHECIMENTOS..	40
3.2 AS MATEMÁTICAS NAS UNIVERSIDADES: O ESTUDO DO <i>QUADRIVIUM</i>.....	45
3.3 AS MATEMÁTICAS PRÁTICAS E SEU CONTEXTO DE ELABORAÇÃO E TRANSMISSÃO.....	53
3.4 OS TRATADOS DE ARITMÉTICA PUBLICADOS NA INGLATERRA NO SÉCULO XVI E O ENSINO DE FRAÇÕES.....	57
4 <i>THE GROUND OF ARTES</i> E A RELAÇÃO ENTRE NÚMERO E QUANTIDADE NAS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES.....	62
4.1 A PROPOSTA DE ENSINO DE RECORDE.....	62
4.2 O CONTEÚDO DE <i>THE GROUND OF ARTES</i>.....	65
4.3 A RELAÇÃO ENTRE NÚMERO E QUANTIDADE NAS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES DE <i>THE GROUND OF ARTES</i>.....	76
4.3.1 Problema 1: um exemplo de comparação.....	79
4.3.2 Problema 2: um exemplo de medição.....	82
4.3.3 Problema 3: um exemplo de distribuição.....	86
4.3.4 Algumas conclusões em relação aos problemas apresentados.....	88
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	92

REFERÊNCIAS.....	96
ANEXO A – OS NÚMEROS COM AS MÃOS, SEGUNDO ROBERT RECORDE	105
ANEXO B – HORÁRIO DE UMA <i>GRAMMAR SCHOOL</i> DO PERÍODO ELIZABETANO, 1598	106
ANEXO C – CONTEÚDO DE <i>THE GROUND OF ARTES</i> (1648)	107
ANEXO D – TABELA DE NUMERAÇÃO, SEGUNDO RECORDE.....	110
ANEXO E – TABELA PARA MEDIÇÃO DE UM ACRE DE TERRA	111
ANEXO F – MAPA DA INGLATERRA NO PERÍODO TUDOR.....	112

1 INTRODUÇÃO

A construção de uma tese, na maioria das vezes, não acontece apenas durante os anos de um curso de doutorado, ela perpassa toda a formação de um pesquisador, desde sua inserção naquela área de conhecimento. Em nosso caso, iniciamos a graduação no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará e, após uma palestra a respeito de possíveis caminhos da pós-graduação, a escolha pela história da matemática como área de pesquisa foi clara. Desde então, realizamos estudos e publicações nessa área e em sua articulação com a educação matemática que, além de cursos de extensão e produção de artigos, incluíram o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) da referida graduação que tratou do uso de um documento histórico para o ensino e a dissertação de mestrado que elencou critérios para o uso de textos históricos originais em sala de aula.

Durante a elaboração do TCC, investigamos o Papiro de Rhind, um documento histórico de aproximadamente 1500 a.E.C.¹ com o objetivo de inseri-lo em sala de aula a fim de promover estratégias para o ensino de matemática. Entretanto, ao iniciarmos o mestrado, percebemos que tanto nossa proposta, quanto diversas outras, partiam de uma escrita historiográfica tradicional e não discutiam quais critérios eram necessários para inserir textos históricos em sala de aula, o que resultou em nossa dissertação. Com isso, para o doutorado, sentimos a necessidade de estudar, novamente, um documento histórico, contudo, tendo como base uma perspectiva historiográfica atualizada.

Assim, conforme foi debatido em nossa dissertação, a escolha de um documento histórico depende da intencionalidade do pesquisador (Silva, 2018). Dessa forma, quando o objetivo é debater os processos de construção de conhecimentos matemáticos atuais, Saito (2015) indica que devem ser escolhidos materiais provenientes do período em que começou a surgir a ciência moderna, ou seja, a partir do século XV. Segundo o autor, é aproximadamente nesta época que aconteceu na Europa o que ficou conhecido como *Renascimento*, quando ocorreu um intenso debate do conhecimento científico existente, sua base teórica e suas formas de organização.

Neste contexto, encontramos Robert Recorde (c.1510-1558), que costuma ser reconhecido como o primeiro a utilizar o símbolo de igualdade como conhecemos (=). Entretanto, investigando além da publicização de um símbolo, Recorde também foi responsável

¹ Antes da Era Comum.

por uma série de tratados dedicados ao ensino das matemáticas² que receberam grande atenção dos ingleses no século XVI. Um deles, *The Ground of Artes*, foi dedicado ao estudo de aritmética prática e sua primeira edição, ainda existente, foi publicada em 1543 e está, atualmente, depositada no Museu Britânico.

De acordo com Roberts (2016), Robert Recorde nasceu na cidade de Tenby, no condado de Pembrokeshire, no País de Gales,³ por volta de 1510.⁴ Nesta cidade, passou boa parte de sua infância e adolescência, quando se mudou para Oxford, onde ingressou na universidade e obteve seu diploma universitário. Oriundo de uma família católica – todo o mundo ocidental era dominado pela igreja Católica Romana – Robert era filho de Thomas Recorde e Rose (ou Ros) Johns e irmão mais novo de Richard Recorde. Seu pai foi um comerciante (*merchant*) que também, atuou como prefeito de Tenby, o que conduziu a família a ser considerada como distinta e parte de uma pequena nobreza (*gentry*) ou classe média (*middle-class*). Recorde deve ter tido contato com o mundo dos comerciantes desde muito cedo, presenciando e aprendendo o ofício de vender, comprar e trocar mercadorias, tanto no próprio negócio de seu pai, quanto no mercado e no porto de Tenby – inclusive por pessoas que não falavam o mesmo idioma⁵ – e, neste contexto, ele deve ter sido introduzido aos cálculos de medidas, pesos, conversão de moedas, utilização do ábaco etc.

Para Roberts (2016), os estudiosos modernos ainda negligenciam, de certa forma, as realizações de Recorde, por isso muito do material produzido após a sua morte ainda permanece disperso e sem uma análise mais aprofundada. O autor acrescenta que tal fato acontece tanto

² Utilizamos o termo “matemáticas” para nos referirmos às áreas de conhecimentos classificadas como matemáticas no Renascimento. De acordo com Saito (2015, p. 29), antes do século XIX, os “conhecimentos matemáticos encontravam-se ‘pulverizados’ e eram parte integrante de outros seguimentos de conhecimento, tais como a astronomia, a música, a agrimensura etc., que eram conhecidas como ‘matemáticas’ (isso mesmo, no plural).” Isto é, para nos referirmos a essa área de conhecimento no passado, devemos utilizar o termo matemáticas, indicando que ainda não existia uma ciência única, definida como nos moldes atuais.

³ No Anexo F, podemos ver um mapa renascentista das Ilhas Britânicas, incluindo a Inglaterra e o País de Gales.

⁴ Há uma divergência de datas referente ao ano de nascimento de Robert Recorde. Roberts (2016) afirma que 1512 seria o ano mais provável e, concordando com ele, Easton (1966) apresenta evidências baseadas na participação de Recorde no julgamento de Stephen Gardiner. Como os textos não são conclusivos, nesta tese, optamos por continuar com a data de “c.1510”, tal como é apresentado por grande parte da literatura, inclusive por Easton (1981).

⁵ Roberts (2016) ressalta a possível conexão da forma como as negociações eram realizadas entre pessoas de diferentes idiomas no porto de Tenby e a adição de uma seção em *The Ground of Artes*, dedicada ao ensino da Arte de Numerar com as Mãos (*The Arte of Numbrings on the Hand*), que pode ser aquela utilizada por tais comerciantes. Recorde (1558) afirma que esta técnica já era utilizada há mais de 2000 anos, mas que nunca foi ensinada em inglês. Ver Anexo A.

pelos historiadores da era Tudor,⁶ por preferirem deixar as questões ligadas às matemáticas para serem estudadas pelos matemáticos, como pelos próprios historiadores da matemática, que pouco se interessam pela vida de Recorde além das contribuições para sua ciência atual.

De fato, segundo Beltran, Saito e Trindade (2014), sabemos que a institucionalização da história da ciência partiu da iniciativa dos próprios cientistas com base em uma historiografia do início ao século XX, isto é, foi escrita por estudiosos, como o matemático Georges Sarton (1884-1956), que buscavam estabelecer a gênese do conhecimento a fim de mostrar seu progresso até chegar ao saber atual. Este tipo de escrita da história tem sido classificado como uma perspectiva historiográfica tradicional, que valoriza apenas o que permaneceu e é ensinado ainda hoje. Para Saito (2016), mais especificamente no caso da história da matemática, muito do material disponível foi produzido por educadores matemáticos que não tinham noção da escolha historiográfica e acabavam por seguir este tipo de escrita mais tradicional. Portanto, não é incomum que a produção existente a respeito de Recorde busque enaltecer aquilo que permaneceu e tem sido amplamente utilizado na matemática, que é o sinal de igualdade.

Segundo Howson (1982), do mesmo modo, por sua atuação como professor/tutor e preocupação com problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem das matemáticas, Recorde foi citado como sendo o primeiro educador matemático inglês. Embora possa ser anacrônico considerá-lo como um educador matemático, visto que a educação matemática só se estabelece como área de conhecimento em meados do século XX, não podemos deixar de destacar a atenção dada por Recorde às questões que envolvem o ensino das matemáticas do período uma vez que, de acordo com o autor, ele foi o primeiro a produzir uma série de textos que tratavam das matemáticas em língua inglesa. Essa importância também foi evidenciada por Denniss e Smith (2012) quando afirmam que a obra *The Ground of Artes* estabeleceu os padrões para o currículo dos livros de aritmética por aproximadamente 300 anos após sua publicação.

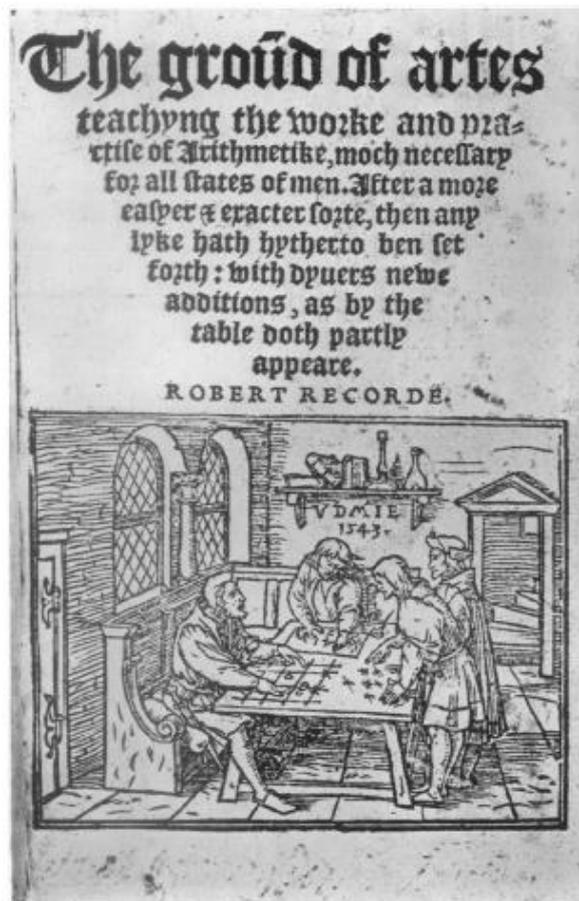
Assim, esse tratado e a proposta de ensino de Robert Recorde se tornaram um tema interessante para estudos que envolvam possíveis articulações entre a história da matemática e o ensino. Nesse sentido, dentre as obras de Recorde, a que mais recebeu edições foi *The Ground of Artes*, que foi republicada até o ano 1699. Easton (1967) afirma que sobreviveram 15 edições⁷

⁶ Era Tudor se refere ao período cujos monarcas pertenciam à família de sobrenome Tudor, que governaram a Inglaterra entre 1485 e 1603. A esse respeito, vide a seção 3.1.

⁷ Um cotejamento dessas edições foi realizado por Easton (1967), em que podem ser vistas as diferenças e semelhanças entre elas. Como o objetivo desta tese não é realizar um estudo minucioso dessas edições, essas características não foram descritas, mas podem ser acessadas em Easton (1967).

provenientes somente do século XVI, mas há bibliografias que indicam haver outras que não foram conservadas. A autora acrescentou que esta popularidade se deu tanto pela influência do próprio Recorde e de John Dee (1527-1608), que editou algumas versões posteriores à morte de Robert, quanto pelo crescente interesse nas ciências que aconteceu durante o Renascimento. Além disso, em 2010, foi publicada uma nova edição, com base na versão de 1573, como parte da coleção História antiga da Lógica, Ciência e Matemática (*Early History of Logic, Science and Math*), da biblioteca virtual *Early English Books Online*, que objetiva possibilitar o acesso a obras escritas entre 1475 e 1700.

Figura 1 – Frontispício de *The Ground of Artes* (1543)



Fonte: Broadbent (1947, p. 129).

The Ground of Artes, como podemos ver em seu frontispício (Figura 1), objetiva tratar de aritmética prática, isto é, uma aritmética mais empírica, que envolvia questões relacionadas ao comércio, conversão de moedas etc. Segundo Smith (1908), os livros de aritmética prática eram aqueles “escritos para fornecer o conhecimento matemático necessário para cálculos relacionados ao comércio e usando algarismos hindu-arábicos” (Smith, 1908, p. 7, tradução

nossa⁸). Em comparação a esses, o autor cita os livros de aritmética teórica, que tratavam de uma matemática mais contemplativa e tinham como base os escritos de Boécio⁹ (ca.480-524).

Dentre as diversas edições de *The Ground of Artes* mencionadas, neste estudo, optamos por utilizar a publicada em 1648, por questões de disponibilidade de acesso e conservação do material. De acordo com as informações de seu frontispício, esta versão foi escrita inicialmente por Robert Recorde e, após sua morte, foi aumentada e republicada por John Dee. Algum tempo depois, foi ampliada por John Mellis e, com base nesta nova versão, Robert Hartwell realizou correções, adicionou ilustrações e algum conteúdo, ao publicar o material em 1648. Contudo, devido ao tamanho do material e ao tempo limitado para a realização desta tese, nos detemos a estudar a parte escrita inicialmente por Recorde, isto é, as seções denominadas como primeira e segunda parte.

Em sua escrita, Recorde se mostra preocupado com o modo como a aritmética deve ser ensinada e, por isso, decide escrever seu texto em inglês – idioma vernáculo da Inglaterra – e em forma de diálogo entre um mestre (*master*) e seu aluno (*scholar*), além de inserir diversos exemplos para ilustrar o conteúdo. Por essas considerações com o ensino de aritmética e sua escolha pela abordagem prática em *The Ground of Artes*, nos questionamos sobre a possibilidade do uso deste tratado para construir uma interface entre história da matemática e educação matemática. Para tanto, entendemos que:

[...] por construção de interface queremos aqui nos referir à constituição de um conjunto de ações e produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático para elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática. (Saito; Dias, 2013, p. 91-92)

Baseado nesta definição, neste estudo, nos detemos à primeira parte da construção de uma interface, que consiste em propor ações que possam discutir esses processos de construção do conhecimento, com base em questões de ordem histórica e epistemológica.

Dessa forma, com a leitura do tratado, percebemos que uma das grandes questões de Recorde, inserido em um contexto que questionava a utilidade das ciências, buscava relacionar o ensino de aritmética com a própria prática desta matemática, ou seja, se baseava em questões relacionadas ao comércio, mistura de metais, conversão de moedas etc. Assim, optamos por investigar a segunda parte do tratado de Recorde, que aborda as frações, pois há nela uma

⁸ “[...] written to supply the mathematical knowledge necessary for business computations, and using the Hindu-Arabic numerals” (Smith, 1908, p. 7).

⁹ A obra de aritmética de Boécio foi intitulada *De Institutione Arithmetica*, tendo como base a aritmética do grego Nicomachus de Gerasa. Sobre Boécio, vide Minio-Paluello (1970).

relação do contexto prático com o ensino deste conteúdo, do qual emerge uma discussão sobre a relação entre número e quantidade na realização de operações com frações.

Para isto, partimos do objetivo de Recorde de ensinar aritmética, com base em questões de ordem práticas do seu contexto, para identificar esta relação entre número e quantidade quando ele apresenta os exemplos referentes às operações com frações. Dessa forma, promovemos um debate, com apoio de aspectos históricos, da necessidade de se conhecer questões matemáticas e extras-matemáticas envolvidas na construção do conhecimento matemático. Com isso, esta tese tem o objetivo principal¹⁰ de compreender a relação entre número e quantidade na realização de operações com frações que pode ser estabelecida a partir da obra *The Ground of Artes*.

Assim, esta tese se divide em quatro capítulos, sendo esta introdução o primeiro. Em seguida, apresentamos a problemática deste estudo para conhecer as questões que englobam a sua construção, tais como a justificativa, o referencial teórico, a revisão bibliográfica, nossa pergunta diretriz, os objetivos geral e específico e o caminho metodológico.

A partir deste panorama inicial, apresentamos o terceiro capítulo, que objetiva conhecer o contexto de elaboração e produção de *The Ground of Artes*, a fim de entender o que “em tempos anteriores teria sido estabelecido” (Recorde, 1648, frontispício, tradução nossa) a respeito do ensino de aritmética inserido em um âmbito de matemáticas práticas e teóricas, iniciando com um breve relato do contexto social e acadêmico da Inglaterra renascentista. Neste contexto, destacamos alguns aspectos da vida do autor que levaram a escrever seus tratados.

Então, temos o quarto capítulo, em que apresentamos, mais detalhadamente, a obra *The Ground of Artes*, assim como as outras obras de Recorde e sua proposta de ensino. A seguir discutiremos sobre a parte dedicada às frações de forma a promover um debate a respeito da relação entre número e quantidade na realização de operações com frações.

Por fim, expomos o quinto capítulo, em que constam nossas considerações finais. Nesta seção, retomamos nossos questionamentos e objetivos, ao buscar refletir a respeito do que foi realizado na tese e, posteriormente, apresentamos as perspectivas futuras com a publicação deste trabalho.

¹⁰ Os objetivos e a questão de pesquisa desta tese são apresentados de modo mais detalhado na seção 2.4.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, discutimos a importância de um estudo de Robert Recorde e sua obra, *The Ground of Artes*, para a educação matemática. Para isso, apresentamos a revisão bibliográfica, a justificativa da pesquisa, suas questões e objetivos, além dos caminhos metodológicos.

2.1 Revisão Bibliográfica

Estudos a respeito de Robert Recorde e seus tratados não são novidade em pesquisas relacionadas à história da matemática. Diversos autores como Easton (1981), Howson (1982), Denniss e Smith (2012) e Roberts (2016), retratados na seção anterior, se dedicaram a publicar sobre este assunto. Em concordância, esses estudiosos indicam que *The Ground of Artes* foi a obra mais popular de Recorde, o que pode ser visto no expressivo número de edições publicadas entre os séculos XVI e XVII.

Iniciamos nosso estudo com a leitura do tratado *The Ground of Artes*, buscando conhecer o texto e o saber matemático retratado pelo seu autor. Com base nesse panorama inicial,¹¹ também começamos a identificar alguns aspectos do contexto de elaboração do material e da episteme em que ele estava inserido. Conjuntamente com essa leitura da obra, realizamos um estudo bibliográfico para conhecer o cenário de pesquisa existente a seu respeito e de seu autor, percebendo que, além dos textos já citados, muitos outros mencionam Recorde e *The Ground of Artes*. Esta busca inicial foi realizada na plataforma JSTOR que é uma biblioteca digital¹² com um vasto repositório de publicações relacionadas à história da matemática. Este levantamento¹³ nos proporcionou mais de 150 resultados, entre artigos, livros, ilustrações, editoriais, resenhas críticas, entre outros. Contudo, a maioria deles apenas cita o nome de Recorde brevemente, sem apresentar muitos detalhes.

Um exemplo é o artigo de Rankin (1929), cujo objetivo é discorrer sobre o valor cultural da matemática em diversas áreas, como arquitetura, música, artes etc. O nome de Recorde é mencionado apenas para exemplificar alguém que teria interesse em matemática e medicina. Ao tentar justificar este mútuo interesse dos estudiosos do século XVI, o autor indica que seria

¹¹ Algumas considerações iniciais sobre essa leitura podem ser acessadas em Silva e Saito (2020).

¹² Site da biblioteca digital JSTOR: <https://www.jstor.org/>

¹³ Este foi um levantamento inicial realizado durante o segundo semestre de 2019.

por causa da crença na astrologia. Este tipo de análise desconsidera a relação existente entre a matemática e a medicina dentro deste contexto e, ao invés de inseri-las em sua episteme, parte da concepção atual dessas duas áreas de conhecimento. Além disso, ao introduzi-lo, Rankin (1929) explica que Recorde é aquele que nos deu o sinal de igualdade, ou seja, atrela seu nome a algo que ainda é utilizado na matemática atual.

Do mesmo modo, muitos outros textos deste levantamento apenas apresentam Recorde como aquele que criou ou estabeleceu o sinal de igualdade. Wiltshire (1930) é um artigo que objetiva defender a presença de aspectos históricos em sala de aula para ensinar matemática. Para tanto, um dos exemplos apresentados pela autora é a história do símbolo de igualdade, que poderia ser utilizado para estudar o verdadeiro significado de uma equação. Da mesma forma, Butman (1899) tem o mesmo objetivo de retratar a história da matemática para promover o ensino e afirma que uma das opções para os professores é contar a história do sinal de igualdade e como ele foi estabelecido por Recorde. Podemos ver a abordagem progressista e linear da autora, quando ela afirma que, para mostrar a relevância do estudo da matemática, é importante que a sua origem e o seu progresso sejam apresentados.

A partir desses exemplos, podemos perceber que Recorde é reconhecido por muitos historiadores, mas como ele não é um dos “grandes nomes” da história da matemática, não lhe é dada a devida atenção. Isto ocorre por esses estudos terem sido realizados em grande parte no século passado, ou seja, eles têm como base uma escrita historiográfica do século XX, que considera o conhecimento atual como o mais importante e o que não faz parte dele não vale ser estudado.

Apesar da predominância desse tipo de menção a Recorde, há diversos estudos que retratam a vida e obra desse autor. Contudo, muitos deles focam em apenas apresentar aspectos bibliográficos. Nesse sentido, Cajori (1922) busca apresentar Robert Recorde, ao relatar sua vida pessoal e profissional, além de fazer uma breve descrição de suas obras, ao expor alguns aspectos matemáticos e relacionando-os com a abordagem dada por outros estudiosos do período. A partir dessas comparações, Cajori (1922, p. 299, tradução nossa¹⁴) afirma que “não se pode dizer que Recorde se destaque na história da matemática como uma mente visivelmente criativa”. Isto é, para o autor, ao considerar o conhecimento matemático atual e uma análise

¹⁴ “Recorde cannot be said to stand out in the history of mathematics as a conspicuously creative mind” (Cajori, 1922, p. 299).

presentista, Recorde não teria feito grandes contribuições para a área, que mereçam ser retratadas pela história da matemática.

Além desse, Smith (1921) também expõe notas bibliográficas sobre Robert Recorde, em uma intenção de complementar informações a seu respeito, pois, de acordo com o autor, o que se sabe sobre Recorde ainda é bastante escasso. Um desses novos dados é referente a uma pintura de Recorde¹⁵ que teria sido recentemente adquirida e que passou a representar um novo material sobre ele. Smith (1921) menciona os tratados de Recorde, mas não explicita detalhes sobre eles. Em contrapartida, ele foca no testamento do autor e em sua vida pessoal e segue nesse tipo de narrativa bibliográfica em seu texto.

É importante ressaltar que ambos os autores, David Smith e Florian Cajori, são matemáticos de formação, que se dedicaram a estudos da história da matemática durante sua vida acadêmica. Eles focam em aspectos mais bibliográficos, ou seja, seus textos evidenciam uma abordagem mais histórica da matemática. Nesse sentido, Smith publicou outros compêndios como *Rara Arihtmetica*¹⁶ e livros de história da matemática que citam Recorde.

Outras publicações interessantes sobre Robert Recorde foram feitas por pesquisadores relacionados à educação matemática. Uma delas é Howson (1982), que realiza um estudo a respeito da história da educação matemática na Inglaterra e caracteriza Recorde como o primeiro educador matemático. Este livro¹⁷ expõe uma breve descrição do ensino das matemáticas na Inglaterra no século XVI, período em que Recorde estaria vivo, e apresenta diversas referências bibliográficas sobre o assunto. Entretanto, é importante salientar que Howson (1982) faz uma análise presentista ao buscar a educação matemática no passado e classificar Recorde como um educador matemático. Ao considerar uma historiografia atualizada, reconhecemos que as áreas de conhecimento, inclusive a matemática atual, só se estabelecem com as características modernas no século XIX, portanto, ainda não poderia haver uma educação matemática no século XVI.

O foco deste autor, Geoffrey Howson, é na história da educação matemática. Inclusive, no levantamento que realizamos na plataforma JTSOR, encontramos um artigo que trata especificamente deste tema, com foco nos anos 1900. Neste texto, Howson (1988) cita Recorde

¹⁵ Evidências posteriores mostraram que esta pintura não era, de fato, de Recorde, conforme é retratado na seção seguinte.

¹⁶ Este é um catálogo, publicado em 1908, a respeito de tratados de aritmética escritos até o ano de 1601.

¹⁷ No levantamento da JSTOR sobre Robert Recorde, este livro aparece como uma resenha crítica realizada por Richard C. Weimer, para o periódico *The Mathematics Teacher*, em 1983.

somente ao final, ao indicar que ele seria um dos primeiros educadores matemáticos da Inglaterra.

Outra publicação que também foca no ensino de matemática baseado nas obras de Recorde é Fauvel (1989). O objetivo desse pesquisador é mostrar como o autor de *The Ground of Artes* utilizou a retórica de Platão para promover um ensino à distância. Com isso, ele infere que, com a escrita em forma de diálogo, Recorde pôde mostrar um engajamento entre o *scholar* e o mestre, além de utilizar os próprios erros desse *scholar* para chegar nos conhecimentos corretos, tal como era feito na retórica platônica. Contudo, da mesma forma que outros pesquisadores retratados nesta seção, Fauvel (1989) é presentista em comparar os livros de Recorde com a educação à distância do século XX, que acontecia por meio de livros, videocassetes etc.

Além desses, Johnson e Larkey (1935) também escrevem sobre Robert Recorde, com uma abordagem centrada no ensino de matemática. Esses autores buscam afirmar que os tratados de Recorde faziam parte de um movimento anti-aristotélico, isto é, que criticavam a autoridade de Aristóteles sobre o que era ciência e que o que deveria ser ensinado. Para isso, eles ressaltam as características da escrita de Recorde para o ensino, tais como: a forma sistemática e definida para ensinar cada tópico, dentro da ordem estabelecida por ele, com longas explicações de conteúdos elementares primeiro, com provas e demonstrações apenas para quando o estudante tivesse completo domínio do que veio antes; quando o aluno não entendesse algo, ele deveria pedir para repetir; o aluno precisaria dominar cada passo antes de prosseguir para o próximo; entre outras. Entretanto, percebemos uma abordagem historiográfica tradicional em Johnson e Larkey (1935), quando os autores afirmam que Recorde seria um precursor de Francis Bacon e Petrus Ramus em relação à crítica do método escolástico¹⁸ e da autoridade da ciência aristotélica.

Dentre os textos que tratam especificamente de *The Ground of Artes*, podemos perceber que a maioria possui um caráter descritivo, ao mostrar todo ou parte do conteúdo da obra. Ebert (1937) faz uma análise da obra a partir de uma versão de 1646, em que destaca as escolhas de Recorde para a escrita de seu tratado, assim como relata as suas seções e descreve o conteúdo tratado em cada uma delas. Contudo, a autora tem uma visão presentista, pois classifica Recorde como uma pessoa a frente de seu tempo. Além disso, a autora compara os métodos dele com os atuais, ao afirmar que ele não sacrificaria a aprendizagem em detrimento de um ensino mais

¹⁸ Acerca disso, vide o capítulo 3 desta tese.

ágil, como é feito na educação contemporânea. A partir de tal afirmação, ela desconsidera que esses dois contextos de ensino são diferentes e com métodos, objetivos e públicos também distintos.

Do mesmo modo, Sleight (1942) busca fazer uma descrição do conteúdo de *The Ground of Artes*. O objetivo do texto é tratar das primeiras publicações inglesas sobre aritmética e, para tanto, ele apresenta a obra de Recorde e descreve as suas seções e alguns dos métodos de cálculo ensinados nela.

A partir deste levantamento, percebemos a atenção dada a Recorde e seus tratados, mesmo que ainda existam lacunas a serem preenchidas. Assim, o interesse em Recorde continua devido a suas obras ainda possuírem diversas possibilidades de pesquisas, como podemos ver nos livros publicados recentemente por Roberts e Smith (2012) e Roberts (2016). Dentre essas possibilidades de estudo, destacamos a pouca atenção dada à parte de frações de *The Ground of Artes*, que ainda é pouco abordada pela literatura. Assim, nos questionamos sobre as possibilidades de discussão que podem emergir desta seção e da perspectiva prática adotada por Recorde, quando objetivamos estudar a realização de operações com frações.

Além disso, a fim de identificar nossa pesquisa no cenário nacional, também fizemos buscas em bases bibliográficas brasileiras. Pesquisas a respeito de Recorde não são tão comuns no Brasil, principalmente, relacionadas ao tratado *The Ground of Artes*. Em uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações¹⁹ da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), procuramos os termos "*The Ground of Artes*" OR "*The Grounde of Artes*" OR "*The Ground of Arts*"²⁰ e não obtivemos nenhum resultado, assim como aconteceu na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações²¹ (BDTD). Para identificar algum trabalho de pós-graduação que tivesse publicado algo similar, também utilizamos o termo "Robert Recorde" no site da CAPES e encontramos apenas uma tese. A busca foi refeita na BDTD e o resultado foi o mesmo. O termo "Robert Record" também foi utilizado nos dois repositórios, mas não gerou resultados no primeiro e mostrou apenas a mesma produção no segundo. O estudo encontrado foi uma tese defendida no programa de Educação Matemática da PUC-SP, em que Bento (2018) realizou uma pesquisa com a obra *The Pathewaie To Knowledge*, de

¹⁹ Busca realizada em 22 de março de 2023 no site: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

²⁰ Utilizamos diferentes formas como a literatura costuma se referir ao tratado, a fim de ampliar os resultados desta pesquisa bibliográfica.

²¹ Busca realizada em 22 de março de 2023 no site: <http://bdtd.ibict.br/vufind/>

Recorde, para abordar a relação entre geometria prática e teórica, mas sem focar na obra de aritmética.

Além de teses e dissertações, também buscamos por artigos em periódicos acerca do tratado em questão, a fim de conhecer o que a comunidade acadêmica tem publicizado. Para tanto, utilizamos os mesmos termos: "*The Ground of Artes*" OR "*The Grounde of Artes*" OR "*The Ground of Arts*". Esta consulta foi realizada no Portal de Periódicos²² da CAPES, com acesso pela ferramenta Comunidade Acadêmica Federada (CAFe) que resultou em 19 produções, dos quais apenas 07 se relacionavam, de fato, à obra de Recorde. Os demais artigos utilizavam o mesmo termo para se referir a temas de direito, filosofia, escrita e artes – no sentido artístico/belas artes dado atualmente, além de conter 2 resultados duplicados. Dentre os 7 mencionados, um foi o próprio tratado original de Recorde e, entre os outros 6 artigos, os que mais se aproximam do nosso objeto de pesquisa – a abordagem prática para o ensino de frações a partir da obra – são Silva e Saito (2020), o único produzido no Brasil, Bidwell (1969) e Ebert (1937).

Em seu artigo, Silva e Saito (2020) fazem uma breve apresentação do conteúdo do tratado para apontar algumas considerações percebidas em uma leitura inicial do material. A partir dela, os autores notam que Recorde (1648) apresenta cálculos ligados à conversão de pesos e medidas, e concluem que há uma relação entre essa obra e os livros de ábaco voltados para o treinamento de jovens comerciantes. Contudo, afirmam que este texto parece ter um público mais amplo, pois o diálogo é realizado entre “mestre” (*master*) e “estudioso” (*scholar*), enquanto os diálogos presentes nas escolas de ábaco seriam entre “mestre” (*master*) e “aprendiz” (*apprentice*). Para os autores, por estudioso Recorde se referia aos estudiosos das matemáticas, não aos aprendizes dos ofícios.

Vale salientar que durante o século XVI, o ensino dos ofícios acontecia na sua própria prática, isto é, nas oficinas, nos comércios etc. O conhecimento era passado de pai para filho – vide seção 3.3 – ou de um mestre para seu aprendiz. Por outro lado, o *scholar* seria aquele que estivesse recebendo uma educação mais formal. De fato, Feingold (1984) afirma que o ‘*scholar* comum’ (*general scholar*) era o produto – aquele que estava sendo formado – em uma educação universitária no século XVI.

²² Busca realizada em 22 de março de 2023 no site: <https://www-periodicos-capes-gov-br.ez95.periodicos.capes.gov.br/index.php?>

Bidwell (1969) visa retratar o ensino de aritmética entre 1550 e 1800 para mostrar como este foi mudando com base em questões sociais, tal como a necessidade de um treinamento mais técnico para comerciantes, que envolviam conhecimentos matemáticos, mas que não era suprido pelas instituições de ensino²³ do período. Em relação ao tratado de Recorde, o autor afirma que foi a primeira publicação significativa, em inglês, sobre o assunto e marca uma disseminação de técnicas consideradas comuns nas escolas atuais. Com isso, a obra foi importante no contexto do século XVI, quando os conhecimentos práticos se tornaram cada vez mais necessários.

Ebert (1937)²⁴ também foca especificamente em *The Ground of Artes*, para apresentar um panorama do conteúdo da obra, destacar a forma como Recorde escreve e suas escolhas para promover o ensino de aritmética. Contudo, diferentemente de Silva e Saito (2020), a autora não parece ter o objetivo de realizar outros estudos baseada nessa descrição da obra, mas apresentar algumas observações dela e de seu escritor. Dentre esses apontamentos, a autora indica que, em sua opinião, todas as seções do tratado são interessantes devido à forma complacente como Recorde escreve e ao uso de exemplos simples e voltados para a prática.

Nesses resultados percebemos que, quase não há publicações acadêmicas referentes ao tratado de Recorde no Brasil e, o material disponível nas plataformas de busca tende a focar em descrever a obra, em fazer alguns apontamentos a seu respeito e na forma em que foi escrita. Entretanto, os textos encontrados são estudos mais gerais, que não focam na parte de frações e seu ensino, que sugerem que o interesse desses pesquisadores, em estudarem a obra, está nas escolhas de Recorde em relação à forma como propõe ensinar aritmética, principalmente, no apelo às questões de ordem prática.

Ainda no Portal de Periódicos da CAPES, com o mesmo objetivo dos repositórios anteriores, buscamos por "Robert Record" OR "Robert Recorde" que gerou 91 resultados, dos quais 50 não estavam relacionados realmente ao autor e, dos outros 41, alguns estavam repetidos e outros já foram mencionados nas buscas anteriores. Em relação ao conteúdo, a maioria trata da vida de Recorde e seus feitos, principalmente, o uso do sinal de igualdade. Então, entre os demais, os dois que poderiam ter relação com o objeto de estudo desta tese são

²³ Uma descrição sobre essas instituições é apresentada no capítulo 3.

²⁴ Este artigo também fez parte do levantamento da JSTOR, que foi apresentado na seção 2.1.

Fauvel (1989) e Williams (2013), por darem ênfase aos processos de ensino presentes nas obras de Recorde.

Fauvel (1989) foca nas características do método de ensino de Recorde, ao destacar a forma de diálogo da maioria de seus textos. O autor indica que seu objetivo era fazer uma reflexão dessa forma de escrita para textos voltados para um ensino a distância. Contudo, é importante salientar que o objetivo de Recorde não estava voltado para um ensino a distância, conforme é estabelecido atualmente.

Williams (2013) trata da escrita dialogada no Renascimento, com base nos escritos de Robert Recorde e afirma que, esta forma de escrever, faz com que o leitor seja inserido no texto, o que transforma a leitura em uma experiência para um sujeito daquela sociedade. Este artigo, em conjunto com o de Fauvel (1989) são importantes referências para debater as escolhas de Recorde para escrever seus tratados para o ensino de aritmética prática.

Pesquisas voltadas para o ensino de frações não são novidade no cenário acadêmico. Vários estudos tratam dessa questão que ainda parece ser um desafio para professores, por isso, é de se esperar que uma busca com esse tema nas bases de periódicos, teses e dissertações geraria muitos resultados. De fato, ao inserir o termo (Frações OR *Fractions* OR Fração OR *Fraction*) AND (ensino OR *teaching*) no Portal de Periódicos da CAPES, encontramos 7063 resultados²⁵. Do mesmo modo, as mesmas entradas mostraram 636 teses e dissertações na BDTD e 56 no catálogo da CAPES.

Assim, optamos por utilizar Operadores Booleanos que buscassem especificamente por resultados para o ensino de fração no Renascimento. Para isto, utilizamos os seguintes termos nas plataformas de busca: ("renascimento" OR "*renaissance*") AND (Frações OR *Fractions* OR Fração OR *Fraction*) AND ("ensino" OR "*teaching*" OR "educação" OR "*education*"). Na busca no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, não foram encontrados resultados. No BDTD, encontramos um texto como resposta, mas relacionado a área de agronomia. Por fim, no Portal de Periódicos da Capes, tivemos 09 resultados, em que 5 deles não faziam parte do nosso escopo – debatiam temas referentes às áreas de direito, biologia/saúde, marketing, medicina e combustíveis – ou seja, apenas 04 textos estavam relacionados a nossa pesquisa, contudo dois deles eram iguais, apenas em idiomas diferentes.

²⁵ Utilizamos os termos em português e inglês, buscando otimizar os resultados.

O primeiro resultado trata de um “[...] livro didático sobre história, filosofia e fundamentos da matemática, principalmente para estudantes especializados em matemática” (Anglin; Lambek, 1995, p. iii). O material está em inglês e foi dividido em duas partes, cada uma com cerca de 30 breves capítulos, dos quais um é dedicado às *Matemáticas no Renascimento*. Os autores citam Robert Recorde apenas para indicar sua contribuição para as notações matemáticas com o sinal de igualdade. As frações são mencionadas nesse capítulo apenas para indicar o uso por alguns matemáticos, isto é, os autores não discutem seu ensino. Ademais, são referidas em outros capítulos, mas sem relação ao período e/ou contexto estudado nesta tese.

Por outro lado, o segundo resultado é um artigo que foca no ensino de matemática, em que Demattè e Furinghetti (2022) relatam uma experiência em sala de aula com a aplicação de problemas retirados de tratados italianos do século XIV e XV, conhecidos como Livros de Ábaco (*Abacus treatises*). Embora os autores tenham escolhido problemas que se relacionam com as frações e descrevam as dificuldades dos alunos em resolvê-los, não mostram a(s) forma(s) como as frações eram ensinadas no período do Renascimento, pois apresentam poucos aspectos contextuais e epistemológicos que poderiam estar relacionados ao assunto.

O terceiro e quarto textos encontrados eram iguais, mas um em espanhol e o outro em inglês, e tratavam de um estudo de como aprender a contar a partir da obra *De Computo*, de Rabanus Maurus (784?-856). Neste artigo, Prieto (2013) mostra como o ensino das frações foi documentado no tratado que foi produzido, provavelmente, entre os anos de 819 e 820, isto é, anterior ao Renascimento, que é nosso período de investigação.

É necessário salientar que os três resultados desta busca estão em inglês ou espanhol, ou seja, não foram publicados em português. Além disso, podemos ver que grande parte da literatura, que estuda Recorde, aborda apenas a criação do sinal de igualdade, ou dá maior destaque a este feito. Isto está de acordo com uma historiografia tradicional, que visa mostrar as grandes realizações dos matemáticos do passado para salientar aquilo que permaneceu.

Assim, mesmo com a relevância de Recorde e de *The Ground of Artes* para o ensino das matemáticas, em particular da aritmética, não há teses e dissertações brasileiras que tratem desses temas e poucos são os artigos que os abordem. Contudo, os resultados encontrados compõem um referencial fundamental para esta tese, uma vez que dele emergem a importância de Recorde, de suas obras e de suas escolhas para a escrita dos textos, além de nos dar base para entender aspectos contextuais e epistemológicos nos quais a obra foi produzida com relação ao ensino de frações.

Como vimos, a maior parte da bibliografia encontrada foi produzida em inglês o que dificulta o acesso para aqueles que não têm conhecimento deste idioma. Além disso, são poucos os autores que abordam a parte de frações do tratado, o que motivou a produção desta tese. Dessa forma, surgiu o questionamento inicial das possibilidades de uso do tratado como uma reflexão acerca do processo histórico de construção do conhecimento matemático com foco na parte de frações de *The Ground of Artes* e na possível relação entre número e grandeza a partir das operações com frações apresentadas na obra.

2.2 Referencial Teórico

Partindo da ideia da construção de interfaces entre história e educação matemática, para realizar este estudo, nos baseamos em uma perspectiva historiográfica atualizada para que o tratado fosse analisado de forma contextualizada, ao considerar os conhecimentos matemáticos da época de sua elaboração.

A escolha de uma perspectiva historiográfica tem como pressuposto que a historiografia lida com os diferentes critérios de escrita da história. Segundo Beltran, Saito e Trindade (2014, p. 31), “[...] toda narrativa da História da Ciência é historiograficamente orientada. Isso significa que as narrativas históricas não são neutras e são influenciadas por diferentes fatores ligados não só à formação, mas também à concepção de ciência daquele que escreve a história.” Em outras palavras, a perspectiva historiográfica escolhida estabelece a forma como a narrativa é escrita e quais os critérios que são considerados em sua elaboração.

Em linhas gerais, podemos diferenciar essas historiografias em tradicionais e atualizadas. De acordo com Saito (2015), as tradicionais são aquelas que trazem narrativas lineares e presentistas, isto é, que consideram que o conhecimento vem evoluindo constantemente e cada vez mais até o que temos hoje – que seria o mais avançado. Por outro lado, o autor indica que as atualizadas buscam contextualizar o conhecimento em seu âmbito de elaboração, ao considerar os saberes presente na época e sem compará-los com os atuais.

Dessa forma, ao realizar uma pesquisa sobre Robert Recorde, uma narrativa tradicional ressaltaria o que permaneceu de seus escritos e que ainda é utilizado na matemática atual, tal como o sinal de igualdade. Isso acontece devido a este tipo de história olhar para o passado considerando e buscando os conhecimentos atuais. Em contrapartida, um estudo alicerçado em uma historiografia atualizada, parte do documento, em nosso caso *The Ground of Artes*, e de seu contexto de produção para identificar as possíveis questões de pesquisa.

Nesse sentido, para realizar a pesquisa com o documento histórico a partir de uma perspectiva historiográfica atualizada, nos fundamentamos nas esferas da análise histórica, que são: a epistemológica; a historiográfica; e a contextual. De acordo com Ferraz, Alfonso-Goldfarb e Waisse (2013, p. 45), respectivamente:

A primeira dessas esferas se refere aos aspectos intrínsecos das teorias e práticas científicas sob estudo, combinando a crítica textual (assumida a partir de um modelo filológico) e a análise teórico-contextual interna ao texto (através da análise epistêmica de seus principais conceitos e argumentos). A segunda, uma esfera propriamente historiográfica, concerne às várias formas através das quais já se analisou um determinado problema, documento. Finalmente, a terceira diz respeito ao contexto propriamente histórico, com destaque para as circunstâncias sob as quais foi elaborada a documentação em análise.

Em outras palavras, a esfera epistemológica lida com a episteme da época, ou seja, com o que é considerado ciência. Ela parte do próprio documento e de uma análise interna a ele, que deve ser interpretada de acordo com os conhecimentos matemáticos do seu contexto de elaboração. Para isso, muitas vezes, é necessário construir uma rede de textos, consultar outras publicações do período e do autor para identificar e entender esta episteme e os saberes que estão em circulação.

A esfera contextual diz respeito às questões relacionadas ao contexto em que o documento foi construído e que possam ter influenciado sua elaboração. Embora esta seja uma análise externa, ela também parte do documento para identificar o seu local e a época de publicação, pessoas envolvidas, possíveis relações religiosas etc. Todos esses aspectos levam a uma pesquisa acerca deste contexto, que pode ser relevante para a compreensão dos fatores que envolvem a construção dos conhecimentos presentes na obra.

A última esfera, a historiográfica, considera aquilo já foi publicado a respeito do tratado, de seu autor e dos conhecimentos em questão. Ela tem a intenção de fazer uma análise sobre os critérios considerados na escrita dessas narrativas, uma vez que a perspectiva historiográfica, a formação e o acesso às informações dos historiadores podem ser diferentes.

É importante destacar que as análises nessas esferas não são feitas individualmente, pois uma vez que mobilizamos uma delas, também estamos adentrando nas demais. Assim, de acordo com Moura (2017), com a articulação conjunta dessas três esferas, podemos restituir o documento original a sua malha histórica.

Nesse sentido, Alfonso-Goldfarb (2008, p. 8) afirma que “sempre e quando essa complexíssima interligação [entre as esferas] é deixada de lado, perde-se, frequentemente, a identidade do trabalho com a história da ciência.” Por isso, a análise de *The Ground of Artes*

tem como base as esferas epistemológica, contextual e historiográfica, que foram mobilizadas simultaneamente em nossos estudos e fazem parte da construção desta tese que envolve a articulação entre história e educação matemática.

2.3 Justificativa

As pesquisas que investigam as possíveis relações entre história e educação matemática estão cada vez mais presentes no cenário acadêmico. Isto pode ser visto na coleta de trabalhos realizada pelo Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática²⁶ (CREPHIMat). Este repositório é composto por cerca de 2000 produções acadêmicas, publicadas entre 2008 e 2018, que foram classificadas em três tendências para indicar suas modalidades de estudos, uma delas é *Pesquisas em História para o Ensino da Matemática*.

Segundo Saito (2015, p. 19), historicamente, a história da matemática “teve um papel central no processo de transmissão, apropriação e divulgação de conhecimentos matemáticos,” o que suporta a tese de que deve fazer parte da formação docente. Contudo, o autor destaca que os estudos do assunto tendem a sugerir que o conhecimento atual é um desdobramento progressivo daquela matemática do passado. Dessa forma, uma das finalidades das produções com base em historiográficas atualizadas é mostrar para o professor que a nossa matemática não evolui continuamente desde a Grécia antiga.

No âmbito da PUC-SP, os estudos da articulação entre história e educação matemática, realizados no grupo História e Epistemologia na Educação Matemática (HEEMa), diversas vezes, envolvem a construção de interfaces que buscam reflexões a respeito do processo histórico de construção do conhecimento²⁷. Segundo, Saito (2016, p. 6),

A construção de interfaces se faz necessária por duas razões principais: primeira, para aproximar o educador matemático dos recentes desenvolvimentos da história da matemática, baseada em tendências historiográficas atuais; e, segunda, para sensibilizar o historiador da matemática envolvido com ensino de matemática a produzir material bibliográfico acessível aos educadores matemáticos

Nesse sentido é que emerge este estudo da obra *The Ground of Artes*, de Robert Recorde, publicada, pela primeira vez, em 1543. Esta tese está inserida no projeto do HEEMa que objetiva a realização de uma “pesquisa histórica, tendo por foco as questões de ordem epistemológica e matemática que emergem da malha histórica” (Saito, 2016, p. 5), com base em tendências historiográficas atualizadas.

²⁶ Disponível em: <<https://crephimat.com.br/centro>>. Acesso em: 18 ago. 2022.

²⁷ A respeito da construção de interfaces vide: Saito e Dias (2013); Beltran, Saito e Trindade (2014); e Saito (2016).

Segundo Miguel e Miorin (2007), não é toda história que pode ser abordada em sala de aula e não existe uma única história da matemática que poderia ser recortada e inserida em sala de aula. De acordo com os autores, com esta finalidade, deve ser pensada uma história pedagogicamente vetorizada, ou seja, aquela escrita do ponto de vista do educador matemático.

Assim, neste estudo, o foco não é identificar os primeiros que estudaram um conteúdo matemático, mas, sim, aqueles que eram parte da comunidade que ‘fazia’ matemática no passado e que, de alguma forma, contribuíram para a construção do conhecimento que temos hoje. De acordo com Saito (2015), quando há interesse em entender os processos de construção da matemática atual, é necessária uma busca por materiais em torno do século XVI, pois este seria o período em que começou a surgir o que conhecemos hoje por ciência.

Esta pesquisa diverge dos tradicionais estudos de história da matemática que visam valorizar os grandes nomes das ciências que viveram nos séculos anteriores para identificar os conhecimentos atuais no passado, de forma a identificar precursores. Esta última abordagem vai ao encontro do que afirma Saito (2016, p. 6), quando indica que “grande parte da produção em história da matemática, divulgada em livros didáticos, mídias e outras literaturas, está muito desatualizada, visto que esse material está ainda baseado numa perspectiva historiográfica que remonta ao início do século XX.”

É importante destacar a relevância deste material escrito em uma perspectiva historiográfica tradicional para a história da ciência. Entretanto, além de estudar os precursores e ‘pais’ da ciência – ou seja, o que permaneceu – também é necessário conhecer estudiosos que não foram valorizados pela historiografia tradicional, mas que contribuíram para a construção do conhecimento que temos hoje.

Para Saito (2016), este é um tipo de estudo que vem sendo realizado nas últimas décadas, contudo, grande parte desta produção é direcionada apenas para especialistas em história da matemática, com poucos trabalhos acessíveis para o educador matemático. Assim, esta pesquisa se insere neste contexto de produção de material de história da matemática, pautado em uma perspectiva historiográfica atualizada, com foco no educador matemático, em que partimos do contexto prático que emerge da pesquisa histórica para tratar da relação entre número e quantidade nas operações com frações.

Deste modo, Recorde e sua obra podem contribuir para a educação matemática, quando verificamos que o estudo do documento pode mobilizar diversos conceitos matemáticos cujo ensino e aspectos ainda são discutidos atualmente. Para Moura (2017, p. 26):

A compreensão de tais constatações propicia uma formação de educadores matemáticos mais críticos e autônomos, no sentido de se situarem quanto ao seu efetivo papel, estimulados por uma aprendizagem reflexiva e investigatória e, conseqüentemente, passível de ecoar em sua prática. Transcendendo a utilização da história da matemática enquanto recurso pedagógico, estas reflexões também favorecem à mobilização, compreensão e melhor articulação de alguns princípios, muitas vezes subjacentes, mas que fulguram no entorno e no contexto de nossa sociedade atual, no âmbito da educação matemática, principalmente.

Portanto, nossa intenção não é apresentar um recurso para o ensino de conteúdos matemáticos, mas promover uma reflexão do processo de construção de conhecimento, baseada no princípio de que o conhecimento, tratado no documento histórico, está inserido em um contexto que considera questões a respeito de sua elaboração e transmissão.

Nesse sentido, a importância de Robert Recorde, na história da matemática é amplamente reconhecida, como afirmam diversos autores, tais como Johnson e Larkey (1935) e Howson (1982), que o citam para se referir à sua contribuição para a área por meio da escrita da primeira série de textos matemáticos em inglês.

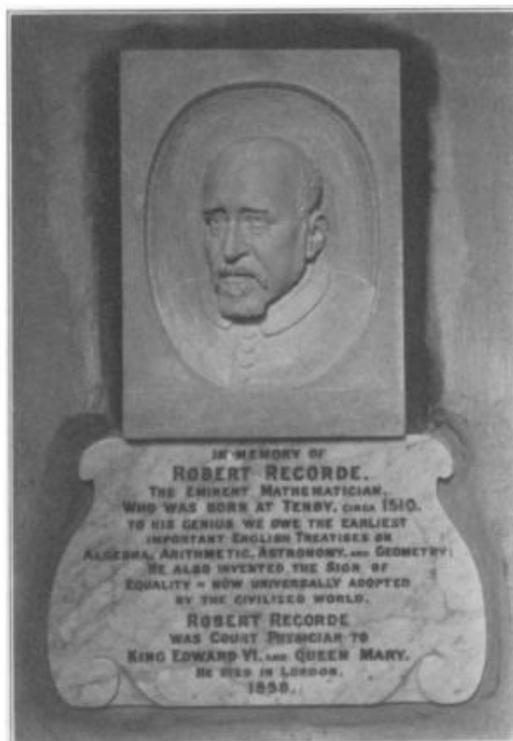
Essas obras de Robert Recorde tiveram grande repercussão no final do século XVI. De acordo com Williams (1995, p. 240, tradução nossa²⁸), “a influência seminal de Robert Recorde no desenvolvimento da aritmética prática na Inglaterra é inquestionável”, visto que ele teve alguma relação, inclusive, com a instrução matemática relacionada a navegação.²⁹

Não há registros da existência de um retrato de Robert Recorde. Alguns autores, como Smith (1921) e Gunther (1922), indicam que há uma pintura dele que é bastante utilizada para ilustrar menções a ele, além de ter sido base para a construção de um monumento em sua homenagem em Tenby (Figura 2). Entretanto, em análises mais aprofundadas, Cassels (1976) relata que o quadro foi produzido anos após a morte de Recorde e, na verdade, não seria uma representação sua.

²⁸ “The seminal influence of Robert Recorde on the development of practical arithmetic in England is unquestionable.” (WILLIAMS, 1995, p. 240)

²⁹ De acordo com Ash (2004), Recorde afirma, em *The Pathway to Knowledge* que a geometria é necessária para a construção de instrumentos relacionados à navegação. Além disso, o autor complementa que Recorde dedicou a obra *The Whetstone of Witte* à Companhia de Moscou (*Muscovy Company*) e prometeu que escreveria um tratado sobre a arte de navegação em breve, o que não aconteceu, devido a sua morte no ano seguinte.

Figura 2 – Monumento em homenagem à Robert Recorde



Fonte: Photographs: Robert Recorde (1921, s.p.).

De acordo com Easton (1981), diversos textos citam Robert Recorde apenas para afirmar que foi o primeiro a utilizar o sinal de igualdade, como conhecemos atualmente, o que marca a passagem para a álgebra completamente simbólica. Tal feito ocorreu no tratado *The Whetstone of Witte*, que ao ser publicado, segundo Goddu (2007), Recorde seria o primeiro a escrever acerca de álgebra na Inglaterra. Além disso, também indica que essa e as demais obras teriam se tornado autoridades no assunto até o fim do século XVI. De fato, ao descrever o que deve ser ensinado de números em uma escola, Brinsley (1612) indica que deve ser ensinado a lê-los ou quantificá-los – por exemplo, que “X” e “10” significam “dez” e “L” e “50” significam “cinquenta” – mas que qualquer outro conhecimento deve ser buscado no tratado de aritmética de Recorde ou outro autor do tipo:

[...] dizer o que qualquer um desses números representa, ou como definir qualquer um deles; será completamente suficiente, tanto quanto necessário, para o seu estudioso comum de gramática. Se você precisar de mais [do que isso] para qualquer [estudioso]; você deve procurar a [obra de] Aritmética de Recorde ou outros autores semelhantes e enviá-los para a escola de Calcular. (Brinsley, 1612, p. 26, tradução nossa³⁰).

³⁰ “[...] to tell what any of these numbers stand for, or how to set downe any of them; will performe fully so much as is needfull for your ordinarie Grammar schollar. If you do require more for any; you must seeke Records Arithmetique, or other like Authors and set them to the Cyphering schoole.” (Brinsley, 1612, p. 26)

Com isso, podemos perceber a relevância de Recorde entre ingleses renascentistas cuja obra de aritmética recebeu suas atenções. De acordo com Broadbent (1947), esse tratado foi, inclusive, exportado e utilizado durante a colonização inglesa na América no século XVII e, para Smith e Clarke (1926), Robert Recorde seria o fundador da escola britânica de matemáticos e o primeiro inglês a escrever a respeito da teoria de Copérnico.

Ao considerar a menção à Recorde nos livros de história da matemática, comumente utilizados, vemos que Roque (2012) apenas o menciona para tratar do sinal de igualdade e Eves (2011) apresenta um breve panorama de sua vida e obras, mas destaca o sinal de igualdade e seu papel no início do simbolismo algébrico. Da mesma forma, Boyer (1974) inicia o capítulo do Renascimento com uma citação do próprio Recorde para enfatizar o sinal de igualdade e, na sequência, apresenta uma breve descrição de sua vida e publicações.

Assim, ao pensar em uma articulação entre história e educação matemática, a obra *The Ground of Artes* se mostra importante, uma vez que a literatura – por exemplo Howson (1982) – frequentemente, destaca a preocupação de Recorde com o ensino. No mesmo sentido, Broadbent (1947) destaca suas escolhas para promover um melhor ensino de aritmética, como a escrita vernacular em forma de diálogo e o tom prático voltado para um contexto comercial. Com esta fundamentação focamos, especificamente, na parte de frações do tratado para investigar a abordagem dada para o ensino deste conteúdo, uma vez que o autor defende a instrução da aritmética por meio de questões de ordem prática.

Dessa forma, em relação às frações, Silva (2005) indica que seu surgimento foi provocado por três necessidades: medir, distribuir e comparar. Alguns exemplos mencionados pela autora são a medição de tecidos e de terras, a distribuição de bens e heranças, e a comparação entre diferentes quantidades. Isso significa que o motivo para utilizarmos as frações emerge de tarefas de medição, distribuição e comparação. Com base nesse tipo de exemplos apresentados por Recorde, vislumbramos uma discussão sobre a relação entre número e quantidade que pode emergir a partir do contexto prático em que eles são apresentados.

Os estudos acerca deste tema indicam que há uma confusão conceitual em relação ao significado de número. Oliveira e Carvalho (2013) realizaram uma pesquisa com um grupo de professoras do Ensino Fundamental e afirmaram que a análise qualitativa mostrou a existência dessa fragilidade. Da mesma forma, Barguil (2018) fez uma revisão da literatura que trata deste assunto e relatou que há equívocos em relação ao conceito de número que, para o autor, é uma ideia que pode ser construída em nossa mente para expressar uma quantidade.

Nesse sentido, Wagner e Davis (2010) afirmam que é necessário que seja abordada a diferença entre a noção de quantidade e a noção de número. De acordo com os autores, “como o número é lentamente, mas certamente, abstraído do contexto, os alunos ficam insensíveis ao significado dos símbolos numéricos que aprendem a manipular” (Wagner; Davis, 2010, p. 40, tradução nossa³¹). Isto é, eles destacam que o ensino de número é constantemente abstraído de contextos práticos, o que ocasiona uma perda do seu significado e da relação com noção de quantidade.

É com base nessas questões que, a seguir, apresentamos nossa pergunta diretriz e os objetivos desta tese.

2.4 Questão e Objetivos

Conforme percebemos em uma leitura preliminar da obra de Recorde, ela apresenta uma proposta para o ensino de frações do século XVI, baseado em uma aritmética prática, em que o conteúdo é apresentado e discutido a partir de questões inseridas em contexto relacionado, principalmente, ao comércio: conversão de pesos e medidas, relação entre diferentes moedas, divisão de lucros, mistura de diferentes compostos etc.

Assim, esta tese tem como pergunta diretriz: **como a abordagem prática apresentada na obra *The Ground of Artes* pode fomentar uma reflexão a respeito da relação entre número e quantidade nas operações com frações?**

A partir dela, temos como objetivo principal: compreender a relação entre número e quantidade na realização de operações com frações que pode ser estabelecida a partir da obra *The Ground of Artes*. Para alcançar tal propósito, delineamos os seguintes objetivos específicos:

- Compreender o contexto do ensino das matemáticas no Renascimento;
- Conhecer a episteme referente ao ensino de frações no século XVI inglês, a partir das obras publicadas a este assunto no período;
- Interpretar o tratado *The Ground of Artes*, com foco na parte de frações;
- Debater a abordagem dada por Recorde para o ensino de frações no século XVI, baseado em exemplos apresentados nesta seção da obra.

³¹ “As number is slowly but surely abstracted from context, students become numb to the meaning of the numeric symbols they learn to manipulate” (Wagner; Davis, 2010, p. 40).

2.5 Caminhos metodológicos

Em relação ao tipo de pesquisa, esta tese caracteriza-se com um estudo documental com base em uma pesquisa bibliográfica, pois foi realizada a partir do que já foi publicado sobre o assunto, “com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa” (Prodanov; Freitas, 2013, p. 54). Este tipo de metodologia foi utilizado em todo nosso trabalho, de modo a conseguirmos base referencial para estudar o tratado *The Ground of Artes*.

Para o estudo do tratado e seu contexto de elaboração e produção, procedemos com um estudo documental que, de acordo com Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009) é uma metodologia que tem um documento como principal fonte de investigação, em nosso caso, este documento é *The Ground of Artes* e de seu estudo emergiu nosso objeto de pesquisa. Segundo Pereira e Saito (2019, p. 348-349), o estudo preliminar do texto histórico para fins de construção de interfaces entre história e ensino visa “promover uma primeira apreciação do texto, que propicia aceder a diferentes questões de ordem matemática, e outras tantas epistemológicas, que podem ser exploradas no ensino de matemática.”

Nesse sentido, para realizar este estudo, além da obra em questão, foi necessário verificar uma rede de textos que poderiam estar relacionados a ela. De acordo com Radford *et al.* (2014, p. 102, tradução nossa³²), “como textos publicados tendem a ser o ponto final da investigação matemática, tanto do processo de resolução de problema, quanto do processo de escrita, esses textos dão um sentido limitado da atividade matemática.” Com isso, os autores sugerem que uma publicação, por si própria, pode não manifestar o real sentido do fazer matemático no contexto em que está inserida. Desta forma, se faz necessária a construção de uma rede de textos que possam mostrar a episteme da época para que, então, o conteúdo apresentado pelo autor da publicação possa ser compreendido.

Para estudar todo esse material histórico, partimos do conceito de construção de interfaces, “[...] aquela que, embora tenha alguns pressupostos e concepções sobre história e ensino, constrói-se no movimento da pesquisa com a prática pedagógica” (Saito; Dias, 2013, p. 91), de forma a contribuir para o campo da educação matemática. Note que, não objetivamos defender que a interface é uma metodologia, mas mostrar como a escolha de realizar uma

³² “Because published texts tend to be the endpoint of mathematical investigation, both of the problem-solving process and of the writing process, these texts give a limited sense of mathematical activity.” (Radford *et al.*, 2014, p. 102).

pesquisa que visa a construção de interfaces entre história e educação matemática, com base em uma perspectiva historiográfica atualizada, pode guiar o processo de produção deste estudo.

De acordo com Saito e Dias (2013), para construir uma interface, devem ser considerados aspectos epistemológicos de ambas as áreas de conhecimentos, no nosso caso, a história e a educação matemática para evidenciar o contexto de elaboração do conhecimento e seu processo histórico de desenvolvimento

Com isso, realizamos um estudo de *The Ground of Artes*, com base nos conhecimentos presentes na Inglaterra do século XVI, onde foi produzido. Segundo Pereira e Saito (2018, p. 113), para isso, é necessário que seja observado “o conteúdo matemático, método e os motivos por trás da escrita do documento, contextualizando na época em que foi elaborado e, portanto, considerando todas as características de ordem matemática, técnica e epistemológica como propõe uma historiografia contemporânea.”

Para conhecer o contexto de elaboração e produção de *The Ground of Artes*, a fim de entender o ensino de aritmética no âmbito de matemáticas práticas e teóricas, exploramos, no próximo capítulo, esses dois contextos, pois a obra de Recorde indica tratar de uma aritmética prática, embora o próprio autor e diversos tratados provêm de um estudo mais teórico das matemáticas em contexto universitário. Para complementar, apresentamos o debate entre as matemáticas práticas e teóricas que aconteceu no Renascimento para, então, conhecer o que foi publicado a respeito de frações no século XVI.

3 O CONTEXTO DE ELABORAÇÃO DE *THE GROUND OF ARTES*

Neste capítulo apresentamos o contexto renascentista inglês e a produção de conhecimentos; as matemáticas nas universidades com o estudo do *Quadrivium*; as matemáticas práticas e seu contexto de elaboração e transmissão, além dos tratados de aritmética publicados na Inglaterra no século XVI.

3.1 O contexto renascentista inglês e a produção de conhecimentos

Como mencionamos anteriormente, *The Ground of Artes* foi elaborado e publicado durante o século XVI, na Inglaterra, em que seu autor viveu um período marcado por mudanças de reinado e religião, que influenciaram sua vida e a produção de suas obras. Assim, nesta seção apresentamos um breve panorama deste cenário para que possamos entender as possíveis questões que estão por trás da elaboração deste tratado.

Ao iniciar a leitura da segunda edição da primeira obra de Recorde, já podemos ver que é dedicada ao príncipe Edward VI da família Tudor: “AO MAIS CRISTÃO PRÍNCIPE EDWARD SEXTO, pela graça de Deus, rei da Inglaterra, França e Irlanda, defensor da fé e das igrejas da Inglaterra e Irlanda na terra, o chefe supremo” (Recorde, 1552, s.p., tradução nossa³³). Da mesma forma, o tratado *The Pathewaie to knowledge*, também é dedicado a esse monarca e *The Castle of Knowledge* para sua irmã, a princesa Mary I: “PARA A MAIS PODEROSA E MAIS PUJANTE PRINCESA MARY, PELA graça de Deus Rainha da Inglaterra, Espanha, Ambas Sicílias, França, Jerusalém e Irlanda: Defensora da fé: Arquiduquesa da Áustria: Duquesa de Milão [...] etc.” (Recorde, 1556, s.p., tradução nossa³⁴).

De acordo com Meyer (2010), os Tudors estiveram no poder de 1485 a 1603, sob o reinado consecutivo de Henry VII (de 1485 a 1509), Henry VIII (de 1509 a 1547), Edward VI (de 1547 a 1553), Mary I³⁵ (de 1553 a 1558) e Elizabeth I (de 1558 a 1603). Como podemos ver, as datas de publicação desses três tratados coincidem com o período em que as pessoas a

³³ “TO THE MOSTE CHRISTIAN PRINCE EDWARD THE syxte, by the grace of God, kynge of Englande, Fraunce, and Irelande, defendour of the fayth, and of the churches of England, and Ireland in earth, the supreme heade” (Recorde, 1552, s.p.).

³⁴ “TO THE MOSTE MIGHTIE AND MOST PUISSANT PRINCESSE MARYE, BY the grace of God Queene of England, Spain, bothe Siciles, Fraunce, Jerusalem, and Irelande: Defendour of the Faithe: Archeduchesse of Austria: Duchesse of Millayne [...] &c.” (Recorde, 1556, s.p.).

³⁵ Houve um breve reinado de Jane Grey, em uma tentativa de seu primo Edward VI, por questões religiosas. Entretanto, ele durou apenas 9 dias e Mary I retomou o poder e assumiu o trono, que deveria ser dela após a morte precoce de seu irmão Edward VI, aos 15 anos.

quem eles foram dedicados estavam no poder, o que era comum durante o período pela cultura do patrocínio que, segundo Feingold (1984), era como diversos profissionais conseguiam seus empregos. O autor afirma que, no caso das matemáticas, esse sistema teria auxiliado os estudos de práticas, uma vez que com elas se alcançaria uma Inglaterra gloriosa. Com isso, o autor indica que diversos tratados apresentavam, em seus prefácios, uma dedicação à família real ou a pessoas influentes que fizessem parte da corte inglesa ao considerar o preceito de que eles estariam preocupados com o futuro do país. De fato, Recorde foi empregado pela corte para trabalhar como supervisor na Casa da Moeda e em minas.

Nesse sentido, de acordo com Roberts (2016), Recorde viveu sob o governo de 3 membros da família Tudor, Henry VIII, Edward VI e Mary I. Apesar de ser galês, morou por muitos anos na Inglaterra e foi considerado inglês pelo Ato de União (*Act of Union*) entre a Inglaterra e o País de Gales, que dava à população galesa os mesmo direitos e deveres daqueles que haviam nascido na Inglaterra, uma vez que todos faziam parte do domínio do rei. Com isso, Recorde é comumente referido como um matemático³⁶ inglês por diversos autores, como Howson (1988) e Archibald (1949).

Durante o século XVI, de acordo com Moorman (1980), se instaurou na Europa uma discussão que defendia uma reforma religiosa, com base nas ideias do alemão Martin Luther (1483-1546), conhecida como reforma protestante que deu fundamento a Henry VIII para romper com a Igreja Católica e fundar a Igreja Anglicana na Inglaterra, com ele – o rei – como chefe supremo da igreja na Terra. Esse rompimento foi impulsionado pela falta de apoio do papa católico – chefe supremo da igreja católica – para que ele se divorciasse de sua então esposa, Catherine of Aragon. Nesse sentido, o autor afirma que Cambridge foi um dos locais em que os escritos de Luther foram debatidos por diversos entusiastas já na década de 1520.

Inserido neste contexto, Robert Recorde apoiou a nova religião e se tornou protestante. Para Roberts (2016), esse pode ter sido um dos motivos de sua mudança de Oxford para Cambridge durante seus estudos universitários, pois a primeira ainda representava um grande perigo para os defensores³⁷ do protestantismo, inclusive ser queimado na fogueira por heresia. Além disso, o autor indica que sua religião também pode ter influenciado a escolha da imprensa

³⁶ Neste texto, utilizamos o termo matemático para nos referirmos aquele que se dedicou ao estudo das matemáticas no período em questão, partindo da sua concepção de ciência. No caso de Recorde, essas matemáticas incluíam as disciplinas do *Quadrivium*, que são discutidas nos capítulos posteriores.

³⁷ Roberts (2016) cita o caso de Thomas Bilney (1495-1531), professor de Oxford, que foi queimado na fogueira por heresia em 1531, por se recusar a negar as ideias de Luther e o protestantismo.

para publicação de seus tratados, uma vez que o impressor, Reynold Wolfe³⁸, era um protestante comprometido e possuía estreita relação com membros da corte, por exemplo Thomas Cranmer (1489-1556) – que ficou conhecido como líder da reforma religiosa inglesa.

Em relação ao contexto educacional, o século XVI faz parte da época conhecida como Renascimento, que iniciou em meados do século XV e, de acordo com Saito (2015, p. 160-161), “correspondeu a um período de ‘renascimento’ do conhecimento ao lado das artes e literatura, que conduziu ao desenvolvimento da ciência moderna.” Segundo o autor, oito aspectos são importantes para caracterizar este período: o desenvolvimento do humanismo; a valorização das artes manuais; o surgimento da imprensa, que refletiu em uma circulação de conhecimento; a utilização de idiomas vernáculos; a reforma no ensino (com enfoque mais prático e menos teórico); o aumento de confiança na condução de observações e experimentações; a renovação no interesse pelas matemáticas e fenômenos naturais; e pelas concepções místicas e mágicas do universo.

A obra de Recorde reflete alguns desses aspectos, uma vez que, de acordo com Roberts (2016), foi considerado um humanista, utilizou a imprensa para publicar seus tratados – que passou por diversas reimpressões que não seriam possíveis se ainda estivesse em uma tradição manuscrita – e escolheu o inglês para escrevê-los. Além de ter um papel na reforma do ensino, no sentido de valorizar o viés prático das matemáticas, e a republicação e divulgação de seus tratados mostra o renovado interesse por esta ciência.

Em relação a esses aspectos, o primeiro deles, o humanismo, teve influência em diversos outros. De acordo com Roque (2012), esse movimento cultural que tinha como base os escritos da antiguidade clássica, teve início na Itália e se espalhou pelo continente europeu. A autora afirma que, inicialmente, os humanistas não tinham uma educação formal e eram autodidatas – o que influenciou sua desconsideração pela escolástica – quando chegaram às universidades como professores, somente no final do século XV.

Howson (1982, p. 7, tradução nossa³⁹) afirma que “os humanistas, estudiosos como Erasmo (c. 1466-1536), acreditavam nos poderes do intelecto humano e no valor do estudo das

³⁸ Reynold Wolfe – também conhecido como Reyner, Reynar ou Reginald – foi um protestante estrangeiro que se estabeleceu em Londres na primeira metade do século XVI, possuindo uma Casa de Impressão (*printing house*) no adro da Catedral de St. Paul. Roberts (2016) explora esse estabelecimento de Wolfe na Inglaterra e sua relação com Recorde e a publicação de seus livros.

³⁹ “The humanists, scholars like Erasmus (c. 1466-1536), believed in the powers of the human intellect and in the value of the study of the works of great men.” (Howson, 1982, p. 7)

obras dos grandes homens.” Nesse sentido, as matemáticas não eram tão atrativas para eles, porque focavam no estudo das ciências humanas. Contudo, Roque (2012) afirma que muitos dos humanistas foram matemáticos das cortes com atuação em funções políticas, e que a própria matemática do Renascimento foi influenciada por este movimento, uma vez que novas traduções de clássicos gregos foram feitas e citadas em obras de humanistas do século XV.

De acordo com Williams (2013), os humanistas tinham como um de seus ideais que as pessoas tivessem um alto nível de educação e vivessem em prol do bem-estar de sua comunidade (*commonwealth*). Isto pode ser percebido na obra de Recorde, quando salienta seu dever em ajudar a nação com seu conhecimento:

[...] eu sou ousado em me colocar em impresso, com a habilidade que Deus me emprestou, embora não com tanta destreza como muitos homens, mas com tanto afeto quanto qualquer homem para ajudar os homens de meu país, e não cessarei diariamente, (tanto quanto minha pequena habilidade me permitir) para compor tal coisa, que será para a instrução [...] (Recorde, 1648, s.p., tradução nossa⁴⁰)

Ainda nesse sentido, Feingold (1984) discorre sobre um ideal de educação que ocorreu no século XVI e XVII, que fez com que nobres se interessassem pelas ciências e patrocinassem estudiosos que lidassem com essas questões. Dessa forma, diversos tratados de matemática prática foram publicados baseados na convicção de que esses conhecimentos seriam uteis para o crescimento da glória da Inglaterra. Isto pode ser visto já no início do prefácio ao leitor, de *The Ground of Artes*, em que ele escreve: “muitas vezes lamentei comigo mesmo a infeliz condição da Inglaterra, vendo tantos grandes eruditos surgirem em diversas outras partes do mundo, e tão poucos aparecendo nesta nação” (Recorde, 1648, s.p., tradução nossa⁴¹). Com isso, o autor embasa a produção de sua obra na necessidade de educação no país, que beneficiaria a Inglaterra em equiparação com os demais países.

Esta questão também pode ser relacionada com a busca por conhecimentos especializados que aconteceu na Inglaterra, durante o século XVI, conforme relatado por Ash (2004), que incluía os relacionados às matemáticas práticas, por exemplo, ligados à navegação. Este tipo de busca por conhecimento pode ter influenciado a republicação e divulgação dos textos de Recorde, pois tinham este viés prático. O último livro do autor, *The Whetstone of*

⁴⁰ “[...] am I bold to put my self in Presse, with such ability as God hath lent me, though not with so great cunning as many men, yet with as great affection as any man to help my Country men, and wil not cease dayly, (as much as my smal ability will suffer me) to endite some such thing, that shall be to the instruction [...]” (Recorde, 1648, s.p.).

⁴¹ “Sore oft times have I lamented with my selfe the unfortunate condition of England, seeing so many great Clerks to arise in sundry other parts of the world, and so few to appear in this our Nation. (Recorde, 1648, s.p.).”

Witte, foi dedicado à *Muscovy Company* (Recorde, 1557), uma iniciativa que buscava a instrução de navegantes. De acordo com Ash (2004) Recorde teria prometido escrever um tratado a respeito de navegação para essa companhia, possivelmente, para a instrução desse público de exploradores, embora não exista evidências.

Como apontado anteriormente, a ampla publicização de tratados se deu, principalmente, graças ao surgimento da imprensa que, de acordo com Bacon (1973, p. 94 *apud* Beltran, 2017, p. 24), foi considerada, pelos pensadores do período, uma das invenções que mudou “o aspecto e estado das coisas em todo o mundo”, que teria provocado essa mudança em relação às letras. Assim, as obras que antes eram publicadas como manuscritos e que teriam pouco alcance, passaram a ser impressas em mais cópias devido a otimização do processo – que pode ser visto na Figura 3 – para atingir um público maior.

Figura 3 – Processo de impressão de livros



Fonte: Straet e Collaert (c. 1600, plate 4).

Anglin e Lambek (1995) afirmam que a imprensa foi uma invenção chinesa, que chegou a Europa em 1450 e representou um fator importante para a divulgação do conhecimento matemático. Antes, muitos dos tratados matemáticos só possuíam um exemplar e o ato de copiá-lo era muito trabalhoso e demorado, o que tornava o conhecimento matemático restrito a quem possuísse o original da obra. Nesse sentido, a criação da imprensa influenciou a existência de tantas edições e republicações de *The Ground of Artes*, pelo menos 15 até o ano de 1600

segundo Easton (1967), o tornando o livro de aritmética em inglês mais popular do referido século.

Mesmo com o humanismo e o debate em relação aos conhecimentos práticos ganhando espaço na Inglaterra, aqueles que desejassem ter um ensino formal ainda precisariam realizar sua formação com base na ciência aristotélica, que era o conhecimento vigente e aceito nas universidades. Assim, esse ensino formal, em relação às matemáticas, é apresentado na seção seguinte.

3.2 As matemáticas nas universidades: o estudo do *Quadrivium*

A área matemática como conhecemos hoje começou a ser institucionalizada apenas a partir do século XVIII.⁴² Antes disso, existia um rol de disciplinas que se caracterizavam como matemáticas, como a aritmética, a geometria, a música, a astronomia, a astrologia, arquitetura, cosmografia etc. Segundo Oliveira, Silva e Godoy (2021), no século XVI, essas e diversas outras áreas de conhecimentos foram classificadas como matemáticas por John Dee e apresentadas em um diagrama com cerca de trinta disciplinas no Prefácio Matemático (*Mathematicall Præface*) escrito para a tradução inglesa de *Os Elementos*, de Euclides, feita por Henry Billingsley.⁴³

Essas matemáticas estavam presentes tanto em um âmbito prático – arquitetura, navegação geografia etc. – quanto no acadêmico – aritmética, geometria, música, astronomia etc. Neste segundo contexto, essas quatro disciplinas ficaram conhecidas por compor o *Quadrivium*⁴⁴ que, junto com *Trivium* (gramática, lógica e retórica), formavam as sete artes liberais, que faziam parte do currículo da Faculdade de Artes (*Arts faculty*).

Assim, conforme pode ser visto no frontispício de *The Ground of Artes*, a partir da versão de 1552, Recorde seria Doutor em Medicina (*Doctor of Physick*). Segundo Dear (2001), este título de doutor poderia ser adquirido apenas em três áreas (medicina, direito e teologia) – após o estudante se tornar Bacharel e Mestre em Artes (*Bachelor and Master of Arts*). Em relação a essas três áreas, o autor afirma que algumas instituições, como a Universidade de Paris

⁴² A respeito da institucionalização da matemática como área de conhecimentos com as feições modernas, vide Saito (2015).

⁴³ *The elements of geometrie of the most auncient Philosopher Euclide of Megara* (1570), de Henry Billingsley.

⁴⁴ A geometria, aritmética, música e astronomia já eram consideradas matemáticas desde a época de Platão (427 a.E.C.-347 a.E.C), entretanto, foram agrupadas e denominadas *Quadrivium* na Idade Média (Saito, 2015).

e a de Oxford, consideravam a Teologia a mais importante das ciências a serem estudadas.⁴⁵ Dear (2001) ainda afirma que esta estrutura organizacional teria sido definida na época medieval, mas ainda permanecia praticamente a mesma em meados do século XVI, período em que Recorde estaria na universidade. Portanto, Recorde estaria inserido neste contexto de estudo das artes liberais e, para entender a proposta de seus tratados seria importante conhecê-lo.

Assim, essas universidades do século XVI surgiram no período medieval, por volta dos anos 1100 – 1200, em Bologna, Oxford e Paris. Antes, existiam escolas pequenas nos centros urbanos, mas, devido ao desenvolvimento comercial e econômico, surgiram as universidades. Para Saito (2015), como mencionado, essas instituições permitiam que os estudantes adquirissem os graus de bacharel, mestre e doutor ao se dedicar, inicialmente, às sete artes liberais. Nesse sentido, de acordo com Drake (1970), estas instituições eram conservadoras e tinham o objetivo de preservar o ensino e promover a sua transmissão.

Seguindo essa estrutura organizacional Dear (2001) afirma que, nos anos 1500, as universidades utilizavam o latim como linguagem oficial e tinham como base de ensino os princípios da escolástica⁴⁶ aristotélica, ou seja, da filosofia de Aristóteles (384 a.E.C.-322 a.E.C.). Esta, por sua vez, tinha como principal ciência a Filosofia Natural e sua preocupação com o conhecimento da natureza e sua possibilidade de explicar todos os aspectos do mundo natural, além de considerar a Terra como centro do universo, que seria sua posição natural. Em relação às ciências matemáticas, para o autor, nas disciplinas do *Quadrivium* que eram estudadas, os aristotélicos consideravam a geometria e a aritmética como matemáticas mais puras por lidar com entes abstratos, e a astronomia e a música como matemáticas mistas, subordinadas as duas primeiras.

O *Quadrivium* fazia parte do que era ensinado no currículo da Faculdade de Artes presentes nas universidades do século XVI e consistia em uma ciência mais contemplativa, por não ter mais algo realmente novo a ser descoberto. De acordo com Dear (2001), contudo, é importante ressaltar que mesmo com o *Quadrivium* fazendo parte dessa estrutura curricular, as matemáticas nem sempre tinham um lugar importante no que era ensinado porque o objetivo

⁴⁵ Essas instituições estavam associadas a igreja, em que muitos dos acadêmicos eram parte do clero, pois eles eram alguns dos poucos que teriam sido alfabetizados (Dear, 2001).

⁴⁶ Etimologicamente, o termo ‘escolástico’ (*scholasticus*) se referia a uma pessoa devota a uma cultura do intelecto, que não se importava com questões materiais ou públicas. Este termo ou *scholar* foi comumente associado aqueles que tinham uma função de ensino, fazendo com que a ciência ou filosofia ensinada por eles começasse a ser conhecida por escolástica. (Wulf, 2003).

dessas instituições seria o treinamento dos jovens⁴⁷ em uma das três profissões que formavam. Howson (1982), no mesmo sentido, afirma que estudar as matemáticas não seria motivo para ir para a universidade, porque estas davam pouca ênfase para seu ensino.

Para Saito (2015), é importante observar que o ensino não era unificado e cada faculdade poderia utilizar diferentes manuscritos, ou seja, poderia ser dado mais ênfase ao *Trivium* ou ao *Quadrivium*. Mesmo as universidades de um mesmo país, por exemplo as inglesas Oxford e Cambridge, poderiam apresentar diferenças em sua estruturação. Lloyd (2012, p. 149, tradução nossa⁴⁸) afirma que a segunda teria sido considerada “[...] mais na vanguarda da inovação educacional do que Oxford naquela época”, devido ao currículo de algumas de suas faculdades e as mudanças⁴⁹ ocorridas entre o final do século XV e início do século XVI.

Um exemplo de incentivo ao estudo das matemáticas é citado por Howson (1982) quando indica que John Cheke (1514-1557) foi o primeiro professor de grego em Cambridge e estimulava seus alunos a estudarem as matemáticas, principalmente, a geometria presente no livro de Euclides. Em 1549, os Estatutos Eduardianos estipularam – provavelmente por influência de Cheke – que todos os alunos do primeiro ano de faculdade (*freshmen*) deveriam estudar as matemáticas como fundamento para uma educação liberal em especial aritmética, geometria e astronomia.

De acordo com Easton (1981), inserido nesse contexto, Recorde se formou como médico e estudou nas universidades de Oxford e Cambridge e, possivelmente, ministrou aulas das matemáticas nestas instituições⁵⁰, uma vez que isso fazia parte da tradição. Assim, conforme seus estudos, suas obras matemáticas foram dedicadas, em geral, ao *Quadrivium: The Ground of Artes* de aritmética; *The Pathwaie to Knowledge* de geometria; *The Castle of Knowledge* de astronomia; e *The Whetstone of Witte* com a segunda parte da aritmética⁵¹.

⁴⁷ Esses eram apenas homens, uma vez que mulheres não eram admitidas na universidade no século XVI. Segundo Dear (2001), isto pode ter relação com o fato de os clérigos não poderem ser do sexo feminino e da estreita relação entre igreja e universidades.

⁴⁸ “[...] being regarded as more in the van of educational innovation than Oxford at that time.” (Lloyd, 2012, p. 149).

⁴⁹ Segundo Lloyd (2012), uma dessas mudanças está relacionada a uma mudança curricular, em 1488, que aconteceu em Cambridge e favoreceu a erudição humanística (*humane letters*).

⁵⁰ A autora afirma que não há publicações que mostrem detalhes da sua carreira universitária em Cambridge e Oxford. Howson (1982) também concorda com a afirmação e indica que há alguns indícios nas obras de Recorde de que ele pode ter ensinado nas universidades, mas que não há comprovação.

⁵¹ Alguns autores indicam que este livro trata de álgebra (Cajori, 1922; Roberts; Smith, 2012).

Por sua família fazer parte da nobreza, Recorde teve uma educação mais formal, chegou à universidade onde, segundo Easton (1981), se graduou como *Bachelor of Arts* (B.A.) em Oxford, em 1531 e tornou-se membro (*fellow*) da *All Souls College*. A autora completa que foi, também, na universidade que Recorde obteve uma licença para praticar medicina, o que, geralmente, acompanhava o grau de *Bachelor of Medicine* (B.M.) e se tornou *Doctor of Medicine* (M.D.)⁵² somente em 1545, pela Universidade de Cambridge.

Para Roberts (2016), dentre as possibilidades da mudança de Oxford para Cambridge está a boa reputação da segunda para estudos de medicina e das matemáticas, o que é confirmado por Lloyd (2012) quando ressalta que Cambridge era considerada mais adepta às inovações no ensino do que Oxford, o que tem relação com as reformas que aconteceram na primeira para favorecer questões defendidas pelo humanismo, como por exemplo, a criação de disciplinas/palestras (*lectureships*) de medicina⁵³ e das matemáticas. Essas mudanças ocorrem no mesmo período em que aconteceu, na Inglaterra, a Reforma Protestante quando o rei Henry VIII rompeu com a igreja Católica Romana e tornou a faculdade *All Souls* um ambiente mais hostil para Recorde, que aderiu ao Protestantismo.

Após obter seu doutorado em medicina, Recorde foi para Londres e pode ter atuado como médico e/ou tutor particular. Há relatos que indicam que foi médico da família real Tudor (Cajori, 1922; Sleight, 1942), mas conforme Easton (1981), não há comprovações de tal fato. Entretanto, de acordo com Williams (2012), prestou diversos serviços à corte inglesa, tais como supervisor da extração de minérios nas minas de Clonmines, na Irlanda, e administrador da Casa da Moeda de Bistol e de Dublin, ocupação que provocou desavenças com pessoas influentes que, por conseguinte, levaram Recorde à prisão, onde morreu em 1558.

Não sabemos quando Recorde começou a produção de seus tratados, somente que a primeira data de publicação foi no início da década de 1540, ou seja, antes de finalizar seus estudos em Cambridge e obter seu título de doutor. Em relação a *The Ground of Artes*, há diversas diferenças entre as primeiras edições, em específico, aquelas de 1543 e 1552. Além do conteúdo em si, em que na última é acrescida uma nova seção dedicada ao estudo de frações,

⁵² Podemos notar que no ano de publicação da primeira edição ainda existente de *The Ground of Artes*, em 1543, Recorde ainda não era doutor, constando apenas seu nome no frontispício da obra (Figura 1). Nas edições posteriores a 1545, o frontispício já indica que foram produzidas por “Robert Recorde, Doctor of Physike”. (Easton, 1967).

⁵³ Lloyd (2012) discorre, em mais detalhes, sobre os fatores que levaram a criação destas disciplinas e a influência e patrocínio de Thomas Linacre (1460-1524), através de seu testamento, para que elas fossem estabelecidas nas universidades de Oxford e Cambridge.

Williams (1995) afirma que também é possível identificar algumas características em relação ao seu modo de ensino que:

[...] era particularmente claro e superior ao de seu predecessor inglês, embora em sua primeira edição fosse menos abrangente. [...] As experiências de Recorde nas casas da moeda devem ter influenciado os acréscimos que ele fez à edição ampliada de seu livro publicada em 1552 (Williams, 1995, p. 240-241, tradução nossa⁵⁴).

O autor indica que o fato de Recorde estar presente em um contexto de fabricação de moedas e administração de riquezas, que demandam diversos conhecimentos relacionados a aritmética prática, pode tê-lo ajudado na escrita de seu livro. Realmente, a primeira versão da obra não continha a parte de frações o que tornava difícil lidar com conhecimentos relativos à mistura de metais para a fabricação de moedas, o que é visto nas edições a partir de 1552.

Os tratados de Recorde possuíam uma discussão voltada para a prática, quando o currículo universitário, por outro lado, abordava uma ciência mais contemplativa. Segundo Dear (2001, p. 3, tradução nossa⁵⁵), “o prestígio acadêmico tendia, como resultado, a acumular-se à filosofia abstrata destinada a servir ao estabelecimento da verdade; essa era a contraparte racional da crença e falava mais de convicção intelectual do que de *know-how* prático.” Isso significa que a preocupação, de grande parte dos estudiosos universitários, seria com um saber teórico presente nos livros, de acordo com a tradição contemplativa aristotélica, em detrimento dos saberes práticos, advindos das ciências que tivessem algum viés mais empírico.

É importante ressaltar que este mesmo modelo de ensino, baseado no *Trivium* e no *Quadrivium*, era adotado desde o início dos estudos de um indivíduo, como base ao caminho a ser trilhado para chegar nas universidades. Este trajeto iniciava em casa e passava pelas escolas para crianças (*petty schools*), pelas escolas de gramática (*grammar schools*) e/ou tutores particulares, até chegar nas universidades. Vale lembrar que a maioria das pessoas não tinha uma educação formal em instituições de ensino, Lawson e Silver (1973) ressaltam que a sociedade inglesa renascentista era formada basicamente por comunidades locais – e Londres, como o grande centro urbano – que, muitas vezes, não possuíam escolas, ou seja, eram predominantemente analfabetas, orais e com o trabalho manual como principal ocupação.

⁵⁴ “[...] was particularly clear and superior to that of its English predecessor, although in its first edition it was less comprehensive. [...] Recorde's experiences at the mints must have influenced the additions he made to the enlarged edition of his book that was published in 1552.” (Williams, 1995, p. 240-241)

⁵⁵ “Scholarly prestige tended as a result to accrue to abstract philosophizing intended to serve the establishment of truth; this was the rational counterpart of belief, and spoke to intellectual conviction rather than practical know-how” (Dear, 2001, p. 3).

Neste contexto indicado por Lawson e Silver (1973), a educação das crianças vinha de seu convívio familiar, por suas mães e da prática e imitação dos ofícios dos mais velhos que passavam de geração em geração. Os autores também destacam que não há um reconhecimento de infância neste período ou diferença entre “mundo dos adultos” e “mundo das crianças”. Essas crianças eram vistas como adultos imperfeitos, sem necessidades ou direitos, mas como propriedades dos pais, eram tratadas como adultos a partir dos sete anos e passíveis de ser responsabilizadas criminalmente. Com isso, poucas eram as que tinham algum tipo de instrução escolar, principalmente, quando provinham das classes mais baixas da sociedade.

Para Lawson e Silver (1973), apesar disso, o período renascentista viu um crescimento financeiro de donos de terra e ascensão social de classes mais baixas o que resultou em uma demanda maior pela educação dos filhos dessa nova burguesia, que buscava melhores padrões de vida. Com isso, a igreja passou a desempenhar um papel importante na educação dos mais jovens, principalmente, em comunidades menores, onde não havia professores e os sacerdotes eram os únicos com conhecimento formal universitário.

Assim, de acordo com Charlton (1968), em geral, era em suas próprias casas que as crianças aprendiam a ler e escrever para, então, começarem a frequentar as *grammar schools* com seis ou sete anos. Contudo, muitas vezes, eram requeridas qualificações em relação ao grau de instrução para que essa entrada na escola fosse possível o que poderia incluir de acordo com os estatutos de cada instituição: leitura e escrita fluente; conhecimento da Gramática de Donatus⁵⁶; conhecimento do Credo apostólico e os 10 mandamentos; entre outros. O autor complementa que, em alguns casos, estudantes poderiam receber uma instrução prévia ao início efetivo da *grammar school*, dada por sacerdotes ou alunos mais velhos, que os ensinavam a ler perfeitamente. Esse ensino da língua vernácula era realizado nas *petty schools*, devido ao público-alvo ter ficado conhecido como *petties*, ou seja, crianças mais novas.

Essas *petty schools*, segundo Hoole (1912, p. 59, tradução nossa⁵⁷), seriam “[...] o local onde, de fato, os primeiros Princípios de toda Religião e aprendizagem poderiam ser ensinados [...]”, com o objetivo de ensinar a ler em inglês. De acordo com o autor, nas grandes cidades os alunos poderiam começar a frequentar essas escolas com 4 ou 5 anos e, para seus professores,

⁵⁶ Aelius Donatus (c.325 - c.275) foi um famoso gramático romano que escreveu os tratados *Ars maior* e *Ars minor*, sendo o segundo dedicado ao ensino de uma instrução elementar, para estudantes mais jovens, das partes do discurso (Britanica, 2011).

⁵⁷ “[...] the place where indeed the first Principles of all Religion and learning ought to be taught [...]” (Hoole, 1912, p. 59).

dentre as qualificações necessárias era ter conhecimento básico de latim⁵⁸, uma caligrafia razoável e boas habilidades em relação à aritmética. Além dos sacerdotes e alunos mais velhos, Watson (1901) afirma que as aulas nas *petty schools*, muitas vezes, eram conduzidas por senhoras e damas, mesmo que não tivessem muito conhecimento. O autor indica ainda que eram poucas as publicações voltadas para instrução dos *petties*, mas o tratado⁵⁹ de Charles Hoole (1610–1667), publicado pela primeira vez em 1659, seria um dos primeiros a mostrar essa preocupação.

Com esses conhecimentos prévios, as crianças poderiam estudar nas *grammar schools* que, de acordo com Charlton (1968), eram frequentadas tanto por filhos de burgueses, donos de terras, advogados e comerciantes, quanto por aqueles de classe sociais mais baixas. Por outro lado, os filhos da nobreza, geralmente, recebiam educação por tutores particulares em suas próprias casas ou indo morar na residência desses tutores (*boarding schools*), com seus gastos custeados pelos pais. Lawson e Silver (1973) afirmam que este segundo contexto também se aplicava às filhas dos nobres e comerciantes mais abastados, que poderiam ter um alto nível de educação, de acordo com suas próprias habilidades e com o que seus pais considerassem adequado. Os autores indicam que, em geral, as meninas eram educadas em casa ou em conventos, podiam frequentar as *petty schools* ou outras escolas que ensinassem inglês, mas não era permitido que estudassem em uma *grammar school*.

Baseado nesse contexto, Dear (2001) indica que era nas *grammar schools* que os estudantes aprendiam latim, um pré-requisito para entrar em uma universidade, pois o ensino era feito nesse idioma. Contudo, Howson (1982) acrescenta que, com os movimentos culturais que aconteceram no Renascimento, em especial o humanismo, o currículo escolar começou a se expandir com a inclusão do estudo de grego, hebraico e aritmética, sendo esta última de menor importância.⁶⁰

Nesse sentido, da mesma forma que acontecia nas universidades, também não havia grande ênfase para as matemáticas nas *grammar schools*. De acordo com Charlton (1968), ao

⁵⁸ Embora essa seja uma qualificação, o autor indica que o latim não deve ser ensinado para as crianças em geral, somente para aquelas mais ávidas de conhecimento, uma vez que algumas dessas crianças não necessariamente iriam para as *grammar schools* em seguida.

⁵⁹ Este tratado, do mesmo autor, foi intitulado: *The Petty Schoole, shewing a way to teach little children to read English with delight and profit (especially) according to the New Primar* e faz parte da obra *A new discovery of the old art of teaching school*.

⁶⁰ Howson (1982) apresenta um diagrama com horários e aulas de uma *grammar school* (Anexo B) de 1598, em que podemos ver que somente um horário era dedicado ao estudo da aritmética e que, segundo o autor, seria menos propício para a aprendizagem.

abordar a erudição requerida para entrar em uma *grammar school*, o foco estava nas áreas de leitura, escrita, e aritmética,⁶¹ com menor ênfase dada à última. O autor afirma que objetivo dessas escolas era, principalmente, religioso, ou seja, ensinar a ler e escrever para “[...] capacitar a criança para dominar os elementos de sua vida religiosa, a oração do Pai Nosso, os Dez Mandamentos, o Credo e os Sete Sacramentos” (Charlton, 1968, p. 101, tradução nossa⁶²).

Estas informações concordam com o apresentado por Lawson e Silver (1973, p. 117, tradução nossa⁶³), que afirmam que dentro das *grammar schools*, os alunos deveriam receber instrução de latim – como ler, escrever e falar no idioma – em aulas que incluíam “[...] retórica, história clássica, geografia e mitologia, e isso, em conjunto com o conhecimento religioso obtido amplamente pelo latim” [...]. Além disso, para uma população mais pobre, os plebeus, frequentar essas escolas poderia abrir portas para os estudos universitários e, conseqüentemente, uma possível ascensão social.

Inserido neste contexto, percebemos que Roberts (2016) concorda com Lawson e Silver (1973) a respeito da diferença do conceito de infância no período em que Recorde teria vivido, isto é, ele deve ter sido encorajado a fazer serviços em casa e aprender o ofício de seu pai desde muito cedo para se familiarizar com seus negócios. Da mesma forma, como filho de comerciante e político, teve acesso à educação formal, possivelmente com tutores particulares ou ao frequentar uma *grammar school*⁶⁴ para, então, seguir para a universidade em torno de treze anos.

Contudo, mesmo com essa educação mais formal, Recorde viveu sua infância em um contexto comercial em que as matemáticas práticas estavam frequentemente presentes. Seja por esta razão ou não, ele escolheu escrever seus tratados matemáticos com esta abordagem, quando o comum para um universitário seria escrever em latim, com base em uma ciência contemplativa. Dessa forma, também se faz necessário entender como essas matemáticas práticas eram tratadas no período, conforme podemos ver a seguir.

⁶¹ O autor se refere a essas áreas como o ensino dos três R's, do inglês: “reading”; “riting”; e “rithmetic”.

⁶² “[...] to enable the child to master the elements of his religious life, the Lord's Prayer, the Ten Commandments, the Creed and the Seven Sacraments” (Charlton, 1968, p. 101).

⁶³ “[...] rhetoric, classical history, geography and mythology, and this, together with religious knowledge gained largely through Latin [...]” (Lawson; Silver, 1973, p. 117).

⁶⁴ Roberts (2016) sugere que Recorde possa ter frequentado as aulas da *grammar school* que foi instalada na *St Mary's Church*, em Tenby. Na mesma igreja, há uma lápide em homenagem a Robert Recorde, contudo, seu corpo não está enterrado lá.

3.3 As matemáticas práticas e seu contexto de elaboração e transmissão

Apesar da existência dessas instituições de ensino, apresentadas na seção anterior, grande parte da população inglesa renascentista não tinha uma educação formal, pois, como afirmado anteriormente, esta sociedade era predominantemente oral. Segundo Lévi (1993), este tipo de sociedade tem a maior parte de sua base cultural relacionada à memória, pois a oralidade é o principal meio de informação, assim como a transmissão de conhecimentos e aprendizagem de ofícios, que passa dos mais velhos para os mais novos – pai para filho; mestre para aprendiz – no desempenho diário de suas atividades.

Além disso, o número de escolas e universidades disponíveis ainda não era suficiente para atender a população em geral, o que faz com que a educação escolar fosse escassa. Segundo Howson (1982, p. 8, tradução nossa⁶⁵), “[...] estima-se que da população de cerca de 5 milhões na época da dissolução dos mosteiros, apenas 26.000 estavam na escola. A escolaridade ainda era uma mercadoria rara.”

Dessa forma, a maioria dos ingleses não tinha contato com as matemáticas teóricas e contemplativas que eram ensinadas nas universidades. Contudo, no seu dia a dia, estavam presentes as matemáticas práticas, ou seja, aquele conhecimento que emergia da execução de muitos ofícios, entre eles, os relacionados ao comércio, que utilizavam números para cálculos de pesos, medidas e conversão de moedas. Saito (2015) ressalta que o termo “matemática prática” não deve ser confundido com “matemática aplicada”, uma vez que a essência da aplicação de um conhecimento só surgiu no século XIX com as categorias disciplinares de ciências puras e aplicadas.

É importante destacar que este saber prático não era valorizado, pois o *Trivium* e o *Quadrivium*, que compunham as setes artes liberais, estavam em oposição aos conhecimentos práticos, que eram conhecidos como artes servis. De acordo com Roque (2012), havia um certo desprezo pelas artes práticas e mecânicas, que já ocorria desde a antiguidade clássica, em que as atividades manuais eram realizadas pelas classes mais baixas da sociedade.

Contudo, durante o Renascimento houve uma valorização do conhecimento mais empírico, iniciado com a classe dos pintores e artesãos, que passaram a formar uma nova burguesia que, segundo Saito (2015), foi um dos aspectos que caracterizou o período. De acordo

⁶⁵ “[...] it has been estimated that of the population of about 5 million at the time of the dissolution of the monasteries, only 26,000 were at school. Schooling was still a rare commodity.” (Howson, 1982, p. 8).

com Rossi (1989), no início do século XVI passou a circular, entre os estudiosos, a crença de que por meio das práticas haveria o progresso do saber, isto é, deveria haver um abandono da concepção contemplativa de ciência para a condução de estudos com base na observação de técnicas.

Drake (1970) afirma que durante o século XVI o estudo das ciências passou a ser realizado também fora das universidades porque passou a existir duas formas de se fazer ciência no Renascimento. Nesse sentido, para Feingold (1984) havia uma dicotomia entre universidade e a comunidade científica fora dela em relação às contribuições para o surgimento da ciência moderna. Segundo o autor, estudiosos, que partem de uma escrita historiográfica mais tradicional, afirmam que não havia produção de novos conhecimentos nas universidades, e que a gênese da ciência moderna se deu fora dela, baseada no que ele chama de ciência londrina (*London Science*), ou seja, aquela que era discutida em Londres, fora do âmbito de Oxford e Cambridge. Entretanto, o autor conclui que essas instituições também contribuíram significativamente para esse diálogo da comunidade científica do período.

Nesse contexto, Drake (1970) indica que um dos fatores que influenciou esse cenário foi a invenção da imprensa, que possibilitou uma maior circulação de conhecimentos e, por outro lado, em busca da valorização dos seus ofícios, muitos artesãos passaram a publicar tratados para se auto divulgar. De acordo com Ash (2004), muitas dessas obras pareciam estar voltadas para a instrução de um aprendiz, embora não fossem propriamente utilizadas para o ensino de um ofício por um mestre, pois o principal objetivo seria a publicização dos autores, de forma a elevar o status de suas artes práticas. Sobre essas publicações, Ash (2004, p. 15, tradução nossa⁶⁶) afirma que:

Embora muitos fossem de estilo didático, esses não eram o tipo de livros que um mestre artesão usaria para treinar um jovem aprendiz. Sua linguagem e estilo pretendiam atrair um público que provavelmente tinha pouca oportunidade, razão ou desejo de colocar tal conhecimento em uso direto, e os tratados raramente continham instruções suficientemente detalhadas para servir a esse propósito em qualquer caso. Em vez disso, os primeiros tratados técnicos humanistas modernos foram escritos para divulgar o domínio dos seus autores nas artes que abordavam e para alterar a própria natureza dessas artes, elevando-as acima do seu estatuto de artesanato tradicional,

⁶⁶ “Although many were didactic in style, these were not the sort of books that a master craftsman might use to train a young apprentice. Their language and style were meant to appeal to a readership that probably had little opportunity, reason, or desire to put such knowledge to direct use, and the treatises seldom contained sufficiently detailed instruction to serve that purpose in any case. Instead, early modern humanist technical treatises were written to publicize their authors' mastery of the arts they addressed and to alter the very nature of those arts, elevating them above their traditional, vulgar, unlearned craft status to render them apt fields for leisurely study by a cultured, educated audience” (Ash, 2004, p. 15).

vulgar e inculto, para torná-las campos aptos para estudo prazeroso por um público culto e educado.

Dessa forma, muitos tratados foram publicados com o objetivo de aumentar o status dos ofícios que abordavam, como foi retratado por Rossi (1989), havendo uma valorização das técnicas e promoção de um prestígio para os artesãos, o que ocasionou o surgimento de uma nova burguesia. Nesse sentido, se enquadram os tratados de Recorde, que afirmam ser voltados para ensinar esse público, mas que, na verdade, buscam registrar conhecimentos e valorizar as matemáticas práticas, de forma a promover uma reforma no seu currículo de ensino.

Assim, em meados do século XVI, diversas atividades práticas tomavam o caráter de disciplina, conforme foi relatado por Oliveira, Silva e Godoy (2021), ao citarem a gama de conhecimentos que foram consideradas disciplinas matemáticas por John Dee. Dentre elas, a própria aritmética que tinha um viés “vulgar”, ou seja, aquela de uso comum que lida com

[...] os cálculos com números inteiros e suas frações, o estudo das proporções, os números radicais e suas frações, a aritmética circular que, segundo Dee (1570), é comumente chamada de “Aritmética das Frações Físicas e Astronômicas” e estuda os sexagesimais – e os números cossistas (*cossike numbers*) da “Arte da Álgebra”. (Oliveira; Silva; Godoy, 2021, p. 65).

Com o estudo desse tipo de tratado, as pessoas que os escreviam foram chamadas de praticantes de matemática, ou seja, “aquele artesão que lidava com conhecimentos matemáticos. Refere-se a um grupo de estudiosos ingleses que se dedicavam às matemáticas práticas, fabricando instrumentos e escrevendo tratados” (Saito, 2015, p. 172). De acordo com Cormack (2017a, p. 3), este termo foi proposto pela historiadora Eva Germaine Rimington Taylor para tratar daqueles que “aplicavam conceitos matemáticos para fins práticos”, que poderiam, tanto ter formação universitária ou ser autodidatas, mas defendiam a utilidade dos conhecimentos que estavam tratando.

Um dos praticantes de matemática citados por Cormack (2017b) foi Robert Recorde, que, segundo a autora, teria utilizado sua expertise em prol da defesa da utilidade das artes práticas, com base no conhecimento matemático. Nesse sentido, *The Ground of Artes*, já em seu prefácio, indica que trata desta aritmética prática: “ENSINANDO o emprego perfeito e a prática da Aritmética” (Recorde, 1648, p. frontispício, tradução nossa⁶⁷). Além disso, o autor apresenta uma seção voltada para a utilidade da aritmética (*The Commodities of Arithmetick*), em que disserta sobre sua necessidade em diversas áreas.

⁶⁷ “TEACHING the perfect work and practice of Arithmetick” (Recorde, 1648, p. frontispício).

Esses conhecimentos aritméticos, ensinados por Recorde, não eram os mesmos do *Quadrivium*, pois, de acordo com Saito (2015) o currículo universitário não objetivava as necessidades práticas da época porque focava nas propriedades dos números. Esses saberes práticos – além do processo de instrução oral que acontecia nos próprios ofícios – eram ensinados nas escolas de ábaco (*Abacus schools*) que, de acordo com Saito (2015), surgiram no final da Idade Média e se tornaram um dos principais meios de transmissão de conhecimento matemático no Renascimento. Para o autor, o público que frequentava estas instituições eram os filhos de comerciantes e mercadores, que aprendiam a “[...] ler, escrever, contar, medir, calcular, utilizando diferentes técnicas para resolver problemas matemáticos” (p. 188).

Nesse sentido, Roque (2012) concorda que os jovens comerciantes começavam a frequentar as escolas de ábaco a partir de onze ou doze anos e que seu foco era a matemática prática, mas, embora seu nome remeta ao uso do ábaco, os cálculos eram ensinados sem ele. Uma característica importante, apresentada pela autora, é o uso dos numerais indo-arábicos, ao invés dos romanos: “para tratar problemas ligados ao comércio, ensinava-se o cálculo com numerais indianos (os algarismos que chamamos hoje de “indo-arábicos”), a regra de três, os juros simples e compostos, os métodos da falsa-posição, entre outras ferramentas voltadas para problemas práticos” (Roque, 2012, p. 262).

Demattè e Furinghetti (2022) explicam que estas escolas atendiam a uma necessidade de ensino de métodos de cálculo com o sistema de numeração baseado nos algarismos indo-arábicos, que seriam úteis para o comércio nos processos de contabilidade e escrituração. Afirmam, ainda, que essas escolas se difundiram, ao lado das *grammar schools*, da mesma forma que estas foram precedidas por instituições que promoviam o ensino da língua vernácula. Além disso, também houve, nessas escolas, a publicação de diversas obras que tratavam desses conhecimentos por diversos problemas – algumas incluíam o estudo da álgebra – que ficaram conhecidas como livros de ábaco (*Abacus treatises*).

De acordo com Roque (2012), essas obras, também conhecidas como livros de cálculo, eram escritas em língua vernácula e muitas eram traduções, adaptações ou cópias de outros como do *Liber Abaci*, de Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa – o livro de ábaco mais conhecido.

Ao fazer um estudo inicial de *The Ground of Artes*, percebemos que seu conteúdo e características se assemelham aos livros de ábaco, em que o autor usa o idioma vernáculo para escrever uma aritmética prática para ensinar: os numerais indo-arábicos; as quatro operações; regra de ouro (*Golden Rule*) ou regra de três; regra da falsa posição, entre outros, tanto para os

números inteiros (*whole numbers* – que hoje pode ser compreendido como o conjunto dos números naturais, incluindo o zero) e as frações. Sendo um livro de ábaco ou não, o fato é que o autor trata desta aritmética prática e não daquela teórica presente na universidade.

Nesse sentido, da mesma forma que a obra de Recorde, muitos outros tratados de aritmética escritos por praticantes de matemática ou que continham conhecimentos da aritmética prática, conforme classificados por Dee (1570), incluíam, em sua maioria, o estudo de frações. Dessa forma, para compreender o que era ensinado sobre frações no contexto inglês renascentista, buscamos algumas obras que abordavam esse assunto no período, que expomos na seção seguinte.

3.4 Os tratados de aritmética publicados na Inglaterra no século XVI e o ensino de frações

Tratados que abordam aritmética foram amplamente publicados na Inglaterra no decorrer do século XVI. De Morgan (1847) lista diversas obras, que classifica como *Livros Aritméticos (Arithmetical Books)*, que foram impressas em Londres e incluem os estudos de Robert Recorde, Thomas Hylles (ou Hill), Cuthbert Tunstall (ou Tonstall), Humfrey Baker, Leonard Digges e Thomas Digges, John Blagrove, entre outros. Seguindo uma tendência vernacular, muitos desses textos foram escritos em língua inglesa.

Na abordagem da aritmética é frequentemente encontrado o estudo tanto dos números inteiros, como das frações. Assim, ao apresentar a definição de frações comuns (*common fractions*), Smith (1925) cita alguns textos produzidos na Inglaterra, no século XVI. Entre os estão escritos em língua inglesa se encontram: *The Ground of Artes*, de Robert Recorde; *The Welsprinf of Sciences*, de Humfrey Baker; *An arithmetically militare treatise named STRATIOTICOS*, de Leonard e Thomas Digges; e *The Arte of vulgar Arithmeticke*, de Thomas Hylles.

Além desses, um dos outros textos impressos na Inglaterra, nesse período, e que tratam de aritmética, é a obra anônima *Uma introdução para aprender a calcular com a caneta ou com as contas, de acordo com a verdadeira contagem de algoritmos, em números inteiros ou quebrados, recém corrigida*,⁶⁸ publicada pela primeira vez em 1537. De acordo com o

⁶⁸ No original: *An introduction for to lerne to reckon with the pen or with the counters, accordyng to the trewe cast of algorisme, in hole numbers or in broken, newly corrected.*

frontispício da obra⁶⁹, essa seria a primeira vez que o assunto teria sido publicado em língua inglesa (An Introduction, 1546). Além disso, percebemos que o autor se refere às frações como números quebrados (*broken numbers*), ou seja, uma parte de um número inteiro.

O texto de Robert Recorde foi intitulado, na versão de 1648, *Aritmética de Recorde ou, O Fundamento das Artes: Ensinando o emprego perfeito e a prática da Aritmética, tanto em Números inteiros quanto em Frações, após uma forma mais fácil e exata do que em tempos anteriores foi estabelecida*.⁷⁰ Esse é um tratado voltado para o ensino de aritmética prática que recebeu bastante atenção dos ingleses e foi reimpresso, com comentários e correções, por John Dee e outros estudiosos da época. A segunda parte da obra é dedicada às frações e sua definição está relacionada à partição de um número inteiro: “uma fração de fato é um número quebrado e, portanto, uma parte de outro número [...]” (Recorde, 1648, p. 262, tradução nossa⁷¹). Devido ao seu objetivo de ensinar aritmética, Recorde apresenta diversos exemplos com regras para operar com frações, redução, adição, subtração, multiplicação e divisão. Muitos desses exemplos são numéricos, mas outros mostram como as frações estão presentes em cálculos relacionados ao comércio, à conversão de moedas, à divisão de valores de ouro, entre outros.

A obra de Baker (1564) intitulada *A Fonte das Ciências, que ensina o emprego perfeito e a prática da Aritmética, tanto em números inteiros quanto em frações, com instrução tão fácil e completa da referida arte, como nunca antes foi estabelecida ou trabalhada*,⁷² que, de acordo com o próprio título, é uma obra voltada para a instrução de aritmética, tanto em números inteiros, como em frações. O autor aborda as frações na segunda parte de seu tratado e sua definição está relacionada à ideia de número quebrado, ou seja, uma partição de um número inteiro: “número quebrado é tanto quanto uma parte ou muitas partes de 1” (Baker, 1564, s/p, tradução nossa⁷³). Como é um texto voltado para a instrução, o autor explica como realizar operação – redução (*reduction*), abreviação (*abbreviation*), adição (*assembling*), subtração

⁶⁹ Não encontramos o original dessa obra. Há uma transcrição no site *Early English Books* (EEBO), entretanto algumas páginas estão faltando inclusive a seção de frações. Para informações sobre a organização da obra, vide Richeson (1947).

⁷⁰ No original: *Records Arithmetick or, The Ground of Arts: Teaching the perfect work and practice of Arithmetick, both in whole Numbers and Fractions, after a more easie and exact forme the in former time hath been set forth.*

⁷¹ “a Fraction indeed is a broken number, and so consequently the part of another number [...]” (Recorde, 1648, p. 262).

⁷² No original: *The Welspring of Sciences, which teacheth the perfecte worke and practise of Arithmeticke both in vvhole numbers & Fractions, with such easie and compendious instruction into the saide art, as hath not theretofore been by any set out nor laboured*

⁷³ “Broken number is as much as a parte or many parts of 1” (Baker, 1564, s/p).

(*subtraction*), multiplicação (*multiplication*) e divisão (*division*) – a partir de exemplos que são, em sua grande maioria, apenas numéricos. Entretanto, a terceira parte trata de regras voltadas para os comerciantes e nela apresenta operações que envolvem medições, moedas da época, cálculo de taxas etc.

Já a obra de Digges (1579), *Um Tratado Militar Aritmético, chamado STRATIOTICOS: Ensinando resumidamente a Ciência dos Números, tanto em Frações quanto em Números Inteiros, e tanto as Regras e Equações Algébricas e Arte dos Números Cossitas, que são necessários para a Profissão de um Soldado*,⁷⁴ é voltada para a arte militar e tudo o que está presente nos exércitos para um bom governo dos campos. Para tanto, Digges (1579, s/p, tradução nossa⁷⁵) define fração como sendo “uma parte ou partes de um inteiro” e ao apresentar suas operações – redução (*reduction*), abreviação (*abreviation*), adição (*addition*), subtração (*subduction*), multiplicação (*multiplication*) e divisão (*partition*)) – o autor apresenta apenas exemplos numéricos, mas ao abordar a regra de proporção direta (ou regra de ouro), a regra de proporção inversa e a regra de ouro dupla, mostra exemplos relacionados ao valor de um veludo em relação ao seu comprimento, ao número de dias para se construir um muro, à quantidade de pólvora para se encher um número de canhões em determinados dias etc. Esses exemplos mostram a intenção de Digges nesse tratado relacionada ao suporte que a aritmética pode dar para o soldado: “e por isso minha principal intenção neste Tratado é mostrar como a Aritmética pode ser para um Soldado de [grande] valia [...]” (Digges, 1579, s/p, tradução nossa⁷⁶).

O tratado de Hylles, publicado em 1592, recebeu o título de *A arte da aritmética vulgar, tanto em números Inteiros quanto em Frações, dividida em dois livros: o primeiro é chamado Nomodidactus Numerorum e o segundo Portus Proportionum*.⁷⁷ As informações de seu frontispício⁷⁸ indicam que também é um texto voltado para o comércio de mercadoria a partir da aritmética vulgar e aborda o estudo das frações. De acordo com Smith (1908), não foi um livro popular, mas é uma boa fonte de informações a respeito do contexto comercial do período.

⁷⁴ No original: *An Arithmeticall Militare Treatise, named STRATIOTICOS: Compendiously teaching the Science of Numbers, as well in Fractions as Integers, and so much of the Rules an Equations Algebraicall and Arte of Numbers Cossical, as are requisite for the Profession of a Soldiour.*

⁷⁵ “a part or parts of an integer”.

⁷⁶ “[...] and for that my chiefe intention in this Treatise is to shew how Arithmetike maye stande a Souldioure in stead [...]” (Digges, 1579, s/p).

⁷⁷ No original: *The Arte of vulgar arithmeticke, both in Integers and Franctions, devided into two Bookes: whereof the first is called Nomodidactus Numerorum, and the second Portus Proportionum.*

⁷⁸ Uma figura do frontispício da obra pode ser encontrada em Smith (1908).

A partir dos tratados mencionados vemos que estão relacionados à aritmética prática, pois não tratam da aritmética teórica frequentemente estudada no âmbito das universidades inglesas do período. De fato, tratam de uma aritmética voltada para comerciantes, militares, soldados, entre outros, como especificado por Recorde (1648) e Digges (1579). Entretanto, muitos deles não apresentam exemplos relacionados a esses contextos quando tratam das operações com frações, que só aparecem para ilustrar as regras de proporção e outras regras.

Nesse sentido, também percebemos que, em geral, os tratados se referem às frações como sendo ‘números quebrados’ (*broken numbers*), isto é, são usadas para expressar uma partição de um número inteiro (hoje natural). De fato, um dos exemplos abordados nas seções de frações dos tratados mostram como uma quantidade de algo (tal como ouro) pode ser dividida entre uma quantidade de homens para determinar qual partição de um todo (um inteiro) cada homem receberia. Concordando com essa definição, Smith (1925) afirma que o termo ‘*fração*’ vem do latim ‘*frangere*’, que significa ‘*quebrar*’, por isso, o termo ‘*número quebrado*’ foi tão comumente utilizado.

Além disso, também é possível perceber um apelo para as utilidades (*Commodities*) da aritmética, ou seja, os autores frisam o quanto seu conhecimento é importante e quanto é útil para todas as ciências. Isso é mostrado no próprio título de algumas delas, por exemplo: *The Ground of Artes*, cuja tradução pode ser *A Base (ou fundamento) das Artes*; e *The Wellspring of Sciences*, que pode significar *O Ponto de Partida (ou a fonte) das Ciências*. Com isso, é implicado que o estudo das frações faria parte desses conhecimentos fundamentais para outras ciências.

Portanto, embora alguns desses tratados de aritmética afirmem que é um conhecimento necessário para todas as artes, muitos estão mais voltados para um público relacionado ao conhecimento prático, tal como comerciantes e militares. As operações com frações são então ensinadas para resolver problemas relacionados a esses contextos, o que pode ser visto nos exemplos dados para as regras de proporção de Digges (1579, p. 29, tradução nossa⁷⁹) que, conforme mostrado, possibilita calcular o preço a ser pago por um comprimento de veludo: “se nove jardas de veludo custam onze libras, quanto custarão 33 [jardas] do mesmo [veludo].”

Dessa forma, vislumbramos a possibilidade do estudo desses tratados práticos, em particular *The Ground of Artes*, com foco na parte de frações, para uma discussão a respeito de

⁷⁹ “[...] if nine yards of velvet cost eleven poundes, what shall 33 [yards] of the same [velvet] cost.” (Digges, 1579, p. 29).

seu ensino atualmente. Vislumbramos que a abordagem prática escolhida por Robert Recorde pode ter potencialidade didática para debater a relação entre número e quantidade nas operações com frações, como pode ser visto na seção seguinte.

4 THE GROUND OF ARTES E A RELAÇÃO ENTRE NÚMERO E QUANTIDADE NAS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

Nesta seção, apresentamos a proposta de Robert Recorde para o estudo das matemáticas a partir da publicação de seus tratados para, então, detalhar a obra *The Ground of Artes* e seu conteúdo. Por fim, debatemos a relação entre número e quantidade com base em alguns exemplos presentes na obra e na abordagem prática dada pelo autor.

4.1 A proposta de ensino de Recorde

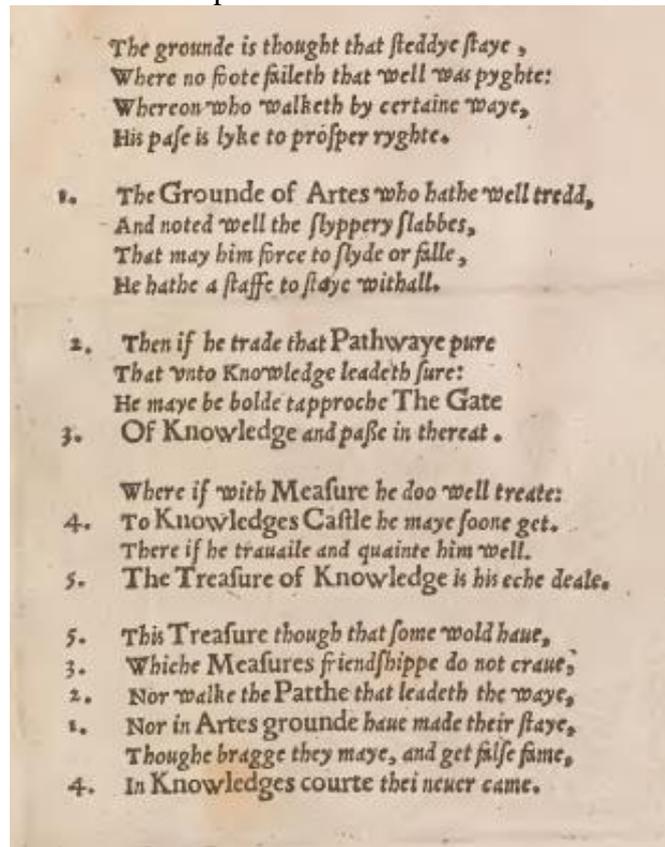
A proposta de ensino de Recorde para as matemáticas ficou registrada com a publicação de suas obras que, por sobreviverem por séculos, possibilitam seus estudos atuais. São elas:

- *The Ground of Artes* (1543);
- *The Pathwaie to Knowledge* (1551);
- *The Castle of Knowledge* (1556);
- *The Whetstone of Witte* (1557).

De acordo com Fauvel (1989) além delas, outros dois livros poderiam fazer parte deste conjunto: *The Gate of Knowledge* (15[?]), que não foi publicado; e *The Treasure of Knowledge* (15[?]), que não foi finalizado. Não relacionado às matemáticas, há ainda um tratado para o estudo das urinas, *The Vrinal of Physick*, que foi escrito por Recorde em 1547, uma vez que ele era um médico formado academicamente e, de acordo com Pelling (2012), a publicação de um tratado em medicina teria sido uma forma de recomendar seu próprio trabalho frente ao governo.

Ao final do Prefácio ao Leitor da obra *The Castle of Knowledge*, Recorde apresenta um poema (Figura 4) em que adverte para a ordem correta para o estudo de suas obras relacionadas às matemáticas. Este poema indica que o autor realmente teria uma proposta de ensino para as matemáticas a partir da publicação de uma série de livros para essas disciplinas. Fauvel (1989) afirma que os títulos das obras mostrariam o caminho que um peregrino matemático deveria prosseguir, o que pode ser percebido no próprio poema de Recorde.

Figura 4 – A ordem para estudo das obras de Robert Recorde



Fonte: Recorde (1556, s.p.).

Note que, neste poema, Recorde trata de cinco dos livros que mencionamos anteriormente. Entretanto, a última publicação do autor, *The Whetstone of Witte*, não foi mencionada, o que pode indicar que ela não fazia parte de seu projeto inicial. Ao lado esquerdo do texto, há os números de 1 a 5, posicionados na linha referente a cada título dos tratados, o que indica a ordem em que eles devem ser estudados, de acordo com Recorde: 1^o *The Ground of Artes*; 2^o *The Pathwaie to Knowledge*; 3^o *The Gate of Knowledge*; 4^o *The Castle of Knowledge*; 5^o *The Treasure of Knowledge*. Ademais, na própria escrita há indicações desta sequência para que o estudante tenha um fundamento (*Ground*) sólido das artes, percorra o caminho (*Pathewaye*), atravesse o portão (*Gate*) do conhecimento, chegue ao castelo (*Castle*) do saber e, por fim, encontre o tesouro (*Treasure*). Respectivamente, neste percurso, seriam estudadas: aritmética; geometria; medidas; astronomia; e, possivelmente, astronomia ou cosmografia avançada.

Embora dois desses livros não tenham chegado aos dias atuais, pelo poema e o conteúdo dos demais tratados foi possível inferir seu conteúdo. Na Figura 4, observamos que o número

3 está relacionado⁸⁰ tanto ao nome “*The Gate of Knowledge*”, quando ao nome “*Measures*”, que significa medidas. Para Easton (1981) a obra tratava de medidas e do uso do quadrante⁸¹ e que, em *The Castle of Knowledge*, Recorde teria indicado que *The Gate* já estaria todo escrito. Em relação a *The Treasure of Knowledge*, Johnson e Larkey (1935) indicam que não há como ter certeza de seu conteúdo, mas que, provavelmente, abordava uma aplicação de astronomia para a navegação ou uma cosmografia avançada, pois os dois assuntos foram indicados como tema para livros futuros em *The Castle*.

Essa indicação também foi feita anteriormente em *The Pathwaie to Knowledge*, em que Recorde discorre sobre os livros que ele pretendia escrever. Este tratado foi dividido em dois livros e, no prefácio do segundo, Recorde (1574) apresenta os assuntos que publicaria posteriormente. Dentre eles, está indicado: “a segunda parte da Aritmética, ensinando as operações com frações, com a extração de raízes, ambas quadradas e cúbicas [...] Também a regra da falsa posição, com diversos exemplos não apenas comuns, mas alguns pertencentes à regra da Álgebra” (Recorde, 1574, s.p., tradução nossa⁸²). Vale ressaltar que a primeira versão de *The Pathwaie* foi publicada em 1551, isto é, antes da edição de *The Ground of Artes* que já incluía as frações. Dessa forma, a segunda parte da aritmética foi publicada com o título *The Whetstone of Witte*, em 1557, abordando o estudo da álgebra. Além disso, afirma que publicaria sobre a arte de medir com o quadrante geométrico, com um bastão astronômico e com outros instrumentos, sobre a construção de relógios para o dia e para a noite, sobre o uso do globo e da esfera para a navegação, sobre os tratados de Euclides – uma possível tradução⁸³ – com demonstrações geométricas e aritméticas, entre outros assuntos.

Dentre aqueles que foram publicados e/ou sobreviveram, os tratados matemáticos de Robert Recorde foram editados e republicados diversas vezes e receberam atenção de diversas pessoas do período, tal como John Dee que, além de ser estudioso das matemáticas e astrólogo,

⁸⁰ No poema, notamos que o autor utiliza letras maiúsculas e uma fonte um pouco maior para destacar os títulos dos tratados. Quando esses títulos são repetidos, mesmo que de forma abreviada, ele repete o número da ordem de estudo daquela obra ao lado esquerdo da margem.

⁸¹ Johnson e Larkey (1935) indicam que outros instrumentos também devem ter sido mencionados em *The Gate of Knowledge*.

⁸² “The seconde parte of Arithmetike, teachyng the working by fractions, with extraction of rootes, bothe square and cubike [...]. Also the rule of false position, with divers examples not onely vulgar, but some appertainyng to the rule of Algeber [...]” (Recorde, 1574, s.p.).

⁸³ De acordo com Roberts (2016), John Dee teria afirmado que Recorde fez uma tradução dos Elementos, mas não há registros sobreviventes dessa possível tradução.

teve grande influência na corte inglesa.⁸⁴ Além dele, Roberts (2016) indica que o rei Edward VI possuía uma cópia de *The Pathwaie to Knowledge* que era utilizada em seus estudos matemáticos sob a tutoria de John Cheke.⁸⁵ Nesse sentido, Feingold (1984) afirma que esse reconhecimento dos renascentistas vem do fato de que Recorde seria um dos autores que levou uma nova ciência⁸⁶ para os praticantes de matemática londrinos. Em concordância, Easton (1981) afirma que *The Whetstone of Witte* foi o único tratado de Recorde que não teve mais de uma edição, uma vez que seria menos útil para os artesãos locais. Assim, o livro de Recorde que possuiu mais edições foi *The Ground of Artes*, cujo conteúdo é detalhado na seção seguinte.

4.2 O conteúdo de *The Ground of Artes*

Nesta tese, usamos a edição de 1648 (Figura 5), por ser uma das edições que tivemos acesso e mais bem conservada. Esta versão foi intitulada *Aritmética de Recorde ou, O Fundamento das Artes: Ensinando o emprego perfeito e a prática da Aritmética, tanto em Números inteiros quanto em Frações, após uma forma mais fácil e exata do que em tempos anteriores foi estabelecida*.⁸⁷, para seguir uma tradição de sua época em que as publicações contêm títulos longos para fins de divulgação.

Segundo Roberts (2016), provavelmente, foi o próprio impressor (*printer*) da primeira edição da obra, Reynold Wolfe, quem aconselhou a utilização de um título longo com palavras de afirmação para indicar novas adições e correções ou a necessidade daquele conhecimento para todas as pessoas. Isto seria feito pela maioria dos impressores para anunciar seus produtos e, da mesma forma, o título do livro de Recorde sugeria uma forma mais simples e exata para o estudo da aritmética prática.

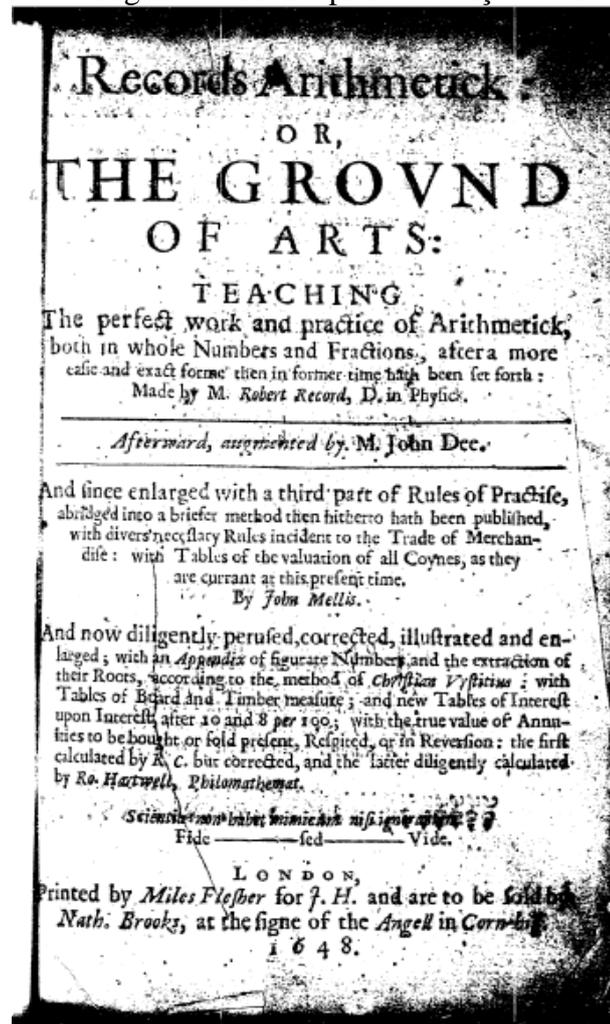
⁸⁴ Oliveira, Silva e Godoy (2021) afirmam que John Dee teria grande proximidade com a Rainha Elizabeth I. Para mais informações sobre ele vide: Rampling (2012).

⁸⁵ Sobre John Cheke, vide a seção 3.2.

⁸⁶ Por nova ciência (*new science*), Feingold (1984) se refere aos processos que levaram à ciência moderna no período renascentista baseada – dentre outras características – no questionamento da autoridade do modelo científico aristotélico e a necessidade de conhecimentos que resolvessem problemas relacionados à navegação, agrimensura, mineração etc.

⁸⁷ No original: *Records Arithmetick or, The Ground of Arts: Teaching the perfect work and practice of Arithmetick, both in whole Numbers and Fractions, after a more easie and exact forme the in former time hath been set forth.*

Figura 5 – Frontispício da edição de 1648



Fonte: Recorde (1648, p. frontispício).

Este título é bem similar aquele da primeira versão conhecida da obra (Figura 1). A respeito dele, Roberts (2016) afirma que por indicar que contém uma forma mais exata e fácil do que teria sido feito antes, uma literatura mais antiga indica haver versões, como uma de 1540, que podem não ter sido encontradas ou não ter sobrevivido. Easton (1967) completa que este equívoco, em relação a existência de uma versão de 1540, também é devido à uma afirmação nas edições de John Dee, indicando que uma das tabelas de Recorde que retratava as moedas inglesas, seria referente aos valores do ano de 1540.

Nesse sentido, apenas da versão mais antiga, conhecida ser a de 1543, é comum encontrar textos que datam *The Ground of Artes* no ano de 1542 como Smith (1925), Reynolds (1993), Swetz (1995) e Denniss (2006), entre outros. Entretanto, Easton (1967) cita uma versão

que teria sido datada como de 1542?, mas que foi, posteriormente, modificada para 1545?.⁸⁸ Apesar dessa discussão, a respeito da existência de uma versão anterior àquela de 1543, no título da obra, Recorde poderia estar se referindo ao que já teria sido publicado até o momento por outros autores, como vimos no capítulo anterior quando mostramos o contexto e episteme do período em que o autor elaborou seus tratados.

A partir da edição de 1648, que foi utilizada neste trabalho, podemos ver que o autor trata dos números inteiros (*whole numbers*) e das frações (*fractions*) em duas partes. A primeira contém 2 diálogos: o primeiro ensina a realizar cálculos com uma caneta⁸⁹ (*teaching the Art and use of Arithmetick with Pen*) e o segundo aborda os cálculos com fichas⁹⁰ (*The accounting by Counters*). Na sequência, apresenta a segunda parte dedicada ao estudo de frações. Ademais, segundo Denniss e Smith (2012), havia uma seção para o cálculo com as mãos (ver Anexo A) no final da primeira parte que só apareceu até a edição de 1582.

Além da opção de Recorde por tratar de aritmética por um viés prático, sua obra também chama atenção por ser escrita em forma dialogada e em um idioma vernáculo, o inglês. Como Dear (2001) afirma, o ensino nas universidades acontecia majoritariamente em latim e, por isso, os livros nela utilizados também eram publicados nesse idioma. Jensen (1996) complementa que, na época, o latim era o idioma dos eruditos, e não ser instruído nesse idioma poderia significar uma exclusão àquele grupo social. Entretanto, mesmo Recorde vindo de uma tradição universitária, escolheu redigir seus tratados em inglês.

Em relação à forma como o texto foi escrito, o autor apresenta um diálogo, que acontece entre o *scholar* e o mestre, na voz do próprio Recorde com o objetivo de facilitar o ensino, como afirma em seu prefácio: “[...] eu escrevi em forma de diálogo, pois acredito que esta é a forma mais fácil de ensino, quando o sagaz estudante pode fazer todas as perguntas ordenadamente, e o mestre pode responder a suas questões claramente” (Recorde, 1648, s.p.,

⁸⁸ Easton (1967) apresenta um trecho de uma carta enviada por Katherine Pantzer (Harvard University), explicando que esta retadação ocorreu devido a uma análise da obra e comparação com outros trabalhos do mesmo editor, Reynold Wolfe, com base no formato das letras iniciais e ornamentos.

⁸⁹ Em oposição à ideia de calcular com as mãos ou com o ábaco, por exemplo.

⁹⁰ Denniss e Smith (2012) afirmam que esta seção mostra como realizar cálculos com contas (ou fichas) e uma espécie de tábua de cálculo – que pode ser vista na Figura 1, no frontispício da edição de 1543. Entretanto, os autores complementam que este Segundo Diálogo foi retirado das edições a partir de 1673.

tradução nossa⁹¹). Além de seu apelo ao ensino, segundo Williams (2013), essa forma dialogada permite que o leitor conceba a matemática como uma prática social e cultural.

O conteúdo da versão de 1648 de *The Ground of Artes* foi apresentado em forma de quadro (Quadro 1) por Silva e Saito (2020) com base no sumário da obra, para mostrar o que teria sido abordado, segundo o autor e seus editores seguintes.

Quadro 1 – Os conteúdos apresentados no Livro

Os Conteúdos do primeiro Diálogo.	
A declaração do benefício da Aritmética.	Página 1
Numeração, com uma Tabela fácil e grande.	p.10
Adição.	p.27
Subtração.	p.46
Multiplicação.	p.69
Divisão.	p.87
Redução, com diversos decretos de Moedas, Pesos e Medidas de diversas formas adicionadas recentemente, com uma nova Tabela, contendo a maior parte das Moedas de ouro por toda Cristandade, com o verdadeiro peso e valores delas agora em moeda Inglesa corrente.	p.120
Progressão tanto Aritmética quanto Geométrica, com diversas questões variadas abordando as mesmas.	p.141
A Regra de Ouro, ou Regra de Proporção, chamada de Regra de Três direta.	p.174
A Regra de Três Inversa, com diversas questões pertencentes a ela, recentemente adicionada e aumentada.	p.180
A Regra da Proporção dupla direta.	p.194
A Regra da Proporção composta por cinco números.	p.194
A Regra Inversa, ou segunda parte da Regra de Proporção, composta.	p.198
A Regra da Comunhão sem tempo, limitada.	p.202
A Regra da Comunhão com tempo, limitada.	p.210
O segundo Diálogo contém	
Os primeiros cinco tipos de Aritmética escritos em Contas.	p.217
Os tipos comuns de contagem por Contas, segundo a maneira dos Mercadores, e [dos] Auditores também.	p.257
Os Conteúdos da segunda parte abordando Frações. Page 261.	
Numeração em Frações.	p.264
A ordem das operações com Frações.	p.270
Redução de diversas Frações em uma denominação em três variedades.	p.272
Redução de Frações de Frações.	p.270
Redução de Frações impróprias.	p.280
Redução de Frações para a menor denominação, com regras fáceis de como convertê-las para isso.	p.285
Redução de uma Fração, e como ela pode ser transformada em qualquer outra Fração, ou em qualquer denominação você elencar.	p.290
Adição de Frações.	p.292
Subtração de Frações.	p.295
Multiplicação de Frações.	p.298
Duplicação de Frações.	p.304
Divisão de Frações.	p.305
Mediação de Frações.	p.311
A Regra de Ouro direta em Frações.	p.311
A Inversa, ou Regra reversa em frações.	p.315

⁹¹ “[...] I have written in the forme of a Dialogue, because I judge that to be the easiest way of instruction, when the wise Scholar may ask every doubt orderly, and the Master may answer to his question plainly” (RECORDE, 1648, s.p.).

O Estatuto de Veredito do Pão e [da] Cerveja reconhecido, e aplicado a esta época, com novas Tabelas a ele anexadas.	p.318
O Estatuto de medição de terras, com uma Tabela disso, fielmente calculada e corrigida	p.330
A Regra da Comunhão, ou sociedade, com as razões das Regras, e provas de seu emprego.	p.336
Para encontrar três números em qualquer proporção.	p.349
A Regra de Alocação, com diversas questões, e as provas de seu emprego, com muitas variedades de tais soluções.	p.353
A Regra da Falsidade, ou Falsa Posição, com diversas questões, e suas provas.	p.370
Os Conteúdos da Terceira parte.	
O Capítulo 1 trata das Regras de Brevidade e prática, segundo um método mais breve do que, até agora, tenha sido publicado na língua inglesa.	p.411
O Capítulo 2 trata da breve Redução de diversas medidas, como Els, Tards, Braces, etc. por regras de prática.	p.447
O Capítulo 3 trata da Regra de Três em números quebrados, segundo o comércio de Mercadores, algo diferente da ordem de M. Records, que é compreendida em três Regras.	p.451
O Capítulo 4 trata de perdas e ganhos no comércio de Mercadorias.	p.468
O Capítulo 5 trata de perdas e ganhos no comércio de Mercadorias ao longo do tempo, etc. com questões necessárias escritas pela dupla regra de Três, ou a regra de proporção composta por 5 números.	p.476
O Capítulo 6 trata das Regras de pagamento, e uma das regras mais necessárias que dizem respeito à compra e venda etc.	p.476
O Capítulo 7 trata da compra e venda no comércio de Mercadorias, em que faz parte o dinheiro em espécie, e diversos dias de pagamento dados para o resto, e o que é ganho e perdido na tolerância de cem libras por doze meses.	p.482
O Capítulo 8 trata da tara e abatimentos da mercadoria, vendida por peso, e de suas perdas e ganhos nisso, etc.	p.488
O Capítulo 9 aborda comprimentos e larguras de Tapeçarias, e outros tecidos, com diversas questões pertencentes a eles.	p.492
O Capítulo 10 trata da redução dos <i>Pawnes of Geanes</i> em jardas inglesas.	p.497
O Capítulo 11 aborda as Regras de Empréstimo e Juros, com diversas questões incidentes sobre isso.	p.498
O Capítulo 12 trata da criação de Fatores.	p.503
O Capítulo 13 trata das regras de escambo ou troca de Mercadorias, em que é considerado parte mercadoria e parte dinheiro em espécie, com suas provas, e diversas outras questões necessárias pertinentes.	p.508
O Capítulo 14 trata do câmbio de dinheiro de um lugar para outro, com diversas questões necessárias incidentes sobre isso.	p.521
O Capítulo 15 trata de seis formas diversas de práticas para redução do dinheiro inglês, flamengo e francês, e como cada uma delas pode ser facilmente convertida em dinheiro esterlino.	p.530
O Capítulo 16 contém uma breve nota das Moedas comuns da maioria dos lugares da Cristandade para <i>trading</i> , e a maneira de seu câmbio de uma Cidade ou Município para outro, que conhecida, os italianos chamam de <i>Parie</i> : por meio da qual eles encontram o ganho ou perda sobre o Câmbio.	p.537
O Capítulo 17 contém também uma declaração da variedade de pesos e medidas da maioria dos lugares da Cristandade para <i>trading</i> , proporcionados em igualdade entre si, como também para nossa medida e peso Ingleses, por meio do qual o praticante engenhoso pode facilmente reduzir o peso e a medida de cada país em um outro.	p.542
O Capítulo 18 trata de diversos esportes e passatempos, praticados com Number.	p.552
Um apêndice de Números figurados, com a extração de raízes.	p.559
Uma tabela de <i>Medida de Board</i> e <i>Medida de Timber</i> por Robert Hartwell.	p.585
Certas tabelas de juros de 10 por 100.	p.590
Novas tabelas de juros de 8 por 100.	p.603

Fonte: Silva e Saito (2020, p. 317-318, tradução nossa⁹²).

⁹² O quadro em idioma original pode ser visto no Anexo C.

Como podemos ver no quadro, a obra é dividida em três partes, as duas primeiras originalmente escritas por Robert Recorde e a terceira foi adicionada por John Mellis, contendo regras práticas para o comércio de mercadorias. Por fim, há um apêndice e algumas tabelas no final do tratado, que foram compiladas por Robert Hartwell que publicou esta edição. Antes do sumário, o tratado também inclui um poema de John Dee sobre a escrita e importância da obra, um poema de Recorde, intitulado O Veredito do Livro⁹³, uma dedicatória ao Príncipe Edward VI, e um prefácio ao leitor. Além disso, após o sumário, há uma lista das tabelas contidas na obra e, em seguida, uma tabela contendo os numerais indo-arábicos e seu valor em numerais romanos.

Assim, é introduzido o primeiro diálogo que trata dos números inteiros (ou naturais, como são conhecidos hoje). Esse diálogo inicia com as Comodidades da Aritmética (*The Commodities of Arithmetick*), isto é, uma seção que busca apresentar quais as utilidades da aritmética e a razão dela ser importante de ser estudada em diversas outras áreas. É nesta seção que Recorde discute a respeito do significado da palavra “aritmética”: “*Arithmos* em grego é chamado de Número: e dele vem Aritmética, a Arte de Numerar. Portanto, a Aritmética é uma Ciência ou Arte que ensina a forma e o uso da Numeração” (Recorde, 1648, p. 9, tradução nossa⁹⁴).

Em seguida, há a seção sobre Numeração (*Numeration*), que objetiva “[...] devidamente atribuir um valor, expressar e ler qualquer número ou soma proposta: ou então, em figuras e lugares apropriados, estabelecer qualquer número conhecido ou nomeado.” (Recorde, 1648, p. 10, tradução nossa⁹⁵). É nesta seção que o autor introduz os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e seus valores em números romanos, além de apresentar um quadro⁹⁶ de Numeração, que é conhecida hoje como *Quadro Valor de Lugar* (QVL).

Nessa seção Recorde define o que é um numerador e o que é uma denominação e, a partir deles, o que é um número. Segundo o autor, denominação “é o último valor ou nome adicionado a qualquer soma” (Recorde, 1648, p. 19, tradução nossa⁹⁷), por exemplo em “20

⁹³ No original: The Books Verdict.

⁹⁴ “[...] *Arithmos* in Greek is called Number: and of it commeth *Arithmetick*, the Art of Numbring. So that *Arithmetick* os a Science or Art teaching the manner and use of Numbring” (Recorde, 1648, p. 9).

⁹⁵ “[...] duely value, expresse, and read any number or summe propounded: or else in apt figures and places set downe any number known or named.” (Recorde, 1648, p. 10)

⁹⁶ Veja este quadro no Anexo D.

⁹⁷ “[...] is the last value or name added to any summe.” (Recorde, 1648, p. 19).

pounds” e “25 homens”, *pounds* e homens são as denominações. Já o numerador é o que dá o valor, isto é, o 20 e o 25. Com os dois juntos, ele disserta a respeito do que é o número: “[...] todo montante que resulta de ambos é chamado de soma, valor ou número” (Recorde, 1648, p. 19, tradução nossa⁹⁸). Em outras palavras, este montante é a junção do numerador e de sua denominação e, portanto, o número a que Recorde está se referindo contempla necessariamente uma denominação, o que dá indícios de que ele está expressando uma quantidade.

Em seguida, ele ensina as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e redução. Segundo Recorde (1648, p. 120, tradução nossa⁹⁹), “redução é, [a operação] pela qual todas as somas de denominação grossas podem se transformar em somas de denominação mais sutis. E, ao contrário, todas as somas de denominação sutis podem ser trazidas para somas de denominação mais grossas.” Ele complementa que por denominações grossas (*grosse*) ele se refere a denominações maiores, que contém outras mais sutis (*subtile*), ou seja, menores. Por exemplo, em termos atuais, o real seria uma denominação grossa ou maior, que contém a denominação centavo, que é uma denominação mais sutil ou menor.

É nesta seção que o autor apresenta o sistema de medidas utilizado na Inglaterra, a partir dos documentos oficiais, ou seja os estatutos, e alguns fora deles, que, no diálogo, o mestre indica que o *scholar* não utilize. Além disso, ele mostra as moedas inglesas e estrangeiras, medidas para líquidos, grãos, comprimento e partes do tempo.

Um exemplo de redução é mostrado por Recorde em relação às moedas *pounds*, *shillings* e *pence*:

[...] se você reduzir 20 *pounds* em *shillings*, você deve considerar que em um *pound* estão incluídos 20 *shillings*, portanto multiplique o primeiro 20 pelo outro 20, e isso equivalerá a 400, pelo que você pode saber que em 20 *pounds* estão contidos 400 *shillings*. Da mesma forma, se você reduzir 30 *shillings* para *pence*, considerando que em um *shilling* há 12 *pence*, você deve multiplicar 30 por 12, e isso será 360, pelo que você poderá descobrir que em 30 *shillings* estão contidos 360 *pence*. E assim você pode reduzir qualquer denominação grande a uma menor por meio da multiplicação (Recorde, 1648, p. 121, tradução nossa¹⁰⁰)

⁹⁸ “[...] the whole summe that resulteth of them both, is called the summe, value, or number” (Recorde, 1648, p. 19)

⁹⁹ “Reduction is, by which all summes of grosse denomination may turned into summes of more subtile denomination. And contrariwise, all summes of subtile denomination may be brought to summes of grosser denomination.” (Recorde, 1648, p. 120).

¹⁰⁰ “[...] if you would reduce 20 pounds into shillings, you must consider that in a pound are included 20 shillings, therefore multiply the one 20 by the other 20, and there wil amount 400, whereby you may know that in 20 pounds are contained 400 shillings. Likewise, if you would reduce 30 shillings into pence considering that in a shilling are 12 pence, you must multiply 30 by 12, and it will be 360, whereby you may find that in 30 shillings are contained

Essa operação de redução é ensinada a partir das operações de multiplicação, como mostrado na citação anterior, e de divisão, no caso em que se queira reduzir uma denominação menor a uma maior, tal como *pence* em *shillings* e *shillings* em *pounds*. De acordo com o autor, isso é importante para que se conheça as principais moedas, pesos e medidas, pois é o principal conhecimento que se precisa ter no comércio.

É necessário salientar que as tabelas com os estatutos oficiais que definiam os valores das moedas, pesos e medidas foram sendo corrigidas conforme novas edições de *The Ground of Artes* foram sendo publicadas. Isso pode ser visto a partir das datas que são apresentadas nessas tabelas, como podemos ver na Figura 6:

Figura 6 – Tabelas de estatutos de moedas e pesos em *The Ground of Artes*

124

A Table of the names, and now valuation of the most usuall Gold-coyns throughout Christendome, with their severall weight of Pence and Grains: and what they are worth of currant English money this present year, 163 .

The names & titles of the Gold.	The weight in Pence, Grains		The value in Shil. Pence.	
Great Sovereain,	10	0	33	0
Double Sover. K.H.	8	1	22	0
Double Sov. of Q.E.	7	7	22	0
Royall.	4	23	16	6
Half Royall.	2	11 d.	8	3
Old Noble.	4	6	14	8
Half Noble.	2	3	7	4
Angell.	3	8	11	0
Half Angell.	1	16	5	6
Salute.	2	5	6	11 ob.
2 parts of Salute.	1	11	4	7
George Noble.	3	0	9	9 ob.
Halfe George Noble.	1	12	4	11 q.
First Crown K.H.	2	9	6	11 ob.
Base Crown K.H.	2	0	5	6
Sover. K. H. best.	3	14	11	8 obq.
Sovereain K. H.	4	0	11	0
Edward Sover.	3	15 d.	11	0
Elizabeth Sover.	3	15 d.	11	0
Elizabeth Crown.	1	9	5	6
Half Crown.	0	19 d.	2	9
Vnite.	0	12	22	0

Double

125

Double Crown.	3	6	11	0
Brittain Crown.	1	1	5	6
Thistle Crown.	1	7	4	4 obq.
Half Crown.	0	19 d.	2	9
Crosse Dagger.	3	6 d.	11	0
Half Crosse Dagger.	1	15	5	6
Rose Royall.	0	21	33	0
Spur Royall.	4	10 d.	16	0
The Angell.	2	13 d.	11	0
Half Angell.	1	11 d.	5	6

All the severall pieces of Gold heretofore mentioned, are set down according to their valuation by the Kings Majesties proclamation for Gold, dated the 23 of November, 1611.

A Table of forain Gold-coyne, according to their ancient valuation and severall weight, in Pence and Graines.

The names & titles of the Gold.	The weight in Pence, Grains		The value in Shil. Pence.	
Wnisorn of Scot.	2	10	6	0
Scottish Crown.	2	5	6	0
French Noble.	4	16	13	4
All sorts of French Crowns.	2	5	6	0
Flanders Riders.	2	6	6	6
Gelders Riders.	2	2	3	6
Philips Royall.	2	10	10	0
Philips Crown.	2	5	5	0
Collen Gilden.	2	2	4	8
New And. Gild.	2	2	5	0

K 4

The

Fonte: Recorde (1648, p. 124-125).

Para continuar o primeiro diálogo, ele apresenta as progressões aritmética e geométrica, seguida da regra de três direta, regra de três inversa, regra de três dupla, regra de três com cinco números, regra de três inversa composta, e a regra da comunhão com e sem tempo. Ao iniciar

360 pence. And thus may you reduce any grosse denomination into a more subtiler by multiplication.” (Recorde, 1648, p. 121).

a seção sobre regra de três, Recorde afirma que é comum que antes dela seja ensinado a extração de raízes, seguindo a ordem de outros autores que escrevem sobre aritmética. Entretanto, por ele achar que é algo mais difícil, deixará este conteúdo para depois. Contudo, ao final da segunda parte, ele não o insere e afirma que deverá ser incluído em um outro livro que contém a segunda parte da aritmética. Em *The Ground of Artes*, a extração de raízes é inserida somente por Robert Hartwell nesta edição de 1648, conforme podemos ver no Quadro 1, contudo, é abordada pelo próprio Recorde em *The Whetstone of Witte*.

O segundo diálogo trata de cálculos aritméticos realizados por meio de contas ou fichas (*counters*), que é aquela aritmética, segundo Recorde (1648) para quem não sabe ler e escrever ou para quem não tem uma caneta em determinada hora. Da mesma forma, o autor apresenta seções de numeração, adição, subtração, multiplicação e divisão, além de mostrar seu uso para comerciantes e para cálculos de auditores para encerrar a primeira parte do tratado.

A segunda parte de *The Ground of artes* trata das frações. Esta seção não foi incluída na primeira versão da obra, pois, provavelmente, Recorde tinha a intenção de escrever um tratado dedicado somente a este tema, contudo não teve tempo de finalizá-lo, conforme vemos na introdução desta parte, quando o *scholar* afirma:

Embora eu perceba que seus diversos negócios ocupam, ou melhor, atormentam você, de modo que você ainda não possa finalizar completamente o Tratado de Frações Aritméticas (*Treatise of Fractions Arithmetically*) que você preparou, onde não apenas diversos trabalhos de Geometria, Música e Astronomia são amplamente apresentados, mas também diversas conclusões e trabalhos naturais, a respeito de misturas de Metais e composições de Remédios, com outros exemplos estranhos. No entanto, enquanto isso, não posso conter meu desejo mais sincero, e imploro importunamente por uma breve introdução sobre o uso de Frações, por meio da qual eu possa pelo menos ser capaz de compreender perfeitamente as suas operações comuns e o uso vulgar de suas regras sem as quais não podem ser bem utilizadas (Recorde, 1648, p. 261-262, tradução nossa¹⁰¹).

Esses negócios que ocupam Recorde, provavelmente, foram sua atuação na Casa da Moeda de Bistol, em que, de acordo com Easton (1981), foi nomeado administrador em 1549, e nas minas da Irlanda, onde foi inspetor de 1551 a 1553. Com isso, a partir da edição de 1552, *The Ground of Artes* foi acrescido de uma segunda parte, que incluiu esta versão resumida do tratado de frações que estaria em produção.

¹⁰¹ “Albeit I perceive your manifold businesses doth so occupie, or rather oppresse you, that you cannot as yet completely end the Treatise of Fractions Arithmetically, which you have prepared, wherein not onely sundry works of Geometry, Musick, and Astronomy be largely set forth, but also divers conclusions and naturall works, touching mixtures of Metals, and compositions of Medicines, with other strange examples. Yet in the mean season, I cannot stay my most earnest desire, but importunely crave of you some briefe preparation toward the use of Fractions, whereby at the least I may be able perfectly to understand the common works of them, and the vulgar use of those rules, which without them cannot well be wrought” (Recorde, 1648, p. 261-262).

Para tanto, Recorde (1648) inicia com uma introdução sobre o que é uma fração, seguida pelas operações de numeração, redução, adição, subtração, multiplicação e divisão.¹⁰² Além disso, o autor discorre a respeito da regra de três direta e inversa, um estatuto que regulariza o preço e proporção de pães e cerveja, um estatuto com uma tabela para medição de terras, e as regras da comunhão, alocação e da falsa posição.

Ao todo, essa parte da obra possui quase 150 páginas. Embora seja um número de páginas expressivo, ainda é bem menor do que a primeira parte do tratado, que contém 260 páginas. Para compreender melhor a forma como Recorde expõe o que deve ser ensinado sobre frações, esta seção de *The Ground of Artes* tem a seguinte organização (Quadro 2):

Quadro 2 – Conteúdo das seções sobre frações de *The Ground of Artes*

Título da seção	Conteúdo da seção
A Segunda Parte da Aritmética, a respeito das frações, brevemente estabelecida (<i>The Second Part of Arithmetick, touching Fractions, briefly set forth</i>)	<ul style="list-style-type: none"> • Breve introdução à seção de frações • Definição de fração • Diferença entre frações próprias e impróprias
Numeração (<i>Numeration</i>)	<ul style="list-style-type: none"> • O valor de uma fração • Comentário a respeito da ordem das operações com frações • Definição de Numerador e Denominador • Definição de Fração imprópria e número misto • Definição de Fração de fração • Exemplo com moedas inglesas • Indicação da ordem das operações com frações
Redução de frações (<i>Reduction of fractions</i>)	<ul style="list-style-type: none"> • Explicação de 5 formas para reduzir frações, com alguns exemplos: <ul style="list-style-type: none"> ○ Frações com denominadores diferentes ○ Frações de frações ○ Frações impróprias em números mistos e números mistos em frações impróprias ○ Abreviação (isto é, simplificação) de frações ○ Como modificar a denominação de uma fração
Adição (<i>Addition</i>)	<ul style="list-style-type: none"> • Adição de frações de uma denominação • Adição de frações de diferentes denominações
Subtração de Frações (<i>Subtraction of Fractions</i>)	<ul style="list-style-type: none"> • Exemplos • Explicação sobre como identificar a maior entre duas frações

¹⁰² Salientamos que na edição de 1558, feita por Recorde, de *The Ground of Artes*, a multiplicação e divisão de frações são as primeiras operações ensinadas, pois o autor defendia que elas eram as mais fáceis. Em seguida, ele apresenta a redução, a adição e a subtração, isto é, elas teriam um grau maior de dificuldade. Contudo, editores posteriores da obra, reorganizaram essas operações chegando à ordem estabelecida na versão utilizada nesta tese: redução, adição, subtração, multiplicação e divisão, em que é afirmado que redução é a mais fácil entre elas.

<p>Multiplicação de Frações (<i>Multiplication of Fractions</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Como multiplicar frações • Exemplos • Diferença entre multiplicação de números inteiros e números quebrados • Multiplicação de um número inteiro por uma fração • Duplicação (<i>duplation</i>), isto é, multiplicação por 2
<p>Divisão de Frações (<i>Division of Fraction</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Como dividir frações • Exemplos • Significado da operação de divisão de frações • Mediação (<i>Mediation</i>), isto é, divisão por 2.
<p>A Regra de Ouro Direta com Frações (<i>The Golden Rule direct in Fractions</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Explicação da regra • Exemplo com o custo de uma medida em jardas de veludo • Exemplo com o custo de uma pesagem em <i>pounds</i> de prata • Prova da Regra de Ouro, isto é, como conferir o resultado do cálculo realizado
<p>A Regra de Ouro Inversa com Frações (<i>The Backer Rule, or Reverse Rule in Fractions</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Explicação da regra • Exemplo com um empréstimo • Exemplo com o Estatuto de aferição [da qualidade] de pão e cerveja (<i>Statute of Assise of bread and ale</i>) <ul style="list-style-type: none"> ○ Tabela para aferição de peso do pão: "<i>A table of the contents of the Statute for the assise of the weight of Bread, from one shilling the quarter to 20 shillings, faithfully corrected</i>" ○ 2 Tabelas de aferição de peso do pão: "<i>Two large Tables containing the Assise of Bread from 3. the quarter of wheat, to 40 s 6d</i>" • Exemplo sobre medição de terras • Tabela sobre as possíveis medidas das dimensões um Acre de terra
<p>A Regra da Comunhão (<i>The Rule of Fellowship</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Breve explicação da regra • Exemplo da divisão de uma recompensa • Como conferir o resultado do cálculo realizado • Exemplo com construção de uma casa e a divisão de gastos • Exemplo envolvendo divisão de bens em um testamento • Regra para encontrar a proporção entre números a partir desse exemplo do testamento • Outros exemplos de divisão de dinheiro
<p>A Regra da Mistura (<i>The Rule of Alligation</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Explicação do nome da regra e outras nomenclaturas • A razão/explicação da regra • Exemplo com mistura de vinho • Exemplo com mistura de temperos • Exemplo com mistura de 'drogas' (remédios) • Exemplo com mistura de metais • Exemplo de mistura de prata
<p>A Regra da Falsa Posição (<i>The Rule of Falshood</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Explicação do nome da regra • Poema sobre a regra e como se encontra a verdade pela falsidade.

	<ul style="list-style-type: none"> • Explicação da regra • Exemplo com alvenaria (<i>masonry</i>) • Prova para a regra • Exemplo com mercadorias • Exemplo de débito • Exemplo de soma de dinheiro que 3 homens possuem • Exemplo de número de carneiros • Exemplo de agricultura/lavoura (<i>tillage</i>) e número de ovelhas • Exemplo do peso de copos de prata • Exemplo com água de uma cisterna • Exemplo com a Divisão de dinheiro entre parceiros • Exemplo com a história da coroa do rei de Siracusa • Exemplo com proporção de metais
--	---

Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir de uma pré-leitura dessa seção, percebemos que os exemplos propostos por Recorde poderiam fazer emergir um debate sobre a relação entre número e quantidade nas operações com frações. Esta discussão pode ser vista na seção a seguir.

4.3 A relação entre número e quantidade nas operações com frações de *The Ground of Artes*

Recorde faz uma primeira menção às frações no primeiro diálogo, ao ensinar divisão, quando ocorre um resto em um exemplo proposto. O problema era: “Se você precisar dividir 365 (que é a soma dos dias de um ano) por 28, que são os dias de um mês comum, então você deve posicioná-los assim” (Recorde, 1648, p. 89, tradução nossa¹⁰³). Para ensinar a regra para calcular uma divisão, Recorde (1648) utiliza essa divisão de 365 por 28, que é o número de dias de um ano pelo número de dias de um mês comum. Ao final do cálculo, há 1 de resto, e o *scholar* afirma que para continuar o processo, deveria particionar esta unidade em 28 partes, como podemos ver no diálogo:

[Master] E agora eu terminei a divisão, pois não consigo mais encontrar meu divisor 28 na soma acima.

Scholar. Não, a não ser que você particione o 1 que restou em 28 partes.

Master. Isso foi bem colocado, é de fato o que devemos fazer em tais casos, quando resta alguma coisa: mas deixarei isso passar agora, e o tornarei perfeito na divisão de números inteiros, e daqui em diante lhe ensinarei particularmente sobre números quebrados, chamados Frações. (Recorde, 1648, p. 93, tradução nossa¹⁰⁴).

¹⁰³ “If you should divide 365 (which are the summe of the days of a year) by 28, which are the days of a common Moneth, then should you set them thus” (Recorde, 1648, p. 89).

¹⁰⁴ “[Master] And now have I done with the dividing, for I cannot finde my divisor 28 no more in the over summe. Scholar. No, except you would part the 1 that remaineth into 28 parts.

Master. That is well said, and so must we do in such cases, when there remaineth any thing: but I will let that passe now, and will make you perfect in division of whole numbers, and will hereafter teach you particularly of broken numbers, called Fractions.” (Recorde, 1648, p. 93).

Podemos ver que o mestre responde que isto é o que deve ser feito quando resta ‘alguma coisa’, isto é, quando há alguma quantidade restante após a realização da operação de divisão. Entretanto, seguindo a ordem de ensino de conteúdos – frequentemente destacada por ele – as frações só serão abordadas após ele aprender perfeitamente a divisão dos números inteiros e as demais regras desta seção. É necessário destacarmos que as frações só seriam utilizadas em exemplos como esse, caso a grandeza em questão fosse contínua, pois se a grandeza for discreta, o resto deverá continuar sendo um número inteiro.

Ao prosseguir para a seção de Redução, Recorde mostra como uma denominação pode ser reduzida em outra, com multiplicação ou divisão, por exemplo: reduzir 20 *pounds* em *shillings*, ao considerar que um *pound* contém 20 *shillings*. Assim, com o objetivo de que o *scholar* conheça as principais moedas, pesos e medidas, que ele considera como “[...] a principal e mais importante coisa a ser conhecida em *trading*¹⁰⁵ [...]” (Recorde, 1648, p. 122, tradução nossa¹⁰⁶), apresenta tabelas com diversas reduções.

Contudo, o conhecimento que o *scholar* tem até então não é suficiente para tratar da redução de alguns tipos de medidas, pois elas precisariam de frações para a realização do cálculo, conforme o mestre afirma:

Aqui posso dizer-lhe muitas outras coisas sobre medidas, e também como reduzir medidas estrangeiras para nossas medidas, mas porque isso não pode ser bem feito sem o conhecimento de Frações, que você ainda não aprendeu, vou deixá-las passar para outra hora, que eu tenha ensinado a você o conhecimento dos números quebrados. (Recorde, 1648, p. 139, tradução nossa¹⁰⁷)

Assim, ao chegar na seção de frações, o mestre inicia perguntando ao *scholar* o que ele entende por frações, que responde: “na verdade, senhor, eu acho que uma Fração (como tenho constantemente ouvido sobre ela) seja um número quebrado, isto é, seja não um número inteiro, mas a parte de um número” (Recorde, 1648, p. 262, tradução nossa¹⁰⁸). O mestre, então, confirma o que o *scholar* afirmou e completa:

Uma Fração de fato é um número quebrado e, conseqüentemente, a parte de outro número: mas isso deve ser entendido como um outro número que não pode ser

¹⁰⁵ Por *trading* neste contexto, entendemos a circulação, compra e venda de bens, principalmente, envolvendo diversos locais, como cidades e países.

¹⁰⁶ “[...] the chiefe and principallest thing in traffick to be known [...]” (Recorde, 1648, p. 122).

¹⁰⁷ “Here might I tell you many things else touching measures, and also how to reduce strange measures to our measures, but because it cannot be well done without the knowledg of Fractions, which as yet you have not learned, I will let them passe till another time, that I have taught you the knowledg of broken numbers.” (Recorde, 1648, p. 139).

¹⁰⁸ “Marry sir, I think a Fraction (as I have heard it often named) to be a broken number, that is to say, to be no whole number, but part of a number.” (Recorde, 1648, p. 262).

dividido em nenhuma outra parte além das Frações: pois embora eu possa tomar a terça parte de 60, ou a quarta parte dele, e assim de outras partes diversamente, entretanto essas partes não são apropriadamente nem devem ser chamadas de Frações, porque podem ser expressas por números inteiros. [...] Portanto, propriamente, uma fração expressa a parte ou partes apenas de uma unidade, ou seja, o número que é a soma total ou inteira de qualquer fração não pode ser maior que um [...]. (Recorde, 1648, p. 262-263, tradução nossa¹⁰⁹)

Em outras palavras, para Recorde, uma fração expressa uma partição. Embora o autor afirme que a fração seja um número quebrado, na verdade, ele está se referindo a uma partição de uma unidade, isto é, de uma quantidade, o que pode ser percebido nos problemas apresentados para exemplificar os cálculos com frações. Não é o número que é particionado ou fracionado, mas, sim, uma determinada quantidade. Com isto, ele apresenta a definição de frações com base na relação parte-todo.

No mesmo contexto comercial de Recorde, podemos ver que Baker (1564) apresenta uma série de problemas relacionados à medição que necessitam das frações, sendo um deles: “Se um pedaço de tapeçaria tem 5 *elles* $\frac{3}{4}$ de comprimento e 4 *elles* $\frac{2}{3}$ de largura, quantos *elles* quadrados o mesmo pedaço contém? Resposta: Multiplique o comprimento pela largura, ou seja, $5 \cdot \frac{3}{4}$ por $4 \cdot \frac{2}{3}$, e daí resulta 26. *elles* $\frac{5}{6}$ tantos *elles*” (Baker, 1564, p. 112, tradução nossa¹¹⁰). Neste exemplo, o contexto apresenta a medição de um pedaço de tapeçaria com a unidade medida “*elles*”, uma unidade de comprimento geralmente utilizada para tecidos na época. Contudo, o comprimento desta tapeçaria contém mais do que 5 *elles*, mas menos do que 6 *elles*: ele contém, além dos 5 *elles*, um pedaço de tecido que corresponde a $\frac{3}{4}$ de um *elle*. Nas palavras de Recorde, isso seria uma medida “quebrada”, isto é, uma partição de *elle*, portanto, necessita das frações para expressá-la.

Como vimos na descrição da seção de frações apresentada anteriormente, Recorde expõe diversos problemas para ensinar as regras relacionadas às operações com frações. A maioria desses exemplos são relacionados a situações práticas da sociedade inglesa do século

¹⁰⁹ “A Fraction indeed is a broken number, and so consequently the part of another number: but that must be understood of such another number as cannot be divided into any other parts then Fractions: for although I may take the third part of 60, or the fourth part of it, and so of other parts diversly, yet those parts be not properly nor ought to be called Fractions, because they may be expresses by whole numbers. [...] Wherefore properly a Fraction expresseth the part or parts onely of a unite, that is to say that the number which is the whole or entire summe of any Fraction, may not bee greater then one [...]” (Recorde, 1648, p. 262-263)

¹¹⁰ “IF a peece of tapistry be 5 *elles* $\frac{3}{4}$ longe, and 4 *elles* $\frac{2}{3}$ in breadth, how mani *elles* square doth the same pece containe? Aunswere: Mul[tiple] the length by the breadth, that is to saye $5 \cdot \frac{3}{4}$ by $4 \cdot \frac{2}{3}$, and thereof commeth 26. *elles* $\frac{5}{6}$ so many *elles*” (Baker, 1564, p. 112).

XVI, tais como: medidas de terras, mistura de medicamentos, divisão de bens etc. Isso está de acordo com o que foi afirmado por Silva (2005), que indica que a necessidade dos cálculos com frações vem de situações de medição, distribuição e comparação. Nesse sentido, é a partir desses problemas que podemos ver a relação entre quantidade e número.

4.3.1 Problema 1: um exemplo de comparação

Um dos exemplos apresentados por Recorde, visava determinar um valor desconhecido ao tratar do cálculo do valor de um peso de prata: “Se $\frac{11}{12}$ de 1 libra de peso de prata valem $\frac{12}{4}$ de um Soberano, quanto vale $\frac{1}{2}$ de 1 libra [de peso de prata]?” (Recorde, 1648, p. 313, tradução nossa¹¹¹). Podemos perceber que este tipo de problema está relacionado ao contexto prático de Recorde no comércio e na sua atuação nas casas da moeda, uma vez que ele trata da conversão de moedas.

Para ensinar como calcular uma proporção, isto é, a Regra de Ouro ou Regra de três com frações, o mestre relembra o que ensinou na primeira parte do tratado sobre essa regra, que trata de “alocar 3 números propostos na questão de forma a encontrar o quarto [...]” (Recorde, 1648, p. 311, tradução nossa¹¹²), mas neste caso, apresenta uma regra para realizar este cálculo quando os três números dados são frações. Esse posicionamento dos números sempre é feito seguindo uma ordem, como pode ser visto na Figura 7, em que os valores em 1º e 3º lugares devem ser da mesma natureza ou denominação. Assim, o 2º e 4º lugares também terão a mesma denominação. Por exemplo, na Figura 7, podemos ver que 40 e 105 têm como denominação a moeda *shilling* e 8 e 21 tem como denominação semanas (*weakes*), uma vez que o problema procurava saber em quantas semanas ele gastaria 105 *shillings*, se ele gastava 40 *shillings* em 8 semanas:

¹¹¹ “If $\frac{11}{12}$ of 1 pound weight of silver, be worth $\frac{12}{4}$ of a Sovereigne, what is $\frac{1}{2}$ of 1 pound weight worth?” (Recorde, 1648, p. 313)

¹¹² [...] placing of the 3 numbers proponed in the question whereby to finde the fourth [...]” (Recorde, 1648, p. 311).

Figura 7 – Posição dos números no cálculo da Regra de Ouro



Fonte: Recorde (1648, p. 177).

Assim, de forma análoga para o problema com frações, Recorde apresenta o seguinte procedimento:

[...] se seus três números são frações, para um trabalho adequado e certo, multiplique o numerador do primeiro número na questão, pelo denominador do segundo: E tudo isso novamente multiplique pelo denominador do terceiro número, e o total dele você deverá manter como o divisor. Em seguida, multiplique o denominador do primeiro número pelo numerador do segundo, e o todo pelo numerador do terceiro, e este total será o seu dividendo.

Agora divida este dividendo pelo divisor que você descobriu antes, e esse número será o quarto número da questão que você procura (Recorde, 1648, p. 312, tradução nossa¹¹³)

A partir desse procedimento, podemos calcular quanto vale $\frac{1}{2}$ de 1 libra de peso de prata, conforme foi pedido no problema, considerando que $\frac{11}{12}$ de 1 libra de peso de prata valem $\frac{12}{4}$ de um Soberano. Assim, o primeiro número seria $\frac{11}{12}$, o segundo $\frac{12}{4}$ e o terceiro $\frac{1}{2}$. Para encontrar o divisor, multiplicamos: $11 \times 4 \times 2 = 88$ (Figura 8). E para encontrar o dividendo, multiplicamos: $12 \times 12 \times 1 = 144$. Portanto, o quarto número seria $\frac{144}{88}$, que em menores termos – como indica Recorde – seria $1\frac{7}{11}$. Isto é, metade de 1 libra de prata, quando pesada, é equivalente à 1 Soberano mais uma fração de $\frac{7}{11}$ desse Soberano. Note que, ao utilizar o número misto – ao invés da fração imprópria – ele mantém a ideia de que é o Soberano que está sendo dividido.

¹¹³ “[...] if your three numbers bee fractions, for an apt work and certaine, multiply the numerator of the first number in the question, by the denominator of the second: And all that againe multiply by the denominator of the third number, and the totall thereof shall you keep for to be the divisor. Then multiply the denominator of the first number by the numerator of the second, and the whole thereof by the numerator of the third, and the totall thereof shall be your dividend.

Now divide this dividend by the divisor which you found out before, and that number shal be the fourth number of the question which you seek for” (Recorde, 1648, p. 312).

Figura 8 – Posição dos números no exemplo libra de peso de prata

$$\begin{array}{ccc} \frac{11}{12} & \mathbf{Z} & \frac{12}{4} \\ \frac{1}{2} & & 1\frac{7}{11} \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em termos atuais, este procedimento realizado por Recorde é equivalente ao cálculo de regra de três direta, em que multiplicamos as frações que estão nas posições 2 e 3 e dividimos o resultado pela fração que está na posição 1, obtendo o resultado desejado – posição 4:

$$\frac{\frac{12}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{12}} = \frac{12 \times 1 \times 12}{4 \times 2 \times 11} = \frac{144}{88} = 1\frac{7}{11}$$

Embora Recorde afirme, ao explicar a regra, que será feita uma divisão entre o dividendo e o divisor, no resultado do próprio exemplo, podemos ver que isso não significa que será realizada uma operação de divisão cujo resultado é um número decimal, como podemos fazer atualmente. Contudo, uma das situações que resultam na necessidade do uso de frações vem de problemas em que há a divisão de uma quantidade que não resulta em um número inteiro (*whole number*), conforme relatamos no início da seção 4.3.

Podemos notar que Recorde se refere às frações do problema como “números”. É importante ressaltar que ele não está se referindo aos números racionais, tal como conhecemos atualmente. Em *The Whetstone of Witte*, Recorde (1557, s.p., tradução nossa¹¹⁴) afirma que “número [...] nada mais é do que uma coleção de unidades”. A partir desta definição, ele explica que as frações não são propriamente números, “porque todos os números consistem em uma multitude de unidades: e toda fração própria é menor que uma unidade e, portanto, as frações não podem ser exatamente chamadas de números: mas podem ser chamadas de frações de números” (Recorde, 1557, s.p., tradução nossa¹¹⁵). Isto é, para ele, a fração não é um número, mas é uma representação que expressa uma quantidade menor do que uma unidade.

¹¹⁴ “number [...] is nothyng els but a collection of unities” (Recorde, 1557, s.p.).

¹¹⁵ “Because all numbers doe consiste of a multitude of unities: and every proper fraction is lesse then an unities, and therefore can not fractions exactly be called numbers: but maie bee called rather fractions of numbers” (Recorde, 1557, s.p.).

Assim, podemos perceber que o autor parte de uma situação de razão, para calcular quanto de prata seria equivalente a uma quantidade de moeda Soberano (*Sovereigne*). Segundo Silva (2005, p. 269), as situações associadas à “concepção de razão não são representadas por uma partição ou medição ou distribuição, mas pela comparação de duas quantidades (do mesmo objeto ou de objetos diferentes), isto é, as razões podem ser utilizadas como um índice comparativo entre duas quantidades.”

Esta comparação entre quantidades nos exemplos de razão pode ser vista quando, em *The Whetstone of Witte*, Recorde (1557, s.p., tradução nossa¹¹⁶) afirma que a fração é:

“[...] uma conexão e conferência de números, declarando as partes de uma unidade. Pois o numerador significa um número, e o denominador outro: O denominador declara em quantas partes a unidade está dividida, e o numerador significa que dessas partes, nem todas, mas apenas tantas, devem ser consideradas, conforme o numerador indica.”

Dessa forma, as frações representariam partes de uma quantidade específica, que foi dividida pelo número de partes conforme foi expresso pelo denominador. Com isso, é possível perceber como Recorde estaria operando com as quantidades ou partes dela, e não somente com os números.

4.3.2 Problema 2: um exemplo de medição

Um outro problema é apresentado por Recorde na seção de *Golden Rule reverse*, ou *Backer Rule*, isto é, a regra de três inversa, que trata de grandezas que são inversamente proporcionais: “Se um Acre de terreno contém quatro *Perches* de largura, então ele contém 40 *Perches* de comprimento. Então eu demando de você quanto será o comprimento para um Acre, quando há em sua largura 13 *Perches*” (Recorde, 1648, p. 331, tradução nossa¹¹⁷)

Antes de abordar a resolução deste problema, Recorde afirma que precisa apresentar ao *scholar* um estatuto de medidas, ou seja, um regimento que estabelece a relação entre unidades de medidas:

É estabelecido que três grãos de Cevada secos e redondos compõem a medida de uma polegada: doze polegadas formam um pé, e três pés formam uma jarda (os Livros

¹¹⁶ “[...] a connexion and conference of numbers, declaring the partes of an unitie. For the numerator doeth signifie one nōber, and the denominator another: The denominator declarynge into how many partes the unitie is divided, and the numerator signifiyng that of those partes, not all, but so many onely are to be takē, as the numerator importeth” (Recorde, 1557, s.p.).

¹¹⁷ “Whether the Acre of ground doth contain four Perches in breadth, then it contain 40 Perches in length. Then do I demand of you, how much shall the length of an Acre be, when there is in the breadth of it 13 Perches” (Recorde, 1648, p. 331).

Ingleses comuns contém um *Elne*¹¹⁸ cinco jardas e meia fazem um *Perch* e quarenta *Perches* de comprimento e quatro de largura formarão um Acre. [...] a intenção do Estatuto é que um acre deve conter 160 *Perches* quadrados. (Recorde, 1648, p. 331, tradução nossa¹¹⁹)

Para melhor entender a equivalência entre as unidades de medidas deste regimento, elaboramos o Quadro 3, em que a quantidade apresentada na primeira coluna é equivalente à quantidade que está na mesma linha na segunda coluna:

Quadro 3 – Equivalência das unidades de medida de comprimento

1 polegada	3 grãos de cevada
1 pé	12 polegadas
1 jarda	3 pés
1 <i>perch</i>	$5 + \frac{1}{2}$ jardas
1 acre	40 <i>perches</i> de comprimento e 4 <i>perches</i> de largura, que equivalem a 160 <i>perches</i> quadrados

Fonte: Elaborado pelos autores.

Podemos notar que Recorde apresenta quatro unidades de comprimento e uma unidade de área. Como estabelecido pelo próprio autor, este estatuto indica que a medida de um acre equivale a 160 *perches* quadrados e esta informação é utilizada pelo *scholar* para resolver o problema, em que sua primeira conclusão, baseado nesse regulamento, é que um *perch* equivale a $\frac{1}{160}$ de um acre.

Não há uma discussão do motivo para se utilizar a regra de ouro inversa para este exemplo, pois está implícito que o acre tem uma medida padrão de 160 *perches* quadrados, com base em uma superfície que mede 4x40, mas podendo ter a mesma área a partir de outras medidas. Isto é, se um acre tem uma largura maior que 4 *perches*, seu comprimento deverá ser menor do que 40 *perches*. Na nossa matemática atual, afirmamos que elas são grandezas inversamente proporcionais. Assim, segundo Recorde, para resolver uma regra de ouro inversa com frações, devemos seguir a seguinte instrução:

[...] você multiplica o Numerador do primeiro pelo Numerador do segundo, e tudo isso pelo denominador do terceiro, e o que corresponder disso será o dividendo. Então multiplique o denominador do primeiro pelo denominador do segundo, e esse todo

¹¹⁸ *Elne* é uma unidade de medida de comprimento como a polegada e a jarda. Recorde afirma que ela também está nos estatutos, mas não apresenta o seu valor em relação às outras também mencionadas.

¹¹⁹ “It is ordained that three Barley corns dry and round, shall make up the measure of an inch: twelve inches shall make a foot, and three feet shall make a yard, (the common English Books have an Elne) five yards and an halfe make a Perch, and forty Perches in length, and four in breadth shall make an Acre. [...] the intent of the Statute is, that one acre should containe 160 square perches” (Recorde, 1648, p. 331).

pelo numerador do terceiro, e aquilo que resultar disso será o divisor. (Recorde, 1648, p. 315, tradução nossa¹²⁰)

Embora exista esta regra estabelecida por Recorde, o *scholar* afirma que, seria mais fácil utilizar os números inteiros – e a regra de ouro inversa com números inteiros – do que transformar as medidas em frações para realizar os cálculos pedidos. Para realizar estes cálculos, Recorde (1648, p. 181, tradução nossa¹²¹) afirma que: “você deve multiplicar agora o primeiro número pelo segundo, e o que dele surgir, você deve dividir pelo terceiro [...]”

Note que, ao explicitar a regra com as frações, Recorde inclui os termos *divisor* e *dividendo*, entretanto, é necessário destacar que ele não está tratando a fração como uma divisão, tanto que ele não realiza a divisão entre os dois. Na verdade, ele parte da forma como a regra foi estabelecida para o cálculo com números inteiros – em que ele aborda a divisão – e utiliza os mesmos termos para o cálculo com as frações.

Então, ele multiplica 4 por 40 e o resultado, que é 160, é dividido por 13. Portanto, a medida é $\frac{160}{13}$ ou $12\frac{4}{13}$ *perches*. Em seguida, ele afirma que transformará a fração restante ($\frac{4}{13}$) em partes comuns de um *perch*, de acordo com o estatuto (Figura 7). Isto ocorre devido às medições de terra, em geral, utilizarem as unidades de medidas que são frações das unidades maiores, por exemplo o *perch* e a jarda são frações do acre, ou seja, partições de uma unidade de medida maior.

No caso deste problema, o *scholar* decide utilizar a unidade de medida pés, para evitar o trabalho de fazer muitas operações, estabelecendo que 1 *perch* contém $16\frac{1}{2}$ pés. Com isso, fica implícito o cálculo: se uma jarda tem três pés, e um *perch* tem $5\frac{1}{2}$ jardas, então 1 *perch* tem $16\frac{1}{2}$ pés. Para realizar esta conversão de *perch* para pés, o *scholar* faz os seguintes cálculos: “Então, para transformar $\frac{4}{13}$ em pés, eu multiplico $16\frac{1}{2}$ por 4 e isso dá 66, que devo dividir por

¹²⁰ “[...] you multiply the Numerator of the first by the Numerator of the second, and the whole thereof by the denominator of the third, and that amounteth thereof, shall be the dividend. Then multiply the denominator of the first, by the denominator of the second, and that whole by the numerator of the third, and that that ariseth thereof, shall be the divisor” (Recorde, 1648, p. 315).

¹²¹ “[...] you shall multiply now the first number by the second, and that ariseth thereof, you shall divide by the third [...]” (Recorde, 1648, p. 181).

13, e o quociente é $5\frac{1}{13}$ ” (Recorde, 1648, p. 332, tradução nossa¹²²). Em outras palavras, uma fração de $\frac{4}{13}$ de *perch* equivale a $5\frac{1}{13}$ pés, ou 5 pés e uma parte de $\frac{1}{13}$ de um pé.

Considerando o estatuto supracitado, poderíamos ainda transformar essa fração de um pé em polegadas, multiplicando-a por 12, pois 1 pé equivale a 12 polegadas. Assim, $\frac{1}{13}$ de um pé seria igual a $\frac{12}{13}$ de uma polegada. Com isso, o cálculo realizado no problema mostra que um acre que tem uma largura de 13 *perches*, terá um comprimento de 12 *perches*, 5 pés e $\frac{12}{13}$ de uma polegada.

Ao final deste exemplo, Recorde indica que os estatutos de língua latina e inglesa geralmente afirmam que um acre que tem uma largura de 13 *perches* terá o comprimento de 13 *perches*, 5 pés e uma polegada. Isto é, esses regulamentos estão incorretos, o que pôde ser visto no cálculo realizado pelo *scholar*. Assim, com o intuito de corrigir esses estatutos corruptos, Recorde apresenta uma Tabela para medição de um Acre de terra¹²³ (*Table for measuring of an Acre of ground*).

Essas correções nas regulamentações de medições de terra reforçam a real finalidade dos tratados de Recorde, que consiste em registrar esses conhecimentos de forma a promover um novo currículo para o estudo das matemáticas, neste caso, da aritmética. A importância desses registros é enfatizada pelo autor quando afirma que é com base neles “[...] que todos os homens possam perceber quão necessária é a Aritmética para os Estudantes de Direito” (Recorde, 1648, p. 333, tradução nossa¹²⁴). Como visto na seção 3.2, o estudo das matemáticas estava presente nas universidades, mas baseadas em um viés teórico. Portanto, Recorde mostra a necessidade desses conhecimentos de aritmética prática para o currículo universitário.

Por fim, neste problema, podemos perceber que Recorde opera com as quantidades de terra, não somente com os números. Caso ele operasse com os números, seria suficiente afirmar que a medida do comprimento da superfície em questão seria $\frac{160}{13}$ ou $12\frac{4}{13}$ *perches*, ou mesmo apenas apresentar exemplos sem a necessidade de um contexto prático. Contudo, ele segue o

¹²² “Then to returne $\frac{4}{13}$ into Feet, I multiply $16\frac{1}{2}$ by 4, and it maketh 66, which I must divide by 13, and the quotient is $5\frac{1}{13}$ ” (Recorde, 1648, p. 332).

¹²³ Esta tabela pode ser vista no Anexo E, em que a primeira coluna contém uma a medida da largura de uma acre, em *perches*, e as colunas seguintes a medida do comprimento do acre, em *perches* e suas demais partições, como pés e polegadas.

¹²⁴ “[...] may all men perceive how needfull Arithmetick is to the Students of Law” (Recorde, 1648, p. 333)

estatuto das medidas de terra, ao operar com a fração $\frac{4}{13}$ para calcular o quanto ela seria equivalente nas partes do *perch*, isto é, na partição de uma determinada quantidade de terra.

4.3.3 Problema 3: um exemplo de distribuição

Outra importante situação de uso das frações está em problemas de distribuição, tais como a divisão de bens em testamentos, trabalhos etc. Nesse sentido, um dos problemas apresentados por Recorde está na seção dedicada à Regra da Comunhão (*Rule of Fellowship*). O nome dessa regra está baseado na ideia de comunhão ou distribuição de quantidades. Embora Recorde dedique uma seção separada para ela, ele afirma que esta é uma ramificação das regras anteriores (Regra de Ouro e Regra de Ouro Inversa), mas que por ter diversos empregos, precisa abordá-la brevemente.

Para tanto, Recorde (1648, p. 337, tradução nossa¹²⁵) apresenta o seguinte problema:

Quatro homens receberam uma recompensa, ou prêmio em tempo de guerra, o prêmio é um valor em dinheiro, 8190 *pounds*, e como os homens não têm o mesmo grau, portanto suas cotas podem não ser iguais: apenas a pessoa mais importante terá da recompensa a terceira parte, e a décima parte a mais: a segunda terá um quarto, e a décima parte a mais: a terceira terá a sexta parte: e assim resta para o quarto homem uma porção muito pequena, mas tal é a sua parte (esteja ele satisfeito ou indignado) ele deve se contentar com uma parte da presa: Agora eu demando de você, o que cada homem terá de sua parte?

Em outras palavras, a recompensa de 8190 *pounds* será dividida entre quatro homens, de forma que: o primeiro receberá $\frac{1}{3} + \frac{1}{10}$ do total; o segundo receberá $\frac{1}{4} + \frac{1}{10}$ do total; o terceiro receberá $\frac{1}{6}$ do total; e o quarto receberá $\frac{1}{20}$ do total. Para resolver este problema, Recorde afirma que o primeiro passo é reduzir os denominadores em um mesmo número, isto é, os denominadores precisam ser de iguais – de mesma natureza – para que se possa operar com as frações.

Para tanto, ele utiliza a multiplicação, mas afirma que não multiplicará os denominadores de todas as frações, pois resultaria em um número muito grande, podendo desconsiderar alguns: “[...] considerando que 3 é parte de 6, omitirei esse 3: e da mesma forma

¹²⁵ “Four men got a booty, or prize in time of war, the prize is in value of money, 8190 pound, and because the men bee not of like degree, therefore their shares may not be equall: but the chiefest person will have of the booty the third part, and the tenth part over: the second will have a quarter, and the tenth part over: the third will have the sixth part: and so there is left for the fourth man a very small portion, but such is his lot (whether he be pleased or wroth) hee must be content with one 20 part of the prey: Now I demand of you, what shall every man have to his share?” (Recorde, 1648, p. 337).

dez, que é parte de 20, posso ultrapassar também, e então há apenas 3 Denominadores para multiplicar, que são 4, 6 e 20, o que dá 480” (Recorde, 1648, p. 338, tradução nossa¹²⁶). É importante destacar que para realizar a operação de redução em *The Ground of Artes*, não é necessário encontrar o mínimo múltiplo comum – como é feito na matemática atual – apenas um número que seja um múltiplo comum de todos os denominadores, por isso, Recorde apenas realiza a multiplicação entre eles. Além disso, o fato dele “omitir” alguns denominadores por serem uma parte dos outros significa, em outras palavras, que eles já são múltiplos (o 6 é um múltiplo de 3; e o 20 é um múltiplo do 10).

Continuando a resolução do problema, Recorde calcula quantas partes de 480 cabe para cada homem:

[...] para o primeiro homem $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{10}$, o $\frac{1}{3}$ é 160, o $\frac{1}{10}$ é 48, que eu expresse em uma soma para a parte do primeiro homem, e dá 208. Então para a parte do segundo homem, pego $\frac{1}{4}$, que é 120, e $\frac{1}{10}$, que é 48, e isso dá o total de 168. Agora, para o terceiro homem, que deve ter $\frac{1}{6}$, pego 80. E para o quarto homem, restam apenas 24, que é $\frac{1}{20}$ de toda a soma [...] (Recorde, 1648, p. 338, tradução nossa¹²⁷).

Note que este cálculo realizado por Recorde mostra qual a quantidade de 480 partes cabe a cada homem. Entretanto, como o próprio autor ressalta, o valor da recompensa não é 480, e sim, 8190 *pounds*, portanto, será necessário encontrar a partição deste total, partindo dos valores das partições de 480, o que é feito pela Regra de Ouro:

[...] colocando em primeiro lugar o número que encontrei multiplicando os Denominadores, e em segundo lugar a soma da recompensa. E vejo qual proporção existe entre o primeiro número e o segundo, a mesma proporção deverá existir entre as partes desse primeiro número, e as partes do segundo, comparando cada uma assim. Portanto, devo colocar em terceiro lugar uma das partes ou cotas, e então trabalhar de acordo com a antiga Regra da Proporção, ou Regra de Ouro (Recorde, 1648, p. 338-339, tradução nossa¹²⁸).

¹²⁶ “[...] considering that 3 is a part of 6 I will omit that 3: and likewise ten, which is a part of 20, I may overpasse also, and then there is but 3 Denominators to multiply, that is 4, 6, and 20, which makes 480” (Recorde, 1648, p. 338).

¹²⁷ “[...] for the first man $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{10}$, the $\frac{1}{3}$ is 160, the $\frac{1}{10}$ is 48, which I put in on summe for the first mans share, and it maketh 208. Then for the second mans share, I take $\frac{1}{4}$, which is 120, and $\frac{1}{10}$ which is 48, and that maketh is the whole 168. Now for the third man which must have $\frac{1}{6}$ I take 80. And for the fourth man there remaineth but 24, which is $\frac{1}{20}$ of the whole summe [...]” (Recorde, 1648, p. 338).

¹²⁸ “[...] putting in the first place the number of that I found by multiplying the Denominators, and in the second place the summe of the booty. And look what proportion is between the first number and the second, the same proportion shall be between the parts of that first number, and the parts of the second, comparing each to like this. Therefore I must put in the third place, one of the parts or shares, and then worke by the former Rule of Proportion, or Golden Rule” (Recorde, 1648, p. 338-339)

Dessa forma, posicionando os números, como estabelecido por Recorde, temos a seguinte figura (Figura 8) que representa o cálculo da parte que caberá a cada homem, estando o valor equivalente a 8190:

Figura 9 – Cálculo da regra de três para encontrar o valor que cada homem receberá

$\begin{array}{r} \text{A} \\ 480 \text{ Z } 8190 \\ 208 \text{ Z } 3549 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{B} \\ 480 \text{ Z } 8190 \\ 168 \text{ Z } 2866\frac{1}{2} \end{array}$
$\begin{array}{r} \text{C} \\ 480 \text{ Z } 8190 \\ 80 \text{ Z } 1365 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{D} \\ 480 \text{ Z } 8190 \\ 24 \text{ Z } 409\frac{1}{3} \end{array}$

Fonte: Recorde (1648, p. 340)

Nesta figura, os homens são representados pelas letras A, B, C e D, respectivamente, começando com aquele de maior grau, até o de menor grau. Assim, o primeiro homem receberá 3549 *pounds*, o segundo homem receberá $2866\frac{1}{2}$ *pounds*, o terceiro homem receberá 1365 *pounds*, e o quarto homem receberá $409\frac{1}{2}$ *pounds*. Embora Recorde termine o problema com esses valores, vale ressaltar que as frações $\frac{1}{2}$ podem ser reduzidas em *shillings*, uma vez que o *shilling* é uma partição do *pound*., em que 1 *pound* equivale a 20 *shillings*. Isto é, o segundo homem receberia 2866 *pounds* e 10 *shillings* e, da mesma forma, o quarto homem receberia 409 *pounds* e 10 *shillings*.

Em conclusão, como podemos ver, este problema envolve uma situação em que é necessário distribuir um valor entre quatro pessoas, mas de forma em que cada um recebe uma parcela diferente do total. Neste exemplo, a ideia de fração já está presente na partição de uma quantidade, que é o valor total da recompensa. Portanto, também podemos inferir que Recorde está operando com quantidades, no caso, uma quantidade de dinheiro, que é expressa pelas frações. Essa quantificação das grandezas exige a representação de uma quantidade por números.

4.3.4 Algumas conclusões em relação aos problemas apresentados

A partir da exposição do conteúdo de *The Ground of Artes*, podemos ver que Recorde não está simplesmente operando com os números. Estes números expressam quantidades. Já podemos ver isso na seção de Numeração, em que o *scholar* pergunta quantos lugares (em

relação a unidade, dezena, centena etc.) existem e o mestre responde: “Não há um número certo deles, mas às vezes são mais, às vezes menos, de acordo com a soma que se expressa” (Recorde, 1648, p. 12, tradução nossa¹²⁹). Isto é, ele afirma que o número expressa uma soma, em outras palavras, uma quantidade.

De forma análoga, as frações estão expressando quantidades que foram estabelecidas em cada situação apresentada, por exemplo: a quantidade de terra, de vinho, de dinheiro a ser distribuído etc. É essa relação que precisa ser compreendida pelos estudantes quando eles operam com as frações, de forma que entendam que as frações são representações dessas quantidades que não podiam ser expressas por números inteiros – *whole numbers*, atualmente números inteiros positivos. Com isso, emerge a noção de quantificar, em outras palavras, de atribuir um valor a uma quantidade. Esses os valores das quantidades de terra, vinho, dinheiro etc., estão sendo expressos através de um número que foi determinado por meio de uma medição ou contagem.

A própria definição de fração dada por Recorde, como sendo a parte de um número, apresenta indícios de que ele está operando com quantidades, pois, na verdade, o que é particionado é uma determinada quantidade, como as medidas, o dinheiro, os produtos vendidos no comércio, a composição de substâncias etc.

Com essa definição, também podemos ver a relação das frações com a divisão. Embora Recorde não afirme que a fração é uma divisão, o “número quebrado”, isto é, a quantidade que estava sendo particionada em um exemplo de divisão, quando há um resto, poderá ser expressa pelas frações. Podemos ver que, para o autor, a fração não é uma operação – ele ensina a realizar operações com ela – portanto, ela não pode ser uma divisão. Nos exemplos com números inteiros que há um resto, podemos perceber que ele não é uma simples “sobra”, é uma quantidade, como um dia restante do ano (na divisão de 365 por 28). Isso acontece devido aos exemplos selecionados se referirem a grandezas contínuas, isto é, não são necessariamente números inteiros.

É com base nisso que Recorde apresenta toda a seção de frações, uma vez que retoma diversas regras que estavam na seção de números inteiros, pois estes não davam conta de todas as situações práticas. Muitas das situações necessitavam ‘quebrar os números’, isto é,

¹²⁹ “There is no certain number of them, but they are sometimes more, and sometimes fewer, according to the sum that is expressed” (Recorde, 1648, p. 12)

necessitavam de uma parte de uma determinada quantidade, que era expressa por aqueles números.

Podemos notar, também, a necessidade do cálculo da redução a um mesmo denominador das frações, de tal forma que Recorde operasse com as mesmas quantidades. Isto acontece devido a impossibilidade de se realizar operações com quantidades de diferentes denominações, por exemplo: medir um terreno com diferentes unidades de comprimento. No mesmo sentido, também seria difícil medir um acre de terra utilizando a unidade de medida pés, o que expõe a necessidade do regimento das unidades de medida visto na seção 4.3.2. Todos esses exemplos mostram como as operações lidam com quantidades, em que diferentes denominações podem ser mais adequadas para diferentes quantidades.

Os exemplos apresentados por Recorde mostram a possibilidade de visualização das quantidades a que se referem. Com isso, podemos pensar na relação entre o número e a quantidade que ele expressa, pois o foco dos exemplos está em situações do contexto de Recorde que envolvem quantidades relacionadas a diferentes grandezas. Isso vai de encontro ao exposto por Silva (2005, p. 264-265), quando ela afirma que:

A concepção de medida é necessária no ensino porque ajuda os alunos a perceber a necessidade dos números fracionários, a lhes dar significado e a construir um novo campo de conhecimentos. Mas, isto só acontecerá se eles puderem escolher unidades de medidas não padronizadas e a perceber a necessidade de sua subdivisão para poder associar um número à grandeza que está sendo medida. Em medidas de comprimento isto pode ser facilmente obtido a partir de tiras de papel consideradas como unidade.

Nesse sentido, almejamos que o texto de Recorde possa ser utilizado como um material para promover uma discussão sobre essa relação entre número e quantidade na formação de professores de matemática. Destacamos que não defendemos o ensino das definições de Recorde para fração na educação básica, pois ela é diferente daquela presente na matemática atual, isto é, não podemos ensinar para o aluno do ensino fundamental, que está aprendendo frações, que elas são “números quebrados”. Contudo, vislumbramos uma futura utilização dos exemplos e as definições de Recorde para debater com os professores sobre o significado de número e a sua relação com as quantidades.

A necessidade dessa discussão é destacada por Wagner e Davis (2010), quando afirmam que frequentemente não há uma relação entre o sentido de número e de quantidade. Para contornar essa situação, eles afirmam que essa relação pode ser tratada a partir de questões relacionadas a aspectos culturais e práticos para, então, desenvolver os significados de número e quantidades com os alunos.

De forma análoga, essa pesquisa aponta para uma discussão a respeito da relação entre número e quantidade, que foi apresentada a partir das evidências que estão no próprio documento analisado, o tratado *The Ground of Artes*. Dessa forma, o estudo de questões epistemológicas do tratado, pensando em uma futura construção de interface entre história e educação matemática, poderá contribuir para a formação do professor de matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme foi discutido na justificativa desta tese, nossa pesquisa tinha como princípio levantar questões epistemológicas pensando em uma futura construção de interfaces entre história e educação matemática. Assim, partindo das razões para construir uma interface, buscamos aproximar o educador matemático, futuro leitor deste texto, de um estudo histórico com base em tendências historiográficas atualizadas, ao produzir um material acessível em língua portuguesa a respeito de Robert Recorde, sua obra e as questões de ensino que a permeiam. Com isso, esperamos contribuir para o campo da educação matemática, ao constatar que grande parte do material existente que está disponível para o educador estar baseado em historiografias tradicionais.

Ressaltamos que esta pesquisa se difere daquelas que possuem uma base historiográfica tradicional, pois esse tipo de estudo partiria da matemática atual para buscar aquilo que permaneceu e é conhecido por nós, por exemplo, o sinal de igualdade. Isto acontece devido às historiográficas tradicionais partirem de uma visão presentista e linear para tratar da história da matemática.

Assim, o interesse pela obra *The Ground of Artes* veio da preocupação de entendermos os processos de construção da matemática atual, que ocasionou uma busca por materiais produzidos no Renascimento, uma vez que a ciência atual começou a surgir neste período. Com isso, iniciamos o percurso desta pesquisa com o estudo do próprio tratado e da literatura existente sobre ele, que foi relatada no capítulo 2. Esta revisão bibliográfica mostrou que há poucas publicações sobre Recorde e suas obras no Brasil, isto é, há uma carência de material disponível para o educador matemático brasileiro acerca deste assunto. Dessa forma, com base na pesquisa histórica realizada e na leitura do próprio tratado, emergiu nossa pergunta diretriz: **como a abordagem prática apresentada na obra *The Ground of Artes* pode fomentar uma reflexão a respeito da relação entre número e quantidade nas operações com frações?**

Para responder a esse questionamento, no capítulo 3, focamos no objetivo específico de discutir o contexto do ensino das matemáticas no Renascimento, o que foi alcançado a partir de um debate sobre o cenário inglês de elaboração do tratado *The Ground of Artes*, ao descrever a produção de conhecimentos matemáticos do período em que Recorde elaborou suas obras. Como vimos, o autor teve uma formação com base nas matemáticas teóricas vistas na universidade, mas escreveu seus tratados baseado nas matemáticas práticas, com base no seu próprio contexto familiar e de atuação profissional. Assim, percebemos a necessidade de

discorrer a esse respeito, abordando brevemente alguns tratados do período que versassem acerca do ensino de frações, atingindo o objetivo específico de determinar a episteme referente ao ensino de frações no século XVI inglês.

Posteriormente, no capítulo 4, focamos em *The Ground of Artes* e na proposta de ensino de Recorde para as matemáticas, a fim de alcançar o objetivo específico de interpretar o tratado, com foco na parte de frações. Para isso, nesta seção, buscamos apresentar as obras do autor, para mostrar a conexão entre elas para, então, descrever o tratado de aritmética. Com base nessa descrição, destacamos alguns exemplos apresentados pelo autor para atingir o objetivo de discutir a abordagem dada por Recorde para o ensino de frações.

Assim, com as discussões apresentadas nestes capítulos, pudemos responder à pergunta diretriz, mostrando que a abordagem prática de Recorde faz com que possamos visualizar que as operações com frações são realizadas a partir de quantidades de insumos, compostos, moedas etc. Isto é, os exemplos explorados indicaram que Recorde opera com as quantidades, que são expressas pelos números. Essa relação emergiu dos exemplos apresentados pelo autor, que se baseiam em questões práticas do contexto inglês renascentista. Assim, pudemos alcançar o objetivo principal desta tese que era **compreender a relação entre número e quantidade na realização de operações com frações que pode ser estabelecida a partir da obra *The Ground of Artes*.**

Para tanto, pudemos perceber que o documento que analisamos leva a esta reflexão, cuja problemática foi despertada pelo seu estudo histórico. Com isso, podemos começar a pensar a na construção de uma interface entre história e ensino de matemática, que não foi realizada nesta tese.

Dentre o que foi debatido nesta tese, vale destacar que, no contexto de Recorde, que vem de uma família de comerciantes, era necessário que os cálculos fossem cada vez mais precisos, para que não houvesse desperdício ou prejuízo financeiro. Por isso, as frações eram necessárias principalmente para os comerciantes, os reis, administradores e outras pessoas que estivessem envolvidas em atividades práticas. Por outro lado, esse conhecimento não era relevante para os estudiosos das universidades, que não precisavam realizar operações práticas.

Com isso, vemos o objetivo de escrita desse tratado por Recorde. O autor afirma em seu prefácio que seu texto é para ensinar as pessoas, inclusive aqueles que não possuem tutores. Contudo, livros não eram tão acessíveis para todos no período, por ser de custo elevado. A real intenção de Recorde era registrar o conhecimento, para valorizar as matemáticas práticas e em

uma reforma curricular universitária que não tivesse base somente nos aspectos teóricos das matemáticas.

Podemos ver pelos autores citados por Recorde, que ele tinha como público-alvo o âmbito universitário: ele menciona Aristóteles e Cícero em seu prefácio, que eram autores estudados no currículo universitário e citá-los seria importante para mostrar a relevância de um livro, partindo da ciência do período. Além disso, algumas informações foram omitidas de *The Ground of Artes*, tais como explicações mais aprofundadas, pois Recorde parte do princípio de que o leitor já conhece aquele conteúdo. Isso concorda com nossa afirmação de que esse livro não foi escrito propriamente para ensinar uma pessoa comum, mas para registrar um saber.

Esse tipo de discussão fica mais evidente nas publicações de Petrus Ramus. De acordo com Johnson e Larkey (1935), Ramus escreveu uma série de livros para as áreas do *Trivium* e do *Quadrivium*, em que objetivava revisar o currículo universitário, partindo de uma crítica aos escritos de Aristóteles. Tal como Recorde, Ramus também defendia uma abordagem mais prática em detrimento da teórica para o ensino das matemáticas.

É interessante que é somente em *The Whetstone of Witte* que Recorde apresenta definições mais rebuscadas, como a de número. De fato, em sua proposta de ensino, ele afirma que as razões (justificativas) só devem ser ensinadas posteriormente, pois apenas a base da aritmética deveria ser ensinada de início para os aprendizes, em que esta base parte de questões do contexto inglês renascentista, o que é feito em *The Ground of Artes*. Esta é uma das questões epistemológicas que emergem da leitura das obras, que pretendemos debater em um trabalho futuro.

Nesse sentido, para a produção desta tese, não foi possível realizar a leitura completa de todas as obras de Recorde, o que pode ter limitado algumas das análises. Além disso, a dificuldade de acesso às versões mais antigas da obra e o estado de conservação de muitas páginas das versões disponíveis também se configurou como um impasse para a realização de nossa pesquisa, em que utilizamos uma versão posterior à morte de Recorde para conseguir executá-la.

Ademais, algumas questões que surgiram durante a realização de nossa pesquisa não puderam ser abordadas e configuram-se como uma das nossas possíveis perspectivas futuras. Uma delas é a possibilidade de existência de uma relação entre Robert Recorde e Petrus Ramus, uma vez que ambos estavam relacionados às discussões a respeito da mudança curricular para o ensino das matemáticas e possuíam uma relação com John Dee. Contudo, uma nova pesquisa

precisaria ser realizada para buscar as correspondências entre essas pessoas, de modo a investigar se existiria indícios de algum vínculo entre eles.

Outro questionamento que surgiu está relacionado ao fato de Recorde não utilizar o sinal de igualdade, que ele mesmo estabeleceu no seu último livro. Embora *The Ground of Artes* (1543) seja anterior à *The Whetstone of Witte* (1557) – onde ele introduz este sinal – há uma edição do primeiro livro que foi publicada em 1558. Entretanto, mesmo assim, ele não apresenta este sinal de igualdade para realizar os cálculos, como fez no livro da segunda parte da aritmética. Isso nos faz questionar o modo e as situações nas quais esse sinal foi inserido, o que necessitaria um estudo mais detalhado de *The Whetstone of Witte*.

Em conclusão, nesta tese, embora não tenhamos construído uma interface entre história e educação matemática, a partir do levantamento de questões epistemológicas, fomos levados a refletir se a parte dedicada ao ensino de frações, presente em *The Ground of Artes*, pode ser potencialmente didática para debater a relação entre número e quantidade, de forma a possibilitar futuramente uma discussão na formação de professores. Com isso, promover uma ação que possa abordar este tema diretamente com esses profissionais também é um próximo passo desta pesquisa, de formar a possibilitar a construção de uma interface.

REFERÊNCIAS

ALFONSO-GOLDFARB, A. M. Centenário Simão Mathias: documentos, métodos e identidade da história da ciência. **Circumscribere**, s.l., v. 4, p. 5-9, maio 2008. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/circumhc/article/view/679>. Acesso em: 30 set. 2023.

AN INTRODUCTION. **An introduction for to lerne to reckon with the pen or with the counters**.... London: Ihon Herford, 1546. Disponível em: <https://quod.lib.umich.edu/e/eebo2/A04061.0001.001?rgn=subject;view=toc;q1=Arithmetic>. Acesso em: 22 jul. 2021.

ANGLIN, W.S.; LAMBEK, J. **The Heritage of Thales**. New York: Springer, 1995. (Undergraduate texts in mathematics. Readings in mathematics). Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-0803-7>. Acesso em: 03 jul. 2023.

ARCHIBALD, R. C. History of Mathematics Before the Seventeenth Century. **The American Mathematical Monthly**, [S.L.], v. 56, n. 1, p. 7-34, jan. 1949. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.2307/2304569>. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2304569>. Acesso em: 06 set. 2019.

ASH, E. H. **Power, knowledge, and expertise in Elizabethan England**. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2004. 280 p.

BAKER, H. **The Welspring of Sciences**. London: Henry Denham, 1564.

BARGUIL, P. M. Algarismo, número, numeral e dígito: Esclarecendo o significado desses termos. In: SOUSA, A. C. G. de; SANTANA, L. E. de L.; BARRETO, M. C. (org.). **As múltiplas linguagens da educação matemática na formação e nas práticas docentes**. Fortaleza: EdUECE, 2018, p. 311-332.

BELTRAN, M. H. R. A imprensa, a pólvora e a bússola. In: BELTRAN, M. H. R. (org.). **A imprensa, a pólvora e a bússola: ciência e técnica nas origens da ciência moderna**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 9-28. (Série Temas em História da Ciência).

BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. dos S. P. **História da Ciência para formação de professores**. São Paulo: Livraria da Física, 2014. 128 p. (Série temas em história da ciência).

BENTO, R. T. F. **Um estudo das geometrias prática e teórica presentes em The Pathewaie to Knowledge de Robert Recorde: possíveis diálogos**. 2018. 144 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática Puc-Sp, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/21657> Acesso em: 12 jul. 2023.

BIDWELL, J. K. THE TEACHING OF ARITHMETIC IN ENGLAND from 1550 until 1800 as Influenced by Social Change. **The Mathematics Teacher**, S.L., v. 62, n. 6, p. 484-490, out. 1969. Published by: National Council of Teachers of Mathematics. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/27958197>. Acesso em: 12 jul. 2023

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974. 489 p. Tradução de: Elza F. Gomide.

BRINSLEY, J. **Ludus literarius**: or, the grammar schoole. London: Humphrey Lownes, 1612. Disponível em:

<https://quod.lib.umich.edu/e/eebo/A16865.0001.001/1:9.3?rgn=div2;view=toc>. Acesso em: 25 jun. 2023.

BRITANNICA, The Editors of Encyclopaedia (editores). **Aelius Donatus**. Encyclopedia Britannica, Dez. 2011, <https://www.britannica.com/biography/Aelius-Donatus>. Acesso em: 28 fev. 2023.

BROADBENT, T. A. A. (Ed.). The Ground of Artes. **The Mathematical Gazette**, Greenwich, v. 31, n. 295, p.129, jul. 1947. Disponível em:
<<https://www.jstor.org/stable/3610499>>. Acesso em: 06 set. 2019.

BUTMAN, M. How to make Mathematics interesting. **The Journal of Education**, s.l., v. 50, n. 20, p. 334-335, nov. 1899. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/44051328>. Acesso em: 06 set. 2019.

CAJORI, F. Robert Recorde. **The Mathematics Teacher**, S.L., v. 15, n. 5, p. 294-302, 5 maio 1922. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/27950425>. Acesso em: 06 set. 2019.

CASSELS, J. W. S. Is this a Recorde? **The Mathematical Gazette**, [S.L.], v. 60, n. 411, p. 59-61, mar. 1976. JSTOR. <http://dx.doi.org/10.2307/3615647>. Disponível em:
<https://www.jstor.org/stable/3615647>. Acesso em: 06 set. 2019.

CHARLTON, K. **Education in Renaissance England**. London: Routledge And K. Paul, 1968. 317 p. (Studies in Social History).

CORMACK, L. B. Introduction: practical mathematics, practical mathematicians, and the case for transforming the study of nature. In: CORMACK, L. B.; WALTON, S. A.; SCHUSTER, J. A. (ed.). **Mathematical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe**. Cham: Springer, 2017a. Cap. 1. p. 1-8. Vol. 45

CORMACK, L. B. Mathematics for Sale: mathematical practitioners, instrument makers, and communities of scholars in sixteenth-century London. In: CORMACK, L. B.; WALTON, S. A.; SCHUSTER, J. A. (ed.). **Mathematical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe**. Cham: Springer, 2017b. Cap. 4. p. 69-85. Vol. 45.

D'AMBRÓSIO, U. **Paulo Freire e a Educação Matemática**. Entrevista a Paulo Freire, concedida a Ubiratan D'Ambrósio e Maria do Carmo S. Domite. Sevilha: ICME-8, 1996. Disponível em: <<https://acervo.paulofreire.org/handle/7891/1880>>. Acesso em: 08 jul. 2023.

DE MORGAN, A. **Arithmetical Books**: from the invention of printing to the present time. London: Robson, Levey and Franklyn, 1847.

DEAR, P. **Revolutionizing the Sciences**: European knowledge and its ambitions, 1500-1700. Houndmills, Basingstoke, Hampshire: Palgrave, 2001.

DEE, J. *Mathematicall Praeface*. In: BILLINGSLEY, H. **The elements of geometrie of the most auncient Philosopher Euclide of Megara**. London: John Day, 1570.

DEMATTE, A.; FURINGHETTI, F. Today's students engaging with Abacus problems. **ZDM – Mathematics Education**, [S.L.], v. 54, n. 7, p. 1521-1536, 22 jul. 2022. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-022-01397-9>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-022-01397-9>. Acesso em: 17 jun. 2023.

DENNISS, J. Arithmetical textbooks 1478 to 1886: a progression? **BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics**, [S.L.], v. 21, n. 1, p. 26-33, maio 2006. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/17498430600566550>.

DENNISS, J.; SMITH, F. Robert Recorde and his remarkable Arithmetic. In: ROBERTS, G.; SMITH, F. **Robert Recorde: The Life and Times of a Tudor Mathematician**. Cardiff: University of Wales Press, 2012. p. 25-38.

DIGGES, T. **An Arithmeticall Militare Treatise, named STRATIOTICOS**. London: Henry Bynneman, 1579.

DRAKE, S. Early Science and the Printed Book: the spread of science beyond the universities. **Renaissance And Reformation / Renaissance Et Réforme**, S.L., v. 6, n. 3, p. 43-52, 1970. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/43465934>. Acesso em: 06 jul. 2023.

EASTON, J. B. On the date of Robert Recorde's Birth. **Isis**, Chicago, p. 121-121, abr. 1966. Disponível em: <https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/350089?journalCode=isis>. Acesso em: 19 nov. 2019.

EASTON, J. B. The Early Editions of Robert Recorde's Ground of Artes. **Isis**, Chicago, v. 58, n. 4, p.515-532, 1967. Disponível em: <www.jstor.org/stable/228426>. Acesso em: 11 nov. 2019.

EASTON, J. B. Robert Recorde. In: GILLISPIE, C. C.. **Dictionary of Scientific Biography**. New York: Scribner, 1981. p. 338-340. Vols. 11 & 12. Disponível em: <https://archive.org/details/dictionaryofscie11gill/page/n5/mode/2up>. Acesso em: 06 fev. 2023.

EBERT, E. R. A Few Observations on Robert Recorde and His "Ground of Arts". **The Mathematics Teacher**, S.L., v. 30, n. 3, p. 110-121, mar. 1937. Published by: National Council of Teachers of Mathematics. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/27952024>. Acesso em: 12 jul. 2023.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011. 848 p. Tradução de: Hygino H. Domingues.

FAUVEL, J. Platonic rhetoric in distance learning: how Robert Record taught the home learner. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, v. 9, n. 1, p.2-6, 1989. Disponível em: < <http://www.jstor.org/stable/40247938>>. Acesso em: 25 abr. 2019.

FEINGOLG, M. **The mathematicians' apprenticeship: Science, universities and society in England, 1560-1640.** Cambridge: Cambridge University Press, 1984. 248 p.

FERRAZ, M. H. M.; AFONSO-GOLDFARB, A. M.; WAISSE, S. Reflexões sobre a constituição de um corpo documental para a história da ciência: um estudo de caso do Brasil Colônia e Brasil Reino. **Acervo: Revista do Arquivo Nacional**, Rio de Janeiro, v. 26, n. 1, p. 42-53, jan/jun. 2013. Disponível em: <https://revista.an.gov.br/index.php/revistaacervo/article/view/489/488>. Acesso em: 30 set. 2023.

GODDU, A. Recorde, Robert. In: HOCKEY, T. *et al.* (ed.). **The Biographical Encyclopedia of Astronomers.** New York: Springer, 2007. p. 958-959. Disponível em: <https://link.springer.com/referencework/10.1007/978-1-4419-9917-7>. Acesso em: 31 maio 2023.

GUNTHER, R. T. **Early science in Oxford.** London: Dawsons Of Pall Mall, 1922. 407 p. (V. 1).

HOOLE, C. **A new discovery of the old art of teaching school.** Syracuse: C. W. Bardeen, 1912. 360 p. Disponível em: <https://archive.org/details/anewdiscoveryol00markgoog/page/n401/mode/2up>. Acesso em: 27 jun. 2023.

HOWSON, G. **A History of Mathematics Education in England.** Cambridge, London, New York: Cambridge University Press, 1982.

HOWSON, G. Research in mathematics education. **The Mathematical Gazette**, [S.L.], v. 72, n. 462, p. 265-271, dez. 1988. Cambridge University Press (CUP). <http://dx.doi.org/10.2307/3619938>. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/3619938>. Acesso em: 06 set. 2019.

JENSEN, K. The humanist reform of Latin and Latin teaching. In: KRAYE, Jill (ed.). **The Cambridge Companion to Renaissance Humanism.** London: Cambridge University Press, 1996. p. 63-81. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/books/cambridge-companion-to-renaissance-humanism/EB50AF2100655BF13E4404E73E9229B4>. Acesso em: 05 jun. 2023.

JOHNSON, F. R.; LARKEY, S. V. Robert Recorde's Mathematical Teaching and the Anti-Aristotelian Movement. **The Huntington Library Bulletin**, [S.L.], n. 7, p. 59-87, abr. 1935. University of California Press. <http://dx.doi.org/10.2307/3818176>. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/3818176>. Acesso em: 19 mar. 2020.

JOHNSTON, Alexander Keith. **The half-crown atlas of British history.** Edinburgh & London: W. & A.K. Johnston, 1871. Disponível em: <https://archive.org/details/halfcrownatlasof00john/page/26/mode/2up>. Acesso em: 11 abr. 2024.

LAWSON, J.; SILVER, H. **A social history of education in England.** Londres: Methuen & Co Ltd, 1973. 502 p.

LÉVI, P. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. São Paulo: Editora 34, 1993. Tradução de: Carlos Irineu da Costa. Disponível em: <https://lucianabicalho.files.wordpress.com/2014/02/as-tecnologias-da-inteligencia.pdf>. Acesso em: 06 jul. 2023.

LLOYD, H. A. Commonwealth and Empire: Robert Recorde in Tudor England. In: ROBERTS, G.; SMITH, F. **Robert Recorde**: The Life and Times of a Tudor Mathematician. Cardiff: University of Wales Press, 2012. p. 145-164.

MEYER, G. J. **The Tudors**: the complete story of england's most notorious dynasty. New York: Delacorte Press, 2010.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. História na Educação Matemática. São Paulo: Autêntica, 2007.

MINIO-PALUELLO, L. Boethius, Anicius Manlius Severinus. In: GILLISPIE, C. C. (ed.). **Dictionary of Scientific Biography**. New York: Charles Scribner's Sons, 1970. p. 228-236. Vol. II. Disponível em: <https://archive.org/details/dictionaryofscie02gill/page/n111/mode/2up?view=theater>. Acesso em: 31 out. 2023.

MOORMAN, J. R. H. **A History of the Church in England**. 3. ed. Harrisburg: Morehouse Publishing, 1980. 485 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=6PwyEAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR5&dq=history+of+england+xvi+century&ots=XP8w-6wRCf&sig=-xjRLpDxkOS18NTR9HJhG0cqsk0#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 05 jul. 2023.

MOURA, R. A. de. **Um estudo sobre a Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi**: álgebra e análise na Itália setecentista. 2017. 219 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática PUC-SP, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/20005>. Acesso em: 12 jul. 2023.

OLIVEIRA, M. J. V. de; CARVALHO, M. Números: o que sabem os professores. In: SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguay (Ed.), Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 7., 2013, Montevideo. Anais [...] Montevideo, Uruguai: SEMUR, 2013, p. 5395-5403. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/18559/>. Acesso em: 02 jan. 2024.

OLIVEIRA, Z. V.; SILVA, I. C. da; GODOY, K. V. As Classificações das Matemáticas de John Dee e Adriaan Van Roomen: Um Estudo Sobre a Organização dos Conhecimentos Matemáticos nos Séculos XVI e XVII. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S. l.], v. 21, n. 42, p. 52-80, 2021. DOI: 10.47976/RBHM2021v21n4252-80. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/357>. Acesso em: 5 jan. 2023.

PELLING, M. Recorde and *The Vrinal of Physick*: context, uroscopy and the practice of medicine. In: ROBERTS, G.; SMITH, F. **Robert Recorde**: The Life and Times of a Tudor Mathematician. Cardiff: University Of Wales Press, 2012. p. 39-56.

[Photographs: Robert Recorde]. **The American Mathematical Monthly**, S.L., v. 28, n. 8/9, ago/set. 1921. Published by: Taylor & Francis, Ltd. on behalf of the Mathematical

Association of America. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2971775>. Acesso em: 05 set. 2019.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 5, n. 14, p. 109-122, 25 ago. 2018. <http://dx.doi.org/10.30938/bocehm.v5i14.225>. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/225/174>. Acesso em: 29 maio 2023.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, Belém, v. 13, n. 25, p. 342-372, jan/abr. 2019. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/2164>. Acesso em: 14 mar. 2023.

PRIETO, A. B. S. APRENDER A CONTAR SEGÚN EL DE COMPUTO DE RABANO MAURO. **Educación XX1**, [S.L.], v. 16, n. 2, p. 39-62, 5 set. 2013. UNED - Universidad Nacional de Educacion a Distancia. <http://dx.doi.org/10.5944/educxx1.2.16.10331>. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/706/70626451003.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2023

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 276 p.

RADFORD, L.; BERNARD, A.; FRIED, M. N.; FURINGHETTI, F.; SINCLAIR, N. Reflections on history of mathematics: History of mathematics and mathematics education. In: M. N. FRIED, M.N.; DREYFUS, T. (Eds.). **Mathematics & mathematics education: Searching for common ground** (Advances in mathematics education). Springer: Dordrecht, 2014, p. 89–109. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_7

RAMPLING, J. M. John Dee and the sciences: early modern networks of knowledge. **Studies in History and Philosophy of Science**, [S.L.], v. 43, n. 3, p. 432-436, set. 2012. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsa.2011.12.001>. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3778877/>. Acesso em: 19 maio 2021.

RANKIN, W. W. The cultural value of Mathematics. **The Mathematics Teacher**, s.l., v. 22, n. 4, p. 215-223, abr. 1929. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/27951125>. Acesso em: 06 set. 2019.

RECORDE, R. **Records Arithmetick or, The Ground of Arts**. London: Miles Flesher, 1648.

RECORDE, R. **The Castle of Knowledge**. London: Reginalde Wolfe, 1556.

RECORDE, R. **The Ground of Artes**. London: Reynold Wolff, 1552.

RECORDE, R. **The Ground of Artes**. London: Reynold Wolff, 1558.

RECORDE, R. **The Pathewaie to Knowledge**. London: Ihon Harrison, 1574.

RECORDE, R. **The Whetstone of Witte**. London: Jhon Kynngston, 1557.

REYNOLDS, B. E. The Algorists vs. the Abacists: an ancient controversy on the use of calculators. **The College Mathematics Journal**, [S.L.], v. 24, n. 3, p. 218-223, maio 1993. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/07468342.1993.11973531>. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2686479>. Acesso em: 06 set. 2019.

RICHESON, A. W. The first arithmetic printed in English. **Isis**, Chicago, v. 37, n. 1/2, p. 47-56, maio 1947. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/226161>. Acesso em: 19 nov. 2019.

ROBERTS, G. **Robert Recorde: Tudor Scholar and Mathematician**. Cardiff: University of Wales Press, 2016. 222 p.

ROBERTS, G.; SMITH, F. Introduction. In: ROBERTS, G.; SMITH, F. **Robert Recorde: The Life and Times of a Tudor Mathematician**. Cardiff: University of Wales Press, 2012. p. 1-5.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSSI, P. **Os filósofos e as máquinas**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989. Tradução de: Federico Carotti.

SAITO, F. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, [S.l.], v. 3, n. 1, p. 3-19, ago. 2016. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emd/article/view/29002>>. Acesso em: 16 mar. 2020.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMat, 2015.

SAITO, F.; DIAS, M. da S. Interface entre História da Matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência e Educação**, v.19, no1, p. 89-111, 2013.

SÁ-SILVA, J. R.; ALMEIDA, C. D. de; GUINDANI, J. F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. *Revista Brasileira de História & Ciências Sociais*, Santa Vitória do Palmar, v. 1, n. 1, p.1-15, jul. 2009. Disponível em: <<https://periodicos.furg.br/rbhcs/article/view/10351/pdf>>. Acesso em: 23 jun. 2023.

SILVA, I. C. da. **Um estudo da incorporação de textos originais para a educação matemática: buscando critérios na articulação entre história e ensino**. 2018. 92 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

SILVA, I. C. da; SAITO, F. Algumas considerações iniciais sobre a obra *The Ground of Artes*, de Robert Recorde. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 7, n. 20, p. 312-322, 12 jul. 2020. <http://dx.doi.org/10.30938/bocehm.v7i20.2816>. Trabalho apresentado ao IV Seminário

Cearense de História da Matemática, Fortaleza, 2020. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2816/3002>. Acesso em: 16 jan. 2023.

SILVA, M. J. F. da. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 301 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática PUC/SP, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10923>. Acesso em: 13 out. 2021.

SLEIGHT, E. R. Early English Arithmetics. **National Mathematics Magazine**, [S.L.], v. 16, n. 4, p. 198, jan. 1942. JSTOR. <http://dx.doi.org/10.2307/3028270>. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/3028270>. Acesso em: 07 set. 2019.

SMITH, D. E. **History of Mathematics: special topics of elementary mathematics**. Boston: Ginn And Company, 1925. Vol. 2.

SMITH, D. E. New Information Respecting Robert Recorde. **The American Mathematical Monthly**, [S.L.], v. 28, n. 8/9, p. 296, ago. 1921. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.2307/2971777>. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2971777>. Acesso em: 06 set. 2019.

SMITH, D. E. **Rara Arithmetica**. Boston And London: Ginn And Company Publishers, 1908. 2 v.

SMITH, D. E.; CLARKE, F. M. **New Light on Robert Recorde**. Isis, Chicago, v. 8, n. 1, p. 50-70, fev. 1926. Published By: The University of Chicago Press. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/223674>. Acesso em: 16 jan. 2023.

STRAET, J. van D.; COLLAERT I, J. **New Inventions of Modern Times [Nova Reperta]: the invention of book printing, plate 4**. Antwerp: Philips Galle, c.1600. Disponível em: <https://www.metmuseum.org/art/collection/search/659683>. Acesso em: 03 jul. 2023.

SWETZ, F. To Know and to Teach: mathematical pedagogy from a historical context. **Educational Studies in Mathematics**, S.L., v. 29, n. 1, p. 73-88, jul. 1995. Published by: Springer. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/3482832>. Acesso em: 06 set. 2019.

WAGNER, D.; DAVIS, B. Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. **Educational Studies in Mathematics**, [S.L.], v. 74, n. 1, p. 39-51, 19 jan. 2010. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9226-9>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-009-9226-9>. Acesso em: 02 jan. 2024.

WATSON, F. Charles Hoole and Elementary Education: a petty school. 1660. **The School Review**, S.L., v. 9, n. 8, p. 526-533, out. 1901. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/1075528>. Acesso em: 27 jun. 2023.

WILLIAMS, J. Mathematics and the alloying of coinage 1202–1700: Part II. **Annals Of Science**, [S.L.], v. 52, n. 3, p. 235-263, maio 1995. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/00033799500200221>. Disponível em:

<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00033799500200221?journalCode=tasc20>.
Acesso em: 20 jun. 2023.

WILLIAMS, J. The lives and works of Robert Recorde. In: ROBERTS, G.; SMITH, F. **Robert Recorde: The Life and Times of a Tudor Mathematician**. Cardiff: University Of Wales Press, 2012. p. 7-24.

WILLIAMS, T. D. The Dialogue of Early Modern Mathematical Subjectivity. **Configurations**, [S.L.], v. 21, n. 1, p. 53-84, winter 2013. Project MUSE.
<http://dx.doi.org/10.1353/con.2013.0005>. Disponível em: <https://muse.jhu.edu/article/519920>.
Acesso em: 12 jul. 2023.

WILTSHIRE, B. History of Mathematics in the Classroom. **The Mathematics Teacher**, s.l., v. 23, n. 8, p. 504-508, dez. 1930. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/27951290>.
Acesso em: 06 set. 2019

WULF, M. de. **An Introduction to Scholastic Philosophy**: medieval and modern: scholasticism old and new. S.L: Wipf And Stock Publishers, 2003. 344 p. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=iVj7DwAAQBAJ&hl=pt-BR&source=gbs_navlinks_s.
Acesso em: 02 fev. 2023

ANEXO A – OS NÚMEROS COM AS MÃOS, SEGUNDO ROBERT RECORDE



Fonte: Recorde (1552, s.p.).

ANEXO B – HORÁRIO DE UMA GRAMMAR SCHOOL DO PERÍODO ELIZABETANO, 1598

Class III 7–11 a.m.	Lecture on the letters of Ascham, or Sturm's Cicero's <i>Letters</i> , or Terence Paraphrase of a sentence	Lecture on Ascham, etc., as on Monday <i>Vulgaria</i> in prose	Lectures on Palen- genius, or the Psalms of Hess Paraphrase of a sentence	Lecture on Palen- genius or the Psalms of Hess	<i>Vulgaria</i> in Prose, and repetition of the week's lectures	Examination in lecture of previous afternoon
1–5 p.m.	Latin syntax or Greek grammar or Figures of Sysenbrote Home lessons and exercises given out and prepared	Latin syntax, etc., as on Monday	Latin syntax, etc., as on Monday	Half-holiday	Repetition con- tinued Lecture on Eras- mus' <i>Apophthegms</i>	Catechism and New Testament
Class II 7–11 a.m.	Lecture on <i>Colloquies</i> of Erasmus or on <i>Dia- logues</i> of Corderius	Lecture, etc., same as on Monday	Lecture on the Cato senior, or Cato junior	Lecture, etc., same as on Wednesday	Repetition of the week's lectures	Examination in lecture of previous afternoon
1–5 p.m.	Translations from English into Latin Home lessons and exercises given out and prepared	Translations as on Monday	Translations as on Monday	Half-holiday	Repetition con- tinued Lecture on <i>Aesop's Fables</i>	Writing out the Catechism in English Arithmetic
Class I 7–11 a.m.	The Royal Grammar	The Royal Gram- mar	The Royal Gram- mar	The Royal Gram- mar	Repetition of the work of the week	Examination in lecture of previous afternoon
1–5 p.m.	The English Testa- ment, or the Psalms of David, in English	As on Monday	As on Monday	Half-holiday	Repetition con- tinued Lecture on <i>Aesop's Fables</i>	Writing out the Catechism in English Arithmetic

Fonte: Howson (1982, p. 10-11).

ANEXO C – CONTEÚDO DE *THE GROUND OF ARTES* (1648)

Here followeth a Table of the whole Contents of this Book.	
The Contents of the first Dialogue.	
The declaration of the profit of Arithmeticke.	Page 1
Numeration, with an easie and large Table.	p.10
Addition.	p.27
Substraction.	p.46
Multiplication.	p.69
Division.	p.87
Reduction, with divers declarations of Coynes, Weights and Measures of sundry formes newly added, with a new Table, containing most part of the gold Coyne throughout Christendome, with the true weight and valuation of them now in currant English-money.	p.120
Progression both Arithmetically and Geometrically, with divers sundry questions touching the same.	p.141
The Golden Rule, or Rule of Proportion called the Rule of Three direct.	p.174
The Backer Rule of three, with divers questions thereunto belonging, newly added and augmented.	p.180
The double Rule of Proportion direct.	p.194
The Rule of Proportion composed of five numbers.	p.194
The Backer Rule, or second part of the Rule of Proportion, composed.	p.198
The Rule of Fellowship without time, limited.	p.202
The Rule of Fellowship with time limited.	p.210
The second Dialogue containeth	
The first five kinds of Arithmetick wrought by Counters.	p.217
The common kinds of casting by Counters, after the Merchants fashion, and Auditors also.	p.257
The Contents of the second part touching Fractions. Page 261.	
Numeration in Fractions.	p.264
The order of working Fractions.	p.270
Reduction of divers Fractions into one denomination in three varieties.	p.272
Reduction of Fractions of fractions.	p.270
Reduction of improper Fractions.	p.280
Reduction of Fractions to the smallest denomination, with easie Rules how to convert them thereunto.	p.285
Reduction of a Fraction, and how it may be turned into any other Fraction, or into what denomination you list.	p.290
Addition of Fractions.	p.292
Substraction of Fractions.	p.295
Multiplication of Fractions.	p.298

Duplation of Fractions.	p.304
Division of Fractions.	p.305
Mediation of Fractions.	p.311
The Golden Rule direct in Fractions.	p.311
The Backer, or reverse Rule in Fractions.	p.315
The Statute of Assise of Bread and Ale recognized, and applied to this time, with new Tables thereunto annexed.	p.318
The Statute of measuring of ground, with a Table thereof, faithfully calculated and corrected	p.330
The Rule of Fellowship, or society, with the reasons of the Rules, and proofs of their work.	p.336
To finde three numbers in any proportion.	p.349
The Rule of Alligation, with divers questions, and the proofs of their works, with many varieties of such solutions.	p.353
The Rule of Falshood, of false Position, with divers questions, and their proofs.	p.370
The Contents of the third part.	
The 1 Chapter entreateth of Rules of Brevity and practise, after a briefer method then hitherto hath been published in the English tongue.	p.411
The 2 Chapter entreateth of brief Reduction of divers measures, as Els, Tards, Braces, &c. by rules of practise.	p.447
The 3 Chapter entreateth of the Rule of Three in broken numbers, after the trade of Merchants, something differing from M. Records order, which is comprehended in three Rules.	p.451
The 4 Chapter entreateth of losse and gain in the trade of Merchandise.	p.468
The 5 Chapter entreateth of losse and gain in the trade of Merchandise upon time, &c. with necessary questions therein wrought by double rule of Three, or the rule of proportion composed of 5 numbers.	p.476
The 6 Chapter entreateth of Rules payment, and one of the necessariest rules that appertaineth to buying and selling &c.	p.476
The 7 Chapter entreateth of buying and selling in the trade of Merchandise, wherein is taken part ready mony, and divers days of payment given for the rest, and what is won and lost in the hundred pound forbearance for twelve moneths.	p.482
The 8 Chapter entreateth of Tare and allowances of Merchandise, sold by weight, and of their losses & gains therein, &c.	p.488
The 9 Chapter entreateth of lengths and breadths of Arras, and other clothes, with divers questions thereunto belonging.	p.492
The 10 Chapter entreateth of reducing of pawnes of Geanes into English yards.	p.497
The 11 Chapter entreateth of Rules of Loan and Interest, with divers questions incident thereunto.	p.498
The 12 Chapter entreateth of the making of Factors.	p.503
The 13 Chapter entreateth of rules of barter or exchange of Merchandise, wherein is taken part ware and part ready money, with their proofs, and divers other necessary questions thereunto belonging.	p.508
The 14 Chapter entreateth of exchanging of money from one place to another, with divers necessary questions incident thereunto.	p.521

The 15 Chapter entreateth of six sundry formes of practises for reduction of English, Flemish, and French money, and how each of them may easily be brought to money sterling.	p.530
The 16 Chapter containeth a brief note of the ordinary Coynes of most places of Christendom for traffick, and the manner of their exchanging from one City or Town to another, which known, the Italians call Parie: whereby they find the gain or losse upon the Exchange.	p.537
The 17 Chapter containeth also a declaration of the diversity of weights and measures of most places in Christendom for traffique, proportinated in equality one to another, as also unto our English measure and weight, whereby the ingenious practitioner may easily reduce the weight and measure of each Country into another.	p.542
The 18 Chapter entreateth of divers sports and pastimes, done by Number.	p.552
An Appendix of figurate Numbers, with the extraction of roots.	p.559
A table of board and timber measure by Robert Hartwell.	p.585
Certaine tables of interest at 10 per 100.	p.590
New tables of interest at 8 per 100.	p.603

Fonte: Silva e Saito (2020, p. 317-318).

ANEXO D – TABELA DE NUMERAÇÃO, SEGUNDO RECORDE

The right side of hand.

The names of Digits, values certain, or values.											
										The denominators of the place or value uncertain.	
										Nine.	
										Eight.	
										Seven.	
										Six.	
										Five.	
										Four.	
										Three.	
										Two.	
										One.	
										Ciph.	
										The order of places.	
<i>Unites.</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	First.
<i>Tennes.</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Second.
<i>Hundreds</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Third.
<i>Thousands.</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Fourth.
<i>X. Thousands.</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Fifth.
<i>C. of thousands,</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Six.
<i>Millions.</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Seventh.
<i>X. of Millions.</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Eighth.
<i>C. of Millions,</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Ninth.
<i>Mt. of Millions.</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Tenth.
<i>X. M. of Millions.</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Eleventh.

The left side of hand.

Fonte: Recorde (1648, p. 23).

ANEXO E – TABELA PARA MEDIÇÃO DE UM ACRE DE TERRA

334 The Golden Rule reverse

The breadth of the Acre.	The length of the Acre.			
	Perches	Perche	Feet.	Inches
10	16	0	0	0
11	14	9	0	0
12	13	5	6	0
13	12	5	0	$\frac{10}{12}$
14	11	7	0	$\frac{6}{7}$
1	10	11	0	0
16	10	0	0	0
17	9	6	9	$\frac{9}{17}$
18	8	14	8	0
19	8	6	11	$\frac{2}{19}$
20	8	0	0	0
21	7	10	2	$\frac{4}{7}$
22	7	4	6	0
23	6	15	9	$\frac{9}{23}$
24	6	11	0	0
25	6	6	7	$\frac{7}{25}$
26	6	2	7	$\frac{6}{26}$
27	5	15	3	$\frac{1}{7}$

The

in Fractions.

335

The breadth of the Acre.	The length of the Acre.			
	Perches	perches	Feet.	Inches.
28	5	11	9	$0 \frac{2}{7}$
29	5	8	6	$0 \frac{2}{29}$
30	5	5	6	0
31	5	2	7	$0 \frac{2}{31}$
32	5	0	0	0
33	4	14	0	0
34	4	11	7	$0 \frac{2}{17}$
35	4	9	5	$0 \frac{1}{7}$
36	4	7	4	0
37	4	5	4	$0 \frac{3}{17}$
38	4	3	5	$0 \frac{11}{38}$
39	4	1	8	$0 \frac{4}{13}$
40	4	0	0	0
41	3	14	10	$0 \frac{22}{41}$
42	3	13	4	$0 \frac{2}{7}$
43	3	11	10	$0 \frac{2}{11}$
44	3	10	6	0
45	3	9	2	0

Scholar.

ANEXO F – MAPA DA INGLATERRA NO PERÍODO TUDOR



Fonte: Johnston (1871, p. 12, grifo nosso).